

De la géométrie à la pelle (et réciproquement)

Jean-Baptiste Caillau

Université Côte d'Azur, CNRS, Inria, LJAD

Lycée Massena, Juin 2025



UNIVERSITÉ
CÔTE D'AZUR



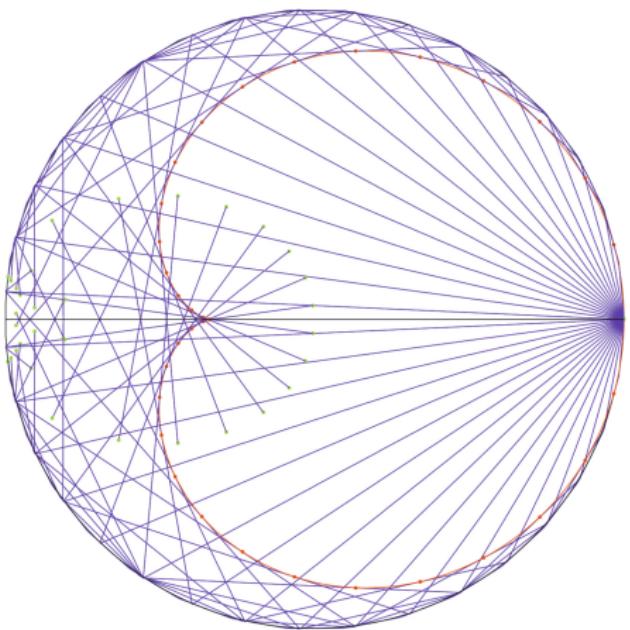
Inria
INVENTORS FOR THE DIGITAL WORLD

Lecture du bol de café



Source : wikipedia

Catacaustique sur un disque à deux faces

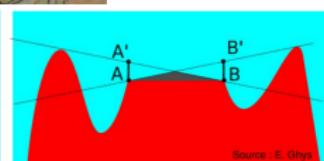
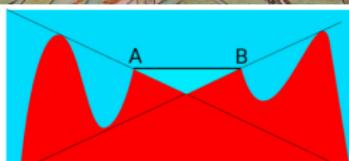
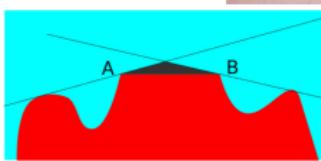
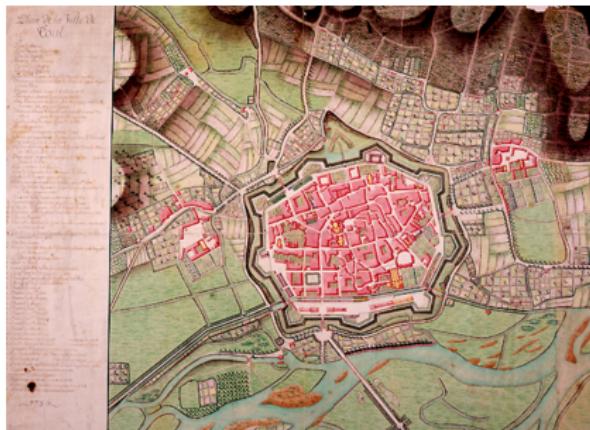


Les quatre travaux de Gaspard



- ▶ Gaspard Monge, 1746–1818 (natif de Beaune, Bourgogne)
- ▶ Autres scientifiques de son temps : L. Euler (1707-1783), C. F. Gauss (1777-1855)
- ▶ Enseignant (dessinateur, assistant préparateur) à l'école du Génie de Mézières
- ▶ Engagement politique pendant la Révolution française
- ▶ Fondateur de l'École Polytechnique (1794)
- ▶ Engagement politique auprès de Napoléon Bonaparte (campagne d'Égypte)
- ▶ Disgrâce à la Restauration
- ▶ Exemples de travaux : "Machines diverses", "Sur le froid", "Calcul des chances", "Machine à remonter les bateaux", "Moulins à sucre", "Théorie des torrents et des rivières et moyen d'empêcher leurs ravages"

