Ripasso classi Quarte: Equazioni Goniometriche

Esempi svolti ed esercizi

prof. Diego Fantinelli

September 18, 2024

Matematica per il Liceo Scientifico

Introduzione alle Equazioni Goniometriche

Equazioni Goniometriche: Definizione

Cosa sono le equazioni goniometriche?

- Un'equazione goniometrica è un'equazione che coinvolge funzioni trigonometriche come sin, cos, tan, cot, sec, e csc.
- Queste equazioni compaiono spesso nello studio dei triangoli e nella modellizzazione di fenomeni periodici (onde, oscillazioni, etc.).
- Le soluzioni delle equazioni goniometriche corrispondono agli angoli che soddisfano l'equazione e si esprimono come multipli del periodo delle funzioni trigonometriche.

Esempio:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ oppure } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Relazione con la Circonferenza Goniometrica

Circonferenza Goniometrica

- La circonferenza goniometrica ha raggio 1 ed è centrata nell'origine del piano cartesiano.
- Gli angoli (in radianti) corrispondono a punti sulla circonferenza, con:
  - Asse x: corrisponde al $\cos x$ (ascissa del punto sulla circonferenza).
  - Asse y: corrisponde al $\sin x$ (ordinata del punto sulla circonferenza).
- Le equazioni goniometriche possono essere risolte trovando i punti sulla circonferenza goniometrica che corrispondono ai valori richiesti.

Question time

Qual è, in generale, la differenza sostanziale
tra le soluzione di una equazione e quelle di una disequazione?

Risposta

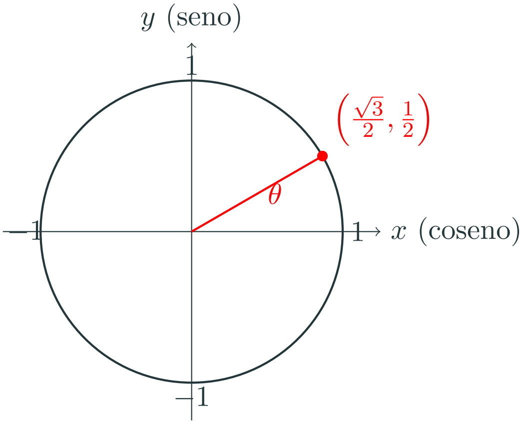
equazioni goniometriche

Le eventuali soluzioni di una **equazione goniometrica sono rappresentate da** ***punti sulla circonferenza goniometrica.***

disequazioni goniometriche

Le eventuali soluzioni di una **disequazione goniometrica sono rappresentate da intervalli sulla circonferenza goniometrica, sono quindi degli** ***archi di circonferenza***.

la circonferenza goniometrica



Proprietà delle Funzioni Goniometriche

Funzioni Goniometriche e la Circonferenza Goniometrica

- **Periodicità**: Tutte le funzioni goniometriche sono periodiche.
  - $\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo 2π: $f(x + 2\pi) = f(x)$.
  - $\tan x$ e $\cot x$ hanno periodo π: $f(x + \pi) = f(x)$.
- **Parità**:
  - $\sin x$ è una funzione dispari: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  - $\cos x$ è una funzione pari: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- **Simmetria rispetto alla circonferenza goniometrica**:
  - Gli angoli simmetrici rispetto all'asse x e all'asse y danno valori uguali o opposti di $\sin x$ e $\cos x$.
- **Identità fondamentali**:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{(Identità pitagorica)}$$

Introduzione alle Equazioni Goniometriche

Introduzione alle Equazioni Goniometriche

Le equazioni goniometriche sono equazioni che coinvolgono funzioni trigonometriche come seno, coseno e tangente.

- Esempi comuni: $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\tan x = 1$
- Risolverle significa trovare gli angoli che soddisfano l'equazione.

Esempi Svolti

Esempio 1: $\sin x = 0$

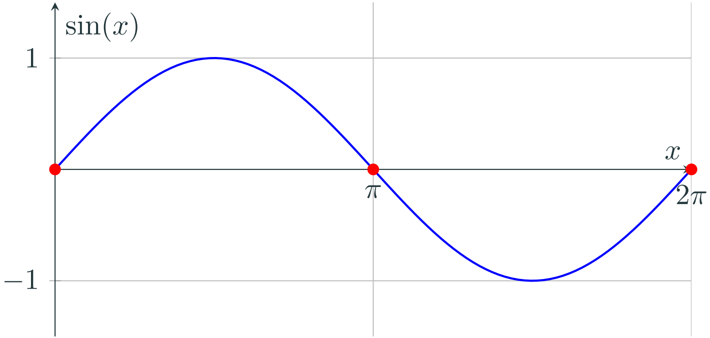
Equazione: $\sin x = 0$
Soluzione:

- L'equazione è soddisfatta per $x = 0 + k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio grafico: $\sin x = 0$

Equazione: $\sin x = 0$

Soluzione: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

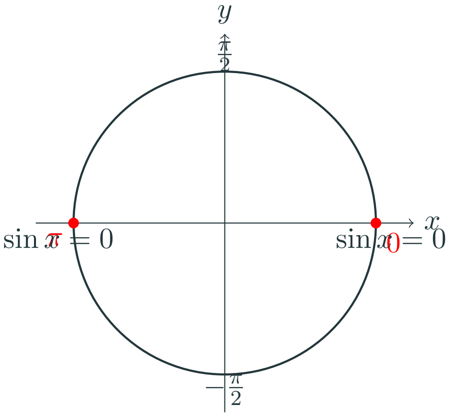


Le soluzioni sono i punti in cui $\sin(x) = 0$, cioè per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Circonferenza goniometrica: $\sin x = 0$

