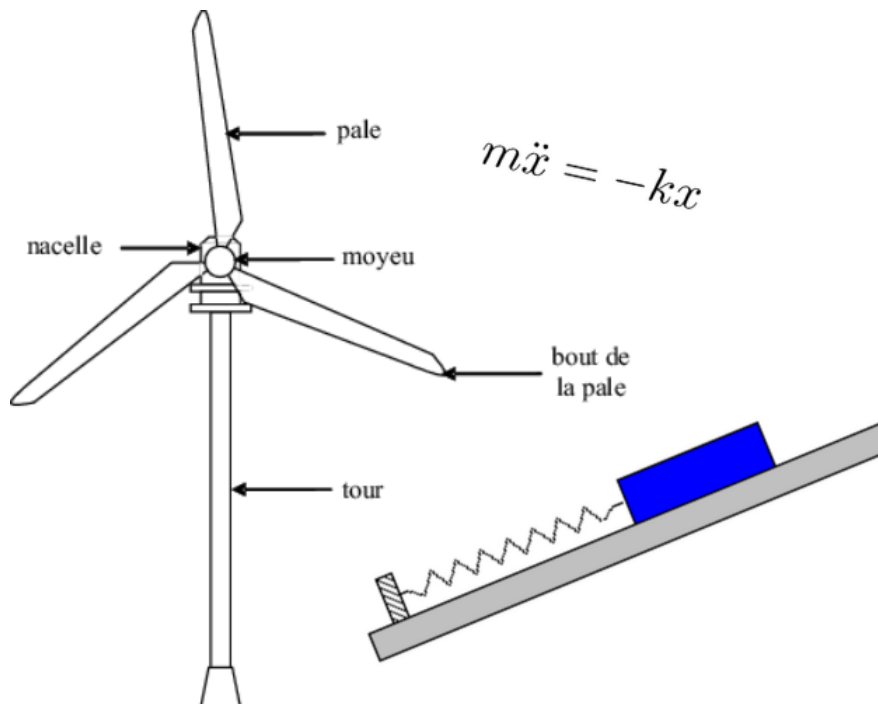


PROJET D'APPROXIMATION NUMÉRIQUE : AVRIL - MAI 2024

Modélisation dynamique de l'élongation d'une pale d'éolienne

Une approche par résolution de schémas numériques

Mohamed-Amine Kamal
Ben Emran Salaheddin
Morgan Scalabrino
Jules Baldous



Représentation artistique d'une éolienne et de sa modélisation par un système masse-ressort

SUPERVISEURS :
Stéphane Abide & Claire Scheid

Remerciements

Nous aimerions remercier d'abord Stéphane Abide pour son encadrement et son aide précieuse apportée dans ce projet mais aussi Claire Scheid pour nous avoir donné la possibilité de réaliser un projet de mathématiques appliquées dans le cadre de l'UE SLUMA603 d'Approximation Numérique. Enfin merci aussi à Joseph Penlap qui nous aura encadré de manière dynamique et intéressante durant les TDs de cette UE.

Distribution du travail

Mohamed-Amine Kamal :

1 % (Partie physique)

Ben Emran Salaheddin :

35 % (Partie physique, partie mathématique)

Morgan Scalabrino :

20 % (Partie informatique, relecture du rapport)

Jules Baldous :

44 % (Partie mathématique, partie informatique, rédaction du rapport)

Mots clés :

Système masse-ressort, Eolienne, Modélisation, Approximation Numérique, Schéma Numérique

Nombre de mots :

1347

Les codes sont disponibles dans les annexes du rapport mais aussi *ici* sur Github.

2 Contexte

Une pale d'éolienne est soumise à différentes contraintes mécaniques (écoulement de l'air, force centrifuge due à sa propre rotation) que nous allons modéliser à l'aide de systèmes d'équations différentielles et résoudre à l'aide de schémas numériques en Scilab.

Nous assimilons une pale d'éolienne à une poutre subdivisée en masses liées entre elles par des ressorts. Nous poserons et analyserons d'abord un modèle à 1 ressort (section 2), puis à N ressorts (section 3) avant de discuter des résultats et de proposer des perspectives soulevées par notre modélisation.

2 Modèle discret à 1 ressort

Nous considérons dans cette partie qu'une pale est une poutre à 2 masses M_0 et M_1 liés entre eux par 1 ressort. L'élément M_0 est dit encastrée c'est à dire qu'il se situe au niveau du moyeu et ne bouge pas avec le temps.

1] [Formalisation des équations physiques]

Nous notons $x_0(t)$ et $x_1(t)$ la position des deux éléments (dans le repère (O, \vec{e}_x)) au temps t ainsi que m_0 et m_1 leurs masses respectives ($m_0 \geq 0$, $m_1 \geq 0$). La poutre (donc le ressort à vide) est de longueur L et de masse totale $m = m_0 + m_1$.

Le ressort sera de constante de raideur k ($k > 0$). On a en particulier $m_0 = m_1 = \frac{m}{2}$. De plus, on impose une vitesse angulaire notée $\Omega(t)$ qu'on prendra constante ie $\Omega(t) = \Omega_0, \forall t \in \mathbb{R}$. La condition en encastrée de la pale nous fournit immédiatement que $\forall t \in \mathbb{R}, x_0(t) = 0$.

Le bilan des forces appliquées et le PFD nous donne (voir annexe A.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2} \ddot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - L) + \frac{m}{2} \Omega_0^2 L \end{array} \right. \quad (1)$$

2] [Solution à l'équilibre et analytique]

On pose le problème de Cauchy (P. C. dans la suite) suivant, pour t quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1(t) = \frac{-2k}{m} x_1(t) + \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L \\ x_1(0) = x_{ini}, \quad \dot{x}_1(0) = v_{ini} \end{array} \right. \quad (2)$$

La solution stationnaire du système est $x_{eq} = L + \frac{m\Omega_0^2 L}{2k}$ (voir annexe A.2.1).

