

José Sebastian Ramírez Jiménez<sup>1</sup>

Asesor de tesis: Dr. Rodrigo Macías Paéz<sup>2</sup> Co-asesor de tesis: Dr. Andrés García Medina<sup>3</sup>

Centro de Investigación en Matemáticas, Unidad Monterrey<sup>1,2</sup> Universidad Autónoma de Baja California<sup>3</sup>

sebastian.ramirez@cimat.mx<sup>1</sup>

rmaciasp@cimat.mx<sup>2</sup>

andres.garcia.medina@uabc.edu.mx<sup>3</sup>

## Resumen

El presente trabajo de tesis se centra en la construcción de un marco de asignación de activos en portafolios financieros utilizando algoritmos de clustering jerárquico y evaluando diversas configuraciones de enlace (*linkage*). Se exploran las relaciones entre activos utilizando clustering jerárquico bajo diferentes medidas de proximidad más adecuadas entre series de tiempo como DTW (*Dynamic Time Warping*). Se ha implementado el *GAP-statistics* modificado para clustering jerárquico como un criterio adecuado para seleccionar el número óptimo de clústers. Finalmente se comparan los distintos escenarios con métricas de riesgo como el CVaR. Se observan resultados competitivos respecto a modelos tradicionales para ciertas configuraciones y composiciones de portafolios.

## Introducción

Actualmente, los modelos de asignación de activos basados en clustering explotan la noción de jerarquía anidada presente en sistemas complejos, como los mercados financieros [3], convirtiéndose en herramientas poderosas al mostrar que superan el rendimiento fuera de muestras [2], generan portafolios verdaderamente diversificados y que logran un mejor desempeño ajustado al riesgo en comparación con las técnicas tradicionales [4]. La presente investigación aborda los problemas típicos del aprendizaje automático para técnicas de clustering, como la selección de medidas de proximidad adecuadas y los criterios de selección del número de clústers. En este sentido, se ha generado un marco de asignación de activos basado en clustering jerárquico bajo medidas de proximidad más adecuadas como DTW (*Dynamic Time Warping*) y la implementación de *GAP-statistics* como criterio selección del número de clústers.

## 1. Dynamic Time Warping

Para dos series temporales  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ , de longitudes  $n$  y  $m$ , respectivamente, primero se calcula la matriz de distancias  $n \times m$  de  $d(a_i, b_j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Luego, se define una secuencia de deformación (*warping*)  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_R)$  de pares  $w_r = (i_r, j_r)$ ,  $i_r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j_r \in \{1, \dots, m\}$ ,  $r = 1, \dots, R$ , que minimiza la distancia acumulada normalizada, es decir,

$$d_{DTW}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathcal{P}} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R d_{w_r}, \quad (1)$$

donde  $d_{w_r} = d(a_{i_r}, b_{j_r})$ ,  $r = 1, \dots, R$ , se encuentra dentro del conjunto  $\mathcal{P}$  de secuencias de deformación, definidas bajo ciertas condiciones [6].

