

## Über die durch ein Drehkeilpaar erzeugte Ablenkung und über eine als Kennzeichen für die Beibehaltung des „Hauptschnittes“ dienende Sinusbedingung.

Von Heinrich Erfle.

Mitteilung aus der optischen Werkstätte von Carl Zeiß in Jena.

(Eingegangen am 21. November 1919.)

Schon vor J. F. W. Herschel<sup>1)</sup> hat wohl A. Rochon<sup>2)</sup> als erster darauf hingewiesen, daß man ein Prisma mit veränderlichem brechenden Winkel dadurch herstellen kann, daß man die beiden durch Teilung des brechenden Winkels entstandenen Hälften um eine Achse dreht, die zu dieser winkelhalbierenden Ebene senkrecht steht. Ein solches Doppelprisma ist in den Fig. 1a und 1b in zwei verschiedenen Stellungen gezeichnet. Der brechende Winkel eines jeden Prismas ist  $\alpha$ ; die beiden Innenflächen  $B_1D_1$  und  $B_2D_2$  stehen senkrecht zur Geraden  $SS_e$ , welche die gemeinsame Drehungsachse bildet. In dem in Fig. 1a gezeichneten Falle gibt das Doppelprisma die größte Ablenkung: Der parallel  $C_1D_1$  einfallende Strahl  $SS_e$  erhält nach dem Durchlaufen beider Prismen dieselbe Richtung wie nach dem Durchlaufen eines einzigen Prismas mit dem brechenden Winkel  $2\alpha$ . Die Zeichnungsebene für Fig. 1b ist im Verhältnis zu der Zeichnungsebene der Fig. 1a um  $90^\circ$  um die Gerade  $SS_e$  gedreht zu denken, da sich der Hauptschnitt eines jeden Einzelprismas gegenüber der Anfangslage der Fig. 1a um  $90^\circ$  (und zwar nach entgegengesetzten Richtungen) gedreht hat. Das Doppelprisma wirkt

<sup>1)</sup> J. F. W. Herschel, Vom Licht. Aus dem Englischen übersetzt von J. C. E. Schmidt. Stuttgart und Tübingen, J. G. Cotta, 1831. 8<sup>o</sup>. 694 S., 224 Figuren auf 11 lithographischen Tafeln. § 432 u. 433, S. 198—200, Fig. 101 und 102 auf Taf. 6.

<sup>2)</sup> A. Rochon, Mémoire sur le micromètre de cristal de roche, pour la mesure des distances et des grandeurs. Avec une instruction de F. Torelli-de-Narci, sur la manière de se servir de la lunette contenant un micromètre fait avec des prismes de cristal de roche. Paris, Beraud, 1807. 8<sup>o</sup>. 62 S. Ohne Figuren. Es heißt dort auf S. 13 unten bis 14 oben: „... si je n'avais pas trouvé, en 1776, le moyen de composer par le mouvement circulaire de deux prismes égaux, tournant sur leur centre, un prisme variable de deux verres donnant tous les angles compris depuis zéro jusqu'au double de l'angle de chaque prisme pris séparément. Ce prisme solide, dont je variaais l'angle à volonté, me servit à faire cet instrument, que je nommai diasporamètre, . . . . .“

in der Stellung der Fig. 1b in bezug auf die Ablenkung wie eine Planparallelplatte. D. Brewster<sup>1)</sup> hat schon vor Herschel (1813) zwei gegeneinander verdrehbare Prismen verwendet; jedoch handelte es sich bei dieser Verwendungsart nicht um zwei gleiche Prismen, die um die gemeinsame Normale ihrer einander zugekehrten Innenflächen gedreht werden, sondern vielmehr um zwei Prismen mit verschiedenen brechenden Winkeln und verschiedenem Brechungsverhältnis (insbesondere mit verschiedener Dispersion). Vermutlich ist auf die von Brewster (S. 292 und 293) gegebene Darstellung die Ungenauigkeit — oder richtiger gesagt der Fehler — zurückzuführen, die man in allen späteren Darstellungen der Wirkungsweise eines Rochon-Herschelschen Doppelprismas wiederfindet. Es ist dies

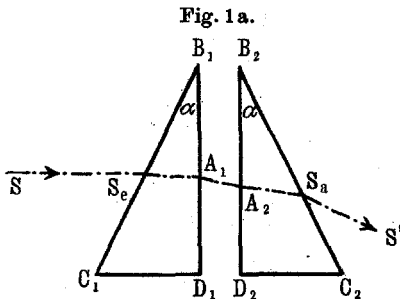


Fig. 1a.  
Prisma mit veränderlichem, brechendem Winkel. Prismenstellung für möglichst große Gesamtablenkung.

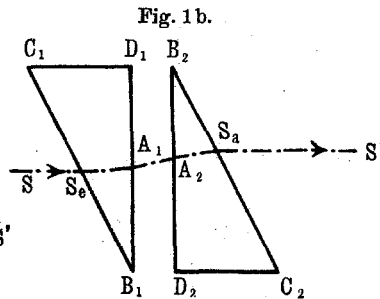


Fig. 1b.  
Prisma mit veränderlichem, brechendem Winkel. Prismenstellung für Gesamtablenkung Null; also  $SS_e \parallel S_aS'$ .

die Behauptung, daß die Lage des Hauptschnittes (also auch der brechenden Kante) für alle Stellungen der Keile zueinander die gleiche bleibe (d. h. daß sich nur die Größe der Ablenkung ändere), falls die Drehung der beiden Keile um gleiche Beträge, aber in entgegengesetztem Sinne erfolgt. Diese Behauptung ist enthalten in allen Veröffentlichungen, die sich mit der Anwendung des Drehkeilpaares in den verschiedenen Gebieten der technischen Optik befassen. Ich will hier nur einige dieser Arbeiten nennen:

E. Abbe<sup>2)</sup> hat in dem nach ihm benannten Totalrefraktometer als „Kompensator der Farbenzerstreuung“ ein Drehkeilpaar eingeführt,

<sup>1)</sup> David Brewster, A treatise on new philosophical instruments, for various purposes in the arts and sciences. With experiments on light and colours. Edinburgh, W. Blackwood; London, J. Murray, 1813. 8°. XX u. 427 S. Mit 12 Tafeln. S. 303—304; Fig. 2 auf Tafel XI.

<sup>2)</sup> E. Abbe, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena, Maukes Verlag, 1874. 8°. (III) und 79 S. Mit 7 Textfiguren und 6 Figuren auf einer Tafel. Aus der

das als Elemente nicht einfache Keile, sondern geradsichtige Amicische Prismen enthält. Ich werde später (§ 5) zeigen, daß in diesem Sonderfalle die Unveränderlichkeit der Hauptschnittlage (d. h. der Dispersionsrichtung) wirklich erreicht ist mit einer Genauigkeit, die für alle praktisch vorkommenden Fälle vollkommen genügt. R. Straubel<sup>1)</sup> hat vorgeschlagen, ein Herschelsches Doppelprisma dazu zu verwenden, der Reihe nach verschiedene Spektralbereiche in die Richtung der optischen Achse des Beobachtungsfernrohres eines Spektralapparates (bzw. des entsprechenden Rohres eines Monochromators) zu bringen. H. Konen<sup>2)</sup> führt das Herschelsche Doppelprisma wohl zu Unrecht auf Brewster und das Jahr 1813 zurück. E. Wallon<sup>3)</sup> benennt dieses Doppelprisma nach Rochon und leitet nur die Herschelsche Formel für die Abhängigkeit des gesamten brechenden Winkels von der Prismendrehung ab. S. P. Thompson<sup>4)</sup> legt seinen einfachen Rechnungen ebenfalls die falsche Annahme von der Unveränderlichkeit der Hauptschnittlage zugrunde, erwähnt aber doch<sup>5)</sup>, daß seine Formeln nur für kleinen brechenden Winkel gelten. F. Löwe<sup>6)</sup> leitet eine Gleichung für die Abhängigkeit des brechenden Winkels von der gegenseitigen Verdrehung der beiden Prismen ab und kommt dabei zu einer unbequemen Formel, die man leicht in die Herschelsche Formel verwandeln kann. Die dort auf S. 424 unten und 425 oben ausgesprochenen Behauptungen sind nicht richtig.

Jen. ZS. f. Naturw. 1874 besonders abgedruckt. Im folgenden ist auf den im zweiten Bande der ges. Abh. von Abbe (Jena, G. Fischer, 1906. 8<sup>o</sup>. VI und 346 S. Mit 16 Textfiguren und 7 Tafeln) enthaltenen Abdruck (S. 82—163) Bezug genommen.

<sup>1)</sup> R. Straubel, Ein Beleuchtungsapparat für monochromatisches Licht mit festen Spalten. Wied. Ann. 66, 350—352, 1898.

<sup>2)</sup> H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. I. Band. Leipzig, S. Hirzel, 1900. 8<sup>o</sup>. XXIV und 781 S. 251 Figuren. Für uns kommt das von H. Konen bearbeitete Kapitel „Prismen“, S. 251—394 in Betracht (insbesondere S. 394, Anmerkung 5).

<sup>3)</sup> E. Wallon, Leçons d'Optique Géométrique. Paris, Gauthier-Villars, 1900. 8<sup>o</sup>. VI und 342 S. 169 Figuren. S. 167—168, Fig. 94.

