

LES ORDINAUX TRANSFINIS

par Jacques Bailhache, Janvier-février 2018

Tout ordinal peut être défini comme le plus petit ordinal strictement supérieur à tous les ordinaux d'un ensemble : l'ensemble vide pour 0, $\{\alpha\}$ pour le successeur de α , $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pour un ordinal qui a pour suite fondamentale $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$

1 Notation algébrique

On définit les opérations arithmétiques sur les ordinaux :

- addition : $\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + \text{succ}(\beta) = \text{succ}(\alpha + \beta)$; $\alpha + \lim(f) = \lim(n \mapsto \alpha + f(n))$
- multiplication : $\alpha \times 0 = \alpha$; $\alpha \times \text{succ}(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha$; $\alpha \times \lim(f) = \lim(n \mapsto \alpha \times f(n))$
- exponentiation : $\alpha^0 = 1$; $\alpha^{\text{succ}(\beta)} = \alpha^\beta \times \alpha$; $\alpha^{\lim(f)} = \lim(n \mapsto \alpha^{f(n)})$

2 Fonctions de Veblen

Ces fonctions procèdent par énumération de points fixes : $\varphi(\dots, \beta, 0, \dots, 0, \gamma)$ représente le $(1 + \gamma)^{\text{eme}}$ point fixe commun aux fonctions $\xi \mapsto \varphi(\dots, \delta, \xi, 0, \dots, 0)$ pour tous les $\delta < \beta$.

3 Notation de Simmons

$\text{Fix}fz = f^w(z + 1) =$ plus petit point fixe de f strictement supérieur à z .

$\text{Next} = \text{Fix}(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$

$[0]h = \text{Fix}(\alpha \mapsto h^\alpha \omega)$; $[1]hg = \text{Fix}(\alpha \mapsto h^\alpha g\omega)$; $[2]hgf = \text{Fix}(\alpha \mapsto h^\alpha g f \omega)$; etc...

Correspondance avec ϕ de Veblen : $\phi(1 + \alpha, \beta) = ([0]^\alpha \text{Next})^{1+\beta} \omega$; $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = ([0]^\beta (([1][0])^\alpha \text{Next}))^{1+\gamma} \omega$

4 Notation RHS0

On part de 0, si on ne voit aucune régularité on prend le successeur, si on voit une régularité, si on a une notation pour cette régularité on l'utilise sinon on l'invente, puis on saute à la limite.

Correspondance avec la notation de Simmons : $\dots, [3] \rightarrow R5, [2] \rightarrow R4, [1] \rightarrow R3, [0] \rightarrow R2, \text{Next} \rightarrow R1, \omega \rightarrow H \text{suc } 0$

5 Fonctions effondrantes ordinales (Ordinal collapsing functions)

Ces fonctions utilisent des ordinaux non dénombrables pour définir des ordinaux dénombrables.

On définit des ensembles d'ordinaux qui peuvent être construits à partir de certains ordinaux et de certaines opérations, puis on définit le plus petit ordinal qui n'appartient pas à cet ensemble, ou le plus petit ordinal qui est plus grand que tous les ordinaux dénombrables de cet ensemble.

Ces fonctions sont des extensions de fonctions sur des ordinaux dénombrables, dont on peut atteindre le point fixe en les appliquant à un ordinal non dénombrable, puis le dépasser en les appliquant à des ordinaux non dénombrables plus grands.

Exemples :

- ψ de Madore : $\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ si $\alpha < \zeta_0$; $\psi(\Omega) = \zeta_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$.
- θ de Feferman : $\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ si $\alpha < \Gamma_0$ et $\beta < \Gamma_0$; $\theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, 0)$.
- C de Taranovsky : $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si α est dénombrable; $C(\Omega_1, 0) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.

Nom	Symbole	RHS0	Algébrique	Veblen	Simmons	Madore	Taranovsky
Zero	0	0	0				0
Un	1	suc 0	1	$\varphi(0, 0)$			$C(0, 0)$
Deux	2	suc (suc 0)	2				$C(0, C(0, 0))$
Omega	ω	H suc 0	ω	$\varphi(0, 1)$	ω		$C(1, 0)$
		suc (H suc 0)	$\omega + 1$				$C(0, C(1, 0))$
		H suc (H suc 0)	$\omega \times 2$				$C(1, C(1, 0))$
		H (H suc) 0	ω^2	$\varphi(0, 2)$			$C(C(0, C(0, 0)), 0)$
		H H suc 0	ω^ω	$\varphi(0, \omega)$			$C(C(1, 0), 0)$
		H H H suc 0	ω^{ω^ω}	$\varphi(0, \omega^\omega)$			$C(C(C(1, 0), 0), 0)$
Epsilon zero	ε_0	$R_1 H \text{suc } 0$	ε_0	$\varphi(1, 0)$	$\text{Next } \omega$	$\psi(0)$	$C(\Omega_1, 0)$
		$R_1(R_1 H) \text{suc } 0$	ε_1	$\varphi(1, 1)$	$\text{Next}^2 \omega$	$\psi(1)$	$C(\Omega_1, C(\Omega_1, 0))$
		$H R_1 H \text{suc } 0$	ε_ω	$\varphi(1, \omega)$	$\text{Next}^\omega \omega$	$\psi(\omega)$	$C(C(0, \Omega_1), 0)$
		$R_1 H R_1 H \text{suc } 0$	$\varepsilon_{\varepsilon_0}$	$\varphi(1, \varphi(1, 0))$	$\text{Next}^{\text{Next} \omega} \omega$	$\psi(\psi(0))$	$C(C(C(\Omega_1, 0), \Omega_1), 0)$
Zeta zero	ζ_0	$R_2 R_1 H \text{suc } 0$	ζ_0	$\varphi(2, 0)$	$[0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega)$	$C(C(\Omega_1, \Omega_1), 0)$
Eta zero	η_0	$R_2(R_2 R_1) H \text{suc } 0$	η_0	$\varphi(3, 0)$	$[0]^2 \text{Next } \omega$		$C(C(\Omega, C(\Omega, \Omega)), 0)$
		$H R_2 R_1 H \text{suc } 0$		$\varphi(\omega, 0)$	$[0]^\omega \text{Next } \omega$		$C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Feferman -Schütte	Γ_0	$R_3 R_2 R_1 H \text{suc } 0$ $= R_{3\dots 1} H \text{suc } 0$	Γ_0	$\varphi(1, 0, 0)$ $= \varphi(2 \mapsto 1)$	$[1][0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^\Omega)$	$C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Ackermann		$R_3(R_3 R_2) R_1 H \text{suc } 0$		$\varphi(1, 0, 0, 0)$ $= \varphi(3 \mapsto 1)$	$[1]^2[0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^2})$	
Small Veblen ordinal		$H R_3 R_2 R_1 H \text{suc } 0$		$\varphi(\omega \mapsto 1)$	$[1]^\omega[0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^\omega})$	$C(\Omega_1^\omega, 0)$ $= C(C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Large Veblen ordinal		$R_4 R_3 R_2 R_1 H \text{suc } 0$ $= R_{4\dots 1} H \text{suc } 0$		+ petit ord. non rep.	$[2][1][0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$	$C(\Omega_1^{\Omega_1}, 0)$ $= C(C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Bachmann- Howard ordinal		$R_{\omega\dots 1} H \text{suc } 0$			+ petit ord. non rep.	$\psi(\varepsilon_{\Omega+1})$	$C(C(\Omega_2, \Omega_1), 0)$