Vendredi 30 Octobre 2020

Commande optimale

I. Contrôle des EDO

2. Principe du maximum de Pontryaguine

Relations de transversalité : on a un problème non complètement spécifié de la forme suivante :

$$\int_0^{tf} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, tf]$$
$$u(t) \in U$$

$$x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad x(tf) \in Xf \in \mathbb{R}^n$$

où X_0 et Xf sont des sous-ensembles fixés de $\mathbb{R}^n$. Le PMP s'applique comme précédemment :

i) équation adjointe sur p

ii) maximisation du hamiltonien pour "tirer" u comme fonction de x et p

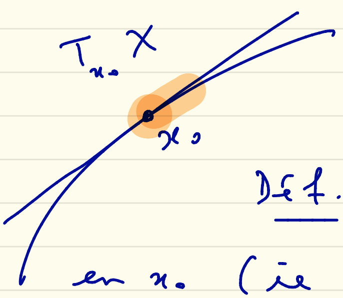
On a en plus les relations, dites relations de "transversalité", suivantes :

Théorème. $p(0) \perp T_{x(0)} X_0$,

$p(tf) \perp T_{x(tf)} Xf$.

Clarifions la notion d'espace tangent dans le cas où X_0 et X_f sont définies par des équations sous la forme qui suit.

Soit $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$, où $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ($\mathcal{C}^1 \dots$)
(avec $k < n$ — on a moins de contraintes que de degrés de liberté) ;



$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$$
$$= h^{-1}(\{0\})$$

<u>Déf.</u> : Soit $x_0 \in X$; on suppose que h est une submersion en x_0 (ie que $h'(x_0)$ est surjective, ie que $h'(x_0)$ est de rg maximal égal à k). On définit alors

$$T_{x_0}X = \ker h'(x_0).$$

<u>Remarque.</u> i) les directions sont les directions d telles que, partant de x_0, on reste dans X "à l'ordre 1". Or,

0 — cf. $x_0 \in X$

$$h(x_0 + d) = h(x_0) + h'(x_0).d + \|d\|\,\alpha(d)$$
(où $\alpha(d) \longrightarrow 0$, $d \to 0$)

$$= h'(x_0).d + \|d\|\,\alpha(d)$$
$$= \|d\|\,\alpha(d) \iff d \in \ker h'(x_0)$$

ii) $h'(x_0) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) \ \cdots \ \frac{\partial h}{\partial x_n}(x_0)\right] \Big\} k \quad (k \times n)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}$

de rg max $= k$ ($= \min\{n, k\}$)

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} h'(x_0) = n - \operatorname{rg} h'(x_0)$ (th. du rg)

$= n - k$: on a n degrés de liberté $- k$ contraintes

$= n - k$ degrés de liberté restant.

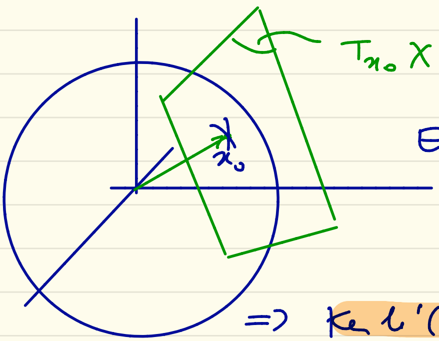
L'espace tangent est un sev de dim $n-k$, et on dit que (localement, ie au voisinage de x_0) X est une sous-variété de dimension $n-k$. (Cf. notion de sous-variété en géométrie différentielle.)

iii) Exemple en dim $n = 3$:

$$X := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid h(x) = 0\} \quad (= S^2)$$

avec $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \|x\|^2 - 1$



$T_{x_0} X = T_{x_0} S^2 = \{x_0\}^{\perp}$

En effet, soit $x_0 \in X = S^2$,

$h'(x_0) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) \ \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_0) \ \frac{\partial h}{\partial x_3}(x_0)\right]$

$= 2\,[x_{01} \ x_{02} \ x_{03}]$

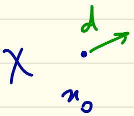
$\Rightarrow \operatorname{Ker} h'(x_0) = \{x_0\}^{\perp}$: dim $3 - 1 = 2$.

iv) $k = n$ (autant de contraintes que de degrés de liberté) : $X = \{x_0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$$

avec $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\qquad x \longmapsto x - x_0$ (!)

