

Lundi 28 septembre 2020

# Commande optimale

## I. Contrôle des EDO.

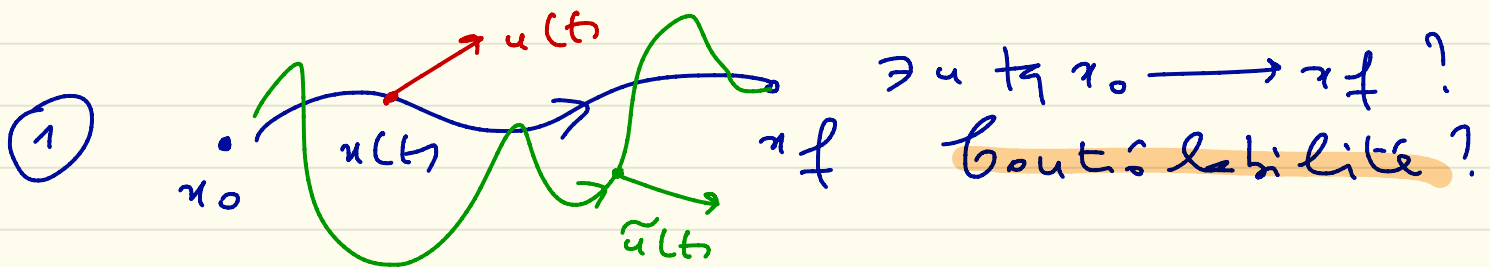
### 2. Principe du maximum de Pontryagin

Rappel: on cherche à résoudre le pb suivant:

fonction coût  $\rightarrow \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min$

$\uparrow$  état  $x(t) \in \mathbb{R}^m$   $\nwarrow$  contrôle  $u(t) \in \mathbb{R}^m$

contraintes  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)} \\ x(0) = x_0, x(t_f) = x_f \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \text{ (p.p. } t \in [0, t_f]) \end{array} \right.$



② Existence d'un contrôle optimal ?

③ Condition nécessaire de solution: si  $u$  est un contrôle optimal (et si  $x$  est la trajectoire associée), quelle relation vérifie nécessairement  $u$  (et  $x$ ) ?  
(cf. CN2, CN3 en opti MATH4)

Th. (PMP): si  $u \in \mathcal{L}^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$  est un contrôle optimal (et si  $x: [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue — et même Lipschitz — est la trajectoire associée), alors:  $\exists (p^0, p) \neq (0, 0)$  où  $p^0$  est une cte  $\leq 0$ , où  $p: [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz tq:

↙ état adjoint  
|| système adjoint

i)  $\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))$

où  $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, p, u) \mapsto p^0 \cdot f^0(x, u) + (p | f(x, u))$

(ie:  $\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t), u(t))$ ,  $i=1, \dots, n$ )

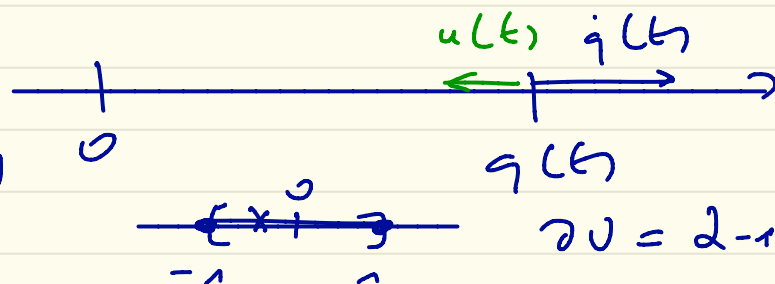
ii) p.p.  $t \in [0, t_f]$ ,

$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), p(t), u)$

Si, de plus,  $t_f$  est libre, on a  $H=0$  le long de l'extrimale (= le triplet  $(x, p, u)$ ), ie:

p.p.  $t \in [0, t_f]$ ,  $H(x(t), p(t), u(t)) = 0$ .

