DATA FOR THE COMPUTATION OF $X_0(37)(\mathbb{Q}(i))$ IN "QUADRATIC CHABAUTY AND RATIONAL POINTS I"

JENNIFER S. BALAKRISHNAN AND NETAN DOGRA

The curve $X = X_0(37)$ has a model over $\mathbb{Q}(i)$ given by the equation

$$X : y^2 = x^6 - 9x^4 + 11x^2 + 37.$$

We compute $X_0(37)(\mathbb{Q}(i))$ in §8.4 of "Quadratic Chabauty and rational points I: p-adic heights." Below we give data produced by the computation. In each of the tables, for each residue disk corresponding to the four choices $\overline{(\pm x, \pm y)}$, we give the points in $X(\mathbb{Q}_p)_U$ found in the residue disk corresponding to $\overline{(x, y)}$ with $x, y < \frac{p}{2}$. We fix an identification $X(K_{\mathfrak{p}}) \simeq X(\mathbb{Q}_p)$.

Here is the computation of $X(\mathbb{Q}_{41})_U$:

$X(\mathbb{F}_{41})$	recovered $x(z)$ in residue disk	$z \in X(K)$
$\overline{(1,9)}$	$1 + 16 \cdot 41 + 23 \cdot 41^2 + 5 \cdot 41^3 + 23 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$1 + 6 \cdot 41 + 23 \cdot 41^2 + 30 \cdot 41^3 + 14 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(2,1)}$	$2 + O(41^5)$	$(2,1)$
	$2 + 19 \cdot 41 + 36 \cdot 41^2 + 15 \cdot 41^3 + 26 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(4,18)}$		
$\overline{(5,12)}$	$5 + 25 \cdot 41 + 26 \cdot 41^2 + 26 \cdot 41^3 + 31 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$5 + 14 \cdot 41 + 12 \cdot 41^3 + 33 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(6,1)}$	$6 + 18 \cdot 41^2 + 31 \cdot 41^3 + 6 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$6 + 30 \cdot 41 + 35 \cdot 41^2 + 11 \cdot 41^3 + O(41^5)$	
$\overline{(7,15)}$		
$\overline{(9,4)}$	$9 + 9 \cdot 41 + 34 \cdot 41^2 + 22 \cdot 41^3 + 24 \cdot 41^4 + O(41^5)$	$(i,4)$
	$9 + 39 \cdot 41 + 14 \cdot 41^2 + 6 \cdot 41^3 + 17 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(12,5)}$		
$\overline{(13,19)}$	$13 + 10 \cdot 41 + 2 \cdot 41^2 + 15 \cdot 41^3 + 29 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$13 + 7 \cdot 41 + 8 \cdot 41^2 + 32 \cdot 41^3 + 14 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(16,1)}$	$16 + 13 \cdot 41 + 6 \cdot 41^3 + 18 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$16 + 12 \cdot 41 + 8 \cdot 41^2 + 9 \cdot 41^3 + 32 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(17,20)}$	$17 + 24 \cdot 41 + 37 \cdot 41^2 + 16 \cdot 41^3 + 28 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$17 + 19 \cdot 41 + 20 \cdot 41^2 + 7 \cdot 41^3 + 7 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(18,20)}$	$18 + 3 \cdot 41 + 7 \cdot 41^2 + 9 \cdot 41^3 + 38 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$18 + 41 + 34 \cdot 41^2 + 3 \cdot 41^3 + 32 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{(19,3)}$		
$\overline{(20,6)}$	$20 + 7 \cdot 41 + 40 \cdot 41^2 + 22 \cdot 41^3 + 7 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$20 + 23 \cdot 41 + 26 \cdot 41^2 + 17 \cdot 41^3 + 22 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
$\overline{\infty^+}$	∞^+	∞^+
$\overline{(0,18)}$	$32 \cdot 41 + 13 \cdot 41^2 + 16 \cdot 41^3 + 8 \cdot 41^4 + O(41^5)$	
	$9 \cdot 41 + 27 \cdot 41^2 + 24 \cdot 41^3 + 32 \cdot 41^4 + O(41^5)$	

Here is the computation of $X(\mathbb{Q}_{73})_U$:

$X(\mathbb{F}_{73})$	recovered $x(z)$ in residue disk	$z \in X(K)$ (or $X(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$)
$\overline{(2,1)}$	$2 + 61 \cdot 73 + 50 \cdot 73^2 + 71 \cdot 73^3 + 56 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$2 + O(73^5)$	$(2,1)$
$\overline{(5,26)}$	$5 + 63 \cdot 73 + 4 \cdot 73^2 + 42 \cdot 73^3 + 25 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$5 + 39 \cdot 73 + 65 \cdot 73^2 + 33 \cdot 73^3 + 60 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(7,16)}$	$7 + 62 \cdot 73 + 31 \cdot 73^2 + 33 \cdot 73^3 + 44 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$7 + 29 \cdot 73 + 67 \cdot 73^2 + 69 \cdot 73^3 + 17 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(9,34)}$		
$\overline{(10,30)}$	$10 + 53 \cdot 73 + 35 \cdot 73^2 + 21 \cdot 73^3 + 67 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$10 + 39 \cdot 73 + 40 \cdot 73^2 + 17 \cdot 73^3 + 59 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(18,17)}$		
$\overline{(19,2)}$		
$\overline{(20,15)}$		
$\overline{(21,4)}$	$21 + 17 \cdot 73 + 70 \cdot 73^2 + 42 \cdot 73^3 + 18 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$21 + 52 \cdot 73 + 67 \cdot 73^2 + 20 \cdot 73^3 + 27 \cdot 73^4 + O(73^5)$	$(\sqrt{3},4)$
$\overline{(23,31)}$	$23 + 18 \cdot 73 + 59 \cdot 73^2 + 23 \cdot 73^3 + 2 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$23 + 70 \cdot 73 + 53 \cdot 73^2 + 21 \cdot 73^3 + 50 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(25,25)}$		
$\overline{(27,4)}$	$27 + 62 \cdot 73 + 28 \cdot 73^2 + 56 \cdot 73^3 + 58 \cdot 73^4 + O(73^5)$	$(i,4)$
	$27 + 24 \cdot 73 + 30 \cdot 73^2 + 20 \cdot 73^3 + 65 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(29,8)}$	$29 + 70 \cdot 73 + 21 \cdot 73^2 + 56 \cdot 73^3 + 5 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$29 + 34 \cdot 73 + 42 \cdot 73^2 + 19 \cdot 73^3 + 54 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{(30,20)}$		
$\overline{(36,17)}$	$36 + 70 \cdot 73 + 19 \cdot 73^2 + 11 \cdot 73^3 + 54 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$36 + 32 \cdot 73 + 23 \cdot 73^2 + 23 \cdot 73^3 + 28 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
$\overline{\infty^+}$	∞^+	∞^+
$\overline{(0,16)}$	$61 \cdot 73 + 63 \cdot 73^2 + 51 \cdot 73^3 + 16 \cdot 73^4 + O(73^5)$	
	$12 \cdot 73 + 9 \cdot 73^2 + 21 \cdot 73^3 + 56 \cdot 73^4 + O(73^5)$	

Here is the computation of $X(\mathbb{Q}_{101})_U$:

$X(\mathbb{F}_{101})$	recovered $x(z)$ in residue disk	$z \in X(K)$
$\overline{(2,1)}$	$2 + O(101^7)$	$(2,1)$
	$2 + 38 \cdot 101 + 11 \cdot 101^2 + 99 \cdot 101^3 + 26 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(8,36)}$	$8 + 90 \cdot 101 + 39 \cdot 101^2 + 80 \cdot 101^3 + 70 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$8 + 40 \cdot 101 + 84 \cdot 101^2 + 74 \cdot 101^3 + 15 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(10,4)}$	$10 + 5 \cdot 101 + 29 \cdot 101^2 + 66 \cdot 101^3 + 10 \cdot 101^4 + O(101^5)$	$(i,4)$
	$10 + 49 \cdot 101 + 80 \cdot 101^2 + 74 \cdot 101^3 + 8 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(12,7)}$	$12 + 12 \cdot 101 + 95 \cdot 101^2 + 55 \cdot 101^3 + 48 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$12 + 36 \cdot 101 + 62 \cdot 101^2 + 97 \cdot 101^3 + 27 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(14,21)}$	$14 + 62 \cdot 101 + 62 \cdot 101^2 + 41 \cdot 101^3 + 51 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$14 + 80 \cdot 101 + 72 \cdot 101^2 + 32 \cdot 101^3 + 75 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(15,11)}$		
$\overline{(17,18)}$	$17 + 65 \cdot 101 + 37 \cdot 101^2 + 80 \cdot 101^3 + 45 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$17 + 50 \cdot 101 + 61 \cdot 101^2 + 89 \cdot 101^3 + 61 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(18,45)}$		
$\overline{(20,47)}$		
$\overline{(22,3)}$	$22 + 59 \cdot 101 + 78 \cdot 101^2 + 43 \cdot 101^3 + 53 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$22 + 96 \cdot 101 + 29 \cdot 101^2 + 43 \cdot 101^3 + 86 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(24,19)}$		
$\overline{(27,39)}$		
$\overline{(28,37)}$	$28 + 30 \cdot 101 + 83 \cdot 101^2 + 5 \cdot 101^3 + 23 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$28 + 37 \cdot 101 + 24 \cdot 101^2 + 78 \cdot 101^3 + 35 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(30,46)}$		
$\overline{(31,23)}$	$31 + 23 \cdot 101 + 11 \cdot 101^2 + 67 \cdot 101^3 + 39 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$31 + 29 \cdot 101 + 68 \cdot 101^2 + 29 \cdot 101^3 + 24 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(34,45)}$	$34 + 91 \cdot 101 + 46 \cdot 101^2 + 28 \cdot 101^3 + 34 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$34 + 51 \cdot 101 + 73 \cdot 101^2 + 34 \cdot 101^3 + 14 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(37,22)}$		
$\overline{(38,28)}$		
$\overline{(39,46)}$	$39 + 76 \cdot 101 + 86 \cdot 101^2 + 18 \cdot 101^3 + 64 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$39 + 31 \cdot 101 + 43 \cdot 101^2 + 10 \cdot 101^3 + 48 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(46,6)}$		
$\overline{(47,32)}$		
$\overline{(48,27)}$	$48 + 43 \cdot 101 + 100 \cdot 101^2 + 47 \cdot 101^3 + 19 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$48 + 21 \cdot 101 + 38 \cdot 101^2 + 80 \cdot 101^3 + 95 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{(50,5)}$	$50 + 59 \cdot 101 + 19 \cdot 101^2 + 64 \cdot 101^3 + 36 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
	$50 + 74 \cdot 101 + 69 \cdot 101^2 + 80 \cdot 101^3 + 21 \cdot 101^4 + O(101^5)$	
$\overline{\infty^+}$	∞^+	∞^+
$\overline{(0,21)}$		