Lundi 28 Septembre 2020

Commande optimale

I. Contrôle des EDO.

2. Principe du maximum de Pontryagin

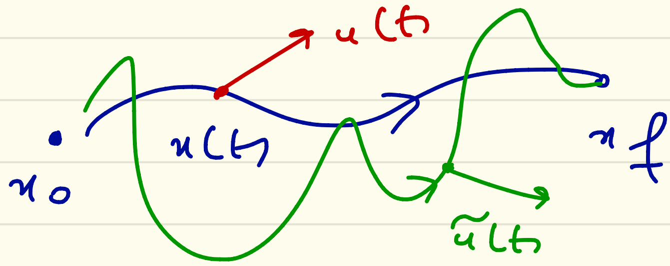
Rappel : on cherche à résoudre le pb suivant :

fonction coût $\longrightarrow$ $$\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min$$

état $x(t) \in \mathbb{R}^n$

contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^m$

contraintes
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), & t\in[0,t_f] \text{ (p.p.)} \\ x(0) = x_0, & x(t_f) = x_f \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m & \text{(p.p. } t\in[0,t_f]) \end{cases}$$

① 

$\exists\, u$ tq $x_0 \longrightarrow x_f$? Contrôlabilité ?

② Existence d'un contrôle optimal ?

③ Condition nécessaire de solution : si u est un contrôle optimal (et si x est la trajectoire associée), quelle relation vérifie (ut) nécessairement u (et x) ?
(cf. CN1, CN2 en opti MAM4)

Th. (PMP) : si $u \in L^\infty([0,t_f], \mathbb{R}^m)$ est un contrôle optimal (et si $x : [0,t_f] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue — et même Lipschitz — est la trajectoire associée), alors : $\exists (p^0, p) \neq (0,0)$ où p^0 est une cte ≤ 0, où $p : [0,t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz tq :

état adjoint

i) $\dot p(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))$ || système adjoint

où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x, p, u) \longmapsto p^0 f^0(x,u) + (p \mid f(x,u))$$

(ie : $\dot p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t), u(t)), \quad i = 1, \dots, n$)

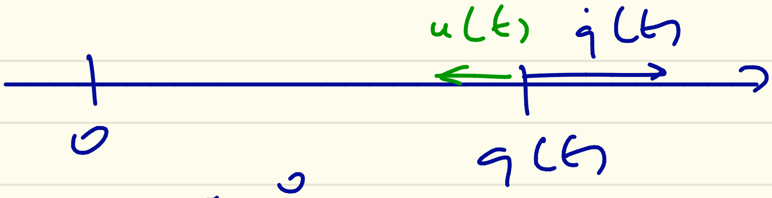
ii) p.p. $t \in [0, t_f]$,

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), v)$$

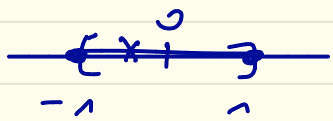
Si, de plus, t_f est libre, on a $H \equiv 0$ le long de l'extrémale (= le triplet (x, p, u)), ie :

p.p. $t \in [0, t_f]$, $H(x(t), p(t), u(t)) = 0$.

Exemple :



$u(t) \in [-1, 1] =: U$
ie $|u(t)| \leq 1$



$\partial U = \{-1, 1\}$

Sachant que : $\ddot q(t) = u(t)$, $t \in [0, t_f]$

$t_f \longrightarrow \min$, $\begin{cases} q(0) = q_0, \ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \\ q(t_f) = 0, \ \dot{q}(t_f) = 0 \end{cases}$

i) <u>hamiltonien du problème</u> :

$$\ddot{q}(t) = u(t) \iff x(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \\ &= (\dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \\ &= (x_2(t), u(t)) \\ &= f(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{aligned}$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(\mathcal{C}^\infty)$

$\qquad (x_1, x_2, u) \longmapsto (x_2, u)$

et $\displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,dt = t_f$ avec

$f^0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad (x_1, x_2, u) \longmapsto 1$