Exemple:



$u(t) \in [-1, 1] =: U$

ie  $|u(t)| \leq 1$

Sachant que:  $\ddot{q}(t) = u(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$

$$t_f \rightarrow \min, \int q(t) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

$$\begin{cases} q(t_f) = 0, \dot{q}(t_f) = 0 \end{cases}$$

i) hamiltonien du problème:

$$\ddot{q}(t) = u(t) \Rightarrow x(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\dot{x}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t))$$

$$= (\dot{q}(t), \ddot{q}(t))$$

$$= (u_2(t), u(t))$$

$$= f(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

avec  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, u) \mapsto (u_2, u) \quad (C^\infty)$$

et  $\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt = t_f$  avec

$$f^0: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, u) \mapsto 1$$

Donc,  $H(x, p, u)$

$$= H(x_1, x_2, p_1, p_2, u)$$

$$= p^0 + f\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}\right)$$

$$= p^0 + p_1 x_2 + p_2 u \quad \left( \text{cf. } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \right)$$

ii) système adjoint:

$$\dot{p}_1(t) = - \frac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t))$$

$$= 0 \Rightarrow p_1 = \text{cte}$$

$$\dot{p}_2(t) = - \frac{\partial H}{\partial x_2}(x(t), p(t), u(t))$$

$$= -p_1(t) = cte \Rightarrow p_2 \text{ affine}$$

iii) maximisation du hamiltonien:

p.p.  $t \in [0, t_f]$ ,  $u(t)$  maximise la fonction

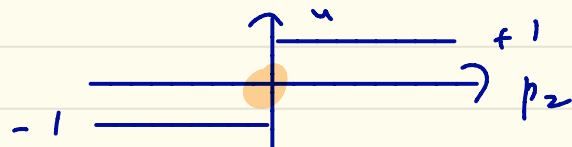
$$v \mapsto H(x(t), p(t), v) \text{ pour } v \in U;$$

$$\text{i.e., } H = p^0 + p_1 x_2 + p_2 \cdot u, \quad U = [-1, 1];$$

on, fixe  $x$  et  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et considérons le problème:

$$\begin{cases} p^0 + p_1 x_2 + p_2 \cdot v \rightarrow \max \\ |v| \leq 1 \end{cases}$$

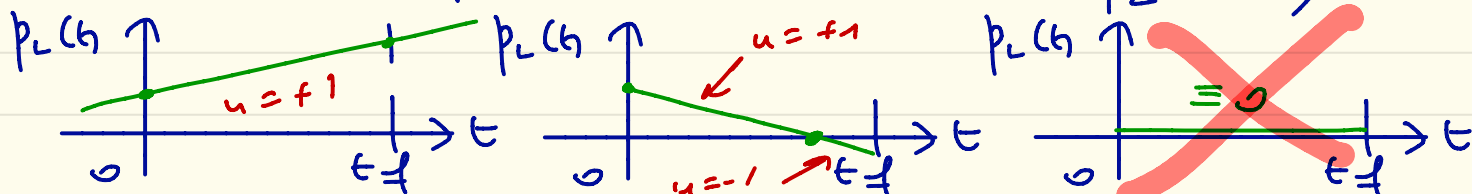
$$\text{Si } p_2 \neq 0, \quad \begin{cases} u = +1 \text{ si } p_2 > 0 \\ u = -1 \text{ si } p_2 < 0 \end{cases} \text{ i.e. } u = \frac{p_2}{|p_2|}$$



$$= \text{sgn}(p_2)$$

Si  $p_2 = 0$ , tout  $u \in [-1, 1] = U$  est solution.

On i.e.,  $p_2$  est affine et s'annule donc sur  $[0, t_f]$  soit 0 fois, soit 1 fois, soit un nombre infini de fois (cas  $p_2 \equiv 0$ ):



Montrons, par l'absurde, que le cas  $p_2 \equiv 0$  est impossible: si  $p_2 \equiv 0$ ,  $\dot{p}_2 \equiv 0 = -p_1$

$$\Rightarrow (\forall t \in [0, t_f]) : p(t) = (0, 0) ;$$

$$\text{or, } H = p^0 + p_1 x_2 + p_2 u$$

$$\Rightarrow H(x(t), p(t), u(t)) = p^0, \quad t \in [0, t_f]$$

mais, comme  $t_f$  est libre, on sait par ailleurs que  $H(x(t_f), p(t_f), u(t_f)) = 0$

$$\Rightarrow p^0 = 0$$

$\Rightarrow (p^0, p) = (0, 0)$  : interdit par le PMP.