<sup>4)</sup> S. P. Thompson, Optical tables and data for the use of opticians. London, E. & F. N. Spon; New York, Spon & Chamberlain, 1900. 8<sup>o</sup>. VIII und 130 S. 55 Textfiguren. Für uns kommt Tafel 54 auf S. 85 in Betracht.

<sup>5)</sup> Siehe S. 85: „If two (thin) prisms are crossed at an angle, they act as a prism of different power at an intermediate angle.“

<sup>6)</sup> F. Löwe im Kapitel „Die Prismen und die Prismensysteme“ des von M. von Rohr herausgegebenen Buches: Die Theorie der optischen Instrumente. I. Band: Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkt der geometrischen Optik. Berlin, J. Springer, 1904. 8<sup>o</sup>. XXII und 587 S. Mit 133 Textfiguren. Für uns kommt in Betracht der Abschnitt: Der Fall zweier gekreuzter Prismen, S. 422—425, Fig. 95 und 96.

Ebenso ist die Aussage auf S. 1, Zeile 30 bis 43 der deutschen Patentschrift<sup>1)</sup> Nr. 188 992 dahingehend zu berichtigen, daß bei kleinem brechenden Winkel der beiden Elemente eines Herschelschen Doppelp Prismas die Lage des „Hauptschnittes“ zwar nicht streng, aber für praktische Zwecke genügend genau, unverändert bleibt und daß dieses Ergebnis beim Ersatz dieser Elemente durch Rochonsche Prismen mit kleinem Verdoppelungswinkel (Winkel zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl) in entsprechender Weise gilt. P. Krüss<sup>2)</sup> wendet den vorhin genannten Kompensator des Abbeschen Totalrefraktometers als Prismensatz in einem Spektroskop an, das ganz besonders zur Beobachtung von Absorptionsspektren geeignet ist, da es eine Anpassung an den Verlauf (die Begrenzung) der Absorptionsstreifen ermöglicht; er benutzt ebenfalls die Brewstersche Zerlegung der Dispersion in eine Komponente im „Hauptschnitt“ und in eine Komponente senkrecht zu diesem Hauptschnitt.

Sehr häufig ist das Drehkeilpaar (als „Kompensator“) als Mittel zur Verschiebung einer der beiden Ziellinien in der Basisebene des Entfernungsmessers vor dem Objektiv der einen Hälfte des Entfernungsmessers angewandt worden. Die beispielsweise von A. Gleichen<sup>3)</sup> und von Chr. von Hofe<sup>4)</sup> gegebenen Darstellungen der Wirkungsweise des Drehkeilpaares in Entfernungsmessern sollten durch den ausdrücklichen Hinweis ergänzt werden, daß die Annahme eines unveränderlichen Hauptschnittes des Drehkeilpaares beim Entfernungsmesser fast ausnahmslos zulässig ist wegen der kleinen Ablenkungen, die das Drehkeilpaar in diesem Falle erzeugt.

A. Bielschowsky<sup>5)</sup> hat in seinem Aufsatz „Die Verwendung des Doppelp Prismas in der augenärztlichen Praxis“ ebenfalls behauptet,

---

<sup>1)</sup> Klasse 42 h, Firma Carl Zeiss, Patent vom 10. November 1906. Ausgegeben am 23. September 1907. Doppelbild-Winkelmeßvorrichtung. Es heißt dort: „Zur Erläuterung dieser Vorrichtung sei zunächst daran erinnert, daß zwei hintereinander geschaltete Glaskeile, die durch entgegengesetzt gleiche Winkel um den einfallenden Strahl gedreht werden, einem ruhenden Keil von mit dem Drehungsbetrage veränderlichem brechenden Winkel und dementsprechend veränderlicher Ablenkung äquivalent sind. Ersetzt man die Glaskeile durch Rochonsche Prismen“, usw.

<sup>2)</sup> P. Krüss, Spektroskop mit veränderlicher Dispersion. ZS. f. Instrkde. 26, 139—142, 1906. 2 Fig.

<sup>3)</sup> A. Gleichen, Die Theorie der modernen optischen Instrumente, S. 218. Stuttgart, Ferd. Enke, 1911. 8°. XII und 332 S. 260 Figuren.

<sup>4)</sup> Chr. von Hofe, Fernoptik. Leipzig, J. A. Barth, 1911. 8°. VI und 158 S. 117 Fig. S. 124 u. 125. Fig. 108 auf S. 124.

<sup>5)</sup> A. Bielschowsky, ZS. f. ophthalm. Opt. 1913/14, 1, 129—136, 160—170; 5 Fig. S. 131.

daß beim Drehkeilpaar „die Richtung der resultierenden Prismenablenkung konstant“ bleibt.

Ich werde im folgenden allgemein beweisen (§ 1), daß ein Rochon-Herschelsches Doppelprisma — es sei als Drehkeilpaar alter Art bezeichnet — für keine Glasart (außer für  $n = 1$ ) die Eigenschaft haben kann, die man ihm bisher immer zugeschrieben hat, nämlich die Beibehaltung der Lage seines „Hauptschnittes“. Diese Eigenschaft besitzt — bei nicht zu großen brechenden Winkeln auf Bogensekunden genau — das von mir angegebene Drehkeilpaar neuer Art, das im § 4 beschrieben wird und den Gegenstand der deutschen Patentanmeldung<sup>1)</sup> der Firma Carl Zeiss vom 25. März 1918 bildet. Dieses neue Drehkeilpaar erfüllt für einen bestimmten Drehungswinkel (außerdem für den Drehungswinkel  $\gamma = 90^\circ$ ) die von mir aufgestellte Sinusbedingung für ein Drehkeilpaar (§ 5) genau und für die anderen Drehungswinkel mit weitgehender Annäherung an die Genauigkeit. In § 1 bis 3 werden Durchrechnungsformeln für ein Drehkeilpaar alter Art — bei dem also die Innenflächen einander parallel sind — angegeben, in § 4 für ein Drehkeilpaar neuer Art. Ich werde im folgenden den Inhalt meiner Untersuchungen nur gekürzt wiedergeben; in einer späteren Veröffentlichung sollen einige Zahlenbeispiele und die Formeln für die Durchrechnung eines beliebigen Strahles durch ein Drehkeilpaar gegeben werden.

### § 1. Durchrechnungsformeln

für ein Rochon-Herschelsches Doppelprisma und strenger Beweis dafür, daß für endliche brechende Winkel der „Hauptschnitt“ für keinen Drehwinkel mit dem Anfangshauptschnitt zusammenfällt.

Die bisher vorhandenen Angaben gründen sich, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, auf Brewster; seinen Angaben folgend wurde bisher für die Gesamtablenkung  $E$  die Beziehung angenommen:

$$E = 2\delta \cdot \cos \gamma. \quad (1)$$

Hierbei ist jedem Keil die Ablenkung  $\delta$  zugeschrieben worden;  $\gamma$  ist der Winkel, den der Hauptschnitt eines jeden Keiles mit der gemeinsamen Anfangslage beider Hauptschnitte bildet, die dem Maximum

<sup>1)</sup> Titel: Vorrichtung, die zwei hintereinander liegende, brechende Keile enthält, die in einem gemeinsamen Gehäuse angeordnet und zu gegenseitiger Drehung miteinander gekuppelt sind.

der Gesamtablenkung  $E$  entspricht. Es wurde ferner bisher die Unveränderlichkeit des Hauptschnittes, also  $a_s = 0$ , aus dem Ansatz

$$a_s = \Delta \cdot \sin \gamma - \delta \cdot \sin \gamma \quad (2)$$

dadurch gefolgert, daß man für alle  $\gamma$

$$\Delta = \delta \quad (3)$$

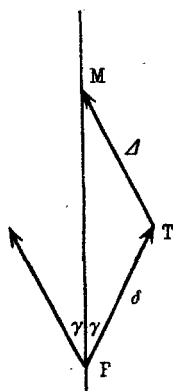
setzte. Die Gleichungen (1) und (2) sind im Anschluß an Fig. 2 ohne weiteres abzuleiten.

Ich gehe nunmehr zu der strengen Berechnung der Ablenkung über, welche durch ein solches Doppelprisma einem Strahle erteilt wird, dessen Einfallsrichtung mit der Richtung der Normalen zu den

Innenflächen der Prismen, also mit der Richtung der Drehungsachse übereinstimmt. In Fig. 3 stellt  $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$  die Richtung des einfallenden Strahles dar der größte Kreis  $\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}$  die senkrechte Ebene zum einfallenden Strahl. Wir denken uns das Auge im Mittelpunkt  $\mathfrak{A}$  der Kugel und zeichnen die (ersten) Durchstoßpunkte aller Strahlen mit dieser Kugel.

Denkt man sich  $\mathfrak{G}_1$  mit  $\mathfrak{A}$  verbunden, so erhält man die Richtung des Einfallslotcs; ganz entsprechend ist  $\mathfrak{G}_2\mathfrak{A}$  die Richtung des Austrittslotcs für das zweite Prisma.  $\mathfrak{B}\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \gamma$  bezeichnet den Drehungswinkel des ersten Prismas, der dem absoluten Betrage nach der in entgegengesetztem Sinne erfolgenden Drehung  $\mathfrak{B}\mathfrak{F}\mathfrak{I}$  gleich ist. Der Hauptschnitt des Doppelprismas ist für den Drehungswinkel  $\gamma$  gegeben durch  $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{A}$ , bildet also mit dem ursprünglichen Hauptschnitt  $\mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  den Winkel  $\psi = \mathfrak{F}\mathfrak{I}\mathfrak{B}$ , da  $\mathfrak{D}\mathfrak{F}\mathfrak{E}$  den Äquator zum Pole  $\mathfrak{B}$

Fig. 2.