Donc, $H(x, p, u)$

$$\begin{aligned} &= H(x_1, x_2, p_1, p_2, u) \\ &= p^0 \cdot 1 + \left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \right) \\ &= p^0 + p_1 x_2 + p_2 u \qquad \left(\text{cf. } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \right) \end{aligned}$$

ii) <u>système adjoint</u> :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t)) \\ &= 0 \implies p_1 = \text{cte} \end{aligned}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x(t), p(t), u(t))$$

$$= -p_1(t) = \text{cte} \Rightarrow p_2 \text{ affine}$$

iii) <u>maximisation du hamiltonien :</u>

p.p. $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ maximise la fonction

$$v \longmapsto H(x(t), p(t), v) \text{ pour } v \in U \,;$$

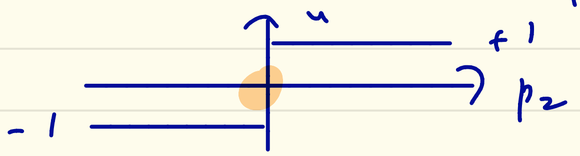
ici, $H = p^0 + p_1 x_2 + p_2 . u$, $\quad U = [-1, 1]$;

or, fixons x et p dans $\mathbb{R}^n$, et considérons le problème :

$$\begin{cases} p^0 + p_1 x_2 + p_2 . v \longrightarrow \max \\ |v| \leq 1 \end{cases}$$

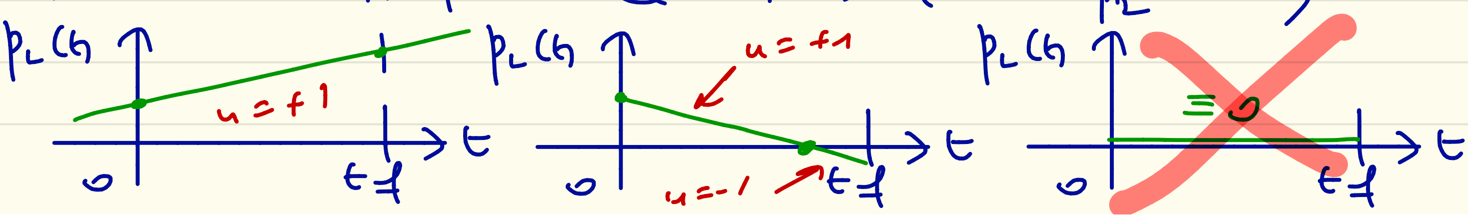
Si $p_2 \neq 0$, $\left.\begin{array}{ll} u = +1 & \text{si } p_2 > 0 \\ u = -1 & \text{si } p_2 < 0 \end{array}\right)$ ie $u = \frac{p_2}{|p_2|}$

$= \text{sgn}(p_2)$



Si $p_2 = 0$, tout $u \in [-1, 1] = U$ est solution.

Or ici, p_2 est affine et s'annule donc sur $[0, t_f]$ soit 0 fois, soit 1 fois, soit un nombre infini de fois (cas $p_2 \equiv 0$) :



Montrons, par l'absurde, que le cas $p_2 \equiv 0$ est impossible : si $p_2 \equiv 0$, $\dot{p}_2 \equiv 0 = -p_1$

$\Rightarrow (\forall t \in [0, t_f])$: $p(t) = (0,0)$;

or, $H = p^0 + p_1 x_2 + p_2 u$

$\Rightarrow H(x(t), p(t), u(t)) = p^0$, $t \in [0, t_f]$

mais, comme t_f est libre, on sait par ailleurs que $H(x(t), p(t), u(t)) = 0$

$\Rightarrow p^0 = 0$

$\Rightarrow (p^0, p) = (0,0)$: interdit par le PMP.

Le contrôle vaut donc $+1$ ou -1 (contrôle "bang-bang") avec au plus une commutation. Et on peut résoudre, en admettant que le problème possède une solution (c'est bien le cas — cf. propriétés de convexité-compacité du problème).

