Yin Yang - Problema de Decisão

Resolução de Problema de Decisão usando Programação em Lógica com Restrições

José Aleixo Cruz José Carlos Vieira

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Dezembro 2016

Resumo

Neste artigo é abordada a resolução de um puzzle proposto, recorrendo a *Constraints Logic Programming in Finite Domains* (CLP-FD) utilizando Prolog. É referida a descrição do problema bem como os passos tomados para obter a sua solução.

1 Introdução

O objectivo deste trabalho era implementar a resolução de um problema de decisão ou de optinização. De entre as escolhas possíveis, o grupo optou pelo puzzle "Yin Yang", que consiste num tabuleiro quadrado onde existem dois tipo de peças: pretas e brancas. As peças da mesma cor têm de estar todas conectadas, verticalmente e horizontalmente, e também não podem existir grupos de 2x2 peças somente com a mesma cor.

2 Descrição do Problema

O puzzle "Yin Yang"é jogado num tabuleiro quadrado (de **2x2** ou maior). Existem dois tipos de peças, brancas e pretas. O objectivo do jogo consiste em manter um caminho ligado entre as peças da mesma cor, ou seja, todas as peças brancas têm de estar conectadas a pelo menos uma outra peça

branca, formando um caminho navegável entre elas (aplica-se o mesmo princípio para as peças pretas). Também não podem existir peças numa área **2x2** com apenas uma cor, forçando então que numa área com quatro quadrados (**2x2**) existam sempre peças de diferentes cores.

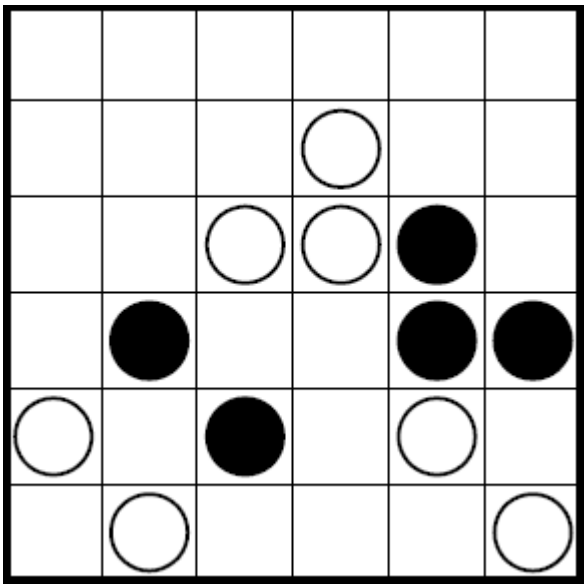

Figura 1: Tabuleiro inicial

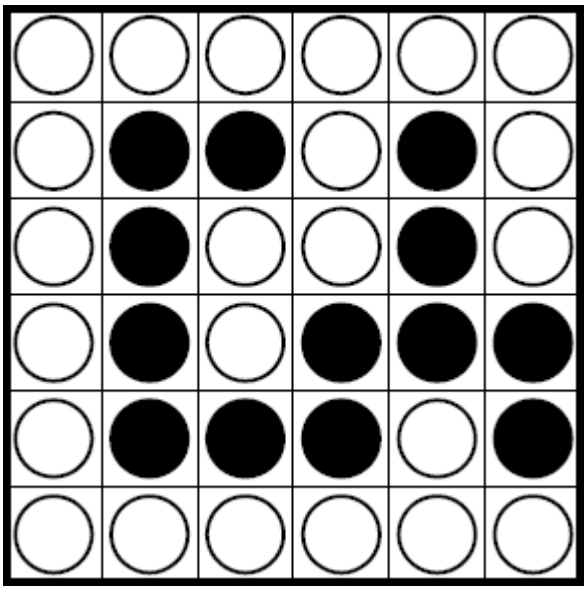

Figura 2: Tabuleiro final

3 Abordagem

O tabuleiro é representado como uma lista, onde cada elemento da lista é uma peça branca ou preta.

Considere-se este exemplo ate ao final do artigo, um tabuleiro **4x4**, onde **N** é o numero de linhas/colunas do tabuleiro (neste caso 4).