Alors, en $x = x_0$ (le seul pt de X),



$$h'(x_0) = I \text{ (de rg max !)}$$
$$\Rightarrow T_{x_0} X = \operatorname{Ker} h'(x_0) = \{0\} : \dim n - n = 0.$$

En particulier, la condition de transversalité

$p(0) \perp T_{x_0} X$ nous dit

$p(0) \perp \{0\}$: aucune information supplémentaire sur $p(0)$. Les conditions de transversalité du PMP s'appliquent donc (trivialement) au cas X_0 et X_f singletons.

v) Dans le cas $k < n$, $\operatorname{Ker} h'(x_0)$ de dim $n - k$ et $p(0) \perp T_{x(0)} X_0$ (*)

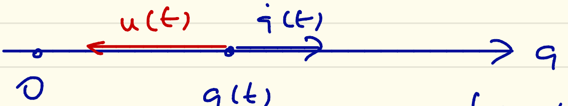
(où $X_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$
$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$)

revient à ajouter $n-k$ contraintes (équations...) sur $p(0)$ (cf. si $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$ base de $T_{x(0)} X_0$, (*) $\Leftrightarrow$ $(p(0) \mid e_i) = 0$, $i = 1, \dots, n-k$).

Au final, on a donc k contraintes sur $x(0)$ (cf. $x(0) \in X_0$, ie $h(x_0)=0$) et $n-k$ contraintes sur $p(0)$: on a donc $k+n-k=n$ conditions sur x et p en $t=0$.

De même, par transversalité, on a n conditions sur x et p en tf. On a donc $2n$ conditions réparties sur x et p en $t=0$ et $t=tf$. Ce qui nous conduit à un problème aux deux bouts (en dimension $2n$) bien posé.

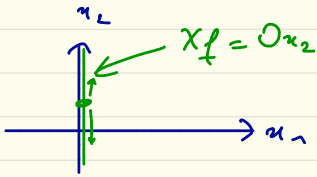
Exemple :



$$\ddot q(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \qquad \Big| \quad tf \to \min$$
$$q(0) = q_0, \quad \dot q(0) = \dot q_0$$
$$q(tf) = 0, \quad \dot q(tf) \text{ libre}$$

$X_0 = \{x_0\}$, $x_0 = (q_0, \dot q_0) \in \mathbb{R}^2$

$Xf = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$



$p(tf) \perp T_{x(tf)} Xf$ (♡)

$T_{x(tf)} Xf = Xf$, cf. $Xf = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0\}$

avec $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; si $x \in Xf$,
$\qquad (x_1, x_2) \mapsto x_1$

$$h'(x) = [1 \quad 0] = h$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} h'(x) = \left\{ d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; h'(x) . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \{ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 = 0 \}$$
$$= Xf \ (!)$$

Donc $(\heartsuit) \iff (\forall d_2 \in \mathbb{R}) : p(t_f) \perp \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}$

$\iff (\forall d_2 \in \mathbb{R}) : \left(p(t_f) \,\middle|\, \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \right) = p_2(t_f) \cdot d_2 = 0$

$\iff p_2(t_f) = 0$

(cf. $p(t_f) \perp \operatorname{Ker} \alpha'(x(t_f))$, ie $p(t_f) \perp \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^{\perp}$

ie $p(t_f) \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^{\perp\perp} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

ie $p_2(t_f) = 0$).

<u>Remarque</u> : le même calcul en dimension n montre que, si $x_i(t_f)$ est libre, on a $p_i(t_f) = 0$.

Appliquons le PMP :

i) hamiltonien : $H(x, p, u) = p^0 \cdot 1 + p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot u$

ii) système adjoint : $\dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$, $\dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1$

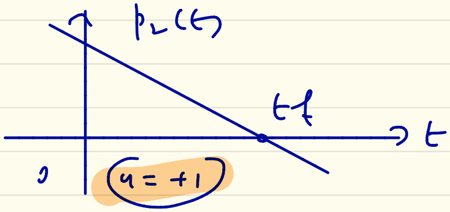
$\Rightarrow \ddot{p}_2 = 0$, ie p_2 est une fonction affine.

