I Prodotti Notevoli

Dispensa riassuntiva per le classi prime e seconde

prof. Diego Fantinelli

20 giugno 2023

ITET Pasini - Schio

indice

I Prodotti Notevoli

Introduzione

definizione

- I **Prodotti Notevoli** sono formule (*espressioni algebriche*), di calcolo che permettono di sviluppare velocemente determinate potenze e prodotti tra polinomi, e viceversa di scomporre determinati tipi di polinomi.
- Tali regole vengono chiamate prodotti notevoli perché si riferiscono a prodotti ricorrenti nel calcolo polinomiale.

Somma per differenza

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Consideriamo due monomi, A e B, e i binomi che otteniamo dalla loro somma e dalla loro differenza: $A+B$ e $A-B$.
Eseguiamone il prodotto:
$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$

Quindi:

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Esempio e note

In generale, il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

esempio:

$$\left(2a^2+3b^3\right)\left(2a^2-3b^3\right)=(\underbrace{2a^2}_{A})^2-(\underbrace{3b^3}_{B})^2=4a^4-9b^6$$

Nel precedente esempio e in riferimento alla formula generale $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}A&=2a^2\\B&=3b^3\end{aligned}\right\} \quad \textit{suggerimento: i segni dei due termini non condizionano il risultato}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $A+B$, in cui A e B rappresentano due monomi e analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, $(A+B)(A+B) = (A+B)^2$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Quindi, il quadrato di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

Esempio e note

Eseguendo i prodotti, bisogna fare attenzione ai segni dei monomi: mentre i due quadrati saranno **sempre positivi**, *il doppio prodotto può cambiare segno a seconda del segno di A e B*

esempio:

$$\left(2ab^3 + 3cx\right)^2 = 4a^2b^6 + 9c^2x^2 + 12ab^3cx$$

mentre:

$$\left(2ab^3 - 3cx\right)^2 = 4a^2b^6 + 9c^2x^2 - 12ab^3cx$$

$$(A+B+C)^2 =$$
$$= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

Quadrato di un trinomio

In modo del tutto analogo, considerando il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà uguale a:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

nota: Ancora una volta, fare attenzione ai segni quando si eseguono i doppi prodotti

Esempio e note

esempio:

$$\left(2a + b^2 - x^3y\right)^2 = 4a^2 + b^4 + x^6y^2 + 4ab^2 - 4ax^3y - 2b^2x^3y$$

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Cubo di un binomio

Ora eseguiamo il cubo di un binomio:
$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 =$
$(A+B)\left(A^2+2AB+B^2\right) =$
$A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3$ che raccogliendo i termini simili è uguale a
$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.
In definitiva:

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Possiamo dunque dire che il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il cubo del primo termine, il cubo del secondo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine e il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine.

Esempio e note

esempio:

$$\left(2a-b^2\right)^3 = \left(2a+\left(-b^2\right)\right)^3 =$$

$$= 8a^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot\left(-b^2\right) + 3\cdot(2a)\cdot\left(-b^2\right)^2 + \left(-b^2\right)^3 =$$

$$= 8a^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - b^6$$

Somma o differenza di cubi - *falso quadrato*

$$A^3 + B^3 = (A + B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$$

Somma o differenza di cubi

Ora eseguiamo il seguente prodotto:

$$\begin{aligned}
&(A + B)\left(A^2 - AB + B^2\right) = \\
&= A^3 - A^2B + A^2B + AB^2 - AB^2 + B^3 \\
&= A^3 + B^3
\end{aligned}$$

Il trinomio $A^2 - AB + B^2$ è comunemente noto come falso quadrato, poiché differisce da quadrato di un binomio solo per il fattore 2.
Leggendo la catena di uguaglianze nell'altro verso, possiamo concludere che

$$A^3 + B^3 = (A + B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$$

Con calcoli del tutto analoghi, si conclude che

$$A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$$

Esempio e note

Notare come il segno presente nel falso quadrato sia l'opposto di quello tra i due cubi, mentre il segno presente nel binomio sia invece lo stesso.

