Treaps

One data structure to rule them all

Δημήτρης Μπαλάτος, Αγγελική Νταλαπέρα

Ορισμοί

Tree T

Ορισμοί

Tree T

Binary Tree $T = \langle key, L, R \rangle$

- L: Αριστερό παιδί (επίσης Binary Tree)
- R: Δεξί παιδί (επίσης Binary Tree)

Ορισμοί

Tree T

Binary Tree $T = \langle key, L, R \rangle$

- L: Αριστερό παιδί (επίσης Binary Tree)
- R: Δεξί παιδί (επίσης Binary Tree)

Binary Search Tree

- L, R επίσης Binary Search Trees
- $L.key \leq key \leq R.key$

Ορισμοί

Tree T

Binary Tree $T = \langle key, L, R \rangle$

- L: Αριστερό παιδί (επίσης Binary Tree)
- R: Δεξί παιδί (επίσης Binary Tree)

Binary Search Tree

- L, R επίσης Binary Search Trees
- $L.key \leq key \leq R.key$

Binary (Maximum) Heap

- L, R επίσης Binary Heaps
- $key \geq L.key, R.key$ (ή αντίστροφα για Minimum Heaps)

Ορισμοί

Tree T

Binary Tree $T = \langle key, L, R \rangle$

- L: Αριστερό παιδί (επίσης Binary Tree)
- R: Δεξί παιδί (επίσης Binary Tree)

Binary Search Tree

- L, R επίσης Binary Search Trees
- $L.key \leq key \leq R.key$

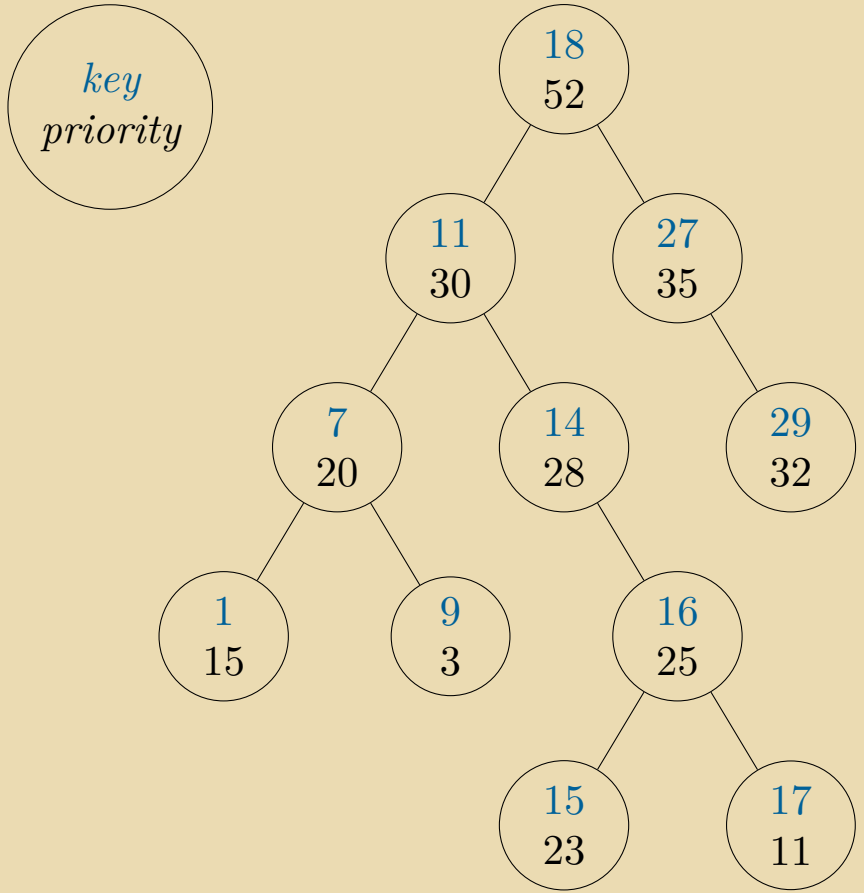
Binary (Maximum) Heap

- L, R επίσης Binary Heaps
- $key \geq L.key, R.key$ (ή αντίστροφα για Minimum Heaps)

Treap $T = \langle \underline{key}, \underline{priority}, L, R \rangle$

- Binary Search Tree ως προς key
- Δυαδικός Σωρός ως προς $priority$

Παράδειγμα


key
priority
18
52
11
30
27
35
7
20
14
28
29
32
1
15
9
3
16
25
15
23
17
11

Βασικές Συναρτήσεις

Split(T, key) "Σπάει" το T σε 2 treaps L, R **έτσι ώστε** $L \leq key \leq R$.

Βασικές Συναρτήσεις

Split(T, key) "Σπάει" το T σε 2 treaps L, R **έτσι ώστε** $L \leq key \leq R$.

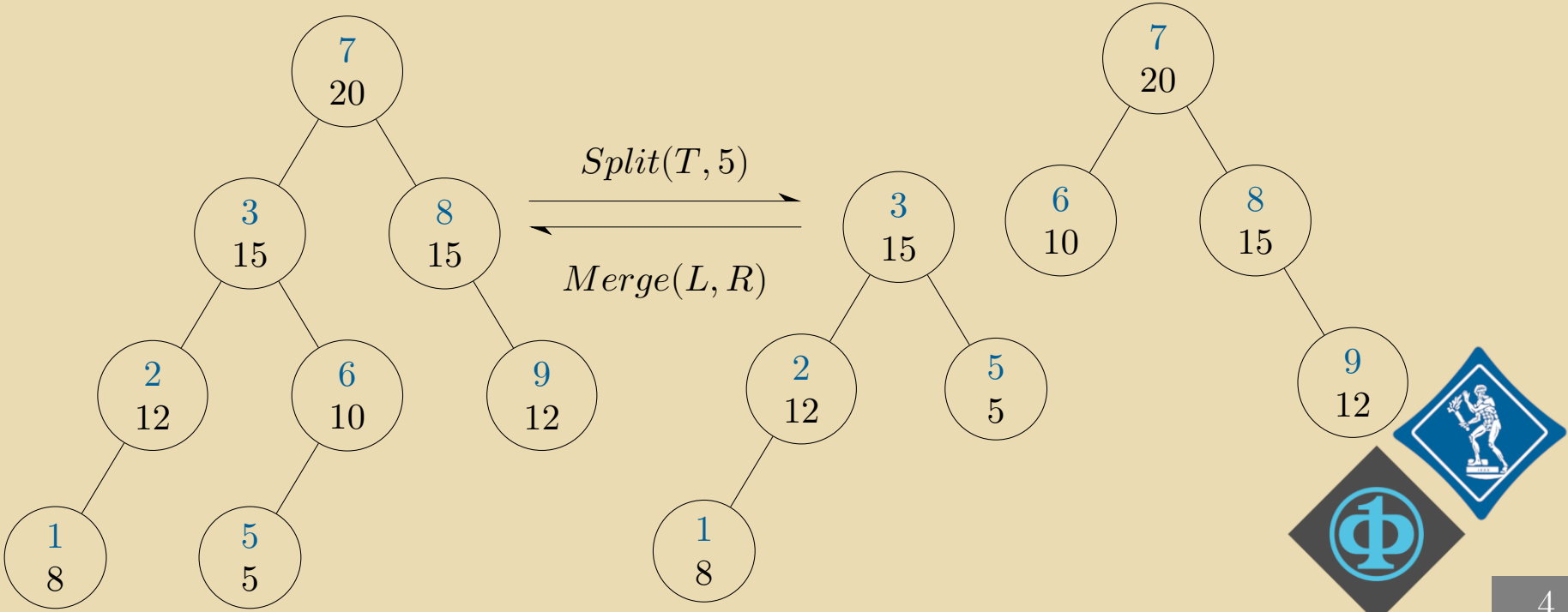
Merge(L, R) "Ενώνει" τα L, R **δεδομένου ότι** $L \leq R$.

