

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Rapport d'analyse

INFO-F305

INFO - Baudru Julien
INFO - Kerckhof Anthony

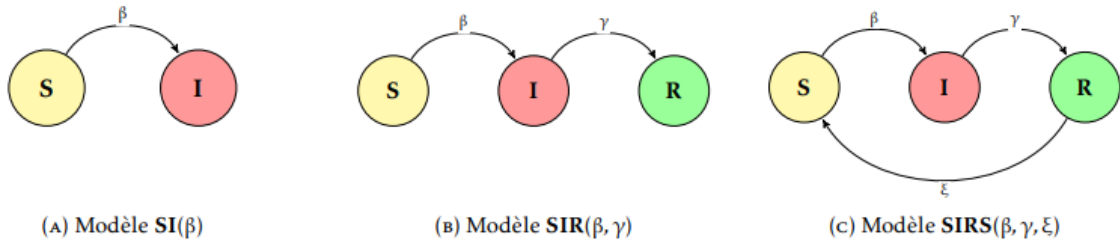
November 26, 2020

Contents

| | |
|--|----------|
| Introduction | 2 |
| Système SI | 2 |
| Dessins | 2 |
| Avec $I_0 = 0 * N$ | 2 |
| Avec $I_0 = 0.25 * N$ | 3 |
| Avec $I_0 = 0.5 * N$ | 3 |
| Avec $I_0 = 1 * N$ | 4 |
| Analyse | 4 |
| Système SIR | 4 |
| Dessins | 4 |
| Avec $I_0 = 0 * N$ | 5 |
| Avec $I_0 = 0.25 * N$ | 5 |
| Avec $I_0 = 0.5 * N$ | 6 |
| Avec $I_0 = 1 * N$ | 6 |
| Analyse | 6 |
| Recherche des paramètres β, γ, R_0 et D | 7 |
| Comparaison avec les résultats obtenus par le modèle SI | 8 |
| Système SIRS | 8 |
| Dessins | 8 |
| Avec $I_0 = 0 * N$ | 9 |
| Avec $I_0 = 0.25 * N$ | 9 |
| Avec $I_0 = 0.5 * N$ | 9 |
| Avec $I_0 = 1 * N$ | 10 |
| Graphique sur 200 jours | 10 |
| Analyse | 10 |
| Variation du système selon la valeur de ζ | 11 |
| Comparaison avec les résultats obtenus par le modèle SI et le modèle SIR | 12 |

Introduction

Le présent rapport a pour but d'analyser et comparer différentes méthodes de modélisation d'une épidémie semblable à celle connue actuellement dans le monde. Les modèles qui seront traités dans ces pages sont les suivants : **SI**, **SIR** et **SIRS**.



Système SI

Dessins

Pour les quatre graphiques suivants, nous analysons l'évolution de la population de personnes susceptibles **S**, visible sur la partie gauche des graphes, et de la population de personnes infectées **I**, visible sur la partie droite des graphes. Et ce à chaque instant t , pour t représentant le temps en jours sur dans un intervalle de 0 à 30. À noter que N , la population totale, vaut ici 11 515 793, elle correspond à la population de la Belgique en Novembre 2019. Par ailleurs, nous notons par I_0 le nombre d'infectés initial et par β le taux d'infection du virus.

Note : Le code *Octave* utilisé pour générer ces graphiques est nommé *SI.m*.