Le P. C. 2 admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz et celle ci est de la forme (voir annexe A.2.2) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_1(t) = x_{eq} + (x_{ini} - x_{eq}) \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}} t) + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_{ini} \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}} t).$$

3] [Résolution numérique des schémas]

Dans cette partie on souhaite approcher la solution exacte calculée via les schémas d'Euler explicite et de Cranck-Nicholson et comparer les résultats. Pour cela nous devons mettre en place des formalismes décrits dans l'annexe A.3, dans cette partie nous décrirons les résultats observés sur les figures dans l'annexe A.4 obtenues en lançant le code de l'annexe A.5.

Résolution par schéma d'Euler explicite :

On voit sur la figure 3 que l'approximation par le schéma d'Euler explicite est bonne pour des temps courts mais se détériore sur des temps longs. En effet on observe de plus grandes oscillations que prévu ce qui s'explique mathématiquement en calculant l'énergie totale du système et en observant qu'elle croît quand celle-ci est approximée par Euler explicite (amplification).

Résolution par schéma de Cranck-Nicholson :

En revanche on observe que sur la figure 4 que l'approximation par le schéma de Cranck-Nicholson est bonne (tellement que la courbe grise et bleu sont confondus à l'oeil nu) au début et reste bonne en temps longs. Ceci est dû à la propriété de conservation (du à l'aspect implicite du schéma) de l'énergie totale estimée par Cranck-Nicholson mise en lumière dans les TDs.

3 Modèle discret à N ressorts

Nous considérons dans cette partie qu'une pale est une poutre à $N + 1$ masses M_0, \dots, M_N liés entre eux par N ressort. L'élément M_0 est dit encastrée c'est à dire qu'il se situe au niveau du moyeu et ne bouge pas avec le temps.

1] [Formalisation des équations physiques]

Nous notons $x_0(t), \dots, x_N(t)$ la position des deux éléments (dans le repère (O, \vec{e}_x)) au temps t ainsi que m_0, \dots, m_N leurs masses respectives. La poutre (donc le ressort à vide) est de longueur L et de masse totale m . Le ressort sera de constante de raideur k ($k > 0$). On a en particulier $m_0 = m_N = \frac{m}{2N}$ et $\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, m_i = \frac{m}{N}$. De plus, on impose une vitesse angulaire notée $\Omega(t)$ qu'on prendra constante ie $\Omega(t) = \Omega_0, \forall t \in \mathbb{R}$. La condition en encastrée de la pale nous fournit immédiatement que $\forall t \in \mathbb{R}, x_0(t) = 0$.

Le bilan des forces appliquées et le PFD nous donne (voir annexe B.1) :

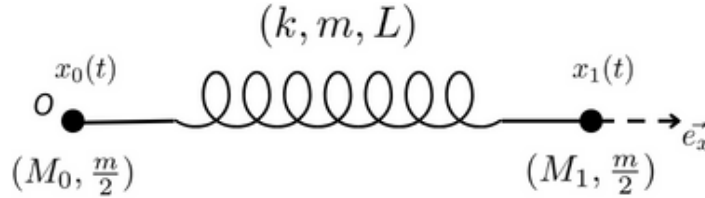


FIGURE 1 – Schéma du modèle discret à 1 ressort

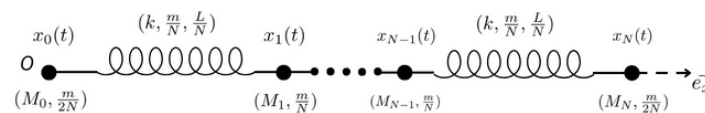


FIGURE 2 – Schéma du modèle discret à N ressorts

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} \frac{m}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{m}{N} & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{2N} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} (t) = k \left[\begin{array}{cccc} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} m\Omega_0^2 \frac{L}{N^2} \\ m\Omega_0^2 \frac{2L}{N^2} \\ \vdots \\ m\Omega_0^2 \frac{L}{2N} + \frac{kL}{N} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3)$$

2] [Formalisation du problème de Cauchy et solution stationnaire]

On pose le P. C. suivant, pour t quelconque et $X(t) = {}^t(x_1, \quad x_2, \quad \cdots \quad x_N)(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \frac{m}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{m}{N} & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{2N} \end{bmatrix} \ddot{X}(t) = k \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} m\Omega_0^2 \frac{L}{N^2} \\ m\Omega_0^2 \frac{2L}{N^2} \\ \vdots \\ m\Omega_0^2 \frac{L}{2N} + \frac{kL}{N} \end{pmatrix} \\ X(0) = X_{ini}, X'(0) = V_{ini}, X_{ini}, V_{ini} \in \mathbb{R}^N \end{array} \right. \tag{4}$$

La solution stationnaire du système est $X_{eq} = -\frac{1}{k} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m\Omega_0^2 \frac{L}{N^2} \\ m\Omega_0^2 \frac{2L}{N^2} \\ \vdots \\ m\Omega_0^2 \frac{L}{2N} + \frac{kL}{N} \end{pmatrix}$.

3] [Résolution numérique des schémas]

La résolution par les schémas numériques est d’autant plus importante que la solution analytique du P. C. 4 est trouvable mais longue à calculer car il faut trouver les vecteurs et valeurs propres d’une matrice de dimension N . Pour poser le schémas de Cranck-Nicholson il faut adopter des formalismes décrits en B.2. Nous allons simuler uniquement avec Cranck-Nicholson car Euler explicite n’est pas intéressant car ne conserve pas l’énergie totale du système. Vous trouverez toutes les figures en annexe B.3.

