Commande Optimale (NB : commande et contrôle sont synonymes) ① 21/09 CO

Plan cours :

I. Contrôle Optimal des EDO. +
II. Contrôle Optimal des EDP.
III. Apprentissage par renforcement. (RL) +

site web : Caillau (jbcaillau.github.io/commande)
orga : 9 séances
2 exams (avec documents annales site web)

logiciels : python, matlab, gitlab ...

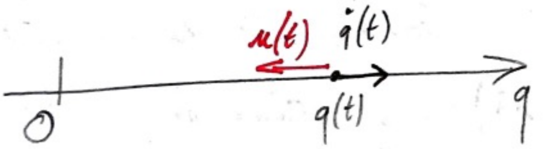
I. Contrôle optimal des EDO.

1. Position du problème
2. Principe du maximum (PMP)
3. Preuve du PMP
4. Cas linéaire quadratique (LQR)

bibliographie : cf Web. (notamment Paris 6)

---

1. Position du problème.



$q(t)$: position
$\dot{q}(t)$: vitesse
$q(0) = q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ (connus conditions initiales)
$q(t_f) = 0$; $\dot{q}(t_f) = 0$ (connus conditions terminales)

retour à vitesse nulle et à l'origine

⚠ $u(t) \in [-1;1]$ càd : $|u(t)| \leq 1$
contrainte sur la commande (accélération finie)

(1) dynamique du système (EDO) $\{ \ddot{q}(t) = \cancel{0}\ u(t)$ ← commande/contrôle

On pose $x(t) = (q(t); \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$ auquel cas (1) se réécrit comme une EDO d'ordre 1 en dimension 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = u(t) \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x_1(0) = q_0 \ , \ x_1(t_f) = 0 \\ x_2(0) = \dot{q}_0 \ , \ x_2(t_f) = 0 \end{matrix}\right\} \text{conditions aux limites (CL)}$$

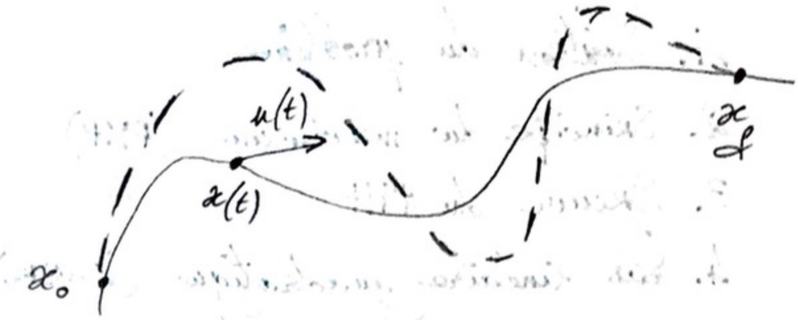
Remarque : On pourrait également avoir des contraintes sur l'état (x) ; par exemple : $q(t) \geq 0$ ($\Leftrightarrow x_1(t) \geq 0, \forall t \in [0; t_f]$) PLUS DUR ⇒ pas utilisé

On a modélisé le système sous la forme :

$$\text{conditions aux limites}\quad\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(\overset{\text{état}}{x(t)}, \overset{\text{commande}}{u(t)}\big), \ t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \ , \ x(t_f) = x_f \\ \underbrace{u(t) \in U}_{\text{contraintes sur le contrôle}} \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$
$u(t) \in \mathbb{R}^m$
$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

ici : $n = 2$
$m = 1$
$f = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2, u) \longmapsto (x_2, u)$
$U = [-1 ; 1] \subset \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
$x_0 = (q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R}^2$
$x_f = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$



i) $\exists$ contrôle admissible (cf. $u(t) \in U$ ...) permettant d'arriver à x_f (= cible) partant de x_0 ? Question de CONTRÔLABILITÉ ($\Leftrightarrow$ l'ensemble des contraintes est-il non vide ?)

ii) Si le système est contrôlable, se pose la question de sélectionner les "meilleurs" contrôles $\rightarrow$ optimisation / contrôle optimal

exemple : temps minimum : on cherche, partant de $x_0 = (q_0, \dot{q}_0)$, à revenir à l'origine) à vitesse nulle le plus vite possible.