Avec $I_0 = 0 * N$

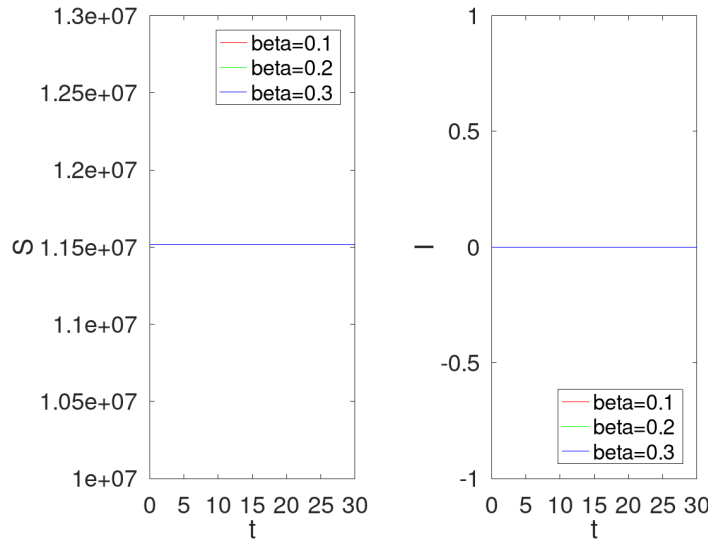


Figure 1: SI : $I_0 = 0 * N$

Avec $I_0 = 0.25 * N$

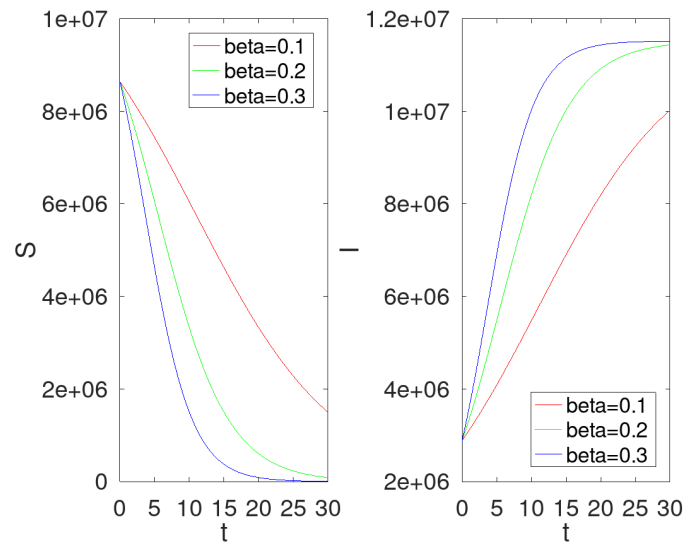


Figure 2: SI : $I_0 = 0.25 * N$

Avec $I_0 = 0.5 * N$

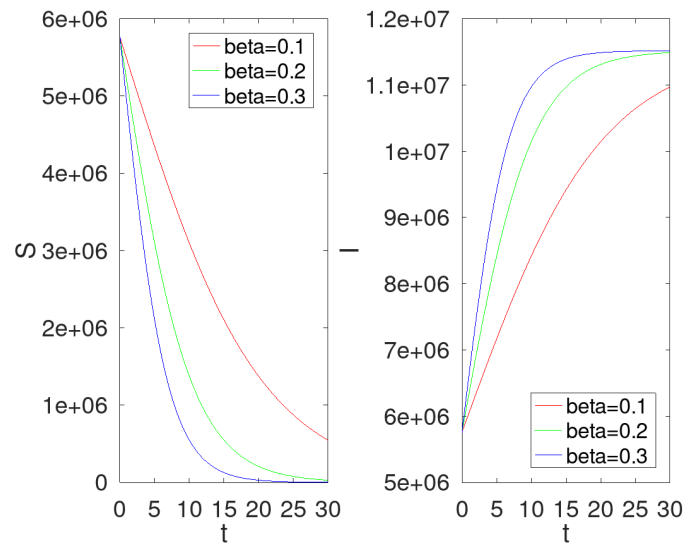


Figure 3: SI : $I_0 = 0.5 * N$

Avec $I_0 = 1 * N$

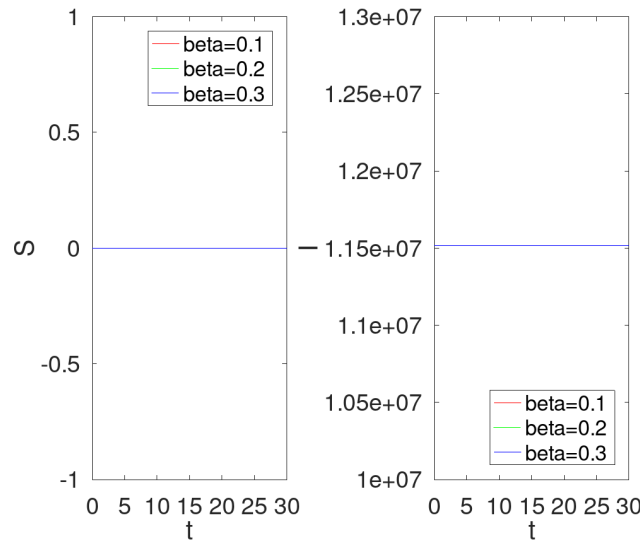


Figure 4: SI : $I_0 = 1 * N$

Analyse

On remarque que plus la valeur du paramètre β est élevée (ex: Figure 3), plus le nombre de personnes infectées I va croître rapidement et le nombre de personnes susceptibles S va diminuer rapidement. Par rapidement, on entend que les fonctions ont des pentes plus prononcées. À l'inverse, plus la valeur de β sera basse (ex: Figure 4), plus le nombre d'infectés I va croître lentement et S diminuer lentement.

On remarque également que pour ce modèle, plus le paramètre β est petit, plus les courbes auront des allures linéaires. De plus, on remarque que les courbes se confondent, peu importe la valeur de β . Il n'y a aucun changement au cours de temps. Cela s'explique facilement : si le nombre initial d'infectés I_0 vaut 0, aucune personne n'est susceptible de transmettre le virus. Si par contre le nombre initial d'infectés vaut N , toute la population est déjà infectée et le virus ne peut donc plus se transmettre.

Système SIR

Dessins

Les figures ci-dessous reprennent à chaque fois trois graphes, à gauche l'évolution du nombre de personnes susceptibles S dans la population, au centre l'évolution du nombre de personnes infectées I et à droite l'évolution du nombre de personnes guéries R . Ces graphes représentent l'évolution de ces trois groupes au court d'un intervalle de temps allant de 0 à 30. Le paramètre β correspond au taux d'infection du virus et le paramètre γ correspond au taux de guérison.