Simulation de l’élongation de la pale :

Dans cette partie nous poserons les conditions initiales à l’équilibre perturbée c’est à dire avec $X(0) = X_{eq} + \epsilon$ et $X'(0) = 0$. La simulation par Cranck-Nicholson en figure 5 nous donne ce qu’on pouvait attendre, c’est à dire que l’élongation est d’autant plus forte qu’on est aux extrémités de la pale. Ceci est principalement dû à la force centrifuge, plus forte si on est aux extrémités.

Simulation en condition d’équilibre et d’équilibre perturbé :

Nous poserons les conditions initiales à l’équilibre c’est à dire avec $X(0) = X_{eq}$ et $X'(0) = 0$ et $X(0) = X_{eq} + \epsilon$ et $X'(0) = 0$ qui correspond à une condition perturbée aléatoirement par rapport à la longueur de la pale à son équilibre. Ceci peut représenter un effort sur la pale et représente donc une situation intéressante.

La simulation par Cranck-Nicholson avec 10 ressorts nous donne, pour la position de la masse à l’extrémité de la pale, qu’en condition d’équilibre, en figure 6, on observe de faibles oscillations par rapport à la position à l’équilibre (en orange) prédites par le schéma, sûrement dûes à des erreurs numériques en raison de la dimension dans laquelle nous travaillons.

Nous observons qu’en condition d’équilibre perturbée, en figure 7, on a de fortes oscillations dont on ne peut dire si elles ont une réalité physique. Ceci représenterait les vibrations que pourrait subir la pale, et de plus amples analyses pourraient nous permettre de donner des conditions pour réduire ces vibrations et donc les contraintes mécaniques sur la pale.

On voit de plus, en figure 8, qu’en augmentant le nombre de ressort il arrive des oscillations particulières dont on ne sait pas si elles ont une réalité physique.

Erreur en fonction du nombre de ressorts :

Nous voyons en figure 9 que augmenter le nombre de ressort baisse l’erreur du schéma numérique. Nous avons calculé l’erreur de l’approximation par rapport à la solution stationnaire.

Ceci n’est pas étonnant, augmenter le nombre de ressort correspond à préciser la modélisation.

4 Discussion

En commençant par modéliser notre problème par deux masses liées par un ressort nous avons pu observer quelles seraient les principaux résultats que nous pourrions observer.

En effet, nous avons pu voir qu’en donnant une condition initiale précise, correspondant physiquement à une secousse dans la pale, nous avons obtenu des oscillations dans la solution exacte. Cette solution exacte est très bien approximée par Cranck-Nicholson qui, étant un schéma implicite, a aussi donné de très bon résultats en temps long (propriété de stabilité). En revanche dans l’approximation via Euler explicite nous avons observer un phénomène d’amplification des oscillations en temps longs du à la structure du schéma en lui même qui augmente accumule les erreurs au cours des itérations.

Augmenter le nombre de ressort est théoriquement censé augmenter le degré de précision de notre modélisation. Par manque de données réelles nous n’avons pas pu vérifier ce point là dans la réalité. En revanche, augmenter le nombre de ressorts a bien diminué l’erreur de l’approximation par Cranck-Nicholson.

Au vu des résultats le phénomène d’oscillations se perpétue dans le modèle à plusieurs ressorts en donnant néanmoins des motifs beaucoup plus complexe. La réalité physique de ces motifs n’a pas été testée dans ce projet.

Ce projet nous a donc permis de découvrir la modélisation masse ressort. Plus que modéliser une pale, ce formalisme permettrait de modéliser tout matériau pouvant être déformé et ceux de manière très précise (en augmentant le nombre de ressorts). Par exemple, nous avons rapidement pu apercevoir avec notre encadrant que ce type de modélisation peut permettre de mieux comprendre les contraintes mécaniques de la déformation de la membrane plasmique en biologie, chose qui n’a pas été plus creusée dans ce projet.

Nous aurions aussi pu nous intéresser à la forme que prend notre matrice. En effet, celle-ci se rapproche fortement de la matrice permettant de discrétiser un problème de diffusion de la chaleur. Via des analyses mathématiques plus poussées nous pourrions sans doute obtenir des résultats intéressants sur ce point là (notamment en passant du discret au continu).

A Annexe pour le modèle discret à 1 ressort

A.1 Formulation des équations du modèle à 1 ressort

Le bilan des forces appliquées au point M_1 :

- La tension du ressort : $\vec{T}_1 = -k(x_1 - x_0 - L)\vec{e}_x = -k(x_1 - L)\vec{e}_x$
- La force centrifuge : $\vec{F}_1 = \frac{m}{2}\Omega^2 x_1 \vec{e}_x = \frac{m}{2}\Omega^2 L \vec{e}_x$

Le PFD nous donne alors, à t quelconque et en projection par rapport à l'axe \vec{e}_x , les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2} \ddot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - L) + \frac{m}{2}\Omega^2 L \end{array} \right.$$

A.2 Solutions stationnaires et analytiques du modèle à 1 ressort

A.2.1 Solution stationnaire

La solution stationnaire du système s'obtient en posant $\ddot{x}_1(t) = 0$ ie $\frac{-2k}{m}x_{eq} + \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L = 0$ ie $x_{eq} = L + \frac{m\Omega_0^2 L}{2k}$.

A.2.2 Solution analytique

Soit le P. C., $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1(t) = \frac{-2k}{m}x_1(t) + C \\ x_1(0) = x_{ini}, \dot{x}_1(0) = v_{ini}, C = \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L \end{array} \right.$, on pose donc comme condition initiale que l'élément M_1 est en position x_{ini} (qu'on pourra d'abord prendre comme x_{eq} ou une condition perturbée) sur l'axe \vec{e}_x . La condition $\dot{x}(0)$ correspond à la vitesse de M_1 (qu'on pourra prendre égale à 0 si $x_1(0) = x_{eq}$ par exemple).