On deux cas :

- soit $u = +1$ puis -1
- soit $u = -1$ puis $+1$

(considérant que ces deux cas incluent les sous-cas $u = +1$ partout / -1 partout).

Supposons par exemple que u vaut d'abord -1 ; alors :

$\ddot{q}(t) = u(t) = -1$

$\Rightarrow \dot{q}(t) = -t + \dot{q}_0$

$\Rightarrow q(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \dot{q}_0 . t + q_0$

$= -\frac{1}{2}(-t + \dot{q}_0)^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$

$\Rightarrow q(t) = -\frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$

$\Rightarrow q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 = \text{cte}$

Ie : – la courbe paramétrée $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$
$= (x_1(t), x_2(t))$

est incluse dans une parabole
$x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = \text{cte}$

– la qté $x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) = q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t)$

est une "intégrale première"

(cf. $\frac{d}{dt}\left[x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)\right]$

$= \dot{x}_1(t) + x_2(t) . \dot{x}_2(t)$

$= x_2(t) + x_2(t) . u(t)$

$= \underbrace{x_2(t)(1 + \underbrace{u(t)}_{=-1})}_{0} = 0 ,$)

Supposons qu'on a une commutation en $0 < t_1 < t_f$
auquel cas on a :

$\ddot{q}(t) = u(t) = +1$, $t \in [t_1, t_f]$

$\Rightarrow \dot{q}(t) = (t - t_1) + \dot{q}_1$ (on note $(q(t_1), \dot{q}(t_1)) = (q_1, \dot{q}_1)$)

$\Rightarrow q(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)^2 + \dot{q}_1(t - t_1) + q_1$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{(t - t_1) + \dot{q}_1}_{\dot{q}})^2 - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_1$$

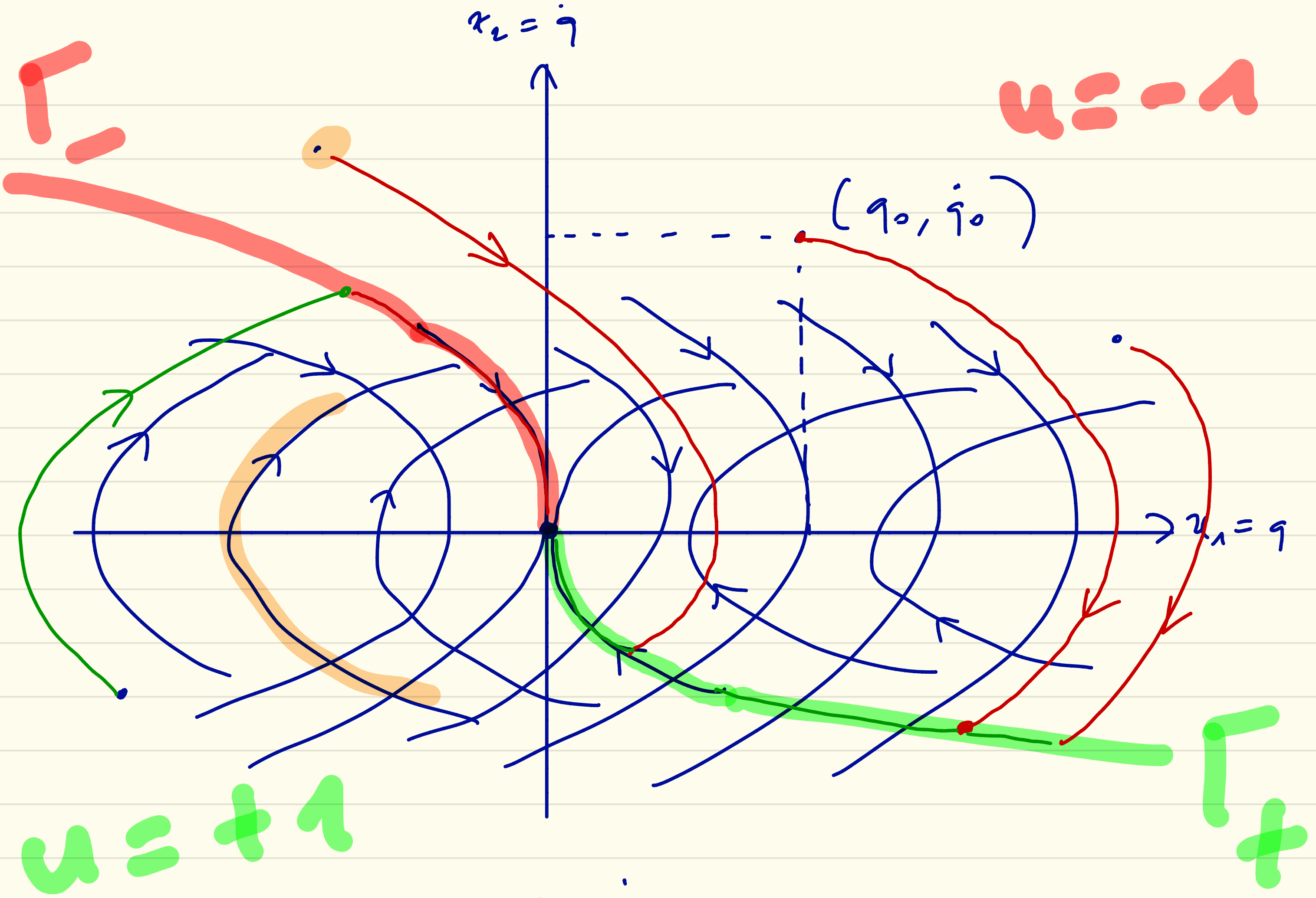
$$= \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_1$$