1. Défillement d'une place forte



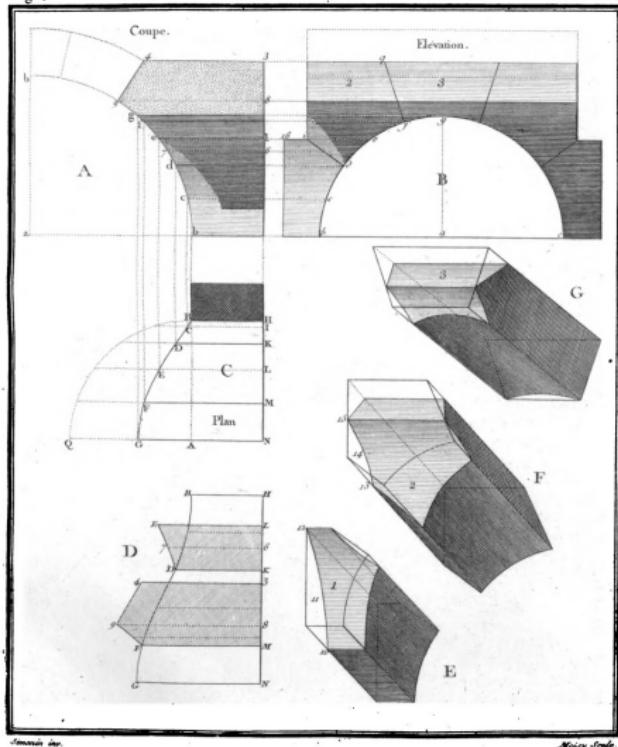
2. Coupe des pierres

LUNETTE DROITE.

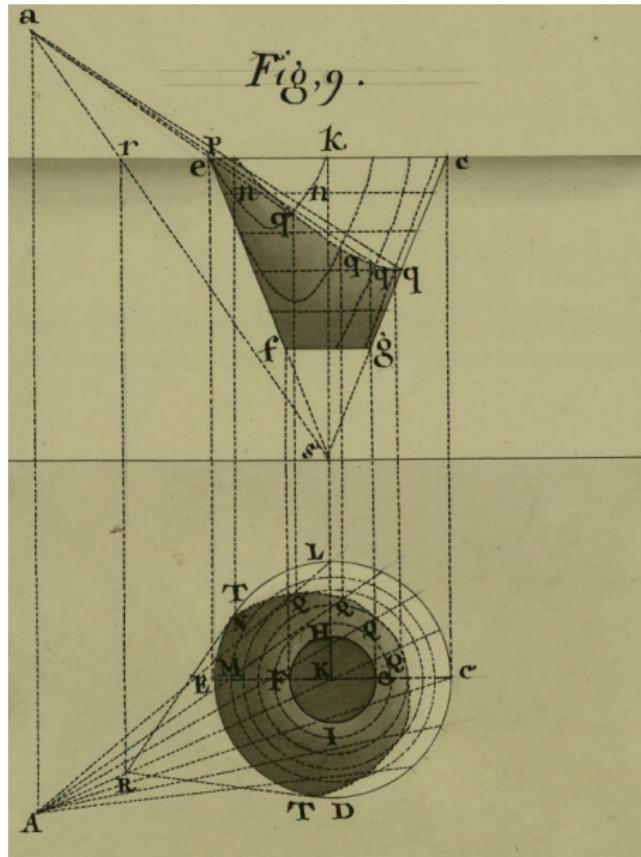
ou Berceau rachetant d'équerre un autre Berceau