Note : Le code *Octave* utilisé pour générer ces graphiques est nommé *SIR.m*.

Avec $I_0 = 0 * N$

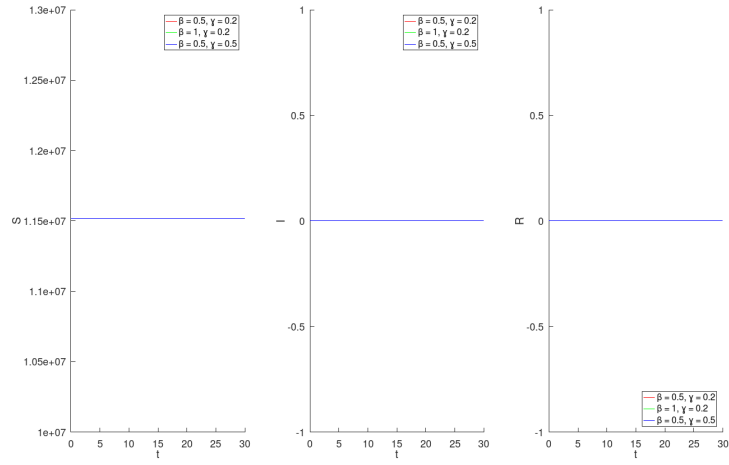


Figure 5: SIR : $I_0 = 0 * N$

Avec $I_0 = 0.25 * N$

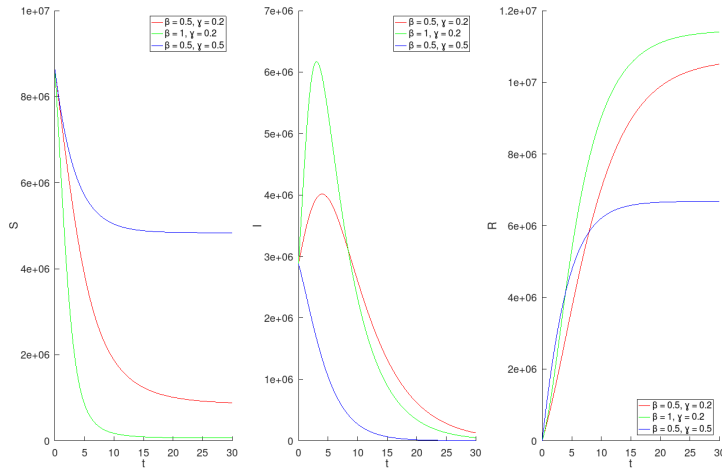


Figure 6: SIR : $I_0 = 0.25 * N$

Avec $I_0 = 0.5 * N$

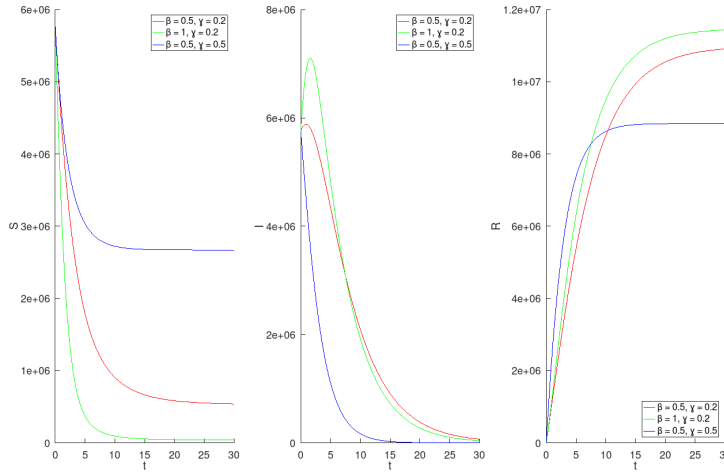


Figure 7: SIR : $I_0 = 0.5 * N$

Avec $I_0 = 1 * N$

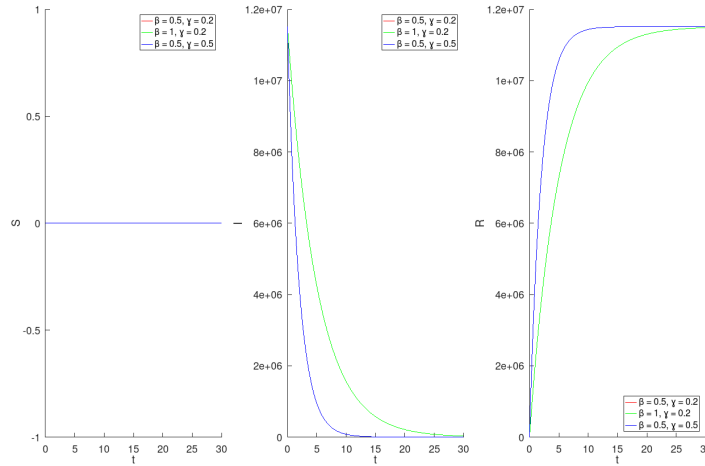


Figure 8: SIR : $I_0 = 1 * N$

Analyse

Pour le modèle **SIR**, on remarque que peu importe les valeurs données aux paramètres γ et β , si le nombre initial de personnes infectées est nulle, alors il n'y aura propagation du virus au cours du temps (Voir Figure 5). Le nombre de personnes susceptibles, infectées ou guéries ne varie donc pas au cours du temps.