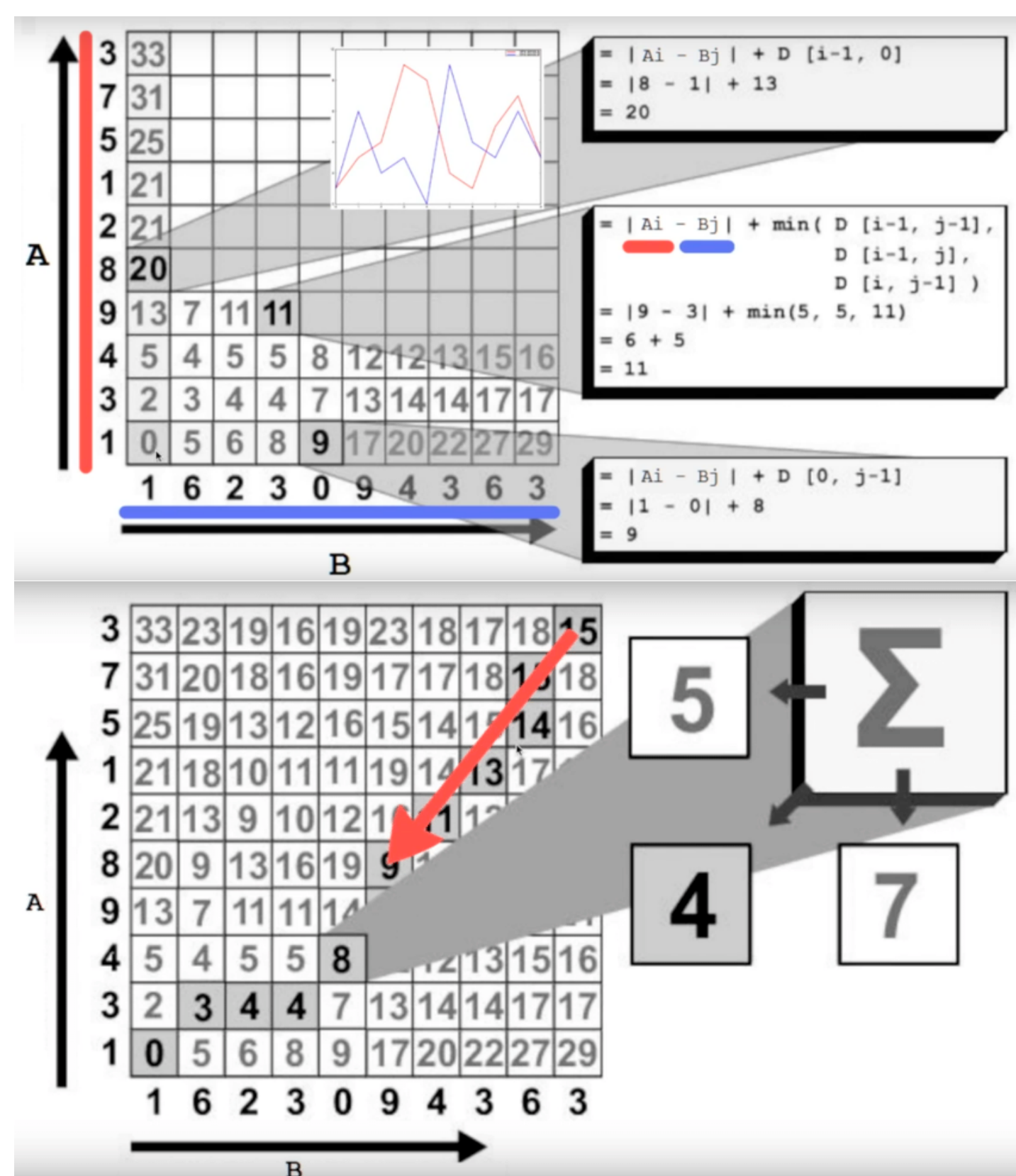


Figura 1: Representación del cálculo de DTW.

Operativamente, la secuencia de deformación se calcula mediante programación dinámica, basada en la evaluación recursiva de los elementos de la matriz  $n \times m$  de distancias acumulativas parciales óptimas, como se muestra el la ecuación 2:

$$d_{cum}(i, j) = d(a_i, b_j) + \min\{d_{cum}(i-1, j-1), d_{cum}(i-1, j), d_{cum}(i, j-1)\}. \quad (2)$$

La representación del cálculo se observa en la figura 1. Para calcular la DTW de manera eficiente se utilizó la implementación en R y Python de [1].

## 2. Estructura del marco propuesto

El marco propuesto se basa en el artículo de asignación de activos basado en clustering jerárquico (HCAA), de Raffinot (2017) [4], y se han introducido el uso de DTW como medida de proximidad y el índice GAP modificado para clustering jerárquico. Los distintos pasos se enlistan a continuación.

1. Calcular los rendimientos simples a partir de los precios de cierre diarios:

$$\text{Rendimiento diario} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100, \quad (3)$$

donde  $S_t$  es el precio de cierre actual.