Βασικές Συναρτήσεις

Split(T, key) "Σπάει" το T σε 2 treaps L, R **έτσι ώστε** $L \leq key \leq R$.

Merge(L, R) "Ενώνει" τα L, R **δεδομένου ότι** $L \leq R$.

Ισχύει ότι:

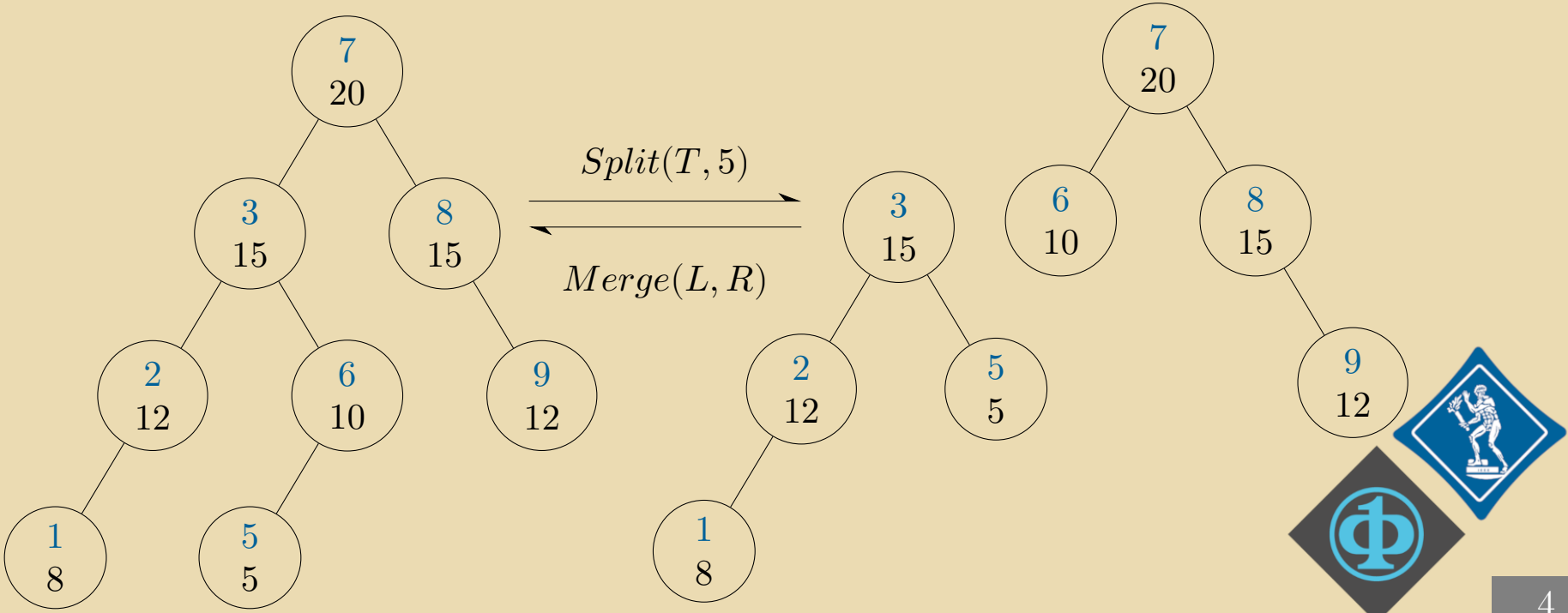


Βασικές Συναρτήσεις

Split(T, key) "Σπάει" το T σε 2 treaps L, R **έτσι ώστε** $L \leq key \leq R$.

Merge(L, R) "Ενώνει" τα L, R **δεδομένου ότι** $L \leq R$.

Ισχύει ότι: $\boldsymbol{Split(T, key) = \langle L, R \rangle \iff T = Merge(L, R)}$



Split

function `Split`(T, x): $\langle L, R \rangle$
  Ensure: $\max\{L\} \leq x < \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Σε ποιο treap θα ανήκει ο κόμβος T;

Split

function `Split`(T, x): $\langle L, R \rangle$
  Ensure: $\max\{L\} \leq x < \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Σε ποιο treap θα ανήκει ο κόμβος T;

  if $T.key \leq x$ **then**
  // (1) στο $L \rightarrow$ όλο το $T.R$ θα ανήκει στο R
    $L, R \leftarrow$ `Split`$(T.R, x)$
    $T.R := L$
    return $\langle T, R \rangle$

