

Especificación 1

Flavia Bonomo (Sobre base de Fernando Schapachnik)¹

¹Departamento de Computación, FCEyN,
Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina

Algoritmos y Estructuras de Datos II, agosto de 2014

(2) Contexto

- En esta materia vamos a estudiar **algoritmos** y estructuras de datos.
- Recordemos qué es un algoritmo:
 - Secuencia ordenada y finita de pasos que nos llevan de un estado inicial a uno final.
- Una de las cosas más importantes al estudiar algoritmos es considerarlos como una herramienta para la resolución de problemas (como opuesto a recitarlos), de manera tal de poder enfrentar un problema y poder combinarlos, modificarlos, etc.
- ¿Qué es resolver un problema (“genérico”)?
 - Se trata de, dada su descripción, proponer un algoritmo que resuelva cualquier instancia del mismo.
- Veamos algunos ejemplos de resolución de problemas.

(3) Resolución de problemas

- Descripción del problema: “Dados dos números enteros, sumarlos”.
- Algoritmo: `resultado := a+b`

(4) Resolución de problemas (cont.)

- Descripción del problema: “Dados cuatro reales, los dos primeros positivos, encontrar al entero más chico que esté por encima del mínimo cuadrado perfecto mayor que el mínimo de los dos primeros pero menor que la suma de los otros dos”.
- Algoritmo: ¿? .
- Especifiquémoslo:
problema ideaTrasnochada(a, b, c, d : float) = resultado: int {
 requiere $a > 0 \wedge b > 0$;
 asegura $z = \min\{x | \sqrt{x} / \text{int}(\sqrt{x}) = 1 \wedge \min(a, b) < x < c + d\} \wedge \text{resultado} = \min\{w | w \geq z\}$;
}
- Notemos cómo al introducir el lenguaje matemático, con su precisión, se nos hace más fácil entender qué se nos pide. Presentar un algoritmo ahora no parece *tan* difícil.

(5) Resolución de problemas (cont.)

- Descripción: “El dueño de un restaurant quiere asegurarse de que los pedidos de sus clientes sean atendidos con prolijidad. Los mozos llevan los pedidos hasta la cocina donde los colocan en un rotador de tarjetas (tipo rolodex). Cuando el cocinero se libera, saca la primera y prepara el plato allí indicado. El dueño quiere saber cuál es el próximo plato a preparar y cuántos pedidos atiende el cocinero cada día, y cuál fue el día con menos pedidos.”

(6) Resolución de problemas (cont.)

- Algoritmo: ¿?
- Especificación: ¿?
- No parece que el problema se pueda expresar directamente en un lenguaje matemático, pero está claro que necesitamos algo riguroso y formal.
- Una observación: con sólo mirar el enunciado vemos que se pretenden obtener resultados de varios tipos distintos: al menos naturales y platos. Además, hay varias operaciones.

(7) Empecemos a modelar

- Vamos a modelarlo usando una herramienta que ya conocen: **tipos abstractos de datos**.
- Veamos qué tipo de cosas maneja el problema: hay platos, días y (al menos un) restaurant.
- ¿Qué nos interesa saber de cada uno de estas “cosas”?
 - De los días, que pasan.
 - De los platos, casi nada, basta con poder diferenciarlos entre sí.
 - De los restaurantes, varias cosas, así que dejémoslos de lado por un momento.

(8) Lo más sencillo

Usemos renombres:

- **TAD** DÍA **ES** NAT
- **TAD** PLATO **ES** STRING
- ¿Podríamos haber usado STRING directamente?
- Pasemos ahora al restaurant...

(9) El restaurant

TAD RESTAURANT

géneros restaurant

operaciones

inaugurar : \longrightarrow restaurant

cant_platos_pendientes : restaurant \longrightarrow nat

próximo_pedido : restaurant $r \longrightarrow$ plato
cant_platos_pendientes(r) > 0

tomar_pedido : restaurant \times plato \longrightarrow restaurant

preparar_plato : restaurant $r \longrightarrow$ restaurant
cant_platos_pendientes(r) > 0

nuevo_día : restaurant \longrightarrow restaurant

día_actual : restaurant \longrightarrow día

platos_por_día : restaurant $r \times$ día $d \longrightarrow$ nat
 $d \leq \text{día_actual}(r)$

día_menos_pedidos : restaurant \longrightarrow día

Fin TAD

(10) TADs

- Lo que vimos es la *signatura*.