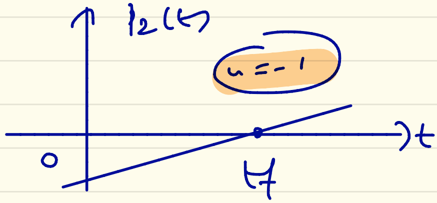
iii) maximisation : $u(t)$ maximise $H(x(t), p(t), \cdot)$ sur $[-1, 1]$ ($=: U$, cf. $|u(t)| \leq 1$), ie

$u(t) = \operatorname{sgn} p_2(t)$ si $p_2(t) \neq 0$ (quelconque si $p_2(t) = 0$).

On a vu précédemment que le cas $p_2 \equiv 0$ est interdit (sinon on aurait $(p^0, p) = (0, 0)$!), donc p_2 qui est affine s'annule au plus une fois.

iv) transversalité : $p_2(tf) = 0$

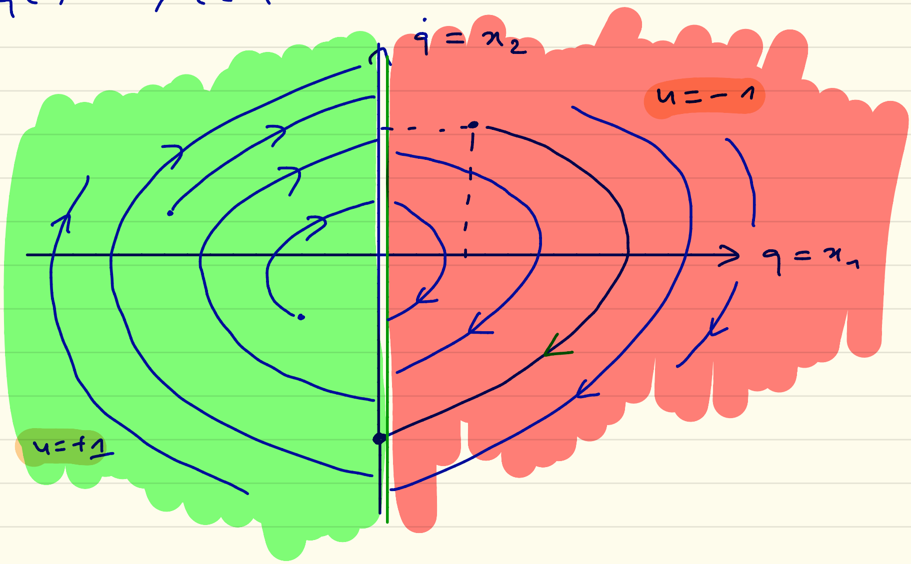




$\Rightarrow$ signe de p_2 est constant

$\Rightarrow$ pas de commutation : $u = +1$ ou $u = -1$ sur tout $[0, tf]$.

L'existence de solution étant admise, il est clair que si $q(0) > 0$ on doit avoir $u = -1$, si $q(0) < 0$, $u = +1$.



<u>Feedback</u> : $u(t) = -\mathrm{sgn}(x_1(t)) = -\mathrm{sgn}(q(t))$.

$\longrightarrow$ tf min (en fonction de $q_0, \dot q_0$) = ?

$\longrightarrow$ sphères/boules temps min = ?

Exo 1.

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_f} (x^2(t) + u^2(t))\, dt \longrightarrow \min$$

$t_f > 0$ fixé

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0 \text{ (fixé)}$$

$(n = m = 1)$

$\longrightarrow$ $x(t_f)$ libre, pas de contrainte sur u (ie $U = \mathbb{R}$)

On a bien un problème sous forme de Lagrange avec :

$$f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, u) \longmapsto \frac{1}{2}(x^2 + u^2)$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (f = [0 \ 1])$$
$$(x, u) \longmapsto u$$

i) __hamiltonien :__

$$H(x, p, u) = p^0 \cdot f^0(x, u) + (p \mid f(x, u))$$
$$= p^0 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + p \cdot u$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2 + u^2) + p \cdot u$$

en admettant que $p^0 \neq 0$ (auquel cas on prend $p^0 = -1 < 0$)

ii) __système adjoint :__

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x$$

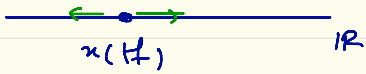
iii) __maximisation__ : le hamiltonien est un polynôme de degré 2 en u qui définit une fonction strictement concave et possède un maximum unique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 0 = -u + p \Rightarrow u = p$$ (on a "tiré" u comme fonction de x et p)

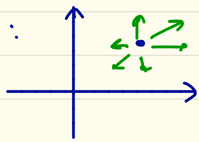
Donc on a : $\begin{cases} \dot{x} = u = p \\ \dot{p} = x \end{cases}$ et $x(0) = x_0$ (fixé)

iv) <u>transversalité</u> : $x(t_f) \in X_f = \mathbb{R}$

Donc, $T_{x(t_f)} X_f = X_f = \mathbb{R}$ ($k = 0$: aucune contrainte !)