Page 42

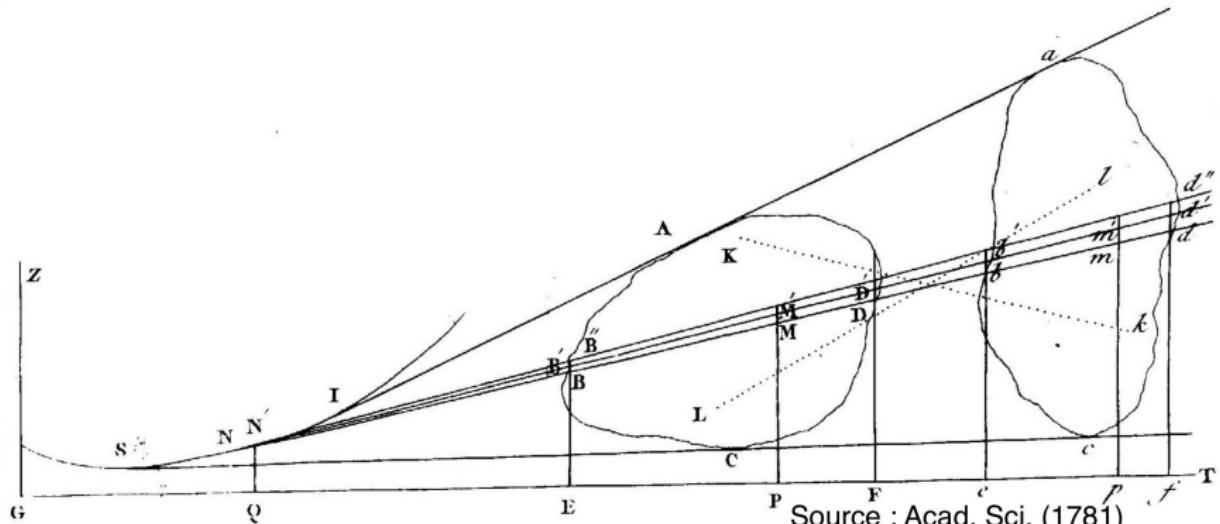
Planche XXVI



3. Ombres portées



4. Déblais et remblais



^P Source : Acad. Sci. (1781)

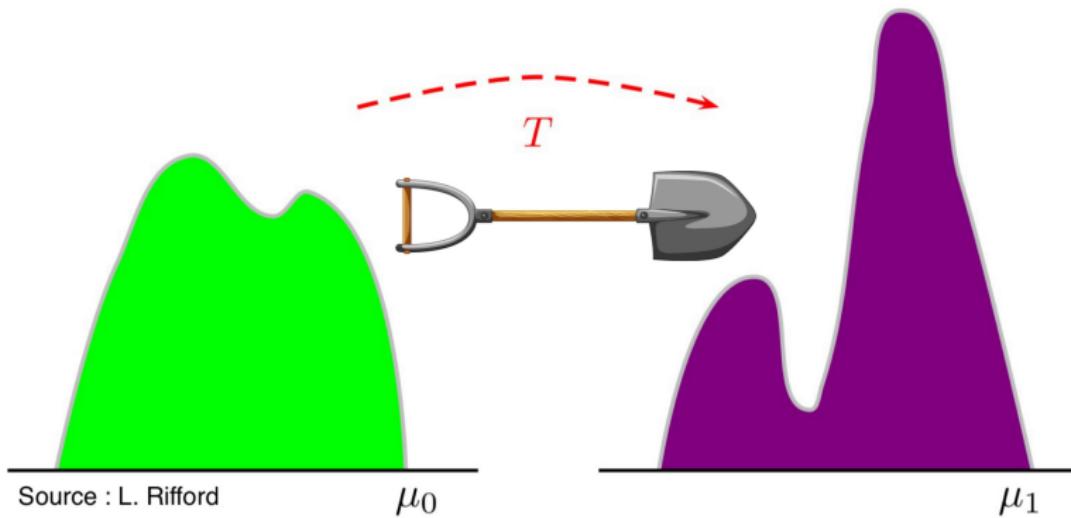
4. Déblais et remblais

*MÉMORIE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.
Par M. MONGE.*

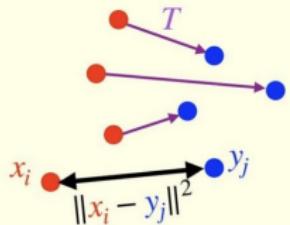
LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

Le prix du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'en suit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total fera un *minimum*.

