

Pierre-André Cornillon  
Eric Matzner-Løber

# Régression

## Théorie et applications

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}$$

$$S_1 = \sqrt{S_1^2}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1}$$



$$S_1 = \sqrt{S_1^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sqrt{S_2^2}$$

 Springer

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} \quad \text{et} \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} X_j}{n_2}$$

# Régression

## Théorie et applications

**Springer**

*Paris*

*Berlin*

*Heidelberg*

*New York*

*Hong Kong*

*Londres*

*Milan*

*Tokyo*

Pierre-André Cornillon  
Éric Matzner-Løber

# Régression

## Théorie et applications



**Pierre-André Cornillon**

Laboratoire de Statistique - UFR de Sciences sociales  
Université Rennes 2  
35043 Rennes Cedex

**Éric Matzner-Løber**

Laboratoire de Statistique - UFR de Sciences sociales  
Université Rennes 2  
35043 Rennes Cedex

ISBN-10 : 2-287-39692-6 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

ISBN-13 : 978-2-287-39692-2 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, Paris, 2007

Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement de droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas, il incombe à l'usager de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

SPIN : 11855965

*Maquette de couverture : Jean-François Montmarché*

*Image de couverture : © Gaëtan de Séguin des Hons – « Il prend sa place » (détail).*

**Collection  
Statistiques et probabilités appliquées  
dirigée par Yadolah Dodge**

Professeur Honoraire  
Université de Neuchâtel  
2002 Neuchâtel - Suisse

**Comité éditorial :**

**Christian Genest**

Département de Mathématiques  
et de statistique  
Université de Laval  
Québec GIK 7P4  
Canada

**Marc Hallin**

Université libre de Bruxelles  
Campus de la Plaine CP 210  
1050 Bruxelles  
Belgique

**Ludovic Lebart**

École Nationale Supérieure  
des Télécommunications  
46, rue Barrault  
75634 Paris Cedex 13  
France

**Stephan Morgenthaler**

École Polytechnique Fédérale  
de Lausanne  
Département des Mathématiques  
1015 Lausanne  
Suisse

**Gilbert Saporta**

Conservatoire national  
des arts et métiers  
292, rue Saint-Martin  
75141 Paris Cedex 3  
France

**Dans la même collection :**

- *Statistique. La théorie et ses applications*,  
Michel Lejeune, avril 2004
- *Le choix Bayésien. Principes et pratique*,  
Christian P. Robert, novembre 2005
- *Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique*,  
Eva Cantoni, Philippe Huber et Elvezio Ronchetti, octobre 2006

## REMERCIEMENTS

Cet ouvrage, s'appuyant sur des exemples, n'existerait pas sans ceux-ci. A l'heure actuelle, s'il est très facile de traiter des données, il est beaucoup plus difficile de les proposer comme exemple pour une diffusion. Les données sont devenues confidentielles et les variables mesurées, jusqu'à leur intitulé même, représentent une avancée stratégique vis-à-vis des concurrents. Il est ainsi presque impensable de traiter des données issues du monde industriel ou du marketing, bien que les exemples y soient nombreux. Cependant, trois organismes, *via* leur directeur, ont pris l'initiative de permettre la diffusion de leurs données. Nous avons donc un très grand plaisir à remercier Magali Coron (Association Air Breizh), Bernard Mallet (CIRAD forêt) et Jean-Noël Marien (UR2PI). Nous souhaitons bien sûr associer tous les membres de l'unité de recherche pour la productivité des plantations industrielles (UR2PI) passés ou présents. Les membres de cet organisme de recherche congolais gèrent de nombreux essais tant génétiques que sylvicoles et nous renvoyons toutes les personnes intéressées auprès de cet organisme ou auprès du CIRAD, département forêt (<http://www.cirad.fr>), qui est un des membres fondateurs et un participant actif au sein de l'UR2PI.

Par ailleurs, la version actuelle de cet ouvrage résulte de l'action à des degrés divers de nombreuses personnes. Nous souhaitons donc remercier tous nos collègues de l'université Rennes 2, tous les étudiants de la filière MASS de Rennes 2 et ceux de l'ENSAI, qui ont permis l'élaboration de ce livre à partir de notes de cours.

Cependant, le livre ne serait pas ce qu'il est sans la patience et la minutie d'Arnaud Guyader. Entre deux énervements à peine contenus sur la qualité du manuscrit, il a débusqué d'innombrables erreurs tant sur la forme que sur le fond. Nous n'oubliions pas les relecteurs exigeants que sont Christophe Abraham et Frank Rimek qui nous ont toujours poussé vers une plus grande clarté théorique ou pratique et dont les remarques ont toujours été pertinentes. Enfin, Nathalie Chèze, Julie Josse et Vincent Lefieux ont permis par leurs conseils avisés d'améliorer le document au moment même où l'on croyait arriver au but. Bien évidemment, après ces relectures successives, nous avons encore modifié quelques phrases et donc sûrement rajouté quelques fautes.

Nos remerciements vont également à Nathalie Huilleret de Springer-Verlag (Paris) et Yadolah Dodge, directeur de la collection, pour la confiance qu'ils nous ont accordée.

## AVANT-PROPOS

L'objectif de cet ouvrage est de rendre accessible au plus grand nombre une des méthodes les plus utilisées de la statistique : la régression. Nous souhaitons aborder de manière simultanée les fondements théoriques et les questions inévitables que l'on se pose lorsque l'on modélise des phénomènes réels. En effet, comme pour toute méthode statistique, il est nécessaire de comprendre précisément la méthode et de savoir la mettre en œuvre. Si ces deux objectifs sont atteints, il sera alors aisément de transposer ces acquis à d'autres méthodes, moyennant un investissement modéré, tant théorique que pratique. Les grandes étapes - modélisation, estimation, choix de variables, examen de la validité du modèle choisi - restent les mêmes d'une méthode à l'autre. Cet aspect apparaît nettement dans le dernier chapitre consacré à certaines extensions de la régression linéaire. Ces extensions ont chacune un caractère spécifique, mais les différentes étapes vues en régression se retrouvent dans chaque méthode.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des filières scientifiques, élèves ingénieurs, chercheurs dans les domaines appliqués (économie, biologie, sciences de la vie...) et plus généralement à tous les chercheurs souhaitant modéliser des relations de causalité. Il utilise aussi les notions d'intervalle de confiance, de test et les lois de probabilités classiques. Pour les lecteurs n'ayant aucune notion de ces concepts, le livre de Lejeune (2004) dans la même collection pourra constituer une aide précieuse pour certains paragraphes. Cet ouvrage nécessite la connaissance des bases du calcul matriciel : définition d'une matrice, somme, produit, inverse, ainsi que valeurs propres et vecteurs propres pour le dernier chapitre. Des résultats classiques sont toutefois rappelés en annexes afin d'éviter de consulter trop souvent d'autres ouvrages.

Cet ouvrage souhaite concilier les fondements théoriques nécessaires à la compréhension et à la pratique de la méthode. Nous avons donc souhaité un livre avec toute la rigueur scientifique possible mais dont le contenu et les idées ne soient pas noyés dans les démonstrations et les lignes de calculs. Pour cela, seules quelques démonstrations, que nous pensons importantes, sont conservées dans le corps du texte. Les autres résultats sont démontrés à titre d'exercice. Des exercices, de difficulté variable, sont proposés en fin de chapitre. La présence de † indique des exercices plus difficiles que la majorité des exercices proposés. Des questions de cours sous la forme de QCM sont aussi proposées afin d'aider aux révisions du chapitre. Les corrections de tous les exercices sont fournies en annexe A. Une partie « notes » présente en fin de chapitre des discussions ou extensions, cette partie pourra être ignorée lors d'une première lecture.

Afin que les connaissances acquises ne restent pas théoriques, nous avons intégré des exemples traités avec le logiciel libre GNU-R (<http://www.r-project.org>). Afin que les lecteurs puissent se familiariser avec le logiciel et retrouver les mêmes résultats que ceux donnés dans le livre, les commandes sont rapportées dans le livre. Nous encourageons donc les lecteurs à utiliser les données (qui se trouvent sur les pages web des auteurs) et les codes afin de s'approprier la théorie mais aussi la pratique.

Au niveau de l'étude des chapitres, le premier de ceux-ci, consacré à la régression simple, est traité afin de présenter de nombreux concepts et idées. Il est donc important de le lire afin de se familiariser avec les problèmes et les solutions envisagés ainsi qu'avec l'utilité des hypothèses de la régression.

Le second chapitre présente l'estimation et la géométrie de la méthode des moindres carrés. Il est donc fondamental.

Le troisième chapitre aborde la partie inférentielle. Il représente la partie la plus technique et la plus calculatoire de cet ouvrage. En première lecture, il pourra apparaître comme fastidieux, mais la lecture et la compréhension de la géométrie des tests entre modèles emboîtés semblent nécessaires. Le calcul des lois pour le praticien peut être omis.

Le quatrième chapitre présente très peu de calculs. Il permet de vérifier que le modèle, et donc les conclusions que l'on peut en tirer, sont justes. Cette partie est donc fondamentale pour le praticien. De plus, les idées sous-jacentes sont utilisées dans de très nombreuses méthodes statistiques. La lecture de ce chapitre est indispensable.

Le cinquième chapitre présente l'introduction de variables explicatives qualitatives dans le modèle de régression, soit en interaction avec une variable quantitative (analyse de la covariance), soit seules (analyse de la variance). La présentation oublie volontairement les formules classiques des estimateurs à base de somme et de moyenne par cellule. Nous nous focalisons sur les problèmes de paramètres et de contraintes, problèmes qui amènent souvent une question naturelle à la vue des listings d'un logiciel : « Tiens, il manque une estimation d'un paramètre ». Nous avons donc souhaité répondre simplement à cette question inhérente à la prise en compte de variables qualitatives.

Le sixième chapitre présente le choix de variables (ou de modèles). Nous présentons le problème *via* l'analyse d'un exemple à 3 variables. A partir des conclusions tirées de cet exemple, nous choisissons un critère de sélection (erreur quadratique moyenne ou EQM) et nous proposons des estimateurs cohérents. Ensuite, nous axons la présentation sur l'utilisation des critères classiques et des algorithmes de choix de modèles présents dans tous les logiciels et nous comparons ces critères. Enfin, nous discutons des problèmes engendrés par cette utilisation classique. Ce chapitre est primordial pour comprendre la sélection de modèle et ses problèmes.

Le septième chapitre propose les premières extensions de la régression. Il s'agit principalement d'une présentation succincte de certaines méthodes utilisées en moindres carrés généralisés. Elle présente aussi une approche de la régression par la méthode des noyaux.

Enfin, le huitième chapitre présente des extensions classiques (ridge, régression sur composantes principales) ou plus actuelles (lasso ou PLS) de la régression. D'un point de vue théorique, elles permettent d'approfondir les problèmes de contraintes sur le vecteur de coefficients. Chaque méthode est présentée d'un point de vue pratique de manière à permettre une prise en main rapide de la méthode. Elles sont illustrées sur le même exemple de spectroscopie, domaine d'application désormais très classique pour ces méthodes.

# Table des matières

<b>1 La régression linéaire simple</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.1.1 Un exemple : la pollution de l'air . . . . .	1
1.1.2 Un deuxième exemple : la hauteur des arbres . . . . .	3
1.2 Modélisation mathématique . . . . .	5
1.2.1 Choix du critère de qualité et distance à la droite . . . . .	5
1.2.2 Choix des fonctions à utiliser . . . . .	7
1.3 Modélisation statistique . . . . .	9
1.4 Estimateurs des moindres carrés . . . . .	10
1.4.1 Calcul des estimateurs de $\beta_j$ , quelques propriétés . . . . .	10
1.4.2 Résidus et variance résiduelle . . . . .	13
1.4.3 Prévision . . . . .	14
1.5 Interprétations géométriques . . . . .	15
1.5.1 Représentation des individus . . . . .	15
1.5.2 Représentation des variables . . . . .	15
1.5.3 Le coefficient de détermination $R^2$ . . . . .	16
1.6 Inférence statistique . . . . .	17
1.7 Exemples . . . . .	21
1.7.1 La concentration en ozone . . . . .	21
1.7.2 La hauteur des eucalyptus . . . . .	26
1.8 Exercices . . . . .	29
1.9 Notes : estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	31
<b>2 La régression linéaire multiple</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Modélisation . . . . .	34
2.3 Estimateurs des moindres carrés . . . . .	38
2.3.1 Calcul de $\hat{\beta}$ . . . . .	38
2.3.2 Interprétation . . . . .	41
2.3.3 Quelques propriétés statistiques . . . . .	41
2.3.4 Résidus et variance résiduelle . . . . .	42
2.3.5 Prévision . . . . .	44
2.4 Interprétation géométrique . . . . .	44

2.5	Exemples . . . . .	46
2.5.1	La concentration en ozone . . . . .	46
2.5.2	La hauteur des eucalyptus . . . . .	48
2.6	Exercices . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Inférence dans le modèle gaussien</b>	<b>53</b>
3.1	Estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	53
3.2	Nouvelles propriétés statistiques . . . . .	54
3.3	Intervalles et régions de confiance . . . . .	56
3.4	Exemple . . . . .	57
3.5	Prévision . . . . .	59
3.6	Les tests d'hypothèses . . . . .	60
3.6.1	Introduction . . . . .	60
3.6.2	Test entre modèles emboîtés . . . . .	61
3.7	Exemples . . . . .	65
3.7.1	La concentration en ozone . . . . .	65
3.7.2	La hauteur des eucalyptus . . . . .	66
3.8	Exercices . . . . .	69
3.9	Notes . . . . .	71
3.9.1	Intervalle de confiance : bootstrap . . . . .	71
3.9.2	Test de Fisher pour une hypothèse linéaire quelconque . . . . .	74
3.9.3	Propriétés asymptotiques . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Validation du modèle</b>	<b>81</b>
4.1	Analyse des résidus . . . . .	82
4.1.1	Les différents résidus . . . . .	82
4.1.2	Ajustement individuel au modèle, valeur aberrante . . . . .	84
4.1.3	Analyse de la normalité . . . . .	85
4.1.4	Analyse de l'homoscédasticité . . . . .	85
4.1.5	Analyse de la structure des résidus . . . . .	86
4.1.6	Conclusion . . . . .	89
4.2	Analyse de la matrice de projection . . . . .	89
4.3	Autres mesures diagnostiques . . . . .	91
4.4	Effet d'une variable explicative . . . . .	94
4.4.1	Ajustement au modèle . . . . .	94
4.4.2	Régression partielle : impact d'une variable . . . . .	95
4.4.3	Résidus partiels et résidus partiels augmentés . . . . .	96
4.5	Exemple : la concentration en ozone . . . . .	97
4.6	Exercices . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Régression sur variables qualitatives</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Analyse de la covariance . . . . .	105
5.2.1	Introduction : exemple des eucalyptus . . . . .	105
5.2.2	Modélisation du problème . . . . .	106

5.2.3	Hypothèse gaussienne . . . . .	108
5.2.4	Exemple : la concentration en ozone . . . . .	109
5.2.5	Exemple : la hauteur des eucalyptus . . . . .	114
5.3	Analyse de la variance à un facteur . . . . .	116
5.3.1	Introduction . . . . .	116
5.3.2	Modélisation du problème . . . . .	117
5.3.3	Estimation des paramètres . . . . .	119
5.3.4	Interprétation des contraintes . . . . .	120
5.3.5	Hypothèse gaussienne et test d'influence du facteur . . . . .	120
5.3.6	Exemple : la concentration en ozone . . . . .	122
5.3.7	Une décomposition directe de la variance . . . . .	127
5.4	Analyse de la variance à deux facteurs . . . . .	127
5.4.1	Introduction . . . . .	127
5.4.2	Modélisation du problème . . . . .	128
5.4.3	Estimation des paramètres . . . . .	130
5.4.4	Analyse graphique de l'interaction . . . . .	131
5.4.5	Hypothèse gaussienne et test de l'interaction . . . . .	133
5.4.6	Tableau d'analyse de la variance . . . . .	135
5.4.7	Conclusion . . . . .	136
5.4.8	Exemple : la concentration en ozone . . . . .	136
5.5	Exercices . . . . .	138
5.6	Notes : identifiabilité et contrastes . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Choix de variables</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction . . . . .	143
6.2	Choix incorrect de variables : conséquences . . . . .	145
6.2.1	Analyse du biais des estimateurs . . . . .	145
6.2.2	Analyse de la variance des estimateurs . . . . .	147
6.2.3	Erreur quadratique moyenne . . . . .	148
6.2.4	Erreur quadratique moyenne de prévision . . . . .	151
6.3	La sélection de variables en pratique . . . . .	153
6.3.1	Deux jeux de données ou beaucoup d'observations . . . . .	153
6.3.2	Un seul jeu de données et peu d'observations . . . . .	154
6.4	Critères classiques de choix de modèles . . . . .	155
6.4.1	Tests entre modèles emboîtés . . . . .	155
6.4.2	Le $R^2$ . . . . .	156
6.4.3	Le $R^2$ ajusté . . . . .	158
6.4.4	Le $C_p$ de Mallows . . . . .	159
6.4.5	Vraisemblance et pénalisation . . . . .	162
6.4.6	Lien entre les critères . . . . .	163
6.5	Procédure de sélection . . . . .	165
6.5.1	Recherche exhaustive . . . . .	165
6.5.2	Recherche pas à pas . . . . .	166
6.6	Exemple : la concentration en ozone . . . . .	168
6.7	Sélection et shrinkage . . . . .	170

6.8	Exercices . . . . .	173
6.9	Notes : extension du $C_p$ . . . . .	174
<b>7</b>	<b>Moindres carrés généralisés</b>	<b>179</b>
7.1	Introduction . . . . .	179
7.2	Moindres carrés pondérés . . . . .	180
7.3	Estimateur des moindres carrés généralisés . . . . .	183
7.3.1	Estimateur des MCG et optimalité . . . . .	184
7.3.2	Résidus et estimateur de $\sigma^2$ . . . . .	185
7.3.3	Hypothèse gaussienne . . . . .	186
7.3.4	Matrice $\Omega$ inconnue . . . . .	186
7.4	Extension des moindres carrés pondérés : la régression locale .	191
7.5	Exercices . . . . .	194
<b>8</b>	<b>Régression biaisée</b>	<b>197</b>
8.1	Régression ridge . . . . .	198
8.1.1	Équivalence avec une contrainte sur la norme des coefficients . . . . .	199
8.1.2	Propriétés statistiques de l'estimateur ridge $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$ . . . . .	200
8.1.3	La régression ridge en pratique . . . . .	202
8.1.4	Exemple des biscuits . . . . .	205
8.2	Lasso . . . . .	209
8.2.1	La méthode . . . . .	209
8.2.2	La régression lasso en pratique . . . . .	210
8.2.3	Exemple des biscuits . . . . .	211
8.3	Régression sur composantes principales . . . . .	213
8.3.1	Hypothèse $\mathcal{H}_1$ satisfaita : $ X'X  \neq 0$ . . . . .	214
8.3.2	Colinéarité parfaite : $ X'X  = 0$ . . . . .	215
8.3.3	Pratique de la régression sur composantes principales .	217
8.3.4	Exemple des biscuits . . . . .	221
8.4	Régression aux moindres carrés partiels (PLS) . . . . .	223
8.4.1	Algorithmes PLS et recherche des composantes . . . . .	225
8.4.2	Recherche de la taille $k$ . . . . .	226
8.4.3	Analyse de la qualité du modèle . . . . .	228
8.4.4	Exemple des biscuits . . . . .	230
8.5	Exercices . . . . .	231
<b>A</b>	<b>Corrections des exercices</b>	<b>239</b>
A.1	Régression linéaire simple . . . . .	239
A.2	Régression linéaire multiple . . . . .	243
A.3	Inférence dans le modèle gaussien . . . . .	248
A.4	Validation du modèle . . . . .	253
A.5	Régression sur variables qualitatives . . . . .	256
A.6	Choix de variables . . . . .	262
A.7	Moindres carrés généralisés . . . . .	264

---

A.8 Régression biaisée . . . . .	265
<b>B Rappels</b>	<b>281</b>
B.1 Rappels d'algèbre . . . . .	281
B.2 Rappels de probabilités . . . . .	285
B.2.1 Généralités . . . . .	285
B.2.2 Vecteurs aléatoires gaussiens . . . . .	286
B.3 Tables des lois usuelles . . . . .	287
B.3.1 Loi normale $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . . . . .	287
B.3.2 Loi de Student $X \sim T_\nu$ . . . . .	288
B.3.3 Loi du Khi-deux à $\nu$ ddl $X \sim \chi_\nu^2$ . . . . .	289
B.3.4 Loi de Fisher à $\nu_1, \nu_2$ ddl $X \sim \mathcal{F}_{(\nu_1, \nu_2)}$ . . . . .	290
<b>Bibliographie</b>	<b>291</b>
<b>Index</b>	<b>295</b>
<b>Notations</b>	<b>301</b>

# Chapitre 1

## La régression linéaire simple

### 1.1 Introduction

L'origine du mot régression vient de Sir Francis Galton. En 1885, travaillant sur l'hérédité, il chercha à expliquer la taille des fils en fonction de celle des pères. Il constata que lorsque le père était plus grand que la moyenne, *taller than mediocrity*, son fils avait tendance à être plus petit que lui et, *a contrario*, que lorsque le père était plus petit que la moyenne, *shorter than mediocrity*, son fils avait tendance à être plus grand que lui. Ces résultats l'ont conduit à considérer sa théorie de *regression toward mediocrity*. Cependant l'analyse de causalité entre plusieurs variables est plus ancienne et remonte au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle. En 1757, R. Boscovich, né à Ragussa, l'actuelle Dubrovnik, proposa une méthode minimisant la somme des valeurs absolues entre un modèle de causalité et les observations. Ensuite Legendre dans son célèbre article de 1805, « Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes », introduit la méthode d'estimation par moindres carrés des coefficients d'un modèle de causalité et donna le nom à la méthode. Parallèlement, Gauss publia en 1809 un travail sur le mouvement des corps célestes qui contenait un développement de la méthode des moindres carrés, qu'il affirmait utiliser depuis 1795 (Birkes & Dodge, 1993).

Dans ce chapitre, nous allons analyser la régression linéaire simple : nous pouvons la voir comme une technique statistique permettant de modéliser la relation linéaire entre une variable explicative (notée  $X$ ) et une variable à expliquer (notée  $Y$ ). Cette présentation va nous permettre d'exposer la régression linéaire dans un cas simple afin de bien comprendre les enjeux de cette méthode, les problèmes posés et les réponses apportées.

#### 1.1.1 Un exemple : la pollution de l'air

La pollution de l'air constitue actuellement une des préoccupations majeures de santé publique. De nombreuses études épidémiologiques ont permis de mettre

en évidence l'influence sur la santé de certains composés chimiques comme le dioxyde de souffre ( $\text{SO}_2$ ), le dioxyde d'azote ( $\text{NO}_2$ ), l'ozone ( $\text{O}_3$ ) ou des particules sous forme de poussières contenues dans l'air. L'influence de cette pollution est notable sur les personnes sensibles (nouveau-nés, asthmatiques, personnes âgées). La prévision des pics de concentration de ces composés est donc importante.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la concentration en ozone. Nous possédons quelques connaissances *a priori* sur la manière dont se forme l'ozone, grâce aux lois régissant les équilibres chimiques. La concentration de l'ozone sera fonction de la température ; plus la température sera élevée, plus la concentration en ozone va augmenter. Cette relation très vague doit être améliorée afin de pouvoir prédire les pics d'ozone.

Afin de mieux comprendre ce phénomène, l'association Air Breizh (surveillance de la qualité de l'air en Bretagne) mesure depuis 1994 la concentration en  $\text{O}_3$  (en  $\mu\text{g}/\text{ml}$ ) toute les 10 minutes et obtient donc le maximum journalier de la concentration en  $\text{O}_3$ , noté dorénavant **03**. Air Breizh collecte également à certaines heures de la journée des données météorologiques comme la température, la nébulosité, le vent... Les données sont disponibles en ligne (cf. Avant-propos). Le tableau suivant donne les 10 premières mesures effectuées.

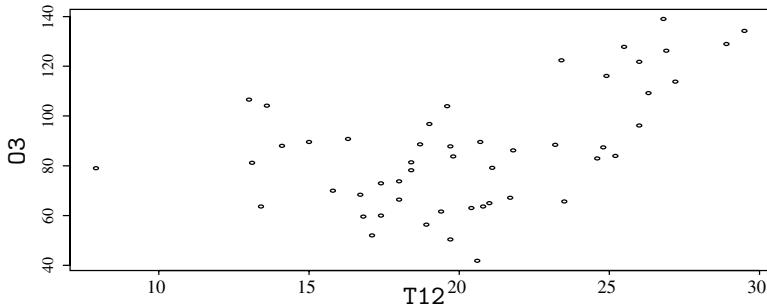
**Tableau 1.1.** 10 données de température à 12 h et teneur en ozone.

Individu	03	T12
1	63.6	13.4
2	89.6	15
3	79	7.9
4	81.2	13.1
5	88	14.1
6	68.4	16.7
7	139	26.8
8	78.2	18.4
9	113.8	27.2
10	41.8	20.6

Nous allons donc chercher à expliquer le maximum de **03** de la journée par la température à 12 h. D'un point de vue pratique *le but de cette régression est double :*

- ajuster un modèle pour expliquer la concentration en **03** en fonction de T12 ;
- prédire les valeurs de concentration en **03** pour de nouvelles valeurs de T12.

Avant toute analyse, il est intéressant de représenter les données. Voici donc une représentation graphique des données. Chaque point du graphique (fig.1.1) représente, pour un jour donné, une mesure de la température à 12 h et le pic d'ozone de la journée.



**Fig. 1.1.** 50 données journalières de température et 03.

Pour analyser la relation entre les  $x_i$  (température) et les  $y_i$  (ozone), nous allons chercher une fonction  $f$  telle que

$$y_i \approx f(x_i).$$

Pour définir  $\approx$ , il faut donner un critère quantifiant la qualité de l'ajustement de la fonction  $f$  aux données et une classe de fonctions  $\mathcal{G}$  dans laquelle est supposée se trouver la vraie fonction inconnue. Le problème mathématique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\operatorname{argmin}_{f \in \mathcal{G}} \sum_{i=1}^n l(y_i - f(x_i)), \quad (1.1)$$

où  $n$  représente le nombre de données à analyser et  $l(\cdot)$  est appelée *fonction de coût* ou encore *fonction de perte*.

### 1.1.2 Un deuxième exemple : la hauteur des arbres

Cet exemple utilise des données fournies par l'UR2PI et le CIRAD forêt (cf. Avant-propos). Lorsque le forestier évalue la vigueur d'une forêt, il considère souvent la hauteur des arbres qui la compose. Plus les arbres sont hauts, plus la forêt ou la plantation produit. Si l'on cherche à quantifier la production par le volume de bois, il est nécessaire d'avoir la hauteur de l'arbre pour calculer le volume de bois grâce à une formule du type « tronc de cône ». Cependant, mesurer la hauteur d'un arbre d'une vingtaine de mètres n'est pas aisément et demande un dendromètre. Ce type d'appareil mesure un angle entre le sol et le sommet de l'arbre. Il nécessite donc une vision claire de la cime de l'arbre et un recul assez grand afin d'avoir une mesure précise de l'angle et donc de la hauteur.

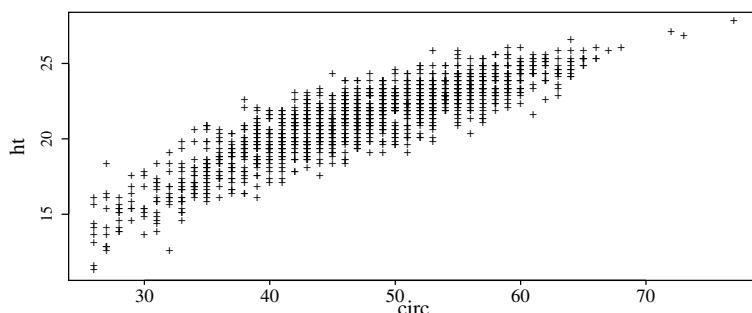
Dans certains cas, il est impossible de mesurer la hauteur, car ces deux conditions ne sont pas réunies, ou la mesure demande quelquefois trop de temps ou encore le forestier n'a pas de dendromètre. Il est alors nécessaire d'estimer la hauteur grâce à une mesure simple, la mesure de la circonférence à 1 mètre 30 du sol.

Nous possédons des mesures sur des eucalyptus dans une parcelle plantée et nous souhaitons à partir de ces mesures élaborer un modèle de prévision de la hauteur. Les eucalyptus étant plantés pour servir de matière première dans la pâte à papier, ils sont vendus au volume de bois. Il est donc important de connaître le volume et par là même la hauteur, afin d'évaluer la réserve en matière première dans la plantation (ou volume sur pied total). Les surfaces plantées sont énormes, il n'est pas question de prendre trop de temps pour la mesure et prévoir la hauteur par la circonférence est une méthode permettant la prévision du volume sur pied. La parcelle d'intérêt est constituée d'eucalyptus de 6 ans, âge de « maturité » des eucalyptus, c'est-à-dire l'âge en fin de rotation avant la coupe. Dans cette parcelle, nous avons alors mesuré  $n = 1429$  couples circonférence-hauteur. Le tableau suivant donne les 10 premières mesures effectuées.

**Tableau 1.2.** Hauteur et circonférence (`ht` et `circ`) des 10 premiers eucalyptus.

Individu	ht	circ
1	18.25	36
2	19.75	42
3	16.50	33
4	18.25	39
5	19.50	43
6	16.25	34
7	17.25	37
8	19.00	41
9	16.25	27
10	17.50	30

Nous souhaitons donc expliquer la hauteur par la circonférence. Avant toute modélisation, nous représentons les données. Chaque point du graphique 1.2 représente une mesure du couple circonférence/hauteur sur un eucalyptus.



**Fig. 1.2.** Représentation des mesures pour les  $n = 1429$  eucalyptus mesurés.

Pour prévoir la hauteur en fonction de la circonférence, nous allons donc chercher une fonction  $f$  telle que

$$y_i \approx f(x_i)$$

pour chaque mesure  $i \in \{1, \dots, 1429\}$ .

Afin de quantifier précisément le symbole  $\approx$ , nous allons choisir une classe de fonctions  $\mathcal{G}$ . Cette classe représente tous les modèles de prévisions que l'on s'autorise afin de prévoir la hauteur en fonction de la circonférence. Ensuite, nous cherchons parmi ces modèles le meilleur, c'est-à-dire nous cherchons la fonction de  $\mathcal{G}$  qui soit la plus proche possible des données selon une fonction de coût. Cela s'écrit

$$\arg \min_{f \in \mathcal{G}} \sum_{i=1}^n l(y_i - f(x_i)),$$

où  $n$  représente le nombre de données à analyser et  $l(\cdot)$  est appelée *fonction de coût* ou encore *fonction de perte*.

### Remarque

Le calcul du volume proposé ici est donc fait en deux étapes : dans la première on estime la hauteur et dans la seconde on utilise une formule de type « tronc de cône » pour calculer le volume avec la hauteur estimée et la circonférence. Une autre méthode de calcul de volume consiste à ne pas utiliser de formule incluant la hauteur et prévoir directement le volume en une seule étape. Pour cela il faut calibrer le volume en fonction de la circonférence et il faut donc la mesure de nombreux volumes en fonction de circonférences, ce qui est très coûteux et difficile à réactualiser.