A representação em prolog para esse tabuleiro é:

```
test_board_4x4([
    A1, A2, A3, A4,
    B1, B2, B3, B4,
    C1, C2, C3, C4,
    D1, D2, D3, D4
]).
```

3.1 Variáveis de Decisão

Para resolver o problema, é criada uma lista com dimensão **N**, em que N é o número de casas do tabuleiro quadrangular. Cada elemento dessa lista é um inteiro que identificará se a peça nessa posição é branca ou preta. O domínio dessa lista é, então, um conjunto de quaisquer dois inteiros escolhidos para diferenciar a cor das peças. Como o problema é simétrico, um valor pode representar tanto a cor branca como a cor preta, sendo que o outro valor representará necessariamente a cor oposta. Na nossa abordagem usámos os valores binários **0 e 1**.

3.2 Restrições

Para este problema foi proposto encontrar-se uma solução recorrendo unicamente à aplicação de restrições e não à técnica de *geração e teste*. No entanto, após vasta pesquisa e tentativa, não conseguimos formular nenhum conjunto de restrições capazes de satisfazer **completamente o problema**. Apenas conseguimos elaborar restrições ou com âmbito maior ou com âmbito menor do que o objetivo.

3.2.1 Restrições folgadas

Há duas restrições impícitas no *puzzle*:

1. Todas as peças devem estar ligadas a pelo menos uma outra peça da mesma cor;
2. Nenhum quadrado 2x2 deve ter todas as peças da mesma cor.

Estás restrições são as únicas presentes na versão relaxada (menos abrangente) do nosso algoritmo e são aplicadas, no caso geral, da seguinte forma:

```
(
    CurrElem #= ElemRight
    #\/ CurrElem #= ElemBelow
),

    nvalue(2, [CurrElem, ElemRight, ElemBelow, ElemSE])
```

Já que o tabuleiro é percorrido da esquerda para a direita e de cima para baixo, a propagação permite-nos restringir o valor apenas da célula abaixo e à direita, evitando condições redundantes.

3.2.2 Restrições específicas

Além das restrições menos abrangentes, estabelecemos também que tanto o conjunto de peças brancas como o conjunto de peças pretas devem fomrar um **caminho de Euler**. Para tal, adicionamos a restrição de que **duas e apenas duas** peças devem ter um número ímpar de peças adjacentes, tal como nos teoremas de Euler.

```
setEulerPathConstraints(Degrees0, Degrees1):-
    %% apply Euler path to 0s
    count(1, Degrees0, #=, CountDegree1of0),
    count(3, Degrees0, #=, CountDegree3of0),

    count(0, Degrees0, #=, 0),

    CountDegree1of0 + CountDegree3of0 #= 2,

    %% apply Euler path to 1s
    count(1, Degrees1, #=, CountDegree1of1),
    count(3, Degrees1, #=, CountDegree3of1),

    count(0, Degrees1, #=, 0),

    CountDegree1of1 + CountDegree3of1 #= 2.
```

Aqui, *Degrees0* e *Degrees1* são listas cujos elementos representam os graus peças atribuídas com o valor 0 ou 1 respetivamente. Isto é, o número de peças iguais que se encontra adjacente a essa peça. Como o importante é analisar os valores em si, não importa nem a ordem nem a que peça corresponde cada elemento.

3.3 Estratégia de Pesquisa

A aplicação das restrições percorre a lista que representa as peças do tabuleiro. O primeiro elemento da lista corresponde à peça que está no canto superior esquerdo e o último elemento à peça do canto inferior direito do tabuleiro. Se o tabuleiro tiver como dimensão NxN, os primeiros N elementos representam a primeira linha, os segundos N elementos a segunda linha, etc..

4 Visualização da solução

A nossa função de visualização descreve como seria o tabuleiro "solução"quando representado pelas variáveis de domínio escolhidas para cada peça. Por exemplo, um *output* de uma solução num tabuleiro 5x5, cujo domínio seja {0,1}, será o seguinte:

```
0 0 0 0 0
0 1 0 1 0
0 1 0 1 0
0 1 1 1 0
0 0 0 0 0
```

5 Resultados

Ao analisar o desempenho das nossas duas versões, compreendemos que a restrição mais específica causa um aumento exponencial na computação da solução, que aumenta com a dimensão do tabuleiro.

Medimos e comparámos a quantidade de *backtrackings* efetuados. Excluímos a medida de tempo das nossas observações, por causa das diferenças entre processadores.

Tabela 1: Versão relaxada

Dimensão (NxN)	***Backtracks* (moda)**
2x2	0 ± 0
3x3	0 ± 0
6x6	3 ± 1
8x8	7 ± 1

Tabela 2: Versão restrita

Dimensão (NxN)	***Backtracks* (moda)**
2x2	9 ± 2
3x3	22 ± 5
5x5	89819 (apenas uma vez)
6x6	não calculado

6 Conclusões e Trabalho Futuro

Na abordagem a problemas em Prolog podem ser tomadas duas rotas principais: **propagação** ou **geração e teste**. A programação lógica através de restrições tira proveito do efeito de propagação para obter soluções de forma mais rápida e eficiente que a geração e teste, poupando recursos computacionais.