Split

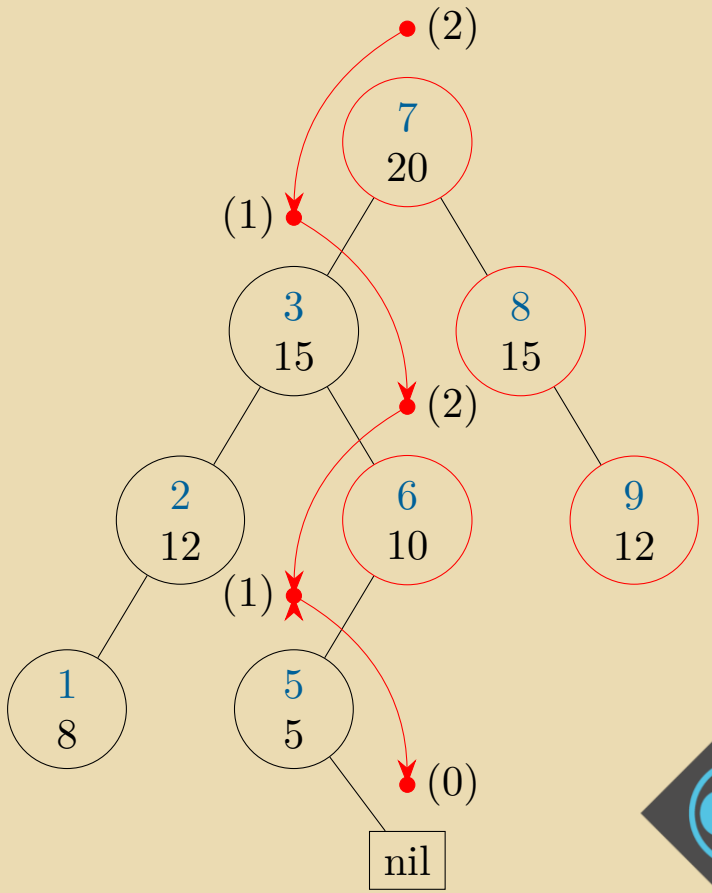
function `Split`(T, x): $\langle L, R \rangle$
  Ensure: $\max\{L\} \leq x < \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Σε ποιο treap θα ανήκει ο κόμβος T;

  if $T.key \leq x$ **then**
  // (1) στο $L \rightarrow$ όλο το $T.R$ θα ανήκει στο R
    $L, R \leftarrow$ `Split`$(T.R, x)$
    $T.R := L$
    return $\langle T, R \rangle$
  else
  // (2) στο $R \rightarrow$ όλο το $T.L$ θα ανήκει στο L
    $L, R \leftarrow$ `Split`$(T.L, x)$
    $T.L := R$
    return $\langle L, T \rangle$
  end if

Correct Split

function Split(T, x): $\langle L, R\rangle$
  Ensure: $\max\{L\} \le x < \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Σε ποιο treap θα ανήκει ο κόμβος T;
  if $T = \emptyset$ **then**
  // (0)
    return $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$
  else if $T.key \le x$ **then**
  // (1) στο $L \to$ όλο το $T.R$ θα ανήκει στο R
    $L, R \leftarrow$ Split$(T.R, x)$
    $T.R := L$
    return $\langle T, R\rangle$
  else
  // (2) στο $R \to$ όλο το $T.L$ θα ανήκει στο L
    $L, R \leftarrow$ Split$(T.L, x)$
    $T.L := R$
    return $\langle L, T\rangle$
  end if

Σχήμα 1 Split$(T, 5)$



Merge

Merge

(Immmediately correct)

Merge

(Immmediately correct)

function `Merge`(L, R): T
    Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
    // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

Merge

(Immmediately correct)

function `Merge`(L, R): T
    Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
    // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

    if $L = \emptyset$ **or** $R = \emptyset$ **then**
        return non-empty L, R

Merge

(Immmediately correct)

function `Merge`(L, R): T
  Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

  if $L = \emptyset$ **or** $R = \emptyset$ **then**
    return non-empty L, R
  else if $L.priority > R.priority$ **then**
  // (1) ρίζα είναι το $L \rightarrow$ ενώνουμε $L.R$ με R
    $L.R :=$ Merge()
    return L

Merge

(Immmediately correct)

function `Merge`(L, R): T
  Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

  if $L = \emptyset$ **or** $R = \emptyset$ **then**
    return non-empty L, R
  else if $L.priority > R.priority$ **then**
  // (1) ρίζα είναι το $L \rightarrow$ ενώνουμε $L.R$ με R
    $L.R :=$ Merge()
    return L
  else
  // (2) ρίζα είναι το $R \rightarrow$ ενώνουμε $R.L$ με L
    $R.L :=$ Merge(L, R.L)
    return R
  end if

Merge

(Immmediately correct)

function `Merge`(L, R): T
  Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

  if $L = \emptyset$ **or** $R = \emptyset$ **then**
    return non-empty L, R
  else if $L.priority > R.priority$ **then**
  // (1) ρίζα είναι το $L \rightarrow$ ενώνουμε $L.R$ με R
    $L.R :=$ Merge()
    return L
  else
  // (2) ρίζα είναι το $R \rightarrow$ ενώνουμε $R.L$ με L
    $R.L :=$ Merge(L, R.L)
    return R
  end if

Προσοχή:

Merge

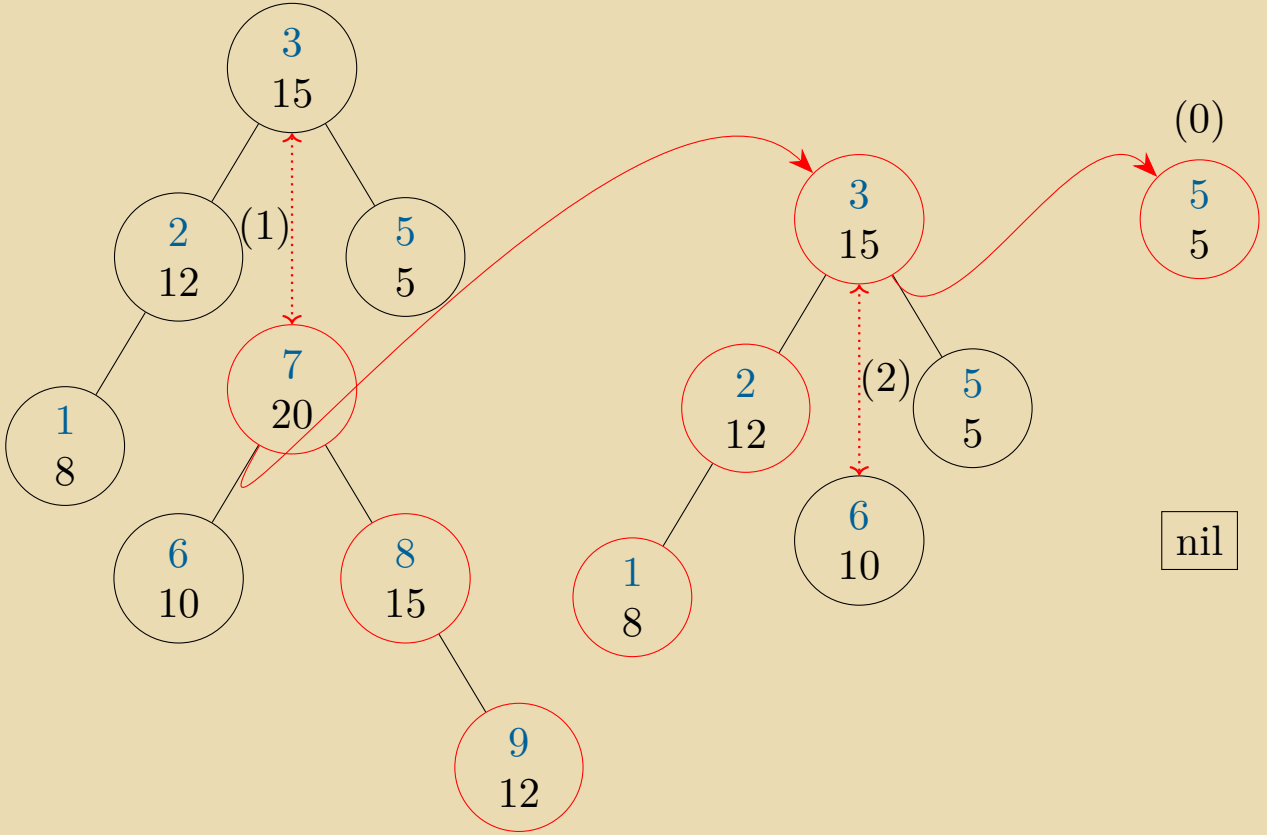
(Immmediately correct)