## 1.2 Modélisation mathématique

Nous venons de voir que le problème mathématique peut s'écrire de la façon suivante (cf. équation 1.1) :

$$\arg \min_{f \in \mathcal{G}} \sum_{i=1}^n l(y_i - f(x_i)),$$

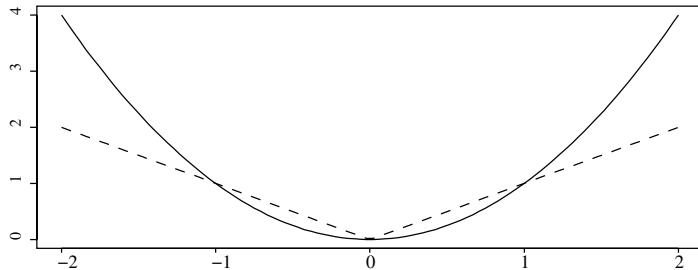
où  $l(\cdot)$  est appelée *fonction de coût* et  $\mathcal{G}$  un ensemble de fonctions données. Dans la suite de cette section, nous allons discuter du choix de la fonction de coût et de l'ensemble  $\mathcal{G}$ . Nous présenterons des graphiques illustratifs bâtis à partir de 10 données fictives de température et de concentration en ozone.

### 1.2.1 Choix du critère de qualité et distance à la droite

De nombreuses fonctions de coût  $l(\cdot)$  existent, mais les deux principales utilisées sont les suivantes :

- $l(u) = u^2$  coût quadratique ;
- $l(u) = |u|$  coût absolu.

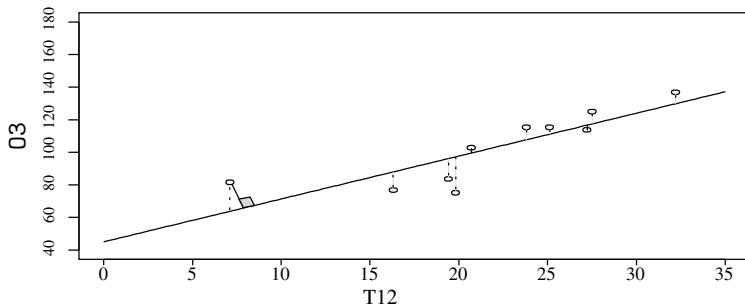
Ces deux fonctions sont représentées sur le graphique 1.3 :



**Fig. 1.3.** Coût absolu (pointillés) et coût quadratique (trait plein).

Ces fonctions sont positives, symétriques, elles donnent donc la même valeur lorsque l'erreur est positive ou négative et s'annulent lorsque  $u$  vaut zéro.

La fonction  $l$  peut aussi être vue comme la distance entre une observation  $(x_i, y_i)$  et son point correspondant sur la droite  $(x_i, f(x_i))$  (voir fig. 1.4).



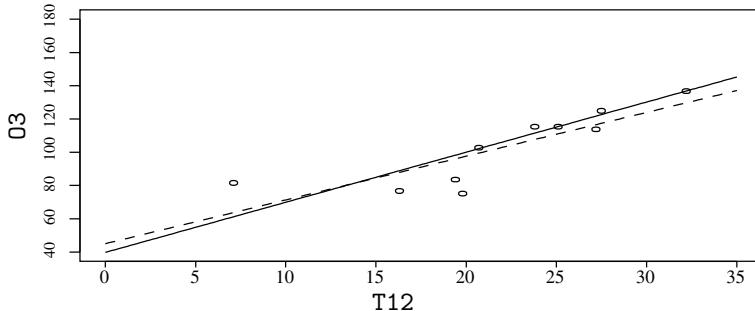
**Fig. 1.4.** Distances à la droite : coût absolu (pointillés) et distance d'un point à une droite.

Par point correspondant, nous entendons « évalué » à la même valeur  $x_i$ . Nous aurions pu prendre comme critère à minimiser la somme des distances des points  $(x_i, y_i)$  à la droite<sup>1</sup> (cf. fig. 1.4), mais ce type de distance n'entre pas dans le cadre des fonctions de coût puisqu'au point  $(x_i, y_i)$  correspond sur la droite un point  $(x'_i, f(x'_i))$  d'abscisse et d'ordonnée différentes.

Il est évident, que par rapport au coût absolu, le coût quadratique accorde une importance plus grande aux points qui restent éloignés de la droite ajustée, la distance étant élevée au carré (cf. fig. 1.3). Sur l'exemple fictif, dans la classe

<sup>1</sup>La distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire à cette droite passant par ce point.

$\mathcal{G}$  des fonctions linéaires, nous allons minimiser  $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$  (coût quadratique) et  $\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|$  (coût absolu). Les droites ajustées sont représentées sur le graphique ci-dessous :



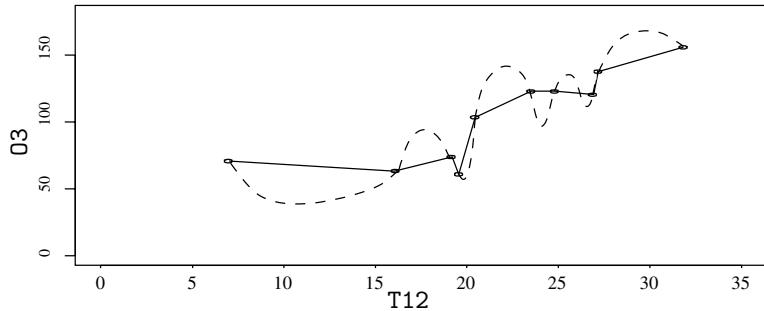
**Fig. 1.5.** 10 données fictives de température et 03, régressions avec un coût absolu (trait plein) et quadratique (pointillé).

La droite ajustée avec un coût quadratique propose un compromis où aucun point n'est très éloigné de la droite : le coût quadratique est sensible aux points aberrants qui sont éloignés de la droite. Ainsi (fig. 1.5) le premier point d'abscisse approximative 7°C est assez éloigné des autres. La droite ajustée avec un coût quadratique lui accorde une plus grosse importance que l'autre droite et passe relativement donc plus près de lui. En levant ce point (de manière imaginaire), la droite ajustée risque d'être très différente : le point est dit influent et le coût quadratique peu robuste. Le coût absolu est plus robuste et la modification d'une observation modifie moins la droite ajustée. Les notions de points influents, points aberrants, seront approfondies au chapitre 4.

Malgré cette non-robustesse, le coût quadratique est le coût le plus souvent utilisé, ceci pour plusieurs raisons : historique, calculabilité, propriétés mathématiques. En 1800, il n'existe pas d'ordinateur et l'utilisation du coût quadratique permettait de calculer explicitement les estimateurs à partir des données. A propos de l'utilisation d'autres fonctions de coût, voici ce que disait Gauss (1809) : « Mais de tous ces principes, celui des moindres carrés est le plus simple : avec les autres, nous serions conduits aux calculs les plus complexes ». En conclusion, *seul le coût quadratique sera automatiquement utilisé dans la suite de ce livre, sauf mention contraire*. Les lecteurs intéressés par le coût absolu peuvent consulter le livre de Dodge & Rousson (2004).

### 1.2.2 Choix des fonctions à utiliser

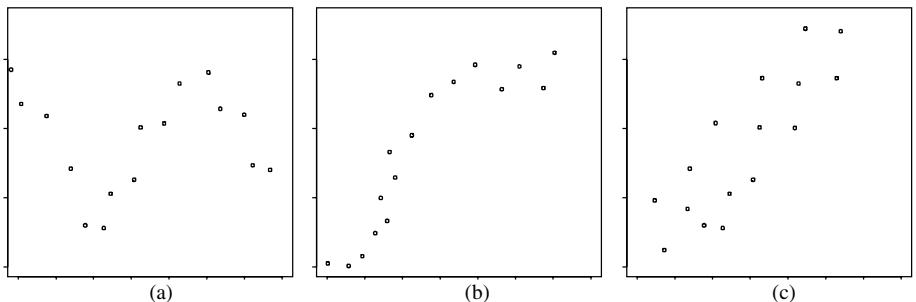
Si la classe  $\mathcal{G}$  est trop large, par exemple la classe des fonctions continues ( $C_0$ ), un grand nombre de fonctions de cette classe minimisent le critère (1.1). Ainsi toutes les fonctions de la classe qui passent par tous les points (interpolation), quand c'est possible, annulent la quantité  $\sum_{i=1}^n l(y_i - f(x_i))$ .



**Fig. 1.6.** Deux fonctions continues annulant le critère (1.1).

La fonction continue tracée en pointillés sur la figure (fig. 1.6) semble inappropriée bien qu'elle annule le critère (1.1). La fonction continue tracée en traits pleins annule aussi le critère (1.1). D'autres fonctions continues annulent ce critère, la classe des fonctions continues est trop vaste. Ces fonctions passent par tous les points et c'est là leur principal défaut. Nous souhaitons plutôt une courbe, ne passant pas par tous les points, mais possédant un trajet harmonieux, sans trop de détours. Bien sûr le trajet sans aucun détour est la ligne droite et la classe  $\mathcal{G}$  la plus simple sera l'ensemble des fonctions affines. Par abus de langage, on emploie le terme de fonctions linéaires. D'autres classes de fonctions peuvent être choisies et ce choix est en général dicté par une connaissance *a priori* du phénomène et (ou) par l'observation des données.

Ainsi une étude de régression linéaire simple débute toujours par un tracé des observations  $(x, y)$ . Cette première représentation permet de savoir si le modèle linéaire est pertinent. Le graphique suivant représente trois nuages de points différents.



**Fig. 1.7.** Exemples fictifs de tracés : (a) fonction sinusoïdale, (b) fonction croissante sigmoïdale et (c) droite.

Au vu du graphique, il semble inadéquat de proposer une régression linéaire pour les deux premiers graphiques, le tracé présentant une forme sinusoïdale ou

sigmoïdale. Par contre, la modélisation par une droite de la relation entre  $X$  et  $Y$  pour le dernier graphique semble correspondre à la réalité de la liaison. Dans la suite de ce chapitre, nous prendrons  $\mathcal{G} = \{f : f(x) = ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

### 1.3 Modélisation statistique

Lorsque nous ajustons par une droite les données, nous supposons implicitement qu'elles étaient de la forme

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X.$$

Dans l'exemple de l'ozone, nous supposons donc un modèle où la concentration d'ozone dépend linéairement de la température. Nous savons pertinemment que toutes les observations mesurées ne sont pas sur la droite. D'une part, il est irréaliste de croire que la concentration de l'ozone dépend linéairement de la température et de la température seulement. D'autre part, les mesures effectuées dépendent de la précision de l'appareil de mesure, de l'opérateur et il arrive souvent que, pour des valeurs identiques de la variable  $X$ , nous observions des valeurs différentes pour  $Y$ .

Nous supposons alors que la concentration d'ozone dépend linéairement de la température mais cette liaison est perturbée par un « bruit ». Nous supposons en fait que les données suivent le modèle suivant :

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon. \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est appelée **modèle de régression linéaire** et dans ce cas précis **modèle de régression linéaire simple**. Les  $\beta_j$ , appelés les paramètres du modèle (constante de régression et coefficient de régression), sont fixes mais inconnus, et nous voulons les estimer. La quantité notée  $\varepsilon$  est appelée bruit, ou erreur, et est aléatoire et inconnue.

Afin d'estimer les paramètres inconnus du modèle, nous mesurons dans le cadre de la régression simple une seule variable explicative ou variable exogène  $X$  et une variable à expliquer ou variable endogène  $Y$ . La variable  $X$  est souvent considérée comme non aléatoire au contraire de  $Y$ . Nous mesurons alors  $n$  observations de la variable  $X$ , notées  $x_i$ , où  $i$  varie de 1 à  $n$  et  $n$  valeurs de la variable à expliquer  $Y$  notées  $y_i$ .

Nous supposons que nous avons collecté  $n$  couples de données  $(x_i, y_i)$  où  $y_i$  est la réalisation de la variable aléatoire  $Y_i$ . Par abus de notation, nous confondrons la variable aléatoire  $Y_i$  et sa réalisation, l'observation  $y_i$ . Avec la notation  $\varepsilon_i$ , nous confondrons la variable aléatoire avec sa réalisation. Suivant le modèle (1.2), nous pouvons écrire

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où

- les  $x_i$  sont des valeurs connues non aléatoires ;

- les paramètres  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2$  du modèle sont inconnus ;
- les  $\varepsilon_i$  sont les réalisations inconnues d'une variable aléatoire ;
- les  $y_i$  sont les observations d'une variable aléatoire.

## 1.4 Estimateurs des moindres carrés

**Définition 1.1 (estimateurs des MC)**

On appelle estimateurs des moindres carrés (MC) de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  obtenus par minimisation de la quantité

$$S(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 = \|Y - \beta_1 \mathbb{1} - \beta_2 X\|^2,$$

où  $\mathbb{1}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont tous les coefficients valent 1. Les estimateurs peuvent également s'écrire sous la forme suivante :

$$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \underset{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} S(\beta_1, \beta_2).$$

### 1.4.1 Calcul des estimateurs de $\beta_j$ , quelques propriétés

La fonction  $S(\beta_1, \beta_2)$  est strictement convexe. Si elle admet un point singulier, celui-ci correspond à l'unique minimum. Annulons les dérivées partielles, nous obtenons un système d'équations appelées « équations normales » :

$$\begin{cases} \frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i) = 0, \\ \frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\partial \beta_2} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i) = 0. \end{cases}$$

La première équation donne

$$\hat{\beta}_1 n + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

et nous avons un estimateur de l'ordonnée à l'origine

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}, \tag{1.3}$$

où  $\bar{x} = \sum x_i / n$ . La seconde équation donne

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

En remplaçant  $\hat{\beta}_1$  par son expression (1.3) nous avons une première écriture de

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i - \sum x_i \bar{y}}{\sum x_i^2 - \sum x_i \bar{x}},$$

et en utilisant astucieusement la nullité de la somme  $\sum(x_i - \bar{x})$ , nous avons d'autres écritures pour l'estimateur de la pente de la droite

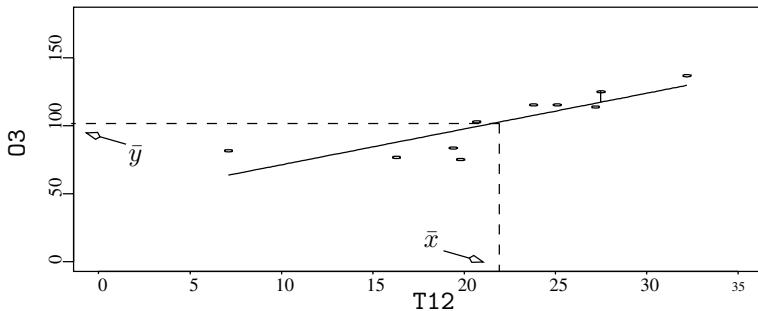
$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i(y_i - \bar{y})}{\sum x_i(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.4)$$

Pour obtenir ce résultat, nous supposons qu'il existe au moins deux points d'abscisses différentes. Cette hypothèse notée  $\mathcal{H}_1$  s'écrit  $x_i \neq x_j$  pour au moins deux individus. Elle permet d'obtenir l'unicité des coefficients estimés  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ .

Une fois déterminés les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ , nous pouvons estimer la droite de régression par la formule

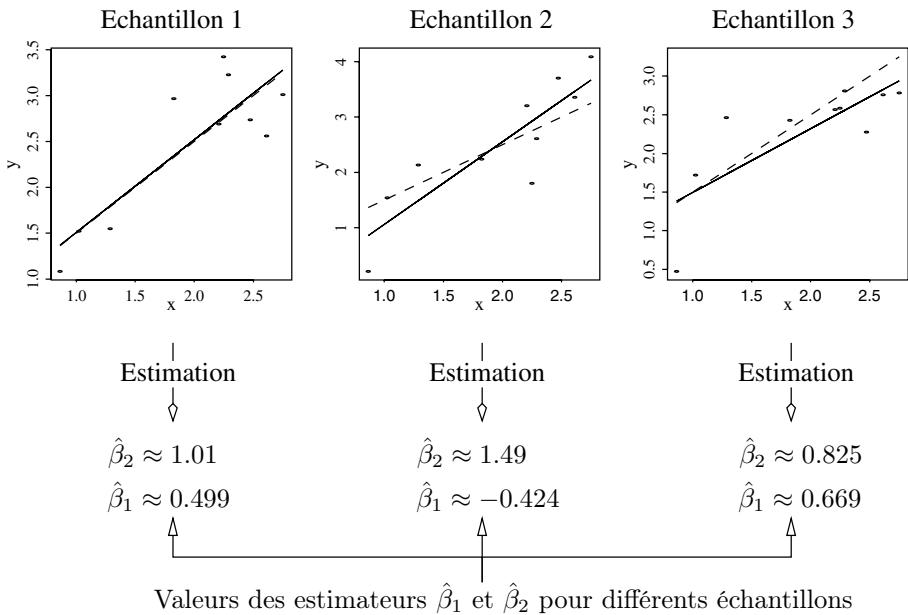
$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X.$$

Si nous évaluons la droite aux points  $x_i$  ayant servi à estimer les paramètres, nous obtenons des  $\hat{y}_i$  et ces valeurs sont appelées les valeurs ajustées. Si nous évaluons la droite en d'autres points, les valeurs obtenues seront appelées les valeurs prévues ou prévisions. Représentons les points initiaux et la droite de régression estimée. La droite de régression passe par le centre de gravité du nuage de points  $(\bar{x}, \bar{y})$  comme l'indique l'équation (1.3).



**Fig. 1.8.** Nuage de points, droite de régression et centre de gravité.

Nous avons réalisé une expérience et avons mesuré  $n$  valeurs  $(x_i, y_i)$ . A partir de ces  $n$  valeurs, nous avons obtenu un estimateur de  $\beta_1$  et de  $\beta_2$ . Si nous refaisions une expérience, nous mesurerions  $n$  nouveaux couples de données  $(x_i, y_i)$ . A partir de ces données, nous aurions un nouvel estimateur de  $\beta_1$  et de  $\beta_2$ . Les estimateurs sont fonction des données mesurées et changent donc avec les observations collectées (fig. 1.9). Les vraies valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont inconnues et ne changent pas.



**Fig. 1.9.** Exemple de la variabilité des estimations. Le vrai modèle est  $Y = X + 0.5 + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est choisi comme suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 0.25)$ . Nous avons ici 3 répétitions de la mesure de 10 points  $(x_i, y_i)$ , ou 3 échantillons de taille 10. Le trait en pointillé représente la vraie droite de régression et le trait plein son estimation.

Le statisticien cherche en général à vérifier que les estimateurs utilisés admettent certaines propriétés comme :

- un estimateur  $\hat{\beta}$  est-il sans biais ? Par définition  $\hat{\beta}$  est sans biais si  $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$ . En moyenne sur toutes les expériences possibles de taille  $n$ , l'estimateur  $\hat{\beta}$  moyen sera égal à la valeur inconnue du paramètre. En français, cela signifie qu'en moyenne  $\hat{\beta}$  « tombe » sur  $\beta$  ;
- un estimateur  $\hat{\beta}$  est-il de variance minimale parmi les estimateurs d'une classe définie ? En d'autres termes, parmi tous les estimateurs de la classe, l'estimateur utilisé admet-il parmi toutes les expériences la plus petite variabilité ?

Pour cela, nous supposons une seconde hypothèse notée  $\mathcal{H}_2$  qui s'énonce aussi comme suit : les erreurs sont centrées, de même variance (homoscédasticité) et non corrélées entre elles. Elle permet de calculer les propriétés statistiques des estimateurs.  $\mathcal{H}_2 : \mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ , pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}\sigma^2$ , où  $\mathbb{E}(\varepsilon)$  est l'espérance de  $\varepsilon$ ,  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$  est la covariance entre  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  et  $\delta_{ij} = 1$  lorsque  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  lorsque  $i \neq j$ . Nous avons la première propriété de ces estimateurs (voir exercice 1.2)

### Proposition 1.1 (Biais des estimateurs)

$\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont des estimateurs sans biais de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \text{ et } \mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \beta_2.$$

Les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont sans biais, nous allons nous intéresser à leur variance. Afin de montrer que ces estimateurs sont de variances minimales dans leur classe, nous allons d'abord calculer leur variance (voir exercices 1.3, 1.4, 1.5). C'est l'objet de la prochaine proposition.

### **Proposition 1.2 (Variances de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ )**

*Les variances et covariance des estimateurs des paramètres valent :*

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \\ V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum(x_i - \bar{x})^2} \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) &= -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

Cette proposition nous permet d'envisager la précision de l'estimation en utilisant la variance. Plus la variance est faible, plus l'estimateur sera précis. Pour avoir des variances petites, il faut avoir un numérateur petit et (ou) un dénominateur grand. Les estimateurs seront donc de faibles variances lorsque :

- la variance  $\sigma^2$  est faible. Cela signifie que la variance de  $Y$  est faible et donc les mesures sont proches de la droite à estimer ;
- la quantité  $\sum(x_i - \bar{x})^2$  est grande, les mesures  $x_i$  doivent être dispersées autour de leur moyenne ;
- la quantité  $\sum x_i^2$  ne doit pas être trop grande, les points doivent avoir une faible moyenne en valeur absolue. En effet, nous avons

$$\frac{\sum x_i^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = 1 + \frac{n\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}.$$

L'équation (1.3) indique que la droite des MC passe par le centre de gravité du nuage  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Supposons  $\bar{x}$  positif, alors si nous augmentons la pente, l'ordonnée à l'origine va diminuer et vice versa. Nous retrouvons donc le signe négatif pour la covariance entre  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ .

Nous terminons cette partie concernant les propriétés par le théorème de Gauss-Markov qui indique que, parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, les estimateurs des MC possèdent la plus petite variance (voir exercice 1.6).

### **Théorème 1.1 (Gauss-Markov)**

*Parmi les estimateurs sans biais linéaires en  $Y$ , les estimateurs  $\hat{\beta}_j$  sont de variance minimale.*

#### **1.4.2 Résidus et variance résiduelle**

Nous avons estimé  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . La variance  $\sigma^2$  des  $\varepsilon_i$  est le dernier paramètre inconnu à estimer. Pour cela, nous allons utiliser les résidus : ce sont des estimateurs des erreurs inconnues  $\varepsilon_i$ .

**Définition 1.2 (Résidus)**

*Les résidus sont définis par*

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

où  $\hat{y}_i$  est la valeur ajustée de  $y_i$  par le modèle, c'est-à-dire  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ .

Nous avons la propriété suivante (voir exercice 1.7).

**Proposition 1.3**

*Dans un modèle de régression linéaire simple, la somme des résidus est nulle.*

Intéressons-nous maintenant à l'estimation de  $\sigma^2$  et construisons un estimateur sans biais  $\hat{\sigma}^2$  (cf. exercice 1.8) :

**Proposition 1.4 (Estimateur de la variance du bruit)**

*La statistique  $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 / (n - 2)$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .*

### 1.4.3 Prévision

Un des buts de la régression est de proposer des prévisions pour la variable à expliquer  $Y$ . Soit  $x_{n+1}$  une nouvelle valeur de la variable  $X$ , nous voulons prédire  $y_{n+1}$ . Le modèle indique que

$$y_{n+1} = \beta_1 + \beta_2 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

avec  $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}) = 0$ ,  $V(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$  et  $\text{Cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous pouvons prédire la valeur correspondante grâce au modèle estimé

$$\hat{y}_{n+1}^p = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{n+1}.$$

En utilisant la notation  $\hat{y}_{n+1}^p$  nous souhaitons insister sur la notion de prévision : la valeur pour laquelle nous effectuons la prévision, ici la  $(n+1)^e$ , n'a pas servi dans le calcul des estimateurs. Remarquons que cette quantité sera différente de la valeur ajustée, notée  $\hat{y}_i$ , qui elle fait intervenir la  $i^e$  observation.

Deux types d'erreurs vont entacher notre prévision, l'une due à la non-connaissance de  $\varepsilon_{n+1}$  et l'autre due à l'estimation des paramètres.

**Proposition 1.5 (Variance de la prévision  $\hat{y}_{n+1}^p$ )**

*La variance de la valeur prévue de  $\hat{y}_{n+1}^p$  vaut*

$$V(\hat{y}_{n+1}^p) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \right).$$

La variance de  $\hat{y}_{n+1}^p$  (voir exercice 1.9) nous donne une idée de la stabilité de l'estimation. En prévision, on s'intéresse généralement à l'erreur que l'on commet entre la vraie valeur à prévoir  $y_{n+1}$  et celle que l'on prévoit  $\hat{y}_{n+1}^p$ . L'erreur peut être simplement résumée par la différence entre ces deux valeurs, c'est ce que nous appellerons l'erreur de prévision. Cette erreur de prévision permet de quantifier la capacité du modèle à prévoir. Nous avons sur ce thème la proposition suivante (voir exercice 1.10).

**Proposition 1.6 (Erreur de prévision)**

L'erreur de prévision, définie par  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p$  satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}_{n+1}^p) &= 0 \\ \text{V}(\hat{\varepsilon}_{n+1}^p) &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \right).\end{aligned}$$

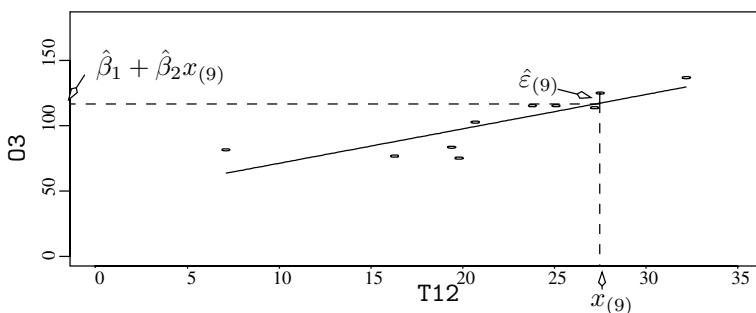
**Remarque**

La variance augmente lorsque  $x_{n+1}$  s'éloigne du centre de gravité du nuage. Effectuer une prévision lorsque  $x_{n+1}$  est « loin » de  $\bar{x}$  est donc périlleux, la variance de l'erreur de prévision peut alors être très grande !

## 1.5 Interprétations géométriques

### 1.5.1 Représentation des individus

Pour chaque individu, ou observation, nous mesurons une valeur  $x_i$  et une valeur  $y_i$ . Une observation peut donc être représentée dans le plan, nous dirons alors que  $\mathbb{R}^2$  est l'espace des observations.  $\hat{\beta}_1$  correspond à l'ordonnée à l'origine alors que  $\hat{\beta}_2$  représente la pente de la droite ajustée. Cette droite minimise la somme des carrés des distances verticales des points du nuage à la droite ajustée.



**Fig. 1.10.** Représentation des individus.

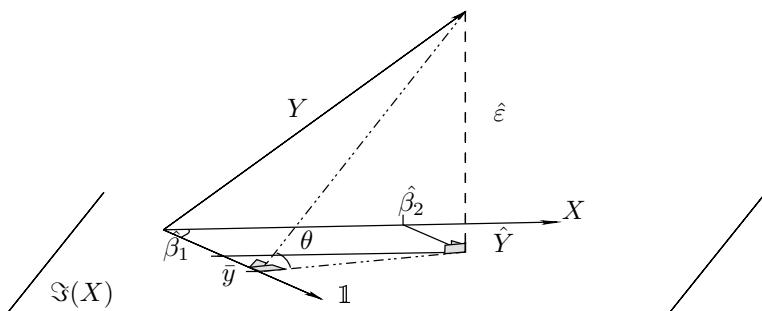
Les couples d'observations  $(x_i, y_i)$  avec  $i = 1, \dots, n$  ordonnées suivant les valeurs croissantes de  $x$  sont notés  $(x_{(i)}, y_{(i)})$ . Nous avons représenté la neuvième valeur de  $x$  et sa valeur ajustée  $\hat{y}_{(9)} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{(9)}$  sur le graphique, ainsi que le résidu correspondant  $\hat{\varepsilon}_{(9)}$ .

### 1.5.2 Représentation des variables

Nous pouvons voir le problème d'une autre façon. Nous mesurons  $n$  couples de points  $(x_i, y_i)$ . La variable  $X$  et la variable  $Y$  peuvent être considérées

comme deux vecteurs possédant  $n$  coordonnées. Le vecteur  $X$  (respectivement  $Y$ ) admet pour coordonnées : les observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (respectivement  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ). Ces deux vecteurs d'observations appartiennent au même espace  $\mathbb{R}^n$  : l'espace des variables. Nous pouvons donc représenter les données dans l'espace des variables. Le vecteur  $\mathbf{1}$  est également un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes valent 1. Les 2 vecteurs  $\mathbf{1}$  et  $X$  engendrent un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 2. Nous avons supposé que  $\mathbf{1}$  et  $X$  ne sont pas colinéaires grâce à  $\mathcal{H}_1$  mais ces vecteurs ne sont pas obligatoirement orthogonaux. Ces vecteurs sont orthogonaux lorsque  $\bar{x}$ , la moyenne des observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vaut zéro (voir la remarque ci-dessous).

La régression linéaire peut être vue comme la projection orthogonale du vecteur  $Y$  dans le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par  $\mathbf{1}$  et  $X$ , noté  $\mathfrak{S}(X)$ . Les coefficients  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  s'interprètent comme les composantes de la projection orthogonale notée  $\hat{Y}$  de  $Y$  sur ce sous-espace. Voyons cela sur le graphique suivant :



**Fig. 1.11.** Représentation de la projection dans l'espace des variables.

### Remarque

Les vecteurs  $\mathbf{1}$  et  $X$  de normes respectives  $\sqrt{n}$  et  $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  ne forment pas une base orthogonale. Afin de savoir si ces vecteurs sont orthogonaux, calculons leur produit scalaire. Le produit scalaire est la somme du produit terme à terme des composantes des deux vecteurs et vaut ici  $\sum_{i=1}^n x_i \times 1 = n\bar{x}$ . Les vecteurs forment une base orthogonale lorsque la moyenne de  $X$  est nulle. En effet  $\bar{x}$  vaut alors zéro et le produit scalaire est nul. Les vecteurs n'étant en général pas orthogonaux, cela veut dire que  $\hat{\beta}_1 \mathbf{1}$  n'est pas la projection de  $Y$  sur la droite engendrée par  $\mathbf{1}$  et que  $\hat{\beta}_2 X$  n'est pas la projection de  $Y$  sur la droite engendrée par  $X$ . Nous reviendrons sur cette différence au chapitre suivant.

### 1.5.3 Le coefficient de détermination $R^2$

Un modèle, que l'on qualifiera de bon, possédera des estimations  $\hat{y}_i$  proches des vraies valeurs  $y_i$ . Sur la représentation dans l'espace des variables (fig. 1.11) la qualité peut être évaluée par l'angle  $\theta$ . Cet angle est compris entre  $-90^\circ$  et

$90^\circ$ . Un angle proche de  $-90^\circ$  ou de  $90^\circ$  indique un modèle de mauvaise qualité. Le cosinus carré de  $\theta$  est donc une mesure possible de la qualité du modèle et cette mesure varie entre 0 et 1.

Le théorème de Pythagore nous donne directement que

$$\begin{aligned}\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 &= \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \\ \text{SCT} &= \text{SCE} + \text{SCR},\end{aligned}$$

où SCT (respectivement SCE et SCR) représente la somme des carrés totale (respectivement expliquée par le modèle et résiduelle).

Le coefficient de détermination  $R^2$  est défini par

$$R^2 = \frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2},$$

c'est-à-dire la part de la variabilité expliquée par le modèle sur la variabilité totale. De nombreux logiciels multiplient cette valeur par 100 afin de donner un pourcentage.

### Remarques

Dans ce cas précis,  $R^2$  est le carré du coefficient de corrélation empirique entre les  $x_i$  et les  $y_i$  et

- le  $R^2$  correspond au cosinus carré de l'angle  $\theta$  ;
- si  $R^2 = 1$ , le modèle explique tout, l'angle  $\theta$  vaut donc zéro,  $Y$  est dans  $\mathfrak{I}(X)$  c'est-à-dire que  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$  ;
- si  $R^2 = 0$ , cela veut dire que  $\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 0$  et donc que  $\hat{y}_i = \bar{y}$ . Le modèle de régression linéaire est inadapté ;
- si  $R^2$  est proche de zéro, cela veut dire que  $Y$  est quasiment dans l'orthogonal de  $\mathfrak{I}(X)$ , le modèle de régression linéaire est inadapté, la variable  $X$  utilisée n'explique pas la variable  $Y$ .