Zur alten Darstellung des Rochon-Herschel'schen Doppelprismas.

Die untereinander gleich angenommenen Ablenkungen  $\delta$  d. erst. und  $\Delta$  des zweiten Prismas sind aneinander-gesetzt wie Vektoren.

darstellt.  $\mathfrak{G}_1\mathfrak{A}\mathfrak{F}$  ist der brechende Winkel  $\alpha$  des ersten Prismas;  $\mathfrak{F}\mathfrak{A}\mathfrak{G}_2 = \alpha$  der brechende Winkel des zweiten Prismas.  $\mathfrak{G}_1\mathfrak{A}\mathfrak{G}_2 = \alpha_H$  ist der brechende Winkel der beiden vereinigten Prismen.  $\angle \mathfrak{F}\mathfrak{I}\mathfrak{B}\mathfrak{G}_1$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Der Einfallswinkel an der Eintrittsfläche des ersten Prismas ist für die Projektion auf den Gesamthauptschnitt ( $\mathfrak{G}_1\mathfrak{A}\mathfrak{G}_2$ ), den wir durch den Index  $H$  kennzeichnen,  $\mathfrak{G}_1\mathfrak{A}\mathfrak{F} = i_{1,H}$ .

$$\angle \mathfrak{F}\mathfrak{I}\mathfrak{B}\mathfrak{G}_1: \quad \sin i_{1,H} = \sin \alpha \cdot \cos \gamma. \quad (5)$$

$$\alpha_H = 2 \cdot i_{1,H}^1. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Die Gleichung (4) ist schon früher von Herrn Dr. Alb. König angegeben worden, der sich aber nicht weiter mit der Theorie des Drehkeilpaares

Das Prisma  $\alpha_H$  erteilt der Projektion auf seinen Hauptschnitt die Ablenkung

$$E_H = i_{1,H} - i'_{1,H} + i_{2,H} - i'_{2,H}. \quad (7)$$

Die parallelen Innenflächen sind dabei weggelassen, da sie zusammen keine ablenkende Wirkung haben.

Mit

$$i_{2,H} = i'_{1,H} - \alpha_H \quad (8)$$

folgt aus (7):

$$E_H = i_{1,H} - i'_{2,H} - \alpha_H. \quad (11)$$

Setzen wir

$$\sin \psi' = \frac{\sin \psi}{n}, \quad (9)$$

dann ist das Brechungsverhältnis  $n_H$  der Projektion

$$n_H = \frac{n \cos \psi'}{\cos \psi}. \quad (10)$$

Bezeichnen wir  $\angle BNR = \omega$ ,  $\angle NR = \psi''$ ,  $\angle R = E_H = 90^\circ - \angle B$ ,  $l = NR$ ,  $a_s = NR$ ,  $\angle NRM = z$ ,  $\angle RNM = E$  = wahre Gesamtablenkung,  $E_H = \angle R$ , dann gelten die Gleichungen:

Im  $\triangle BNR$ :

$$\cos \omega = \sin \psi \cdot \sin E_H, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \psi'' = \cos E_H \cdot \operatorname{tg} \psi. \quad (13)$$

Ferner ist

$$l = NR - \angle R = \psi - \psi''. \quad (14)$$

$\triangle NRM$ :

$$\sin a_s = \sin l \cdot \sin \omega, \quad (15)$$

$$\sin \frac{E}{2} = \sin \frac{E_H}{2} \cdot \cos \psi^1. \quad (16)$$

befaßt hat. Gleichung (6) wird zusammen mit (5) zu der schon von J. F. W. Herschel angegebenen Formel

$$\sin \frac{\alpha_H}{2} = \sin \alpha \cdot \cos \gamma.$$

Dieser Gleichung entspricht in dem S. 1, Anm. 1 genannten Buche von Herschel, S. 199, Gleichung (b):

$$\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \sin (A).$$

Die Herschelschen Bezeichnungen  $A$ ,  $\frac{\theta}{2}$ ,  $(A)$  entsprechen den hier gewählten Bezeichnungen

$$\alpha_H, \quad 90^\circ - \gamma, \quad \alpha.$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu H. Erfle, Über die Ablenkung eines außerhalb des Prismenhauptschnittes verlaufenden Strahles. ZS. f. Instrkde. 33, 141—145, 1918, Formel (1), S. 142 und eine demnächst in der ZS. f. Instrkde. erscheinende Fortsetzung dieser Arbeit.

Da das gleichschenklige Dreieck  $\mathfrak{L}\mathfrak{H}\mathfrak{M}$  als Winkel an der Spitze  $\angle \mathfrak{R}\mathfrak{L}\mathfrak{H} = E_H$  und als Winkel an der Grundlinie  $\angle \mathfrak{L}\mathfrak{H}\mathfrak{M} = 90^\circ - z$  hat, so folgt für  $z = \angle \mathfrak{M}\mathfrak{H}\mathfrak{M}$ :

$$\operatorname{tg} z = \sin \psi \cdot \operatorname{tg} \frac{E_H}{2}. \quad (17)$$

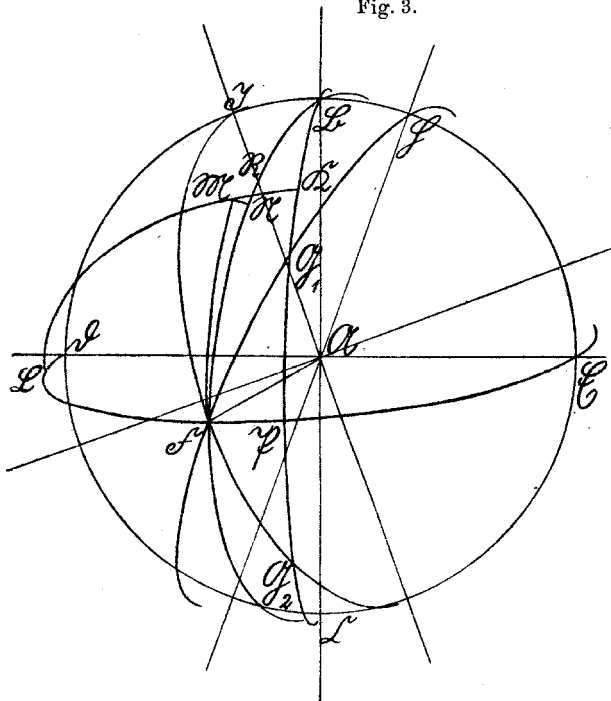
Aus dem bei  $\mathfrak{N}$  rechtwinkligen Dreieck  $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{H}$  folgt:

$$\operatorname{tg} E_h = \cos z \cdot \operatorname{tg} E, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} a_s = \sin E_h \cdot \sin \psi \cdot \operatorname{tg} \frac{E_H}{2}. \quad (19)$$

Die beiden letzten Formeln können als Richtigkeitsproben bei der zahlenmäßigen Durchrechnung eines Rochon-Herschelschen Doppelprismas [nach den Formeln (4) bis (17)] dienen.

Fig. 3.



Zu den Durchrechnungsformeln des § 1.

Im Anschluß an diese Formeln erhält man anstatt der aus (2). und (3) folgenden unrichtigen Annahme  $a_s = 0$  eine schon recht weitgehende Näherung in folgender Weise:

$$\psi = \alpha \sin \gamma, \quad (4a)$$

$$i_{1,H} = \alpha \cos \gamma, \quad (5a)$$

$$\cos \omega = \psi \cdot E_H, \quad (12a)$$



also genähert

$$\omega = 90^\circ, \quad (12b)$$

$$\psi'' = \psi \cos E_H, \quad (13a)$$

$$l = \psi(1 - \cos E_H) = 2\psi \sin^2 \left( \frac{E_H}{2} \right). \quad (14a)$$

Mit (12b), (15), (4a) folgt

$$a_s = 2\psi \sin^2 \frac{E_H}{2}$$

oder

$$a_s = 2\alpha \sin^2 \frac{E_H}{2} \cdot \sin \gamma. \quad (15a)$$

Da die brechenden Winkel  $\alpha$ , also nach (5a) auch die Einfallswinkel  $i_{1,H}$ , als klein angenommen werden bei der Ableitung dieser Näherungsformel, geht (15a) mit

$$E_H = \alpha_H(n_H - 1) \quad (20)$$

unter Vernachlässigung des aus (10) folgenden Unterschiedes zwischen  $n$  und  $n_H$  über in

$$a_s = 2\alpha^3(n - 1)^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma. \quad (21)$$

Für die Verdrehung des Hauptschnittes folgt die Näherung

$$z = \psi \cdot \frac{E_H}{2}, \quad (17a)$$

welche unter den gleichen Voraussetzungen mit (20) übergeht in

$$z = \frac{n-1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \sin(2\gamma). \quad (22)$$

Die Näherungsgleichung (21) genügt selbstverständlich der Bedingung  $a_s = 0$  für  $\gamma = 0$  und  $\gamma = 90^\circ$ .