Lorsque le nombre initial de personnes infectées est égal à N , on note que la valeur du paramètre β n'a aucune influence sur les courbes car il représente le taux d'infection, or dans cette configuration précise l'ensemble de la population N est déjà infectée ; les courbes pour $\beta = 0.5$ et $\beta = 1$ se confondent bel et bien dans la Figure 8. Dans cette configuration seule la valeur du taux de rétablissement γ a une influence sur l'évolution du virus. Plus elle sera élevée, plus le nombre de personnes guéries augmentera rapidement et plus le nombre d'infectés diminuera rapidement. On note également que puisque toute la population est initialement malade, le nombre de personnes susceptibles de tomber malade ne varie pas au cours du temps.

Analysons maintenant l'impact de β dans des cas non extrêmes (comparaison entre les courbes rouges et vertes : Figure 6 et 7). On remarque qu'un taux de transmission β plus élevé fait exploser le nombres de personnes infectées sur les premiers jours de l'épidémie, ce qui résulte également en un nombre de personnes susceptibles de tomber malade qui devient très vite très faible au début de l'épidémie. Puisque le nombre de personnes malades est plus important, on note une différence sur la courbe des personnes rétablies mais cette courbe garde

la même allure. Il y a juste plus de personnes malade à tout moment de l'épidémie, donc, à tout moment de l'épidémie, il y a plus de personnes rétablies pour un β plus élevé que pour un β plus faible. Enfin, que la proportion de population initialement infectée soit 25% ou 50% n'influe en rien sur l'allure générale des courbes, seul l'effet d'explosion du nombre d'infectés est moins marqué même s'il reste fort présent.

Finalement, analysons l'impact de γ dans des cas non extrêmes (comparaison entre les courbes rouges et bleues : Figure 6 et 7). un γ élevé va, que ce soit pour 25% ou 50% de la population initialement infectée, quasiment faire disparaître la maladie dans la population. Au plus γ est élevé, au plus les gens guériront vite. Cela se remarque dans le graphique du nombre d'infectés où, au plus γ croît, au moins l'allure de la courbe du nombre d'infectés va avoir tendance à croître (jusqu'à comme dans notre exemple simplement décroître tout au long de l'épidémie). Ainsi le nombre de personnes infectées tend vite vers 0, ce qui crée des paliers dans les graphiques des personnes susceptibles et rétablies : quand plus personne n'est malade, ces chiffres ne peuvent plus varier.

Recherche des paramètres β, γ, R_0 et D

Pour pouvoir déterminer les paramètres β et R_0 qui représentent au mieux l'évolution réelle de l'épidémie durant les 20 premiers jours de Mars 2020 en Belgique, nous avons effectué une minimisation par *grid search*. Cette méthode consiste à passer chaque combinaison des paramètres β et R_0 au modèle **SIR** pour ensuite comparer les résultats obtenus avec ceux observés dans les faits. La combinaison de paramètre qui sera retenue sera celle qui minimise la différence entre les chiffres réels et l'estimation du modèle **SIR**. La minimisation suit la règle suivante :

$$[\beta^*, R_0^*] = \arg \min_{\beta, R_0} \text{RSS}(\beta, \gamma) = \arg \min_{\beta, R_0} \sum_{t=t_0}^{56} (I_{\text{SIR}(\beta, \gamma)}(t) - I_{\text{Reel}}(t))^2$$

En pratique, étant donné que le paramètre R_0 dépend des valeurs de γ et β , en effet $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, il est plus commode d'itérer sur les valeurs de β et γ plutôt que sur β et R_0 . Ainsi β et γ prennent des valeurs entre $[0,1]$ avec un incrément de *step_beta* pour β et incrément de *step_gamma* pour γ . Pour le cas présent, le nombre initial de personnes infectées I_0 du modèle **SIR** est fixé à 1, et ce car le nombre d'infectés le 1^{er} Mars vaut 1.

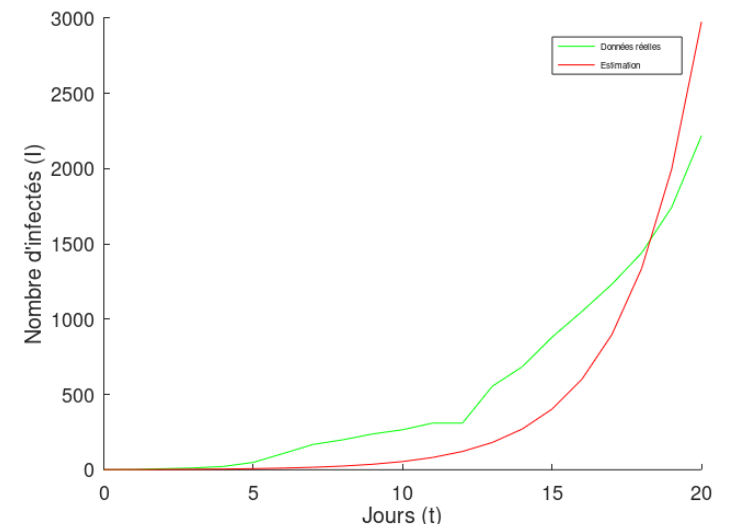
Note : Le code *Octave* utilisé pour générer ces graphiques est nommé *gridsearch.m*.