## 1.6 Inférence statistique

Jusqu'à présent, nous avons pu, en choisissant une fonction de coût quadratique, ajuster un modèle de régression, à savoir calculer  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ . Grâce aux coefficients estimés, nous pouvons donc prédire, pour chaque nouvelle valeur  $x_{n+1}$  une valeur de la variable à expliquer  $\hat{y}_{n+1}^p$  qui est tout simplement le point sur la droite ajustée correspondant à l'abscisse  $x_{n+1}$ . En ajoutant l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$ , nous avons pu calculer l'espérance et la variance des estimateurs. Ces propriétés permettent d'appréhender de manière grossière la qualité des estimateurs proposés. Le théorème de Gauss-Markov permet de juger de la qualité

des estimateurs parmi une classe d'estimateurs : les estimateurs linéaires sans biais. Enfin ces deux hypothèses nous ont aussi permis de calculer l'espérance et la variance de la valeur prédictive  $\hat{y}_{n+1}^p$ .

Cependant nous souhaitons en général connaître la loi des estimateurs afin de calculer des intervalles ou des régions de confiance ou effectuer des tests. Il faut donc introduire une hypothèse supplémentaire concernant la loi des  $\varepsilon_i$ . L'hypothèse  $\mathcal{H}_2$  devient

$$\mathcal{H}_3 \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_i & \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ \varepsilon_i & \text{sont indépendants} \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est une loi normale d'espérance nulle et de variance  $\sigma^2$ . Le modèle de régression devient le modèle paramétrique  $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{N}(\beta_1 + \beta_2 x, \sigma^2)\}$ , où  $\beta_1, \beta_2, \sigma^2$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+$  respectivement. La loi des  $\varepsilon_i$  étant connue, nous en déduisons la loi des  $y_i$ . Toutes les preuves de cette section seront détaillées au chapitre 3.

Nous allons envisager dans cette section les propriétés supplémentaires des estimateurs qui découlent de l'hypothèse  $\mathcal{H}_3$  (normalité et indépendance des erreurs) :

- lois des estimateurs  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  et  $\hat{\sigma}^2$  ;
- intervalles de confiance univariés et bivariés ;
- loi des valeurs prévues  $\hat{y}_{n+1}^p$  et intervalle de confiance.

Cette partie est plus technique que les parties précédentes. Afin de faciliter la lecture, considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 &= \sigma^2 \left( \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \right), & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 &= \hat{\sigma}^2 \left( \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \right), \\ \sigma_{\hat{\beta}_2}^2 &= \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \end{aligned}$$

où  $\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 / (n - 2)$ . Cet estimateur est donné au théorème 1.4. Notons que les estimateurs de la colonne de gauche ne sont pas réellement des estimateurs. En effet puisque  $\sigma^2$  est inconnu, ces estimateurs ne sont pas calculables avec les données. Cependant ce sont eux qui interviennent dans les lois des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  (cf. proposition ci-dessous). Les estimateurs donnés dans la colonne de droite sont ceux qui sont utilisés (et utilisables) et ils consistent simplement à remplacer  $\sigma^2$  par  $\hat{\sigma}^2$ .

Les lois des estimateurs sont données dans la proposition suivante.

### **Proposition 1.7 (Lois des estimateurs : variance connue)**

*Les lois des estimateurs des MC sont :*

- (i)  $\hat{\beta}_1 \sim \mathcal{N}\left(\beta_1, \sigma_{\hat{\beta}_1}^2\right)$ .
- (ii)  $\hat{\beta}_2 \sim \mathcal{N}\left(\beta_2, \sigma_{\hat{\beta}_2}^2\right)$ .
- (iii)  $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 V)$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$  et  $V = \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2/n & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{bmatrix}$ .

- (iv)  $\frac{(n-2)}{\hat{\sigma}^2} \hat{\sigma}^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $(n-2)$  degrés de liberté (ddl) ( $\chi^2_{n-2}$ ).  
(v)  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  et  $\hat{\sigma}^2$  sont indépendants.

La variance  $\sigma^2$  n'est pas connue en général, nous l'estimons par  $\hat{\sigma}^2$ . Les estimateurs des MC ont alors les propriétés suivantes.

**Proposition 1.8 (Lois des estimateurs : variance estimée)**

Lorsque  $\sigma^2$  est estimée par  $\hat{\sigma}^2$ , nous avons

- (i)  $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim T_{n-2}$  où  $T_{n-2}$  est une loi de Student à  $(n-2)$  ddl.  
(ii)  $\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \sim T_{n-2}$ .  
(iii)  $\frac{1}{2 \hat{\sigma}^2} (\hat{\beta} - \beta)' V^{-1} (\hat{\beta} - \beta) \sim F_{2,n-2}$ , où  $F_{2,n-2}$  est une loi de Fisher à 2 ddl au numérateur et  $(n-2)$  ddl au dénominateur.

Ces dernières propriétés nous permettent de donner des intervalles de confiance (IC) ou des régions de confiance (RC) des paramètres inconnus. En effet, la valeur ponctuelle d'un estimateur est en général insuffisante et il est nécessaire de lui adjoindre un intervalle de confiance. Nous parlerons d'intervalle de confiance quand un paramètre est univarié et de région de confiance quand le paramètre est multivarié.

**Proposition 1.9 (IC et RC de niveau  $1 - \alpha$  pour les paramètres)**

- (i) Un IC de  $\beta_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) est donné par :

$$\left[ \hat{\beta}_i - t_{n-2}(1 - \alpha/2) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + t_{n-2}(1 - \alpha/2) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} \right] \quad (1.5)$$

où  $t_{n-2}(1 - \alpha/2)$  représente le fractile de niveau  $(1 - \alpha/2)$  d'une loi  $T_{n-2}$ .

- (ii) Une région de confiance simultanée des deux paramètres inconnus  $\beta$  est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left[ n(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 + 2n\bar{x}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + \sum x_i^2(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 \right] \leq f_{(2,n-2)}(1 - \alpha),$$

où  $f_{(2,n-2)}(1 - \alpha)$  représente le fractile de niveau  $(1 - \alpha)$  d'une loi de Fisher à  $(2, n-2)$  ddl.

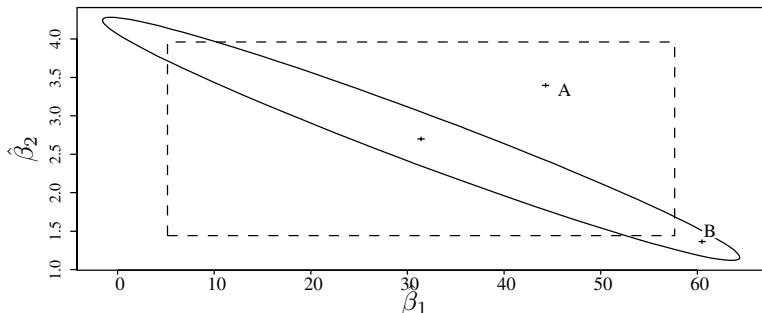
- (iii) Un IC de  $\sigma^2$  est donné par :

$$\left[ \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{c_{n-2}(1 - \alpha/2)}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{c_{n-2}(\alpha/2)} \right],$$

où  $c_{n-2}(1 - \alpha/2)$  représente le fractile de niveau  $(1 - \alpha/2)$  d'une loi du  $\chi^2$  à  $(n-2)$  degrés de liberté.

### Remarque

La propriété (ii) donne la région de confiance simultanée des paramètres de la régression  $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ , appelée ellipse de confiance grâce à la loi du couple. Au contraire (i) donne l'intervalle de confiance d'un paramètre sans tenir compte de la corrélation entre  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ . Il est donc délicat de donner une région de confiance du vecteur  $(\beta_1, \beta_2)$  en juxtaposant les deux intervalles de confiance.



**Fig. 1.12.** Comparaison entre ellipse et rectangle de confiance.

Un point peut avoir chaque coordonnée dans son IC respectif mais ne pas appartenir à l'ellipse de confiance. Le point A est un exemple de ce type de point. *A contrario*, un point peut appartenir à la RC sans qu'aucune de ces coordonnées n'appartiennent à son IC respectif (le point B).

L'ellipse de confiance n'est pas toujours calculée par les logiciels de statistique. Le rectangle de confiance obtenu en juxtaposant les deux intervalles de confiance peut être une bonne approximation de l'ellipse si la corrélation entre  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  est faible.

Nous pouvons également donner un intervalle de confiance de la droite de régression.

### Proposition 1.10 (IC pour $\mathbb{E}(y_i)$ )

Un IC de  $\mathbb{E}(y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i$  est donné par :

$$\left[ \hat{y}_j \pm t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_j - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \right]. \quad (1.6)$$

En calculant les IC pour tous les points de la droite, nous obtenons une hyperbole de confiance. En effet, lorsque  $x_j$  est proche de  $\bar{x}$ , le terme dominant de la variance est  $1/n$ , mais dès que  $x_j$  s'éloigne de  $\bar{x}$ , le terme dominant est le terme au carré.

Nous avons les mêmes résultats que ceux obtenus à la section (1.4.3). Enonçons le résultat permettant de calculer un intervalle de confiance pour une valeur prévue :

**Proposition 1.11 (IC pour  $y_{n+1}$ )**

Un IC de  $y_{n+1}$  est donné par :

$$\left[ \hat{y}_{n+1}^p \pm t_{n-2}(1 - \alpha/2)\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_j - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \right]. \quad (1.7)$$

Cette formule exprime que plus le point à prévoir est éloigné de  $\bar{x}$ , plus la variance de la prévision et donc l'IC seront grands. Une approche intuitive consiste à remarquer que plus une observation est éloignée du centre de gravité, moins nous avons d'information sur elle. Lorsque la valeur à prévoir est à l'intérieur de l'étendue des  $x_i$ , le terme dominant de la variance est la valeur 1 et donc la variance est relativement constante. Lorsque  $x_{n+1}$  est en dehors de l'étendue des  $x_i$ , le terme dominant peut être le terme au carré, et la forme de l'intervalle sera à nouveau une hyperbole.

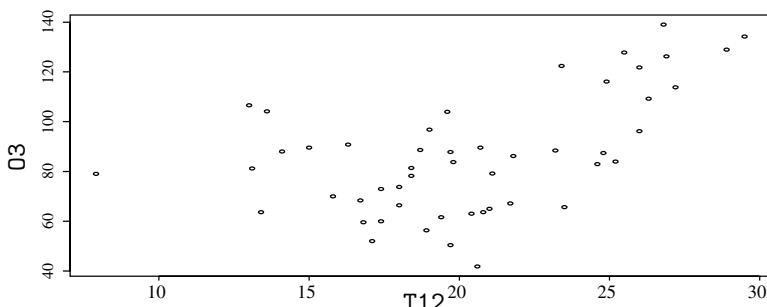
## 1.7 Exemples

### 1.7.1 La concentration en ozone

Nous allons traiter les 50 données journalières de concentration en ozone. La variable à expliquer est la concentration en ozone notée 03 et la variable explicative est la température notée T12. Les données sont traitées avec le logiciel GNU-R.

- Pour une régression simple, nous commençons toujours par représenter les données.

```
ozone <- read.table("ozone.txt", header=T, sep=";")  
plot(T12, 03, xlab="T12", ylab="03")
```



**Fig. 1.13.** 50 données journalières de température et 03.

Ce graphique permet de vérifier visuellement si une régression linéaire est pertinente. Autrement dit il suffit de regarder si le nuage de point s'étire le long d'une droite. Bien qu'ici il semble que le nuage s'étire sur une première droite jusqu'à 22 ou 23 °C puis selon une autre droite pour les hautes valeurs de températures, nous pouvons tenter une régression linéaire simple.

- Nous effectuons ensuite la régression linéaire, c'est-à-dire la phase d'estimation.

```
reg <- lm(O3~T12,data=ozone)
```

Afin de consulter les résultats, nous effectuons

```
resume <- summary(reg)
resume
```

et nous obtenons alors le résumé suivant :

```
Call:
lm(formula = O3 ~ T12)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-45.256 -15.326 - 3.461  17.634  40.072 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 31.4150   13.0584   2.406   0.0200 *  
T12          2.7010    0.6266   4.311   8.04e-05 *** 
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1 
Residual standard error: 20.5 on 48 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.2791,    Adjusted R-squared:  0.2641 
F-statistic: 18.58 on 1 and 48 DF,  p-value: 8.041e-05
```

Les sorties du logiciel donnent une matrice (sous le mot **Coefficients**) qui comporte pour chaque paramètre (chaque ligne) 5 colonnes. La première colonne contient les estimations des paramètres (colonne **Estimate**), la seconde les écarts-types estimés des paramètres (**Std. Error**). Dans la troisième colonne (**t value**) figure la valeur observée de la statistique de test d'hypothèse  $H_0 : \beta_i = 0$  contre  $H_1 : \beta_i \neq 0$ . La quatrième colonne (**Pr(>|t|)**) contient la probabilité critique (ou « p-value ») qui est la probabilité, pour la statistique de test sous  $H_0$ , de dépasser la valeur estimée. Enfin la dernière colonne est une version graphique du test : \*\*\* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.001, \*\* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.01, \* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures

ou égales à 0.05,. signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.1.

Ici, nous rejetons l'hypothèse  $H_0$  pour les deux paramètres estimés au niveau  $\alpha = 5 \%$ . Dans le cadre de la régression simple, cela permet d'effectuer de manière rapide un choix de variable pertinente. En toute rigueur, si les pour les deux paramètres l'hypothèse  $H_0$  est acceptée, il est nécessaire de reprendre un modèle en supprimant le paramètre dont la probabilité critique est la plus proche de 1. Dans ce cas-là, dès la phase de représentation des données, de gros doutes doivent apparaître sur l'intérêt de la régression linéaire simple.

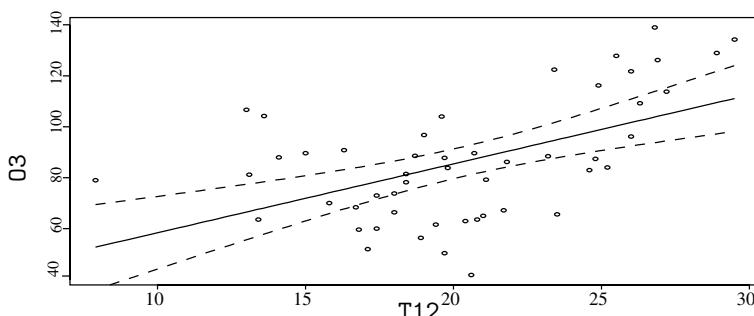
Le résumé de l'étape d'estimation fait figurer l'estimation de  $\sigma$  qui vaut ici 20.5 ainsi que le nombre  $n - 2 = 48$  qui est le nombre de degré de liberté associé, par exemple, aux tests d'hypothèse  $H_0 : \beta_i = 0$  contre  $H_1 : \beta_i \neq 0$ .

La valeur du  $R^2$  est également donnée, ainsi que le  $R_a^2$  ajusté (voir la définition 2.4 p. 45). La valeur du  $R^2$  est faible ( $R^2 = 0.28$ ) et nous retrouvons la remarque effectuée à propos de la figure (fig. 1.13) : peut être qu'une régression linéaire simple n'est-elle pas adaptée ici.

La dernière ligne, surtout utile en régression multiple, indique le test entre le modèle utilisé et le modèle n'utilisant que la constante comme variable explicative. Nous reviendrons sur ce test au chapitre 3.

- Afin d'examiner la qualité du modèle et des observations, nous traçons la droite ajustée et les observations. Comme il existe une incertitude dans les estimations, nous traçons aussi un intervalle de confiance de la droite (à 95 %).

```
plot(03~T12,data=ozone)
T12=seq(min(ozone[, "T12"]),max(ozone[, "T12"]),length=100)
grille <- data.frame(T12)
ICdte <- predict(reg,new=grille,interval="confidence",level=0.95)
matlines(grille$T12,cbind(ICdte), lty=c(1,2,2),col=1)
```



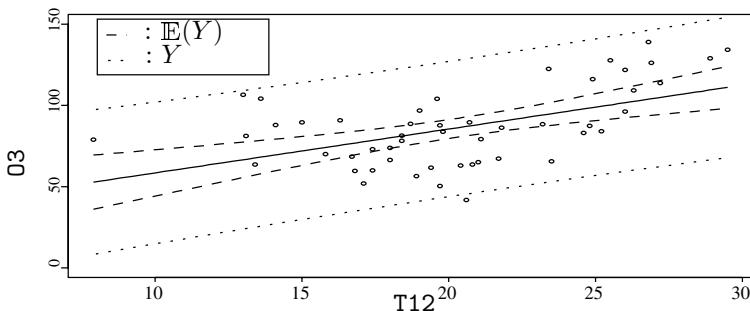
**Fig. 1.14.** 50 données journalières de température et 03 et l'ajustement linéaire obtenu.

Ce graphique permet de vérifier visuellement si une régression est correcte, c'est-à-dire de constater la qualité d'ajustement de notre modèle.

Nous constatons que les observations qui possèdent de faibles valeurs ou de fortes valeurs de température sont au-dessus de la droite ajustée (fig. 1.14) alors que les observations qui possèdent des valeurs moyennes sont en dessous. Les erreurs ne semblent donc pas identiquement distribuées. Pour s'en assurer il est aussi possible de tracer les résidus. Pour une régression simple, les deux choix sont possibles, mais pour une régression multiple, seul le tracé des résidus sera réalisable. Enfin l'intervalle de confiance à 95 % est éloigné de la droite. Cet intervalle peut être vu comme « le modèle peut être n'importe quelle droite dans cette bande ». Il en découle que la qualité de l'estimation ne semble pas être très bonne.

- Dans une optique de prévision, il est nécessaire de s'intéresser à la qualité de prévision. Cette qualité peut être envisagée de manière succincte grâce à l'intervalle de confiance des prévisions. Afin de bien le distinguer de celui de la droite, nous figurons les deux sur le même graphique.

```
plot(03~T12,data=ozone,ylim=c(0,150))
T12 <- seq(min(ozone[, "T12"]), max(ozone[, "T12"]), length=100)
grille <- data.frame(T12)
ICdte <- predict(reg,new=grille,interval="conf",level=0.95)
ICprev <- predict(reg,new=grille,interval="pred",level=0.95)
matlines(T12,cbind(ICdte,ICprev[,-1]),lty=c(1,2,2,3,3),col=1)
legend(8,145,lty=2:3,c("prev","E(y)"))
```



**Fig. 1.15.** Droite de régression et intervalles de confiance pour  $Y$  et pour  $\mathbb{E}(Y)$ .

Afin d'illustrer les équations des intervalles de confiance pour les prévisions et la droite ajustée (équations (1.6) et (1.7), p. 21), nous remarquons bien évidemment que l'intervalle de confiance des prévisions est plus grand que l'intervalle de confiance de la droite de régression. L'intervalle de confiance de la droite de régression admet une forme hyperbolique.

- Si nous nous intéressons au rôle des variables, nous pouvons calculer les intervalles de confiance des paramètres. Ce calcul n'est pas automatique mais il est relativement simple (voir équation 1.5 p. 19). Il nécessite d'utiliser les informations sur les coefficients contenues dans l'objet `resume` et plus particulièrement les estimations des coefficients et les estimations de leur écart-type. Cette extraction est faite à l'aide de la fonction `coef()` et permet d'obtenir la matrice 2 lignes  $\times$  4 colonnes contenant toutes ces informations.

```

seuil <- qt(0.975,df=a$df.res)
beta1min <- coef(resume)[1,1]-seuil*coef(resume)[1,2]
beta1max <- coef(resume)[1,1]+seuil*coef(resume)[1,2]
c(beta1min,beta1max)
[1] 5.159232 57.670715
beta2min <- coef(resume)[2,1]-seuil*coef(resume)[2,2]
beta2max <- coef(resume)[2,1]+seuil*coef(resume)[2,2]
c(beta2min,beta2max)
[1] 1.441180 3.960890

```

L'intervalle de confiance à 95 % sur l'ordonnée à l'origine est étendu (52.5). Cela provient des erreurs (l'estimation de  $\sigma$  est de 20.5), mais surtout du fait que les températures sont en moyenne très loin de 0. Cependant ce coefficient ne fait pas très souvent l'objet d'interprétation.

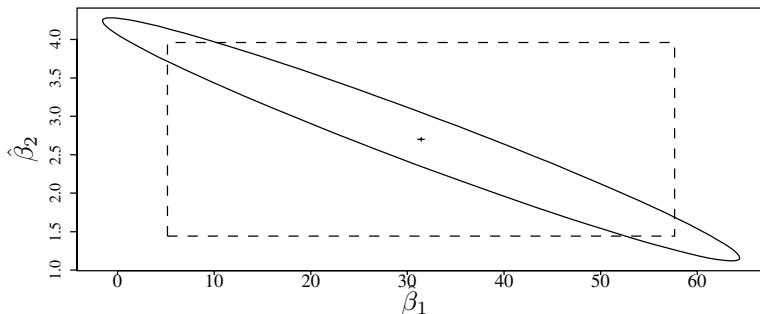
L'autre IC à 95 % est moins étendu (2.5). Nous constatons qu'il semble exister un effet de la température sur les pics d'ozone, bien que l'on se pose la question de la validité de l'hypothèse linéaire, et donc de la conclusion énoncée ci-dessus.

- Pour aller plus loin, il est possible de tracer la région de confiance simultanée des deux paramètres, ce qui est rarement fait en pratique. Nous pouvons la comparer aux intervalles de confiance au même degré de confiance. Cette comparaison illustre uniquement la différence entre intervalle simple et région de confiance. En général l'utilisateur de la méthode choisit l'une ou l'autre forme. Pour cette comparaison, nous utilisons les commandes suivantes :

```

library(ellipse)
plot(ellipse(reg,level=0.95),type="l",xlab="beta1",ylab="beta2")
points(coef(reg)[1], coef(a)[2],pch=3)
##### comparaison avec IC
lines(c(beta1min,beta1min,beta1max,beta1max,beta1min),
      c(beta2min,beta2max,beta2max,beta2min,beta2min),lty=2)
plot(ellipse(a,level=0.95),type="l",xlab="beta1",ylab="beta2")
points(a$coefficients[1], a$coefficients[2],pch=3)
lines(c(beta1min,beta1min,beta1max,beta1max,beta1min),
      c(beta2min,beta2max,beta2max,beta2min,beta2min),lty=2)

```



**Fig. 1.16.** Région de confiance simultanée des deux paramètres.

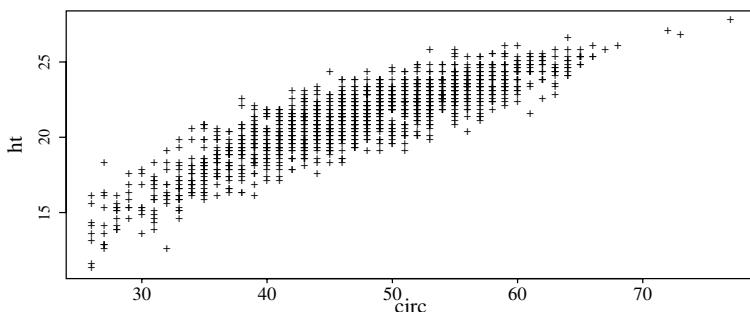
Les axes de l'ellipse ne sont pas parallèles aux axes du graphique, les deux estimateurs sont corrélés. Nous retrouvons que la corrélation entre les deux estimateurs est toujours négative (ou nulle), le grand axe de l'ellipse ayant une pente négative. Nous observons bien sûr une différence entre le rectangle de confiance, juxtaposition des deux intervalles de confiance et l'ellipse.

### 1.7.2 La hauteur des eucalyptus

Nous allons reprendre le même schéma que celui de l'exemple de la prévision d'ozone.

- Pour une régression simple, nous commençons toujours par représenter les données.

```
plot(ht~circ,data=eucalyptus,xlab="circ",ylab="ht")
```



**Fig. 1.17.** Représentation des mesures pour les  $n = 1429$  eucalyptus mesurés.

Cela nous permet de savoir qu'une régression simple semble indiquée, les points étant disposés grossièrement le long d'une droite. Trois arbres semblent avoir

des hauteurs et circonférences très élevées, supérieurs à 70 cm.

- Nous effectuons ensuite la régression linéaire, c'est-à-dire la phase d'estimation.

```
reg <- lm(ht~circ,data=eucalypt)
```

Afin de consulter les résultats, nous effectuons

```
resume <- summary(reg)
resume
```

et nous obtenons alors le résultat de la phase d'estimation

```
Call:
lm(formula = ht ~ circ, data = eucalypt)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-4.76589	-0.78016	0.05567	0.82708	3.69129

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	9.037476	0.179802	50.26	<2e-16 ***
circ	0.257138	0.003738	68.79	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ',' 1

Residual standard error: 1.199 on 1427 degrees of freedom  
Multiple R-Squared: 0.7683, Adjusted R-squared: 0.7682  
F-statistic: 4732 on 1 and 1427 DF, p-value: < 2.2e-16

Nous retrouvons comme sortie la matrice des informations sur les coefficients, matrice qui comporte 4 colonnes et autant de lignes que de coefficients (voir 1.7.1, p. 23). Les tests de nullité des deux coefficients indiquent qu'ils semblent tous deux significativement non nuls (quand l'autre coefficient est fixé à la valeur estimée).

Le résumé de l'étape d'estimation fait figurer l'estimation de  $\sigma$  qui vaut ici 1.199 ainsi que le nombre  $n - 2 = 1427$  qui est le nombre de degrés de liberté associés, par exemple, aux tests d'hypothèse  $H_0 : \beta_i = 0$  contre  $H_1 : \beta_i \neq 0$ .

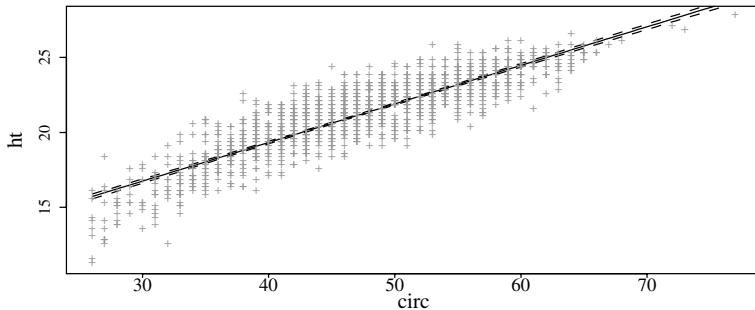
La valeur du  $R^2$  est également donnée, ainsi que le  $R_a^2$  ajusté (voir la définition 2.4 p. 45). La valeur du  $R^2$  est élevée ( $R^2 = 0.7683$ ) et nous retrouvons la remarque déjà faite (fig. 1.17) : une régression linéaire simple semble adaptée.

Le test  $F$  entre le modèle utilisé et le modèle n'utilisant que la constante comme variable explicative indique que la circonférence est explicative et que l'on repousse le modèle utilisant que la constante comme variable explicative au profit du modèle de régression simple. Ce test n'est pas très utile ici car il

équivaut au test de nullité  $H_0 : \beta_2 = 0$  contre  $H_1 : \beta_2 \neq 0$ . De plus, dès la première étape, nous avions remarqué que les points s'étiraient le long d'une droite dont le coefficient directeur était loin d'être nul.

- Afin d'examiner la qualité du modèle et des observations, nous traçons la droite ajustée et les observations. Comme il existe une incertitude dans les estimations, nous traçons aussi un intervalle de confiance de la droite (à 95 %).

```
plot(ht~circ,data=eucalypt,pch="+",col="grey60")
grille <- data.frame(seq(min(eucalypt[,"circ"]),
                           max(eucalypt[,"circ"])),length=100)
ICdte <- predict(reg,new=grille,interval="confi",level=0.95)
matlines(grille$circ,ICdte, lty=c(1,2,2),col=1)
```



**Fig. 1.18.** Données de circonférence/hauteur et ajustement linéaire obtenu.

Ce graphique permet de vérifier visuellement si une régression est correcte, c'est-à-dire de constater la qualité d'ajustement de notre modèle. Nous constatons que les observations sont globalement bien ajustées par le modèle, mais les faibles valeurs de circonférences semblent en majorité situées en dessous de la courbe. Ceci indique qu'un remplacement de cette droite par une courbe serait une amélioration possible. Peut être qu'un modèle de régression simple du type

$$\text{ht} = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{\text{circ}} + \varepsilon,$$

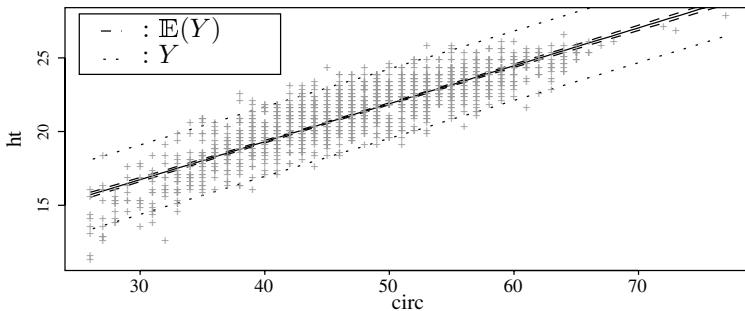
serait plus adapté. Remarquons aussi que les 3 circonférences les plus fortes (supérieures à 70 cm) sont bien ajustées par le modèle. Ces 3 individus sont donc différents en terme de circonférence mais bien ajustés par le modèle.

Enfin, l'intervalle de confiance à 95 % est proche de la droite. Cet intervalle peut être vu comme « le modèle peut être n'importe quelle droite dans cette bande ». Il en découle que la qualité de l'estimation semble être très bonne, ce qui est normal car le nombre d'individus (i.e. le nombre d'arbres) est très élevé

et les données sont bien réparties le long d'une droite.

- Dans une optique de prévision, il est nécessaire de s'intéresser à la qualité de prévision. Cette qualité peut être envisagée de manière succincte grâce aux intervalles de confiance, de la droite ajustée et des prévisions.