Aus (21) folgt:

$$\frac{da_s}{d\gamma} = 2\alpha^3(n-1)^2 \cos \gamma \cdot (1 - 3 \sin^2 \gamma). \quad (23)$$

Demnach ist  $a_s$  ein Extremum für

$$\gamma = 90^\circ \quad \text{und} \quad \sin \gamma = \frac{1}{3} \sqrt{3} [\gamma = 35,2645^\circ].$$

Ferner ist

$$\frac{d^2 a_s}{d\gamma^2} = -2\alpha^3(n-1)^2 \sin \gamma (5 - 6 \sin^2 \gamma). \quad (23a)$$

In Fig. 4 ist  $a_s$  als Funktion von  $\gamma$  dargestellt für  $\alpha = 10^\circ$ ;  $n = 1,5$ ;  $\gamma = 0^\circ$  bis  $\gamma = 90^\circ$ . Die so erhaltene Kurve hat Wendepunkte für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\sin \gamma = \sqrt{\frac{5}{6}}$ , ein Maximum für  $\sin \gamma = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ ,

ein Minimum für  $\gamma = 90^\circ$ . Die Neigung der Wendetangente im Punkte  $\gamma = 0$  folgt aus (23) zu

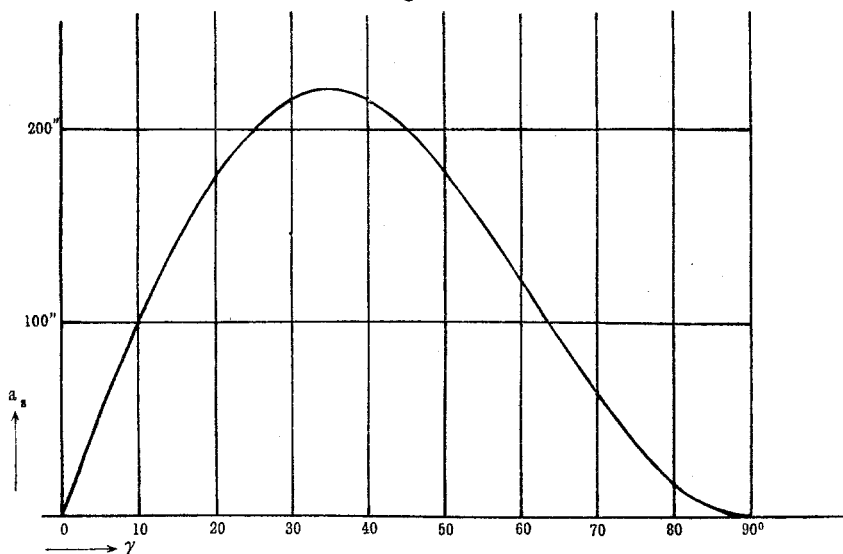
$$\frac{da_s}{d\gamma} = 2\alpha^3(n-1)^2. \quad (23b)$$

$z$  wird nach (22) ein Maximum für  $\gamma = 45^\circ$ . Für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$  ist  $z = 0$ . Es gilt noch die Näherung

$$z = \frac{a_s}{2E}. \quad (22a)$$

In Wirklichkeit ist  $\gamma = 35,2645^\circ$  der Grenzwert für den Winkel, bei dem  $a_s$  ein Maximum wird; der Grenzwert wird erreicht für

Fig. 4.



Der Seitenfehler  $a_s$  als Funktion des Drehungswinkels  $\gamma$   
für ein Rochon-Herschelsches Doppelprisma mit  $\alpha = 10^\circ$  und  $n = 1,5$ .

$\alpha = 0$ . Mit größer werdendem Winkel  $\alpha$  rückt dieser Wert nach kleineren Winkeln  $\gamma$ , ebenso rückt die Stelle, für die  $z$  ein Maximum wird, von  $\gamma = 45^\circ$  aus nach kleineren  $\gamma$  (mit wachsendem brechenden Winkel  $\alpha$ ).

Ich leite nunmehr eine streng gültige Gleichung für  $\sin a_s$  ab. Aus

$$\sin^2 \psi = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}$$

folgt mit (4):

$$\sin^2 \psi = \frac{\sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (24)$$

Hieraus folgt mit (12):

$$\cos^2 \omega = \frac{\sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 E_H}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (25)$$

$$\sin^2 \omega = \frac{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (26)$$

Aus (15) folgt:

$$\sin^2 a_s = \frac{\operatorname{tg}^2 l}{1 + \operatorname{tg}^2 l} \cdot \frac{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (27)$$

Aus (13), (14) und (4) folgt:

$$\operatorname{tg} l = \frac{2 \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{E_H}{2}}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos E_H}. \quad (27a)$$

Aus (27) und (27a) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a_s = \\ \frac{4 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^4 \frac{E_H}{2} \cdot (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H)}{\left\{ (1 + \cos E_H \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^4 \frac{E_H}{2} \right\} (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a_s = \\ \frac{4 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^4 \frac{E_H}{2} (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H)}{\left\{ 1 + \cos^2 E_H \sin^4 \gamma \operatorname{tg}^4 \alpha + 2 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \left[ \cos E_H + 2 \sin^4 \frac{E_H}{2} \right] \right\} (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer des Nenners ist

$$\cos E_H + 2 \sin^4 \frac{E_H}{2} = \frac{1 + \cos^2 E_H}{2}. \quad (30)$$

Mit (30) geht (29) über in:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a_s = \\ \frac{4 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^4 \frac{E_H}{2} (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H)}{\{ 1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 E_H \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha) \} (1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Aus (31) folgt, da  $1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 E_H$  wegfällt,

$$\sin a_s = 2 \sin^2 \frac{E_H}{2} \cdot \frac{\sin \gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + (\sin \gamma \operatorname{tg} \alpha)^2}. \quad (32)$$

Da  $E_H$  nur Null wird für  $\gamma = 90^\circ$  und  $\sin \gamma$  nur Null wird für  $\gamma = 0$ , so ist durch Gleichung (32), in deren rechten Gleichungsseite der Nenner nur  $\infty$  wird für den praktisch bedeutungslosen Fall

$\alpha = 90^\circ$ , streng bewiesen, daß beim Rochon-Herschelschen Doppelprisma für  $0 < \gamma / < 90^\circ$ :

$a_s > 0$  für positiven Winkel  $\gamma$ .

Die notwendige Bedingung dafür, daß  $a_s$  ein Extremum wird, ist

$$\frac{d \sin a_s}{d \gamma} = 0.$$

Es muß also sein:

$$\cos \gamma = 0$$

oder im zweiten Falle:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left( \frac{1 \sin a_s}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right)}{d (\sin \gamma)} &= 0 \\ \frac{\left( \sin^2 \frac{E_H}{2} + v \sin \frac{E_H}{2} \cos \frac{E_H}{2} \frac{d E_H}{d v} \right) (1 + v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \frac{E_H}{2}}{(1 + v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Hierbei wurde

$$v = \sin \gamma \quad (33a)$$

gesetzt. Der Zähler wird Null für

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{E_H}{2} + v \sin \frac{E_H}{2} \cos \frac{E_H}{2} \frac{d E_H}{d v} - v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \frac{E_H}{2} \\ + v^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \frac{E_H}{2} \cos \frac{E_H}{2} \frac{d E_H}{d v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

oder

$$\frac{\frac{d E_H}{d v}}{\operatorname{tg} \frac{E_H}{2}} = - \frac{1 - v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{v(1 + v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (35)$$

Diese Bedingung wird erfüllt erstens durch  $\gamma = 90^\circ$ , d. h.

$$v = 1, \quad \frac{d E_H}{d v} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{E_H}{2} = 0,$$

und zweitens für einen Winkel zwischen  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$ .

Nach der Näherungsformel (21) sollten sich für verschiedene  $\alpha$  bei gleichem  $\gamma$  und  $n$  die  $a_s$  verhalten wie die dritten Potenzen der  $\alpha$ . Die Durchrechnung ergibt, daß

$$\frac{a_{s1}}{a_{s2}} = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^u, \quad (36)$$

wobei  $u$  von  $\gamma$  und von den zu vergleichenden  $a_{s1}$  und  $a_{s2}$  abhängt und  $u > 3$ . Noch besser ist die Darstellung durch

$$\frac{a_{s1}}{a_{s2}} = \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right)^u \quad (37)$$

insofern geeignet, als  $u$  weniger von  $\gamma$  abhängt als bei der Darstellung durch (36).

Die Formel (32) ließe sich noch weiter entwickeln dadurch, daß man  $E_H$  durch  $i_{1,H}$  und schließlich durch  $\gamma$  ausdrückt. Bekanntlich ist für ein Prisma mit dem brechenden Winkel  $\alpha$  für den Einfallswinkel  $i_1$  der Austrittswinkel  $i'_2$  gegeben durch:

$$\sin i'_2 = \sin i_1 \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}, \quad (38)$$

wobei  $n$  das Brechungsverhältnis bezeichnet. Hieraus leite ich ab ( $\varepsilon$  = Ablenkung):

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon &= \sin (i_1 - \alpha) \\ \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha - \cos (2\alpha) \sin^2 i_1 + \sin (2\alpha) \sin i_1 \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \\ &- \cos (i_1 - \alpha) \sin i_1 \cos \alpha + \cos (i_1 - \alpha) \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

Durch Anwendung von (38a) auf den hier behandelten Fall folgt, indem statt  $\alpha$   $\alpha_H = 2 i_{1,H}$  und statt  $i_1$   $i_{1,H}$ , sowie statt  $n$   $n_H$  eingeführt wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin E_H &= -\sin i_{1,H} \cdot \sqrt{1 - n_H^2 \sin^2 (2 i_{1,H}) - \cos (4 i_{1,H}) \sin^2 i_{1,H}} \\ &+ \sin (4 i_{1,H}) \sin i_{1,H} \sqrt{n_H^2 - \sin^2 i_{1,H}} \\ &- \cos i_{1,H} \sin i_{1,H} \cos (2 i_{1,H}) + \cos i_{1,H} \sin (2 i_{1,H}) \cdot \sqrt{n_H^2 - \sin^2 i_{1,H}} \end{aligned} \right\} \quad (38b)$$

Dabei ist

$$n_H = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \psi} = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (38c)$$

und

$$\sin i_{1,H} = \sin \alpha \cdot \cos \gamma. \quad (5)$$

Führt man (38c) und (5) in (38b) ein und setzt dann

$$2 \sin^2 \frac{E_H}{2} = 1 - \cos E_H = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 E_H},$$

so erhält man aus (32) einen langen Ausdruck für  $\sin a_s$ , der  $a_s$  explicite als Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $\alpha$  und  $\gamma$  darstellt. Ich verzichte darauf, diesen Ausdruck hier wiederzugeben, da er praktisch keine große Bedeutung hat.