2. Calcular de la medida de proximidad DTW para cada par de series de tiempo de los rendimientos diarios, siguiendo la definición de las ecuaciones 1 y 2, con una secuencia de deformación simétrica. Al normalizar la matriz de medidas DTW de todas las parejas de series dentro de  $[0,1]$  se obtiene  $D_{DTW}$ .
3. Seleccionar el número de clusters con el criterio *GAP-statistic* modificado para clustering jerárquico a partir de  $D_{DTW}$ , basado en Tibshirani (2001) [5].
4. Clustering jerárquico de los activos a partir de la matriz de proximidad dada por DTW para diferentes enlaces (Ward, single, average, complete).
5. Asignación de activos siguiendo el enfoque Hierarchical Risk Parity (HRP) introducida por López de Prado (2016), que realiza una bisección recursiva de arriba hacia abajo a partir del dendrograma y de los niveles inducidos por el clustering jerárquico [2] [4].
6. Cálculo de los rendimientos anualizados.

## 3. Metodología y experimentos

Para este estudio, se seleccionó un portafolio compuesto por 20 activos del índice S&P 500, representando empresas líderes en sus sectores o regiones, destacadas tanto por su rendimiento histórico como por su alta capitalización. Se obtuvieron sus precios de cierre diario desde el 3 de enero de 1990 hasta el 28 de diciembre de 2022. Se utilizó el 80 % de estas series de tiempo, abarcando desde el 3 de enero de 1990 hasta el 20 de mayo de 2016, para calcular distintas medidas de proximidad. El 20 % restante de los datos se reservó para evaluar el rendimiento esperado y las métricas correspondientes.

Se aplicaron medidas de proximidad a los rendimientos de las series utilizando DTW y otras dos basadas en la correlación de los rendimientos, ampliamente utilizadas en la literatura actual de portafolios. La primera medida es  $D_1 = 1 - \rho$ , y la segunda, conocida como *standard angular distance*, es  $D_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho)}$ , donde  $\rho$  es la matriz de correlación de Pearson.

En la figura 2, se muestra el proceso de selección del número de clústeres usando *GAP-statistics* para las diferentes medidas de proximidad, y también se presentan los dendrogramas generados mediante clustering jerárquico junto con su heatmap correspondiente, utilizando el método de enlace de Ward.

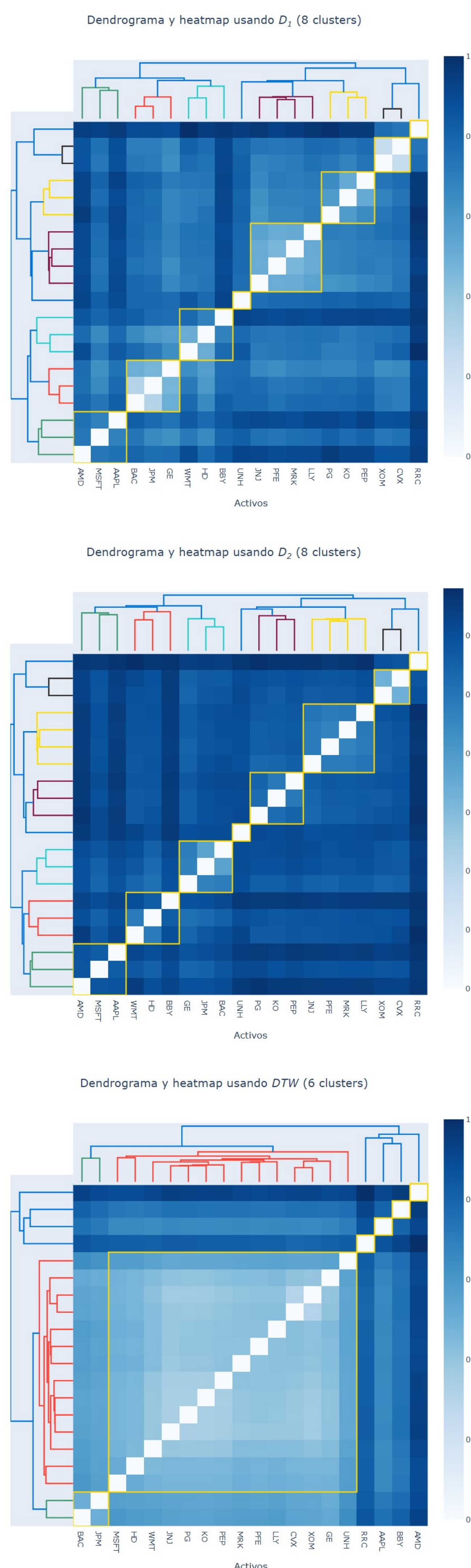


Figura 2: Clustering jerárquico con enlace Ward y heatmap.

