Commande optimale
Examen (CC)

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés.

▷ **Exercice 1** (10 points)**.** On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où q et u sont à valeurs dans $\mathbf{R}$, sous les conditions aux limites $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ (q_0 et $\dot{q}_0$ fixés), $\dot{q}(t_f) = 0$ et $q(t_f)$ libre.

1.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en posant $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$, avec f une fonction que l'on précisera.

► $f(x, u) = (x_2, u)$

1.2. Écrire le hamiltonien du problème.

► $H(x, p, u) = p^0 + p_1 x_2 + p_2 u$

1.3. Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint $p = (p_1, p_2)$.

► $\dot{p}_1(t) = 0$, $\dot{p}_2(t) = -p_1(t)$

1.4. Écrire les conditions de transversalité.

► $p_1(t_f) = 0$

1.5. Montrer que (p_1, p_2) ne s'annule jamais.

► Si p s'annule en un instant, il est nul partout (linéarité de l'équation adjointe en temps minimum). Mais alors $H = 0$ implique aussi $p^0 = 0$, ce qui est impossible.

1.6. Montrer qu'un contrôle optimal doit être constant.

► Par maximisation, presque partout $u(t) = \mathrm{sgn}(p_2(t))$ si $p_2(t) \neq 0$. Comme p_2 est constant et non nul (car p_1 est constant et déjà nul), on a u constant égal à ± 1.

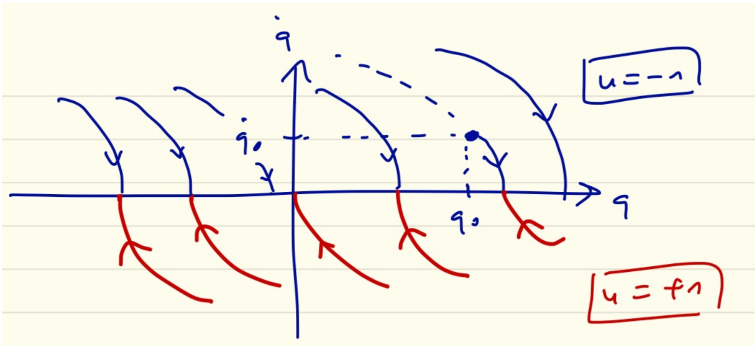

Figure 1 – Trajectoires temps minimales vers la cible $\dot{q} = 0$.

1.7. On admet l'existence de solution, en déduire l'expression du contrôle en fonction de $(q_0, \dot{q}_0)$.

► Comme $\dot{q}(t) = \dot{q}_0 + ut$ avec $u = \pm 1$, pour que $\dot{q}$ puisse s'annuler en t_f il faut prendre $u = -\text{sgn}(\dot{q}_0)$. (On suppose $\dot{q}_0 \neq 0$, sinon le temps minimum est nul.)

1.8. En déduire l'expression du temps minimal en fonction de $(q_0, \dot{q}_0)$.

► $t_f = |\dot{q}_0|$

1.9. Montrer que, dans le plan $(x_1, x_2) = (q, \dot{q})$, les trajectoires optimales sont des arcs de parabole.

► En intégrant la dynamique on voit que $\dot{q}^2/2 - q = \text{cte}$ quand $u = 1$, et que $\dot{q}^2/2 + q = \text{cte}$ quand $u = -1$.

1.10. Donner l'allure de la synthèse dans le plan $(q, \dot{q})$. [Dessiner approximativement les trajectoires temps minimales.]

► Voir Figure 1.

▷ **Exercice 2** (10 points)**.** On considère le problème de temps minimal de Zermelo-Markov-Dubins,

$$\dot{x}(t) = w + \cos\theta(t), \quad \dot{y}(t) = \sin\theta(t), \quad \dot{\theta}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où le vecteur position $(x(t), y(t))$ appartient à $\mathbf{R}^2$, l'argument de la vitesse $\theta(t)$ à $\mathbf{R}$, et où $w \in \mathbf{R}$ est une constante fixée. On ajoute la contrainte $|u(t)| \leq 1$ ainsi que des conditions aux limites :

$$(x(0), y(0), \theta(0)) = (x_0, y_0, \theta_0), \quad (x(t_f), y(t_f), \theta(t_f)) = (x_f, y_f, \theta_f).$$

2.1. Montrer que si $|w| \geq 1$, le problème n'admet pas nécessairement de solution.

► Prenons par exemple $w = 1$, $x_0 = 0$ et $x_f = -1$; comme $\dot{x}(t)$ est toujours positif, on ne pourra pas atteindre x_f et l'ensemble des contraintes est vide.