- Nos dice qué operaciones tiene el tipo, con qué parámetros y qué devuelven.

⚠ Las operaciones de los TADs son *funciones totales*. I.e., funciones que están definidas para cada valor del dominio. Por eso, en casos como `preparar_plato()` debemos restringir el dominio.

⚠ Necesitamos darle comportamiento a las operaciones. En los TADs usaremos para eso *axiomas*.

- Algunos serán ecuacionales: $\text{día_actual}(\text{nuevo_día}(r)) \equiv \text{día_actual}(r) + 1$
- Expresan reescritura de términos.
- ¿Qué es un término? ¿Qué no lo es?
- Otros no necesariamente (ya los veremos más adelante).

(11) Los axiomas

axiomas

$$\text{día_actual}(\text{inaugurar}()) \equiv 0$$

$$(\forall r : \text{restaurant}) \text{ día_actual}(\text{nuevo_día}(r)) \equiv \text{día_actual}(r) + 1$$

$$(\forall r : \text{restaurant}) \text{ día_actual}(\text{tomar_pedido}(r, p)) \equiv \text{día_actual}(r)$$

...

$$\text{cant_platos_pendientes}(\text{inaugurar}()) \equiv 0$$

$$(\forall r : \text{restaurant}) (\forall p : \text{plato})$$

$$\begin{aligned} \text{cant_platos_pendientes}(\text{tomar_pedido}(r, p)) \equiv \\ \text{cant_platos_pendientes}(r) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall r : \text{restaurant}) \text{ cant_platos_pendientes}(\text{preparar_plato}(r)) \equiv \\ \text{cant_platos_pendientes}(r) - 1 \end{aligned}$$

(12) Los axiomas (cont.)

(No escribo más los \forall , pero siguen estando sobre las variables libres.)

...

$\text{pr\u00f3ximo_pedido}(r) \equiv \text{ult}(\text{secuencia_de_pedidos}(r))$

$\text{secuencia_de_pedidos}(\text{inaugurar}()) \equiv \langle \rangle$

$\text{secuencia_de_pedidos}(\text{tomar_pedido}(r, p)) \equiv$

$p \bullet \text{secuencia_de_pedidos}(r)$

$\text{secuencia_de_pedidos}(\text{preparar_plato}(r)) \equiv$

$\text{com}(\text{secuencia_de_pedidos}(r))$

(13) Los axiomas (cont.)

• • •

$$\text{platos_por_día}(d, \text{inaugurar}()) \equiv 0$$
$$\text{platos_por_día}(\text{tomar_pedido}(r, p), d) \equiv \text{platos_por_día}(r, d)$$
$$\text{platos_por_día}(\text{preparar_plato}(r), d) \equiv \text{if } \text{día_actual}(r) \equiv d \text{ then } \text{platos_por_día}(r, d) + 1$$

else

platos_por_día(r, d)

fi

$$\text{platos_por_día}(\text{nuevo_día}(r), d) \equiv \text{if } \text{día_actual}(r)+1 \equiv d \text{ then } 0$$

else

platos_por_día(r, d)

fi

(14) Los axiomas (cont.)

...

$$(\forall d' : \text{día}) 0 \leq d' \leq \text{día_actual}(r) \Rightarrow_{\text{L}} \text{platos_por_día}(r, \text{día_menos_pedidos}(r)) \leq \text{platos_por_día}(r, d')$$

(15) ¡Qué ganas de jorobar!


- Psee..., esto ya lo vimos en Algo I.
 - Parcialmente cierto, vieron sólo una parte del asunto.
- El lenguaje te lo cambian a propósito, para joderte.
 - Absolutamente falso, el lenguaje axiomático permite estudiar otras formas de demostración muy útiles, como la *inducción estructural*.

(16) ¿Qué es un TAD?

- ¿Qué es un TAD? Es una pregunta multifacética.
- Desde el punto de vista formal: es una herramienta lógico/matemática. Eso es bueno porque nos da la rigurosidad que necesitábamos para entender claramente qué hay que hacer.
 - A título informativo: cada TAD consituye una *teoría de primer orden con igualdad*.
- Desde el punto de vista práctico: es una herramienta poderosa y flexible.
- Desde el punto de vista histórico: uno de los primeros intentos por abordar este problema.
- Desde el punto de vista pedagógico: un primer paso muy importante. Al dominar los tipos abstractos de datos se aprenden gran parte de los conceptos del mundo de la orientación a objetos.