function Merge(L, R): T
  Require: $\max\{L\} \leq \min\{R\}$
  // **Επιλογή:** Ποια ρίζα θα είναι ρίζα του T;

  if $L = \emptyset$ **or** $R = \emptyset$ **then**
    return non-empty L, R
  else if $L.priority > R.priority$ **then**
  // (1) ρίζα είναι το $L \rightarrow$ ενώνουμε $L.R$ με R
    $L.R :=$ Merge()
    return L
  else
  // (2) ρίζα είναι το $R \rightarrow$ ενώνουμε $R.L$ με L
    $R.L :=$ Merge(L, R.L)
    return R
  end if

Προσοχή:
Η σειρά των παραμέτρων **είναι σημαντική**!

Παράδειγμα



Παρατήρηση

Παρατήρηση

- Η `Split()` χρησιμοποιεί **μόνο** το BST — μέρος

Παρατήρηση

- Η `Split()` χρησιμοποιεί **μόνο** το BST — μέρος
- Η `Merge()` χρησιμοποιεί **μόνο** το Heap — μέρος

Υλοποίηση

Υλοποίηση

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
};
```

Υλοποίηση

```
typedef struct treap_node  treap_node;
typedef        treap_node *treap;
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
};
```

Υλοποίηση

```
typedef struct treap_node  treap_node;
typedef        treap_node *treap;
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
};
void treap_split_ (treap this, int64_t key,
      treap *l, treap *r)
{
   if (!this) *l = *r = NULL;
   else if (this->key <= key)
      treap_split_(this->right, key,
         &(this->right), r), *l = this;
   else
      treap_split_(this->left, key,
         l, &(this->left)), *r = this;
}
```

Υλοποίηση

```
typedef struct treap_node  treap_node;
typedef        treap_node *treap;
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
};
void treap_split_ (treap this, int64_t key,
      treap *l, treap *r)
{
   if (!this) *l = *r = NULL;
   else if (this->key <= key)
      treap_split_(this->right, key,
         &(this->right), r), *l = this;
   else
      treap_split_(this->left, key,
         l, &(this->left)), *r = this;
}
```

```
void treap_merge_ (treap *t, treap l, treap r)
{
   if (!l || !r)
      *t = l ? l : r;
   else if (l->priority > r->priority)
      treap_merge_(&(l->right),
         l->right, r), *t = l;
   else
      treap_merge_(&(r->left),
         l, r->left), *t = r;
}
```

Υλοποίηση

```
typedef struct treap_node  treap_node;
typedef        treap_node *treap;
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
};
void treap_split_ (treap this, int64_t key,
      treap *l, treap *r)
{
   if (!this) *l = *r = NULL;
   else if (this->key <= key)
      treap_split_(this->right, key,
         &(this->right), r), *l = this;
   else
      treap_split_(this->left, key,
         l, &(this->left)), *r = this;
}
```

```
void treap_merge_ (treap *t, treap l, treap r)
{
   if (!l || !r)
      *t = l ? l : r;
   else if (l->priority > r->priority)
      treap_merge_(&(l->right),
         l->right, r), *t = l;
   else
      treap_merge_(&(r->left),
         l, r->left), *t = r;
}

   /* Example */
   treap t = {}, l, r;
   treap_split_(t, 42, &l, &r);
   treap_merge_(&t, l, r);
   if (t) { /*...*/ }
```

Και τώρα . . . τι;

User Interface – συναρτήσεις

User Interface – συναρτήσεις

Find(T, key) Ακριβώς όπως και στο BST

User Interface – συναρτήσεις

FIND(T, key) Ακριβώς όπως και στο BST

```
treap treap_find (treap this, int64_t key)
{
   if (!this) return NULL;
   else if (key == this->key)
      return this;
   else if (key < this->key)
      return treap_find(this->left, key);
   else
      return treap_find(this->right, key);
}
```

User Interface – συναρτήσεις (II)

Insert(T, key) Σχεδόν όπως στο BST:

User Interface – συναρτήσεις (II)

Insert(T, key) Σχεδόν όπως στο BST:
Search μέχρι **nil** node $\longrightarrow$

User Interface – συναρτήσεις (II)

Insert(T, key) Σχεδόν όπως στο BST:
Search μέχρι **nil** node $\longrightarrow$ Search μέχρι **χαμηλή προτεραιότητα**

User Interface – συναρτήσεις (II)

Insert(T, key) Σχεδόν όπως στο BST:
Search μέχρι **nil** node $\longrightarrow$ Search μέχρι **χαμηλή προτεραιότητα**

↪ Όρισε παιδιά μέσω **Split()**

User Interface – συναρτήσεις (II)

Insert(T, key) Σχεδόν όπως στο BST:
Search μέχρι **nil** node $\longrightarrow$ Search μέχρι **χαμηλή προτεραιότητα**

↪ Όρισε παιδιά μέσω **Split()**