Une solution particulière de l'EDO $\ddot{x}_1(t) = \frac{-2k}{m}x_1(t) + C$ est la solution stationnaire $x_p = L + \frac{m\Omega_0^2 L}{2k} = x_{eq}$.

On considère maintenant l'équation homogène suivante :

$\ddot{x}_h(t) = \frac{-2k}{m}x_h(t)$ qui a pour équation caractéristique $y^2 = -\frac{2k}{m}$. Comme $\frac{2k}{m} > 0$ on a $y = \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Ceci donne exactement qu'une solution de l'équation homogène est de la forme, pour t quelconque,

$x_h(t) = \alpha \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + \beta \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'EDO est donc, $\forall t \in \mathbb{R}, x_1(t) = x_p + x_h(t) = x_{eq} + \alpha \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + \beta \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$

On calcule α et β grâce aux conditions initiales :

- $x_1(0) = \alpha + x_{eq} = x_{ini} \Rightarrow \alpha = x_{ini} - x_{eq}$
- $\dot{x}_1(0) = \beta \sqrt{\frac{2k}{m}} = v_{ini} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{m}{2k}} v_{ini}$

La solution exacte du P.C. est donc, $\forall t \in \mathbb{R}, x_1(t) = x_{eq} + (x_{ini} - x_{eq}) \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_{ini} \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$, où $C = \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L$

A.3 Formalisation pour les schémas numériques

Soit $T > 0$, on cherche à approcher $x_1(t)$ pour $t \in [0, T]$. On se donne une subdivision uniforme de $[0, T]$ $N + 1$ points $(t_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$. Son pas sera noté $\Delta t = \frac{T}{N}$. Les schémas numériques permettront de calculer les $(y_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ qui sont les valeurs approchées des $x_1(t_n), \forall n \in \{0, \dots, N\}$.

Pour poser le schéma on doit passer notre P. C. en ordre 1 en posant le changement de variables $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X$.

Ceci donne le système suivant, en posant $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2k}{m} & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L \end{pmatrix}$:

$$\dot{X} = AX + F$$

On pose donc la fonction suivante $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(t_n, X_n) \mapsto AX_n + F$

Le schéma d'Euler explicite calcule les valeurs $(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ de la manière suivante :

- **Initialisation** : $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} x_{ini} \\ v_{ini} \end{pmatrix}$
- **Itération** : $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, X_{n+1} = X_n + \Delta t f(t_n, X_n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + \Delta t y_n \\ y_n + \Delta t \left(\frac{2k}{m} x_n + \frac{2kL}{m} + \Omega_0^2 L \right) \end{pmatrix}$

Le schéma de Cranck-Nicholson calcule les valeurs $(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ de la manière suivante :

- **Initialisation** : $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} x_{ini} \\ v_{ini} \end{pmatrix}$
- **Itération** : $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, X_{n+1} = X_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, X_n) + f(t_{n+1}, X_{n+1})) \Leftrightarrow X_{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{2} A)^{-1} ((I + \frac{\Delta t}{2} A) X_n + \Delta t F)$

A.4 Figures du modèle à 1 ressort

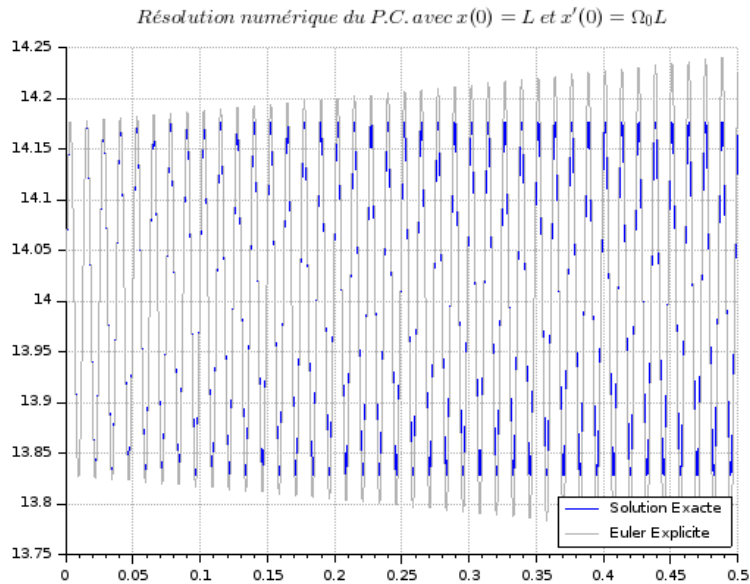


FIGURE 3 – Résolution numérique avec Euler explicite.

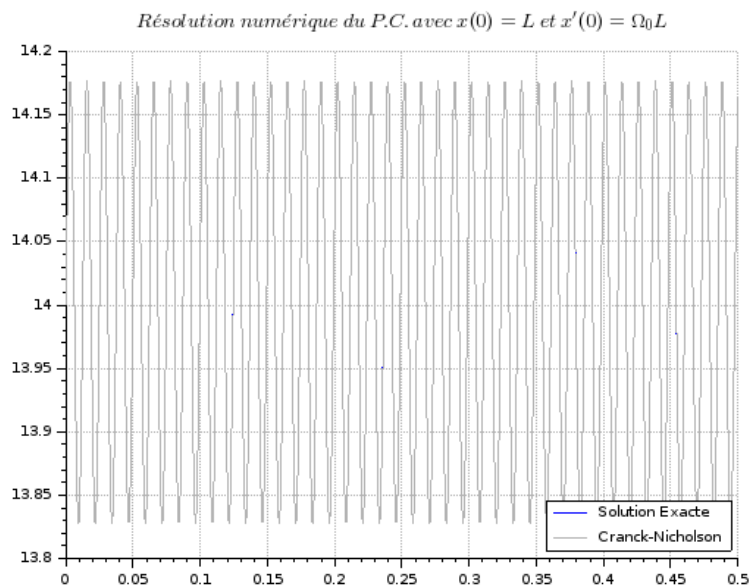


FIGURE 4 – Résolution numérique avec Crank-Nicholson.