Ich habe als Bedingung dafür, daß gerade noch alle Drehungswinkel  $\gamma$  möglich sind, daß also gerade für  $\gamma = 0$  Totalreflexion eintritt, abgeleitet:

$$\sin \alpha = -\cos (2\alpha) + \sqrt{n^2 - 1} \cdot \sin (2\alpha). \quad (39)$$

Diese Gleichung läßt sich durch Probieren bequemer nach  $\alpha$  auflösen, als durch Einführen ein und derselben goniometrischen Funktion von  $\alpha$ . Für

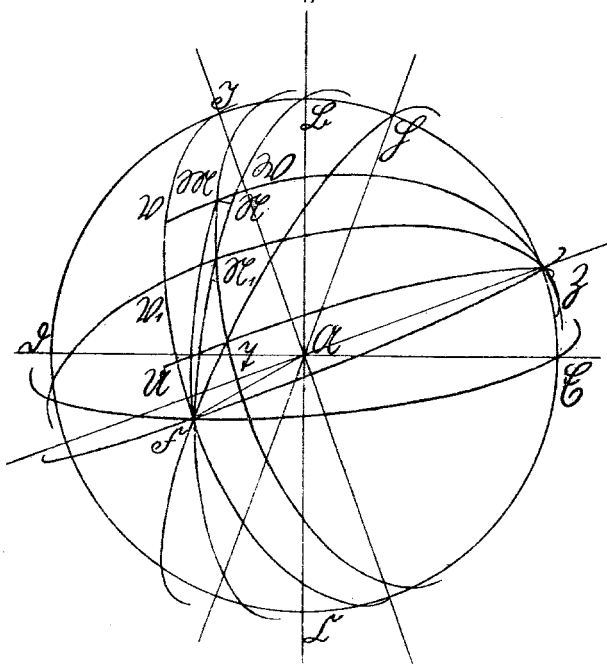
$$\begin{array}{lll} n = 1 & \text{ist} & \alpha = 90^\circ, \\ n = \infty & \text{,,} & \alpha = 0, \\ n = 1,5 & 1,6 & 2,0 \quad \text{,,} \quad \alpha = 30,9^\circ \quad 27,8^\circ \quad 19,9^\circ \end{array}$$

bis auf die letzte angegebene Stelle genau.

§ 2. Durchrechnung eines Rochon-Herschelschen Doppelprismas unter Benutzung einiger von H. Hartinger<sup>1)</sup> abgeleiteten Formeln.

In Fig. 5 ist  $\mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{A}$  wieder der Hauptschnitt des ersten Prismas,  $\mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{A}$  der Hauptschnitt des zweiten Prismas. Der in der Richtung  $\mathfrak{H}\mathfrak{A}$  einfallende Strahl wird durch das erste Prisma nach  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$  abgelenkt. Diese Ablenkung  $\delta = \delta_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$  ist konstant für alle  $\gamma$ , da der Einfallswinkel für das erste Prisma von  $\gamma$  unabhängig ist. Die Neigung

Fig. 5.



Zu den Durchrechnungsformeln des § 2.

des Strahles  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$  zum Hauptschnitt des zweiten Prismas ist  $\eta = \mathfrak{H}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{H}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \delta_2$  ist die Projektion von  $\delta$  auf den Hauptschnitt des zweiten

<sup>1)</sup> Herr Dr. Hartinger hat, nachdem ich experimentell die Unzulässigkeit der in allen bisherigen Veröffentlichungen gegebenen Darstellung gezeigt und ihn auf die bisher unvollständige mathematische Bearbeitung aufmerksam gemacht hatte, die Formeln (40), (42) bis (47) abgeleitet. Auch an dieser Stelle sei ihm für seine Mitarbeit gedankt. Die Formel (41) habe ich eingefügt an Stelle einer von Herrn Dr. Hartinger gegebenen Formel:  $\cos \delta_2 = \frac{\cos \delta}{\cos \gamma}$ , welche das Vorzeichen von  $\delta_2$  nicht eindeutig ergibt.

Prismas. Im sphärischen Dreieck  $\mathfrak{F}\mathfrak{U}\mathfrak{Z}$  ( $\angle \mathfrak{F}\mathfrak{U}\mathfrak{Z} = 90^\circ$ ) gelten die beiden Gleichungen:

$$\sin \eta = \sin \delta \sin (2\gamma), \quad (40)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{tg} \delta \cos (2\gamma). \quad (41)$$

Der Strahl  $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}$  wird in der Projektion auf den Hauptschnitt des zweiten Prismas abgelenkt um  $\angle \mathfrak{U}\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \angle_2$ . Der Einfallswinkel für die Projektion auf den Hauptschnitt des zweiten Prismas ist  $i_{\Pi} = -\delta_2$ .  $\angle_2$  wird mit dem zur Neigung  $\eta$  gehörenden Brechungsverhältnis  $N = \frac{n \cos \eta'}{\cos \eta}$  berechnet, wobei  $\sin \eta' = \frac{\sin \eta}{n}$ . Es ist ferner  $\angle \mathfrak{U}\mathfrak{U}\mathfrak{Z} = \angle \mathfrak{B}\mathfrak{U}\mathfrak{M}$ . Die Gesamtablenkung des Strahles  $\mathfrak{F}\mathfrak{U}$  durch beide Prismen ist  $E = \angle \mathfrak{F}\mathfrak{U}\mathfrak{M}$ , ihre Projektion auf den Hauptschnitt des zweiten Prismas ist  $E_2 = \angle \mathfrak{F}\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ .  $\mathfrak{Z}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}$  ist der zu  $\mathfrak{F}\mathfrak{U}\mathfrak{B}$  als Äquator gehörige Parallelkreis. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck  $\mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$  ist die Kathete  $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \eta''$  gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \eta'' = \operatorname{tg} \gamma \sin E_2, \quad (42)$$

wobei

$$E_2 = \delta_2 + \angle_2. \quad (43)$$

Der Winkel zwischen dieser Kathete  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$  und der Hypotenuse  $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$  sei mit  $\sigma$  bezeichnet. Im  $\angle \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{F}$  ist

$$\cos \sigma = \sin \gamma \sin E_2, \quad (44)$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{M} = a = \eta'' - \eta. \quad (45)$$

Der größte Kreis  $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$  steht senkrecht auf  $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ . Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck  $\mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$  ist

$$\sin a_s = \sin \sigma \sin a, \quad (46)$$

wobei  $a_s = \mathfrak{M}\mathfrak{M}$  die Größe ist, die in § 1 durch Gleichung (15) gegeben war. Im  $\angle \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{F}$  ist ferner:

$$\cos E = \cos \eta \cos E_2. \quad (47)$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{F}$  ist  $\mathfrak{F}\mathfrak{B} = E_h$ ,

$$\operatorname{tg} E_h = \frac{\operatorname{tg} E_2}{\cos \gamma}. \quad (48)$$

Im  $\angle \mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$  ist  $\mathfrak{M}\mathfrak{B} = a_h$  und

$$\operatorname{tg} a_h = \cos \sigma \operatorname{tg} a. \quad (49)$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{M} = E_h = E_h' - a_h. \quad (50)$$

### § 3. Durchrechnungsformeln

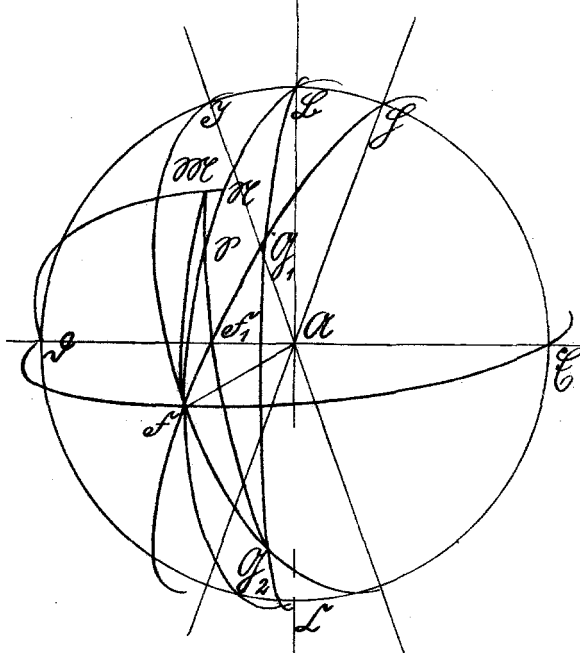
nach dem von J. F. W. Herschel angegebenen Verfahren.

