LES ORDINAUX TRANSFINIS

par Jacques Bailhache, Janvier-février 2018

Tout ordinal peut être défini comme le plus petit ordinal strictement supérieur à tous les ordinaux d'un ensemble : l'ensemble vide pour 0, $\{\alpha\}$ pour le successeur de α, $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\}$ pour un ordinal qui a pour suite fondamentale $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$

1 Notation algébrique

On définit les opérations arithmétiques sur les ordinaux :

- addition : $\alpha + 0 = \alpha; \alpha + suc(\beta) = suc(\alpha + \beta); \alpha + lim(f) = lim(n \mapsto \alpha + f(n))$
- multiplication : $\alpha \times 0 = \alpha; \alpha \times suc(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha; \alpha \times lim(f) = lim(n \mapsto \alpha \times f(n))$
- exponentiation : $\alpha^0 = 1; \alpha^{suc(\beta)} = \alpha^\beta \times \alpha; \alpha^{lim(f)} = lim(n \mapsto \alpha^{f(n)})$

2 Fonctions de Veblen

Ces fonctions procèdent par énumération de points fixes : $\varphi(\ldots, \beta, 0, \ldots, 0, \gamma)$ représente le $(1+\gamma)^{eme}$ point fixe commun aux fonctions $\xi \mapsto \varphi(\ldots, \delta, \xi, 0, \ldots, 0)$ pour tous les $\delta < \beta$.

3 Notation de Simmons

$Fixfz = f^w(z+1)$ = plus petit point fixe de f strictement supérieur à z.

$Next = Fix(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$

$[0]h = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha \omega)$; $[1]hg = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha g \omega)$; $[2]hgf = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha g f \omega)$; etc...

Correspondance avec ϕ de Veblen : $\phi(1+\alpha, \beta) = ([0]^\alpha Next)^{1+\beta}\omega; \phi(\alpha, \beta, \gamma) = ([0]^\beta(([1][0])^\alpha Next))^{1+\gamma}\omega$

4 Notation RHS0

On part de 0, si on ne voit aucune régularité on prend le successeur, si on voit une régularité, si on a une notation pour cette régularité on l'utilise sinon on l'invente, puis on saute à la limite.

Correspondance avec la notation de Simmons : $\ldots, [2] \to R4, [1] \to R3, [0] \to R2, Next \to R1, \omega \to Hsuc\ 0$

5 Fonctions effondrantes ordinales (Ordinal collapsing functions)

Ces fonctions utilisent des ordinaux non dénombrables pour définir des ordinaux dénombrables.

On définit des ensembles d'ordinaux qui peuvent être construits à partir de certains ordinaux et de certaines opérations, puis on définit le plus petit ordinal qui n'appartient pas à cet ensemble, ou le plus petit ordinal qui est plus grand que tous les ordinaux dénombrables de cet ensemble.

Ces fonctions sont des extensions de fonctions sur des ordinaux dénombrables, dont on peut atteindre le point fixe en les appliquant à un ordinal non dénombrable, puis le dépasser en les appliquant à des ordinaux non dénombrables plus grands.

Exemples :

- ψ de Madore : $\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ si $\alpha < \zeta_0; \psi(\Omega) = \zeta_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$.
- θ de Feferman : $\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ si $\alpha < \Gamma_0$ et $\beta < \Gamma_0; \theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, 0)$.
- C de Taranovsky : $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si α est dénombrable; $C(\Omega_1, 0) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.

Nom	Symbole	Ma notation	Algébrique	Veblen	Simmons	Madore	Taranovsky
Zero	0	0	0				0
Un	1	suc 0	1	$\varphi(0,0)$			C(0,0)
Deux	2	suc (suc 0)	2				C(0,C(0,0))
Omega	ω	H suc 0	ω	$\varphi(0,1)$	ω		C(1,0)
		suc (H suc 0)	$\omega+1$				C(0,C(1,0))
		H suc (H suc 0)	$\omega \times 2$				C(1,C(1,0))
		H (H suc) 0	ω^2	$\varphi(0,2)$			C(C(0,C(0,0)),0)
		H H suc 0	ω^ω	$\varphi(0,\omega)$			C(C(1,0),0)
		H H H suc 0	ω^{ω^ω}	$\varphi(0,\omega^\omega)$			C(C(C(1,0),0),0)
Epsilon zero	ε_0	$R_1 Hsuc\ 0$	ε_0	$\varphi(1,0)$	$Next\ \omega$	$\psi(0)$	$C(\Omega_1, 0)$
		$R_1(R_1 H)suc\ 0$	ε_1	$\varphi(1,1)$	$Next^2\omega$	$\psi(1)$	$C(\Omega_1, C(\Omega_1, 0)$
		$HR_1 Hsuc\ 0$	ε_ω	$\varphi(1,\omega)$	$Next^\omega\omega$	$\psi(\omega)$	$C(C(0,\Omega_1),0)$
		$R_1 HR_1 Hsuc\ 0$	$\varepsilon_{\varepsilon_0}$	$\varphi(1,\varphi(1,0))$	$Next^{Next\omega}\omega$	$\psi(\psi(0))$	$C(C(C(\Omega_1,0),\Omega_1),0)$
Zeta zero	ζ_0	$R_2 R_1 Hsuc\ 0$	ζ_0	$\varphi(2,0)$	$[0]Next\ \omega$	$\psi(\Omega)$	$C(C(\Omega_1,\Omega_1),0)$
Eta zero	η_0	$R_2(R_2 R_1)Hsuc\ 0$	η_0	$\varphi(3,0)$	$[0]^2 Next\ \omega$		$C(C(\Omega, C(\Omega,\Omega)),0)$
		$HR_2 R_1 Hsuc\ 0$		$\varphi(\omega,0)$	$[0]^\omega Next\ \omega$		$C(C(C(0,\Omega_1),\Omega_1),0)$
Feferman -Schütte	Γ_0	$R_3 R_2 R_1 Hsuc\ 0$ $= R_{3\ldots1} Hsuc\ 0$	Γ_0	$\varphi(1,0,0)$ $= \varphi(2 \mapsto 1)$	$[1][0]Next\ \omega$	$\psi(\Omega^\Omega)$	$C(C(C(\Omega_1,\Omega_1),$ $\Omega_1),0)$
Ackermann		$R_3(R_3 R_2)R_1 Hsuc\ 0$		$\varphi(1,0,0,0)$ $= \varphi(3 \mapsto 1)$	$[1]^2[0]Next\ \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^2})$	
Small Veblen ordinal		$HR_3 R_2 R_1 Hsuc\ 0$		$\varphi(\omega \mapsto 1)$	$[1]^\omega[0]Next\ \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^\omega})$	$C(\Omega_1^\omega, 0)$ $= C(C(C(C(0,\Omega_1),$ $\Omega_1),\Omega_1),0)$
Large Veblen ordinal		$R_4 R_3 R_2 R_1 Hsuc\ 0$ $= R_{4\ldots1} Hsuc\ 0$		+ petit ord. non rep.	$[2][1][0]Next\ \omega$	$\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$	$C(\Omega_1^{\Omega_1}, 0)$ $= C(C(C(C(\Omega_1,\Omega_1),$ $\Omega_1),\Omega_1),0)$
Bachmann-Howard ordinal		$R_{\omega\ldots1} Hsuc\ 0$			+ petit ord. non rep.	$\psi(\varepsilon_{\Omega+1})$	$C(C(\Omega_2,\Omega_1),0)$