Les différentes valeurs obtenues pour les paramètres β, γ, R_0 et D sont listées ci-dessous, ici la valeur des incréments *step_beta* et *step_gamma* est fixée à 0.05 :

```
1 beta = 1
2 gamma = 0.60000
3 R0 = 1.6667
4 D = 1.6667
```

La valeur du paramètre D est calculée suivant la formule $\gamma = \frac{1}{D}$.

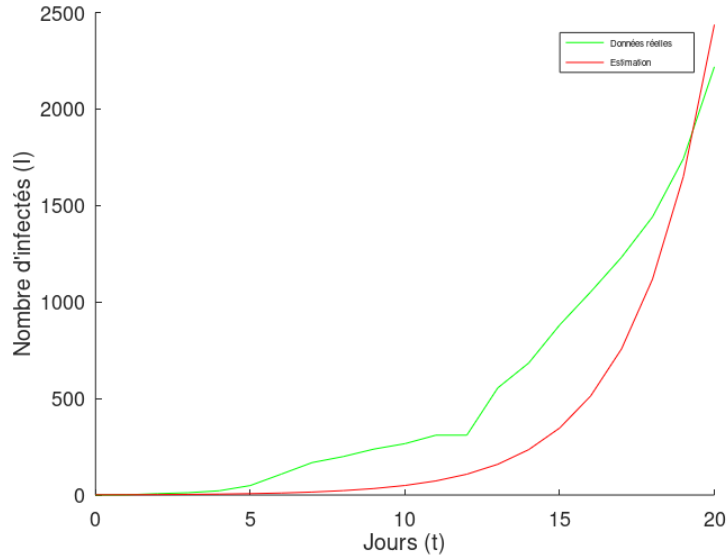
Le dessin ci-dessous met en vis-à-vis les courbes du nombre réel de personnes infectées et du nombre estimé de personnes infectées sur base des paramètres trouvés grâce à la méthode *grid search*.



Pour des valeurs de $step_beta$ et $step_gamma$ égales à 0.01 et 0.05, on obtient les résultats suivants :

```
1 beta = 1
2 gamma = 0.61000
3 R0 = 1.6393
4 D = 1.6393
```

Le dessin obtenu pour ces valeurs de β et γ est le suivant :



On remarque que plus les valeurs des incréments sont petites, plus la méthode *grid search* sera apte à trouver des valeurs de β et γ proche de la réalité, cependant l'exécution prendra plus de temps car le nombre d'itérations augmentera considérablement.

Comparaison avec les résultats obtenus par le modèle SI

Pour la condition initiale $I_0 = 0$, le modèle **SI** et **SIR** sont semblables dans le sens où les courbes ont la même allure. En effet, peu importe le modèle, intuitivement on comprend que si le nombre initial de personnes infectées est nul, alors le virus ne peut se transmettre.

Par contre, on note une différence frappante entre les deux modèles pour la condition initiale $I_0 = N$. En effet, le nombre d'infectés du modèle **SI** ne variera jamais alors que le nombre d'infectés du modèle **SIR** va lui diminuer de façon inversement proportionnelle au nombre de guéris. Cependant, dans les deux cas le nombre de personnes saines sera nul.

Pour les conditions initiales $I_0 = 0.25 * N$ et $I_0 = 0.5 * N$, pour la même valeur de β , les graphiques seront identiques si la valeur de γ dans le modèle **SIR** est égale à 0.

Une autre différence importante entre ces deux modèles est bien sur l'introduction du paramètre γ et de la classe **R** dans le modèle **SIR**. Ces apports ajoutent plus de réalisme à la modélisation, en effet dans les faits les personnes ne sont pas seulement saines ou infectées, il est nécessaire d'apporter plus de nuance.

Système SIRS

Dessins

Les figures ci-dessous reprennent à chaque fois trois graphes, à gauche l'évolution du nombre de personnes susceptibles **S** dans la population, au centre l'évolution du nombre de personnes infectées **I** et à droite l'évolution du nombre de personnes guéries **R**. Ces graphes représentent l'évolution de ces trois groupes au court d'un intervalle de temps allant de 0 à 30. Le paramètre β correspond au taux d'infection du virus, le paramètre γ correspond au taux de guérison et le paramètre ζ correspond au taux de passage de l'état guéri à l'état susceptible.

Note : Le code *Octave* utilisé pour générer ces graphiques est nommé *SIRS.m*.