J. F. W. Herschel<sup>1)</sup> hat angegeben, wie man die Ablenkung eines Lichtstrahles durch zwei ebene brechende Flächen berechnet,

<sup>1)</sup> Man vergleiche das S. 1, Anm. 1 genannte Buch, S. 81—83; besonders die Gleichungen (B), S. 82.

wenn die beiden Brechungsebenen nicht miteinander zusammenfallen. Ich habe die Herschelschen Gleichungen ergänzt durch Berechnung der Winkel zwischen den beiden Brechungsebenen und dem zu den Außenflächen des Rochon-Herschelschen Doppelp Prismas gehörigen Hauptschnitt.  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  der zu diesem Zweck entworfenen Fig. 6 haben die gleiche Bedeutung wie in Fig. 3. Der Einfallswinkel für die

Fig. 6.



Zu den Durchrechnungsformeln des § 3.

erste Brechung ist  $i_1 = \alpha$ ; der zugehörige Brechungswinkel  $i'_1$  ist bestimmt durch:

$$\sin i'_1 = \frac{\sin \alpha}{n}. \quad (51)$$

Aus (5) und (6) folgt die Herschelsche Formel

$$\sin \frac{\alpha_H}{2} = \sin \alpha \cos \gamma. \quad (6a)$$

$\angle \mathfrak{F} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \xi$  ist der Winkel, den die erste Brechungsebene mit dem Hauptschnitt bildet.  $\angle \mathfrak{F} \mathfrak{F}_1 \mathfrak{G}_2 = \theta$  ist der Winkel, den die zweite Brechungsebene mit der durch das erste Einfallslot  $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}$  und die Drehachse  $\mathfrak{F} \mathfrak{L}$  gelegten Ebene bildet;  $\angle \mathfrak{F} \mathfrak{G}_2 \mathfrak{F}_1 = \theta'$  der



Winkel zwischen der zweiten Brechungsebene und der Ebene durch die Drehachse  $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$  und das zweite Einfallslot  $\mathfrak{G}_2\mathfrak{A}$ .  $\angle \mathfrak{A}\mathfrak{G}_2\mathfrak{F}_1 = i_2$ ;  $\angle \mathfrak{A}\mathfrak{G}_2\mathfrak{M} = i'_2$ .  $\mathfrak{F}\mathfrak{M} = E$ .  $\angle \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}\mathfrak{M} = z' = \gamma + z$ ;  $\angle \mathfrak{F}\mathfrak{M}\mathfrak{F}_1 = \varrho$ .  $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1 = i_1 - i'_1$ .  $\mathfrak{F}_1\mathfrak{M} = i_2 - i'_2$ .  $\mathfrak{F}\mathfrak{C} = e$ ;  $\mathfrak{G}_2\mathfrak{C} = x$ ;  $\mathfrak{C}\mathfrak{M} = t$ ;  $\mathfrak{C}\mathfrak{N} = a'_h$ ;  $\angle \mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{N} = P$ ;  $\mathfrak{N}\mathfrak{M} = a_s$ ;  $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = E_h$ .

Im gleichschenkligen  $\triangle \mathfrak{F}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$  besteht zwischen dem Winkel  $\xi$  an der Grundlinie, dem halben Winkel an der Spitze  $90^\circ - \gamma$  und der Seite  $\alpha$  die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \alpha}. \quad (52)$$

Die Neperschen Gleichungen ergeben für  $\triangle \mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_2$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta + \Theta'}{2} = \frac{\cos \frac{i'_1}{2}}{\cos \left( \alpha - \frac{i'_1}{2} \right)} \operatorname{tg} \gamma, \quad (53)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta - \Theta'}{2} = \frac{\sin \frac{i'_1}{2}}{\sin \left( \alpha - \frac{i'_1}{2} \right)} \operatorname{tg} \gamma. \quad (54)$$

Aus dem  $\triangle \mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$  folgt

$$\sin i_2 = - \frac{\sin \alpha_H \sin \xi}{\sin \Theta}, \quad (55)$$

$$\sin i'_2 = n \sin i_2. \quad (56)$$

Im  $\triangle \mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\mathfrak{M}$  ist

$$\cos E = \cos (i_1 - i'_1) \cos (i_2 - i'_2) - \sin (i_1 - i'_1) \sin (i_2 - i'_2) \cos \Theta. \quad (57)$$

Die Berechnung von  $E$  aus (57) ist nicht zweckmäßig, da ohne- dies  $\varrho$  berechnet werden muß. Im  $\triangle \mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\mathfrak{M}$  gelten die Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho + z'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{\cos \left( \frac{i_1 - i'_1}{2} - \frac{i_2 - i'_2}{2} \right)}{\cos \left( \frac{i_1 - i'_1}{2} + \frac{i_2 - i'_2}{2} \right)}, \quad (58)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho - z'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{\sin \left( \frac{i_1 - i'_1}{2} - \frac{i_2 - i'_2}{2} \right)}{\sin \left( \frac{i_1 - i'_1}{2} + \frac{i_2 - i'_2}{2} \right)}, \quad (59)$$

$$\sin E = \frac{\sin (i_1 - i'_1) \sin \Theta}{\sin \varrho}, \quad (60)$$

$$\sin E = \frac{\sin (i_2 - i'_2) \sin \Theta}{\sin z'}. \quad (60a)$$

Im  $\mathcal{A} \mathcal{S} \mathcal{F} \mathcal{G}_2$  gelten die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \frac{x+e}{2} = \frac{\sin \left( \frac{\gamma + \Theta'}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\gamma - \Theta'}{2} \right)} \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right), \quad (61)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-e}{2} = \frac{\cos \left( \frac{\gamma + \Theta'}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\gamma - \Theta'}{2} \right)} \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (62)$$

Aus (61) und (62) folgen  $x$  und  $e$ :

$$t = -i_2' - x. \quad (63)$$

Im  $\mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{F}$  ist

$$\sin(180^\circ - P) = \frac{\sin \varrho \sin E}{\sin e}. \quad (64)$$

Im  $\mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{S}$  ( $\angle \mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{S} = 90^\circ$ ) ist

$$\sin a_s = \sin t \sin P. \quad (65)$$

Hieraus folgt mit (64):

$$\sin a_s = \frac{\sin \varrho \sin E \sin t}{\sin e}. \quad (66)$$

Ferner ist im  $\mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{S}$ :

$$\operatorname{tg} a_h' = \cos P \cdot \operatorname{tg} r, \quad (67)$$

$$E_h = e + a_h'. \quad (68)$$

#### § 4. Drehkeilpaar neuer Art.

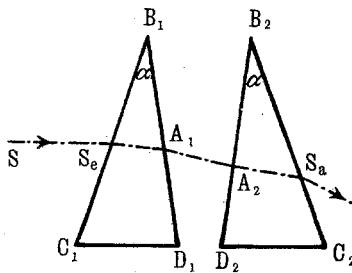
a) Nach der Ermittlung der Größe  $a_s$ , die Seitenfehler genannt werden soll, erkannte ich bald, daß zur Verkleinerung von  $a_s$  die Veränderlichkeit von  $\angle_2$  herabgesetzt werden muß. Und zwar muß nicht etwa  $\angle_2$  und die zugehörige wahre Ablenkung  $\mathcal{A}$  von  $\gamma$  unabhängig sein, sondern es ist eine ganz bestimmte Abhängigkeit dieser beiden Größen ( $\mathcal{A}$  und  $\angle_2$ ) von  $\gamma$  notwendig (§ 5).

War in § 2  $i_2 = -\delta_2$ , so habe ich nunmehr dem zweiten Keil, später allgemein dem zweiten Prismensystem, das also im Gegensatz zum ersten nicht im Hauptschnitt durchsetzt wird, eine andere Stellung gegeben als den Prismen des Rochon-Herschelschen Doppelp Prismas. Die Drehachse fällt jetzt nicht mehr mit der Senkrechten zu den Innenflächen zusammen, sondern bildet mit dem Einfallslot der Eintrittsfläche des zweiten Prismensystems dauernd den Winkel  $\beta$ . Der zugehörige Einfallswinkel für die Projektion auf den Hauptschnitt des zweiten Prismensystems an dieser Fläche werde mit  $i_{II}$  bezeichnet:

$$i_{II} = -\delta_2 + \beta. \quad (69)$$

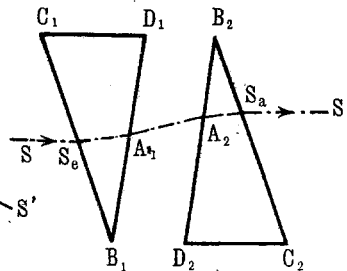
In den Fig. 7 a und 7 b ist ein Drehkeilpaar neuer Art in groben Umrissen dargestellt. Die beiden Elemente des Drehkeilpaares sind der Einfachheit halber einander gleich und als einfache Prismen angenommen worden; auf die richtige Neigung der Fläche  $B_2 D_2$  zur Drehachse  $SS_e$  ist in der Zeichnung kein Wert gelegt worden, da dieser Neigungswinkel vom brechenden Winkel  $\alpha$  und vom Brechungsverhältnis  $n$  — allgemein ausgedrückt: von der Bauart der beiden Bestandteile des Drehkeilpaares — abhängt. Fig. 7 a gilt für die größte Gesamtablenkung, Fig. 7 b für die Gesamtablenkung Null des parallel der Drehachse auffallenden Strahles  $SS_e$ . Die Fig. 7 b kann man sich aus der Fig. 1 b dadurch entstanden denken, daß die Fig. 1 b

Fig. 7 a.