A.5 Code Scilab du modèle à 1 ressort

```

1 //Modèle à 1 ressort :
2
3 //Paramètres :
4
5 E = 200*10^9 //Module de Young
6 m = 800 //Masse de la pale
7 rho = 8000 //Densité de la pale
8 L = 14 // Longueur de la pale
9 S = m/(rho*L) //Section équivalente de la pale
10 Omega0 = 2*%pi //Vitesse angulaire de la pale
11 k = E*S/L //Raideur du ressort
12
13 xeq = L + m*(Omega0^2)*L/(2*k) //Solution stationnaire du modèle
14

```

```

15 xini = L //Condition initiale pour x(0)
16 vini = L*Omega0 //Vitesse initiale pour x'(0)
17
18 //Autres conditions initiales intéressantes :
19
20 //xini = xeq
21 //vini = 0
22
23 //xini = xeq + (rand(1)-rand(1)) * L/100
24 //vini = 0
25
26 T = 0.5 //Temps max de la subdivision
27 N = 100000 //Nombre de points de la subdivision
28 t = linspace(0,T,N+1) //Intervalle de la subdivision
29
30 //Fonctions :
31
32 //Fonction pour calculer les approximations de la solution exacte par Euler Explicite
33 function X = Euler_exp(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini)
34     delta = T/N //Pas de la subdivision
35     X = zeros(2,N+1)
36     X(:,1) = [xini;vini] //Conditions initiales du schéma numérique
37
38     for n = 1 : N //Boucle calculant les itérées du schéma numérique
39         X(1,n+1) = X(1,n) + delta * X(2,n)
40         X(2,n+1) = X(2,n) + delta * (- 2*k/m * X(1,n) + 2*k*L/m + (Omega0^2) * L)
41     end
42 endfunction
43
44 //Fonction pour calculer les approximations de la solution exacte par Cranck-Nicholson
45 function X = Cranck(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini)
46     delta = T/N //Pas de la subdivision
47     X = zeros(2,N+1)
48     X(:,1) = [xini;vini] //Conditions initiales du schéma numérique
49     A = [0,1;-2*k/m,0] //Matrice pour simplifier les notations
50
51     for n = 1 : N //Boucle calculant les itérées du schéma numérique
52         X(:,n+1) = inv(diag(ones(1,2)) - delta/2*A) * ((diag(ones(1,2)) + delta/2*A) * X(:,n) + delta
53 * [0;2*k*L/m + Omega0^2*L] )
54     end
55 endfunction
56
57 //Fonction pour calculer la solution exacte du modèle
58 function x = sol_exacte(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini,xeq)
59     x = xeq + (xini-xeq)*cos(sqrt(2*k/m)*t) + sqrt(m/(2*k))*vini*sin(sqrt(2*k/m)*t)
60 endfunction
61
62 //Représentation graphique :
63
64 //Figure 1
65 scf(0)
66
67 //Représentation des vecteurs calculés
68 plot2d(t',[sol_exacte(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini,xeq);Euler_exp(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini)(1,:)'],[2,33]);
69
70 //Legende
71 legends(['Solution Exacte';'Euler Explicite'],[2,33],opt="lr")
72
73 //Titre
74 title('$Résolution \hspace{0.1cm} numérique \hspace{0.1cm} du \hspace{0.1cm} P. C. \hspace{0.1cm}$
75 avec \hspace{0.1cm} x(0) = L \hspace{0.1cm} et \hspace{0.1cm} x''(0) = \Omega_0L$')
76
77 //Grille
78 gcf().children.grid = color("grey70")*[1 1]

```

77

78 //Figure 2

79 scf(1)

80

81 //Représentation des vecteurs calculés

82 plot2d(t', [sol_exacte(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini,xeq);Cranck(T,N,k,m,L,Omega0,xini,vini)(1,:)'], [2, 33]);

83

84 //Legende

85 legends(['Solution Exacte';'Cranck-Nicholson'], [2,33],opt="lr")

86

87 //Titre

88 title('\$Résolution \hspace{0.1cm} numérique \hspace{0.1cm} du \hspace{0.1cm} P. C. \hspace{0.1cm} avec \hspace{0.1cm} x(0) = L \hspace{0.1cm} et \hspace{0.1cm} x''(0) = \Omega_0 L\$')

89

90 //Grille

91(gcf().children.grid = color("grey70")*[1 1])

B Annexe pour le modèle discret à N ressorts

B.1 Formulation des équations du modèle à N ressorts

Le bilan des forces appliquées est :