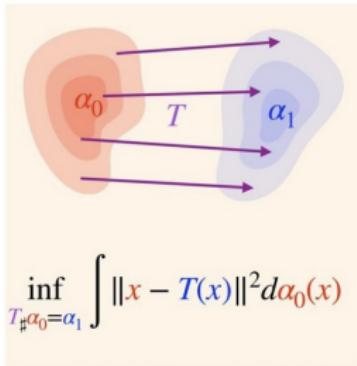
Transport optimal



Transport optimal



$$W_2(\alpha_0, \alpha_1)^2 := \min_{T} \sum_{i=1}^n \|x_i - y_{T(i)}\|^2 = \inf_{\substack{T \\ T_* \# \alpha_0 = \alpha_1}} \int \|x - T(x)\|^2 d\alpha_0(x)$$



Monge 1784



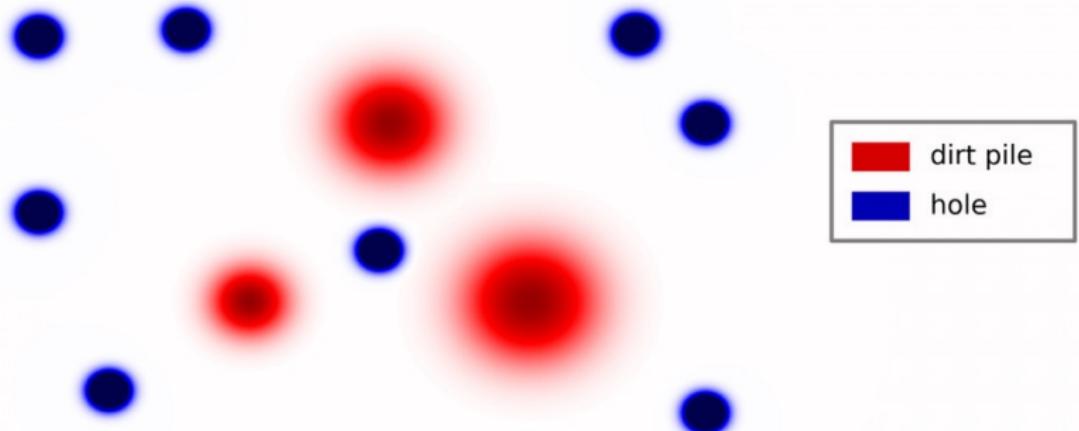
Kantorovich 1942

General measures:

Kantorovitch relaxation
or
Approximation by discrete measures

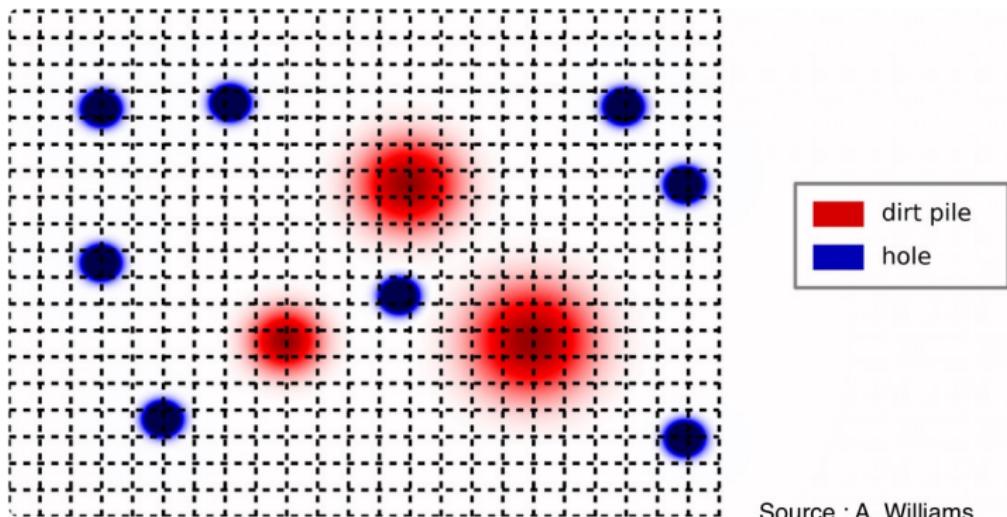
Source : G. Peyré

Exemple



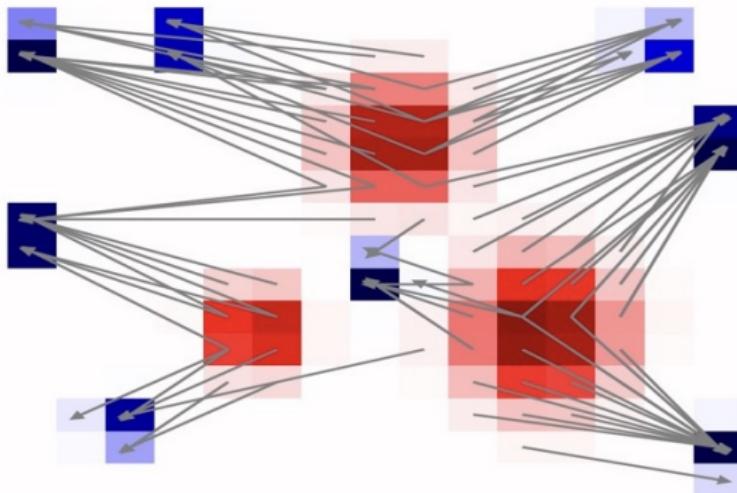
Source : A. Williams

Exemple



Source : A. Williams

Exemple

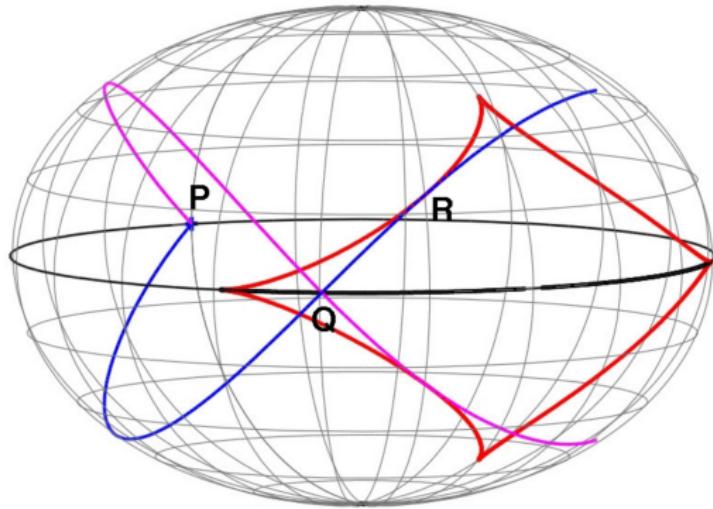


Source : A. Williams

Avec de la courbure



Avec plus de courbure



- ▶ Existence ?
- ▶ Unicité ?
- ▶ Régularité ?

On the Ma–Trudinger–Wang curvature on surfaces

Alessio Figalli · Ludovic Rifford · Cédric Villani

Received: 6 July 2009 / Accepted: 13 January 2010 / Published online: 9 February 2010
© Springer-Verlag 2010

Abstract We investigate the properties of the Ma–Trudinger–Wang nonlocal curvature tensor in the case of surfaces. In particular, we prove that a strict form of the Ma–Trudinger–Wang condition is stable under C^4 perturbation if the nonfocal domains are uniformly convex; and we present new examples of positively curved surfaces which do not satisfy the Ma–Trudinger–Wang condition. As a corollary of our results, optimal transport maps on a “sufficiently flat” ellipsoid are in general nonsmooth.