Drehkeilpaar neuer Art.  
Die Innenflächen  $B_1 D_1$  und  $B_2 D_2$  der beiden Teile des Drehkeilprismas stehen im Gegensatz zu Fig. 1 a nicht senkrecht zur Drehachse  $SS_e$ .

Fig. 7 b.



Beide Prismen des Drehkeilprismas neuer Art sind hier nach entgegengesetzten Richtungen um  $90^\circ$  gedreht, so daß die Gesamtablenkung Null wird.

in ihrer Zeichnungsebene um den in Gleichung (69) eingeführten Winkel  $\beta$  im Uhrzeigersinn gedreht wird und die Prismen neu zentriert werden.

Bei der im übrigen nach § 2 erfolgenden Durchrechnung ist  $\mathcal{A}_n$  die Ablenkung, welche das zweite Prismensystem der Projektion des Strahles auf den Hauptschnitt des zweiten Prismensystems erteilt. Darauf, wie die Durchrechnung nach § 3, welche nur die wahren Ablenkungen bei jeder Brechung zugrunde legt, für das Drehkeilpaar neuer Art abzuändern wäre, will ich hier nicht eingehen.

Ein interessanter Fall ergibt sich daraus, daß man zur Verkleinerung des Seitenfehlers statt der Ablenkung  $\mathcal{A}$  eine geeignete Veränderlichkeit zu erteilen, die beiden Prismen (allgemein: Prismensysteme) nicht um gleiche Winkel  $\gamma$  nach entgegengesetzten Seiten dreht um die gemeinsame Senkrechte zu den Innenflächen als Achse, sondern daß man das zweite Prisma um einen geeigneten Winkel

$$\gamma' = \gamma + V\gamma \quad (70)$$

dreht. Einen sehr guten Überblick für die Ermittlung des Unterschiedes zwischen  $\gamma$  und  $\gamma'$  gibt die Anwendung der alten Näherungsgleichung (2) nicht — wie ich gezeigt habe, ohne Berechtigung — auf  $a_s$  selbst, sondern auf die aus der Variation von  $\gamma$  folgende Variation von  $a_s$ . Diese Betrachtung war der Anfang meiner bis Ende Dezember 1917 zurückreichenden Untersuchungen über eine vollständige Theorie des Doppelprismas. Es folgt so aus (2):

$$Va_s = \mathcal{A} \cdot V \sin \gamma = \mathcal{A} \cdot \cos \gamma V\gamma. \quad (71)$$

Da nach der Näherungstheorie in § 1 für das Drehkeilpaar alter Art die Gleichung (21)

$$a_s = 2\alpha^3(n-1)^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma$$

gilt, so muß

$$Va_s = -a_s = -2\alpha^3(n-1)^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma$$

sein, also

$$V\gamma = -\frac{2\alpha^3(n-1)^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma}{\mathcal{A} \cdot \cos \gamma}. \quad (72)$$

Mit der ersten Näherung  $\mathcal{A} = \alpha(n-1)$  folgt aus (72)

$$V\gamma = -\alpha^2(n-1) \sin(2\gamma). \quad (73)$$

Durch Vergleich von (73) mit (22) folgt das bemerkenswerte Ergebnis, daß näherungsweise

$$V\gamma = -2z, \quad (74)$$

das man im Anschluß an Fig. 1 leicht verständlich machen kann, da  $\mathcal{A}$  in bezug auf die Achse  $\mathfrak{Z}$  gewissermaßen mit einem halb so großen Hebelarm als  $\mathcal{A} + \delta$  in bezug auf die Achse  $\mathfrak{F}$  wirkt. Aus (73) folgt noch, daß  $V\gamma$  ein Extremum wird für  $\gamma = 45^\circ$ . Daraus läßt sich ableiten, daß nicht etwa für alle  $\gamma$  das Verhältnis  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  konstant ist, das  $a_s = 0$  entspricht.

Diese zweite Art der Verkleinerung des Seitenfehlers ist infolgedessen bei konstantem  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  in bezug auf die Verkleinerung des  $a_s$  für alle  $\gamma$  bei weitem nicht so vollkommen wie die zu Anfang des § 4 beschriebene erste Art (in der die Prismenstellung geeignet gewählt wurde) und hat außerdem den Nachteil, daß sich  $a_s$  bei Umkehrung des Lichtweges ändert, falls man bei der Umkehrung dem einfallenden Strahl wieder die Richtung der Drehachse gibt.

Wegen des zuletzt angeführten Nachteils will ich auf einen von H. Hartinger herrührenden Vorschlag, den zuerst angeführten Nachteil durch ein mit  $\gamma$  veränderliches Übersetzungsverhältnis  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  mittels

eines geeigneten mechanischen Antriebes vollständig zu beseitigen, nicht weiter eingehen.

Es sei noch eine dritte Möglichkeit vorgeschlagen, den Seitenfehler  $a_s$  verschwinden zu lassen. Mein Vorschlag besteht darin, das Gesamtprismensystem um die Gerade  $\mathfrak{AB}$  des „Hauptschnittes“ (den man auch „Ablenkungsebene“ nennen könnte) zu drehen<sup>1)</sup>, die zur Innenfläche der Prismen senkrecht steht. Die mechanische Verwirklichung dieser dritten Möglichkeit hat mit dem Hartingerschen Vorschlag sowohl den Nachteil gemeinsam, daß sie einen Mehraufwand von mechanischen Mitteln erfordert, als auch den Vorteil, daß  $a_s$  nicht nur mit einem hohen Grade der Annäherung, sondern streng zum Verschwinden gebracht werden kann für alle  $\gamma$ .

b) Erste Näherungstheorie; der Unterschied zwischen  $n$  und  $N$  wird vernachlässigt, also  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$  angenommen. Die einfachste Annahme für die Darstellung von  $\mathcal{A}$  als Funktion des Einfallswinkels  $i$  (für die erste Fläche des zweiten Prismensystems) ist

$$\mathcal{A} = a + bi + ci^2. \quad (75)$$

Die Annahme

$$\mathcal{A} = a + bi \quad (76)$$

ist sicher nicht zulässig; die genaue Funktion  $\mathcal{A} = f(i)$  ist bekannt<sup>2)</sup>, soll aber hier nicht benutzt werden, da die Formeln zu unübersichtlich werden. Wir setzen

$$\delta_2 = \delta \cos(2\gamma), \quad (77)$$

$$i = -\delta \cos(2\gamma) + \beta, \quad (78)$$

$$E_2 = a + b\beta + c\beta^2 + \delta(1 - b - 2c\beta)\cos 2\gamma + c\delta^2\cos^2(2\gamma). \quad (79)$$

Für kleine Ablenkung  $E_2$  ist nach (44)

$$\sigma = 90^\circ - \gamma, \quad (80)$$

$$\eta = \delta \sin(2\gamma), \quad (81)$$

und schließlich nach längerer Rechnung

$$a_s = \sin \gamma \{a + b\beta + c\beta^2 - \delta(1 - b - 2c\beta) + c\delta^2 - \delta \cos^2 \gamma (2b + 4c\beta + 4c\delta) + 4c\delta^2 \cos^4 \gamma\}. \quad (82)$$

Da  $a_s = 0$  sein muß für  $\gamma = 90^\circ$ , gilt als Grenzbedingung

$$a + b\beta + c\beta^2 - \delta(1 - b - 2c\beta) + c\delta^2 = 0. \quad (83)$$

So folgt aus (82):

$$a_s = 2\delta \sin \gamma \cos^2 \gamma (-b - 2c\beta - 2c\delta \sin^2 \gamma). \quad (84)$$

<sup>1)</sup> Der Drehungswinkel ist  $-\psi$ , wobei  $\psi$  gegeben ist durch Gleichung (4).

<sup>2)</sup> Man muß zu diesem Zwecke in Gleichung (38a)  $E$  durch  $\mathcal{A}$  und  $i_1$  durch  $i_2$  ersetzen.