- Au point M_1 : La tension du ressort : $\vec{T}_1 = -k(x_1 - \frac{L}{N})\vec{e}_x$, $\vec{T}_2 = k(x_2 - x_1 - \frac{L}{N})\vec{e}_x$
La force centrifuge : $\vec{F}_1 = \frac{m}{N}\Omega_0^2 \frac{L}{N}\vec{e}_x$
- Au point M_i ($\forall i \in \{2, \dots, N-1\}$) : La tension du ressort : $\vec{T}_i = -k(x_i - x_{i-1} - \frac{L}{N})\vec{e}_x$, $\vec{T}_{i+1} = k(x_{i+1} - x_i - \frac{L}{N})\vec{e}_x$
La force centrifuge : $\vec{F}_i = \frac{m}{N}\Omega_0^2 \frac{iL}{N}\vec{e}_x$
- Au point M_N : La tension du ressort : $\vec{T}_N = k(x_N - x_{N-1} - \frac{L}{N})\vec{e}_x$
La force centrifuge : $\vec{F}_N = \frac{m}{2N}\Omega_0^2 \frac{L}{N}\vec{e}_x$

Le PFD nous donne alors, à t quelconque et en projection par rapport à l'axe \vec{e}_x , les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{m}{N}\ddot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - \frac{L}{N}) + k(x_2(t) - x_1(t) - \frac{L}{N}) + \frac{m}{N}\Omega_0^2 \frac{L}{N} \\ \vdots = \vdots \\ \frac{m}{N}\ddot{x}_i(t) = k(x_{i+1}(t) - x_i - \frac{L}{N}) - k(x_i(t) - x_{i-1} - \frac{L}{N}) + \frac{m}{N}\Omega_0^2 \frac{iL}{N} \\ \vdots = \vdots \\ \frac{m}{2N}\ddot{x}_N(t) = -k(x_N(t) - x_{N-1} - \frac{L}{N}) + \frac{m}{2N}\Omega_0^2 \frac{L}{N} \end{cases} \quad (5)$$

qui sous forme matricielle donne :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{m}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{m}{N} & 0 & \cdots \\ & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{2N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} \right\} (t) = k \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} \frac{m\Omega_0^2 L}{N^2} \\ \frac{m\Omega_0^2 2L}{N^2} \\ \vdots \\ \frac{m\Omega_0^2 L}{2N} + \frac{kL}{N} \end{pmatrix} \quad (6)$$

B.2 Formalisation pour les schémas numériques

Soit $T > 0$, on cherche à approcher $X(t)$ pour $t \in [0, T]$. On se donne une subdivision uniforme de $[0, T]$ $N + 1$ points $(t_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$. Son pas sera noté $\Delta t = \frac{T}{N}$. Les schémas numériques permettront de calculer les $(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ qui sont les valeurs approchées des $X(t_n)$, $\forall n \in \{0, \dots, N\}$.

Pour poser le schéma on doit passer notre P. C. en ordre 1 en posant le changement de variables $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = Y$.

Ceci donne le système suivant, en posant $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{2kN}{m} & \frac{kN}{m} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{2kN}{m} & \frac{-2kN}{m} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Omega_0^2 \frac{L}{N} \\ \vdots \\ \Omega_0^2 L + \frac{2kL}{m} \end{pmatrix}$, $\dot{Y} = AY + F$.

On pose donc la fonction suivante

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t_n, Y_n) \mapsto AY_n + F$$

Le schéma de Crank-Nicholson calcule les valeurs $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ de la manière suivante :

- **Initialisation** : $Y_0 = Y(0) = \begin{pmatrix} X_{ini} \\ V_{ini} \end{pmatrix}$
- **Itération** : $\forall n \in \{0, ..., N-1\}, Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta t}{2}(f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_{n+1})) \Leftrightarrow Y_{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{2}A)^{-1}((I + \frac{\Delta t}{2}A)Y_n + \Delta t F)$

B.3 Figures du modèle à N ressorts

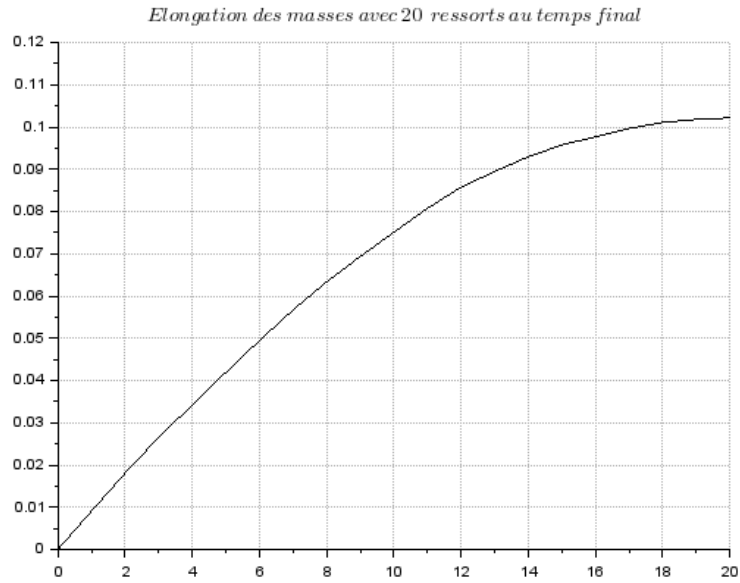


FIGURE 5 – Elongation des masses pour un modèle à 20 ressorts au temps final de la simulation.