```
plot(ht~circ,data=eucalypt,pch="+",col="grey60")
circ <- seq(min(eucalypt[,"circ"]),max(eucalypt[,"circ"]),len=100)
grille <- data.frame(circ)
ICdte <- predict(reg,new=grille,interval="conf",level=0.95)
ICprev <- predict(reg,new=grille,interval="pred",level=0.95)
matlines(circ,cbind(ICdte,ICprev[,-1]),lty=c(1,2,2,3,3),col=1)
```



**Fig. 1.19.** Droite de régression et intervalles de confiance pour  $Y$  et pour  $\mathbb{E}(Y)$ .

Rien de notable sur l'intervalle de prévision, mis à part le fait qu'il est nécessaire de bien distinguer l'intervalle de confiance de la droite et de la prévision.

## 1.8 Exercices

### Exercice 1.1 (Questions de cours)

1. Lors d'une régression simple, si le  $R^2$  vaut 1, les points sont-ils alignés ?
  - Non ;
  - Oui ;
  - Pas obligatoirement.
2. La droite des MC d'une régression simple passe-t-elle par le point  $(\bar{x}, \bar{y})$  ?
  - Toujours ;
  - Jamais ;
  - Parfois.
3. Nous avons effectué une régression simple, nous recevons une nouvelle observation  $x_N$  et nous calculons la prévision correspondante  $\hat{y}_N$ . La variance de la valeur prévue est minimale lorsque
  - $x_N = 0$  ;

- B.  $x_N = \bar{x}$  ;  
 C. aucun rapport.
4. Le vecteur  $\hat{Y}$  est-il orthogonal au vecteur des résidus estimés  $\hat{\varepsilon}$  ?  
 A. Toujours ;  
 B. Jamais ;  
 C. Parfois.

**Exercice 1.2 (Biais des estimateurs)**

Calculer le biais de  $\hat{\beta}_2$  et  $\hat{\beta}_1$ .

**Exercice 1.3 (Variance de  $\hat{\beta}_2$ )**

Calculer la variance de  $\hat{\beta}_2$ .

**Exercice 1.4 (Variance de  $\hat{\beta}_1$ )**

Calculer la variance de  $\hat{\beta}_1$  (indice : calculer la covariance entre  $\bar{y}$  et  $\hat{\beta}_2$ ).

**Exercice 1.5 (Covariance de  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ )**

Calculer la covariance entre  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ .

**Exercice 1.6 ( $\dagger$ Théorème de Gauss-Markov)**

Démontrer le théorème de Gauss-Markov en posant  $\tilde{\beta}_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ , un estimateur linéaire quelconque (indice : trouver deux conditions sur la somme des  $\lambda_i$  pour que  $\tilde{\beta}_2$  ne soit pas biaisé, puis calculer la variance en introduisant  $\tilde{\beta}_2$ ).

**Exercice 1.7 (Somme des résidus)**

Montrer que, dans un modèle de régression linéaire simple, la somme des résidus est nulle.

**Exercice 1.8 (Estimateur de la variance du bruit)**

Montrer que, dans un modèle de régression linéaire simple, la statistique  $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 / (n - 2)$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

**Exercice 1.9 (Variance de  $\hat{y}_{n+1}^p$ )**

Calculer la variance de  $\hat{y}_{n+1}^p$ .

**Exercice 1.10 (Variance de l'erreur de prévision)**

Calculer la variance de  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p$ .

**Exercice 1.11 ( $R^2$  et coefficient de corrélation)**

Démontrer que le  $R^2$  est égal au carré du coefficient de corrélation empirique entre les  $x_i$  et les  $y_i$ .

**Exercice 1.12 (Les arbres)**

Nous souhaitons exprimer la hauteur  $y$  d'un arbre d'une essence donnée en fonction de son diamètre  $x$  à 1 m 30 du sol. Pour ce faire, nous avons mesuré

20 couples « diamètre-hauteur ». Nous avons effectué les calculs suivants :

$$\bar{x} = 34.9 \quad \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 28.29 \quad \bar{y} = 18.34$$

$$\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 2.85 \quad \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 6.26.$$

1. On note  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ , la droite de régression. Donner l'expression de  $\hat{\beta}_1$  en fonction des statistiques élémentaires ci-dessus. Calculer  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$ .
2. Donner et commenter une mesure de la qualité de l'ajustement des données au modèle. Exprimer cette mesure en fonction des statistiques élémentaires.
3. Cette question traite des tests qui seront vus au chapitre 3. Cependant cette question peut être résolue grâce à la section exemple. Les estimations des écarts-types de  $\hat{\beta}_0$  et de  $\hat{\beta}_1$  donnent  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = 1.89$  et  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.05$ . Testez  $H_0 : \beta_j = 0$  contre  $H_1 : \beta_j \neq 0$  pour  $j = 0, 1$ . Pourquoi ce test est-il intéressant dans notre contexte ? Que pensez-vous du résultat ?

### Exercice 1.13 (Modèle quadratique)

Au vu du graphique 1.13, nous souhaitons modéliser l'ozone par la température au carré.

1. Ecrire le modèle et estimer les paramètres.
2. Comparer ce modèle au modèle linéaire classique.

## 1.9 Notes : estimateurs du maximum de vraisemblance

Lorsque nous supposons que les résidus suivent une loi normale, le modèle de régression devient le modèle paramétrique  $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{N}(\beta_1 + \beta_2 x, \sigma^2)\}$ , où  $\beta_1, \beta_2, \sigma^2$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+$  respectivement. La loi des  $\varepsilon_i$  étant connue, nous en déduisons la loi des  $y_i$ . Nous calculons la vraisemblance de l'échantillon ainsi que les estimateurs qui maximisent cette vraisemblance.

Puisque les  $y_i$  valent par hypothèse  $\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ , nous savons grâce à  $\mathcal{H}_3$  que la loi des  $y_i$  est une loi normale de moyenne  $\beta_1 + \beta_2 x_i$  et de variance  $\sigma^2$ . L'indépendance des  $\varepsilon_i$  entraîne l'indépendance des  $y_i$ . La vraisemblance vaut alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n f(y_i) \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 \right] \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} S(\beta_1, \beta_2) \right].
\end{aligned}$$

En passant au logarithme, nous obtenons :

$$\log \mathcal{L}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta_1, \beta_2).$$

Calculons les dérivées par rapport à  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\sigma^2$  :

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \log \mathcal{L}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2)}{\partial \beta_1} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial S(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i), \\
\frac{\partial \log \mathcal{L}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2)}{\partial \beta_2} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial S(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i), \\
\frac{\partial \log \mathcal{L}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2.
\end{aligned}
\right.$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  sont identiques aux estimateurs obtenus par les MC. L'estimateur de  $\sigma^2$  vaut

$$\hat{\sigma}_{mv}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2.$$

L'estimateur du MV de  $\sigma^2$  est donc biaisé car différent de l'estimateur des MC qui, lui, est non biaisé. Cela veut dire que  $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_{mv}^2) \neq \sigma^2$ .

# Chapitre 2

## La régression linéaire multiple

### 2.1 Introduction

La modélisation de la concentration d'ozone dans l'atmosphère évoquée au chapitre 1 est relativement simpliste. En effet, des variables météorologiques autres que la température peuvent expliquer cette concentration, comme par exemple le rayonnement, la précipitation ou encore le vent qui déplace les masses d'air. L'association Air Breizh mesure ainsi en même temps que la concentration d'ozone les variables météorologiques susceptibles d'avoir une influence sur celle-ci. Voici quelques-unes de ces données :

**Tableau 2.1.** 10 données journalières.

Individu	03	T12	Vx	Né12
1	63.6	13.4	9.35	7
2	89.6	15	5.4	4
3	79	7.9	19.3	8
4	81.2	13.1	12.6	7
5	88	14.1	-20.3	6
6	68.4	16.7	-3.69	7
7	139	26.8	8.27	1
8	78.2	18.4	4.93	7
9	113.8	27.2	-4.93	6
10	41.8	20.6	-3.38	8

La variable Vx est une variable synthétique représentant le vent. Le vent est normalement mesuré en degré (direction) et mètre par seconde (vitesse). La variable créée est la projection du vent sur l'axe est-ouest, elle tient compte de la direction et de la vitesse. La variable Né12 représente la nébulosité mesurée à 12 heures.

Pour analyser la relation entre la température (T12), le vent (Vx), la nébulosité à midi (Ne12) et l'ozone (O3), nous allons chercher une fonction  $f$  telle que

$$O3_i \approx f(T12_i, Vx_i, Ne12_i).$$

Afin de préciser le sens de  $\approx$ , il faut définir un critère positif quantifiant la qualité de l'ajustement de la fonction  $f$  aux données. Cette notion de coût permet d'appréhender de manière aisée les problèmes d'ajustement économique dans certains modèles. Minimiser un coût nécessite la connaissance de l'espace sur lequel on minimise, donc la classe de fonctions  $\mathcal{G}$  dans laquelle nous supposerons que se trouve la vraie fonction inconnue.

Le problème mathématique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\arg \min_{f \in \mathcal{G}} \sum_{i=1}^n l(y_i - f(x_{i1}, \dots, x_{ip})),$$

où  $n$  représente le nombre de données à analyser et  $l(\cdot)$  est appelée fonction de coût. La fonction de coût sera la même que celle utilisée précédemment, c'est-à-dire le coût quadratique. En ce qui concerne le choix de la classe  $\mathcal{G}$ , nous utiliserons pour commencer la classe des fonctions linéaires :

$$\mathcal{F} = \left\{ f : f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p \beta_j x_j \quad \text{avec} \quad \beta_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, p\} \right\}.$$

## 2.2 Modélisation

Le modèle de régression multiple est une généralisation du modèle de régression simple lorsque les variables explicatives sont en nombre fini. Nous supposons donc que les données collectées suivent le modèle suivant :

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

où

- les  $x_{ij}$  sont des nombres connus, non aléatoires. La variable  $x_{i1}$  peut valoir 1 pour tout  $i$  variant de 1 à  $n$ . Dans ce cas,  $\beta_1$  représente la constante (**intercept** dans les logiciels anglo-saxons). En statistiques, cette colonne de 1 est presque toujours présente.
- les paramètres à estimer  $\beta_j$  du modèle sont inconnus.
- les  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires inconnues.

En utilisant l'écriture matricielle de (2.1), nous obtenons la définition suivante.

### Définition 2.1 (Modèle de régression multiple)

*Un modèle de régression linéaire est défini par une équation de la forme*

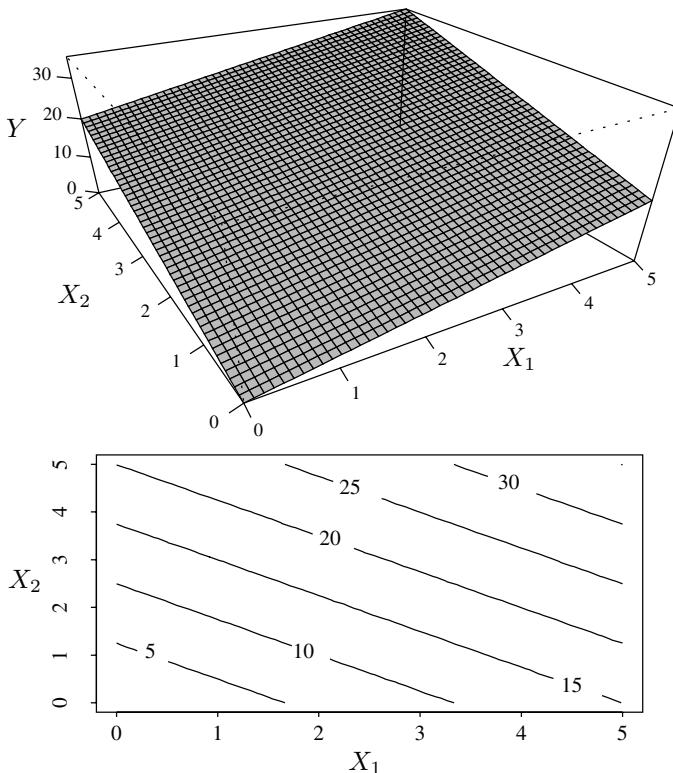
$$Y_{n \times 1} = X_{n \times p} \beta_{p \times 1} + \varepsilon_{n \times 1}. \quad (2.2)$$

où :

- $Y$  est un vecteur aléatoire de dimension  $n$ ,
- $X$  est une matrice de taille  $n \times p$  connue, appelée matrice du plan d'expérience,  $X$  est la concaténation des  $p$  variables  $X_j : X = (X_1|X_2|\dots|X_p)$ . Nous noterons la  $i^e$  ligne du tableau  $X$  par le vecteur ligne  $x'_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ ;
- $\beta$  est le vecteur de dimension  $p$  des paramètres inconnus du modèle;
- $\varepsilon$  est le vecteur centré, de dimension  $n$ , des erreurs.

Nous supposons que la matrice  $X$  est de plein rang. Cette hypothèse sera notée  $\mathcal{H}_1$ . Comme, en général, le nombre d'individus  $n$  est plus grand que le nombre de variables explicatives  $p$ , le rang de la matrice  $X$  vaut  $p$ .

La présentation précédente revient à supposer que la fonction liant  $Y$  aux variables explicatives  $X$  est un hyperplan représenté (fig. 2.1).



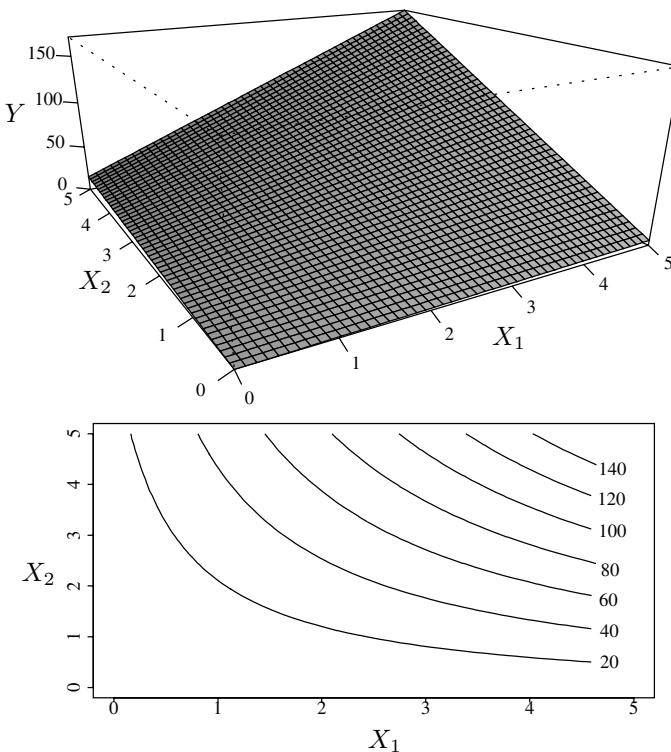
**Fig. 2.1.** Représentation géométrique de la relation  $Y = 3X_1 + 4X_2$ .

Il est naturel dans nombre de problèmes de penser que des interactions existent entre les variables explicatives. Dans l'exemple de l'ozone, nous pouvons penser que la température et le vent interagissent. Pour modéliser cette

interaction, nous écrivons en général un modèle avec un produit entre les variables explicatives qui interagissent. Ainsi, pour deux variables, nous avons la modélisation suivante :

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i1} x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Les produits peuvent s'effectuer entre deux variables définissant des interactions d'ordre 2, entre trois variables définissant des interactions d'ordre 3, etc.. D'un point de vue géométrique, cela donne (fig. 2.2) :



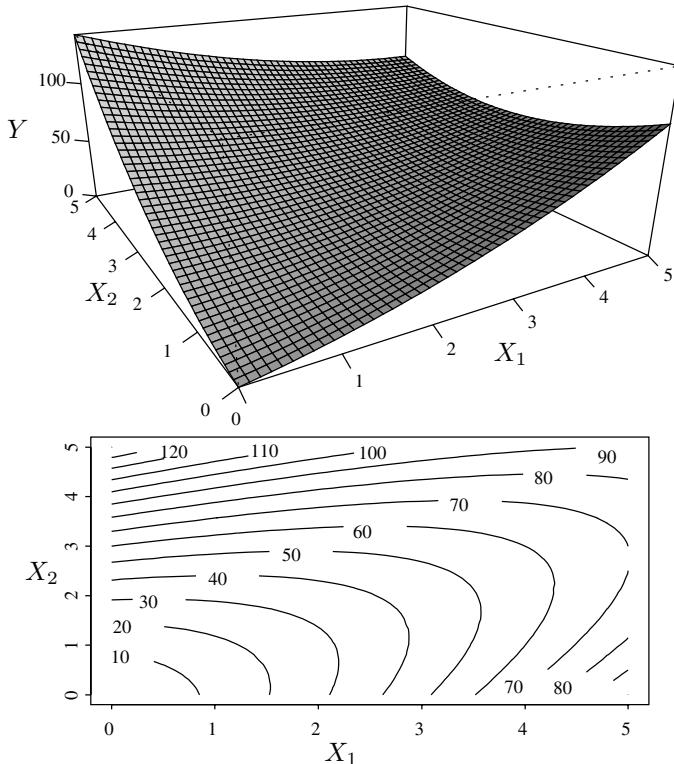
**Fig. 2.2.** Représentation géométrique de la relation  $y = X_1 + 3X_2 + 6X_1X_2$ .

Cependant ce type de modélisation rentre parfaitement dans le cadre de la régression multiple. Les variables d'interaction sont des produits de variables connues et sont donc connues. Dans l'exemple précédent, la troisième variable explicative  $X_3$  sera tout simplement le produit  $X_1X_2$  et nous retrouvons la modélisation proposée à la section précédente.

De même, d'autres extensions peuvent être utilisées comme le modèle de régression polynômial. En reprenant notre exemple à deux variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$ , nous pouvons proposer le modèle polynômial de degré 2 suivant :

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i1} x_{i2} + \beta_4 x_{i1}^2 + \beta_5 x_{i2}^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce modèle peut être remis dans la formulation de la section précédente en posant  $X_3 = X_1 X_2$ ,  $X_4 = X_1^2$  et  $X_5 = X_2^2$ . L'hypersurface ressemble alors à (fig. 2.3) :



**Fig. 2.3.** Représentation géométrique de la relation  $y = 10X_1 + 8X_2 - 6X_1X_2 + 2X_1^2 + 4X_2^2$ .

En conclusion nous pouvons considérer que n'importe quelle transformation connue et fixée des variables explicatives (logarithme, exponentielle, produit etc.) rentre dans le modèle de régression multiple. La transformée d'une variable explicative  $X_1$  par une fonction connue et fixe (log par exemple) devient  $X_i = \log(X_1)$  et le modèle reste donc un modèle de régression multiple. Par contre une transformation comme  $\exp\{-r(X_1 - k)\}$  qui est une fonction non linéaire de deux paramètres inconnus  $r$  et  $k$  ne rentre pas dans ce cadre. En effet ne connaissant pas  $r$  et  $k$  il est impossible de calculer  $\exp\{-r(X_1 - k)\}$  et donc de la noter  $X_i$ . Ce type de relation est traité dans Antoniadis *et al.* (1992).

Ainsi un modèle linéaire ne veut pas forcément dire que le lien entre variables explicatives et la variable à expliquer est linéaire mais que le *modèle est linéaire en les paramètres*.

## 2.3 Estimateurs des moindres carrés

### Définition 2.2 (Estimateur des MC)

On appelle estimateur des moindres carrés (noté MC)  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  la valeur suivante :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta_1, \dots, \beta_p}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} (Y - X\beta)'(Y - X\beta).$$

### Théorème 2.1 (Expression de l'estimateur des MC)

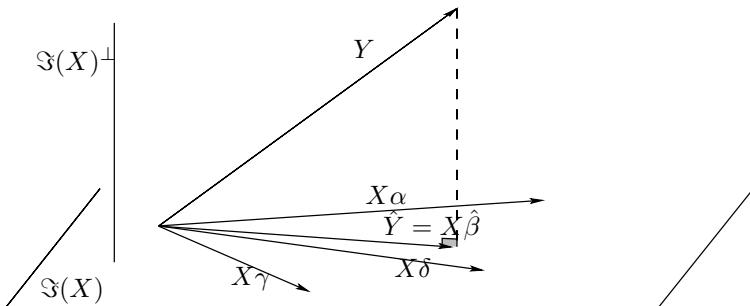
Si l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  est vérifiée, l'estimateur des MC  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  vaut

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

La section suivante est entièrement consacrée à ce résultat.

### 2.3.1 Calcul de $\hat{\beta}$

Il est intéressant de considérer les variables dans l'espace des variables ( $\mathbb{R}^n$ ). Ainsi,  $Y$ , vecteur colonne, définit dans  $\mathbb{R}^n$  un vecteur  $\overrightarrow{OY}$  d'origine  $O$  et d'extrémité  $Y$ . Ce vecteur a pour coordonnées  $(y_1, \dots, y_n)$ . La matrice  $X$  du plan d'expérience est formée de  $p$  vecteurs colonnes. Chaque vecteur  $X_j$  définit dans  $\mathbb{R}^n$  un vecteur  $\overrightarrow{OX_j}$  d'origine  $O$  et d'extrémité  $X_j$ . Ce vecteur a pour coordonnées  $(x_{1j}, \dots, x_{nj})$ . Ces  $p$  vecteurs linéairement indépendants (hypothèse  $\mathcal{H}_1$ ) engendrent un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , noté dorénavant  $\mathfrak{I}(X)$ , de dimension  $p$ .



**Fig. 2.4.** Représentation dans l'espace des variables.

Cet espace  $\mathfrak{I}(X)$ , appelé image de  $X$  (voir annexe B), est engendré par les colonnes de  $X$ . Il est parfois appelé espace des solutions. Ainsi, tout vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathfrak{I}(X)$  s'écrit de façon unique sous la forme suivante :

$$\vec{v} = \alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \dots + \alpha_p \overrightarrow{X_p} = X\alpha.$$

Selon le modèle (2.2), le vecteur  $Y$  est la somme d'un élément de  $\mathfrak{I}(X)$  et d'un bruit, élément de  $\mathbb{R}^n$ , qui n'a aucune raison d'appartenir à  $\mathfrak{I}(X)$ . Minimiser  $S(\beta)$  revient à chercher un élément de  $\mathfrak{I}(X)$  qui soit le plus proche de  $Y$ , au sens de la norme euclidienne classique. Par définition, cet unique élément est appelé projection orthogonale de  $Y$  sur  $\mathfrak{I}(X)$ . Il sera noté  $\hat{Y} = P_X Y$ , où  $P_X$  est la matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{I}(X)$ . Dans la littérature anglo-saxonne, cette matrice est souvent notée  $H$  et est appelée « hat matrix » car elle met des « hat » sur  $Y$ . Par souci de cohérence de l'écriture, nous noterons l'élément courant  $(i, j)$  de  $P_X$ ,  $h_{ij}$ . L'élément  $\hat{Y}$  de  $\mathfrak{I}(X)$  est aussi noté  $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ , où  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des MC de  $\beta$ . L'espace orthogonal à  $\mathfrak{I}(X)$  noté  $\mathfrak{I}(X)^\perp$  est souvent appelé espace des résidus. Le vecteur  $\hat{Y} = P_X Y$  contient les valeurs ajustées par le modèle de  $Y$ .

- Calcul de  $\hat{\beta}$  par projection :

Trois possibilités de calcul de  $\hat{\beta}$  sont proposées.

- La première consiste à connaître la forme analytique de  $P_X$ . La matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{I}(X)$  est donnée par :

$$P_X = X(X'X)^{-1}X'$$

et, comme  $P_X Y = X\hat{\beta}$ , nous obtenons  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ .

- La deuxième méthode utilise le fait que le vecteur  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  se décompose de façon unique en une partie sur  $\mathfrak{I}(X)$  et une partie sur  $\mathfrak{I}(X)^\perp$ , cela s'écrit :

$$Y = P_X Y + (I - P_X)Y.$$

La quantité  $(I - P_X)Y$  étant un élément de  $\mathfrak{I}(X)^\perp$  est orthogonale à tout élément  $v$  quelconque de  $\mathfrak{I}(X)$ . Rappelons que  $\mathfrak{I}(X)$  est l'espace engendré par les colonnes de  $X$ , c'est-à-dire que toutes les combinaisons linéaires de variables  $X_1, \dots, X_p$  sont éléments de  $\mathfrak{I}(X)$  ou encore que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , nous avons  $X\alpha \in \mathfrak{I}(X)$ . Les deux vecteurs  $v$  et  $(I - P_X)Y$  étant orthogonaux, le produit scalaire entre ces deux quantités est nul, soit :

$$\begin{aligned} \langle v, (I - P_X)Y \rangle &= 0 \quad \forall v \in \mathfrak{I}(X) \\ \langle X\alpha, (I - P_X)Y \rangle &= 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^p \\ \alpha' X'(I - P_X)Y &= 0 \\ X'Y &= X'P_X Y \quad \text{avec } P_X Y = X\hat{\beta} \\ X'Y &= X'X\hat{\beta} \quad X \text{ de rang plein} \\ \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y. \end{aligned}$$

Nous retrouvons  $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ , matrice de projection orthogonale sur l'espace engendré par les colonnes de  $X$ . Les propriétés caractéristiques d'un projecteur orthogonal ( $P_X' = P_X$  et  $P_X^2 = P_X$ ) sont vérifiées.

- La dernière façon de procéder consiste à écrire que le vecteur  $(I - P_X)Y$  est orthogonal à chacune des colonnes de  $X$  qui engendre  $\mathfrak{S}(X)$  :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \langle X_1, Y - X\hat{\beta} \rangle & = & 0 \\ \vdots & & \\ \langle X_p, Y - X\hat{\beta} \rangle & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X'Y = X'X\hat{\beta}.$$

Soit  $P_X = X(X'X)^{-1}X'$  la matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{S}(X)$ , la matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{S}(X)^\perp$  est  $P_{X^\perp} = (I - P_X)$ .

• Calcul matriciel

Nous pouvons aussi retrouver le résultat précédent de manière analytique en écrivant la fonction à minimiser  $S(\beta)$  :

$$\begin{aligned} S(\beta) &= Y'Y + \beta'X'X\beta - Y'X\beta - \beta'X'Y \\ &= Y'Y + \beta'X'X\beta - 2Y'X\beta. \end{aligned}$$

Une condition nécessaire d'optimum est que la dérivée première par rapport à  $\beta$  s'annule. Or la dérivée s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta,$$

d'où, s'il existe, l'optimum, noté  $\hat{\beta}$ , vérifie

$$-2X'Y + 2X'\hat{\beta} = 0$$

c'est-à-dire  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ .

Pour s'assurer que ce point  $\hat{\beta}$  est bien un minimum strict, il faut que la dérivée seconde soit une matrice définie positive. Or la dérivée seconde s'écrit

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = 2X'X,$$

et  $X$  est de plein rang donc  $X'X$  est inversible et n'a pas de valeur propre nulle. La matrice  $X'X$  est donc définie. De plus  $\forall z \in \mathbb{R}^p$ , nous avons

$$z'2X'Xz = 2\langle Xz, Xz \rangle = 2\|Xz\|^2 \geq 0$$

$(X'X)$  est donc bien définie positive et  $\hat{\beta}$  est bien un minimum strict.

### 2.3.2 Interprétation

Nous venons de voir que  $\hat{Y}$  est la projection de  $Y$  sur le sous-espace engendré par les colonnes de  $X$ . Cette projection existe et est unique même si l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. L'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  nous permet d'obtenir un  $\hat{\beta}$  unique. Dans ce cas, s'intéresser aux coordonnées de  $\hat{\beta}$  a un sens, et ces coordonnées sont les coordonnées de  $\hat{Y}$  dans le repère  $X_1, \dots, X_p$ . Ce repère n'a aucune raison d'être orthogonal et donc  $\hat{\beta}_j$  n'est pas la coordonnée de la projection de  $Y$  sur  $X_j$ . Nous avons

$$P_X Y = \hat{\beta}_1 X_1 + \dots + \hat{\beta}_p X_p.$$

Calculons la projection de  $Y$  sur  $X_j$ .

$$\begin{aligned} P_{X_j} Y &= P_{X_j} P_X Y \\ &= \hat{\beta}_1 P_{X_j} X_1 + \dots + \hat{\beta}_p P_{X_j} X_p \\ &= \hat{\beta}_j X_j + \sum_{i \neq j} \hat{\beta}_i P_{X_j} X_i. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est différente de  $\hat{\beta}_j X_j$  sauf si  $X_j$  est orthogonal à toutes les autres variables.

Lorsque toutes les variables sont orthogonales deux à deux, il est clair que  $(X'X)$  est une matrice diagonale

$$(X'X) = \text{diag}(\|X_1\|^2, \dots, \|X_p\|^2). \quad (2.3)$$

### 2.3.3 Quelques propriétés statistiques

Le statisticien cherche à vérifier que les estimateurs des MC que nous avons construits admettent de bonnes propriétés au sens statistique. Dans notre cadre de travail, cela peut se résumer en deux parties : l'estimateur des MC est-il sans biais et est-il de variance minimale dans sa classe d'estimateurs ?

Pour cela, nous supposons une seconde hypothèse notée  $\mathcal{H}_2$  indiquant que les erreurs sont centrées, de même variance (homoscédasticité) et non corrélées entre elles. L'écriture de cette hypothèse est  $\mathcal{H}_2 : \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I_n$ , avec  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ . Cette hypothèse nous permet de calculer

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}((X'X)^{-1} X' Y) = (X'X)^{-1} X' \mathbb{E}(Y) = (X'X)^{-1} X' X \beta = \beta.$$

L'estimateur des MC est donc sans biais. Calculons sa variance

$$\text{V}(\hat{\beta}) = \text{V}((X'X)^{-1} X' Y) = (X'X)^{-1} X' \text{V}(Y) X (X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

#### Proposition 2.1 ( $\hat{\beta}$ sans biais)

*L'estimateur  $\hat{\beta}$  des MC est un estimateur sans biais de  $\beta$  et sa variance vaut  $\text{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ .*

**Remarque**

Lorsque les variables sont orthogonales deux à deux, les composantes de  $\hat{\beta}$  ne sont pas corrélées entre elles puisque la matrice  $(X'X)$  est diagonale (2.3).

Le théorème de Gauss-Markov (cf. exercice 2.3), nous indique que parmi tous les estimateurs linéaires sans biais de  $\beta$ , l'estimateur obtenu par MC admet la plus petite variance :

**Théorème 2.2 (Gauss-Markov)**

*L'estimateur  $\hat{\beta}$  des MC est optimal parmi les estimateurs linéaires sans biais de  $\beta$ .*

**2.3.4 Résidus et variance résiduelle**

Les résidus sont définis par la relation suivante :

$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}.$$

En nous servant du modèle,  $Y = X\beta + \varepsilon$  et du fait que  $X\beta \in \mathfrak{I}(X)$ , nous avons une autre écriture des résidus :

$$\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = (I - P_X)Y = P_{X^\perp}Y = P_{X^\perp}\varepsilon.$$

Les résidus appartiennent donc à  $\mathfrak{I}(X)^\perp$  et cet espace est aussi appelé espace des résidus. Les résidus sont donc toujours orthogonaux à  $\hat{Y}$ .

Nous avons les propriétés suivantes (cf. exercice 2.2).

**Proposition 2.2 (Propriétés de  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{Y}$ )**

*Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , nous avons*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}) &= P_{X^\perp}\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \\ \text{V}(\hat{\varepsilon}) &= \sigma^2 P_{X^\perp} I P_{X^\perp}' = \sigma^2 P_{X^\perp} \\ \mathbb{E}(\hat{Y}) &= X\mathbb{E}(\hat{\beta}) = X\beta \\ \text{V}(\hat{Y}) &= \sigma^2 P_X \\ \text{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{Y}) &= 0.\end{aligned}$$

**Conclusion**

Les résidus estimés  $\hat{\varepsilon}$  de  $\varepsilon$  possèdent la même espérance que  $\varepsilon$ . En revanche les composantes de  $\hat{\varepsilon}$  sont généralement corrélées (fonction de  $X$ ). Si nous souhaitons obtenir des résidus estimés ayant des propriétés analogues aux résidus, il faudrait que :

- les éléments non diagonaux de  $P_X$  soient suffisamment petits ;
- les éléments diagonaux de  $P_X$  soient approximativement égaux.

Afin d'éliminer la non-homogénéité des variances des résidus estimés, nous préférerons utiliser les résidus normalisés définis par

$$r_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sigma\sqrt{1-h_{ii}}}.$$

Comme  $\sigma$  est inconnu, il est nécessaire de le remplacer par son estimateur. Les résidus, définis comme

$$t_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}},$$

sont appelés résidus studentisés. Nous étudierons les résidus plus en détail au chapitre 4.

Nous avons mentionné un estimateur de  $\sigma^2$  noté  $\hat{\sigma}^2$ . Un estimateur « naturel » de la variance résiduelle est donné par

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{n} \|\hat{\varepsilon}\|^2.$$

Or comme  $\|\hat{\varepsilon}\|^2$  est un scalaire, nous écrivons que ce scalaire est égal à sa trace puis, en nous servant de la propriété de la trace, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\|\hat{\varepsilon}\|^2) = \mathbb{E}[\text{tr}(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})] = \mathbb{E}[\text{tr}(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}')] = \text{tr}(\mathbb{E}[\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}']) = \text{tr}(\sigma^2 P_{X^\perp}) = \sigma^2(n-p).$$

La dernière égalité ci-dessus provient du fait que la trace d'un projecteur est égale à la dimension du sous-espace sur lequel on projette. Cet estimateur « naturel » est biaisé, afin d'obtenir un estimateur sans biais, nous définissons donc

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{n-p} = \frac{\text{SCR}}{n-p},$$

où SCR est la somme des carrés résiduelle.

### **Proposition 2.3 ( $\hat{\sigma}^2$ sans biais)**

*La statistique  $\hat{\sigma}^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .*

A partir de cet estimateur de la variance résiduelle, nous obtenons immédiatement un estimateur de la variance de  $\hat{\beta}$  en remplaçant  $\sigma^2$  par son estimateur :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \frac{\text{SCR}}{n-p}(X'X)^{-1}.$$

Nous avons donc un estimateur de l'écart-type de l'estimateur  $\hat{\beta}_j$  de chaque coefficient de la régression  $\beta_j$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{jj}}.$$

### 2.3.5 Prévision

Un des buts de la régression est de proposer des prévisions pour la variable à expliquer  $y$  lorsque nous avons de nouvelles valeurs de  $x$ . Soit une nouvelle valeur  $x'_{n+1} = (x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,p})$ , nous voulons prédire  $y_{n+1}$ . Or

$$y_{n+1} = x'_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1},$$

avec  $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}) = 0$ ,  $V(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$  et  $\text{Cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous pouvons prédire la valeur correspondante grâce au modèle ajusté

$$\hat{y}_{n+1}^p = x'_{n+1}\hat{\beta}.$$

Deux types d'erreurs vont entacher la prévision, la première due à l'incertitude sur  $\varepsilon_{n+1}$  et l'autre à l'incertitude due à l'estimation. Calculons la variance de l'erreur de prévision

$$\begin{aligned} V(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p) &= V(x'_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1} - x'_{n+1}\hat{\beta}) = \sigma^2 + x'_{n+1}V(\hat{\beta})x_{n+1} \\ &= \sigma^2(1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}). \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien l'incertitude due aux erreurs  $\sigma^2$  sur laquelle vient s'ajouter l'incertitude d'estimation.

#### Remarque

Puisque l'estimateur  $\hat{\beta}$  est un estimateur non biaisé de  $\beta$  et l'espérance de  $\varepsilon$  vaut zéro, les espérances de  $y_{n+1}$  et  $\hat{y}_{n+1}^p$  sont identiques. La variance de l'erreur de prévision s'écrit :

$$V(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p) = \mathbb{E}[(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p) - \mathbb{E}(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p)]^2 = \mathbb{E}(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p)^2.$$

Nous voyons donc ici que la variance de l'erreur de prévision est mesurée par l'erreur quadratique moyenne de prévision (EQMP). Nous retrouverons cette quantité, qui joue un rôle central dans l'évaluation de la qualité des modèles, au chapitre 6 (p. 143).

## 2.4 Interprétation géométrique

Le théorème de Pythagore donne directement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \|Y\|^2 &= \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 \\ &= \|X\hat{\beta}\|^2 + \|Y - X\hat{\beta}\|^2. \end{aligned}$$

Si la constante fait partie du modèle, alors nous avons toujours par le théorème de Pythagore

$$\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 = \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2$$

$$\text{SC totale} = \text{SC expliquée par le modèle} + \text{SC résiduelle}$$

$$\text{SCT} = \text{SCE} + \text{SCR}.$$

**Définition 2.3 ( $R^2$ )**

Le coefficient de détermination (multiple)  $R^2$  est défini par

$$R^2 = \frac{\|\hat{Y}\|^2}{\|Y\|^2} = \cos^2 \theta_0$$

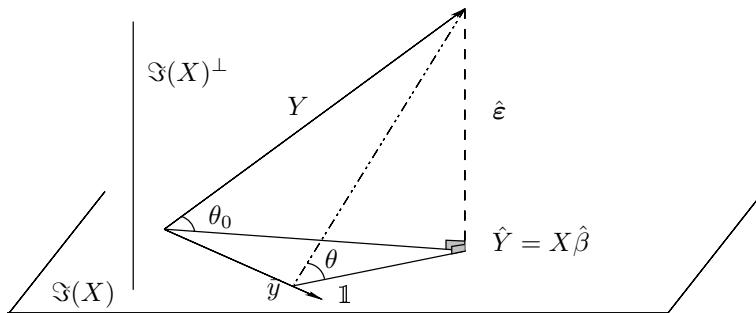
et si la constante fait partie de  $\mathfrak{I}(X)$  par

$$R^2 = \frac{V. expliquée par le modèle}{Variation totale} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbb{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2} = \cos^2 \theta.$$

Le  $R^2$  peut aussi s'écrire en fonction des résidus (voir l'exercice 3.3) :

$$R^2 = 1 - \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2}.$$

Ce coefficient mesure le cosinus carré de l'angle entre les vecteurs  $Y$  et  $\hat{Y}$  pris à l'origine ou pris en  $\bar{y}$ . Ce dernier est toujours plus grand que le premier, le  $R^2$  calculé lorsque la constante fait partie de  $\mathfrak{I}(X)$  est donc plus petit que le  $R^2$  calculé directement.



**Fig. 2.5.** Représentation des variables et interprétation géométrique du  $R^2$ .

Ce coefficient ne tient pas compte de la dimension de  $\mathfrak{I}(X)$ , un  $R^2$  ajusté est donc défini :

**Définition 2.4 ( $R^2$  ajusté)**

Le coefficient de détermination ajusté  $R_a^2$  est défini par

$$R_a^2 = 1 - \frac{n}{n-p} \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{\|Y\|^2}$$

et, si la constante fait partie de  $\mathfrak{I}(X)$ , par

$$R_a^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p} \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2}.$$

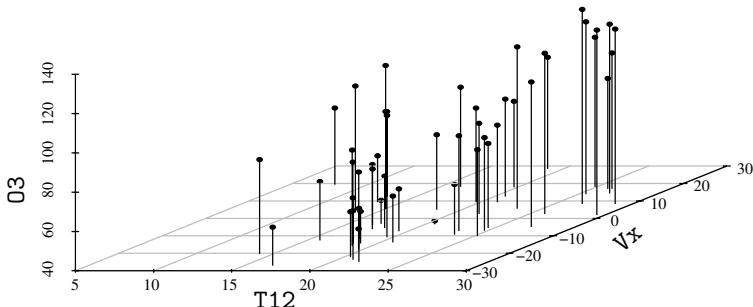
L'ajustement correspond à la division des normes au carré par leur degré de liberté (ou dimension du sous-espace auquel le vecteur appartient) respectif.

## 2.5 Exemples

### 2.5.1 La concentration en ozone

Nous expliquons l'ozone (03) par deux variables explicatives, la température à 12 h (T12) et le vent (Vx). Le vent est mesuré en degré (direction) et mètre par seconde (vitesse). Nous avons synthétisé ces 2 variables en créant une variable (Vx) qui est la projection du vent sur l'axe est-ouest. Nous avons  $n = 50$  observations. Nous avons choisi 2 variables explicatives afin de pouvoir continuer à représenter directement les données et le modèle. Au-delà de 2 variables explicatives, il est impossible de visualiser simplement les données. Nous commençons notre étude, à l'image de la régression simple, en traçant les données.