Obstruction à la continuité

6.2 Ellipsoids of revolution

Let (E_ε) be an ellipsoid of revolution (of parameter $\varepsilon > 0$) given in \mathbb{R}^3 by the equation

$$\frac{x^2}{\varepsilon^2} + y^2 + z^2 = 1. \quad (6.11)$$

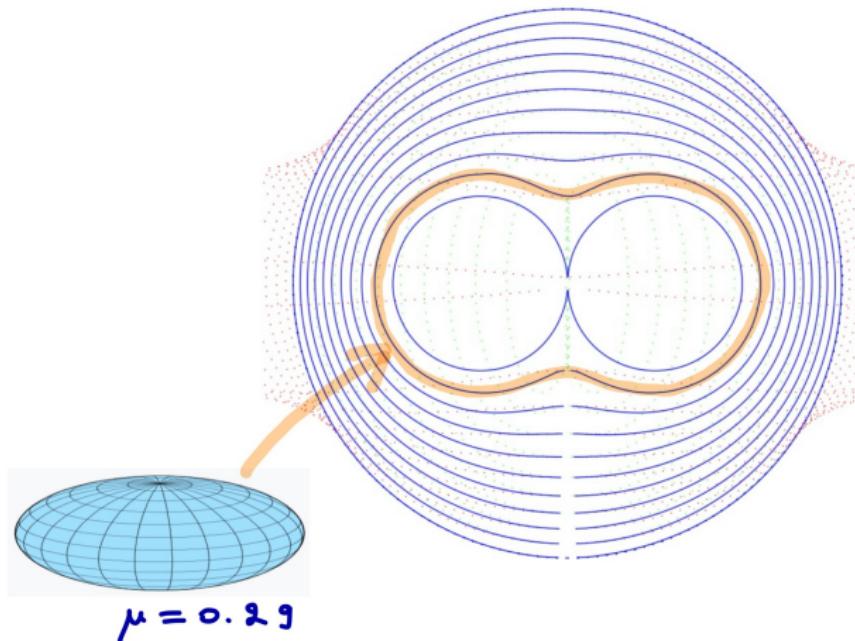
In the formalism of the previous section, this is the surface defined by rotating the graph of the function $F_\varepsilon : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}_+$ defined by

$$F_\varepsilon(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}. \quad (6.12)$$



Ellipsoid (E_ε) with $\varepsilon = 0.29$

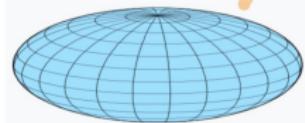
De la terre (presque) ronde à la terre plate



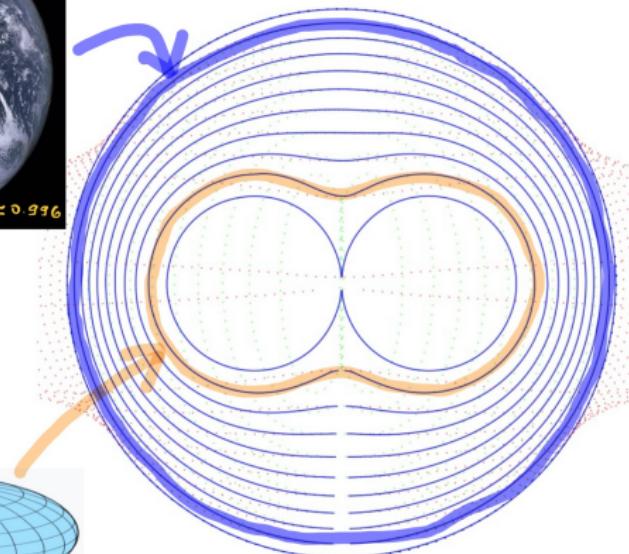
De la terre (presque) ronde à la terre plate