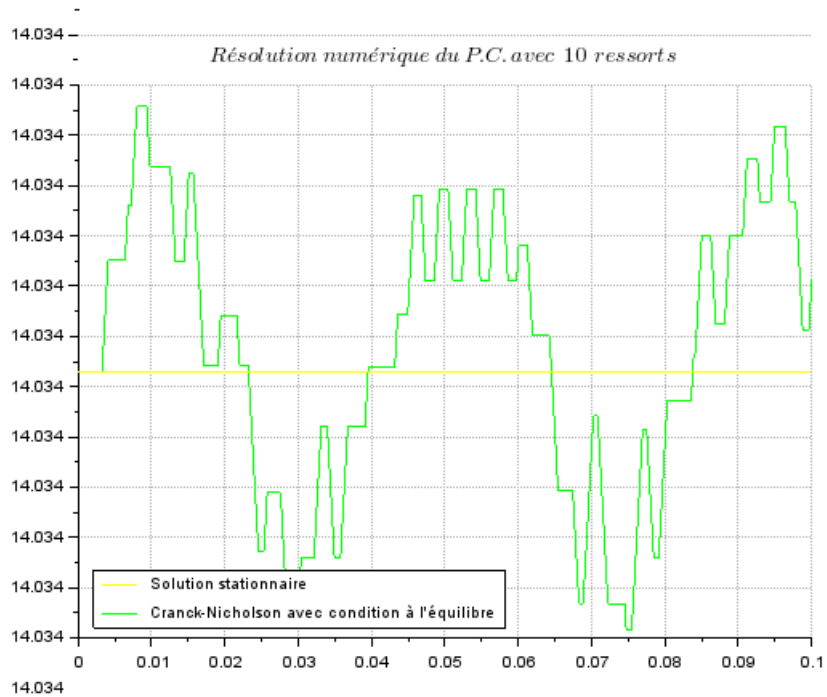


FIGURE 6 – Simulation de la solution avec Cranck-Nicholson avec condition à l'équilibre.

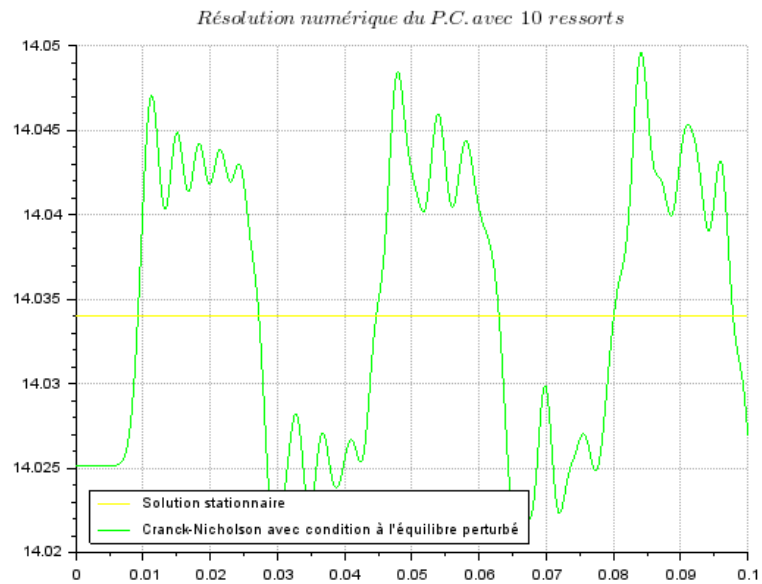


FIGURE 7 – Simulation de la solution avec Crank-Nicholson avec condition à l'équilibre perturbé avec 10 ressorts.

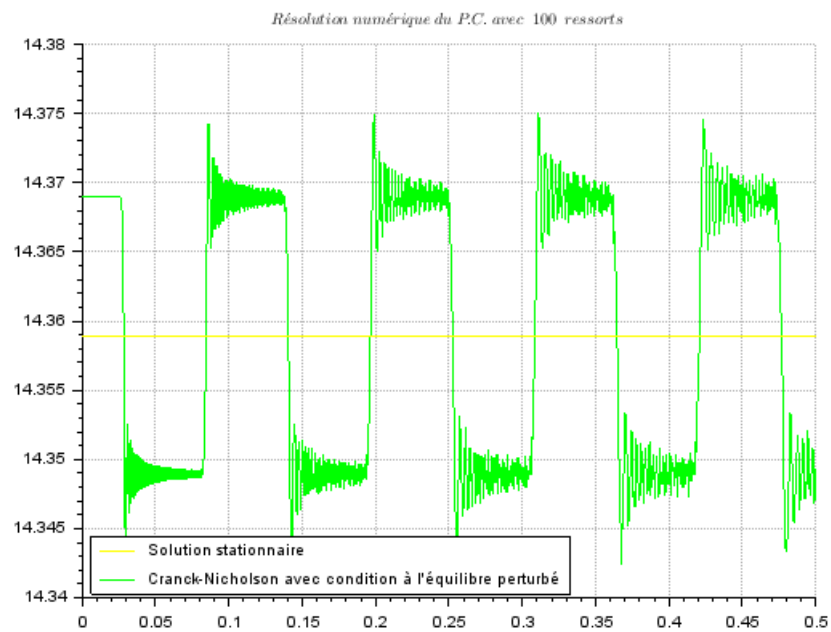


FIGURE 8 – Simulation de la solution avec Crank-Nicholson avec condition à l'équilibre perturbé avec 100 ressorts.

Erreur du schéma numérique en augmentant le nombre de ressorts

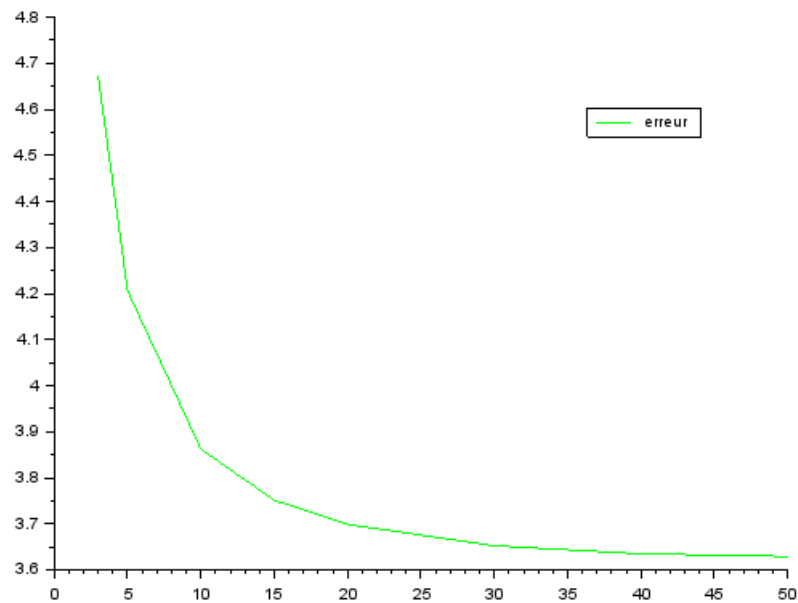


FIGURE 9 – Erreur en fonction du nombre de ressorts.