Assim, antes de resolver um problema, é importante verificar se a situação pode ser eficazmente traduzida num conjunto de restrições, de modo a aplicar um métodos de CLP.

Referências

[1] How can we tell if a graph has an euler path or circuit? `http://www.ctl.ua.edu/math103/euler/howcanwe.htm`, dec 2016.

[2] Siscstus prolog clp fd library. `https://sicstus.sics.se/sicstus/docs/4.1.0/html/sicstus/lib_002dclpfd.html`, dec 2016.

7 Anexos

yin_yang_relaxed.pl

```
:- use_module(library(lists)).
:- use_module(library(clpfd)).

/*
0 --> black
1 --> white

LastEvaluatorNumber --> last column of penultima line
*/

test_board_4x4([
    A1, A2, A3, A4,
    B1, B2, B3, B4,
    C1, C2, C3, C4,
    D1, D2, D3, D4
]).

test_board_3x3([
```

```
    A1, A2, A3,
    B1, B2, B3,
    C1, C2, C3
]).

test_board_2x2([
    A1, A2,
    B1, B2
]).

reset_timer :- statistics(walltime,_).
print_time :-
statistics(walltime,[_,T]),
TS is ((T//10)*10)/1000,
nl, write('Time: '), write(TS), write('s'), nl, nl.

yin_yang_auto(Board):-
    test_board_4x4(Board),
    length(Board, Length),
    LengthRowAux is sqrt(Length),
    LengthRow is round(LengthRowAux),

    domain(Board, 0, 1),
    setConstrains(Board, 1, Length, LengthRow),
    reset_timer,
    labeling([], Board),
    print_time,
    fd_statistics,

    display_board(Board, LengthRow, 1).

yin_yang_manual(Board, Length):-
    BoardLength is Length * Length,

    length(Board, BoardLength),
    LengthRowAux is sqrt(BoardLength),
    LengthRow is round(LengthRowAux),

    domain(Board, 0, 1),
    setConstrains(Board, 1, BoardLength, LengthRow),
    reset_timer,
    labeling([], Board),
    print_time,
    fd_statistics,

    display_board(Board, LengthRow, 1).
```

```
% cell that ends predicate. Last cell in the board
setConstrains(Board, Length, Length, LengthRow).
setConstrains(Board, LengthRow, Length, LengthRow):-
    % cell that appears in the first row, last column
    NewIndex is LengthRow + 1,

    LeftIndex is LengthRow - 1,
    BelowIndex is LengthRow + LengthRow,

    element(LengthRow, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),

    (
        CurrElem #= LeftElem
        #\/ CurrElem #= BelowElem
    ),
    setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow).
setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow):-
    % cell that appears in the last row, first column
    LastRowFirstColumn is Length - LengthRow + 1,
    Index =:= LastRowFirstColumn,
    NewIndex is Index + 1,

    UpperIndex is Index - LengthRow,
    RightIndex is Index + 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),

    (
        CurrElem #= UpperElem
        #\/ CurrElem #= RightElem
    ),
    setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow).
setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow):-
    % cells between first and last line in the last column (excluded)
    0 =:= mod(Index, LengthRow),
    NewIndex is Index + 1,

    UpperIndex is Index - LengthRow,
    BelowIndex is Index + LengthRow,

    element(Index, Board, CurrElem),
```

```
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),

    (
        CurrElem #= UpperElem
        #\/ CurrElem #= BelowElem
    ),
    setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow).
setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow):-
    % cells in the last row between first and last columns (excluded)
    LastRowIndex is Length - LengthRow,
    Index > LastRowIndex,
    NewIndex is Index + 1,

    LeftIndex is Index - 1,
    RightIndex is Index + 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),

    (
        CurrElem #= LeftElem
        #\/ CurrElem #= RightElem
    ),
    setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow).
setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow):-
    % intermediate board cells
    element(Index, Board, CurrElem),
    NextIndex is Index + 1,
    element(NextIndex, Board, ElemRight),
    NextRow is Index + LengthRow,
    element(NextRow, Board, ElemBelow),
    NextRowPlus is NextRow + 1,
    element(NextRowPlus, Board, ElemSE),

    (
        CurrElem #= ElemRight
        #\/ CurrElem #= ElemBelow
    ),

    nvalue(2, [CurrElem, ElemRight, ElemBelow, ElemSE]),

    NewIndex is Index + 1,
    setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow).
```

```
display_board([], _, _).
display_board([X|Xs], LengthRow, Index):-
    0 =:= mod(Index, LengthRow),
    !,
    write(X), nl,
    NewIndex is Index + 1,
    display_board(Xs, LengthRow, NewIndex).
display_board([X|Xs], LengthRow, Index):-
    write(X), write(' '),
    NewIndex is Index + 1,
    display_board(Xs, LengthRow, NewIndex).
```