```
treap treap_insert_node (treap this, treap u)
{
   if (!this) return u;
   if (u->priority > this->priority) {
      treap_split(this, u->key, u->left, u->right);
      return u;
   }
   if (u->key < this->key)
      this->left = treap_insert_node(this->left, u);
   else
      this->right = treap_insert_node(this->right, u);
   return this;
```

User Interface – συναρτήσεις (III)

Erase(T, key) Σχεδόν όπως στο BST. Όταν βρεθεί το key:

User Interface – συναρτήσεις (III)

Erase(T, key) Σχεδόν όπως στο BST. Όταν βρεθεί το key: ένωσε παιδιά μέσω **Merge**()

User Interface – συναρτήσεις (III)

Erase(T, key) Σχεδόν όπως στο BST. Όταν βρεθεί το key: ένωσε παιδιά μέσω **Merge**()

```
treap treap_erase_ (treap this, int64_t key)
{
   treap tmp;

   if (!this) return NULL;
   if (key == this->key) {
      treap_merge(tmp, this->left, this->right);
      free(this);
      return tmp;
   }
   if (key < this->key)
      this->left = treap_erase_(this->left, key);
   else
      this->right = treap_erase_(this->right, key);
   return this;
}
```

Macros to the rescue

```
#define treap_split(t, key, l, r) \
   treap_split_(t, key, &(l), &(r))
#define treap_merge(t, l, r)
treap_merge_(&(t), l, r)
```

Macros to the rescue

```
#define treap_split(t, key, l, r) \
   treap_split_(t, key, &(l), &(r))
#define treap_merge(t, l, r)
treap_merge_(&(t), l, r)
```

```
/* Example */
treap t = {}, l, r;
treap_split_(t, 42, &l, &r);
treap_merge_(&t, l, r);
if (t) { /*...*/ }
```

Macros to the rescue

```
#define treap_split(t, key, l, r) \
   treap_split_(t, key, &(l), &(r))
#define treap_merge(t, l, r)
treap_merge_(&(t), l, r)
```

```
/* Example */
treap t = {}, l, r;
treap_split_(t, 42, &l, &r);
treap_merge_(&t, l, r);
if (t) { /*...*/ }
```

```
/* Now becomes */

treap_split(t, 42, l, r);
treap_merge(t, l, r);
```

Macros to the rescue

```
#define treap_split(t, key, l, r) \
    treap_split_(t, key, &(l), &(r))
#define treap_merge(t, l, r)
treap_merge_(&(t), l, r)
```

```
/* Example */
treap t = {}, l, r;
treap_split_(t, 42, &l, &r);
treap_merge_(&t, l, r);
if (t) { /*...*/ }
```

```
#define treap_insert(t, k, p) \
    (void)((t) = treap_insert_node(t,
node_create((k), (p))))
#define treap_erase(t, x) (void)((t) =
treap_erase_(t, x))
#define treap_count(t, x) (treap_find(t, x) !=
NULL)
//      treap_find(t, x)
```

```
/* Now becomes */

treap_split(t, 42, l, r);
treap_merge(t, l, r);
```

Macros to the rescue

```
#define treap_split(t, key, l, r) \
    treap_split_(t, key, &(l), &(r))
#define treap_merge(t, l, r)
treap_merge_(&(t), l, r)
```

```
/* Example */
treap t = {}, l, r;
treap_split_(t, 42, &l, &r);
treap_merge_(&t, l, r);
if (t) { /*...*/ }
```

```
#define treap_insert(t, k, p) \
    (void)((t) = treap_insert_node(t,
node_create((k), (p))))
#define treap_erase(t, x) (void)((t) =
treap_erase_(t, x))
#define treap_count(t, x) (treap_find(t, x) !=
NULL)
//      treap_find(t, x)
```

```
/* Now becomes */

treap_split(t, 42, l, r);
treap_merge(t, l, r);

treap_insert(t, 42, 20);
if (treap_count(t, 42)) { /*...*/ }
treap_erase(t, 42);
```

Treaps as Balanced BSTs

Balanced Binary Tree

Treaps as Balanced BSTs

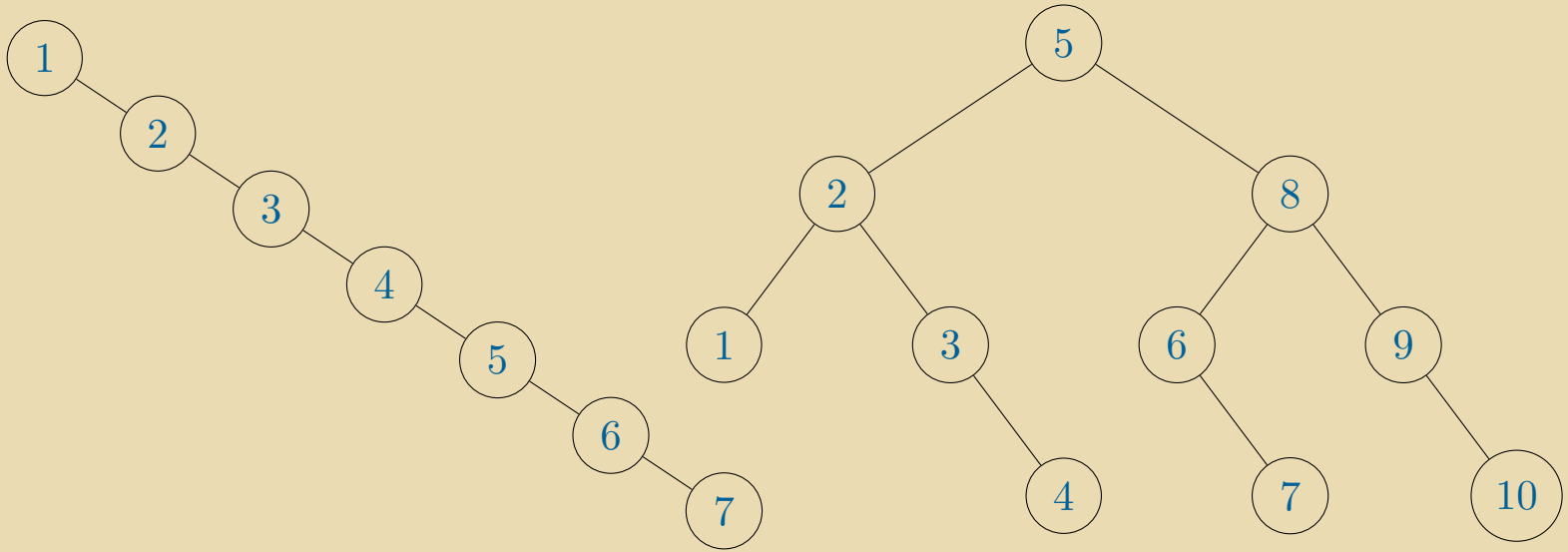
Balanced Binary Tree

Ύψος **O(logn)**, n το πλήθος των κόμβων.

Treaps as Balanced BSTs

Balanced Binary Tree

Ύψος **O(logn)**, n το πλήθος των κόμβων.



Σχήμα 2 a)An unbalanced BST b)A balanced BST

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.
  - ↪ *Λύση:* Κάνουμε τυχαία ανάμειξη των στοιχείων

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.

  $\hookrightarrow$ *Λύση:* Κάνουμε τυχαία ανάμειξη των στοιχείων

  Τι γίνεται όταν δεν έχουμε όλα τα στοιχεία από την αρχή *(online arrival)*;

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.

  ↪ *Λύση:* Κάνουμε τυχαία ανάμειξη των στοιχείων

  Τι γίνεται όταν δεν έχουμε όλα τα στοιχεία από την αρχή *(online arrival)*;

  ↪ Θέλουμε να μπορούμε να εισάγουμε στοιχεία σε υψηλότερα ή χαμηλότερα επίπεδα: **Priorities στο treap**

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.

  ↪ *Λύση:* Κάνουμε τυχαία ανάμειξη των στοιχείων

  Τι γίνεται όταν δεν έχουμε όλα τα στοιχεία από την αρχή *(online arrival)*;

  ↪ Θέλουμε να μπορούμε να εισάγουμε στοιχεία σε υψηλότερα ή χαμηλότερα επίπεδα: **Priorities στο treap**

  ↪ Θέλουμε τυχαία σειρά $\implies$ τυχαίο priority

Treaps as Balanced BSTs (II)

- Πιο ταξινομημένα στοιχεία $\implies$ πιο μεγάλες αλυσίδες δημιουργούνται.

  ↪ *Λύση:* Κάνουμε τυχαία ανάμειξη των στοιχείων

  Τι γίνεται όταν δεν έχουμε όλα τα στοιχεία από την αρχή *(online arrival)*;

  ↪ Θέλουμε να μπορούμε να εισάγουμε στοιχεία σε υψηλότερα ή χαμηλότερα επίπεδα: **Priorities στο treap**

  ↪ Θέλουμε τυχαία σειρά $\implies$ τυχαίο priority

  Για 10.000 κόμβους, η πιθανότητα να παραχθεί δένδρο με ύψος μεγαλύτερο από 100 είναι 1 στα 2.5 δισεκατομμύρια

Code Changes