Avec $I_0 = 0 * N$

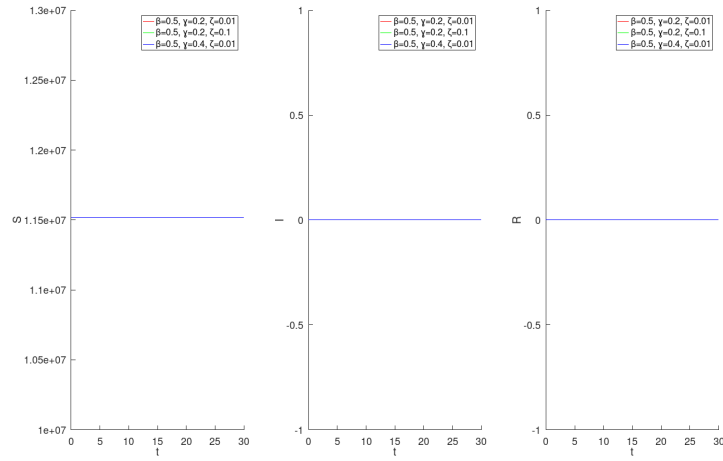


Figure 9: SIRS : $I_0 = 0 * N$

Avec $I_0 = 0.25 * N$

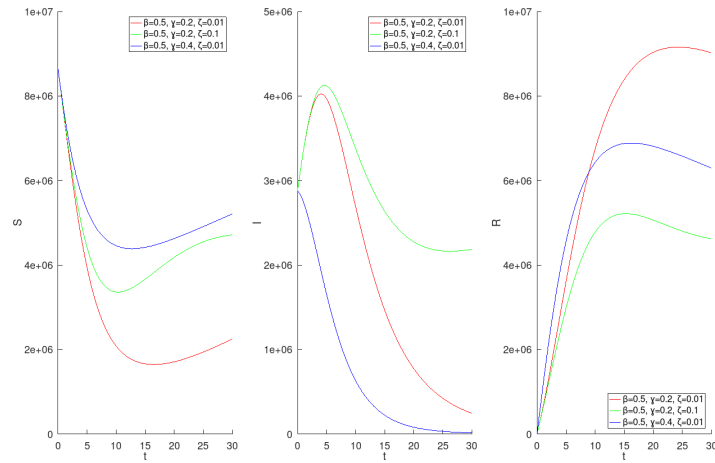


Figure 10: SIRS : $I_0 = 0.25 * N$

Avec $I_0 = 0.5 * N$

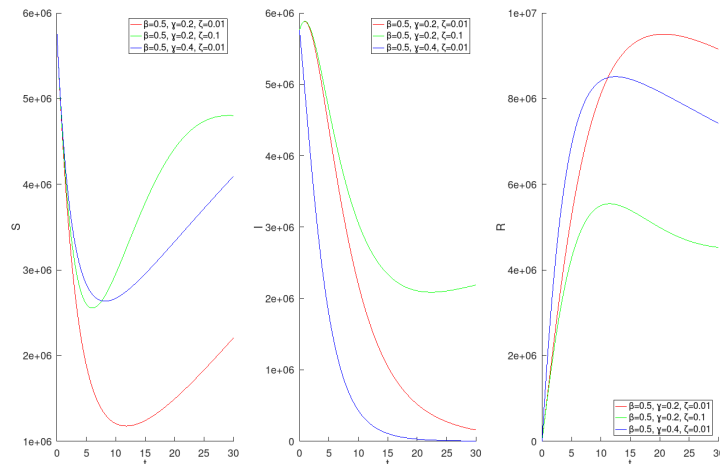


Figure 11: SIRS : $I_0 = 0.5 * N$

Avec $I_0 = 1 * N$

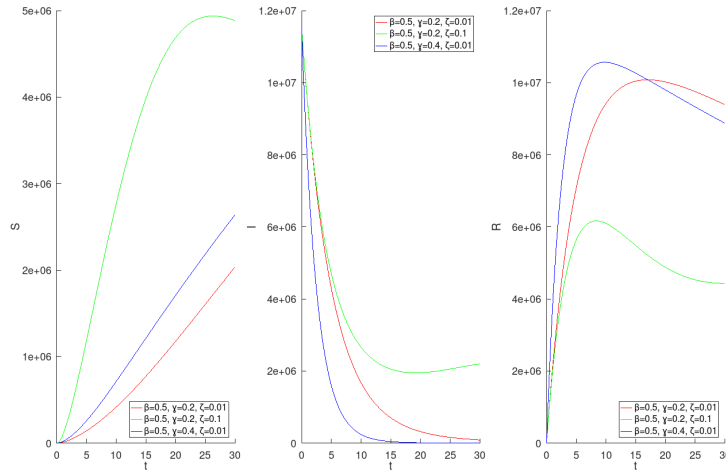


Figure 12: SIRS : $I_0 = 1 * N$

Graphique sur 200 jours

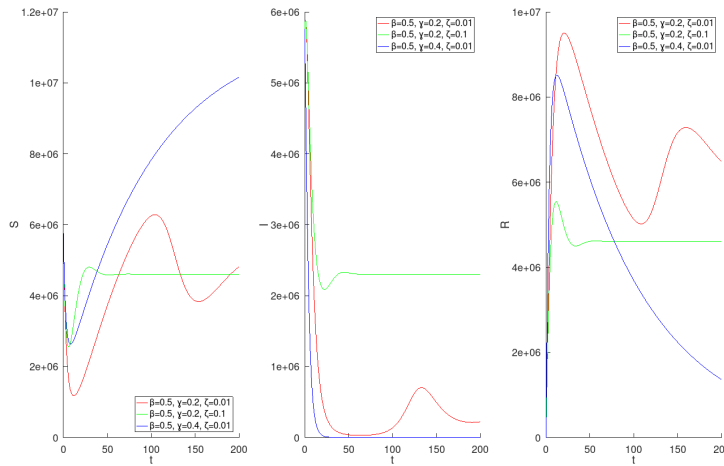


Figure 13: SIRS : $I_0 = 0.5 * N$ et $t \in [0, 200]$

Analyse

Comme pour les modèles SI et SIR, lorsque le nombre de personne initialement infectées dans la population vaut 0, aucune des valeurs ne peut varier au cours du temps. Aucune des valeurs de β , γ ou ζ n'a d'impact sur une situation initiale où $I_0 = 0$ (Figure 9).

Lorsque toute la population est initialement infectée, l'impact de γ est faible. Les courbes bleu et rouge abordent la même allure sur la Figure 12 avec la seule différence que sur la courbe bleu, les infectés sont plus vite soignés et donc le nombre d'infectés baisse plus vite. De la même manière, le nombre de personnes susceptibles croit un peu plus vite sur la courbe bleue puisque comme il y a plus de gens rétablis, plus de gens peuvent passer de l'état guéri à susceptible par le paramètre ζ . En ce qui concerne l'impact de ζ , on a pris des valeurs qui diffère par un facteur 10 afin d'avoir des résultats marqués. Ici, on voit bien (par les courbes rouge et verte) que quand 1% de la population peut potentiellement repasser de l'état guéri à susceptible, le nombre d'infectés ne tend pas vers 0 mais repart à la hausse déjà dans les 30 premiers jours, ce qui n'arrive pas - sur les 30 premiers jours - dans la courbe rouge (où 1 personne guérie sur 1000 peut changer d'état).