yin_yang_restrict.pl

```
:- use_module(library(lists)).
:- use_module(library(clpfd)).

/*
0 --> black
1 --> white
LastEvaluatorNumber --> last column of penultima line
*/

test_board_4x4([
    A1, A2, A3, A4,
    B1, B2, B3, B4,
    C1, C2, C3, C4,
    D1, D2, D3, D4
]).

test_board_3x3([
    A1, A2, A3,
    B1, B2, B3,
    C1, C2, C3
]).

test_board_2x2([
    A1, A2,
    B1, B2
]).

reset_timer :- statistics(walltime,_).
print_time :-
statistics(walltime,[_,T]),
TS is ((T//10)*10)/1000,
```

```
nl, write('Time: '), write(TS), write('s'), nl, nl.


yin_yang_auto(Board):-
    test_board_4x4(Board),
    length(Board, Length),
    LengthRowAux is sqrt(Length),
    LengthRow is round(LengthRowAux),

    domain(Board, 0, 1),
    setConstrains(Board, 1, Length, LengthRow),
    reset_timer,
    labeling([], Board),
    print_time,
    fd_statistics,

    display_board(Board, LengthRow, 1).

yin_yang_manual(Board, Length):-
    BoardLength is Length * Length,

    length(Board, BoardLength),
    LengthRowAux is sqrt(BoardLength),
    LengthRow is round(LengthRowAux),

    domain(Board, 0, 1),
    setConstrains(Board, 1, BoardLength, LengthRow, [], []),

    reset_timer,
    labeling([], Board),
    print_time,
    fd_statistics,

    display_board(Board, LengthRow, 1).

setEulerPathConstraints(Degrees0, Degrees1):-
    %% apply Euler path to 0s
    count(1, Degrees0, #=, CountDegree1of0),
    count(3, Degrees0, #=, CountDegree3of0),

    count(0, Degrees0, #=, 0),

    CountDegree1of0 + CountDegree3of0 #= 2,

    %% apply Euler path to 1s
    count(1, Degrees1, #=, CountDegree1of1),
```

```
    count(3, Degrees1, #=, CountDegree3of1),

    count(0, Degrees1, #=, 0),

    CountDegree1of1 + CountDegree3of1 #= 2.

% cell that ends predicate. Last cell in the board
setConstrains(Board, Length, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cell that appears in the last row, last column (X = Last, Y =
Last)
    LeftIndex is Length - 1,
    UpperIndex is Length - LengthRow,

    element(Length, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    (
        CurrElem #= LeftElem #<=>B,
        CurrElem #= UpperElem #<=>C,
        N #= B+C
    ),

    ((CurrElem #= 0, setEulerPathConstraints([N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setEulerPathConstraints(Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, 1, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cell that appears in the first row, first column (X = 0, Y =
0)
    NewIndex is 1 + 1,

    RightIndex is 1 + 1,
    BelowIndex is 1 + LengthRow,
    SEIndex is BelowIndex + 1,

    element(1, Board, CurrElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),
    element(SEIndex, Board, SEElem),

    (
        CurrElem #= RightElem #<=>B,
        CurrElem #= BelowElem #<=>C,
        N #= B+C
    ),

    % special case for 2x2 boards
```

```
    nvalue(2, [CurrElem, RightElem, BelowElem, SEElem]),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, LengthRow, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cell that appears in the first row, last column (X = Last, Y
= 0)
    NewIndex is LengthRow + 1,

    LeftIndex is LengthRow - 1,
    BelowIndex is LengthRow + LengthRow,

    element(LengthRow, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),

    (
        CurrElem #= LeftElem #<=>B,
        CurrElem #= BelowElem #<=>C,
        N #= B+C
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cell that appears in the last row, first column (X = 0, Y = Last)
    LastRowFirstColumn is Length - LengthRow + 1,
    Index =:= LastRowFirstColumn,
    NewIndex is Index + 1,

    UpperIndex is Index - LengthRow,
    RightIndex is Index + 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),

    (
        CurrElem #= UpperElem #<=>B,
        CurrElem #= RightElem #<=>C,
```

```
        N #= B+C
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cells between first and last line in the last column (excluded)
