

木管楽器の発音原理に関するノート

H. S.

2017.5.18-

Abstract

本記事は木管楽器の発音原理に関するノートである。特に、管内での固有振動モードの解析的導出がメインである。

目次

1	疎密波の方程式	1
1.1	Euler 方程式	1
1.2	波動方程式	2
2	閉管の固有振動	3
2.1	方形管の固有振動	3
2.2	円形管の固有振動	3
2.3	円錐管の固有振動	3
3	開管と半開管の固有振動	3
3.1	開管の境界条件	3
3.2	方形開管の固有振動	3
3.3	円形開管の固有振動	3
3.4	円形半開管の固有振動	3
3.5	円錐開管の固有振動	3
4	管外への音の放射	3
5	トーンホールの効果	3

1 疎密波の方程式

1.1 Euler 方程式

音波の発生および伝播を議論する場合、空気 (水でもよいが) の粘性は無視できる。また、熱伝導も無視できるので、すべての運動は断熱的であり、各流体要素の比エントロピー (単位質量あたりのエントロピー) は保存する。

$$s = \text{const.}$$

従って音響学の範疇では媒質の状態は密度 ρ および流体速度 \mathbf{v} の 4 自由度によって記述される。

媒質の運動は連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

および Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2)$$

によって与えられる。 p は流体の圧力であり、流体運動が断熱的であるという仮定のもとでは密度 ρ だけの関数である: $p = p(\rho)$ 。

理想気体の状態方程式が成り立つならば、圧力 p は断熱指数 (比熱比) γ を用いて

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3)$$

と表示できる。 ρ_0, p_0 は流体静止時 (つまり音波がないとき) の密度、圧力である。1.2 節で示すように流体中を伝播する音波の速度 (音速) c_s は

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (4)$$

で与えられるので、式 (3) を代入すると

$$c_s^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (5)$$

となる。特に $\rho = \rho_0$ で評価すると $c_s^2|_0 = \gamma p_0 / \rho_0$ である。

1.2 波動方程式

密度 ρ_0 、圧力 p_0 の静的な配位にわずかな擾乱が加わるという状況を考える。この場合、位置 \mathbf{x} における時刻 t の密度 $\rho(t, \mathbf{x})$ の代わりに、無次元化された密度ゆらぎ δ および無次元速度 \mathbf{u} を用いるのが便利である。その定義は

$$\delta(t, \mathbf{x}) := \frac{\rho(t, \mathbf{x}) - \rho_0}{\rho_0}, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}(t, \mathbf{x})}{c_s} \quad (6)$$

であり (以下 $c_s|_0$ を単に c_s と書く)、いま δ および \mathbf{u} は 1 よりずっと小さな量なので、これらの量について 2 次以上の項は無視してよい。その近似では連続方程式および Euler 方程式は

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + c_s \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_s \nabla \delta = 0 \quad (7)$$

となり、速度 \mathbf{u} を消去すると波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \right) \delta = 0 \quad (8)$$

に到達する。

2 閉管の固有振動

2.1 方形管の固有振動

2.2 円形管の固有振動

2.3 円錐管の固有振動

3 開管と半開管の固有振動

3.1 開管の境界条件

3.2 方形開管の固有振動

3.3 円形開管の固有振動

3.4 円形半開管の固有振動

3.5 円錐開管の固有振動

4 管外への音の放射

5 トーンホールの効果