Dans les cas non extrêmes (Figure 10 et 11), on arrive aux mêmes conclusions sur l'importance du taux de rétablissement γ : le nombre d'infectés tend vite vers 0 plus vite pour un γ plus élevé. L'importance de ζ est plus dure à déterminer sur une période de 30 jours puisque les courbes vertes ne semblent converger vers rien.

Nous observons alors la Figure 13 qui s'étend sur 200 jours. Il est alors très clair que lorsque 1% de la population peut repasser de l'état guéri à l'état susceptible, on converge vers un état d'équilibre dans les 3 parties du graphique dans lequel une grande partie de la population (dans notre cas environ 2.4M de personnes) est continuellement infectée durant toute l'année. Un ζ élevé influe donc fortement et négativement sur l'évolution d'une épidémie. On notera également que la courbe rouge ne converge pas vers 0 comme on aurait pu si attendre mais que vers le jour 80, la courbe repart à la hausse : on a un rebond épidémique qui finira par s'atténuer dans les 100 jours qui suivent. On peut s'attendre à un comportement cyclique de la courbe rouge.

Variation du système selon la valeur de ζ

Les valeurs de β et γ obtenues lors du *grid search* pour le modèle **SIR** sont respectivement 1 et 0.61. Si nous utilisons ces valeurs pour le modèle **SIRS** nous obtenons le graphique suivant (Figure 14) avec en *rouge* $\zeta = 0.01$, en *vert* $\zeta = 0.1$ et en *bleu* $\zeta = 0.5$. La population initiale d'infectés choisie ici est $I_0 = 0.25 * N$. Afin d'avoir plus de recul, l'intervalle de temps t est fixé à $t \in [0, 400]$.

Note : Le code *Octave* utilisé pour générer ces graphiques est nommé *SIRS_bis.m*.