```
#define treap_insert(t, x) (void)((t) = treap_insert_node(t, node_create(x)))
```

Code Changes

```
#define treap_insert(t, x) (void)((t) = treap_insert_node(t, node_create(x)))
treap node_create (int64_t key)
{
   treap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->key = key;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32)
       | rand();


   return ret;
}
```

Treap Augmentation

Γενική ιδέα

- Δικό μας BBST $\implies$ προσθέτουμε **ό,τι θέλουμε**

Treap Augmentation

Γενική ιδέα

- Δικό μας BBST $\implies$ προσθέτουμε **ό,τι θέλουμε**
- Τι;

Treap Augmentation

Γενική ιδέα

- Δικό μας BBST $\implies$ προσθέτουμε **ό,τι θέλουμε**
- Τι;
  1. size
  2. sum
  3. max

Treap Augmentation

Γενική ιδέα

- Δικό μας BBST $\implies$ προσθέτουμε **ό,τι θέλουμε**
- Τι;
  1. size
  2. sum
  3. max *(not really)*

Treap Augmentation

Γενική ιδέα

- Δικό μας BBST $\implies$ προσθέτουμε **ό,τι θέλουμε**
- Τι;
  1. size
  2. sum
  3. max *(not really)*

Αναδρομη

Treap Augmentation (II)

Υλοποίηση size

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
   size_t size;
};
```

Treap Augmentation (II)

Υλοποίηση size

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
   size_t size;
};

treap node_create (int64_t key)
{
   treap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->key = key;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32)
       | rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   return ret;
}
```

Treap Augmentation (II)

Υλοποίηση size

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
   size_t size;
};

treap node_create (int64_t key)
{
   treap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->key = key;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32)
       | rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   return ret;
}
```

```
void treap_update (treap this)
{
   if (!this) return;
   this->size = 1 + treap_size(this->left)
      + treap_size(this->right);
}
```

Treap Augmentation (II)

Υλοποίηση size

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
   size_t size;
};

treap node_create (int64_t key)
{
   treap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->key = key;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32)
       | rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   return ret;
}
```

```
void treap_update (treap this)
{
   if (!this) return;
   this->size = 1 + treap_size(this->left)
      + treap_size(this->right);
}

void treap_split_ (treap this, int64_t key, treap
*l, treap *r)
{
                :

   treap_update(this);
}
```

etc.

Treap Augmentation (III)

Υλοποίηση size και sum

```
struct treap_node {
   int64_t key;
   uint64_t priority;
   treap_node *left, *right;
   size_t size;
   int64_t sum;
};

treap node_create (int64_t key)
{
   treap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->key = key;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32)
       | rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   ret->sum = key;
   return ret;
}
```

