

# Ripasso classi Terze: Equazioni Irrazionali

Esempi e schemi risolutivi

---

prof. Diego Fantinelli

September 18, 2024

Matematica per il Liceo Scientifico

# Introduzione

---

# La nascita delle equazioni irrazionali

---

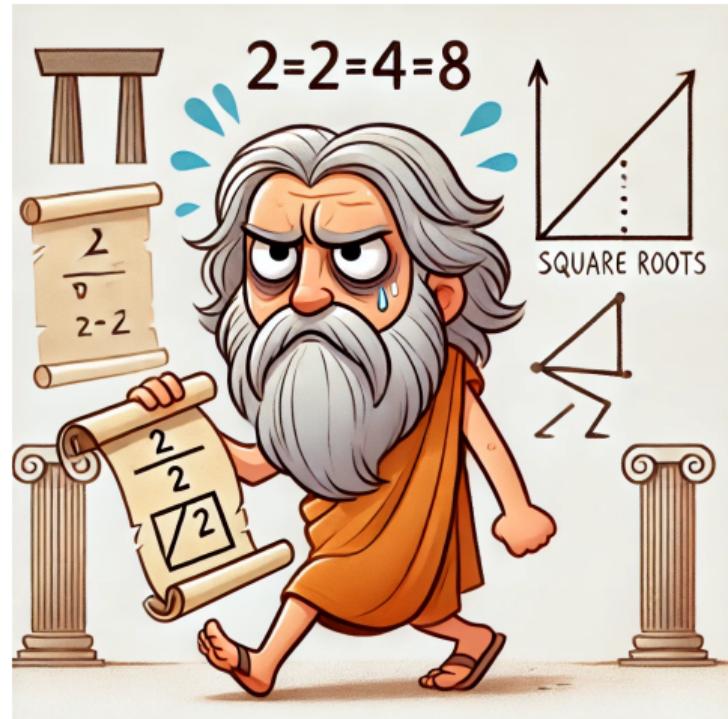
## Storia e necessità delle equazioni irrazionali

- **Origini nel mondo greco:** Le equazioni irrazionali hanno le loro radici nel V secolo a.C., quando i matematici greci scoprirono che non tutte le lunghezze potevano essere espresse come rapporti di numeri interi.

# Il problema della diagonale

- Il problema della diagonale:

La scoperta più famosa è attribuita alla scuola pitagorica, che si trovò di fronte all'impossibilità di esprimere la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 come un numero razionale. Questo portò alla nascita del concetto di numeri irrazionali, poiché la diagonale misura  $\sqrt{2}$ .



# La nascita delle equazioni irrazionali

- **Necessità di risolvere equazioni:** Con l'evolversi della geometria e delle misurazioni, sorse la necessità di risolvere equazioni che coinvolgessero radici quadrate, cubiche o di ordine superiore. Queste equazioni apparivano naturalmente nello studio di problemi geometrici e meccanici.
- **Equazioni moderne:** Nella matematica moderna, le equazioni irrazionali sono comunemente utilizzate in fisica, ingegneria e altre scienze, dove la necessità di descrivere fenomeni complessi richiede la risoluzione di espressioni che includono radici e potenze frazionarie.

# Lo scooter nel pozzo

- Due amici, al rientro da scuola, transitano vicino ad un pozzo e decidono di mettere a frutto le loro conoscenze di fisica.  
Vogliono misurare la profondità del pozzo e si ricordano che il loro prof. di fisica a lezione: dovevano misurare il tempo  $t$  in cui un oggetto raggiunge il fondo.

Mentre uno cerca qualcosa da lanciare l'altro butta di sotto lo scooter dell'amico!

Un gran bel prank, un gran bel botto!



# Il modello: Calcolo dell'altezza del pozzo

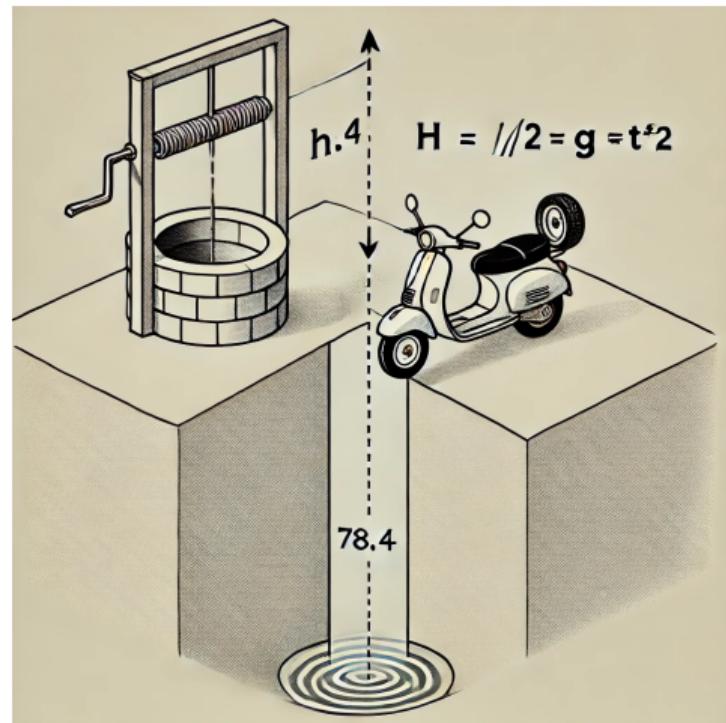
## Procedimento:

- Usare la formula del moto uniformemente accelerato:

$$t = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

- Dove  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  e  $t = 4 \text{ s}$ .
- Calcolare:

$$h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = 78.4 \text{ m}$$



## Esempi svolti

---

## Esempio 1:

---

Risolvi l'equazione:

$$\sqrt{x+2} = x - 1$$

**Soluzione:**

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x + 2 = (x - 1)^2$$

- Espandi e risolvi:

$$x + 2 = x^2 - 2x + 1$$

- Riscrivi come:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

- Risolvi con la formula quadratica:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

## Esempio 2:

---

Risolvi l'equazione:

$$\sqrt{2x - 1} = x - 2$$

**Soluzione:**

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$2x - 1 = (x - 2)^2$$

- Espandi e risolvi:

$$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$$

- Riscrivi come:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

- Soluzione:

$$x = 5, \quad x = 1$$

## Esempio 3:

Risolvvi l'equazione:  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} = 1$

**Soluzione:**

- Isola uno dei radicali:

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x-1}$$

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$2x+3 = (1 + \sqrt{x-1})^2 = 1 + 2\sqrt{x-1} + (x-1)$$

- Semplifica:

$$2x+3 = x+2 + 2\sqrt{x-1}$$

- Isola il radicale:

$$2\sqrt{x-1} = x+2 - 2x - 3$$

$$2\sqrt{x-1} = -x - 1$$

- Eleva nuovamente al quadrato:

$$4(x-1) = (x+1)^2$$

- Risolvvi l'equazione risultante:

$$4x - 4 = x^2 + 2x + 1$$

- Riordina e risolvvi con la formula quadratica:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

- Non esistono soluzioni reali.

## Esempio 4: Equazione con parametri

---

Risovi l'equazione:

$$\sqrt{x+a} = x - 1$$

**Soluzione:**

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x + a = (x - 1)^2$$

- Espandi e risovi:

$$x + a = x^2 - 2x + 1$$

- Riordina:

$$x^2 - 3x + (1 - a) = 0$$

- Usa la formula quadratica:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1 - a)}}{2}$$

- Determina le condizioni su  $a$  affinché l'equazione abbia soluzioni reali:

$$9 - 4(1 - a) \geq 0$$

- Da cui segue:

$$a \leq 2$$

## Esempio 5: Equazione con espressioni razionali

Risovi l'equazione:

$$\frac{\sqrt{x}}{x - 2} = 1$$

**Soluzione:**

- Moltiplica entrambi i lati per  $(x - 2)$ :

$$\sqrt{x} = x - 2$$

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x = (x - 2)^2$$

- Espandi:

$$x = x^2 - 4x + 4$$

- Riordina l'equazione:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

- Risovi con la formula quadratica:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

- Soluzioni:

$$x = 4 \quad \text{oppure} \quad x = 1$$

- Verifica le soluzioni:

$$\frac{\sqrt{1}}{1 - 2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ non è soluzione valida.}$$

- Soluzione finale:  $x = 4$

## Due strategie risolutive

---

## Esempio: Equazione irrazionale e condizioni di accettabilità

---

**Risolviamo l'equazione:**  $\sqrt{2x} - \sqrt{x+7} = -1$  **1° passo:** Determiniamo le

condizioni di esistenza. Affinché i due radicali che compaiono nell'equazione siano definiti, i radicandi devono essere positivi o nulli. Quindi deve essere:

$$2x \geq 0 \quad \text{e} \quad x + 7 \geq 0$$

In altre parole,  $x$  deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

che è verificato per  $x \geq 0$ .

## Esempio: Condizione di concordanza di segno

---

Prima di elevare nuovamente al quadrato, dobbiamo porre la condizione di concordanza di segno:

$$6 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 6$$

$$(2\sqrt{2x})^2 = (6 - x)^2 \quad \text{Elevando al quadrato i due membri}$$

$$8x = 36 + x^2 - 12x \quad \text{Svolgendo i calcoli}$$

$$x^2 - 20x + 36 = 0 \quad \text{Riscrivendo in forma normale}$$

$$x = 10 \pm \sqrt{64} = \begin{cases} 2 \\ 18 \end{cases} \quad \text{Formula ridotta}$$

## Esempio: Verifica delle condizioni di accettabilità

---

**3° passo:** Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare la condizione di esistenza e la condizione di concordanza di segno.

Quindi deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 6$$

La soluzione  $x = 2$  appartiene all'intervallo  $0 \leq x \leq 6$ , quindi è accettabile; la soluzione  $x = 18$ , invece, non appartiene a tale intervallo, quindi è da scartare. **4°**

**passo:** In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è  $S = \{2\}$ .

## Esercizi proposti

---

# Esercizi proposti

---

## Equazioni irrazionali (Base)

- Risolvi  $\sqrt{x+3} = x - 2$
- Risolvi  $\sqrt{4x+1} = 2x - 1$
- Risolvi  $\sqrt{2x-1} = x - 3$
- Risolvi  $\sqrt{5x+2} = 2x - 4$

## Equazioni irrazionali (Avanzato)

- Risolvi  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 4$
- Risolvi  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 2$
- Risolvi  $\sqrt{3x+5} + \sqrt{x-2} = 5$
- Risolvi  $\sqrt{4x+9} = \sqrt{3x+2} + 1$

# Equazioni irrazionali (livello Super Sayan)

## esercizi proposti

- $\sqrt{3x + 5} + \sqrt{2x - 1} = x + 1$

- $\frac{\sqrt{2x + 3}}{x - 1} = 1$

- $\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x + 1} = 1$