$$\mu = 0.996$$



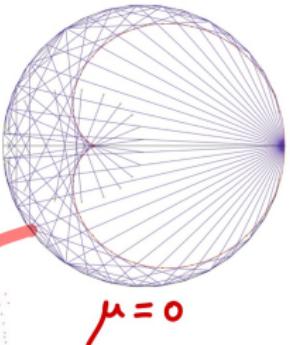
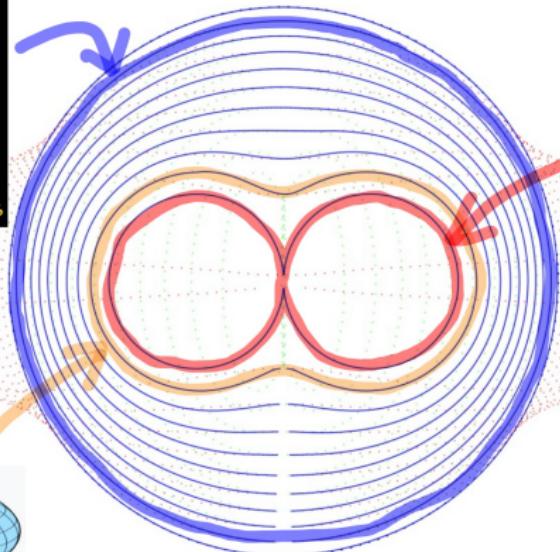
$$\mu = 0.29$$



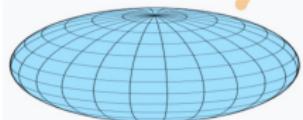
De la terre (presque) ronde à la terre plate



$$\mu = 0.996$$

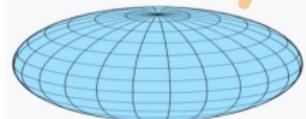


$$\mu = 0$$

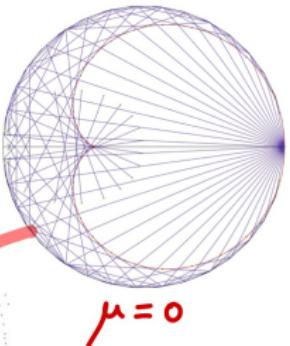
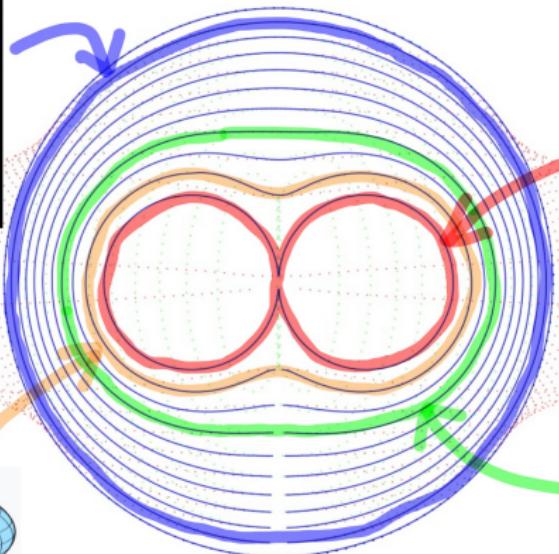


$$\mu = 0.29$$

De la terre (presque) ronde à la terre plate



$\mu = 0.29$



$\mu = 0$



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Differential Geometry

Convexity of injectivity domains on the ellipsoid of revolution: The oblate case

Convexité des domaines d'injectivité sur l'ellipsoïde de révolution : le cas oblat

Bernard Bonnard^a, Jean-Baptiste Caillau^a, Ludovic Rifford^b

^a Institut de Mathématiques, Université de Bourgogne & CNRS, 9, avenue Savary, 21078 Dijon, France

^b Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice & CNRS, parc Valrose, 06108 Nice, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 July 2010

Accepted after revision 27 October 2010

Available online 17 November 2010

Presented by Gilles Lebeau

ABSTRACT

We characterize the convexity properties of the tangent injectivity domain on the ellipsoid of revolution in the oblate case.

© 2010 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

RÉSUMÉ

On caractérise les propriétés de convexité du domaine d'injectivité sur un ellipsoïde de révolution oblat.

© 2010 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Differential Geometry

Convexity of injectivity domains on the ellipsoid of revolution: The oblate case

Convexité des domaines d'injectivité sur l'ellipsoïde de révolution : le cas oblat

Bernard Bonnard^a, Jean-Baptiste Caillau^a, Ludovic Rifford^b

^a Institut de Mathématiques, Université de Bourgogne & CNRS, 9, avenue Savary, 21078 Dijon, France

^b Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice & CNRS, parc Valrose, 06108 Nice, France

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$$

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 July 2010

Accepted after revision 27 October 2010

Available online 17 November 2010

Presented by Gilles Lebeau

ABSTRACT

We characterize the convexity properties of the tangent injectivity domain on the ellipsoid of revolution in the oblate case.

