Commande optimale.

Exo 2 (suite).

$$-q(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,dt \qquad t_f > 0 \text{ fixé}$$

$$q(0)=0 \longrightarrow \;= \int_0^{t_f} \left(-\dot q(t) + u^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{t_f} \left(-x_2(t) + u^2(t)\right) dt \longrightarrow \min$$

avec $x(t) = (q(t), \dot q(t)) \in \mathbb{R}^2$. $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = u \end{cases}$

1) Hamiltonien : $H(x,p,u) = H(x_1, x_2, p_1, p_2, u)$

$$= p^0 f^0(x,u) + (p \mid f(x,u))$$

$$= p^0(-x_2 + u^2) + p_1 . x_2 + p_2 . u$$

Vérifions d'emblée que p^0 (≤ 0) ne peut pas être nul.
Si $p^0 = 0$, on a $H(x,p,u) = p_1 . x_2 + p_2 . u$ avec le contrôle $u(t) \in U = \mathbb{R}$ (pas de contrainte sur u) ; par maximisation du hamiltonien, nécessairement $p_2(t) = 0$ p.p. t, i.e. $\forall t \in [0, t_f]$ (puisque p_2 est Lipschitz, donc continue) ; en effet, le PMP implique que, p.p. $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ maximise sur $U = \mathbb{R}$ la fonction $v \longmapsto H(x(t), p(t), v)$

$$= p_1(t).x_2(t) + p_2(t).v :$$

ce problème ne possède de solution que si $p_2(t) = 0$ (auquel cas l'ensemble des solutions est $U = \mathbb{R}$!)
Comme $\dot p_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(x(t), p(t), u(t))$

$$= -p_1(t) \implies p_1(t) = 0$$

Donc $p^0 = 0$, $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$: $(p^0, p) = (0,0)$, impossible.

Posons donc $p^\circ = -\frac{1}{2} < 0$: $H(x,p,u) = -\frac{1}{2}(-x_2 + u^2) + p_1 x_2 + p_2 u$

$= -\frac{1}{2}u^2 + (p_1 + \frac{1}{2})x_2 + p_2 u$

② Système adjoint :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t)) \\ \quad = 0 \Rightarrow p_1 = cte \\ \dot{p}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(x(t), p(t), u(t)) \\ \quad = -(p_1(t) + \frac{1}{2}) = cte \Rightarrow p_2 \text{ affine} \end{cases}$$

③ Maximisation du hamiltonien : à x et p fixés dans $\mathbb{R}^2$, le problème

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u^2 + (p_1 + \frac{1}{2})x_2 + p_2 . u \longrightarrow \max \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\hookrightarrow h(x,p) := H(x,p,u = p_2) = \frac{1}{2}p_2^2 + (p_1 + \frac{1}{2})x_2$

possède une solution et une seule puisque la fonction est strictement convexe sur $\mathbb{R}$: le maximiseur vérifie $\frac{\partial H}{\partial u}(x,p,u) = 0$

$\Rightarrow -u + p_2 = 0$

$\Rightarrow u = p_2$: (p.p. $t \in [0, tf]$) : $u(t) = p_2(t)$.

④ Transversalité : comme $x(tf) = (q(tf), \dot{q}(tf)) \in X_f$ avec $X_f = \mathbb{R}^2$ (pas de condition !),

$p(tf) \perp T_{x(tf)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow p(tf) = 0$: $p_1(tf) = p_2(tf) = 0$.

Donc, $p_1 = cte = 0$, $\begin{cases} \dot{p}_2(t) = -\frac{1}{2} \\ p_2(tf) = 0 \end{cases} \Rightarrow p_2(t) = \frac{1}{2}(tf - t)$

$\Rightarrow \quad u(t) = p_2(t) = \frac{t_f - t}{2}$ et on en déduit q (et le coût) en réintégrant $\ddot{q}(t) = u(t)$:

$$\ddot{q}(t) = \frac{t_f - t}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) = \underbrace{\cancel{\dot{q}(0)}}_{0} + \frac{t_f}{2} \cdot t - \frac{1}{4} t^2$$

$$\Rightarrow q(t) = \underbrace{\cancel{q(0)}}_{0} + \frac{t_f}{4} \cdot t^2 - \frac{1}{12} t^3$$

$$\Rightarrow q(t_f) = t_f^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{t_f^3}{6}$$

et $$\int_0^{t_f} u^2(t)\,dt = \int_0^{t_f} \frac{(t_f - t)^2}{4}\,dt$$

$$= \left. \frac{(t - t_f)^3}{12} \right]_0^{t_f}$$

$$= \frac{t_f^3}{12}$$

$$\Rightarrow -q(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,dt = -\frac{t_f^3}{6} + \frac{t_f^3}{12} = -\frac{t_f^3}{12}.$$

Résolution numérique (méthode de tir) :

On injecte $u = p_2$ dans le système différentiel en x et p :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) = \frac{\partial h}{\partial p_1} \\ \dot{x}_2(t) = u(t) = p_2(t) = \frac{\partial h}{\partial p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) - \frac{1}{2} = -\frac{\partial h}{\partial x_2} \end{cases} \quad (*)$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\boxed{p_1(t_f) = p_2(t_f) = 0}$ ← cible du tir

$\left(\Rightarrow p_2(t) = \frac{t_f - t}{2} \Rightarrow p_2(0) = t_f/2 \text{ et } p_1(0) = 0 \right.$