```
void treap_update (treap this)
{
   if (!this) return;
   this->size = 1 + treap_size(this->left)
      + treap_size(this->right);
   this->sum = this->key + treap_sum(this->left)
      + treap_sum(this->right);
}
```

Access μέσω:

- `treap_size(t)`
- `treap_sum(t)`

Implicit Treaps

Implicit Treaps

- Αντί για keys →θέση στον ”πίνακα”

Implicit Treaps

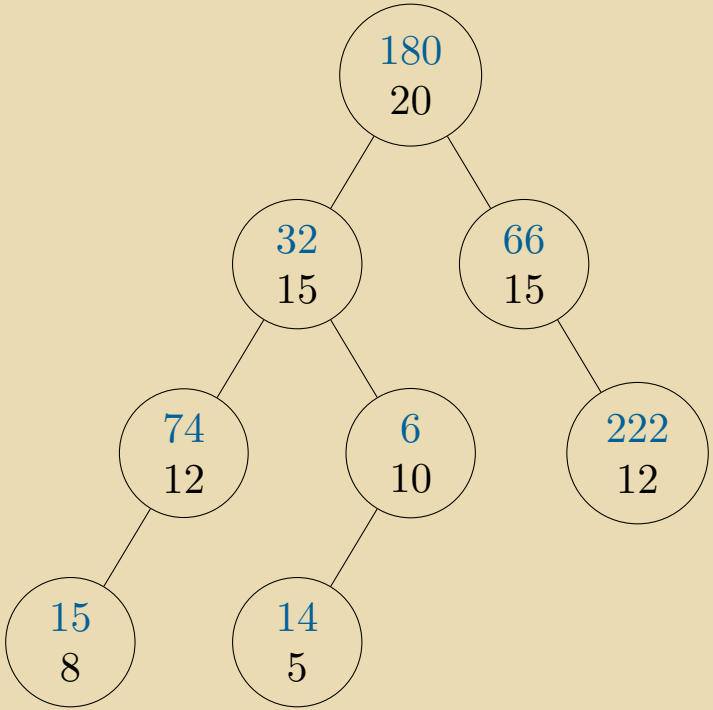
- Αντί για keys →θέση στον ”πίνακα”
- Δεν αποθηκεύω κλειδιά →βρίσκονται *(implied)* από θέση

Implicit Treaps

- Αντί για keys →θέση στον "πίνακα"
- Δεν αποθηκεύω κλειδιά →βρίσκονται *(implied)* από θέση
- Αποθηκεύουμε το value *(Data Structure Augmentation)*

Implicit Treaps

- Αντί για keys →θέση στον "πίνακα"
- Δεν αποθηκεύω κλειδιά →βρίσκονται *(implied)* από θέση
- Αποθηκεύουμε το value *(Data Structure Augmentation)*



0	1	2	3	4	5	6	7
15	4	32	14	6	180	66	222

Θέση → κόμβοι πιο αριστερά
→ χρησιμοποιώ size

Implicit Treap Code

```
struct itreap_node {
   int32_t value;
   uint64_t priority;
   itreap_node *left, *right;
   size_t size;
};
```

Implicit Treap Code

```
struct itreap_node {
   int32_t value;
   uint64_t priority;
   itreap_node *left, *right;
   size_t size;
};
```

```
 void itreap_split_ (itreap this, ptrdiff_t key,
itreap *l, itreap *r, size_t prv)
 {
    if (!this) {
       *l = *r = NULL;
       return;
    }
    int cur_key = prv + itreap_size(this->left);
    if (cur_key <= key)
       itreap_split_(this->right, key,
&(this->right), r, cur_key + 1),
          *l = this;
    else
       itreap_split_(this->left, key, l,
&(this->left), prv), *r = this;
    itreap_update(this);
 }
```

Implicit Treap Code

```
struct itreap_node {
   int32_t value;
   uint64_t priority;
   itreap_node *left, *right;
   size_t size;
};

itreap itreap_set_ (itreap this, size_t pos,
int32_t val)
{
   itreap u = node_create(val),
          l = {}, r = {};
   assert(itreap_size(this) >= pos);

   itreap_split(this, (ptrdiff_t)pos - 1,
          l, r);
   itreap_merge(this, l, u);
   itreap_merge(this, this, r);
   return this;
}
```

```
void itreap_split_ (itreap this, ptrdiff_t key,
itreap *l, itreap *r, size_t prv)
{
   if (!this) {
      *l = *r = NULL;
      return;
   }
   int cur_key = prv + itreap_size(this->left);
   if (cur_key <= key)
      itreap_split_(this->right, key,
&(this->right), r, cur_key + 1),
         *l = this;
   else
      itreap_split_(this->left, key, l,
&(this->left), prv), *r = this;
   itreap_update(this);
}
```

Implicit Treap Code (II)

```
int32_t itreap_get (itreap this, size_t pos)
{
   int32_t ret;
   itreap l = {}, r = {};
   assert(itreap_size(this) > pos);

   itreap_split(this, pos, this, this->right);
   itreap_split(this, pos-1, l, this);
   ret = this->value;
   itreap_merge(this, l, this),
itreap_merge(this, this, r);
   return ret;
}
```

Implicit Treap Code (II)

```
int32_t itreap_get (itreap this, size_t pos)
{
   int32_t ret;
   itreap l = {}, r = {};
   assert(itreap_size(this) > pos);
   itreap_split(this, pos, this, this->right);
   itreap_split(this, pos-1, l, this);
   ret = this->value;
   itreap_merge(this, l, this),
itreap_merge(this, this, r);
   return ret;
}
```

```
treap itreap_erase_ (itreap this, size_t pos)
{
   itreap l, r;
   itreap_split(this, pos, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)pos - 1, l,
this);
   itreap_merge(this, l, r);
   return this;
}
```

Implicit Treap Code (II)

```
int32_t itreap_get (itreap this, size_t pos)
{
   int32_t ret;
   itreap l = {}, r = {};
   assert(itreap_size(this) > pos);
   itreap_split(this, pos, this, this->right);
   itreap_split(this, pos-1, l, this);
   ret = this->value;
   itreap_merge(this, l, this),
itreap_merge(this, this, r);
   return ret;
}

#define itreap_set(t, pos, val) \
   (void)((t) = itreap_set_(t, pos, val))
#define itreap_erase(t, pos) \
   (void)((t) = itreap_erase_(t, pos))
//      itreap_get(t, pos)
//      itreap_size(t)
```

```
treap itreap_erase_ (itreap this, size_t pos)
{
   itreap l, r;
   itreap_split(this, pos, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)pos - 1, l,
this);
   itreap_merge(this, l, r);
   return this;
}
```

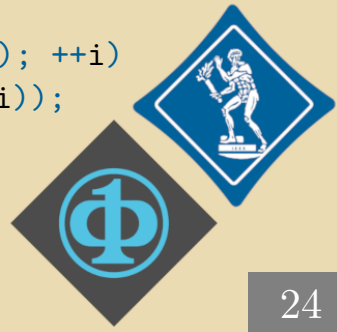
Implicit Treap Code (II)

```
int32_t itreap_get (itreap this, size_t pos)
{
   int32_t ret;
   itreap l = {}, r = {};
   assert(itreap_size(this) > pos);
   itreap_split(this, pos, this, this->right);
   itreap_split(this, pos-1, l, this);
   ret = this->value;
   itreap_merge(this, l, this),
itreap_merge(this, this, r);
   return ret;
}

#define itreap_set(t, pos, val) \
   (void)((t) = itreap_set_(t, pos, val))
#define itreap_erase(t, pos) \
   (void)((t) = itreap_erase_(t, pos))
//      itreap_get(t, pos)
//      itreap_size(t)
```