Für das Drehkeilpaar alter Art ist  $\beta = 0$ ; also folgt für dieses aus (84):

$$a_s = -2\delta \sin \gamma \cos^2 \gamma (b + 2c\delta \sin^2 \gamma). \quad (85)$$

Die durch (85) gegebene näherungsweise Darstellung geht also schon etwas weiter als Gleichung (21), insofern als zu  $\sin \gamma \cos^2 \gamma$  noch ein Faktor hinzugetreten ist, der einen  $\sin^2 \gamma$  proportionalen Summanden enthält. Die Grenzbedingung kann auch abgeleitet werden aus

$$\mathcal{A}_{\gamma=90^\circ} = \delta = a + b(\delta + \beta) + c(\delta + \beta)^2, \quad (86)$$

da

$$\delta_2 = -\delta \quad \text{für} \quad \gamma = 90^\circ. \quad (86a)$$

Betrachten wir noch den Sonderfall  $\beta = \delta$  (86b), dann folgt aus (86):

$$\delta = a + 2b\delta + 4c\delta^2, \quad (87)$$

$$a = (-2b + 1)\delta - 4c\delta^2, \quad (87a)$$

und schließlich

$$a_s = -2\delta \sin \gamma \cos^2 \gamma [b + 3c\delta - c\delta \cos(2\gamma)]. \quad (88)$$

c) Vernachlässigt man den Unterschied zwischen  $N$  und  $n$  nicht, sondern setzt vielmehr für  $N$  in erster Annäherung

$$N = n + \frac{n^2 - 1}{2n} \frac{\eta^2}{57,296^2}, \quad (89)$$

dann erhält man eine zweite Näherung für die Darstellung von  $a_s$ . Aus (89) folgt

$$\frac{N-1}{n-1} = 1 + \frac{n+1}{2n} \frac{\delta^2}{57,296^2} \sin^2(2\gamma), \quad (90)$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \cdot \left( \frac{N-1}{n-1} \right) = (a + bi + ci^2) [1 + k \sin^2(2\gamma)], \quad (91)$$

wobei

$$k = \frac{n+1}{2n} \frac{\delta^2}{57,296^2}. \quad (92)$$

Man erhält schließlich nach längeren Rechnungen, die ich hier nicht wiedergeben will:

$$\left. \begin{aligned} a_s = & -2 \sin \gamma \cos^2 \gamma [b\delta + 2c\delta^2 - 2k(a + b\delta + c\delta^2) \\ & + 2\beta(c\delta - kb - 2kc\delta) - 2\beta^2 kc + 2\cos^2 \gamma \{-c\delta^2 \\ & + k(a + 3b\delta + 5c\delta^2) + \beta k(b + 6c\delta) + \beta^2 kc\} \\ & - 4k\cos^4 \gamma (b\delta + 4c\delta^2 + 2\beta c\delta) + 8\cos^6 \gamma \cdot kc\delta^2]. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Mit  $k = 0$  geht (93) selbstverständlich wieder über in die Formel (84) von § 4b, da  $k = 0$   $N = n$  bedeutet.

Es sei noch erwähnt, daß auch für  $\beta \leq 0$ , also für das Drehkeilpaar neuer Art, die Näherungsregel gilt, daß bei proportionaler Vergrößerung von  $\alpha$  und  $\beta$ , ähnlich wie bei Gleichung (36):

$$\frac{a_{s_1}}{a_{s_2}} = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^u. \quad (94)$$

### § 5. Sinusbedingung für ein Drehkeilpaar.

Ist  $a = 0$  und  $a_s = 0$ , dann fallen in Fig. 5 die Punkte  $\mathfrak{N}_1$ ,  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{R}$  zusammen; dann wird  $\eta'' = \eta$ ;  $E_h = E$  und

$$\sin \eta = \sin \gamma \cdot \sin E. \quad (95)$$

Aus (95) folgt

$$\sin E = \frac{\sin \eta}{\sin \gamma}. \quad (95 \text{ a})$$

Führt man in (95 a) die Gleichung (40) ein, dann folgt

$$\sin E = 2 \sin \delta \cos \gamma. \quad (96)$$

Ich will diese Gleichung die erste Form der Sinusbedingung für ein Drehkeilpaar nennen. Ist die Bedingung (96) zwischen dem Sinus der Ablenkung des ersten Prismensystems und dem Sinus der Ablenkung des Gesamtprismensystems erfüllt, dann verschwindet für diesen Drehungswinkel  $\gamma$  die Seitenablenkung  $a_s$  und umgekehrt. Je kleiner  $\delta$  und  $E$  werden<sup>1)</sup>, desto mehr ist bei beliebiger Prismenstellung (gekennzeichnet durch den Winkel  $\beta$ ) und bei beliebigen  $\gamma$   $a_s = 0$ ; desto besser gilt auch die Gleichung (1):  $E = 2 \delta \cos \gamma$ .

Denkt man sich in Fig. 5 durch  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{N}_1$  nicht den Parallelkreis zum Äquator  $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{N}_1$ , sondern den größten Kreis gelegt, dann gilt in dem so entstehenden sphärischen Dreieck:

$$\cos \mathcal{A} = \cos E \cos \delta + \sin E \sin \delta \cos \gamma. \quad (97)$$

Aus (96) folgt

$$\cos E = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma}.$$

Dadurch wird (97) zu

$$\cos \mathcal{A} = \cos \delta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma} + 2 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma, \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \mathcal{A} &= 1 - \cos^2 \mathcal{A} = 1 - \cos^2 \delta \{ 1 - 4 (1 - \cos^2 \delta) \cos^2 \gamma \} \\ &\quad - 4 (1 - \cos^2 \delta)^2 \cos^4 \gamma \\ &\quad - 4 \cos^2 \gamma \cos \delta (1 - \cos^2 \delta) \sqrt{1 - 4 (1 - \cos^2 \delta) \cos^2 \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

<sup>1)</sup> Für das Drehkeilpaar (Abbe, Abh., 2. Bd., S. 134) im Abbeschen Totalrefraktometer, dessen Elemente geradsichtig sind für eine bestimmte Farbe, gilt (96) für diese Farbe streng, da  $E$  und  $\delta$  verschwinden. Für die anderen Farben gilt dann Gleichung (96) mit weitgehender Näherung.

Hieraus folgt nach einigen Umformungen

$$\sin \mathcal{A} = \sin \delta \cos \gamma \sqrt{[2 \cos \delta - \sqrt{1 - 4 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma}]^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma}. \quad (100)$$

Denkt man sich in Gleichung (100) für  $\cos \delta$  noch  $\sqrt{1 - \sin^2 \delta}$  geschrieben, so erhält man damit die zweite Form der Sinusbedingung für ein Drehkeilpaar. Aus (100) folgt noch

$$\sin \frac{\mathcal{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma} - 2 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma}{2}}. \quad (101)$$

Mit

$$\sin \frac{\mathcal{A}_2}{2} = \frac{\sin \frac{\mathcal{A}}{2}}{\cos \eta} \quad (102)$$

und  $\cos^2 \eta = 1 - \sin^2 \eta$ , sowie Einführung von (40) folgt

$$\sin \frac{\mathcal{A}_2}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{(1 - \sin^2 \delta)(1 - 4 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma)} - 2 \sin^2 \delta \cos^2 \gamma}{2[1 - \sin^2 \delta \sin^2(2\gamma)]}}. \quad (103)$$

Gleichung (103) sei die dritte Form der Sinusbedingung für ein Drehkeilpaar genannt.

Für die Sonderfälle  $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  folgt

für  $\gamma = 0^\circ$ :

$$\sin \mathcal{A}_2 = \sin \mathcal{A} = \sin \delta [2 \cos \delta - \sqrt{(2 \cos \delta)^2 - 3}], \quad (104)$$

für  $\gamma = 30^\circ$ :

$$\sin \mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \delta \sqrt{(2 \cos \delta \sqrt{1 - 3 \sin^2 \delta})^2 + \frac{1}{3}}, \quad (105)$$

$$\sin \mathcal{A}_2 = \frac{\sin \delta \sqrt{8(5 - 3 \cos \delta \sqrt{1 - 3 \sin^2 \delta} - 6 \sin^2 \delta)}}{4 - 3 \sin^2 \delta}, \quad (105a)$$

für  $\gamma = 45^\circ$ :

$$\sin \mathcal{A} = \frac{\sin \delta}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(2 \cos \delta - \sqrt{1 - 2 \sin^2 \delta})^2 + 1}, \quad (106)$$

$$\sin \mathcal{A}_2 = \operatorname{tg} \delta, \quad (106a)$$

für  $\gamma = 60^\circ$ :

$$\sin \mathcal{A} = \sin \delta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{4}}, \quad (107)$$

$$\sin \mathcal{A}_2 = \frac{4 \operatorname{tg} \delta}{4 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \quad (107a)$$

Für  $\gamma = 90^\circ$  ist immer  $\delta = \mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ , da ein solches Drehkeilpaar für  $\gamma = 90^\circ$  gleichwertig mit einer planparallelen Platte sein soll.



Es läßt sich allgemein immer erreichen, daß  $a_s$  außer für  $\gamma = 0$  und  $\gamma = 90^\circ$  noch für einen zwischenliegenden Winkel  $\gamma$  zu Null wird. Für  $\gamma = 0$  ist zwar  $a_s$  immer Null; trotzdem gilt die aus (96) folgende Bedingung  $\sin E_{\gamma=0} = 2 \sin \delta$  nur dann, wenn die Nullstelle des Faktors von  $\sin \gamma \cos^2 \gamma$  für  $\gamma = 0$  erreicht wird. Zum Schluß seien noch einige für beliebige Gestalt des ersten und zweiten Prismensystems gültige Zahlenwerte mitgeteilt.

Für  $\delta = 5^\circ$  müssen  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}_2$  die folgenden Werte annehmen, falls  $a_s$  bei dem zugehörigen  $\gamma$  zu Null werden soll:

$\gamma =$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$45,0547$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\mathcal{A} =$	$5,0385$	$5,0145$	$5,0000$	$5,0000$	$4,9952$	$5,0000^0$
$\mathcal{A}_2 =$	$5,0385$	$5,0289$	$5,0192$	$5,0192$	$5,0095$	$5,0000^0$

Für  $\delta = 30^\circ$ :

$\gamma =$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$47,0588$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\mathcal{A} =$	$60,0^0$	$36,0970$	$30,4146$	$30,0000$	$28,9546$	$30,0000^0$
$\mathcal{A}_2 =$	$60,0^0$	$40,2078$	$35,2645$	$34,7480$	$32,2042$	$30,0000^0$