$\Rightarrow q(t) - \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_1 - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 = cte$, ie :

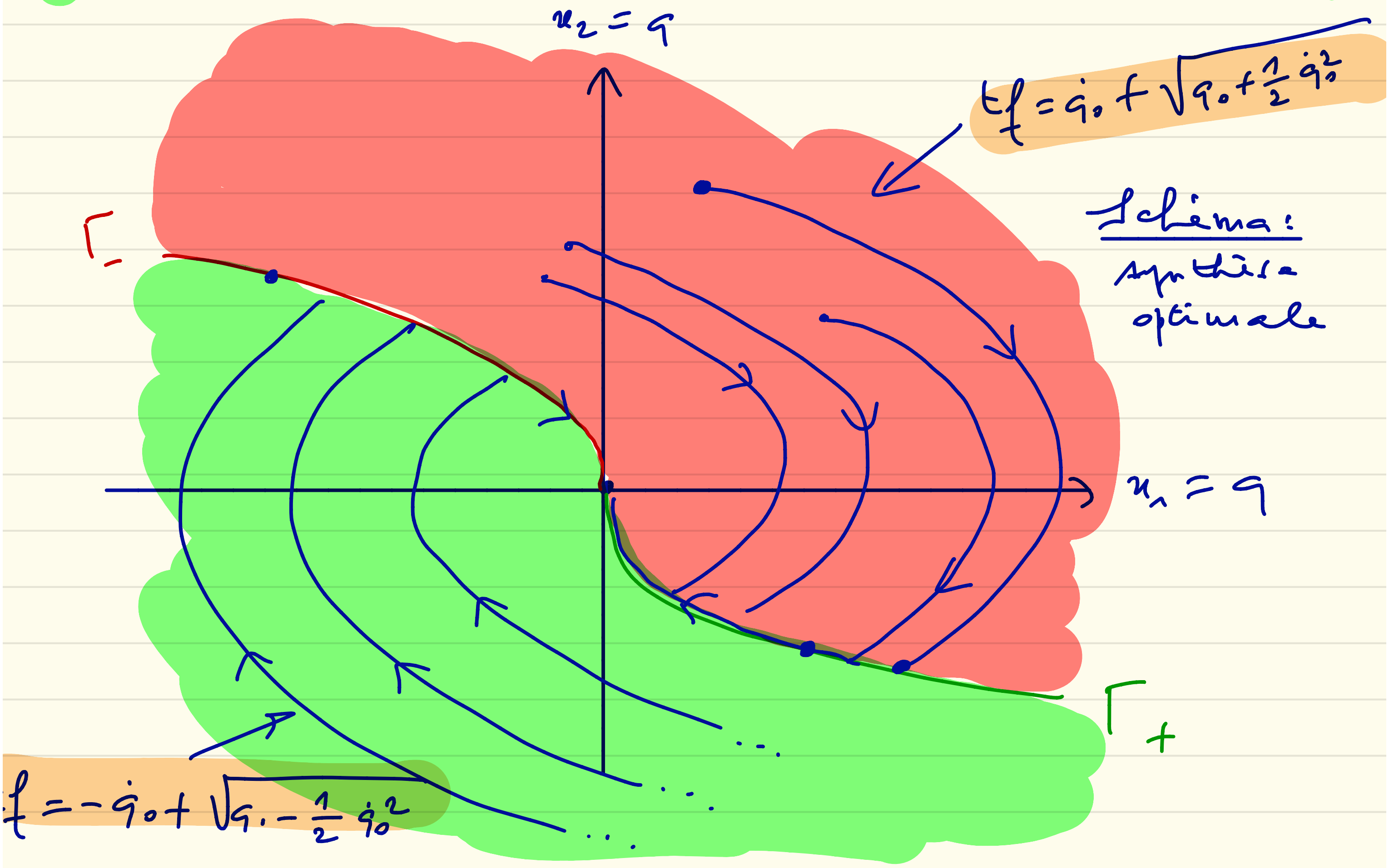
- la courbe paramétrée $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$ est incluse dans un arc de parabole $x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = cte$;
- la qté $x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = q - \frac{1}{2}\dot{q}^2$ est une "intégrale première".