On suppose désormais $w \in [0, 1[$, et on note $p = (p_x, p_y, p_\theta)$ l'état adjoint.

2.2. Écrire le hamiltonien du problème.

► $H = p^0 + p_x(w + \cos\theta) + p_y \sin\theta + p_\theta u$

2.3. Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint et montrer que p_x et p_y sont constants.

► On a

$$\dot{p}_x(t) = 0, \quad \dot{p}_y(t) = 0, \quad \dot{p}_\theta(t) = p_x(t)\sin\theta(t) - p_y(t)\cos\theta(t),$$

d'où la constance de p_x et p_y.

2.4. Appliquer la condition de maximisation pour déterminer les contrôles optimaux.

► On a presque partout $u(t) = \operatorname{sgn}(p_\theta(t))$ si $p_\theta(t) \neq 0$.

2.5. En déduire que, le long d'une extrémale optimale, on a

$$0 = p^0 + p_x w + p_x \cos\theta(t) + p_y \sin\theta(t) + |p_\theta(t)|, \quad t \in [0, t_f].$$

► Comme on est en temps min, $H = 0$ le long d'une extrémale et, par maximisation, $p_\theta(t)u(t) = |p_\theta(t)|$.

On suppose désormais $(p_x, p_y) \neq (0, 0)$ et on pose $(p_x, p_y) = (\cos\psi, \sin\psi)$.

2.6. Montrer que

$$|p_\theta(t)| - \gamma = -\cos(\theta(t) - \psi), \quad \dot{p}_\theta(t) = \sin(\theta(t) - \psi),$$

où γ est une constante que l'on précisera.

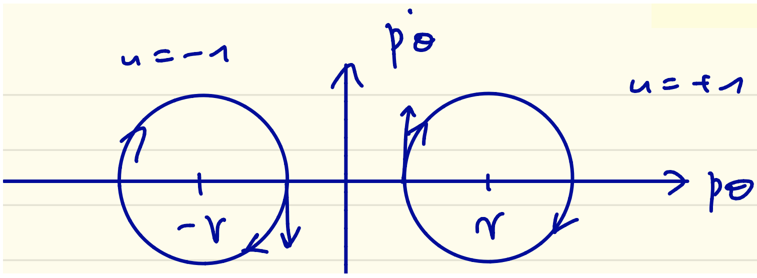

Figure 2 – Extrémales dans le plan $(p_\theta, \dot p_\theta)$.

► Évident d'après ce qui précède avec $\gamma = -p^0 - p_x w$.

2.7. En déduire que $(p_\theta(t), \dot p_\theta(t))$ appartient à un ensemble que l'on dessinera pour $\gamma > 1$.

► Il s'agit de la réunion de deux cercles (éventuellement tronqués selon la position des centres) de rayon 1 et de centres $\pm\gamma$. Quand $\gamma > 1$, les deux cercles sont disjoints, chacun dans un demi-plan, voir Figure 2.

2.8. Dans le cas $\gamma > 1$, montrer que le contrôle est constant, égal à ± 1.

► Les deux cercles étant disjoints, et $(p_\theta, \dot p_\theta)$ étant continues (au vu de l'équation différentielle vérifiée par p_θ), on est soit sur le cercle dans $p_\theta < 0$ (auquel cas $u = -1$), soit sur le cercle dans $p_\theta > 0$ (auquel cas $u = 1$).

2.9. Dans le cas où le contrôle est constant égal à $+1$, donner l'expression de $x(t)$, $y(t)$ et $\theta(t)$.

► $\theta(t) = \theta_0 + t$, $x(t) = x_0 + wt + \sin\theta(t) - \sin\theta_0$, $y(t) = y_0 - \cos\theta(t) + \cos\theta_0$