

# LES ORDINAUX TRANSFINIS

par Jacques Bailhache, Janvier 2018

Un ordinal est soit 0, soit le successeur d'un ordinal, soit la limite ou la borne supérieure de  $f(0), f(1), f(2), \dots$

## 1 Ma notation

On part de 0, si on ne voit aucune régularité on prend le successeur, si on voit une régularité, si on a une notation pour cette régularité on l'utilise sinon on l'invente, puis on saute à la limite.

## 2 Notation algébrique

On définit les opérations arithmétiques sur les ordinaux :

- addition :  $\alpha + 0 = \alpha; \alpha + \text{suc}(\beta) = \text{suc}(\alpha + \beta); \alpha + \text{lim}(f) = \text{lim}(n \mapsto \alpha + f(n))$
- multiplication :  $\alpha \times 0 = \alpha; \alpha \times \text{suc}(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha; \alpha \times \text{lim}(f) = \text{lim}(n \mapsto \alpha \times f(n))$
- exponentiation :  $\alpha^0 = 1; \alpha^{\text{suc}(\beta)} = \alpha^\beta \times \alpha; \alpha^{\text{lim}(f)} = \text{lim}(n \mapsto \alpha^{f(n)})$

## 3 Fonctions de Veblen

Ces fonctions procèdent par énumération de points fixes :  $\varphi(\dots, \beta, 0, \dots, 0, \gamma)$  représente le  $(1 + \gamma)^{\text{eme}}$  point fixe commun aux fonctions  $\xi \mapsto \varphi(\dots, \delta, \xi, 0, \dots, 0)$  pour tous les  $\delta < \beta$ .

## 4 Notation de Simmons

$\text{Fix}fz = f^w(z + 1) =$  plus petit point fixe de  $f$  strictement supérieur à  $z$ .

$\text{Next} = \text{Fix}(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$

$[0]h = \text{Fix}(a \mapsto h^a 0)$

$[1]Hh = \text{Fix}(a \mapsto H^a h 0)$

$[2]Hhg = \text{Fix}(a \mapsto H^a hg 0)$ , etc...

Correspondance avec  $\phi$  de Veblen :  $\phi(1 + \alpha, \beta) = ([0]^\alpha \text{Next})^{1+\beta} 0; \phi(\alpha, \beta, \gamma) = ([0]^\beta ([1][0])^\alpha \text{Next})^{1+\gamma} 0$

## 5 Fonctions effondrantes ordinales (Ordinal collapsing functions)

Ces fonctions utilisent des ordinaux non dénombrables pour définir des ordinaux dénombrables.

On définit des ensembles d'ordinaux qui peuvent être construits à partir de certains ordinaux et de certaines opérations, puis on définit le plus petit ordinal qui n'appartient pas à cet ensemble, ou le plus petit ordinal qui est plus grand que tous les ordinaux dénombrables de cet ensemble.

Ces fonctions sont des extensions de fonctions sur des ordinaux dénombrables, dont on peut atteindre le point fixe en les appliquant à un ordinal non dénombrable, puis le dépasser en les appliquant à des ordinaux non dénombrables plus grands.

Exemples :

- $\psi$  de Madore :  $\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$  si  $\alpha < \zeta_0; \psi(\Omega) = \zeta_0$  qui est le plus petit point fixe de  $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$ .
- $\theta$  de Feferman :  $\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$  si  $\alpha < \Gamma_0$  et  $\beta < \Gamma_0; \theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$  qui est le plus petit point fixe de  $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, 0)$ .
- $C$  de Taranovsky :  $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$  si  $\alpha$  est dénombrable;  $C(\Omega_1, 0) = \varepsilon_0$  qui est le plus petit point fixe de  $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ .

Nom	Symbole	Ma notation	Algébrique	Veblen	Simmons	Madore	Taranovsky
Zero	0	0	0				0
Un	1	suc 0	1	$\varphi(0, 0)$			$C(0, 0)$
Deux	2	suc (suc 0)	2				$C(0, C(0, 0))$
omega	$\omega$	H suc 0	$\omega$	$\varphi(0, 1)$	$\omega$		$C(1, 0)$
		suc (H suc 0)	$\omega + 1$				$C(0, C(1, 0))$
		H suc (H suc 0)	$\omega \times 2$				$C(1, C(1, 0))$
		H (H suc) 0	$\omega^2$	$\varphi(0, 2)$			$C(C(0, C(0, 0)), 0)$
		H H suc 0	$\omega^\omega$	$\varphi(0, \omega)$			$C(C(1, 0), 0)$
		H H H suc 0	$\omega^{\omega^\omega}$	$\varphi(0, \omega^\omega)$			$C(C(C(1, 0), 0), 0)$
Epsilon zero	$\varepsilon_0$	$R_1 H \text{suc } 0$	$\varepsilon_0$	$\varphi(1, 0)$	$\text{Next } \omega$	$\psi(0)$	$C(\Omega_1, 0)$
		$R_1 (R_1 H) \text{suc } 0$	$\varepsilon_1$	$\varphi(1, 1)$		$\psi(1)$	$C(\Omega_1, C(\Omega_1, 0))$
		$H R_1 H \text{suc } 0$	$\varepsilon_\omega$	$\varphi(1, \omega)$		$\psi(\omega)$	$C(C(0, \Omega_1), 0)$
		$R_1 H R_1 H \text{suc } 0$	$\varepsilon_{\varepsilon_0}$	$\varphi(1, \varphi(1, 0))$		$\psi(\psi(0))$	$C(C(C(\Omega_1, 0), \Omega_1), 0)$
Zeta zero	$\zeta_0$	$R_2 R_1 H \text{suc } 0$	$\zeta_0$	$\varphi(2, 0)$	$[0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega)$	$C(C(\Omega_1, \Omega_1), 0)$
Eta zero	$\eta_0$	$R_3 R_2 R_1 H \text{suc } 0$ $= R_{3\dots 1} H \text{suc } 0$	$\eta_0$	$\varphi(3, 0)$			$C(C(\Omega, C(\Omega, \Omega)), 0)$
		$R_{\omega\dots 1} H \text{suc } 0$		$\varphi(\omega, 0)$			$C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Feferman -Schütte	$\Gamma_0$	$H(x \mapsto R_{x\dots 1} H \text{suc } 0) 0$	$\Gamma_0$	$\varphi(1, 0, 0)$ $= \varphi(2 \mapsto 1)$	$[1][0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^\Omega)$	$C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Ackermann				$\varphi(1, 0, 0, 0)$ $= \varphi(3 \mapsto 1)$		$\psi(\Omega^{\Omega^2})$	
Petit ordinal de Veblen				$\varphi(\omega \mapsto 1)$		$\psi(\Omega^{\Omega^\omega})$	$C(\Omega_1^\omega, 0)$ $= C(C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Grand ordinal de Veblen				+ petit ord. non rep.	$[2][1][0] \text{Next } \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$	$C(\Omega_1^{\Omega_1}, 0)$ $= C(C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Ordinal de Bachmann- Howard					+ petit ord. non rep.	$\psi(\varepsilon_{\Omega+1})$	$C(C(\Omega_2, \Omega_1), 0)$