(X = Last, Y = [1, Last - 1]) (Right side)
    0 =:= mod(Index, LengthRow),
    NewIndex is Index + 1,

    UpperIndex is Index - LengthRow,
    BelowIndex is Index + LengthRow,
    LeftIndex is Index - 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),

    (
        CurrElem #= UpperElem #<=> B,
        CurrElem #= BelowElem #<=> C,
        CurrElem #= LeftElem #<=> D,
        N #= B + C + D
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cells in the last row between first and last columns (excluded)
(X = [1, Last - 1], Y = Last) (Below Side)
    LastRowIndex is Length - LengthRow,
    Index > LastRowIndex,
    NewIndex is Index + 1,

    LeftIndex is Index - 1,
    RightIndex is Index + 1,
    UpperIndex is Index - LengthRow,
```

```
    element(Index, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),

    (
        CurrElem #= LeftElem #<=> B,
        CurrElem #= RightElem #<=> C,
        CurrElem #= UpperElem #<=> D,
        N #= B + C + D
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    % cells in the first column between first and last rows (excluded)
(X = 0, Y = [1, Last - 1]) (Left Side)
    CheckIndex is Index - 1,
    0 =:= mod(CheckIndex, LengthRow),
    NewIndex is Index + 1,

    RightIndex is Index + 1,
    UpperIndex is Index - LengthRow,
    BelowIndex is Index + LengthRow,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),

    (
        CurrElem #= UpperElem #<=> B,
        CurrElem #= RightElem #<=> C,
        CurrElem #= BelowElem #<=> D,
        N #= B + C + D
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
```

```
    % cells in the first line between first and last columns (excluded)
(X = [1, Last - 1], Y = 0) (Upper Side)
    Index < LengthRow,
    NewIndex is Index + 1,

    LeftIndex is Index - 1,
    BelowIndex is Index + LengthRow,
    RightIndex is Index + 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),

    (
        CurrElem #= LeftElem #<=> B,
        CurrElem #= BelowElem #<=> C,
        CurrElem #= RightElem #<=> D,
        N #= B + C + D
    ),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

setConstrains(Board, Index, Length, LengthRow, Degrees0, Degrees1):-
    NewIndex is Index + 1,

    UpperIndex is Index - LengthRow,
    RightIndex is Index + 1,
    BelowIndex is Index + LengthRow,
    LeftIndex is Index - 1,

    NWIndex is UpperIndex - 1,
    NEIndex is UpperIndex + 1,
    SWIndex is BelowIndex - 1,
    SEIndex is BelowIndex + 1,

    element(Index, Board, CurrElem),
    element(UpperIndex, Board, UpperElem),
    element(RightIndex, Board, RightElem),
    element(BelowIndex, Board, BelowElem),
    element(LeftIndex, Board, LeftElem),

    element(NWIndex, Board, NWElem),
```

```
    element(NEIndex, Board, NEElem),
    element(SWIndex, Board, SWElem),
    element(SEIndex, Board, SEElem),


    (
        CurrElem #= UpperElem #<=> B,
        CurrElem #= RightElem #<=> C,
        CurrElem #= BelowElem #<=> D,
        CurrElem #= LeftElem #<=> E,
        N #= B + C + D + E
    ),

    % top left
    nvalue(2, [CurrElem, UpperElem, NWElem, LeftElem]),

    % top right
    nvalue(2, [CurrElem, UpperElem, NEElem, RightElem]),

    % bottom left
    nvalue(2, [CurrElem, BelowElem, SWElem, LeftElem]),

    %bottom right
    nvalue(2, [CurrElem, BelowElem, SEElem, RightElem]),

    ((CurrElem #= 0, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
[N|Degrees0], Degrees1));
    (CurrElem #= 1, setConstrains(Board, NewIndex, Length, LengthRow,
Degrees0, [N|Degrees1]))).

display_board([], _, _).
display_board([X|Xs], LengthRow, Index):-
    0 =:= mod(Index, LengthRow),
    !,
    write(X), nl,
    NewIndex is Index + 1,
    display_board(Xs, LengthRow, NewIndex).
display_board([X|Xs], LengthRow, Index):-
    write(X), write(' '),
    NewIndex is Index + 1,
    display_board(Xs, LengthRow, NewIndex).
```