```
treap itreap_erase_ (itreap this, size_t pos)
{
   itreap l, r;
   itreap_split(this, pos, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)pos - 1, l,
this);
   itreap_merge(this, l, r);
   return this;
}


itreap arr = {};
itreap_set(arr, 0, 42);
itreap_set(arr, 0, 17);
for (size_t i=0; i<itreap_size(arr); ++i)
   printf("%d\n", itreap_get(arr, i));
```



Implicit Treaps - Range Min/Max/Sum Queries

Implicit Treaps - Range Min/Max/Sum Queries

Ίδια ιδέα με τα απλά treaps → Implicit κλειδιά άρα εύρος σε πίνακα

Implicit Treaps - Lazy propagation

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query
- Αλλαγή μόνο στον τωρινό κόμβο $\rightarrow$ Υπενθύμιση στα παιδιά

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query
- Αλλαγή μόνο στον τωρινό κόμβο $\rightarrow$ Υπενθύμιση στα παιδιά

- Πολυπλοκότητα $\rightarrow$ **μόνο** split/merge + πράξη $\rightarrow$ O(logn) + O(πράξης)

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query
- Αλλαγή μόνο στον τωρινό κόμβο $\rightarrow$ Υπενθύμιση στα παιδιά

- Πολυπλοκότητα $\rightarrow$ **μόνο** split/merge + πράξη $\rightarrow$ O(logn) + O(πράξης)

Παραδειγματα

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query
- Αλλαγή μόνο στον τωρινό κόμβο $\rightarrow$ Υπενθύμιση στα παιδιά

- Πολυπλοκότητα $\rightarrow$ **μόνο** split/merge + πράξη $\rightarrow$ O(logn) + O(πράξης)

Παραδειγματα

- Πρόσθεση σταθερού αριθμού σε εύρος: O(logn) + O(1) = O(logn)

Implicit Treaps - Lazy propagation

Πρόβλημα: Θέλουμε να τροποποιήσουμε ένα εύρος του πίνακα

- Εύρος $\implies$ ίδια ιδέα με sum range query
- Αλλαγή μόνο στον τωρινό κόμβο $\rightarrow$ Υπενθύμιση στα παιδιά

- Πολυπλοκότητα $\rightarrow$ **μόνο** split/merge + πράξη $\rightarrow$ O(logn) + O(πράξης)

Παραδειγματα

- Πρόσθεση σταθερού αριθμού σε εύρος: O(logn) + O(1) = O(logn)
- Αναστροφή εύρους: O(logn) + O(1) = O(logn)

Lazy Implicit Treaps

```
struct itreap_node {
   int32_t value;
   uint64_t priority;
   itreap_node *left, *right;
   size_t size;
   int64_t sum; /* auxiliary value */
   int32_t add; /* lazy values */
   bool flip;
};
itreap node_create (int32_t value)
{
   itreap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->value = value;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32) |
rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   ret->sum = value;
   ret->add = ret->flip = 0;
   return ret;
}
```

Lazy Implicit Treaps

```
struct itreap_node {
   int32_t value;
   uint64_t priority;
   itreap_node *left, *right;
   size_t size;
   int64_t sum; /* auxiliary value */
   int32_t add; /* lazy values */
   bool flip;
};
```

```
itreap node_create (int32_t value)
{
   itreap_node *ret = malloc(sizeof(*ret));
   ret->value = value;
   ret->priority = ((uint64_t)rand() << 32) |
rand();
   ret->left = ret->right = NULL;
   ret->size = 1;
   ret->sum = value;
   ret->add = ret->flip = 0;
   return ret;
}
```

```
void itreap_update (itreap this)
{
   if (!this) return;
   this->size = 1 + itreap_size(this->left) +
itreap_size(this->right);
   this->sum = this->value +
itreap_sum(this->left) +
      itreap_sum(this->right);
}
```

Lazy Implicit Treaps (II)

```
void itreap_push (itreap this)
{
   if (this && this->add) {
      if (this->left)
         this->left->sum += this->left->size * this->add,
         this->left->value += this->add,
         this->left->add += this->add;
      if (this->right)
         this->right->sum += this->right->size * this->add,
         this->right->value += this->add,
         this->right->add += this->add;
      this->add = 0;
   }
   if (this && this->flip) {
      SWAP(this->left, this->right);
      if (this->left) this->left->flip = !this->left->flip;
      if (this->right) this->right->flip = !this->right->flip;
      this->flip = false;
   }
}
```

Lazy Implicit Treaps (III)

Add

```
itreap
itreap_add_ (itreap this, size_t from, size_t to, int32_t add)
{
   itreap l = {}, r = {};
   assert(from <= to && itreap_size(this) > to);

   itreap_split(this, to, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)from - 1, l, this);
   this->sum += this->size * add;
   this->value += add, this->add += add;
   itreap_merge(this, l, this), itreap_merge(this, this, r);
   return this;
}
```

Lazy Implicit Treaps (III)

Add

```
#define itreap_add(t, from, to, x) \
   (void)((t) = treap_add_(t, from, to, x))

itreap
itreap_add_ (itreap this, size_t from, size_t to, int32_t add)
{
   itreap l = {}, r = {};
   assert(from <= to && itreap_size(this) > to);

   itreap_split(this, to, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)from - 1, l, this);
   this->sum += this->size * add;
   this->value += add, this->add += add;
   itreap_merge(this, l, this), itreap_merge(this, this, r);
   return this;
}
```

Lazy Implicit Treaps (IV)

Flip

```
itreap
itreap_flip_ (itreap this, size_t from, size_t to)
{
   itreap l = {}, r = {};
   assert(from <= to && itreap_size(this) > to);

   itreap_split(this, to, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)from - 1, l, this);
   SWAP(this->left, this->right);
   this->flip ^= 1;
   itreap_merge(this, l, this), itreap_merge(this, this, r);
   return this;
}
```

Lazy Implicit Treaps (IV)

Flip

```
#define itreap_flip(t, from, to) \
   (void)((t) = treap_flip_(t, from, to))

itreap
itreap_flip_ (itreap this, size_t from, size_t to)
{
   itreap l = {}, r = {};
   assert(from <= to && itreap_size(this) > to);

   itreap_split(this, to, this, r);
   itreap_split(this, (ptrdiff_t)from - 1, l, this);
   SWAP(this->left, this->right);
   this->flip ^= 1;
   itreap_merge(this, l, this), itreap_merge(this, this, r);
   return this;
}
```