```
ozone <- read.table("ozone.txt", header=T, sep=";")
library("scatterplot3d")
scatterplot3d(ozone[, "T12"] , ozone[, "Vx"] , ozone[, "O3"] , type="h",
              pch=16, box=FALSE, xlab="T12", ylab="Vx", zlab="O3")
```



**Fig. 2.6.** Représentation brute des données : modèle d'explication de l'ozone (03) par la température à 12 h (T12) et le vent (Vx).

Il est maintenant très difficile de voir si une regression est adaptée, ce qui signifie ici que les points ne doivent pas être très éloignés d'un plan commun.

- Les phases d'estimation puis de synthèse des résultats obtenus sont conduites avec les ordres suivants :

```
regmulti <- lm(O3~T12+Vx, data=ozone)
summary(regmulti)
```

Rappelons que, classiquement, le statisticien inclut toujours une moyenne générale (ou `intercept`). Les logiciels de statistiques ne font pas exception à cette règle et ils intègrent automatiquement la moyenne générale, c'est-à-dire la variable  $X_1$  composée uniquement de 1. Le modèle de régression est donc

$$O3 = \beta_1 + \beta_2 T12 + \beta_3 Vx + \varepsilon$$

Le résumé permet de connaître les estimations des paramètres et de leur écart-type. Il donne aussi la qualité d'ajustement *via* le  $R^2$ , qui est ici moyenne ( $R^2 = 0.52$ ).

```
Call:
lm(formula = O3 ~ T12 + Vx, data = ozone)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-42.984	-10.152	-2.407	11.710	34.494

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	35.4530	10.7446	3.300	0.00185 **
T12	2.5380	0.5151	4.927	1.08e-05 ***
Vx	0.8736	0.1772	4.931	1.06e-05 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

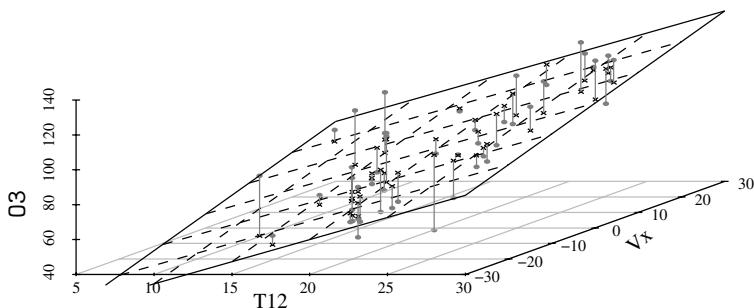
Residual standard error: 16.82 on 47 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.5249, Adjusted R-squared: 0.5047

F-statistic: 25.96 on 2 and 47 DF, p-value: 2.541e-08

L'estimation de  $\hat{\sigma}$  vaut ici 16.82 et nous avons  $n = 50$  pour  $p = 3$  variables, ce qui donne  $n - p = 47$  (degrés de liberté). Un résumé numérique des résidus est donné par le minimum, le maximum et les 3 quartiles.

Enfin, à l'issue de cette phase d'estimation, nous pouvons tracer notre modèle, le plan d'équation  $z = 35.453 + 2.538x + 0.8736y$ .



**Fig. 2.7.** Représentation des données et hyperplan.

Il est difficile d'avoir une idée de la qualité d'ajustement du modèle *via* une figure en 3 dimensions. En général la qualité d'un modèle sera envisagée par les résidus (chapitre 4).

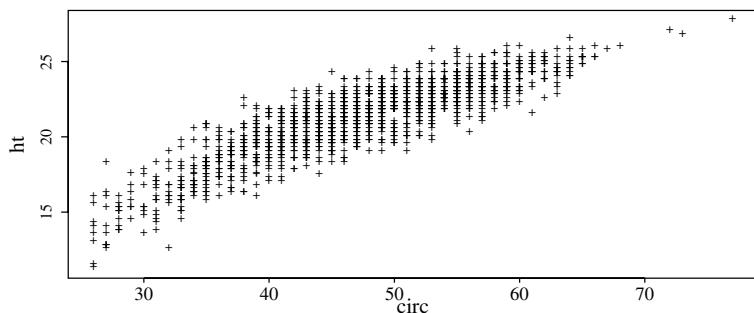
Nous avons ajouté la variable  $Vx$  au modèle présenté dans le chapitre 1, cet ajout est-il pertinent ? Afin de répondre correctement à cette question nous devons envisager de construire soit des procédures générales de choix de modèles (voir chapitre 6, p. 143), soit un test entre le modèle de la régression simple  $03 = \beta_1 + \beta_2 T12 + \varepsilon$  et le modèle plus complexe  $03 = \beta_1 + \beta_2 T12 + \beta_3 Vx + \varepsilon$ , ce qui est un des objets du prochain chapitre.

### 2.5.2 La hauteur des eucalyptus

Nous cherchons à expliquer la hauteur de  $n = 1429$  eucalyptus par leur circonférence. Nous avions mentionné dans le chapitre de la régression simple 1.7.2 p. 28 qu'un modèle du type

$$ht = \beta_1 + \beta_2 circ + \beta_3 \sqrt{circ} + \varepsilon,$$

serait peut-être plus adapté.



**Fig. 2.8.** Représentation des mesures pour les  $n = 1429$  eucalyptus mesurés.

- Le graphique des données est identique, puisque nous n'avons qu'une seule variable la circonference (`circ`).
- La phase d'estimation et la phase de résumé des estimations donnent les résultats ci-dessous. Notez l'opérateur `I()` qui permet de protéger<sup>1</sup> l'opération « racine carrée ». Bien qu'il ne soit pas obligatoire dans ce cas, il est préférable de s'habituer à son emploi.

```
regmult <- lm(ht~circ+I(sqrt(circ)),data=eucalypt)
resume.mult <- summary(regmult)
resume.mult
Call:
```

<sup>1</sup>Noter que le « + » qui sépare les deux variables dans la formule `ht~circ+I(sqrt(circ))` ne signifie pas que l'on additionne les 2 variables `circ` et  $\sqrt{circ}$ . Les opérateurs classiques (+, \*, ^) que l'on veut utiliser dans les formules doivent être protégés. Ici l'opérateur  $\sqrt{\cdot}$  est protégé par `I()`.

```
lm(formula = ht ~ circ + I(sqrt(circ)), data = eucalypt)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-4.18811 -0.68811  0.04272  0.79272  3.74814 

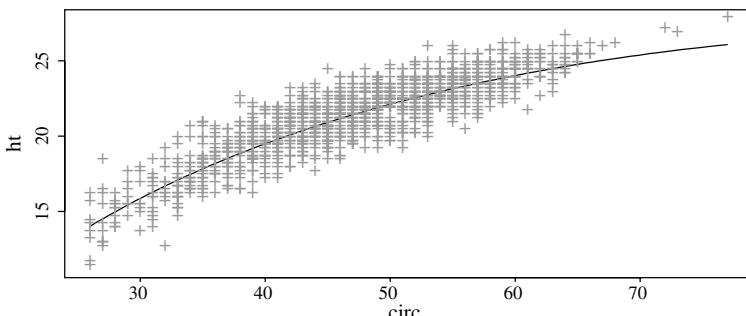
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -24.35200   2.61444 -9.314   <2e-16 ***  
circ         -0.48295   0.05793 -8.336   <2e-16 ***  
I(sqrt(circ)) 9.98689   0.78033 12.798   <2e-16 ***  
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.136 on 1426 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7922,      Adjusted R-squared: 0.7919 
F-statistic: 2718 on 2 and 1426 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

L'estimation des 3 coefficients est donnée dans la première colonne, suivie de leur écart-type estimé et du test de nullité du coefficient (voir prochain chapitre). L'estimation de  $\sigma$  donne ici 1.136, avec  $n - p = 1426$ . Le  $R^2$  augmente avec ce nouveau modèle et passe de de 0.768 à 0.792. Cela signifie que le modèle ajuste mieux les données avec une variable supplémentaire ( $\sqrt{circ}$ ). Ce phénomène est normal puisque l'on a projeté sur un sous-espace  $\Im(X)$  plus grand (on a ajouté une variable), la projection  $\hat{Y} = P_X Y$  est plus proche de  $Y$  avec le grand modèle et donc le  $R^2$  est meilleur (voir 6.4 p. 157). Le  $R^2$  n'est donc pas adapté pour juger de la pertinence de l'ajout de variables.

- La qualité d'ajustement peut être envisagée graphiquement grâce aux ordres suivants :

```
plot(ht~circ,data=eucalypt,pch="+",col="grey60")
```



**Fig. 2.9.** Représentation des données et du modèle ajusté.

Nous pouvons constater que le modèle semble très bien ajusté pour la plupart des valeurs de circonférence, sauf pour les grandes valeurs ( $\text{circ} > 65 \text{ cm}$ ) où l'ajustement est toujours plus faible que la valeur mesurée. Ce modèle est donc adéquat pour des valeurs jusqu'à 60-65 cm de circonférence mais inadapté au-delà.

## 2.6 Exercices

### Exercice 2.1 (Questions de cours)

1. Nous avons effectué une régression multiple, une des variables explicatives est la constante, la somme des résidus calculés vaut :
  - A. 0 ;
  - B. approximativement 0 ;
  - C. parfois 0.
2. Le vecteur  $\hat{Y}$  est-il orthogonal au vecteur des résidus estimés  $\hat{\varepsilon}$  ?
  - A. Oui ;
  - B. Non ;
  - C. Seulement si  $\mathbb{1}$  fait partie des variables explicatives.
3. Un estimateur de la variance de  $\hat{\beta}$  de l'estimateur des MC de  $\beta$  vaut :
  - A.  $\sigma^2(X'X)^{-1}$  ;
  - B.  $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$  ;
  - C.  $\hat{\sigma}^2(XX')^{-1}$ .
4. Un autre estimateur que celui des moindres carrés (moindres valeurs absolues par exemple ou d'autres encore) a été calculé. La SCR obtenue avec cet estimateur est :
  - A. plus petite que la SCR obtenue avec l'estimateur des MC classique ;
  - B. plus grande que la SCR obtenue avec l'estimateur des MC classique ;
  - C. aucun rapport.
5. Une régression a été effectuée et le calcul de la SCR a donné la valeur notée SCR1. Une variable est rajoutée, le calcul de la SCR a donné une nouvelle valeur notée SCR2. Nous savons que :
  - A.  $\text{SCR1} \leq \text{SCR2}$  ;
  - B.  $\text{SCR1} \geq \text{SCR2}$  ;
  - C. cela dépend de la variable rajoutée.
6. Une régression a été effectuée et un estimateur de la variance résiduelle a donné la valeur notée  $\hat{\sigma}_1^2$ . Une variable est rajoutée et un estimateur de la variance résiduelle vaut maintenant  $\hat{\sigma}_2^2$ . Nous savons que :
  - A.  $\hat{\sigma}_1^2 \leq \hat{\sigma}_2^2$  ;
  - B.  $\hat{\sigma}_1^2 \geq \hat{\sigma}_2^2$  ;
  - C. on ne peut rien dire.

### Exercice 2.2 (Covariance de $\hat{\varepsilon}$ et de $\hat{Y}$ )

Montrer que  $\text{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{Y}) = 0$ .

**Exercice 2.3 (†Théorème de Gauss-Markov)**

Démontrer le théorème de Gauss-Markov.

**Exercice 2.4 (Représentation des variables)**

Nous avons une variable  $Y$  à expliquer par une variable  $X$ . Nous avons effectué  $n = 2$  mesures et trouvé

$$(x_1, y_1) = (4, 5) \quad \text{et} \quad (x_2, y_2) = (1, 5).$$

Représenter les variables, estimer  $\beta$  dans le modèle  $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$  et représenter ensuite  $\hat{Y}$ .

Nous avons maintenant une variable  $Y$  à expliquer grâce à 2 variables  $X$  et  $Z$ , nous avons effectué  $n = 3$  mesures

$$(x_1, z_1, y_1) = (3, 2, 0), \quad (x_2, z_2, y_2) = (3, 3, 5) \quad \text{et} \quad (x_3, z_3, y_3) = (0, 0, 3).$$

Représenter les variables, estimer  $\beta$  dans le modèle  $y_i = \beta x_i + \gamma z_i + \varepsilon_i$  et représenter ensuite  $\hat{Y}$ .

**Exercice 2.5 (Modèles emboîtés)**

Soit  $X$  une matrice de taille  $n \times p$  composée de  $p$  vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^n$ . Nous notons  $X_q$  la matrice composée des  $q$  ( $q < p$ ) premiers vecteurs de  $X$ . Nous avons les deux modèles suivants :

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon \\ Y &= X_q\gamma + \epsilon. \end{aligned}$$

Comparer les  $R^2$  dans les deux modèles.

**Exercice 2.6**

On examine l'évolution d'une variable  $Y$  en fonction de deux variables exogènes  $x$  et  $z$ . On dispose de  $n$  observations de ces variables. On note  $X = (\mathbf{1} \ x \ z)$  où  $\mathbf{1}$  est le vecteur constant et  $x, z$  sont les vecteurs des variables explicatives.

1. Nous avons obtenu les résultats suivants :

$$X'X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ ? & 10 & 7 \\ ? & ? & 15 \end{pmatrix}.$$

- (a) Donner les valeurs manquantes.  
 (b) Que vaut  $n$ ?  
 (c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire empirique entre  $x$  et  $z$ .
2. La régression linéaire empirique de  $Y$  sur  $\mathbf{1}, x, z$  donne

$$Y = -2\mathbf{1} + x + 2z + \hat{\varepsilon}, \quad \text{SCR} = \|\hat{\varepsilon}\|^2 = 12.$$

- (a) Déterminer la moyenne arithmétique  $\bar{Y}$ .
- (b) Calculer la somme des carrés expliquée (SCE), la somme des carrés totale (SCT) et le coefficient de détermination.

**Exercice 2.7 (Régression orthogonale)**

Nous considérons le modèle de régression linéaire

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

où  $Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $X$  est une matrice de taille  $n \times p$  composée de  $p$  vecteurs orthogonaux,  $\beta \in \mathbb{R}^p$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ . Considérons  $U$  la matrice des  $q$  premières colonnes de  $X$  et  $V$  la matrice des  $p - q$  dernières colonnes de  $X$ . Nous avons obtenu par les MC les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_X &= \hat{\beta}_1^X x_1 + \cdots + \hat{\beta}_p^X x_p \\ \hat{Y}_U &= \hat{\beta}_1^U x_1 + \cdots + \hat{\beta}_q^U x_q \\ \hat{Y}_V &= \hat{\beta}_{q+1}^V x_{q+1} + \cdots + \hat{\beta}_p^V x_p.\end{aligned}$$

Notons également SCE( $A$ ) la norme au carré de  $P_A Y$ .

1. Montrer que la  $\text{SCE}(X) = \text{SCE}(U) + \text{SCE}(V)$ .
2. Choisir une variable nommée  $x_I$ , montrer que l'estimation de  $\beta_I$  est identique quel que soit le modèle utilisé.

**Exercice 2.8 (†† Moindres carrés contraints)**

Nous considérons le modèle de régression

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

Nous définissons l'estimateur des MC classique et l'estimateur contraint par

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 \\ \hat{\beta}_c &= \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 \quad \text{sc} \quad R\beta = r,\end{aligned}$$

où  $R$  est une matrice de taille  $q \times p$  de rang  $q \leq p$  et  $r$  un vecteur de  $\mathbb{R}^q$ .

1. Calculer l'estimateur des moindres carrés.
2. Vérifier que l'estimateur des moindres carrés contraints vaut

$$\hat{\beta}_c = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}).$$

# Chapitre 3

## Inférence dans le modèle gaussien

Nous rappelons le contexte du chapitre précédent :

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times p} \beta_{p \times 1} + \varepsilon_{n \times 1},$$

sous les hypothèses

- $\mathcal{H}_1 : \text{rang}(X) = p.$
- $\mathcal{H}_2 : \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I_n.$

Nous allons désormais supposer que les erreurs suivent une loi normale et donc  $\mathcal{H}_2$  devient

- $\mathcal{H}_3 : \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n).$

Nous pouvons remarquer que  $\mathcal{H}_3$  contient  $\mathcal{H}_2$ . De plus, dans le cas gaussien,  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$  implique que les  $\varepsilon_i$  sont indépendants. L'hypothèse  $\mathcal{H}_3$  s'écrit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  sont i.i.d. et de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

L'hypothèse gaussienne va nous permettre de calculer la vraisemblance et donc les estimateurs du maximum de vraisemblance (EMV). Cette hypothèse va nous permettre également de calculer des régions de confiance et de proposer des tests. C'est l'objectif de ce chapitre.

### 3.1 Estimateurs du maximum de vraisemblance

Calculons la vraisemblance de l'échantillon. La vraisemblance est la densité de l'échantillon vue comme fonction des paramètres. Grâce à l'indépendance des erreurs, les observations sont indépendantes et la vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f_Y(y_i) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 \right].$$

Nous avons donc

$$\mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \|y - X\beta\|^2 \right],$$

ce qui donne

$$\log \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|^2.$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2)}{\partial \beta} = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (\|Y - X\beta\|^2), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \|Y - X\beta\|^2. \quad (3.2)$$

A partir de (3.1), nous avons évidemment  $\hat{\beta}_{MV} = \hat{\beta}$  et à partir de (3.2) nous avons

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\beta}_{MV}\|^2}{n}$$

et donc que  $\hat{\sigma}_{MV}^2 = (n - p)\hat{\sigma}^2/n$ . L'estimateur du MV est donc biaisé par opposition à  $\hat{\sigma}^2$ , l'estimateur obtenu par les MC. Afin de vérifier que nous avons bien un maximum, il faut étudier les dérivées secondes (à faire en exercice). Sous l'hypothèse supplémentaire  $\mathcal{H}_3$ , les propriétés établies au chapitre 2 sont toujours valides (sans biais, variance minimale). Nous pouvons toutefois établir de nouvelles propriétés.

## 3.2 Nouvelles propriétés statistiques

Grâce à l'hypothèse gaussienne, nous pouvons « améliorer » le théorème de Gauss-Markov. L'optimalité des estimateurs est élargie et nous ne considérons non plus les estimateurs linéaires sans biais, mais la classe plus grande des estimateurs sans biais. De plus, le théorème intègre désormais l'estimateur de  $\sigma^2$ . La preuve de ce théorème est à faire en exercice (voir exercice 3.7).

### Proposition 3.1

$(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est une statistique complète et  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est de variance minimum dans la classe des estimateurs sans biais.

Nous pouvons ensuite établir une proposition importante pour la construction des tests et régions de confiance.

### Proposition 3.2 (Lois des estimateurs : variance connue)

Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ , nous avons

- i)  $\hat{\beta}$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\beta$  et de variance  $\sigma^2(X'X)^{-1}$ ,
- ii)  $(n - p)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$  suit un  $\chi^2$  à  $n - p$  ddl ( $\chi_{n-p}^2$ ),
- iii)  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}^2$  sont indépendants.

**Preuve**

i)  $\hat{\beta}$  est fonction linéaire de variables gaussiennes et suit donc une loi normale. Cette loi est entièrement caractérisée par son espérance et sa variance calculées au chapitre précédent.

ii)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\beta}\|^2}{n-p} = \frac{1}{n-p}\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \frac{1}{n-p}\|P_{X^\perp}\varepsilon\|^2 = \frac{1}{n-p}\varepsilon' P_{X^\perp}\varepsilon.$$

Or  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$  et  $P_{X^\perp}$  est la matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{I}(X)^\perp$ , espace de dimension  $n-p$ . Nous obtenons le résultat par le théorème de Cochran (théorème B.1 p. 286).

iii) Remarquons que  $\hat{\beta}$  est fonction de  $P_X Y$  ( $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'P_X Y$ ) et  $\hat{\sigma}^2$  est fonction de  $(I - P_X)Y$ . Les vecteurs gaussiens  $\hat{Y}$  et  $\hat{\varepsilon}$  sont de covariance nulle et sont donc indépendants. Toute fonction fixe de  $\hat{Y}$  reste indépendante de toute fonction fixe de  $\hat{\varepsilon}$ , d'où le résultat.

Il en découle une proposition plus générale pour bâtir les régions de confiance.

**Proposition 3.3 (Lois des estimateurs : variance estimée)**

*Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ , nous avons*

i) pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{ii}}} \sim \mathcal{T}(n-p)$ .

ii) Soit  $R$  une matrice de taille  $q \times p$  de rang  $q$  ( $q \leq p$ ) alors la v.a.

$$\frac{1}{q\hat{\sigma}^2}(R(\hat{\beta} - \beta))' [R(X'X)^{-1}R']^{-1} R(\hat{\beta} - \beta) \sim \mathcal{F}_{q,n-p}.$$

**Preuve**

i) la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_j$  vaut  $\sigma^2[X'X]_{jj}^{-1}$ , nous avons alors

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{jj}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$\sigma^2$  est inconnue et estimée par  $\hat{\sigma}^2$ . La suite découle de l'utilisation des points (ii) et (iii) de la proposition précédente.

ii) Le rang de  $R$  vaut par hypothèse  $q \leq p$ , donc le rang de  $R(X'X)R'$  vaut  $q$ .  $R\hat{\beta}$  est un vecteur gaussien de moyenne  $R\beta$  et de variance  $\sigma^2 R(X'X)^{-1}R'$ . Nous avons donc

$$\frac{1}{\sigma^2}(R\hat{\beta} - R\beta)' [R(X'X)^{-1}R']^{-1} (R\hat{\beta} - R\beta) \sim \chi_q^2. \quad (3.3)$$

Or  $\sigma^2$  est inconnue. Afin de faire disparaître  $\sigma^2$  de l'équation (3.3), nous divisons le membre de gauche par  $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ . Rappelons que par (ii) nous savons que  $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$  suit un  $\chi^2$  divisé par son degré de liberté et que par (iii)  $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$  est indépendant du membre de gauche de l'équation (3.3). La suite découle donc de la définition d'une loi de Fisher (rapport de deux  $\chi^2$  indépendants divisés par leurs degrés de liberté respectifs).

### 3.3 Intervalles et régions de confiance

Les logiciels et certains ouvrages donnent des IC pour les paramètres pris séparément. Cependant ces IC ne tiennent pas compte de la dépendance des estimations. Il est possible d'obtenir des IC simultanés pour plusieurs paramètres. Le théorème ci-dessous détaille toutes les formes d'IC : simple ou simultané. C'est le théorème central de l'estimation par intervalle dont la démonstration est à faire à titre d'exercice (voir exercice 3.2).

**Théorème 3.1 (IC et RC des paramètres)**

i) Un IC, de niveau  $1 - \alpha$ , pour un  $\beta_j$  pour  $j = 1, \dots, p$  est donné par

$$\left[ \hat{\beta}_j - t_{n-p}(1 - \alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{jj}}, \quad \hat{\beta}_j + t_{n-p}(1 - \alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{jj}} \right].$$

ii) Un IC, de niveau  $1 - \alpha$ , pour  $\sigma^2$  est donné par

$$\left[ \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{c_2}, \quad \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{c_1} \right] \quad \text{où} \quad P(c_1 \leq \chi_{n-p}^2 \leq c_2) = 1 - \alpha.$$

iii) Une RC pour  $q$  ( $q \leq p$ ) paramètres  $\beta_j$  notés  $(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_q})$  de niveau  $1 - \alpha$  est donnée,

- lorsque  $\sigma$  est connue, par

$$\text{RC}_\alpha(R\beta) = \left\{ R\beta \in \mathbb{R}^q, \frac{1}{\sigma^2} [R(\hat{\beta} - \beta)]' [R(X'X)^{-1} R']^{-1} [R(\hat{\beta} - \beta)] \leq \chi_q^2(1 - \alpha) \right\}$$

- lorsque  $\sigma$  est inconnue, par

$$\text{RC}_\alpha(R\beta) = \left\{ R\beta \in \mathbb{R}^q, \frac{1}{q\hat{\sigma}^2} [R(\hat{\beta} - \beta)]' [R(X'X)^{-1} R']^{-1} [R(\hat{\beta} - \beta)] \leq f_{q,n-p}(1 - \alpha) \right\}, \quad (3.4)$$

où  $R$  est la matrice de taille  $q \times p$  dont tous les éléments sont nuls sauf les  $[R]_{ij_i}$  qui valent 1. Les valeurs  $c_1$  et  $c_2$  sont les fractiles d'un  $\chi_q^2$  et  $f_{q,n-p}(1 - \alpha)$  est le fractile de niveau  $(1 - \alpha)$  d'une loi de Fisher admettant  $(q, n - p)$  ddl.

**Exemple : différence entre intervalles et régions de confiance**

Nous souhaitons donner une RC pour  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , la matrice  $R$  est donnée par

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad R(\hat{\beta} - \beta) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix}.$$

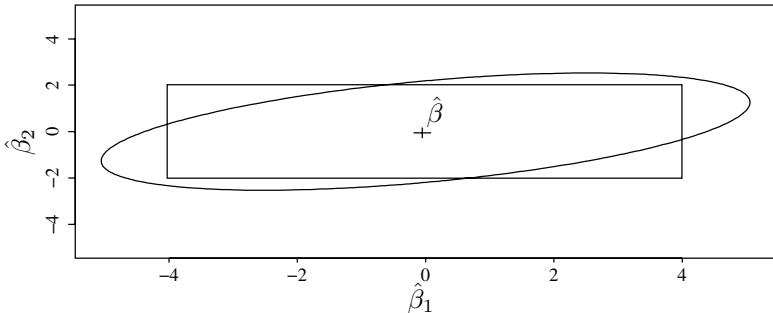
Nous avons alors pour  $(\beta_1, \beta_2)$  la RC suivante :

$$\text{RC}_\alpha(\beta_1, \beta_2) = \left\{ \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} [\hat{\beta}_1 - \beta_1, \hat{\beta}_2 - \beta_2] [R(X'X)^{-1} R']^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix} \leq f_{2,n-p,\alpha/2} \right\}.$$

Notons  $c_{ij}$  le terme général de  $(X'X)^{-1}$ , nous obtenons en développant

$$\text{RC}_\alpha(\beta_1, \beta_2) = \left\{ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{2\hat{\sigma}^2(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \times \right. \\ \left. \left( c_{22}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 - 2c_{12}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + c_{11}(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 \right) \leq f_{(2, n-p, \alpha/2)} \right\}.$$

Cette région de confiance est une ellipse qui tient compte de la corrélation entre  $\hat{\beta}_i$  et  $\hat{\beta}_j$ , contrairement à la juxtaposition de deux intervalles de confiance qui forme un rectangle.



**Fig. 3.1.** Comparaison entre ellipse et rectangle de confiance.

Si les composantes ne sont pas fortement corrélées alors les régions parallélépipédiques définies par les IC sont une bonne approximation de l'ellipsoïde.

### 3.4 Exemple

Nous traitons les 50 données journalières concernant la concentration en ozone. La variable à expliquer est la concentration en ozone notée O3 et les variables explicatives sont la température notée T12, le vent noté Vx et la nébulosité notée Ne12.

Comme toujours, nous avons les phases d'estimation et de résumé données par les commandes ci-dessous. Pour estimer les intervalles de confiance à 95 % pour les paramètres, il suffit d'utiliser le théorème 3.1.