(17) Paréntesis lógico

- Lógica trivaluada: *true*, *false*, \perp .
- Versión \mathcal{L} de los conectivos lógicos.
- Cuantificadores: (CUANT var: género) $P(\text{var})$
- Variables ligadas:
 $((\forall x) P(x)) \wedge ((\exists y) Q(y)) \equiv ((\forall x) P(x)) \wedge ((\exists x) Q(x))$
- $(\exists x : \text{nat}) P(x) \approx P(0) \vee P(1) \vee \dots$
- $(\forall x) P(x) \equiv \neg((\exists x) \neg P(x))$ (ie, “todos los x satisfacen P ” \equiv “no hay ningún x que no cumpla P ”)
- “Expandiendo” el existencial y aplicando De Morgan:
 $\approx P(0) \wedge P(1) \wedge \dots$

 Las expansiones son una “forma de decirlo”, pero rigurosamente no es así: pensar en indefiniciones e infinitud.

(18) Paréntesis lógico (cont.)

- En general los vamos a usar con rangos. Eg,
 $(\forall x : nat) (1 \leq x) \Rightarrow_L x/x = 1$
- Es decir, vamos a escribir: $(\forall x : \text{género}) (R(x) \Rightarrow_L P(x))$,
donde R nos dice cuáles son los x sobre los que nos interesa el predicado P .
- ¿Qué pasa con el existencial? $(\exists x : \text{género}) (R(x) \wedge_L P(x))$.

 Notar: si el rango es vacío ($R(x)$ no vale para ningún x) el \forall da verdadero. En el caso de un \exists , da falso (pensar en las expansiones de la transparencia anterior).



- Nos vamos a permitir las siguientes macros:
 $(\forall x : nat, R(x)) P(x) \equiv (\forall x : nat | R(x)) P(x) \equiv$
 $(\forall x : nat) (R(x) \Rightarrow_L P(x))$.
- Para el existencial:
 $(\exists x : nat, R(x)) P(x) \equiv (\exists x : nat | R(x)) P(x) \equiv$
 $(\exists x : nat) (R(x) \wedge_L P(x))$.

(19) Tarea para el hogar

- Existen naturales pares menores que 33.
- Todas las secuencias de longitud par se pueden escribir como la concatenación de otras dos secuencias.
- Todos los números primos tienen un elemento mayor y otro menor.
- Cada secuencia de naturales puede ser extendida en un elemento en tantas secuencias como naturales.
- Todo Z_n tiene su neutro aditivo.
- Hay un neutro aditivo e para todo Z_n .

(20) Dónde estamos parados

- Queremos resolver problemas.
- Primero tenemos que expresar con claridad qué es lo que queremos resolver. En particular, usaremos un formalismo matemático.
- Vimos que a medida que se complican los problemas, más poder necesitamos en nuestro formalismo y para eso introducimos los TADs.
- Planteamos el caso del restaurant como un ejemplo, como para ir “tomándole el gusto”.
- Vimos que necesitábamos manejar algunos conceptos de lógica que conocíamos de Álgebra I, pero que tal vez teníamos medio oxidados.
- Vamos a ver, ahora con más detenimiento, el lenguaje de los TADs, desde el principio.

- Una de las ventajas de la teoría de los tipos abstractos de datos es que no requiere de tipos primitivos que deban definirse por fuera de la misma.
 - Veamos cómo se definen los valores booleanos y los naturales.
-  El resto de los tipos básicos están en el apunte de tipos básicos, en la página de la materia. Deben leerlos de ahí.
-  Lo mismo vale para los detalles de los tipos que presento hoy. No los voy a mostrar completos.

TAD BOOL

géneros `bool`

exporta `bool`, generadores, \neg , \vee , \wedge , \Rightarrow

generadores

true : \longrightarrow `bool`

false : \longrightarrow `bool`

otras operaciones

$\neg \bullet$: `bool` \longrightarrow `bool`

$\bullet \vee \bullet$: `bool` \times `bool` \longrightarrow `bool`

$\bullet \wedge \bullet$: `bool` \times `bool` \longrightarrow `bool`

$\bullet \Rightarrow \bullet$: `bool` \times `bool` \longrightarrow `bool`

Fin TAD

(23) TAD BOOL (cont.)

axiomas

$$\neg \text{true} \equiv \text{false}$$

$$\neg \text{false} \equiv \text{true}$$

$$(\forall x : \text{bool}) \quad \text{true} \vee x \equiv \text{true}$$

$$(\forall x : \text{bool}) \quad \text{false} \vee x \equiv x$$

$$(\forall x : \text{bool}) \quad \text{true} \wedge x \equiv x$$

$$(\forall x : \text{bool}) \quad \text{false} \wedge x \equiv \text{false}$$

$$(\forall x, y : \text{bool}) \quad x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$$