Le contrôle vaut donc  $+1$  ou  $-1$  (contrôle "bang-bang") avec au plus une commutation. Et on peut répondre, en admettant que le problème possède une solution (c'est bien le cas — cf. propriétés de convexité-compacité du problème).

On deux cas :

— soit  $u = +1$  puis  $-1$

— soit  $u = -1$  puis  $+1$

(considérant que ces deux cas incluent les sous-cas  $u = +1$  partout /  $-1$  partout).

Supposons par exemple que  $u$  vaut d'abord  $(-1)$  ; alors :

$$\ddot{q}(t) = u(t) = -1$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) = -t + \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow q(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \dot{q}_0 \cdot t + q_0$$

$$= -\frac{1}{2}(-t + \dot{q}_0)^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$$

$$\Rightarrow q(t) = -\frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$$

$$\Rightarrow q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 = cte$$

Id: - la courbe paramétrée  $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$   
 $= (x_1(t), x_2(t))$

est incluse dans une parabole

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = cte$$

$$- \text{ la } q(t) \quad x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) = q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t)$$

est une "intégrale première"

$$(cf. \frac{d}{dt} [x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)])$$

$$= \dot{x}_1(t) + x_2(t) \cdot \dot{x}_2(t)$$

$$= x_2(t) + x_2(t) \cdot u(t)$$

$$= x_2(t) (1 + \underbrace{u(t)}_{=-1}) = 0$$

Supposons qu'il y a une commutation en  $0 < t_1 < T$   
 auquel cas on a :

$$\ddot{q}(t) = u(t) = \pm 1, \quad t \in [t_1, t_f]$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) = (t - t_1) + \dot{q}_1 \quad (\text{on note } (q(t_1), \dot{q}(t_1)) = (q_1, \dot{q}_1))$$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{1}{2} (t - t_1)^2 + \dot{q}_1 (t - t_1) + q_1$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{((t - t_1) + \dot{q}_1)}_{\dot{q}}^2 - \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + q_1$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + q_1$$

$$\Rightarrow q(t) - \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) = q_1 - \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 = \text{cte}, \text{ i.e. :}$$