```
modele3 <- lm(O3~T12+Vx+Ne12,data=ozone)
resume3 <- summary(modele3)
coef3 <- coef(resume3)
IC3 <- rbind(coef3[,1]-coef3[,2]*qt(0.95,modele3$df.res),
             coef3[,1]+coef3[,2]*qt(0.95,modele3$df.res))
IC3
(Intercept)      T12        Vx       Ne12
```

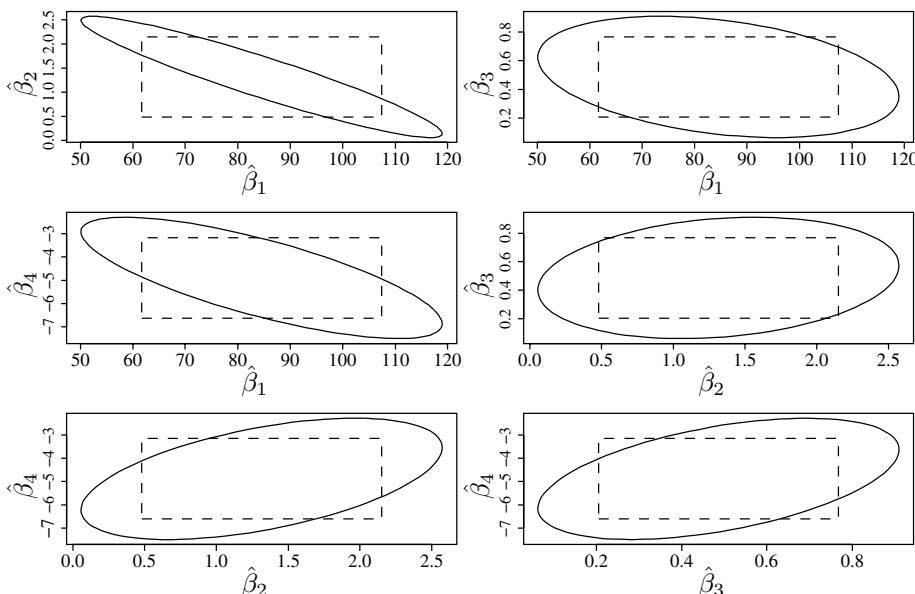
```
[1,] 61.70626 0.4800631 0.2051867 -6.617350
[2,] 107.38840 2.1500287 0.7677045 -3.169395
```

où la fonction `qt(a,dd1)` calcule la valeur du fractile d'une loi de Student (`qt`) de niveau `a` et de degré de liberté donné par `dd1` (ici option `df`).

Afin de dessiner les ellipses de confiance, nous utilisons le « package » `ellipse` :

```
library(ellipse)
```

Nous allons dessiner les régions de confiance de tous les couples de paramètres et les comparer graphiquement aux intervalles de confiance pour chaque paramètre pris indépendamment (ellipse *versus* rectangle). Nous choisissons un intervalle de confiance à 95 % pour chaque paramètre et une région de confiance à 95 %. Nous obtenons le dessin des ellipses de confiance pour tous les couples de paramètres



**Fig. 3.2.** Régions de confiance et rectangle des couples de paramètres.

grâce aux commandes suivantes :

```
par(mfrow=c(3,2))
for(i in 1:3){
  for(j in (i+1):4){
    plot(ellipse(modele3,c(i,j),level=0.95),type="l",
         axes=TRUE)
  }
}
```

```

xlab=paste("beta",i,sep=""),
ylab=paste("beta",j,sep="")
points(coef(modele)[i], coef(modele)[j],pch=3)
lines(c(IC3[1,i],IC3[1,i],IC3[2,i],IC3[2,i],IC3[1,i]),
      c(IC3[1,j],IC3[2,j],IC3[2,j],IC3[1,j],IC3[1,j]),lty=2)
}

```

Afin d'observer la corrélation entre les paramètres, nous pouvons regarder l'orientation du grand axe de l'ellipse. Si cet axe n'est pas parallèle aux axes du repère, il y a corrélation. Ainsi nous observons que  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont fortement corrélés. Il en est de même avec  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3)$  et  $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ . Enfin rappelons que nous pouvons calculer un IC à 95 % pour  $\hat{\sigma}^2$  avec les commandes suivantes :

```

c(resume3$sigma^2*modele3$df.res/qchisq(0.975,modele3$df.res),
  resume3$sigma^2*modele3$df.res/qchisq(0.025,modele3$df.res))
[1] 135.7949 310.2253

```

### 3.5 Prévision

Soit  $x'_{n+1} = (x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,p})$  une nouvelle valeur et nous voulons prédire  $y_{n+1}$ . Le modèle indique que

$$y_{n+1} = x'_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1},$$

avec les  $\varepsilon_i$  i.i.d. et qui suivent une  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . A partir des  $n$  observations, nous avons estimé  $\hat{\beta}$  et nous prévoyons  $y_{n+1}$  par

$$\hat{y}_{n+1}^p = x'_{n+1}\hat{\beta}.$$

Nous calculons facilement l'espérance et la variance de l'erreur de prévision  $\varepsilon_{n+1}^p = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p) &= 0 \\ \text{V}(\hat{y}_{n+1}^p - y_{n+1}) &= \text{V}(x'_{n+1}(\hat{\beta} - \beta) + \varepsilon_{n+1}) \\ &= x'_{n+1} \text{V}(\hat{\beta} - \beta)x_{n+1} + \sigma^2 \\ &= \sigma^2 [x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1} + 1]. \end{aligned}$$

Nous obtenons la proposition suivante.

#### Proposition 3.4 (IC de prévision)

Un IC, de niveau  $(1 - \alpha)$ , pour  $y_{n+1}$  est donné par

$$\left[ x'_{n+1}\hat{\beta} \pm t_{n-p,\alpha/2}\hat{\sigma}\sqrt{x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1} + 1} \right].$$

#### Preuve

$\hat{\beta}$  suit une loi normale et  $x_{n+1}$  est fixe donc  $\hat{y}_{n+1}^p$  suit une loi normale. La valeur aléatoire  $y_{n+1}$  à prévoir suit une loi normale  $\mathcal{N}(x'_{n+1}\beta, \sigma^2)$  et est indépendante des  $y_1, \dots, y_n$  par l'hypothèse  $\mathcal{H}_3$ .

Nous avons donc que  $y_{n+1}$  est indépendant de  $\hat{y}_{n+1}^p = x'_{n+1}\hat{\beta}$  car  $\hat{\beta}$  est une fonction linéaire des  $y_1, \dots, y_n$ . L'erreur de prévision  $y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p$  suit donc une loi normale dont les moyenne et variance ont été calculées. Nous avons donc

$$N = \frac{\hat{y}_{n+1}^p - y_{n+1}}{\sigma \sqrt{x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1} + 1}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Or  $\sigma$  est inconnue et estimée par  $\hat{\sigma}$ . Nous utilisons la définition d'un Student : si  $N$  suit une loi normale centrée réduite, si  $D$  suit un  $\chi^2$  à  $d$  ddl et si  $N$  et  $D$  sont indépendants, alors le rapport  $N/\sqrt{D/d}$  suit un Student à  $d$  ddl.

La proposition 3.3 p. 55 indique que  $D = \hat{\sigma}^2(n-p)/\sigma^2$  suit un  $\chi^2$  à  $(n-p)$  degrés de liberté et que  $D$  est indépendant de  $\hat{\beta}$ . Or  $\hat{\sigma}^2$  dépend uniquement des  $y_1, \dots, y_n$  et est donc indépendant de  $y_{n+1}$ . Il en va de même pour  $D$ . Le caractère aléatoire de  $N$  provient de  $\hat{\beta}$  et de  $y_{n+1}$ , nous en déduisons que  $N$  et  $D$  sont indépendants d'où

$$\frac{N}{\sqrt{\frac{D}{d}}} = \frac{\hat{y}_{n+1}^p - y_{n+1}}{\hat{\sigma} \sqrt{x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1} + 1}} \sim \mathcal{T}(n-p), \quad (3.5)$$

l'intervalle de confiance découle de ce résultat.

## 3.6 Les tests d'hypothèses

### 3.6.1 Introduction

Reprenons l'exemple de la prévision des pics d'ozone. Nous avons modélisé les pics d'ozone par **T12**, **Vx** et **Ne12**. Il paraît raisonnable de se poser les questions suivantes :

- (a) est-ce que la valeur de **03** est influencée par **Vx** ?
- (b) y a-t-il un effet nébulosité ?
- (c) est-ce que la valeur de **03** est influencée par **Vx** et **T12** ?

Rappelons que le modèle utilisé est le suivant :

$$03 = \beta_1 + \beta_2 T12 + \beta_3 Vx + \beta_4 Ne12 + \varepsilon.$$

Nous pouvons expliciter les trois questions précédentes en terme de test d'hypothèse :

- (a) correspond à  $H_0 : \beta_3 = 0$ , contre  $H_1 : \beta_3 \neq 0$ ;
- (b) correspond à  $H_0 : \beta_4 = 0$ , contre  $H_1 : \beta_4 \neq 0$ ;
- (c) correspond à  $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ , contre  $H_1 : \beta_2 \neq 0$  ou  $\beta_3 \neq 0$ .

Remarquons que les cas (a), (b) et (c) reviennent à tester la nullité d'un ou plusieurs paramètres en même temps. Dans ce dernier cas on parle de nullité

simultanée des coefficients. Cela veut donc dire que sous l'hypothèse  $H_0$  certains coefficients sont nuls et donc les variables correspondant à ces coefficients ne sont pas utiles. Ce cas de figure correspond par définition à comparer deux modèles emboîtés l'un dans l'autre (l'un est un cas particulier de l'autre).

Le plan d'expérience privé de ces variables sera noté  $X_0$  et les colonnes de  $X_0$  engendreront un sous-espace noté  $\mathfrak{I}(X_0)$ . Afin d'alléger les notations, nous noterons  $\mathfrak{I}(X_0) = \mathfrak{I}_0$  et  $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}_X$ . Le niveau des tests sera fixé de façon classique à  $\alpha$ .

### 3.6.2 Test entre modèles emboîtés

Rappelons tout d'abord le modèle et les hypothèses utilisées :

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I),$$

cela veut dire que  $\mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{I}_X$  espace engendré par les colonnes de  $X$ .

Pour faciliter les notations, supposons que nous souhaitons tester la nullité simultanée des  $q$  derniers coefficients du modèle avec  $q \leq p$ . Le problème s'écrit alors de la façon suivante :

$$H_0 : \beta_{p-q+1} = \cdots = \beta_p = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{p-q+1, \dots, p\} : \beta_j \neq 0.$$

Que signifie  $H_0 : \beta_{p-q+1} = \cdots = \beta_p = 0$  en terme de modèle ? Si les  $q$  derniers coefficients sont nuls, le modèle devient

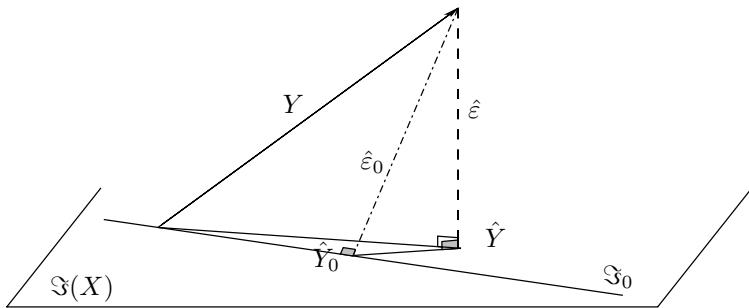
$$Y = X_0\beta_0 + \varepsilon_0 \quad \text{où} \quad \varepsilon_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I),$$

où la matrice  $X_0$  est composée des  $p-q$  premières colonnes de  $X$ . Les colonnes de  $X_0$  engendrent un espace noté  $\mathfrak{I}_0$  de dimension  $p_0 = p - q$ . Ce sous-espace est bien évidemment inclus dans  $\mathfrak{I}_X$ . Sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , l'espérance de  $Y$  appartiendra à ce sous-espace.

Une fois que les hypothèses du test sont fixées, il faut proposer une statistique de test. Nous allons voir une approche géométrique assez intuitive. Une approche plus analytique basée sur les tests de rapport de vraisemblance maximum est à faire en exercice 3.6).

#### Approche géométrique

Considérons le sous-espace noté  $\mathfrak{I}_0$ . Nous avons écrit que sous  $H_0 : \mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{I}_0$ . Dans ce cas, la méthode des moindres carrés consiste à projeter  $Y$  non plus sur  $\mathfrak{I}_X$  (et obtenir  $\hat{Y}$ ) mais à projeter  $Y$  sur  $\mathfrak{I}_0$  et obtenir  $\hat{Y}_0$ . Visualisons ces différentes projections sur le graphique suivant :



**Fig. 3.3.** Représentation des projections.

L'idée intuitive du test, et donc du choix de conserver  $H_0$  ou de rejeter  $H_0$ , est la suivante : si la projection de  $Y$  dans  $\mathfrak{S}_0$ , notée  $\hat{Y}_0$ , est « proche » de la projection de  $Y$  dans  $\mathfrak{S}_X$ , notée  $\hat{Y}$ , alors il semble logique de conserver l'hypothèse nulle. En effet, si l'information apportée par les deux modèles est la « même », il vaut mieux conserver le modèle le plus petit (principe de parcimonie). Il faut évidemment quantifier le terme « proche ». De manière naturelle, nous pouvons utiliser la distance euclidienne entre  $\hat{Y}_0$  et  $\hat{Y}$ , ou son carré,  $\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2$ . Cependant cette distance sera variable selon les données et selon les unités de mesures utilisées. Pour s'affranchir de ce problème d'échelle nous allons « standardiser » cette distance en la divisant par la norme au carré de l'erreur  $\hat{\varepsilon}$ . Les quantités  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{Y}_0 - \hat{Y}$  n'appartiennent pas à des espaces de même dimension, nous divisons donc chaque terme par son degré de liberté respectif. Nous avons donc la statistique de test suivante :

$$F = \frac{\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2/q}{\|Y - \hat{Y}\|^2/(n-p)} = \frac{\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2/(p-p_0)}{\|Y - \hat{Y}\|^2/(n-p)}.$$

Pour utiliser cette statistique de test, il faut connaître sa loi au moins sous  $H_0$ . Remarquons que cette statistique est le rapport de deux normes au carré. Nous allons donc déterminer la loi du numérateur, du dénominateur et constater leur indépendance. Nous savons que

$$\hat{Y}_0 - \hat{Y} = P_{\mathfrak{S}_0}Y - P_{\mathfrak{S}_X}Y,$$

or  $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_X$  donc

$$\hat{Y}_0 - \hat{Y} = P_{\mathfrak{S}_0}P_{\mathfrak{S}_X}Y - P_{\mathfrak{S}_X}Y = (I_n - P_{\mathfrak{S}_0})P_{\mathfrak{S}_X}Y = P_{\mathfrak{S}_0^\perp}P_{\mathfrak{S}_X}Y.$$

Nous en déduisons que  $(\hat{Y}_0 - \hat{Y}) \in \mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X$  et donc que  $(\hat{Y}_0 - \hat{Y}) \perp (Y - \hat{Y})$  car  $Y - \hat{Y} = (I_n - P_{\mathfrak{S}_X})Y = P_{\mathfrak{S}_X^\perp}Y \in \mathfrak{S}_X^\perp$ . La figure (3.3) permet de visualiser ces notions d'orthogonalité. Les vecteurs aléatoires  $\hat{Y}_0 - \hat{Y}$  et  $Y - \hat{Y}$  sont éléments d'espaces orthogonaux, ils ont donc une covariance nulle. Ces deux vecteurs

sont des vecteurs gaussiens, ils sont donc indépendants et toute fonction fixe de ceux-ci reste indépendante, en particulier les normes du numérateur et du dénominateur sont indépendantes.

En utilisant l'hypothèse  $\mathcal{H}_3$  de normalité et en appliquant le théorème de Cochran géométrique (théorème B.1 p. 286), nous en déduisons que ces deux normes suivent des lois du  $\chi^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^2} \|P_{\mathfrak{S}^\perp} Y\|^2 &\sim \chi_p^2, \\ \frac{1}{\sigma^2} \|P_{\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X} Y\|^2 &\sim \chi_{p-p_0}^2 \left( \frac{1}{\sigma^2} \|P_{\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X} X\beta\|^2 \right),\end{aligned}$$

où le paramètre de décentrage  $\|P_{\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X} X\beta\|^2/\sigma^2$  est nul sous  $H_0$  puisque dans ce cas  $X\beta \in \mathfrak{S}_0$ . Nous pouvons conclure avec le théorème suivant.

### Théorème 3.2 (Test entre modèles emboîtés)

*Soit un modèle de régression à  $p$  variables  $Y = X\beta + \varepsilon$  satisfaisant  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Nous souhaitons tester la validité d'un sous-modèle (ou modèle emboité) où un ou plusieurs coefficients sont nuls. Le plan d'expérience privé de ces variables sera noté  $X_0$ , les  $p_0$  colonnes de  $X_0$  engendreront un sous-espace noté  $\mathfrak{S}_0$  et le sous-modèle sera  $Y = X_0\beta_0 + \varepsilon_0$ . Notons l'hypothèse nulle (modèle restreint)  $H_0 : \mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{S}_0$  et l'hypothèse alternative (modèle complet)  $H_1 : \mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{S}(X)$ . Pour tester ces deux hypothèses, nous utilisons la statistique de test  $F$  ci-dessous qui possède comme loi sous  $H_0$  :*

$$F = \frac{\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2/(p-p_0)}{\|Y - \hat{Y}\|^2/(n-p)} \sim \mathcal{F}_{p-p_0, n-p},$$

*et sous  $H_1$  la loi reste une loi de Fisher mais décentrée de  $\|P_{\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X} X\beta\|^2/\sigma^2$ . Notons aussi une écriture équivalente souvent utilisée et donc importante*

$$F = \frac{n-p}{p-p_0} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} \sim \mathcal{F}_{p-p_0, n-p}.$$

*L'hypothèse  $H_0$  sera repoussée en faveur de  $H_1$  si l'observation de la statistique  $F$  est supérieure à  $f_{p-p_0, n-p}(1-\alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ou erreur de première espèce.*

### Preuve

La démonstration de la statistique de test  $F$  découle de la construction qui précède le théorème. En se rappelant que si  $N \sim \chi^2$  à  $n$  ddl et  $D \sim \chi^2$  à  $d$  ddl et si  $N$  et  $D$  sont indépendants alors

$$\frac{N}{D} \frac{d}{n} \sim \mathcal{F}_{n,p}.$$

On peut voir facilement la dernière égalité non démontrée en utilisant la fig. (3.3) et en appliquant le théorème de Pythagore, ou bien de manière plus analytique

en s'occupant uniquement du numérateur  $\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2$  :

$$\begin{aligned}\|Y - \hat{Y}_0\|^2 &= \|Y - P_{\mathfrak{S}_X}Y + P_{\mathfrak{S}_X}Y - P_{\mathfrak{S}_0}Y\|^2 \\ &= \|P_{\mathfrak{S}^\perp}Y + (I_n - P_{\mathfrak{S}_0})P_{\mathfrak{S}_X}Y\|^2 \\ &= \|P_{\mathfrak{S}^\perp}Y\|^2 + \|P_{\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X}Y\|^2 \\ &= \|Y - \hat{Y}\|^2 + \|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2.\end{aligned}$$

Cette approche géométrique semble déconnectée des tests statistiques classiques mais il n'en est rien. Nous pouvons montrer (cf. exercice 3.6) que le test  $F$  est tout simplement le test de rapport de vraisemblance maximale.

### Test de Student de signification d'un coefficient $\beta_j$

Nous voulons tester  $H_0 : \beta_j = 0$  contre  $H_1 : \beta_j \neq 0$  (test bilatéral de signification de  $\beta_j$ ).

Selon le théorème 3.2, la statistique de test est

$$F = \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2}{\hat{\sigma}^2}.$$

Nous rejetons  $H_0$  si l'observation de la statistique  $F$ , notée  $F(w)$ , est telle que

$$F(\omega) > f_{1,n-p}(1 - \alpha).$$

La statistique de test est un Fisher à 1 et  $(n - p)$  ddl.

Ce test est équivalent au test de « Student » à  $(n - p)$  ddl qui permet de tester  $H_0 : \beta_j = 0$  contre  $H_1 : \beta_j \neq 0$  (test bilatéral de signification de  $\beta_j$ ) avec la statistique de test

$$T = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2}$$

qui suit sous  $H_0$  une loi de Student à  $(n - p)$  ddl. Nous rejetons  $H_0$  si l'observation de la statistique  $T$ , notée  $T(w)$ , est telle que

$$|T(\omega)| > t_{n-p}(1 - \alpha/2).$$

C'est sous cette forme (cf. exercice 3.5) que ce test figure dans tous les logiciels de régression linéaire.

### Test de Fisher global

Si des connaissances *a priori* du phénomène étudié assurent l'existence d'un terme constant dans la régression, alors pour tester l'influence des régresseurs non constants sur la réponse, nous testerons l'appartenance de  $\mathbb{E}(Y) = \mu$  à la diagonale  $\mathfrak{S}_0(X) = \Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nous testerons ainsi la validité globale du modèle,

c'est-à-dire que tous les coefficients sont supposés nuls, excepté la constante. Ce test est appelé test de Fisher global. Dans ce cas,  $\hat{Y}_0 = \bar{y}\mathbb{1}$  et nous avons la statistique de test suivante :

$$\frac{\|P_{\mathfrak{S}_X} Y - P_{\mathfrak{S}_0} Y\|^2/(p-1)}{\|Y - P_{\mathfrak{S}_X} Y\|^2/(n-p)} = \frac{\|P_{\mathfrak{S}_X} Y - \bar{Y}\mathbb{1}\|^2/(p-1)}{\|Y - P_{\mathfrak{S}_X} Y\|^2/(n-p)} \sim \mathcal{F}_{p-1, n-p}.$$

Si nous écrivons la statistique de test en utilisant le  $R^2$ , nous obtenons le rapport

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n-p}{p-1}.$$

Ce test est appelé par certains logiciels statistiques le test du  $R^2$ .

## 3.7 Exemples

### 3.7.1 La concentration en ozone

Nous reprenons les données de l'ozone traitées précédemment dans ce chapitre et obtenons avec les commandes suivantes :

```
modele3 <- lm(O3~T12+Vx+Ne12,data=ozone)
resume3 <- summary(modele3)
resume3
```

le tableau de résultats :

```
Call:
lm(formula = O3 ~ T12 + Vx + Ne12, data = ozone)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-29.046	-8.482	0.786	7.702	28.292

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	84.5473	13.6067	6.214	1.38e-07 ***
T12	1.3150	0.4974	2.644	0.01117 *
Vx	0.4864	0.1675	2.903	0.00565 **
Ne12	-4.8934	1.0270	-4.765	1.93e-05 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 13.91 on 46 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.6819, Adjusted R-squared: 0.6611

F-statistic: 32.87 on 3 and 46 DF, p-value: 1.663e-11

La dernière ligne de la sortie du logiciel donne la statistique de test global, tous les coefficients sont nuls sauf la constante. Nous avons  $n = 50$  observations, nous avons estimé 4 paramètres et donc le ddl du Fisher est bien (3, 46). Nous refusons  $H_0$  (tous les coefficients sauf la constante sont nuls) : au moins un des coefficients associé à T12, Vx, Ne12 est non nul.

Le tableau **Coefficients** nous donne à la ligne  $j$  le test de la nullité d'un paramètre  $H_0 : \beta_j = 0$ . Nous constatons qu'au seuil de 5 % aucun coefficient n'est significativement égal à 0. La dernière colonne donne une version graphique du test : \*\*\* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.001, \*\* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.01, \* signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.05, . signifie que le test rejette  $H_0$  pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0.1.

Tous les coefficients sont significativement non nuls et il ne semble donc pas utile de supprimer une variable explicative. Si nous comparons ce modèle au modèle du chapitre précédent à l'aide d'un test  $F$  entre ces deux modèles emboîtés, nous avons

```
modele2 <- lm(O3~T12+Vx,data=ozone)
anova(modele2,modele3)
Model 1: O3 ~ T12 + Vx
Model 2: O3 ~ T12 + Vx + Ne12
      Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1       47 13299.4
2       46  8904.6  1     4394.8 22.703 1.927e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ',' 1
```

Nous retrouvons que le test  $F$  entre ces deux modèles est équivalent au test  $T$  de nullité du coefficient de la variable **Ne12** dans le modèle **modele3** (les deux probabilités critiques valent  $1.93e - 05$ ).

En conclusion, il semble que les 3 variables T12, Vx et Ne12 soient explicatives de l'ozone.

### 3.7.2 La hauteur des eucalyptus

Le but de cet exemple est de prévoir la hauteur (**ht**) par la circonférence (**circ**). Lors des deux chapitres précédents nous avons introduit deux modèles de prévision, le modèle de régression simple

$$\text{ht} = \beta_1 + \beta_2 \text{circ} + \varepsilon$$

et le modèle de régression multiple

$$\text{ht} = \beta_1 + \beta_2 \text{circ} + \beta_3 \sqrt{\text{circ}} + \varepsilon.$$

Si l'on souhaite choisir le meilleur des deux modèles emboîtés, nous pouvons conduire un test  $F$ . Rappelons les commandes pour construire les deux modèles.

```
regsimple <- lm(ht~circ,data=eucalypt)
regM <- lm(ht~circ+I(sqrt(circ)),data=eucalypt)
```

Le test  $F$  est obtenu simplement comme suit.

```
anova(regsimple,regM)
Analysis of Variance Table
```

```
Model 1: ht ~ circ
Model 2: ht ~ circ + I(sqrt(circ))
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1   1427 2052.08
2   1426 1840.66    1    211.43 163.80 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Nous pouvons voir que l'observation de la statistique de test vaut 163.80, ce qui est supérieur au quantile 95 % d'une loi de Fisher à (1, 1426) degré de liberté qui vaut 3.85 (obtenu avec `qf(0.95, 1, regM$df.res)`). Nous repoussons  $H_0$  au profit de  $H_1$  : le modèle de prévision adapté semble le modèle de régression multiple, malgré ses problèmes de prévision pour les hautes valeurs de circonférence. Rappelons que l'on peut retrouver le résultat de ce test avec le test  $T$  de nullité d'un coefficient :

```
summary(regM)

Call:
lm(formula = ht ~ circ + I(sqrt(circ)), data = eucalypt)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-4.18811 -0.68811  0.04272  0.79272  3.74814 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -24.35200   2.61444 -9.314   <2e-16 ***
circ        -0.48295   0.05793 -8.336   <2e-16 ***
I(sqrt(circ)) 9.98689   0.78033 12.798   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 1.136 on 1426 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.7922,    Adjusted R-squared:  0.7919 
F-statistic: 2718 on 2 and 1426 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

En effet, nous obtenons que l'observation de cette statistique vaut ici 12.798. Cette observation au carré est exactement égale à l'observation de la statistique de test  $F$  (en effet  $12.798^2 \approx 163.80$ ). Par ailleurs les probabilités critiques sont bien égales.

Notons que, dans ce résumé, le test de Fisher global repousse bien sûr l'hypothèse de nullité des coefficients des variables `circ` et  $\sqrt{\text{circ}}$ . L'observation de la statistique de test vaut ici 2718 alors que le quantile à 95 % d'une loi de Fisher à (2, 1426) vaut 3.00. Cette réponse semblait évidente puisque repousser ici  $H_0$  revient à dire qu'une des 2 variables au moins est explicative de la hauteur.

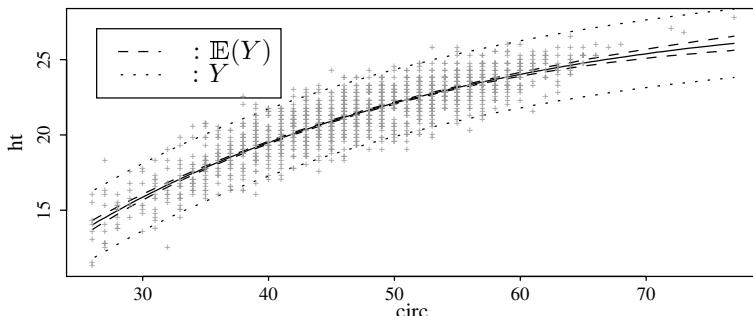
Nous pouvons aussi donner les intervalles de confiance pour le modèle et pour les prévisions. Pour cela, nous donnons une grille de valeurs de circonférences réparties entre le minimum (26 cm) et le maximum (77 cm), nous calculons la racine carrée de chaque élément de la grille et nous plaçons le tout dans un `data.frame` avec les mêmes noms que les variables du modèle.

```
circ=seq(min(eucalypt[,"circ"]),max(eucalypt[,"circ"]),len=100)
grille <- data.frame(circ)
grille2 <- cbind.data.frame(grille,sqrt(grille))
names(grille2) <- c("circ","I(sqrt(circ))")
```

Ensuite nous utilisons la fonction `predict()` qui permet de donner les prévisions mais aussi les IC, tant pour le modèle que pour les prévisions. Enfin nous représentons les données et les IC à 95 %.

```
ICdte=predict(regM,new=grille2,interval="confidence",level=0.95)
ICpre=predict(regM,new=grille2,interval="prediction",level=0.95)
plot(ht~circ,data=eucalypt,pch="+",col="grey60")
matlines(circ,cbind(ICdte,ICprev[, -1]),lty=c(1,2,2,3,3),col=1)
legend(26,26,lty=2:3,c("E(y)","prev"))
```

Cette figure nous permet de voir la mauvaise précision du modèle pour les fortes valeurs de circonférence.