(24) Secciones de un TAD

- **Géneros.** Los géneros (en general va a haber sólo uno, pero podrían ser más) son el nombre que recibe el conjunto de valores del tipo. Pensar en el monoide conmutativo $(\mathbb{N}, +)$ y en el conjunto de los números naturales \mathbb{N} .
- **Usa.** Inclusión de los géneros y operaciones exportadas de los tipos mencionados allí.
- **Exporta.** Qué operaciones y géneros se dejan a disposición de los usuarios del tipo.
- **Generadores.** Son operaciones que permiten construir valores del tipo. Un conjunto de generadores está bien armado si una combinación de ellos permite construir cualquier instancia posible del tipo.
- **Observadores.** Son aquellas operaciones que nos permiten, utilizadas en conjunto, diferenciar instancias del tipo.
- **Axiomas.** Son las reglas que nos explican el comportamiento de las funciones.

(25) TAD NAT

TAD NAT

généros nat

exporta nat, generadores, observadores, +, -, =, <

usa BOOL

observadores básicos

$$\bullet = 0? : \text{nat} \longrightarrow \text{bool}$$
$$\text{pred} : \text{nat } n \longrightarrow \text{nat} \quad \neg(n = 0?)$$

generadores

$$0 : \longrightarrow \text{nat}$$
$$\text{suc} : \text{nat} \longrightarrow \text{nat}$$

otras operaciones

$$\bullet + \bullet : \text{nat} \times \text{nat} \longrightarrow \text{nat}$$
$$\bullet - \bullet : \text{nat } n \times \text{nat } m \longrightarrow \text{nat} \quad \neg(n < m)$$
$$\bullet = \bullet : \text{nat} \times \text{nat} \longrightarrow \text{bool}$$
$$\bullet < \bullet : \text{nat} \times \text{nat} \longrightarrow \text{bool}$$

Fin TAD

(26) TAD N_{AT} (cont.)

```

axioms      ( $\forall n, m : \text{nat}$ )
  0=0?         $\equiv$  true
  suc(n)=0?    $\equiv$  false
  pred(suc(n))  $\equiv$  n
  n + m        $\equiv$  if m=0? then n else suc(n+pred(m)) fi
  n = m        $\equiv$  (n=0?  $\equiv$  m=0?)  $\wedge_L$  ( $\neg$ (m=0?)  $\Rightarrow_L$ 
                    (pred(n) = pred(m)))
  n < m        $\equiv$ 
if m=0? then
  false
else
  if n=0? then true else pred(n)<pred(m) fi
fi

```

(27) TAD BOOL EXTENDIDO(α)

TAD BOOL EXTENDIDO(α)

extiende **BOOL**

otras operaciones

if • then • else • fi	:	bool	\times	α	\times	α	\longrightarrow	α
• \vee_L •	:	bool	\times	bool	\longrightarrow	bool		
• \wedge_L •	:	bool	\times	bool	\longrightarrow	bool		
• \Rightarrow_L •	:	bool	\times	bool	\longrightarrow	bool		

axiomas ($\forall x, y : \text{bool}$) , ($\forall a, b : \alpha$)

if *true* then *a* else *b* fi \equiv ***a***

if *false* then *a* else *b* fi \equiv ***b***

x* \vee_L *y \equiv **if *x* then *true* else *y* fi**

x* \wedge_L *y \equiv **if *x* then *y* else *false* fi**

x* \Rightarrow_L *y \equiv **\neg *x* \vee_L *y***

Fin TAD

(28) Repaso de lo visto y perspectiva

- Vimos:
 - La necesidad de especificar como un paso previo a la resolución de problemas.
 - La conveniencia de hacerlo de manera formal.
 - Una introducción a los TADs.
 - El uso de cuantificadores.
 - Algunos tipos básicos: `BOOL`, `NAT`.
- Se viene
 - Más tipos básicos.
 - Entender mejor la forma de escribir los TADs.
 - Empezar a axiomatizar.
 - Empezar a modelar.

(29) Tarea

- ⚠ Leer el apunte de TADs básicos.
- ⚠ Empezar a hacer la práctica 1, partes 1 y 2.
- ⚠ Hacer los ejercicios de cuantificación.