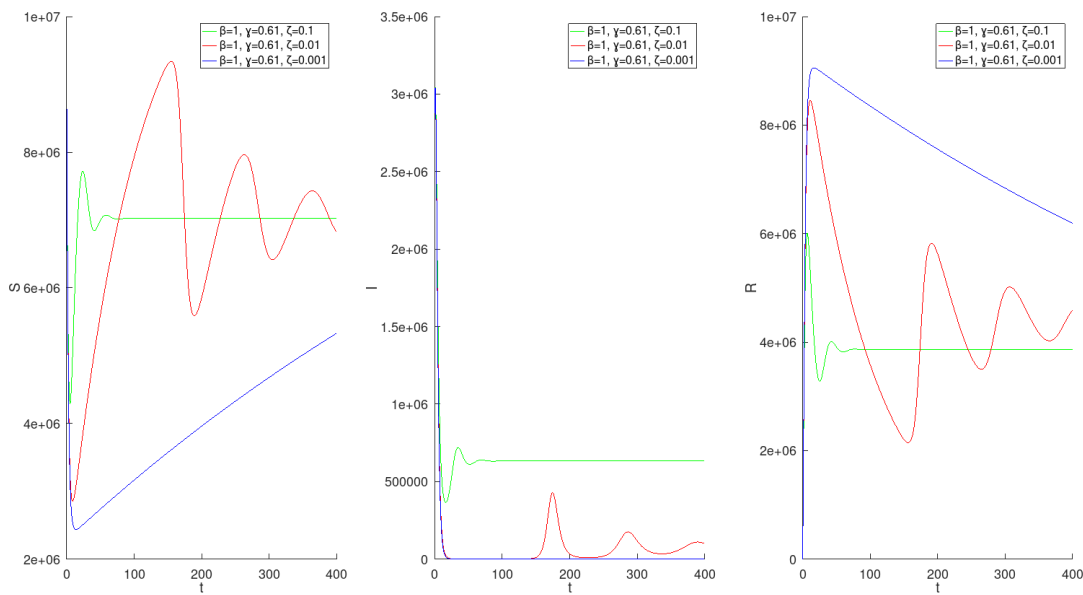


Figure 14: SIRS : Importance de ζ avec $I_0 = 0.25 * N$

On remarque ici que la valeur prise pour le taux de passage de l'état guéri à l'état susceptible ζ a un impact important sur l'allure des graphes. En effet, on observe 3 allures totalement différentes pour les valeurs choisies. Considérons le graphe rouge comme graphe de référence. Dans ce graphe, on observe un rebond du nombre d'infections autour du jour 150, ce qui coïncide à un pic du nombre de personnes à nouveau susceptibles de tomber malade dû au paramètre ζ .

Lorsque l'on multiplie la valeur de ζ d'un facteur 10 dans la courbe verte, le nombre de personnes infectées, susceptibles et rétablies finit par atteindre un état d'équilibre qui va faire plafonner les 3 courbes. Au plus ζ aura tendance à être grand, au plus la maladie aura tendance à s'installer durablement dans la population. En faisant grandir ζ par de plus petits pas, on observerait d'abord des rebonds qui arrivent plus vite (et donc plus fréquemment) dans l'épidémie ce qui aurait pour effet de faire tendre les courbes de personnes infectées vers des valeurs plus éloignées de 0 avant d'atteindre des paliers comme pour la courbe verte.

Lorsque par contre on fait diminuer la valeur de ζ , d'un facteur 10, on remarque que la maladie s'éteint rapidement. A un moment, plus personne n'est malade dans la population. Le nombre de personnes susceptibles va alors croître linéairement (avec en parallèle le nombre de personnes dans l'état rétabli qui va décroître linéairement) puisque des gens vont continuer de changer d'état par une ζ mais étant donné que plus personne n'est atteint de la maladie dans la population, ça ne résultera pas en un rebond épidémique. En faisant croître la valeur de ζ par plus petits pas, on observerait des rebonds de plus en plus tardifs (et de moins en moins fréquents) avec un nombre moyen de personnes malades qui tendrait de plus en plus vers 0.

Comparaison avec les résultats obtenus par le modèle SI et le modèle SIR

Comme pour les modèles **SI** et **SIR**, le modèle **SIRS** possède pour $I_0 = 0$ une allure plate où personne n'est jamais infecté. C'est le seul point commun qu'à ce troisième modèle avec les 2 premiers.

Pour les autres proportions de population initialement infectées, l'apparition du paramètre ζ va permettre d'observer de nouveaux cas où le nombre de personnes infectées ne devient jamais nul. Les comportements de β et γ ont quant à eux le même impact que dans le modèle **SIR**.

Sur des graphiques qui modélisent une plus grande période (Figure 13 et 14), on observe tout particulièrement l'apparition de comportements cycliques qui ne peuvent pas apparaître sans le paramètre ζ , d'ailleurs quand ζ est assez petit (typiquement 0.001 dans l'exemple Figure 14) le résultat est identique à celui du modèle **SIR** en ce qui concerne le nombre d'infectés. Dans ce cas précis d'un ζ très petit, le modèle diffère toutefois pour les personnes susceptibles et guéries : le nombre de personnes susceptibles de tomber malade finira par atteindre la valeur de la population à cause d'une perte d'immunité qui reste possible même si elle est peu probable (et le nombre de personnes guéries/immunisées va décroître jusqu'à un jour atteindre 0).

Une dernière différence notable se remarque entre les modèles **SI/SIR** et **SIRS** quand $I_0 = N$: le nombre de personnes pouvant tomber malade n'est alors plus nul sur toute la durée analysée mais croît quand même (avec une vitesse différente en fonction de la valeur de ζ). Même si tout le monde a déjà été malade, il existe alors quand même des cas où l'épidémie repart.