Remarques :

- le long d'un arc $q + \frac{1}{2}\dot{q}^2 = cte$ $(u = -1)$, $\dot{q} = -t + \dots$ de sorte que $\dot{q} \searrow$;
- au contraire, $\dot{q} \nearrow$ le long d'un arc $q - \frac{1}{2}\dot{q}^2 = cte$ $(u = +1)$;



$x_2 = \dot q$
Γ_-
$u = -1$
$(q_0, \dot q_0)$
$x_1 = q$
$u = +1$
Γ_+



$x_2 = \dot q$
$t_f = \dot q_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot q_0^2}$
Schéma : synthèse optimale
Γ_-
$x_1 = q$
Γ_+
$f = -\dot q_0 + \sqrt{q_0 - \frac{1}{2}\dot q_0^2}$

On constate géométriquement que par tout pt du plan passe une et une seule courbe formée de deux arcs $-1/+1$ ou $+1/-1$ qui connecte ce pt à l'origine : l'existence étant admise, on en déduit que cette trajectoire est la solution en temps min (on a unicité).

<u>Remarque</u> : on a établi la synthèse ("feedback") qui donne le contrôle u comme fonction de l'état x (bien plus fort que $u = u(x, p)$ donné par la maximisation du PMP...) : si $x = (q, \dot{q})$ est au dessus de $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (ou sur Γ_-), le contrôle vaut -1, sinon le contrôle vaut $+1$.

Calculons finalement la "valeur" du problème (= valeur du coût à l'optimum), ie le temps min en fonction des conditions initiales. Supposons par exemple qu'on est dans le cas $u=-1$ puis $+1$, et calculons t_1, le temps de commutation. Cet instant vérifie la relation suivante :

$$q(t_1) = +\frac{1}{2}(\dot{q}(t_1))^2$$

(cf. $(q, \dot{q})(t_1) \in \Gamma_+$ et Γ_+ a pour équ. $q = \frac{1}{2}\dot{q}^2$, $\dot{q} \leq 0$)

et on a

$$q(t_1) + \frac{1}{2}(\dot{q}(t_1))^2 = \mathrm{cte} = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$

$$\Rightarrow (\dot{q}(t_1))^2 = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$