**Fig. 3.4.** Modèle de régression multiple  $ht = \beta_1 + \beta_2 circ + \beta_3 \sqrt{circ} + \varepsilon$  et intervalles de confiance à 95 % pour  $ht$  et pour  $\mathbb{E}(ht)$ .

**Remarque**

Nous aurions pu construire un modèle de prévision de la hauteur uniquement avec la racine carrée de la circonférence. Ce modèle de régression simple est meilleur que le modèle de régression simple proposé : il possède un  $R^2$  de 0.78 au lieu de 0.77. Cependant le test de ce modèle ( $ht = \beta_1 + \beta_2\sqrt{circ}$ ) contre celui incorporant  $circ$  et  $\sqrt{circ}$ , ( $ht = \beta_1 + \beta_2 circ + \beta_3 \sqrt{circ} + \varepsilon$ ), conduit à garder ce dernier.

## 3.8 Exercices

**Exercice 3.1 (Questions de cours)**

1. Nous pouvons justifier les MC quand  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I\sigma^2)$  via l'application du maximum de vraisemblance :
  - A. oui ;
  - B. non ;
  - C. aucun rapport entre les deux méthodes.
2. Y a-t-il une différence entre les estimateurs  $\hat{\beta}$  des MC et  $\tilde{\beta}$  du maximum de vraisemblance ?
  - A. Oui ;
  - B. Non ;
  - C. Pas toujours, cela dépend de la loi des erreurs.
3. Y a-t-il une différence entre les estimateurs  $\hat{\sigma}^2$  des MC et  $\tilde{\sigma}^2$  du maximum de vraisemblance ?
  - A. Oui ;
  - B. Non ;
  - C. Pas toujours, cela dépend de la loi des erreurs.
4. Le rectangle formé par les intervalles de confiance de niveau  $\alpha$  individuels de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  correspond à la région de confiance simultanée de niveau  $\alpha$  de la paire  $(\beta_1, \beta_2)$ .
  - A. Oui ;
  - B. Non ;
  - C. Cela dépend des données.
5. Nous avons  $n$  observations et  $p$  variables explicatives, nous supposons que  $\varepsilon$  suit une loi normale, nous voulons tester  $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ . Quelle va être la loi de la statistique de test ?
  - A.  $\mathcal{F}_{p-3, n-p}$  ;
  - B.  $\mathcal{F}_{3, n-p}$  ;
  - C. Une autre loi.

**Exercice 3.2 (Théorème 3.1)**

Démontrer le théorème 3.1 p. 56.

**Exercice 3.3 (Test et R<sup>2</sup>)**

Démontrer que la statistique du test Fisher

$$F = \frac{\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2/(p - p_0)}{\|Y - \hat{Y}\|^2/(n - p)}.$$

peut s'écrire sous la forme

$$F = \frac{R^2 - R_0^2}{1 - R^2} \frac{n - p}{p - p_0},$$

où R<sup>2</sup> (R<sub>0</sub><sup>2</sup>) correspond au R<sup>2</sup> du modèle complet (du modèle sous H<sub>0</sub>).

**Exercice 3.4 (Ozone)**

Nous voulons expliquer la concentration de l'ozone sur Rennes en fonction des variables T9, T12, Ne9, Ne12 et Vx. Les sorties données par GNU-R sont :

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	62	10	1	0
T9	-4	2	-5	0
T12	5	0.75	3	0
Ne9	-1.5	1	4	0.08
Ne12	-0.5	0.5	5	0.53
Vx	0.8	0.15	5.5	0

```
--  
Multiple R-Squared : 0.6666, Adjusted R-squared : 0.6081  
Residual standard error : 16 on 124 degrees of freedom  
F-statistic : 6 on 7 and 8 DF, p-value : 0
```

1. Compléter approximativement la sortie ci-dessus sur une feuille.
2. Rappeler la statistique de test et tester la nullité des paramètres séparément au seuil de 5 %.
3. Rappeler la statistique de test et tester la nullité simultanée des paramètres autres que la constante au seuil de 5 %.
4. Voici une nouvelle valeur, peut-on effectuer la prévision et donner un intervalle de confiance à 95 % (T9=10, T12=20, Ne9=0, Ne12=0, Vx=1) ?
5. Les variables Ne9 et Ne12 ne semblent pas influentes et nous souhaitons tester la nullité simultanée de  $\beta_{\text{Ne9}}$  et  $\beta_{\text{Ne12}}$ . Proposer un test permettant de tester la nullité simultanée de  $\beta_{\text{Ne9}}$  et  $\beta_{\text{Ne12}}$  et l'effectuer à partir des résultats numériques suivants :

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	66	11	6	0
T9	-5	1	-5	0
T12	6	0.75	8	0
Vx	1	0.2	5	0

--

Multiple R-Squared : 0.5, Adjusted R-squared : 0.52

Residual standard error : 16.5 on 126 degrees of freedom

### Exercice 3.5 ( $\dagger$ Equivalence du test $T$ et du test $F$ .)

Nous souhaitons tester la nullité d'un paramètre. Démontrer l'équivalence entre le test de Student et le test de Fisher.

### Exercice 3.6 ( $\ddagger$ Equivalence du test $F$ et du test de VM.)

Nous souhaitons tester la nullité simultanée de  $q$  paramètres. Ecrire le test de rapport de vraisemblance maximale. Montrer que ce test est équivalent au test  $F$ .

### Exercice 3.7 ( $\dagger \dagger$ Nouvelles propriétés)

Démontrer que dans le modèle gaussien, la statistique  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est une statistique complète et  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est de variance minimum dans la classe des estimateurs sans biais (indice : utiliser le théorème de Lehmann-Scheffé).

## 3.9 Notes

Quelquefois l'hypothèse de normalité ( $\mathcal{H}_3$ ), nécessaire à la validité des tests et des intervalles de confiance, n'est pas vérifiée ou non vérifiable.

Dans ce cas on peut choisir de ne pas faire appel à l'hypothèse de normalité. Les tests qui permettent de choisir entre des modèles contraints ou des modèles non contraints (ou tests entre modèles emboîtés) peuvent être alors remplacés par une des procédures de choix de modèles décrites au chapitre 6. Pour les intervalles de confiance, une procédure spécifique existe, basée sur le bootstrap (section 3.9.1).

### 3.9.1 Intervalle de confiance : bootstrap

L'objectif de cette section est de présenter la méthode du bootstrap en régression afin que le lecteur puisse obtenir un intervalle de confiance pour  $\beta$ , sans donner d'hypothèse supplémentaire sur la loi des erreurs  $\varepsilon$ . Le lecteur intéressé par le bootstrap en tant que méthode statistique pourra consulter le livre de Efron & Tibshirani (1993).

Le modèle utilisé est  $Y = X\beta + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire de loi  $F$  inconnue et d'espérance nulle. L'idée du bootstrap est d'estimer cette loi par ré-échantillonnage.

Nous considérons que la constante fait partie du modèle. La somme des résidus estimés vaut donc zéro.

- A partir du nuage de points  $(X, Y)$ , estimer par les MC  $\beta$  et  $\varepsilon$  par  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\varepsilon}$ . Soit  $\hat{F}_n$  la distribution empirique des  $\hat{\varepsilon}$ .
- Tirer au hasard avec remise  $n$  résidus estimés  $\hat{\varepsilon}_i$  notés  $\hat{\varepsilon}_i^*$ .
- A partir de ces  $n$  résidus, construire un échantillon

$$Y^* = X\hat{\beta} + \hat{\varepsilon}^*$$

appelé échantillon bootstrapé ou encore échantillon étoile.

- A partir de l'échantillon étoile  $(X, Y^*)$  estimer le vecteur des paramètres.  
La solution est

$$\hat{\beta}^* = (X'X)^{-1}X'Y^*.$$

La théorie du bootstrap indique que la distribution de  $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \hat{\beta})$ , distribution que nous pouvons calculer directement à partir des données, approche correctement la distribution de  $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$  qui elle ne peut pas être calculée, puisque  $\beta$  est inconnu.

Afin de calculer la distribution de  $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \hat{\beta})$  nous calculons  $B$  échantillons bootstrapés ou étoiles et calculons ensuite  $B$  estimateurs  $\hat{\beta}^*$  de  $\hat{\beta}$ .

**Il faut donc répéter  $B$  fois les étapes suivantes :**

- tirer au hasard avec remise  $n$  résidus estimés  $\hat{\varepsilon}_i$  notés  $\hat{\varepsilon}_i^{(k)}$  ;
- à partir de ces  $n$  résidus, construire un échantillon  $y_i^{(k)} = x_i\hat{\beta} + \hat{\varepsilon}_i^{(k)}$ , appelé échantillon bootstrapé ;
- à partir de cet échantillon bootstrapé, estimer  $\hat{\beta}^{(k)}$ .

Pour donner un ordre d'idée, une valeur de 1000 pour  $B$  est couramment utilisée. Nous obtenons alors  $B$  estimateurs de  $\beta$  noté  $\hat{\beta}^{(k)}$ . A partir de ces 1000 valeurs, nous pouvons calculer toutes les statistiques classiques. Si nous nous intéressons à la distribution des  $\hat{\beta}_j$ , nous pouvons estimer cette distribution en calculant l'histogramme des  $\hat{\beta}_j^{(k)}$ . De même un intervalle de confiance peut être obtenu en calculant les quantiles empiriques des  $\hat{\beta}_j^{(k)}$ .

Voyons cela sur l'exemple de la concentration en ozone. Nous continuons notre modèle à 3 variables explicatives des pics d'ozone, la température à 12 h (T12), la nébulosité à 12 h (Ne12) et la projection du vent à 12 h sur l'axe est-ouest (Vx). Le modèle est toujours construit grâce à la commande suivante :

```
modele3 <- lm(O3~T12+Vx+Ne12,data=ozone)
```

Nous pouvons ensuite résumer la phase d'estimation et nous intéresser aux coefficients.

```

resume3 <- summary(modele3)
coef3[,1:2]
  Estimate Std. Error
(Intercept) 80.1437444 13.7144584
T12          1.4447834  0.5013485
Vx           0.5814378  0.1688762
Ne12         -3.7864855  1.0351274

```

Cette procédure ne suppose que deux hypothèses très faibles  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . Afin de construire un intervalle de confiance pour les paramètres sans supposer la normalité, nous appliquons la procédure de bootstrap.

La première étape consiste à calculer les résidus estimés  $\hat{\varepsilon} = \hat{Y} - Y$  et ajustements  $\hat{Y}$ .

```

res <- residuals(modele3)
ychap <- predict(modele3)
COEFF <- matrix(0,ncol=4,nrow=1000)
colnames(COEFF) <- names(coef(modele3))
ozone.boot <- ozone

```

Ensuite nous allons appliquer la procédure de bootstrap avec  $B = 1000$  échantillons bootstrapés.

```

for(i in 1:nrow(COEFF)){
  resetoile <- sample(res,length(res),replace=T)
  O3etoile <- ychap + resetoile
  ozone.boot[, "O3"] <- O3etoile
  regboot <- lm(formula(modele3), data=ozone.boot)
  COEFF[i,] <- coef(regboot)
}

```

Nous avons obtenu une matrice de 1000 coefficients estimés (COEFF) et nous choisissons les quantiles empiriques à 2.5 % et 97.5 % de ces échantillons afin de déterminer les intervalles de confiance.

```

apply(COEFF,2,quantile,probs=c(0.025,0.975))

  (Intercept)      T12       Vx      Ne12
2.5%      58.0241 0.4148645 0.1856668 -6.750358
97.5%     109.7853 2.2666724 0.8162993 -2.784720

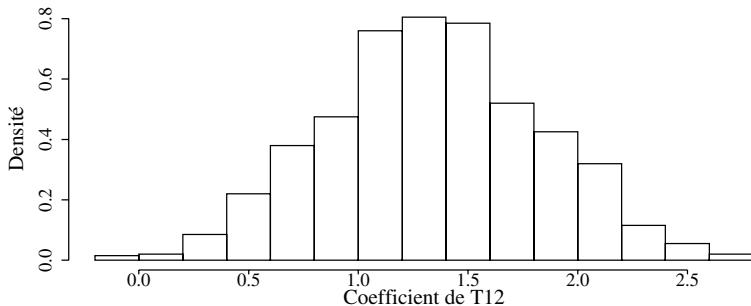
```

Un IC à 95 % pour le coefficient associé à T12 est donc donné par [0.41; 2.26]. En supposant que les erreurs suivent une loi normale, nous avions [0.48; 2.15]. L'intervalle est donc plus grand.

Nous pouvons aussi considérer un estimateur de la densité des  $\hat{\beta}_j$  en traçant un histogramme des  $\hat{\beta}_j^*$ . Voici l'histogramme des estimateurs du coefficient associé à la variable température.

```
hist(COEFF[, "T12"], main="", xlab="Coefficient de T12")
```

Cet histogramme semble indiquer que la loi est proche d'une loi normale.



**Fig. 3.5.** Histogramme des estimateurs bootstrapés pour la variable T12.

### Remarque

Nous aurions pu commencer par tirer avec remise  $n$  individus parmi les  $n$  couples d'observations  $(x'_i, y_i)$  et continuer comme présenté ci-dessus. Ce bootstrap est plus adapté au cas où les variables  $X_j$  sont des variables aléatoires. Les lecteurs intéressés par cette procédure peuvent consulter Efron & Morris (1973) par exemple.

### 3.9.2 Test de Fisher pour une hypothèse linéaire quelconque

Dans la partie 3.6.2, nous avons testé la nullité simultanée d'un certain nombre de coefficients. Cela nous a permis de transcrire facilement l'hypothèse  $H_0$  en terme d'espace. Nous allons aborder maintenant le cas où l'hypothèse à tester est de la forme  $R\beta = r$ .

Rappelons nos trois questions initiales :

(a) est-ce-que la valeur de `max03` est influencée par `Vx` ?

(b) y a-t-il un effet nébulosité ?

(c) est-ce-que la valeur de `max03` est influencée par `Vx` et `T12` ?

Toutes ces hypothèses sont des cas particuliers de l'hypothèse linéaire générale :

$$H_0 : R\beta = 0 \text{ contre } H_1 : R\beta \neq 0,$$

où  $R$  est une matrice  $q \times p$  connue de rang  $q$ . Il suffit de poser

$$(a) \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad r = 0; \\ (b) \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r = 0; \\ (c) \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

où  $R$  est une matrice  $q \times p$  de rang  $q$ ,  $r$  est un vecteur de taille  $q$  et où  $R$  et  $r$  sont connus. Nous imposons  $q$  contraintes linéaires **2 à 2 indépendantes** sur les coefficients  $\beta_j$ . Cette façon de procéder permet de tester également

$$\begin{aligned}\beta_j &= \beta_j^0 & R &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1_j & \cdots & 0 \end{bmatrix} & r &= \beta_j^0; \\ \beta_j &= \beta_i & R &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1_i & \cdots & -1_j & \cdots & 0 \end{bmatrix} & r &= 0,\end{aligned}$$

ou encore les  $q$  derniers  $\beta_j$  sont nuls grâce aux matrices

$$R_{q \times p} = \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix} \quad r = 0_q.$$

Nous imposons la contrainte générale  $R\beta = r$ . Cela revient à imposer en fait  $q$  (le rang de  $R$ ) contraintes linéaires sur les paramètres et cela peut se traduire d'un point de vue géométrique par  $\mathbb{E}(Y)$  n'appartient plus à l'espace engendré par toutes les colonnes de  $X$ , espace que nous avons noté  $\mathfrak{I}(X)$  mais à un sous-espace engendré par les colonnes de  $X$  satisfaisant la contrainte linéaire  $R\beta = 0$ .

### Définition 3.1

*Une hypothèse linéaire quelconque  $H_0$  est de la forme  $R\beta - r = 0$ , où  $R$  est une matrice de taille  $q \times p$  de rang  $q$  et  $r$  un vecteur de taille  $q$ .*

### Théorème 3.3

*Soit un modèle de régression à  $p$  variables  $Y = X\beta + \varepsilon$  satisfaisant  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Nous souhaitons tester dans le cadre de ce modèle la validité d'une hypothèse linéaire quelconque  $H_0$   $R\beta = r$ , avec le rang de  $R$  égal à  $q$ , contre  $H_1$   $R\beta \neq r$ . Soit  $\mathfrak{I}_0$  le sous-espace de  $\mathfrak{I}_X$  de dimension  $(p - q)$  engendré par la contrainte  $R\beta = r$  (ou  $H_0$ ) et  $\mathfrak{I}_X$  le sous-espace de dimension  $p$  associé à  $H_1$ . Pour tester ces deux hypothèses nous utilisons la statistique de test  $F$  ci-dessous qui possède comme loi sous  $H_0$  :*

$$\begin{aligned}F &= \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 / \dim(\mathfrak{I}_0^\perp \cap \mathfrak{I}_X)}{\|Y - \hat{Y}\|^2 / \dim(\mathfrak{I}_{X^\perp})} \\ &= \frac{n-p}{q} \frac{\|Y - \hat{Y}_0\|^2 - \|Y - \hat{Y}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2} \\ &= \frac{n-p}{q} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} \sim \mathcal{F}_{q, n-p}.\end{aligned}$$

et sous  $H_1$  la loi reste une loi de Fisher mais décentrée de  $\|P_{\mathfrak{I}_0^\perp \cap \mathfrak{I}_X} X\beta\|^2 / \sigma^2$ .

L'estimation  $\hat{Y}_0$  est donnée par

$$X\hat{\beta}_0 = X\hat{\beta} + X(X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}).$$

*L'hypothèse  $H_0$  sera repoussée en faveur de  $H_1$  si l'observation de la statistique  $F$  est supérieure à  $f_{q, n-p}(1 - \alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ou erreur de première espèce.*

**Preuve**

Nous pouvons toujours traduire l'hypothèse  $H_0 : R\beta = r$  en terme de sous-espace de  $\mathfrak{S}_X$ . Lorsque  $r = 0$ , nous avons un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{S}_X$  et lorsque  $r \neq 0$  nous avons un sous-espace affine de  $\mathfrak{S}_X$ . Dans les deux cas, nous noterons ce sous-espace  $\mathfrak{S}_0$  et  $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_X$ . Cependant nous ne pourrons plus le visualiser facilement comme nous l'avons fait précédemment avec  $\mathfrak{S}_{X_0}$  où nous avions enlevé des colonnes à la matrice  $X$ . Nous allons décomposer l'espace  $\mathfrak{S}_X$  en deux sous-espaces orthogonaux

$$\mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_0 \overset{\perp}{\oplus} (\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X).$$

Sous  $H_0$ , l'estimation des moindres carrés donne  $\hat{Y}_0$  projection orthogonale de  $Y$  sur  $\mathfrak{S}_0$  et nous appliquons la même démarche pour construire la statistique de test. La démonstration est donc la même que celle du théorème 3.2. C'est-à-dire que nous regardons si  $\hat{Y}_0$  est proche de  $\hat{Y}$  et nous avons donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 / \dim(\mathfrak{S}_0^\perp \cap \mathfrak{S}_X)}{\|Y - \hat{Y}\|^2 / \dim(\mathfrak{S}_{X^\perp})} \\ &= \frac{n-p}{q} \frac{\|Y - \hat{Y}_0\|^2 - \|Y - \hat{Y}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2} \\ &= \frac{n-p}{q} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} \sim \mathcal{F}_{q, n-p}. \end{aligned}$$

Le problème du test réside dans le calcul de  $\hat{Y}_0$ . Dans la partie précédente, il était facile de calculer  $\hat{Y}_0$  car nous avions la forme explicite du projecteur sur  $\mathfrak{S}_0$ .

Une première façon de procéder revient à trouver la forme du projecteur sur  $\mathfrak{S}_0$ . Une autre façon de faire est de récrire le problème de minimisation sous la contrainte  $R\beta = r$ . Ces deux manières d'opérer sont présentées en détail dans la correction de l'exercice 2.8. Dans tous les cas l'estimateur des MC contraints par  $R\beta = r$  est défini par

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}).$$

### 3.9.3 Propriétés asymptotiques

Nous allons étudier des propriétés asymptotiques de  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}^2$ , c'est-à-dire lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ce type d'études permet de s'assurer de la pertinence des estimateurs. En effet, nous savons que lorsque  $n$  est fixé,  $\hat{\beta}$  est un estimateur sans biais de  $\beta$ , de variance minimum parmi les estimateurs linéaires sans biais (théorème de Gauss-Markov). Mais lorsque  $n$  augmente, c'est-à-dire lorsque la quantité de données et donc l'information augmente, est-ce que  $\hat{\beta}$  va tendre vers  $\beta$  ? Quelles sont les conditions à réunir pour que cette convergence (en moyenne quadratique) se produise ?

Commençons par introduire quelques notations. Pour chaque  $n$ , le modèle linéaire correspondant est noté  $(y_n, X_n\beta, \sigma^2 I_n)$ . Nous supposerons que la matrice  $X_n$  est de plein rang pour un indice  $m$  et que les matrices  $(X_n)_{n>m}$  le seront également. Pour  $n > m$ , nous définissons la suite  $\hat{\beta}_n$  par

$$\hat{\beta}_n = (X'_n X_n)^{-1} X'_n y_n,$$

avec  $\mathbb{E}(\hat{\beta}_n) = \beta$  et  $V(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 (X'_n X_n)^{-1}$ .

Une condition suffisante pour que la suite  $(\hat{\beta}_n)$  converge vers  $\beta$  en moyenne quadratique, et donc en probabilité, est que  $V(\hat{\beta}_n)$  converge vers zéro.

### Théorème 3.4 (Convergence de $\hat{\beta}$ )

*Sous  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , si  $(X'_n X_n)^{-1}$  tend vers zéro avec  $n$  alors  $\hat{\beta}_n$  converge vers  $\beta$  en moyenne quadratique.*

Rappelons que si les variables  $X_1, \dots, X_p$  sont supposées aléatoires, ce qui n'est pas le cas ici,  $(X'_n X_n)/n$  est un estimateur de la matrice de variance des  $p$  variables explicatives. *A priori*, si les  $X_j$  sont mesurées, nous pouvons supposer qu'elles sont mesurées avec des erreurs, même petites. Cela permet de penser que ces variables peuvent être considérées comme aléatoires. En pratique, nous supposons toujours qu'un vecteur aléatoire admet une matrice de variance  $A$  fixée et donc *a priori*  $(X'_n X_n)/n \rightarrow A$ . Comme  $A$  est fixée, nous avons  $n(X'_n X_n)^{-1} \rightarrow A^{-1}$  et donc  $(X'_n X_n)^{-1} \rightarrow 0$ . La condition de convergence n'est donc absolument pas contraignante.

Nous savons que  $V(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 (X'_n X_n)^{-1}$ , où  $\sigma^2$  est fixé. La condition de convergence s'exprime donc comme « la variabilité de  $\hat{\beta}_n$  tend vers 0 avec  $n$  », ce qui semble assez naturel.

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\hat{\beta}_n - \beta\|^2) &= \mathbb{E}(\|\hat{\beta}_n - \mathbb{E}\hat{\beta}_n\|^2) \\ &= \text{tr}[V(\hat{\beta}_n)] \\ &= \sigma^2 \text{tr}(X'_n X_n)^{-1}.\end{aligned}$$

Si  $(X'_n X_n)^{-1}$  tend vers zéro,  $\text{tr}(X'_n X_n)^{-1}$  tend vers zéro et le théorème est démontré.

Nous pouvons aussi considérer l'estimateur  $\hat{\sigma}^2$  et se poser la même question : quelles sont les conditions nécessaires pour que l'estimateur converge vers sa vraie valeur quand le nombre de données augmente ?

### Théorème 3.5 (Convergence de $\hat{\sigma}^2$ )

*Si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont vérifiées et si les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. alors  $\hat{\sigma}_n^2$  converge vers  $\sigma^2$  en probabilité.*

**Preuve**

Partons de la définition de  $\hat{\sigma}_n^2$  :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-p} \hat{\varepsilon}'_n \hat{\varepsilon}_n \\ &= \frac{1}{n-p} \varepsilon'_n (I - P_{X_n}) \varepsilon_n \\ &= \frac{1}{n-p} \varepsilon'_n \varepsilon_n - \frac{1}{n-p} \varepsilon'_n P_{X_n} \varepsilon_n.\end{aligned}$$

La loi forte des grands nombres indique que le premier terme converge p.s. vers  $\sigma^2$ . Nous allons montrer que le second terme converge en probabilité vers zéro. Pour tout  $\eta$  positif, l'inégalité de Markov donne

$$\begin{aligned}\forall \eta > 0, \quad P\left(\frac{\varepsilon'_n P_{X_n} \varepsilon_n}{n-p} > \eta\right) &\leq \frac{1}{\eta(n-p)} \mathbb{E}(\varepsilon'_n P_{X_n} \varepsilon_n) \\ &\leq \frac{1}{\eta(n-p)} \mathbb{E}[\text{tr}(\varepsilon'_n P_{X_n} \varepsilon_n)] \\ &\leq \frac{1}{\eta(n-p)} \sigma^2 \text{tr}(P_{X_n}) \\ &\leq \frac{p}{\eta(n-p)} \sigma^2 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

La dernière partie de cette note concerne la normalité asymptotique. Cela va permettre de donner des intervalles de confiance (IC) et de faire des tests sans supposer d'hypothèse supplémentaire sur la loi des  $\varepsilon$  car nous utiliserons alors la loi limite.

**Théorème 3.6 (Normalité asymptotique)**

*Si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont vérifiées, si les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. et si  $(X'_n X_n)/n$  tend vers  $A$  définie positive (donc inversible), alors*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 A^{-1})$$

**Preuve**

Nous allons donner une idée de la preuve de ce théorème.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) &= \sqrt{n}((X'_n X_n)^{-1} X'_n y_n - \beta) \\ &= \sqrt{n}((X'_n X_n)^{-1} X'_n (X_n \beta + \varepsilon_n) - \beta) \\ &= \sqrt{n}((X'_n X_n)^{-1} X'_n \varepsilon_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \left( \frac{X'_n X_n}{n} \right)^{-1} X'_n \varepsilon_n \right).\end{aligned}$$

Posons  $w_i$  la  $i^{\text{e}}$  colonne de la matrice  $n(X'_n X_n)^{-1} X'_n$ . Nous utilisons ensuite un théorème central limite pondéré qui se trouve dans Antoniadis *et al.* (1992).

Nous retrouvons la même condition sur la convergence de  $(X'_n X_n)^{-1}$ . Il semble raisonnable de penser que cette condition est vérifiée. Afin d'utiliser ce théorème en pratique, pour calculer des intervalles de confiance, nous devons savoir si, avec les observations et leur nombre, nous avons  $(X'_n X_n)^{-1}$  suffisamment proche de 0. Le problème est bien sûr impossible à résoudre formellement et, comme cette convergence dépend à la fois de  $n$  et des observations  $X_n$ , il n'existe pas de règle du type « à partir de 100 observations on peut... ».

## Chapitre 4

# Validation du modèle

Nous rappelons le contexte :

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times p} \beta_{p \times 1} + \varepsilon_{n \times 1},$$

sous les hypothèses

- $\mathcal{H}_1 : \text{rang}(X) = p.$
- $\mathcal{H}_2 : \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I_n$  ou  $\mathcal{H}_3 : \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n).$

Les différentes étapes d'une régression peuvent se résumer de la sorte :

1. la modélisation : nous avons supposé que la variable  $Y$  est expliquée de manière linéaire par les variables  $X_1, \dots, X_p$  via le modèle de régression  $Y = X\beta + \varepsilon$ ;
2. l'estimation : nous avons ensuite estimé les paramètres grâce aux données récoltées. Les hypothèses sur le bruit  $\varepsilon$  notées  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_3$  ont permis d'établir des propriétés statistiques des estimateurs obtenus ;
3. la validation qui est l'objectif de ce chapitre. Nous aborderons le problème de la validation des hypothèses  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_3$ . La vérification de l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  est immédiate et les solutions dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée seront abordées au chapitre 8. Nous envisagerons aussi les problèmes d'ajustement d'un individu ainsi que la validation du modèle lui-même (validation globale), problème important mais souvent négligé. Cette validation globale peut être envisagée de deux manières : choix ou non d'inclure des variables et/ou vérification du caractère linéaire de la liaison entre la variable considérée et  $Y$  comme spécifié par le modèle. Nous traiterons ici le caractère linéaire de la liaison et les transformations éventuelles à effectuer pour rendre cette liaison linéaire. Le choix d'inclure ou de retirer des variables sera étudié en détail au chapitre 6.

## 4.1 Analyse des résidus

L'examen des résidus constitue une étape primordiale de la régression linéaire. Cette étape est essentiellement fondée sur des méthodes graphiques, et il est donc difficile d'avoir des règles strictes de décision. L'objectif de cette partie est de présenter ces méthodes graphiques. Commençons par rappeler les définitions des différents résidus.

### 4.1.1 Les différents résidus

Les résidus théoriques  $\varepsilon_i$  sont estimés par  $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ . Nous avons

Hypothèses	Réalité
$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$	$\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}_i) = 0$
$V(\varepsilon) = \sigma^2 I$	$V(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2(I - P_X)$

Afin d'éliminer la non-homogénéité des variances des résidus estimés, nous préférons utiliser les résidus normalisés définis par

$$r_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sigma \sqrt{1 - h_{ii}}},$$

où  $h_{ij}$  est l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $P_X$ . Or  $\sigma$  est inconnu, si nous remplaçons  $\sigma$  par  $\hat{\sigma}$ , nous obtenons les résidus standardisés

$$t_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - h_{ii}}}.$$

Ces résidus ne sont pas indépendants par construction puisque la variance résiduelle estimée  $\hat{\sigma}^2$  a été estimée avec toutes les données. Ils ne peuvent donc pas être représentatifs d'une absence/présence de structuration par autocorrélation. Cependant, ils possèdent la même variance unité. Ils sont donc utiles afin de détecter des valeurs importantes de résidus. Puisqu'ils possèdent une même variance, ils sont donc dans la même « bande » de largeur constante qu'une règle « empirique » habituelle fixe à  $\pm 2$ , car 2 est proche du quantile à 97.5 % d'une loi normale.

Afin d'utiliser des résidus de même variance unité et indépendants, nous préférons les résidus studentisés par validation croisée (VC) (souvent nommés dans les logiciels *studentized residuals*)

$$t_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 - h_{ii}}},$$

où  $\hat{\sigma}_{(i)}$  est l'estimateur de  $\sigma$  dans le modèle linéaire privé de l'observation  $i$ . Ces résidus qui sont indépendants, suivent une loi de Student (cf. théorème 4.1) sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_3$  et sont construits très simplement en deux étapes :

1. Nous estimons les paramètres  $\beta$  et  $\sigma^2$  avec tous les individus, excepté le  $i^{\text{e}}$ , nous obtenons alors  $\hat{\beta}_{(i)}$  et  $\hat{\sigma}_{(i)}^2$  ;
2. Nous prévoyons  $y_i$  par  $\hat{y}_i^p = x_i' \hat{\beta}_{(i)}$ .

Sous l'hypothèse de normalité des résidus, nous avons montré (3.5) p. 60 que

$$\frac{\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + x_{n+1}' (X' X)^{-1} x_{n+1}}} \sim \mathcal{T}(n-p).$$

Ce résultat s'applique ici et s'écrit alors avec les bonnes notations :

$$t_i^* = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_i^p}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 + x_i' (X_{(i)}' X_{(i)})^{-1} x_i}} \sim \mathcal{T}(n-1-p),$$

où  $X_{(i)}$  est la matrice  $X$  privée de sa  $i^{\text{e}}$  ligne. Nous avons donc  $(n-1)$  observations et perdons un degré de liberté (cf. exercice 4.3).