- la courbe paramétrée  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$

est incluse dans un arc de parabole

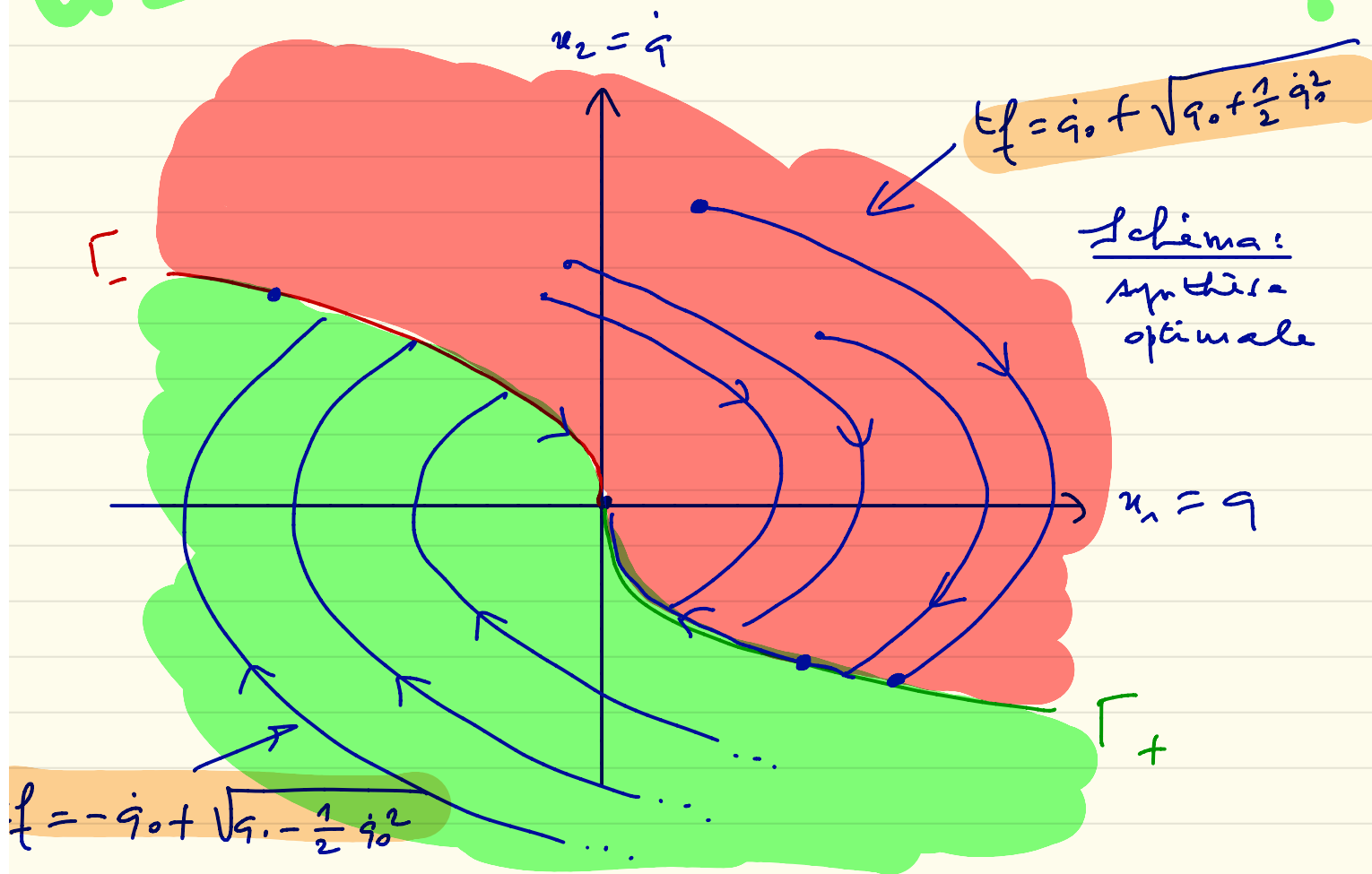
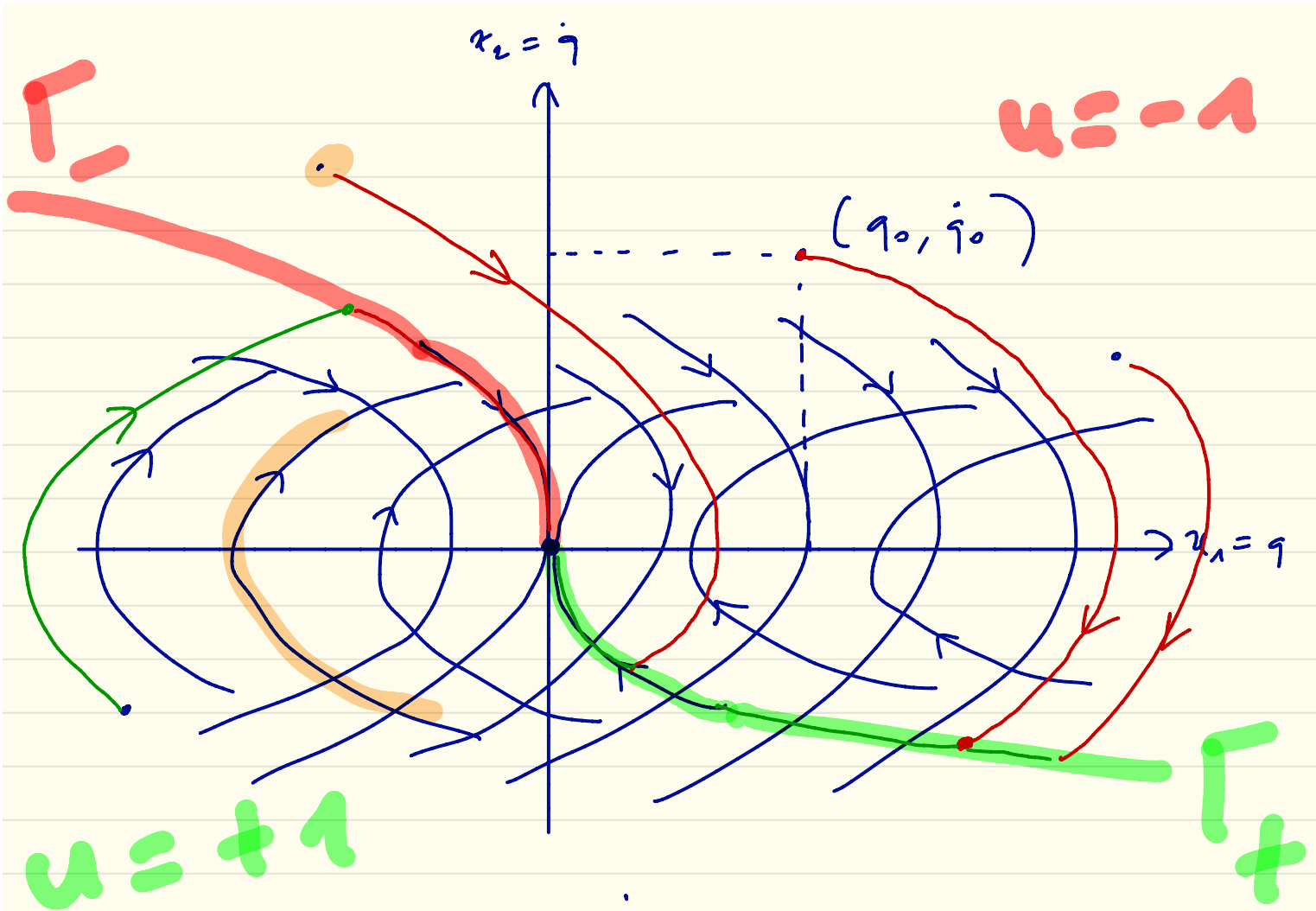
$$x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 = \text{cte};$$