Comme $\dot{q}(t_1) = -t_1 + \dot{q}_0$, on a

$$(-t_1 + \dot{q}_0)^2 = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$

On doit avoir $q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 \geq 0$ (car égal à un carré !) ce qui correspond bien au cas considéré, auquel cas :

$$t_1 = \dot{q}_0 \pm \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \dot{q}_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2} \qquad (\text{cf. } t_1 \geq 0)$$

On obtient finalement tf en écrivant que $\dot{q}(tf) = 0$, sachant que sur $[t_1, tf]$,

$$\dot{q}(t) = (t - t_1) + \dot{q}_1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \dot{q}(tf) = tf - t_1 + \dot{q}_1$$

$$\Rightarrow \quad tf = t_1 - \dot{q}_1$$

et $\quad \dot{q}_1 = \dot{q}(t_1) = -t_1 + \dot{q}_0$

$$\Rightarrow tf = 2t_1 - \dot{q}_0$$

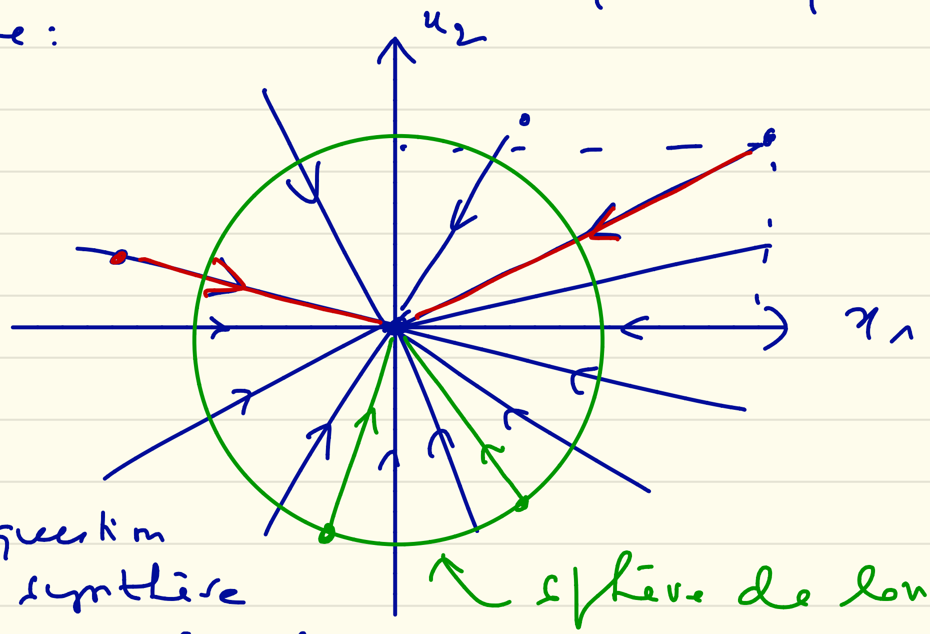
$$= \dot{q}_0 + 2\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}.$$

On vérifie de même que, dans le cas symétrique,

$$tf = -\dot{q}_0 + 2\sqrt{q_0 - \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}.$$

Remarques : i) cette fonction valeur, $t_f = t_f(x_0) = t_f(q_0, \dot q_0)$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$; elle vérifie une EDP (appelée équation de Hamilton–Bellman–Jacobi) dont elle est solution en un sens faible (notion de solution de "viscosité").

ii) la synthèse obtenue, qui indique comment rejoindre en temps min l'origine partant d'un pt arbitraire du plan, est à comparer au cas élémentaire du plus court chemin au sens de la longueur entre ce même pt du plan et l'origine :



→ Même question pour la synthèse temps min précédente : soit $t_f > 0$, quelle est la sphère de rayon t_f, ie l'ensemble des pts à distance (= temps min) t_f de l'origine ?