Equazione: $\sin x = 0$

Soluzione: $x = 0 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



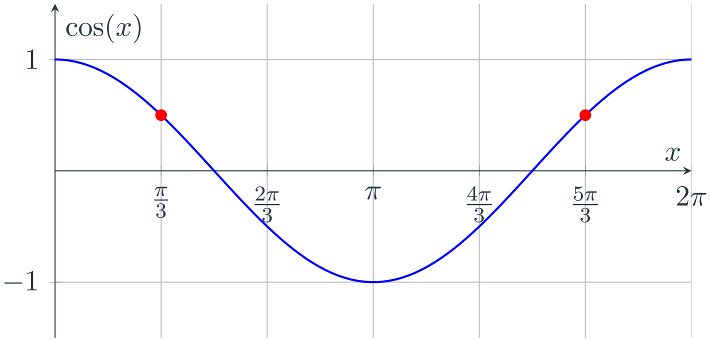
Esempio 2: $\cos x = \frac{1}{2}$

Equazione: $\cos x = \frac{1}{2}$
Soluzione:

- Si risolve l'equazione trovando gli angoli corrispondenti: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Esempio grafico: $\cos x = \frac{1}{2}$

Equazione: $\cos x = \frac{1}{2}$
Soluzione: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

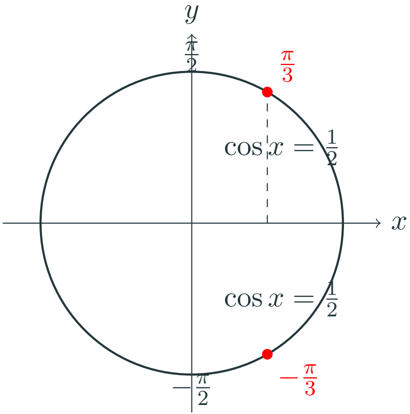


Le soluzioni sono i punti in cui $\cos(x) = \frac{1}{2}$, cioè per $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$.

Circonferenza goniometrica: $\cos x = \frac{1}{2}$

Equazione: $\cos x = \frac{1}{2}$

Soluzione: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Esempio 3: $\tan x = 1$

Equazione: $\tan x = 1$

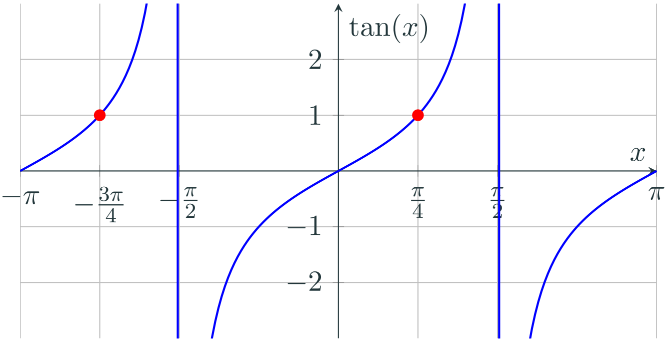
Soluzione:

- L'equazione è soddisfatta per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Esempio grafico: $\tan x = 1$

Equazione: $\tan x = 1$

Soluzione: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

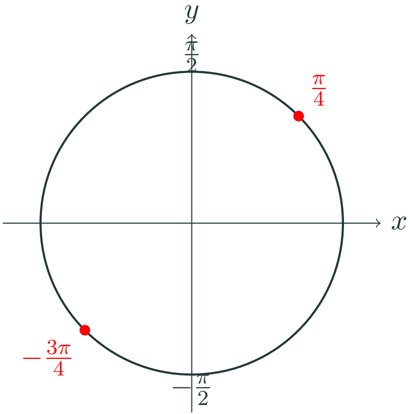


Le soluzioni sono i punti in cui $\tan(x) = 1$, cioè per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = -\frac{3\pi}{4}$.

Circonferenza goniometrica: $\tan x = 1$

Equazione: $\tan x = 1$

Soluzione: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Esercizi Svolti

Esercizio 1: Risolvi $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluzione:

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ corrisponde a $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2: Risolvi $\cos x = -1$

Soluzione:

- $\cos x = -1$ è soddisfatta per $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3: Risolvi $\tan x = \sqrt{3}$

Soluzione:

- $\tan x = \sqrt{3}$ corrisponde a $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizi da svolgere

Esercizio 1

Risolvi l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Risolvi l'equazione $\cos x = 0$.

Esercizio 3

Risolvi l'equazione $\tan x = -1$.

Esercizio 4

Risolvi l'equazione $\sin 2x = 0$.

Esercizi Avanzati

Esercizio 5: Equazione combinata

Risolvi l'equazione $\sin x + \cos x = 1$.

Esercizio 5: Equazione combinata

Equazione: Risolvi l'equazione $\sin x + \cos x = 1$.

Svolgimento:

- Elevo al quadrato entrambi i lati: $(\sin x + \cos x)^2 = 1^2$
- Ottengo: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$
- Semplifico con l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $1 + 2\sin x \cos x = 1$
- Questo si riduce a $2\sin x \cos x = 0$, ovvero $\sin(2x) = 0$
- Risolvendo $\sin(2x) = 0$: $2x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Verifico le soluzioni:

- Per $x = 0$: $\sin(0) + \cos(0) = 1$, quindi $x = 0$ è una soluzione valida.
- Le altre soluzioni non soddisfano l'equazione originale.

Soluzione: $x = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 6: Equazione con tangente

Risolvi l'equazione $\tan 2x = 1$.

Compiti per casa

Compiti per casa

Esercizi da completare

- Risolvi $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Risolvi $\cos x = \frac{1}{2}$.
- Risolvi $\tan x = -\sqrt{3}$.