

I Prodotti Notevoli

Dispensa riassuntiva per le classi prime e seconde

prof. Diego Fantinelli

16 gennaio 2023

ITET Pasini - Schio

I Prodotti Notevoli

Somma per differenza

Quadrato di binomio

Quadrato di un trinomio

Cubo di un binomio

Somma o differenza di cubi: falso quadrato

Conclusioni

I Prodotti Notevoli

definizione

- I **Prodotti Notevoli** sono formule (*espressioni algebriche*), di calcolo che permettono di sviluppare velocemente determinate potenze e prodotti tra polinomi, e viceversa di scomporre determinati tipi di polinomi.
- Tali regole vengono chiamate prodotti notevoli perché si riferiscono a prodotti ricorrenti nel calcolo polinomiale.

Somma per differenza

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Consideriamo due monomi, A e B , e i binomi che otteniamo dalla loro somma e dalla loro differenza: $A + B$ e $A - B$.

Eseguiamone il prodotto:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

Quindi:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Esempio e note

In generale, il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

esempio:

$$(2a^2 + 3b^3)(2a^2 - 3b^3) = (2a^2)^2 - (3b^3)^2 = 4a^4 - 9b^6$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $A + B$, in cui A e B rappresentano due monomi e analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, $(A + B)(A + B) = (A + B)^2$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Quindi, il quadrato di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

Esempio e note

Eseguendo i prodotti, bisogna fare attenzione ai segni dei monomi: mentre i due quadrati saranno **sempre positivi**, *il doppio prodotto può cambiare segno a seconda del segno di A e B*

esempio:

$$(2ab^3 + 3cx)^2 = 4a^2b^6 + 9c^2x^2 + 12ab^3cx$$

mentre:

$$(2ab^3 - 3cx)^2 = 4a^2b^6 + 9c^2x^2 - 12ab^3cx$$

Quadrato di trinomio

$$\begin{aligned}(A + B + C)^2 &= \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC\end{aligned}$$

Quadrato di un trinomio

In modo del tutto analogo, considerando il trinomio $A + B + C$, il suo quadrato sarà uguale a:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

nota: Ancora una volta, fare attenzione ai segni quando si eseguono i doppi prodotti

esempio:

$$(2a + b^2 - x^3y)^2 = 4a^2 + b^4 + x^6y^2 + 4ab^2 - 4ax^3y - 2b^2x^3y$$

Cubo di un binomio

Cubo di un binomio

Ora eseguiamo il cubo di un binomio:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2 = \\(A+B)(A^2+2AB+B^2) &= \\A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3 &\text{ che} \\ \text{raccogliendo i termini simili è uguale a} & \\ A^3+3A^2B+3AB^2+B^3. &\end{aligned}$$

In definitiva:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Possiamo dunque dire che il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il cubo del primo termine, il cubo del secondo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine e il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine.

esempio:

$$\begin{aligned}(2a - b^2)^3 &= (2a + (-b^2))^3 = \\&= 8a^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b^2) + 3 \cdot (2a) \cdot (-b^2)^2 + (-b^2)^3 = \\&= 8a^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - b^6\end{aligned}$$

Somma o differenza di cubi - *falso quadrato*

$$A^3 + B^3 = (A + B) (A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) (A^2 + AB + B^2)$$

Somma o differenza di cubi

Ora eseguiamo il seguente prodotto:

$$\begin{aligned}(A + B) (A^2 - AB + B^2) &= \\ &= A^3 - A^2B + A^2B + AB^2 - AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + B^3\end{aligned}$$

Il trinomio $A^2 - AB + B^2$ è comunemente noto come falso quadrato, poiché differisce da quadrato di un binomio solo per il fattore 2.

Leggendo la catena di uguaglianze nell'altro verso, possiamo concludere che

$$A^3 + B^3 = (A + B) (A^2 - AB + B^2)$$

Con calcoli del tutto analoghi, si conclude che

$$A^3 - B^3 = (A - B) (A^2 + AB + B^2)$$

Esempio e note

Notare come il segno presente nel falso quadrato sia l'opposto di quello tra i due cubi, mentre il segno presente nel binomio sia invece lo stesso.

esempio:

$$\begin{aligned}8a^6 - 27b^3 &= (2a^2)^3 - (3b)^3 = \\&= (2a^2 - 3b) \left((2a^2)^2 + 2a^2 \cdot 3b + (3b)^2 \right) = \\&= (2a^2 - 3b) (4a^4 + 6a^2b + 9b^2)\end{aligned}$$

Questo Prodotto Notevole è "meno famoso" degli altri, perchè viene utilizzato di meno, ma quando i calcoli si faranno più complessi - soprattutto all'Università - ricordarlo vi farà risparmiare un sacco di tempo e, in un esame, il tempo è preziosissimo.

Conclusioni

I Prodotti Notevoli non sono altro che dei casi particolari di moltiplicazioni tra Polinomi che vengono utilizzati molto spesso nel Calcolo Letterale, quindi conviene *impararli a memoria*; ma la cosa fondamentale è che vanno *letti, utilizzati e imparati, in entrambe le direzioni!* dell'uguaglianza:

- *da sinistra a destra avrete dei **prodotti notevoli***
- *da destra a sinistra avrete delle **scomposizioni di polinomi***

A black and white portrait of Albert Einstein, showing his characteristic wild hair and mustache. He is looking slightly to the right with a thoughtful expression. His hands are clasped together in front of him. The background is dark and out of focus.

*“Non hai veramente capito qualcosa fino a
quando non sei in grado di spiegarlo a tua
nonna”*

(A. Einstein)