B.4 Code Scilab du modèle N ressorts

```

1 //Modèle à N ressorts :
2 //Paramètres :
3
4 N = 10 //Nombres de ressorts
5
6 E = 200*10^9 //Module de Young
7 m = 800 //Masse de la pale
8 rho = 8000 //Densité de la pale
9 L = 14 // Longueur de la pale
10 S = m/(rho*L) //Section équivalente de la pale
11 Omega0 = 2*pi //Vitesse angulaire de la pale
12 k = E*S/L //Raideur du ressort
13
14 T = 0.5 //Temps max de la subdivision
15 n = 100000 //Nombre de points de la subdivision
16 t = linspace(0,T,n+1) //Intervalle de la subdivision
17
18 //Matrices et vecteurs :
19 //Matrice du P. C. :
20 A1 = -2 * eye(N,N) + diag(ones(1,N-1),1) + diag(ones(1,N-1),-1)
21 A1(N,N) = -1
22 A1(N,N-1) = 1
23
24 //Vecteur du P. C. :
25 v1 = zeros(N,1) //Vecteur du P. C.
26 v1(N) = m * Omega0^2 * L/(2*N) + k*L/N
27 for i = 1 : N-1
28     v1(i) = m * i * (Omega0/N)^2 * L
29 end
30
31 //Solution stationnaire du modèle :
32 //Xeq = -inv(k*A1) * v1
33
34 //Matrice A pour le schéma :
35 A1_mod = k*N/m*A1
36 A1_mod(N,N) = 2*A1_mod(N,N)
37 A1_mod(N,N-1) = 2*A1_mod(N,N-1)

```

```

38
39 A = [zeros(N,N), diag(ones(N,1)) ; A1_mod , zeros(N,N)] //Matrice du schéma de Cranck-Nicholson
40
41 //Vecteur F pour le schéma :
42 F = zeros(2*N,1)
43 for i = N+1 : 2*N-1
44     F(i) = i * Omega0^2 * L/N
45 end
46 F(2*N) = Omega0^2 * L + 2*k*L/m
47
48
49 //Solution à l'équilibre du problème à l'ordre 1 :
50 Yeq = -inv(A)*F
51
52 //On en déduit la solution à l'équilibre du P. C. (ordre 2) :
53 Xeq = Yeq(1:N)
54
55 //Conditions initiales :
56
57 //Xini = Xeq
58 //Vini = Yeq(N+1:2*N)
59
60 //Autres conditions initiales intéressantes :
61
62 //Xini = Xeq + (rand(1)-rand(1)) * (Xeq(N) - L)
63 Vini = Yeq(N+1:2*N)
64
65 //Fonctions :
66
67 //Fonction pour calculer les approximations de la solution exacte par Cranck-Nicholson
68 function X = Cranck(N,T,n,Xini,Vini)
69     delta = T/n //Pas de la subdivision
70     X = zeros(2*N,n+1)
71     X(:,1) = [Xini;Vini] //Conditions initiales du schéma numérique
72
73     for i = 1 : n //Boucle calculant les itérées du schéma numérique
74         X(:,i+1) = inv(diag(ones(1,2*N)) - delta/2*A) * ((diag(ones(1,2 * N)) + delta/2*A) * X(:,i) +
delta * F )
75     end
76 endfunction
77
78 //Calcul de toutes les positions des masses au temps final (en incluant x0) :
79 Xn = [0;Cranck(N,T,n,Xini,Vini)(1:N,n+1)]
80
81 //Calcul de l'élongation par rapport à la longueur de la pale L :
82 Xn = Xn - [0:L/N:L]'
83
84 //Représentation graphique :
85 //Figure 0
86 scf(0)
87
88 //Représentation des vecteurs calculés
89 plot2d([0:N],Xn);
90
91 //Titre
92 title('$Elongation \hspace{0.1cm} des \hspace{0.1cm} masses \hspace{0.1cm} avec \hspace{0.1cm} 20
\hspace{0.2cm} ressorts \hspace{0.1cm} au \hspace{0.1cm} temps \hspace{0.1cm} final$')
93
94 //Grille
95 gcf().children.grid = color("grey70")*[1 1]
96
97 //Figure 1
98 scf(1)
99
100 //Représentation des vecteurs calculés

```

```
101 plot2d(t',Cranck(N,T,n,Xini,Vini)(N,:)',3);
102 plot2d(t',Xeq(N)*ones(n+1,1),7);
103
104 //Légende
105 legends(['Solution stationnaire';'Cranck-Nicholson avec condition à l''équilibre
perturbé'],[7,3],opt="?")
106
107 //Titre
108 title('$Résolution \hspace{0.1cm} numérique \hspace{0.1cm} du \hspace{0.1cm} P. C. \hspace{0.1cm}
avec \hspace{0.2cm} 100 \hspace{0.2cm} ressorts \hspace{0.1cm}$')
109
110 //Grille
111 gcf().children.grid = color("grey70")*[1 1]
```