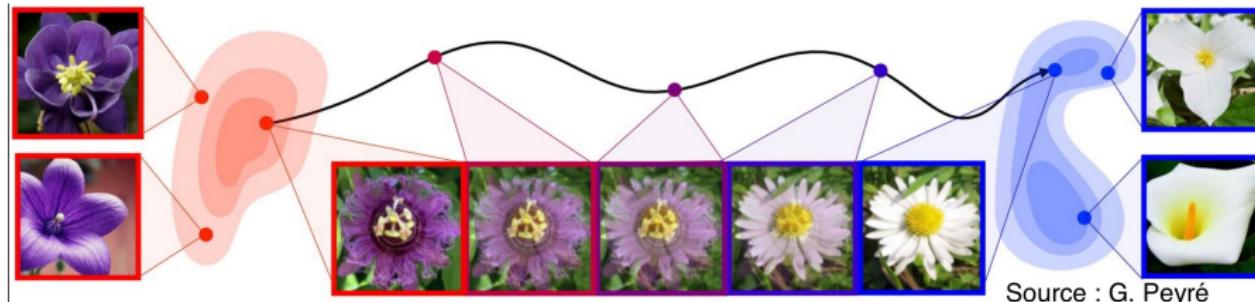
© 2010 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

RÉSUMÉ

On caractérise les propriétés de convexité du domaine d'injectivité sur un ellipsoïde de révolution oblat.

© 2010 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

D'une fleur à l'autre... continûment



Source : G. Peyré

Disparition (continue)

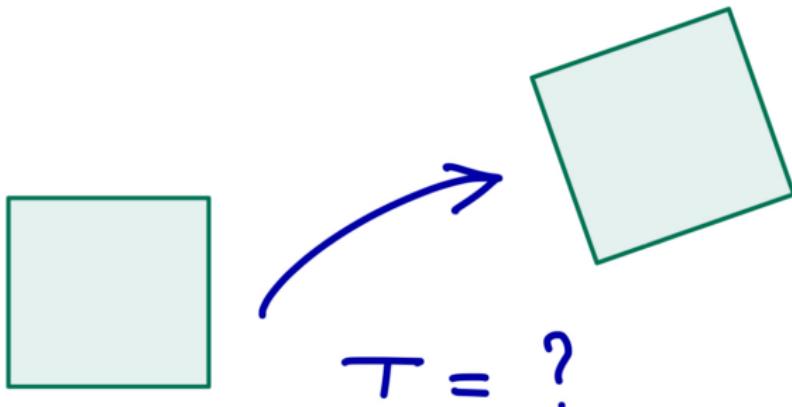


Source : Y. Brenier

Conclusion

"À partir d'applications très simples en apparence, il fait naître l'idée de théories abstraites dont on n'avoit pas encore le besoin [et dirige] vers les théories [les] travaux des géomètres, et leur [ouvre] une carrière nouvelle." Condorcet (1743–1794)

"Il n'y a pas des problèmes qu'on se pose, il y a des problèmes qui se posent. Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus". H. Poincaré (1854–1912)



Références

- ▶ Brenier, Y.; Viéville, T. *La brouette de Monge ou le transport optimal.* Images des Mathématiques, CNRS, 2010
- ▶ Ghys, E. *Gaspard Monge, mathématicien de la Révolution.* Images des Mathématiques, CNRS, 2010
- ▶ Peyré, G. Homepage

Vers la recherche

Titre du diplôme	Niveau	Crédits ECTS	Grade	Depuis
Diplôme national de licence ¹⁷	Bac + 3	180	Licence	rentrée 2003
Diplôme national de master ¹⁸	Bac + 5	300	Master	rentrée 2003
Diplôme national de docteur ¹⁶	Bac + 8		Docteur	rentrée 2006

- ▶ Maître de conférences / Chargé de recherche
- ▶ HDR → Professeur / Directeur de recherche