L'instant final, t_f, est inconnu : $t_f \rightarrow \min$ — coût

contraintes — $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$ $\quad x(0) = x_0 \ , \ x(t_f) = (0,0)$, $\quad |u(t)| \leq 1$

En général, le problème s'écrit donc : $\displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min$) coût

contraintes $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \ t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \ , \ x(t_f) = x_f \\ u(t) \in U, \ t \in [0, t_f] \end{cases}$

où $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

NB : le temps final est soit fixé, soit libre.

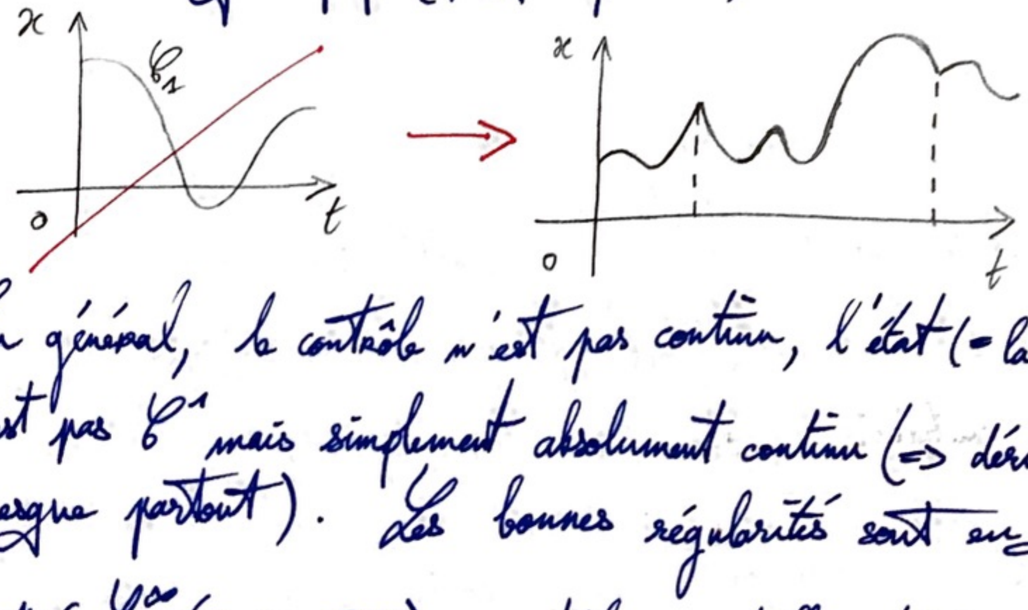
ici : $f^0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2, u) \mapsto 1$

21/09
② CO

Remarques : i) Le contrôle peut être discontinu, ce qui veut dire que :
$g(t,x) := f(x, u(t))$ qui permet d'écrire la dynamique sous la forme : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = g(t, x(t))$
ne vérifie pas les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Th. qui garantit $\exists !$ solution maximale de $\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$)
On dispose néanmoins d'un théorème plus général (Th. de Caratheodory) qui garantit encore, à contrôle connu ($u : [0, t_f] \to \mathbb{R}^m$) et à condition initiale fixée, l'existence et l'unicité d'une solution maximale.

$$u, x_0 \longrightarrow x$$
$$u : t \mapsto u(t) \qquad\qquad x : t \mapsto x(t)$$

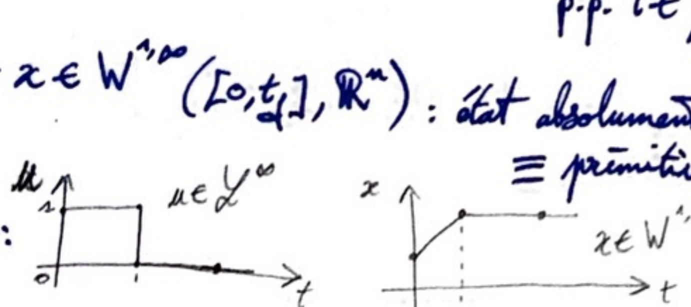
On perd toutefois en régularité : l'état n'est en général ~~pas~~ dérivable que p.p. (presque partout)