- la q'té  $x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 = q - \frac{1}{2} \dot{q}^2$  est une "intégrale première".

Remarques:

- le long d'un arc  $q + \frac{1}{2} \dot{q}^2 = \text{cte}$  ( $u = -1$ ),  
 $\dot{q} = -t + \dots$  de sorte que  $\dot{q} \rightarrow 0$ ;

- à contrario,  $\dot{q} \nearrow$  le long d'un arc  
 $q - \frac{1}{2} \dot{q}^2 = \text{cte}$  ( $u = +1$ );





On constate géométriquement que par tout pt du plan passe une et une seule courbe formée de deux arcs  $-1/+1$  (ou  $+1/-1$ ) qui connecte ce pt à l'origine: l'existence étant admise, on en déduit que cette trajectoire est la solution en temps min (on a unicité).

Remarque: on a établi la synthèse ("feedback", qui donne le contrôle  $u$  comme fonction de l'état  $x$ ), bien plus fort que  $u = u(x, p)$  donné par la maximisation du  $P(x, p, \dots)$ : si  $x = (q, \dot{q})$  est au dessus de  $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$  (ou sur  $\Gamma_-$ ), le contrôle vaut  $-1$ , sinon le contrôle vaut  $+1$ .

Calculons finalement la "valeur" du problème (= valeur du coût à l'optimum), i.e. le temps min en fonction des conditions initiales. Supposons par exemple qu'on est dans le cas  $u = -1$  puis  $+1$ , et calculons  $t_1$ , le temps de commutation. Cet instant vérifie la relation suivante:

$$q(t_1) = + \frac{1}{2} (\dot{q}(t_1))^2 \quad (\text{cf. } (q, \dot{q})(t_1) \in \Gamma_+ \text{ et } \Gamma_+ \text{ a pour équ.}$$

et on a

$$q = \frac{1}{2} \dot{q}^2, \quad \dot{q} \leq 0)$$

$$q(t_1) + \frac{1}{2} (\dot{q}(t_1))^2 = a t_1 = q_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2$$

$$\Rightarrow (\dot{q}(t_1))^2 = q_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2$$

