木管楽器の発音原理に関するノート

H. S.

2017.5.18-

Abstract

本記事は木管楽器の発音原理に関するノートである. 特に, 管内での固有振動モードの解析的導出がメインである.

目次

1 疎密波の方程式

1.1 Euler 方程式

音波の発生および伝播を議論する場合, 空気 (水でもよいが) の粘性は無視できる. また, 熱伝導も無視できるので, すべての運動は断熱的であり, 各流体要素の比エントロピー (単位質量あたりのエントロピー) は保存する.

$$s = \mathrm{const.}$$

従って音響学の範疇では媒質の状態は密度 ρ および流体速度 $\boldsymbol{v}$ の 4 自由度によって記述される.

媒質の運動は連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

および Euler 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.2}$$

によって与えられる．p は流体の圧力であり, 流体運動が断熱的であるという仮定のもとでは密度 ρ だけの関数である: $p = p(\rho)$.

理想気体の状態方程式が成り立つならば, 圧力 p は断熱指数 (比熱比) γ を用いて

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1.3}$$

と表示できる．ρ_0, p_0 は流体静止時 (つまり音波がないとき) の密度, 圧力である．1.2 節で示すように流体中を伝播する音波の速度 (音速) c_s は

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{1.4}$$

で与えられるので, 式 (1.3) を代入すると

$$c_s^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1.5}$$

となる．特に $\rho = \rho_0$ で評価すると $c_s^2|_0 = \gamma p_0/\rho_0$ である.

1.2　波動方程式

密度 ρ_0, 圧力 p_0 の静的な配位にわずかな擾乱が加わるという状況を考える．この場合, 位置 $\boldsymbol{x}$ における時刻 t の密度 $\rho(t, \boldsymbol{x})$ の代わりに, 無次元化された密度ゆらぎ δ および無次元速度 $\boldsymbol{u}$ を用いるのが便利である．その定義は

$$\delta(t, \boldsymbol{x}) := \frac{\rho(t, \boldsymbol{x}) - \rho_0}{\rho_0}, \quad \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})}{c_s} \tag{1.6}$$

であり (以下 $c_s|_0$ を単に c_s と書く), いま δ および $\boldsymbol{u}$ は 1 よりずっと小さな量なので, これらの量について 2 次以上の項は無視してよい．その近似では連続方程式および Euler 方程式は

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + c_s \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + c_s \nabla \delta = 0 \tag{1.7}$$

となり, 速度 $\boldsymbol{u}$ を消去すると波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2\right)\delta = 0 \tag{1.8}$$

に到達する.

2　閉管の固有振動

2.1　固有振動の一般論

媒質のゆらぎに関して線型近似が適用できる範囲では, 密度ゆらぎ $\delta(t, \boldsymbol{x})$ を次の形に分解することができる[*1].

$$\delta(t, \boldsymbol{x}) = \sum_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\delta_i(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

[*1] モード分解の可能性に関する議論は Fourier 級数論 (または関数解析) の範疇である．ここでは単にこの結果を承認する.

i は解のモードを指定するラベルで, 具体的な問題に応じて連続値または離散値を取る．また ω_i はモード i の振動数, φ_i はモードの初期位相である．$\delta_i(\boldsymbol{x})$ をモード i の固有関数と呼ぶ.

特定モード i の解 $\cos(\omega_i + \varphi_i)\delta_i(\boldsymbol{x})$ を波動方程式に代入すると

$$(\omega_i^2 + c_s^2\nabla)\delta_i(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.2}$$

という Helmholtz 方程式が得られる．これを問題に応じた境界条件のもとで解くことで, 振動数 ω_i および固有関数 $\delta_i(\boldsymbol{x})$ が確定する．これを具体的に実行することがこの節および次節の主要な問題である．

なお, 式 (1.7) から, 各モードの流体速度 $\boldsymbol{u}_i$ は密度ゆらぎ δ から

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{c_s}{\omega} i\nabla\delta_i(\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

により計算できる.

2.2 方形管の固有振動

図のような方形管内における振動モードについて考える．密度ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{x})$ が

$$\delta(\boldsymbol{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

という変数分離形に書けると仮定しよう．これを式 (2.2) に代入すると

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c_s^2}$$

となるが, 左辺第 1 項, 第 2 項, 第 3 項はそれぞれ x, y, z にのみ依存するから, それぞれ定数に等しい．それを $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$ とすると

$$X(x) = \text{const.} \times \cos(k_x x + \varphi_x), \quad Y(y) = \text{const.} \times \cos(k_y y + \varphi_y), \quad Z(z) = \text{const.} \times \cos(k_z z + \varphi_z)$$

と求まる．φ_x, φ_y, φ_z は初期位相で, 結局, 密度ゆらぎ固有関数 $\delta(\boldsymbol{x})$ は A を複素定数として

$$\delta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{Re}\{Ae^{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\}, \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = c_s|\boldsymbol{k}| \tag{2.4}$$

という形となる.

いまの問題では, 管壁において管壁に垂直な方向への媒質の運動は禁じられている．式 (2.3) により流体速度 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u} = \mathsf{Re}\left\{-\frac{c_s\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} \tag{2.5}$$

と書けるから, これが $x = 0, L$ で常にゼロとなる条件は

$$k_x = \frac{n\pi}{L}$$

である (n は任意の整数)．y, z 方向も同様なので, 方形管の境界条件から, 固有振動モードは 3 つの整数 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ によって特定でき, 密度ゆらぎは

$$\delta_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{Re}\left\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}, \quad \boldsymbol{k} = \left(\frac{n_x\pi}{L}, \frac{n_y\pi}{\ell_y}, \frac{n_z\pi}{\ell_z}\right) \tag{2.6}$$

と書き下せる.

方形管を楽器のモデルとみなす場合, y, z 方向の振動モードは重要ではなく, x 方向の振動だけが問題である．実際, 例えば

2.3　円形管の固有振動

2.4　円錐管の固有振動

3　開管と半開管の固有振動

3.1　開管の境界条件

3.2　方形開管の固有振動

3.3　円形開管の固有振動

3.4　円形半開管の固有振動

3.5　円錐開管の固有振動

4　管外への音の放射

5　トーンホールの効果