El cuadro 1 muestra los valores obtenidos en diversas configuraciones de clustering para distintas métricas comunes en el estudio de portafolios financieros, destacando el *Annualized Mean* (AM), *Sharpe Ratio Ajustado* (SRA), el *Annualized Sharp Ratio* (ASR), el *max drawdown* (MDD) y número efectivo de activos (ENA).

Modelo	AM	SRA	ASR	MDD	ENA
$D_1$ -W	22.47 %	0.068	1.08	33.92 %	9.18
$D_2$ -W	13.39 %	0.039	0.61	44.55 %	9.18
$D_{DTW}$ -W	25.93 %**	0.065	1.02	35.46 %	16.82**
$D_1$ -S	25.94 %	0.063	0.99	36.53 %	1.22
$D_2$ -S	25.94 %	0.063	0.99	36.53 %	1.22
$D_{DTW}$ -S	47.28 %	0.064	1.01	59.03 %	1.79
$D_1$ -A	15.58 %	0.019	0.031	180.93 %	1.68
$D_2$ -A	15.58 %	0.019	0.031	180.93 %	1.68
$D_{DTW}$ -A	47.23 %*	0.064	1.01	59.10 %	1.79
$D_1$ -C	15.55 %	0.020	0.031	177.41 %	1.76
$D_2$ -C	15.55 %	0.020	0.031	177.41 %	1.76
$D_{DTW}$ -C	47.23 %*	0.064	1.01	59.10 %	1.79
EW	19.48 %	0.064	1.02	34.70 %	20
MR	15.11 %	0.058	0.91	32.90 %*	8.13
HRP	16.47 %	0.050	0.95	34.94 %	15.89
CVaR	18.35 %	0.065*	1.04*	31.94 %	18.53*

Cuadro 1: Métricas para el marco propuesto con diferentes configuraciones Ward (W), Single(S), Average(A), Complete(C) y otros modelos base.

En la figura 3, se observan los rendimientos acumulados para diferentes modelos usando las distintas medidas de proximidad para el enlace Ward (más estable), y se comparan contra otros modelos del estado del arte: Equal-Weighted (EW), Mean-Risk (MR), Hierarchical-Risk-Parity (HRP) y Conditional Value at Risk (CVaR).



Figura 3: Rendimientos acumulados y composición para distintos portafolios.

## 4. Conclusiones

El marco propuesto facilita una asignación de activos más precisa y adaptada a las características de cada grupo a partir de los patrones presentes en los activos al utilizar una medida de proximidad más adecuada. En varias configuraciones de enlace para el clustering jerárquico (Ward, single, average, complete), DTW muestra un desempeño competitivo, sugiriendo que es una medida de proximidad robusta y versátil para diferentes contextos de análisis. Esto puede ser un indicativo de que DTW es más efectiva para capturar patrones significativos y dinámicas no lineales o temporales en los datos de precios de los activos que las métricas basadas en correlación pueden pasar por alto.

- Se obtuvieron métricas competitivas del marco propuesto, destacando el rendimiento anualizado (25.93 %).
- El rendimiento anualizado obtenido para DTW, supera a  $D_1$  y  $D_2$ , en las distintas configuraciones de enlace.
- El portafolio obtenido con DTW es el menos concentrado con el enlace Ward, respecto a  $D_1$  y  $D_2$ , esto puede llevar a una diversificación más efectiva.

## Referencias

- [1] T. Giorgino. Computing and visualizing dynamic time warping alignments in R: The dtw package. *Journal of Statistics Software*, 31, 2009.
- [2] M. López de Prado. Building diversified portfolios that outperform out of sample. *The Journal of Portfolio Management*, 42(4):59–69, 2016.
- [3] R. N. Mantegna. Hierarchical structure in financial markets. *The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems*, 11(1):193–197, 1999.
- [4] T. Raffinot. Hierarchical clustering-based asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 44(2):89–99, 2017.
- [5] R. Tibshirani et. al. Estimating the number of clusters in a data set via the gap statistic. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63(2):411–423, 2001.
- [6] J.F. Vera and J.M. Angulo. An MDS-based unifying approach to time series K-means clustering: application in the dynamic time warping framework. *Stoch Environ Res Risk Assess*, 37:4555–4566, 2023.