En général, le contrôle n'est pas continu, l'état (= la trajectoire) n'est pas $\mathcal{C}^1$ mais simplement absolument continu ($\Rightarrow$ dérivable seulement presque partout). Les bonnes régularités sont en fait :

- $u \in \mathcal{L}^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$: contrôle essentiellement borné ($\exists M > 0$ tq p.p. $t \in [0, t_f]$, $|u(t)| \leq M$)
- $x \in W^{1,\infty}([0, t_f], \mathbb{R}^n)$: état absolument continu (en fait lipschitzien) $\equiv$ primitives de fonctions $\mathcal{L}^\infty$.

ex :



ii) Le coût sous forme intégrale s'appelle un coût de Lagrange; il existe d'autres formes de fonctions coût, toutes équivalentes entre elles:

* coût de Mayer : $g(t_f, x(t_f)) \longrightarrow \min$

On peut mettre un coût de Lagrange $\displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,dt = \hat{x}_1(t_f) = g(t_f, \hat{x}(t_f))$ sous cette forme en augmentant l'état.

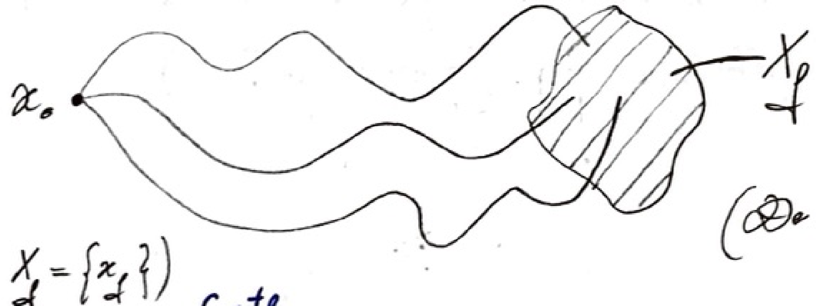
Posons $x^0(0) = 0$, $\dot{x}^0(t) = f^0(x(t), u(t))$

$\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t))$; alors $\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} f^0(x(t), u(t)) \\ f(x(t), u(t)) \end{bmatrix} = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t))$

* coût de Bolza: $\displaystyle g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,dt$

iii) La cible peut être plus générale qu'une valeur fixée pour l'état:

$x(t_f) \in X_f \subset \mathbb{R}^n$



(De même, $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$...)

(ex: $X_f = \{x_f\}$)

Définition: soit à résoudre

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \\ u(t) \in U \end{cases}$$

contraintes $\longrightarrow$ (les trois dernières lignes)

On appelle solution un couple contrôle $u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ et un état $x \in W^{1,\infty}([0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (et un temps final t_f si celui-ci est libre) tq les contraintes ci-avant sont vérifiées (on dit que le contrôle et l'état sont "admissibles") et tq tout autre couple contrôle-état admissible donne un coût supérieur.

2. Principe du maximum (PMP) — Pontryagin $\simeq 1950$

21/09
CO ③

Th. PMP: si $u \in L^\infty([0,t_f])$ est solution du problème (S) (et si $x \in W^{1,\infty}([0,t_f],\mathbb{R}^n)$ càd x lipschitzienne est la trajectoire associée) alors $\exists (p^0,p) \neq (0,0)$ où p^0 est une cst ≤ 0, où $p : [0,t_f] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne tq :

i) $\dot p(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)),\ t\in[0,t_f]$ (p.p.)

où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ "hamiltonien du problème"

$$(x,p,u) \longmapsto p^0 f^0(x,u) + (p \mid f(x\mid u))$$

ii) $H(x(t),p(t),u(t)) = \max\limits_{v\in U} H(x(t),p(t),v),\ t\in[0,t_f]$ (p.p.)

Si, de plus, t_f est libre (càd inconnu), alors $H(x(t),p(t),u(t)) = 0,\ t\in[0,t_f]$ (p.p.)