$\left. \Rightarrow p(0) = (0, t_f/2) \right)$

On peut faire un tir pour déterminer $p(0)$: on cherche $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tq, partant de $x(0)=(0,0)$ et $p(0)=p_0$, quand on intègre $(*)$ on tombe sur la "cible" $p(tf)=(0,0)$: on doit résoudre l'équation

$$p(tf, x_0, p_0) = (0,0).$$

$= (0,0)$ connu

2 inconnues ($p_0 \in \mathbb{R}^2$)

2 équations

<u>Exo 3.</u> $$-q^2(tf) + \int_0^{tf} u^2(t)\,dt \to \min$$

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad q(0)=\dot{q}(0)=0, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

Réduction à une forme de Lagrange :

$$-q^2(tf) + \int_0^{tf} u^2(t)\,dt \qquad \frac{d}{dt}(-q^2(t)) = -2q(t)\dot{q}(t)$$

$$\underset{q(0)=0}{=} \int_0^{tf} (-2\underbrace{q(t)\dot{q}(t)}_{x_1 x_2} + u^2(t))\,dt$$

$$= \int_0^{tf} f^0(x(t), u(t))\,dt \quad \text{avec } x(t) := (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$$

et $f^0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (n=2,\ m=1)$

$$(x_1, x_2, u) \longmapsto -2x_1x_2 + u^2$$

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, u) \longmapsto (x_2, u)$$

① <u>Hamiltonien</u> : $H(x,p,u) = p^0(-2x_1x_2 + u^2) + p_1x_2 + p_2u$

De même qu'à l'exo 2, l'absence de contraintes (terminale et sur le contrôle) implique $p^0 \neq 0$:

posons $p^0 = -1$; $H(x,p,u) = 2x_1 x_2 - u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$.

(2) <u>Système adjoint</u> :

$$\begin{cases} \dot p_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t)) \\ \qquad\quad = -2x_2(t) \\ \dot p_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(\longrightarrow) \\ \qquad\quad = -2x_1 - p_1 \end{cases}$$

Remarquons que $\ddot p_2(t) = -2\dot x_1(t) - \dot p_1(t)$

$= -2x_2(t) + 2x_2(t)$

$= 0 \Rightarrow p_2$ affine

(3) <u>Maximisation du hamiltonien</u> : on sait que p.p. $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ est sol. de

$$\begin{cases} H(x(t), p(t), v) = 2x_1(t)x_2(t) - v^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t).v \longrightarrow \max \\ v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ie que : $-2v + p_2(t) = 0$, $\quad v = \frac{1}{2} p_2(t)$

$\Rightarrow$ p.p. t, $\quad u(t) = \frac{1}{2} p_2(t)$.

(4) <u>Transversalité</u> : $x(t_f) = (q(t_f), \dot q(t_f))$ est libre

$(X_f = \mathbb{R}^2) \Rightarrow p(t_f) \perp \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow p(t_f) = 0$.

Donc, $\begin{cases} p_2 \text{ affine} \\ p_2(t_f) = 0 \end{cases} \Rightarrow (\exists\, a \in \mathbb{R}) : p_2(t) = a(t_f - t)$

De plus, $\dot p_2(t) = -2x_1(t) - p_1(t)$

$\Rightarrow \underbrace{\dot p_2(t_f)}_{= -a} = -2x_1(t_f) - \cancel{p_1(t_f)}^{\,0}$

$\Rightarrow 2x_1(t_f) = a$

sachant par ailleurs que :

$$\dot{x}_2 = u = \frac{1}{2} p_2 = \frac{1}{2} a (tf - t)$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \underbrace{\cancel{x_2(0)}}_{0} + \frac{1}{2} a\, tf . t - \frac{1}{4} a t^2$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \underbrace{\cancel{x_1(0)}}_{0} + \frac{1}{4} a\, tf . t^2 - \frac{1}{12} a\, t^3$$

$$\Rightarrow x_1(tf) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) a . tf^3$$

$$= \frac{1}{6} a . tf^3$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2x_1(tf) = a}}{\Rightarrow} \frac{1}{3} a . tf^3 = a \Rightarrow a . \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} tf^3\right)}_{\neq 0 \text{ si } tf \neq \sqrt[3]{3}} = 0$$

$$\downarrow$$

En particulier, si $tf > \sqrt[3]{3}$, PMP $\Rightarrow$ s'il y a une solution, nécessairement $a = 0 \Rightarrow p_2 \equiv 0$
$\Rightarrow u \equiv 0$

S'il existe des contrôles qui rendent le coût < 0 (alors que ce coût est égal à 0 pour $u \equiv 0$), c'est qu'on a une contradiction : le pb n'admet pas de solution. En fait, considérons des contrôles de la forme $u = \frac{a}{2}(tf - t)$, $a \in \mathbb{R}$; on a :

$$x_1(tf) = \frac{a}{6} tf^3 \Rightarrow -q^2(tf) = -\frac{a^2}{36} tf^6$$

et

$$\int_0^{tf} u^2(t)\, dt = \int_0^{tf} \frac{a^2}{4} (tf - t)^2 dt$$

$$= \frac{a^2}{12} \left(t - tf \right)^3 \Big]_0^{tf}$$

$$= \frac{a^2}{12} . tf^3$$

$$\Rightarrow -q^2(tf) + \int_0^{tf} u^2(t)\, dt = \frac{tf^3}{12} . a^2 \overbrace{\left(1 - \frac{1}{3} tf^3\right)}^{< 0} \xrightarrow[a \to \infty]{} -\infty :$$

le pb n'a pas de solution.