(De même, si $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$ libre, $T_{x(t_f)} X_f = \mathbb{R}^n$ avec $X_f = \mathbb{R}^n$:



)

Ici, $p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f$

$\Rightarrow p(t_f) \perp \mathbb{R}$

$\Rightarrow p(t_f) = 0$. On a désormais un problème aux deux bouts bien posé :

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = x \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad p(t_f) = 0$$

$\Rightarrow \ddot{x} = \dot{p} = x$ ie $\ddot{x} - x = 0$ (ie $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$, $\omega = 1$)

$\Rightarrow \exists A$ et $B \in \mathbb{R}^2$ tq $x(t) = A.\,\mathrm{ch}\, t + B.\,\mathrm{sh}\, t$

$= C.e^{t} + D.e^{-t}$

$$x(0) = x_0 \Longrightarrow A = x_0 \Longrightarrow x(t) = x_0 . \operatorname{ch} t + B . \operatorname{sh} t$$

$p(t) = \dot{x}(t) = x_0 . \operatorname{sh} t + B . \operatorname{ch} t$, donc

$$p(t_f) = 0 \Rightarrow x_0 . \operatorname{sh} t_f + B . \underbrace{\operatorname{ch} t_f}_{> 0} = 0$$

$$\Rightarrow B = - x_0 . \frac{\operatorname{sh} t_f}{\operatorname{ch} t_f}$$

Donc : $x(t) = x_0 . \operatorname{ch} t - x_0 . \dfrac{\operatorname{sh} t_f}{\operatorname{ch} t_f} . \operatorname{sh} t$

$$= (\operatorname{ch} t - \operatorname{th} t_f . \operatorname{sh} t) . x_0$$

et $u(t) = p(t)$

$= \dot{x}(t)$

$= (\operatorname{sh} t - \operatorname{th} t_f . \operatorname{ch} t) . x_0$.

t_f et x_0 sont les deux paramètres du problème

Remarque : le problème n'ayant ni condition terminale ($x(t_f)$ est libre), ni condition sur u, on a un problème d'optimisation (en u seul...) sans contraintes : on n'a donc pas de pb de "qualification de contraintes" et on est sûr de pouvoir prendre $p^0 \neq 0$. Directement, on peut voir que, si on fait $p^0 = 0$, on a :

$H = 0 + p . u$, à maximiser pour $u \in \mathbb{R}$.

Or, $\max_{u \in \mathbb{R}} p . u = +\infty$ (pas de sol.) si $p \neq 0$

$= 0$ si $p = 0$: le PMP, qui affirme que p.p. t H est maximisé, implique que $p(t) = 0$ p.p., ie $p \equiv 0 \Longrightarrow (p^0, p) = (0, 0)$: impossible.

Exo 2. $\displaystyle -q(tf) + \int_0^{tf} u^2(t)\,dt \to \min$ ← tf fixé

$$\ddot q(t) = u(t),\quad q(0)=0,\quad \dot q(0)=0$$

On pose $x(t) = (q(t), \dot q(t)) \in \mathbb{R}^2$, et on se ramène à un pb de Lagrange en écrivant

$$-q(tf) + \int_0^{tf} u^2(t)\,dt$$

$$= \int_0^{tf} \left(-\dot q(t) + u^2(t)\right) dt = \int_0^{tf} \left(-x_2(t) + u^2(t)\right) dt$$

cf. $q(0)=0$

avec : $\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = u(t) \end{cases}$ $(n=2,\ m=1)$

ie : $\begin{cases} f^0(x,u) = f^0(x_1,x_2,u) = -x_2 + u^2 \\ f(x,u) = f(x_1,x_2,u) = (x_2,\ u) \end{cases}$