Comme  $\dot{q}(t_1) = -t_1 + \dot{q}_0$ , on a

$$(-t_1 + \dot{q}_0)^2 = \dot{q}_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2$$

On doit avoir  $\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 \geq 0$  (car égal à un carré ! ) ce qui correspond bien au cas considéré, auquel cas :

$$t_1 = \dot{q}_0 \pm \sqrt{\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2}$$

$$\Rightarrow t_1 = \dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2} \quad (\text{cf. } t_1 \geq 0)$$

On obtient finalement  $t_f$  en écrivant que  $\dot{q}(t_f) = 0$ , sachant que sur  $[t_1, t_f]$ ,

$$\dot{q}(t) = (t - t_1) + \dot{q}_1$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{q}(t_f) = t_f - t_1 + \dot{q}_1$$

$$\Rightarrow t_f = t_1 - \dot{q}_1$$

$$\text{et } \dot{q}_1 = \dot{q}(t_1) = -t_1 + \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow t_f = 2t_1 - \dot{q}_0$$

$$= \dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2}.$$

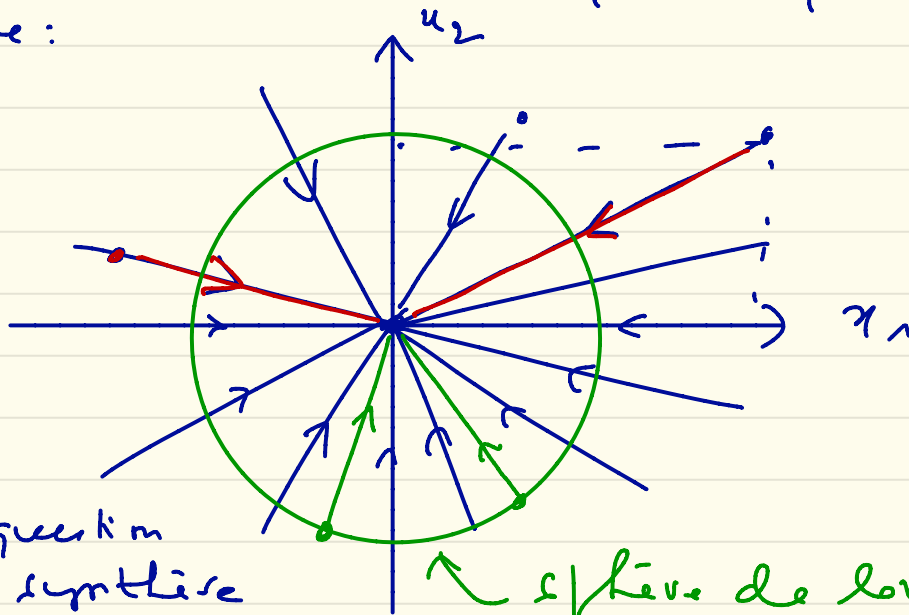
On vérifie de même que, dans le cas symétrique,

$$t_f = -\dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0 - \frac{1}{2} \dot{q}_0^2}.$$

Remarques: i) cette fonction valeur,  $t_f = t_f(x_0)$   
 $= t_f(x_0, y_0)$

n'est pas de classe  $C^1$ ; elle vérifie une E.D. (appelée équation de Hamilton - Bellman - Jacobi) dont elle est solution en un sens faible (notion de solution de "viscosité").

ii) la synthèse obtenue, qui indique comment rejoindre en temps min l'origine partant d'un pt arbitraire du plan, est  $\tilde{\alpha}$  comparable au cas élémentaire du plus court chemin **au sens de la longueur** entre ce même pt du plan et l'origine:



→ Même question pour la synthèse temps min précédente: si  $t_f > 0$ , quelle est la **sphère** de rayon  $t_f$ , ie l'ensemble des pts à distance (= temps min)  $t_f$  de l'origine?

↖ sphère de longueur  $l$   
= ens. des pts du plan à longueur / distance minimale  $l$  de l'origine