esempio:

$$
\begin{aligned}
8a^6 - 27b^3 &= \left(2a^2\right)^3 - (3b)^3 = \\
&= \left(2a^2 - 3b\right)\left(\left(2a^2\right)^2 + 2a^2 \cdot 3b + (3b)^2\right) = \\
&= \left(2a^2 - 3b\right)\left(4a^4 + 6a^2b + 9b^2\right)
\end{aligned}
$$

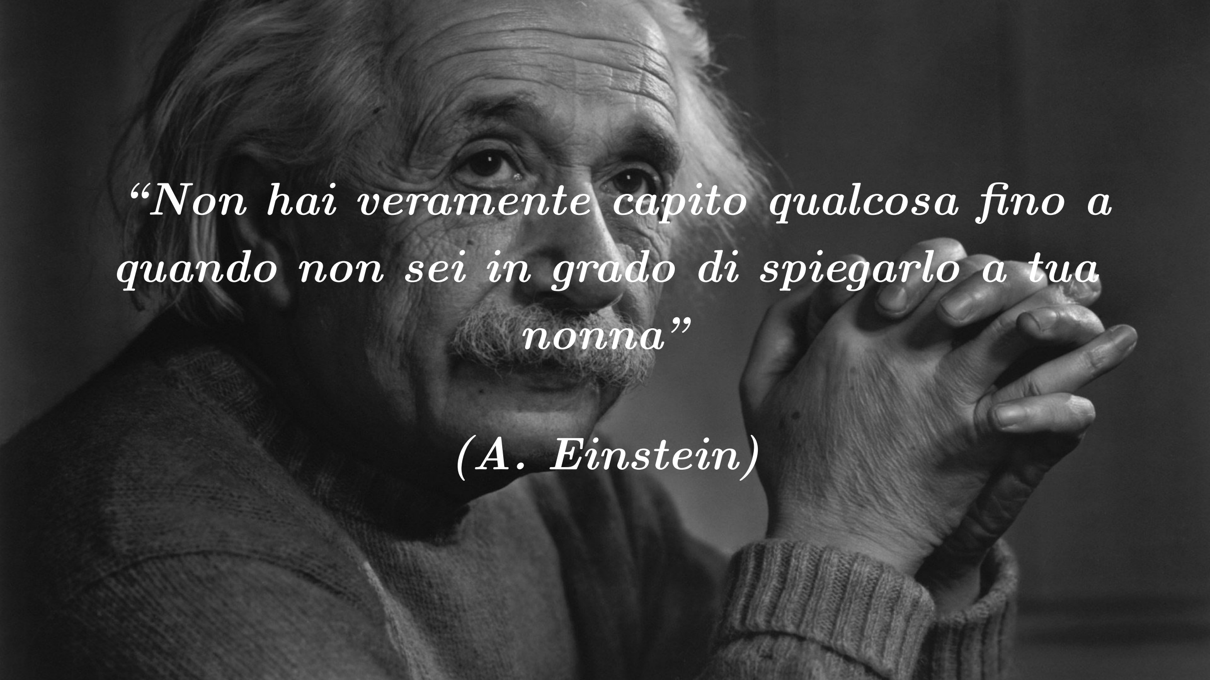
Questo Prodotto Notevole è "meno famoso" degli altri, perchè viene utilizzato di meno, ma quando i calcoli si faranno più complessi - soprattutto all'Università - ricordarlo vi farà risparmiare un sacco di tempo e, in un esame, il tempo è preziosissimo.

Conclusioni

Conclusioni

I Prodotti Notevoli non sono altro che dei casi particolari di moltiplicazioni tra Polinomi che vengono utilizzati molto spesso nel Calcolo Letterale, quindi conviene *impararli a memoria; ma la cosa fondamentale è che vanno letti, utilizzati e imparati,* ***in entrambe le direzioni!*** *dell'uguaglianza:*

- *da sinistra a destra avrete dei* ***prodotti notevoli***
- *da destra a sinistra avrete delle* ***scomposizioni di polinomi***



“Non hai veramente capito qualcosa fino a quando non sei in grado di spiegarlo a tua nonna”

(A. Einstein)