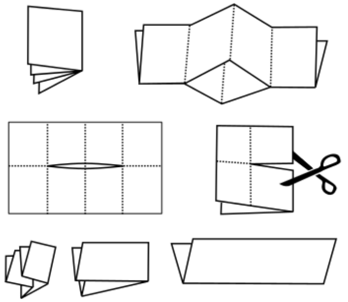
Trigonométrie

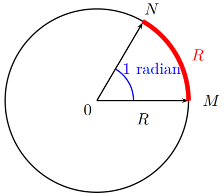
Vincent Pantaloni



I. Le radian.

Définition : Le *radian* est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante :

Si l'arc $\widehat{MN}$ d'un cerle de rayon R a pour longueur R, alors l'angle $\widehat{MON}$ vaut 1 radian.

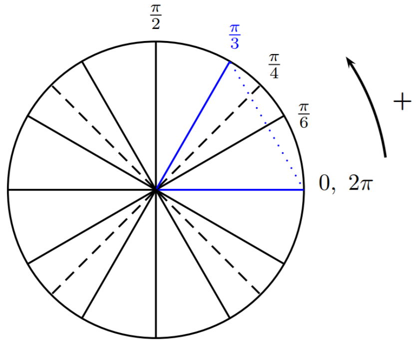


Remarque : La mesure en degrés celle en radians sont proportionnelles : 360 degrés $\leftrightarrow$ 2π radians.

Degrés	360	180	120	90	60		30		
Radians	2π					$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$

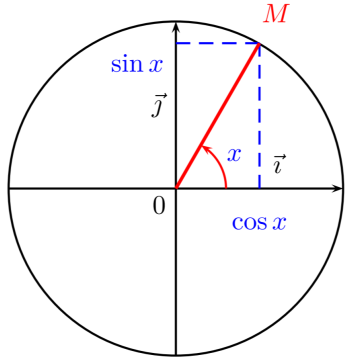
Définition : Le *cercle trigonométrique* est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, de rayon 1 muni d'un sens de rotation, *i.e.* orienté de telle sorte que le sens positif (ou direct, ou trigonométrique) est celui du sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre.

On enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique, dans le sens positif mais aussi dans le sens négatif.
Ainsi tout nombre réel x correspond à un point M du cercle.
Placer des mesures positives puis négatives en radian sur le cercle trigonométrique :



II. Fonctions sinus et cosinus

Définition : Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M de $\mathscr{C}$. On appelle *cosinus* de x, noté $\cos x$ et *sinus* de x, noté $\sin x$, les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



D'après le cercle trigonométrique, on a les prop. :

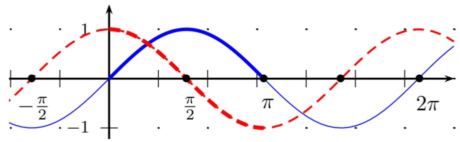
- ♣ $\cos^2 x + \sin^2 x = \dots$ (Pythagore)
- ♦ $\dots \leqslant \cos x \leqslant \dots$ et $\dots \leqslant \sin x \leqslant \dots$
- ♥ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Variations de cos et sin

Par lecture sur le cercle trigonométrique, compléter les deux tableaux de variation et identifier les courbes ci-dessous.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$			

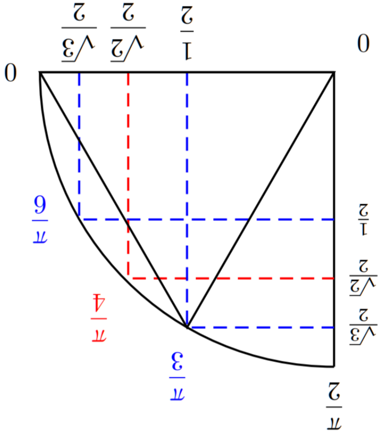
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$			



Valeurs remarquables

On retiendra les valeurs remarquables de sin et cos à l'aide du quart de cercle ci-dessous en remarquant que $1 < 2 < 3$ donc $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3}$ et donc :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Exercice. En utilisant les valeurs remarquables de cos et sin ainsi que des symétries, déterminer les valeurs exactes demandées.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dots$

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dots$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \dots$

5) $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \dots$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \dots$

Exercice. 1) Sachant qu'un angle x (en radians) est dans $[0;\frac{\pi}{2}]$ et que $\sin(x) = \frac{4}{5}$, déterminer $\cos(x)$.

2) On sait que $x \in [0;2\pi]$, et $\cos(x) = -\frac{12}{13}$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\sin(x)$?

3) Déterminer les réels x tels que :
$x \in [0;2\pi]$ et $\cos x = \sin x$.

4) Déterminer les réels x tels que :
$x \in [-\pi;\pi]$ et $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.