Remarque : i) Si la cible n'est pas ponctuelle (ici on a pris $x(t_f) \in X_f := \{x_f\}$), on a une condition iii) supplémentaire (dite "relation de transversalité")

ii) $\nabla_x H(x,p,u) = p^0 \nabla_x f^0(x,u) + {}^t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)\cdot p$

$\nabla_p H(x,p,u) = f(x,u)$

notamment, $\begin{cases} \dot x(t) = f(x(t),u(t)) = \nabla_p H(x(t),p(t),u(t)) \\ \dot p(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)) \end{cases}$ système pseudo-hamiltonien

NB : système hamiltonien : $\begin{cases} \dot x(t) = \nabla_p H(x(t),p(t)) \\ \dot p(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t)) \end{cases}$ pas de $u(t)$

si (x,p) solution de l'EDO, alors :
$(\exists c\in\mathbb{R})(\forall t) : H(x(t),p(t))$

puisque $\dfrac{d}{dt}\Big[H(x(t),p(t))\Big] = \dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t))\cdot \dot x(t) + \dfrac{\partial H}{\partial p}(\text{—})\cdot \dot p(t)$

$= (\nabla_x H(x(t),p(t)) \mid \nabla_p H(\text{—})) + (\nabla_p H(\text{—}) \mid -\nabla_x H(\text{—}))$

$\dot p(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)) = 0$

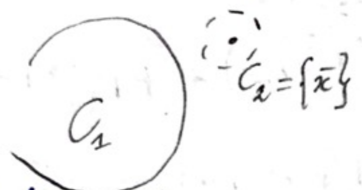
$\Leftrightarrow \dot p_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\text{—}),\ i = 1,n$

iii) Si $(p^0,p) \neq (0,0)$ vérifie i) et ii) alors, $\forall \lambda > 0$, $(\underbrace{\lambda p^0}_{\leq 0}, \lambda p) \neq (0,0)$ vérifie encore i) et ii) (homogénéité)

On a deux cas :
- soit $p^0 = 0$ (cas anormal (*))
- soit $p^0 \neq 0$ (cas normal)

Dans le cas normal, on "casse l'homogénéité" en fixant $p^0 = -1$.

(*) à rapprocher de l'absence de qualification de contraintes en optimisation (cf KKT, opti HAM4).



$L(x,\lambda) = \lambda^0 f(x) + (\lambda \mid h(x))$

$C = C_1 \cup \{\bar{x}\}$ $\lambda^0 = 0$

iv) la condition de maximisation ii) affirme que, presque tout $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ est l'une des solutions du problème d'optimisation (en dim $m < \infty$) :

$$\begin{cases} H(x(t), p(t), v) \to \max \\ v \in U \end{cases}$$

En particulier en ii) $\Rightarrow$ ce problème d'opti doit avoir une solution !

Normalement cette condition permet de tirer $u(t)$ comme fonction de $x(t)$ et $p(t)$: $\exists \varphi$ tq : $u(t) = \varphi(x(t), p(t))$ ("on élimine u")

EDO en (x,p) de dim $n+n = 2n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t), \varphi(x(t), p(t))), \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(\underline{\qquad\qquad}), \end{cases} \quad t \in [0, t_f]$$

"problème aux deux bouts" $\left(x(0) = x_0, \ x(t_f) = x_f \right.$

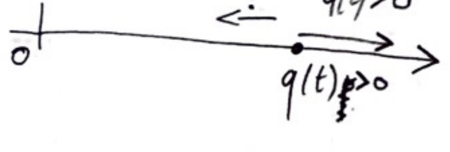
$p(0) = ??$ $\longrightarrow$ méthode tir : "deviner" $p(0)$ pour tomber sur x_f

càd : trouver p_0 tq $x(t_f, x_0, p_0) = x_f$

n inconnues n équations

v) la condition de maximisation implique que le hamiltonien est égal p.p. à une cst. $(\exists c \in \mathbb{R})(\text{p.p. } t \in [0, t_f])$: $H(x(t), p(t), u(t)) = c$

Quand t_f est libre, cette cst est connue et vaut 0.



ii) $\Rightarrow$?