#### Théorème 4.1 (Loi des résidus studentisés par VC)

*Si la matrice  $X$  est de plein rang, si les  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et si la suppression de la ligne  $i$  ne modifie pas le rang de la matrice, alors les résidus studentisés par VC, notés  $t_i^*$ , suivent une loi de Student à  $(n-p-1)$  degrés de liberté.*

#### Remarque

Les calculs menés dans la preuve montrent le lien existant entre l'erreur de prévision  $y_i - \hat{y}_i^p$  et l'erreur d'ajustement (ou résidu)  $y_i - \hat{y}_i$ . Nous avons

$$y_i - \hat{y}_i^p = \frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_{ii}}. \quad (4.1)$$

Ce résultat permet de calculer l'erreur de prévision sans avoir à recalculer  $\hat{\beta}_{(i)}$  pour chaque observation  $i$ , le gain de temps n'est pas négligeable.

#### Conclusion

Les résidus utilisés sont en général les  $\hat{\varepsilon}_i$  mais leur variance dépend de l'observation  $i$  via la matrice de projection, l'utilisation de ces résidus est, à notre avis, à déconseiller. Nous préférons travailler avec des résidus homoscédastiques et donc utiliser  $t_i$  ou  $t_i^*$ . Ces derniers permettent de détecter des valeurs aberrantes. Il semble cependant préférable d'utiliser  $t_i^*$  pour plusieurs raisons :

- Les  $t_i^*$  sont i.i.d. et suivent un  $\mathcal{T}_{n-p-1}$ , ils permettent de mieux appréhender une éventuelle non-indépendance non prise en compte par le modèle ;
- Nous avons  $t_i^* = t_i \sqrt{(n-p-1)/(n-p-t_i^2)}$  et donc lorsque  $t_i$  est supérieur à 1,  $t_i^* > t_i$  car  $\sqrt{(n-p-1)/(n-p-t_i^2)} > 1$ . Les résidus studentisés font mieux ressortir les grandes valeurs et permettent donc une détection plus facile des valeurs aberrantes ;
- Enfin  $\hat{\sigma}_{(i)}$  est indépendant de  $y_i$  et n'est donc pas influencé par des erreurs grossières sur la  $i^{\text{e}}$  observation.

### 4.1.2 Ajustement individuel au modèle, valeur aberrante

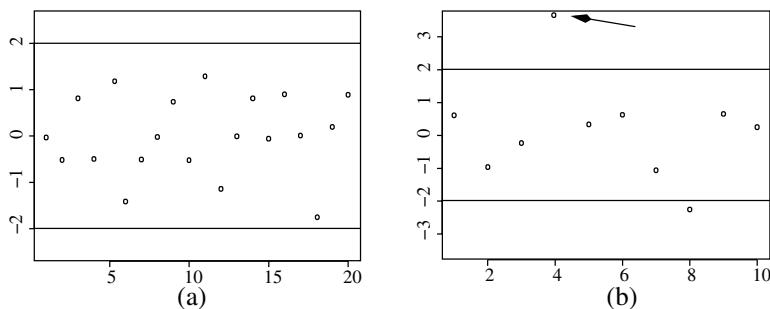
Pour analyser la qualité de l'ajustement d'une observation, il suffit de regarder le résidu correspondant à cette observation. Si ce résidu est anormalement élevé (sens que nous allons préciser), alors l'individu  $i$  est appelé individu aberrant ou point aberrant. Il convient alors d'essayer d'en comprendre la raison (erreur de mesure, individu provenant d'une sous-population) et éventuellement d'éliminer ce point car il peut modifier les estimations.

*Une valeur aberrante* est une observation qui est mal expliquée par le modèle et admet un résidu élevé. Cette notion est définie par :

#### Définition 4.1 (Valeur aberrante)

*Une donnée aberrante est un point  $(x'_i, y_i)$  pour lequel la valeur associée à  $t_i^*$  est élevée (comparée au seuil donné par la loi du Student) :  $|t_i^*| > t_{n-p-1}(1-\alpha/2)$ .*

Généralement les données aberrantes sont détectées en traçant les  $t_i^*$ . La détection des données aberrantes ne dépend que de la grandeur des résidus. Voyons cela sur un exemple simulé.



**Fig. 4.1.** Résidus studentisés corrects (fig. a) et résidus studentisés avec un individu aberrant à vérifier signalé par une flèche (fig. b) et un second moins important.

La figure (4.1.a) montre un ajustement individuel satisfaisant : aucune valeur absolue de résidu n'est plus grande que la valeur test classique 2. Remarquons qu'en théorie  $\alpha$  % des observations sont des valeurs aberrantes. Nous cherchons donc plutôt les résidus dont les valeurs absolues sont nettement au-dessus du seuil de  $t_{n-p-1}(1-\alpha/2)$ . Ainsi nous nous intéresserons dans la figure (4.1.b) au seul individu désigné par une flèche.

Une fois repérées et notées, il est bon de comprendre pourquoi ces valeurs sont aberrantes : est-ce une erreur de mesure ou d'enregistrement ? Proviennt-elles d'une autre population ?.. Nous recommandons d'enlever ces points de l'analyse. Si vous souhaitez les conserver malgré tout, il est indispensable de s'assurer que ce ne sont pas des valeurs influentes : les coefficients et les interprétations tirées du modèle ne doivent pas trop varier avec ou sans ces observations.

### 4.1.3 Analyse de la normalité

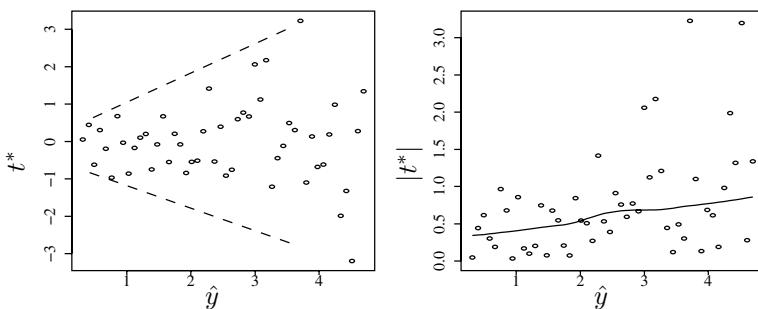
L'hypothèse de normalité sera examinée à l'aide d'un graphique comparant les quantiles des résidus estimés à l'espérance des mêmes quantiles sous l'hypothèse de normalité. Ce type de graphique est appelé Q-Q plot. Supposons que nous ayons  $n$  observations  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  de la variable aléatoire  $\varepsilon$  qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Classons les  $\varepsilon_i$  par ordre croissant,  $\varepsilon_{(1)}, \dots, \varepsilon_{(n)}$ . L'espérance de  $\varepsilon_{(i)}$  est alors approchée par

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \left( \frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right) &\quad \text{si } n \leq 10 \\ \Phi^{-1} \left( \frac{i - 1/2}{n} \right) &\quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi normale (qui est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0; 1[$ ). Le graphique est alors obtenu en dessinant  $\varepsilon_{(1)}, \dots, \varepsilon_{(n)}$  contre leur espérance théorique respective sous hypothèse de normalité. Si cette hypothèse est respectée, le graphique obtenu sera proche de la première bissectrice (voir fig. 4.10).

### 4.1.4 Analyse de l'homoscédasticité

Il n'existe pas de procédure précise pour vérifier l'hypothèse d'homoscédasticité. Nous proposons plusieurs graphiques possibles pour détecter une hétéroscédasticité. Il est recommandé de tracer les résidus studentisés par validation croisée  $t_i^*$  en fonction des valeurs ajustées  $\hat{y}_i$ , c'est-à-dire tracer les couples de points  $(\hat{y}_i, t_i^*)$ . Si une structure apparaît (tendance, cône, vagues), l'hypothèse d'homoscédasticité risque fort de ne pas être vérifiée. Voyons cela sur un graphique.



**Fig. 4.2.** Hétéroscédasticité des résidus.

L'ajustement n'est pas satisfaisant (fig. 4.2) car la variabilité des résidus augmente avec la valeur de  $\hat{y}_i$ , on parle de cône de variance croissante avec la

valeur de l'axe des abscisses  $\hat{Y}$ . Le second graphique trace la valeur absolue du résidu avec une estimation de la tendance des résidus. Cette estimation de la tendance est obtenue par un lisseur, ici `lowess` (Cleveland, 1979). Ce lisseur, qui est aussi nommé `loess`, est le plus utilisé pour obtenir ce type de courbe. Il consiste en une régression par polynômes locaux itérée. Nous voyons que la tendance est croissante et donc que la variance des résidus augmente le long de l'axe des abscisses. Ce deuxième graphique permet de repérer plus facilement que le premier les changements de variance éventuels dans les résidus. Le choix de l'axe des abscisses est très important et permet (ou non) de détecter une hétéroscédasticité. D'autres choix que  $\hat{Y}$  en abscisse peuvent s'avérer plus pertinents selon le problème comme le temps, l'indice...

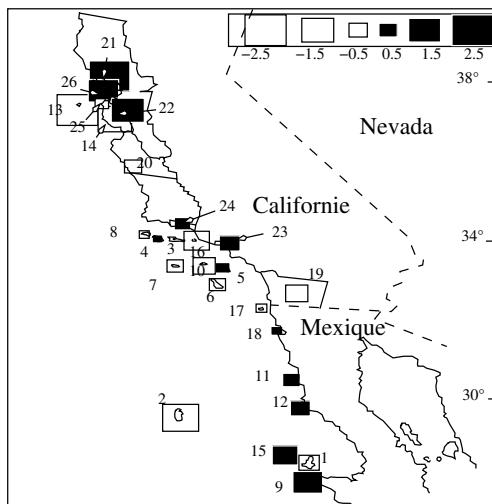
#### 4.1.5 Analyse de la structure des résidus

Les résidus sont supposés être non corrélés entre eux ( $\mathcal{H}_2$ ) ou indépendants ( $\mathcal{H}_3$ ). L'indépendance est très difficile à tester de manière formelle. Le test de Durbin-Watson, le plus souvent avancé et le plus souvent utilisé, consiste à tester  $H_0$  : l'indépendance, contre  $H_1$  : les résidus sont non indépendants et suivent un processus autorégressif d'ordre 1 (e.g. Montgomery *et al.*, 2001). Cependant il existe de nombreux autres modèles de non-indépendance qui ne seront pas forcément détectés par ce test.

D'un point de vue graphique, une représentation des résidus choisie de manière judicieuse pourra permettre de repérer quelques cas de non-indépendance et compléter ainsi l'analyse obtenue par des tests. Si l'on soupçonne une structuration temporelle (autocorrélation des résidus), un graphique temps en abscisse, résidus en ordonnée sera tout indiqué. Si l'on soupçonne une structuration spatiale, un graphique possible consiste en une carte sur laquelle en chacun des points  $i$  de mesure, on représente un cercle ou un carré (selon le signe du résidu estimé) de taille variable (selon la valeur absolue du résidu estimé). Ce type de graphique (voir fig. 4.3, p. 87) permettra peut-être de détecter une structuration spatiale (agrégats de ronds ou de carrés, ou au contraire alternance des ronds/carrés). Si une structuration est observée, un travail sur les résidus et en particulier sur leur covariance est alors nécessaire.

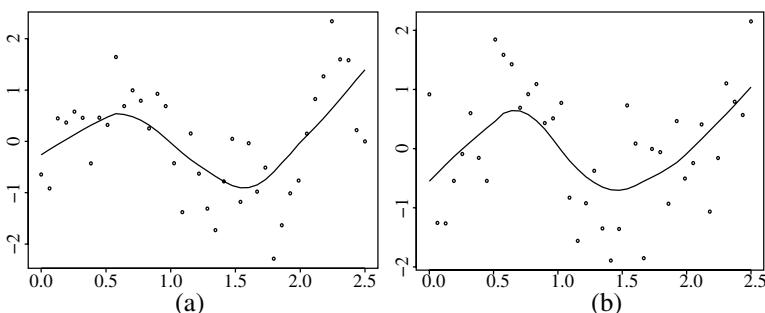
#### Exemple

Un autre exemple très classique de structuration est tiré du livre d'Upton & Fingleton (1985). Le but de la modélisation est d'expliquer une variable  $Y$ , le nombre de plantes endémiques observées, par trois variables : la surface de l'unité de mesure, l'altitude et la latitude. Les résidus studentisés sont représentés sur la carte géographique des emplacements de mesure (fig. 4.3). On observe des agrégats de résidus positifs ou négatifs qui semblent indiquer qu'une structuration spatiale reste présente dans les résidus. Dans cet exemple, une simple représentation des résidus en fonction de  $\hat{Y}$  ou du numéro de l'observation n'apporte que peu d'information. En conclusion nous pouvons donc insister sur le choix adéquat de la représentation graphique des résidus.



**Fig. 4.3.** Exemple de résidus studentisés structurés spatialement.

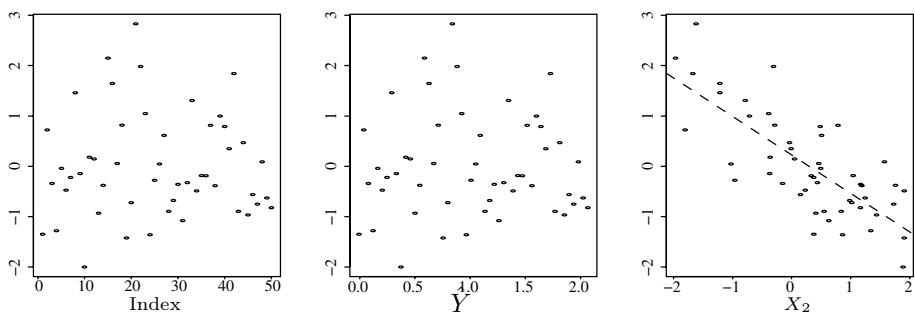
L'utilisation d'un lisseur peut permettre de dégager une éventuelle structuration dans les résidus (voir fig. 4.4) et ce de manière aisée et rapide, ce qui est primordial. Il est cependant difficile, voire impossible, de discerner entre une structuration due à un oubli dans la modélisation de la moyenne et une structuration due à une mauvaise modélisation de la variance (voir fig. 4.4).



**Fig. 4.4.** Tendance sinusoïdale due à des bruits autorégressifs d'ordre 1,  $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \eta_i$  (variance mal modélisée, graphique a) ou à une composante explicative non prise en compte :  $X_2 = 0.2 \sin(3x)$  (moyenne mal modélisée, graphique b).

Un autre type de structuration des résidus peut être due à une mauvaise modélisation. Supposons que nous ayons oublié une variable intervenant dans

l'explication de la variable  $Y$ . Cet oubli se retrouvera forcément dans les résidus qui sont par définition les observations moins l'estimation par le modèle. L'hypothèse d'absence de structuration ( $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \forall i \neq j$ ) risque de ne pas être vérifiée. En effet, la composante oubliée dans le modèle va s'additionner au vrai bruit et devrait apparaître dans le dessin des résidus. Une forme quelconque de structuration dans les graphiques des résidus sera annonciatrice d'un mauvais ajustement du modèle. Une fois détectée une structuration, il suffit, si l'on peut dire, d'ajouter au modèle une variable explicative possédant la même structuration. Voyons cela sur un exemple graphique.



**Fig. 4.5.** Résidus studentisés avec une tendance décroissante due à l'oubli d'une variable  $X_2$  dans le modèle. Les résidus studentisés (par VC) sont représentés comme fonctions du numéro de l'observation (index), de l'estimation du modèle  $\hat{y}$  et comme fonction de  $X_2$ .

La figure (4.5) montre les graphiques d'un modèle linéaire  $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \varepsilon$  alors que le vrai modèle est un modèle à deux variables  $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ . L'ajustement paraît non satisfaisant puisqu'une structure linéaire décroissante se dégage des résidus de la troisième représentation. Notons l'importance du choix de l'axe des abscisses car les premiers graphiques, représentant les mêmes résidus, ne laissent pas soupçonner cette tendance décroissante. Le modèle linéaire proposé n'est donc pas judicieux, il serait bon d'ajouter une nouvelle variable constituée par l'axe des abscisses  $x$  de la troisième représentation, c'est-à-dire ici la variable « oubliée »  $X_2$ .

Cependant ce type de diagnostic peut être insuffisant. Une autre méthode plus précise, mais plus longue à réaliser, consiste à regarder, variable explicative par variable explicative, si la variable explicative considérée agit bien de manière linéaire sur la variable à expliquer comme cela est requis dans le modèle. Ce type d'analyse sera mené avec des résidus appelés résidus partiels (ou résidus partiels augmentés) ou encore par des régressions partielles. Ces graphiques permettent de constater si une variable candidate est bien utile au modèle et de trouver d'éventuelles fonctions non linéaires de variables explicatives déjà présentes. Rappelons qu'une fonction non linéaire  $f$  fixée d'une variable explicative  $X_j$

est considérée comme une variable explicative à part entière  $X_{p+1} = f(X_j)$  (voir p. 37). Nous verrons cela à la fin de ce chapitre.

#### 4.1.6 Conclusion

Il est impératif de tracer un graphique avec en ordonnées les résidus et en abscisses soit  $\hat{Y}$ , soit le numéro de l'observation, soit le temps ou tout autre facteur potentiel de non indépendance. Ce type de graphique permettra : de vérifier l'ajustement global, de repérer les points aberrants, ainsi que de vérifier les hypothèses concernant la structure de variance du vecteur  $\varepsilon$ . D'autres graphiques, comme ceux présentant la valeur absolue des résidus en ordonnée permettront de regarder la structuration de la variance. L'analyse des résidus permet de détecter des différences significatives entre les valeurs observées et les valeurs prédictes. Cela permet donc de connaître les points mal prédicts et les faiblesses du modèle en terme de moyenne ou de variance. Cependant, cela ne nous renseigne pas sur les variations des estimateurs des paramètres dues à la suppression d'une observation et donc à la robustesse de ces estimations. Pour cela nous allons dans la prochaine section envisager des mesures adéquates.

## 4.2 Analyse de la matrice de projection

La matrice de projection

$$P_X = X(X'X)^{-1}X',$$

est la matrice intervenant dans le calcul des valeurs ajustées. En effet,

$$\hat{Y} = P_X Y.$$

Pour la ligne  $i$ , en notant  $h_{ij}$  l'élément courant de la matrice de projection  $P_X$ , cela s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &= \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \\ &= h_{ii} y_i + \sum_{j \neq i} h_{ij} y_j.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture permet de mesurer le poids de l'observation sur son propre ajustement via  $h_{ii}$ .

#### Définition 4.2 (Poids de l'observation $i$ )

*Le « poids » de l'observation  $i$  sur sa propre estimation vaut  $h_{ii}$ .*

La matrice de la projection orthogonale  $P_X$  sur l'espace engendré par les colonnes de  $X$ , d'élément courant  $h_{ij}$  admet en particulier comme propriétés (annexe B) que si  $h_{ii} = 1$  alors  $h_{ij} = 0$  pour tout  $j$  différent de  $i$  et à l'inverse si  $h_{ii} = 0$ , alors  $h_{ij} = 0$  pour tout  $j$  différent de  $i$ .

Nous avons alors les cas extrêmes suivants :

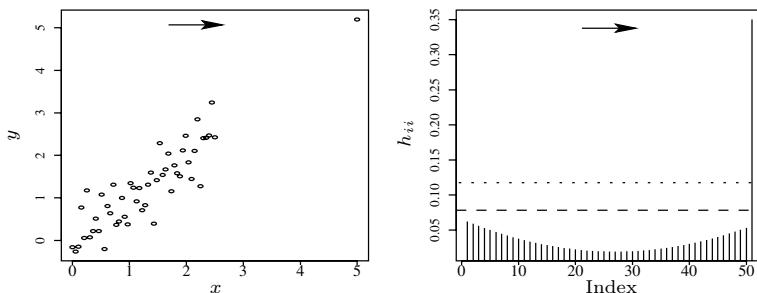
- si  $h_{ii} = 1$ ,  $\hat{y}_i$  est entièrement déterminée par  $y_i$  car  $h_{ij} = 0$  pour tout  $j$  ;
- si  $h_{ii} = 0$ ,  $y_i$  n'a pas d'influence sur  $\hat{y}_i$  (qui vaut alors zéro).

Nous savons aussi que  $\text{tr}(P_X) = \sum h_{ii} = p$ , la moyenne des  $h_{ii}$  vaut donc  $p/n$ . Ainsi si  $h_{ii}$  est « grand »,  $y_i$  influe fortement sur  $\hat{y}_i$ . Différents auteurs ont travaillé sur ce critère et la définition suivante rapporte leur définition de la notion de « grand ».

#### Définition 4.3 (Point levier)

*Un point est un point levier si les valeurs  $h_{ii}$  de la matrice de projection dépasse les valeurs suivantes :*

- $h_{ii} > 2p/n$  selon Hoaglin & Welsch (1978) ;
- $h_{ii} > 3p/n$  pour  $p > 6$  et  $n - p > 12$  selon Velleman & Welsh (1981) ;
- $h_{ii} > 0.5$  selon Huber (1981).



**Fig. 4.6.** Exemple d'un point levier, figuré par la flèche, pour un modèle de régression simple. Quantification par  $h_{ii}$  de la notion de levier. La ligne en pointillée représente le seuil de  $3p/n$  et celle en tiret le seuil de  $2p/n$ .

Pour un modèle de régression simple dont le nuage de points est représenté sur la figure (4.6) le point désigné par une flèche est un point levier. Sa localisation sur l'axe  $x$  est différente des autres points et son poids  $h_{ii}$  est prépondérant et supérieur aux valeurs seuils de  $2p/n$  et  $3p/n$ . Cette notion de levier  $h_{ii}$  correspond à l'éloignement du centre de gravité de la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $X$ . Plus le point est éloigné, plus la valeur des  $h_{ii}$  augmente. Remarquons que ce point est levier mais non aberrant car il se situe dans le prolongement de la droite de régression et donc son résidu sera faible.

Les points leviers sont donc des points atypiques au niveau des variables explicatives. Là encore il est bon de les repérer et de les noter, puis de comprendre pourquoi ces points sont différents : erreur de mesure, erreur d'enregistrement, ou appartenance à une autre population. Même quand ils ne sont pas influents, i.e. sans ces points les estimations ne changent pas ou très peu, on peut se poser la question de la validité du modèle jusqu'à ces points extrêmes. Peut-être aurait-on, avec plus de mesures autour de ces points, un modèle qui changerait, annonçant un modèle différent pour cette population ? Après mûre réflexion ces

valeurs pourront être éliminées ou conservées. Dans le premier cas aucun risque n'est pris au bord du domaine, quitte à sacrifier quelques points. Dans le second cas le modèle est étendu de manière implicite jusqu'à ces points.

L'analyse des résidus permet de trouver des valeurs atypiques en fonction de la valeur de la variable à expliquer. L'analyse de la matrice de projection permet de trouver des individus atypiques en fonction des valeurs des variables explicatives (observations éloignées de la moyenne). D'autres critères vont combiner ces deux analyses.

### 4.3 Autres mesures diagnostiques

La distance de Cook mesure l'influence de l'observation  $i$  sur l'estimation du paramètre  $\beta$ . Pour bâtir une telle mesure, nous considérons la distance entre le coefficient estimé  $\hat{\beta}$  et le coefficient  $\hat{\beta}_{(i)}$  que l'on estime en enlevant l'observation  $i$ , mais en gardant le même modèle et toutes les autres observations bien évidemment. Si la distance est grande, alors l'observation  $i$  influence beaucoup l'estimation de  $\beta$ , puisque la laisser ou l'enlever conduit à des estimations éloignées. De manière générale,  $\hat{\beta}$  est dans  $\mathbb{R}^p$ , une distance bâtie sur un produit scalaire s'écrit

$$d(\hat{\beta}_{(i)}, \hat{\beta}) = (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})' Q (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}),$$

où  $Q$  est une matrice symétrique définie positive. De nombreux choix sont offerts en changeant  $Q$ . L'équation donnant une région de confiance simultanée (cf. 3.4, p. 56) que nous rappelons

$$\text{RC}_\alpha(\beta) = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p : \mid \frac{1}{p\hat{\sigma}^2} (\hat{\beta} - \beta)' (X'X) (\hat{\beta} - \beta) \leq f_{p,n-p}(1 - \alpha) \right\},$$

permet de dire que dans 95 % des cas, la distance entre  $\beta$  et  $\hat{\beta}$  (selon la matrice  $Q = X'X/p\hat{\sigma}^2$ ) est inférieure à  $f_{p,n-p}(1 - \alpha)$ . Par analogie, nous pouvons donc utiliser cette distance, appelée distance de Cook, pour mesurer l'influence de l'observation  $i$  dans le modèle.

#### Définition 4.4 (Distance de Cook)

*La distance de Cook est donnée par*

$$C_i = \frac{1}{p\hat{\sigma}^2} (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})' (X'X) (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}) = \frac{(\hat{y}_i - x'_i \hat{\beta}_{(i)})^2}{p\hat{\sigma}^2}.$$

*Il est cependant possible de la réexprimer de manière plus concise et plus simple à calculer comme*

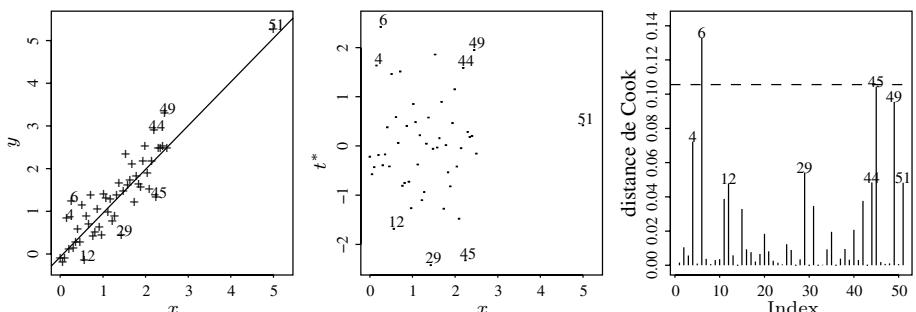
$$C_i = \frac{1}{p} \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} t_i^2 = \frac{h_{ii}}{p(1 - h_{ii})^2} \frac{\hat{\epsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2}.$$

Une observation influente est donc une observation qui, enlevée, conduit à une grande variation dans l'estimation des coefficients, c'est-à-dire à une distance de Cook élevée. Pour juger si la distance  $C_i$  est élevée, Cook (1977) propose le seuil  $f_{p,n-p}(0.1)$  comme souhaitable et le seuil  $f_{p,n-p}(0.5)$  comme préoccupant. Certains auteurs citent comme seuil la valeur 1, qui est une approximation raisonnable de  $f_{p,n-p}(0.5)$ .

Remarquons que la distance de Cook (deuxième définition) peut être vue comme la contribution de deux termes. Le premier  $t_i^2$  mesure le degré d'adéquation de l'observation  $y_i$  au modèle estimé  $x'_i \hat{\beta}$ , alors que le second terme qui est le rapport  $V(\hat{y}_i)/V(\hat{\epsilon}_i)$  mesure la sensibilité de l'estimateur  $\hat{\beta}$  à l'observation  $i$ . La distance de Cook mesure donc deux caractères en même temps : le caractère aberrant quand  $t_i$  est élevé, et le caractère levier quand  $V(\hat{y}_i)/V(\hat{\epsilon}_i) = h_{ii}/1 - h_{ii}$  est élevé. Les points présentant des distances de Cook élevées seront des points aberrants, ou leviers, ou les deux, et influenceront l'estimation puisque la distance de Cook est une distance entre  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\beta}_{(i)}$ .

A l'image des points aberrants et leviers, nous recommandons de supprimer les observations présentant une forte distance de Cook. Si l'on souhaite toutefois absolument garder ces points, il sera très important de vérifier que les coefficients estimés et les interprétations tirées du modèle ne varient pas trop avec ou sans ces observations influentes.

Si l'on revient au modèle de régression simple pour les points de la figure (4.6), nous avons représenté sur la figure (4.7) le nuage de points, les résidus studentisés et la distance de Cook.

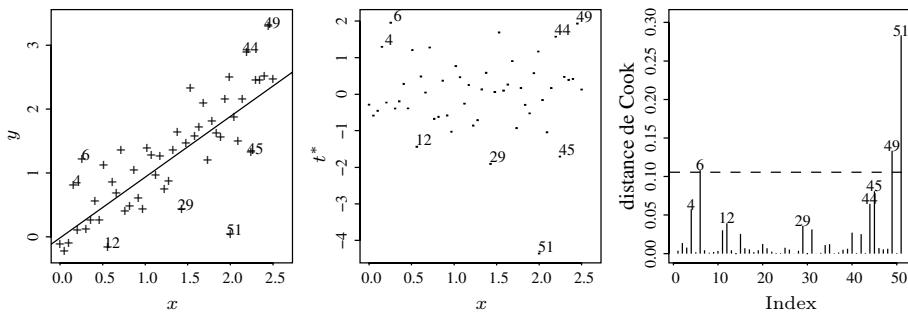


**Fig. 4.7.** Exemple du point levier (numéro 51). Les points associés aux 8 plus grandes valeurs de la distance de Cook sont numérotés ainsi que leurs distances de Cook et leurs résidus studentisés (par VC). La droite en trait plein est la droite ajustée par MC.

Nous voyons que des points admettant de forts résidus (points éloignés de la droite) possèdent une distance de Cook élevée (cas des points 4, 6, 12, 29, 44 et 45). Mais les points leviers possèdent un rapport  $h_{ii}/(1 - h_{ii})$  élevé, par définition. Le point 51 bien qu'ayant un résidu faible apparaît comme ayant

une distance de Cook relativement forte (la 8<sup>e</sup> plus grande). Ceci illustre bien que la distance de Cook opère un compromis entre points aberrants et points leviers. Notons encore une fois que le point 51 n'est ni influent ni aberrant, son résidu  $t_{51}^*$  n'est pas élevé et il se situe dans le prolongement de l'axe du nuage, ce qui veut dire que, sans ce point, la droite ajustée par MC sera voisine et donc le résidu  $t_{51}^*$  sera faible. Notons enfin que les seuils de la distance de Cook sont  $f_{p,n-p}(0.5) = 0.7$  et le second  $f_{p,n-p}(0.1) = 0.11$ , qui figure en pointillé sur le graphique (4.7). Ici les distances de Cook semblent assez bien réparties au niveau hauteur et aucun point ne se détache nettement.

En utilisant encore les mêmes 50 points, en remplaçant le point levier par un point franchement aberrant, mais non levier, nous voyons que ce nouveau point 51 est bien aberrant (fig. 4.8), son résidu  $t_{51}^*$  est très élevé. La distance de Cook, malgré la position de ce point 51 vers le milieu des  $x$ , est élevée et ceci uniquement à cause de son caractère aberrant. Bien entendu un point peut être à la fois levier et aberrant.



**Fig. 4.8.** Exemple du point fortement aberrant (numéro 51). Les points associés aux 8 plus grandes valeurs de la distance de Cook sont numérotés, ainsi que leurs distances de Cook et leurs résidus studentisés (par VC). La droite en trait plein est la droite ajustée par MC.

Les seuils de la distance de Cook sont  $f_{p,n-p}(0.5) = 0.7$  et  $f_{p,n-p}(0.1) = 0.11$ , qui figure en pointillé sur le graphique (4.7). Ici la distance de Cook du point 51 se détache nettement, indiquant que ce point pourrait être éventuellement supprimé. Le seuil de  $f_{p,n-p}(0.5)$  semble assez conservateur.

Une autre mesure d'influence est donnée par la distance de Welsh-Kuh. Si l'on reprend la définition de la distance de Cook pour l'observation  $i$ , elle s'écrit comme  $(\hat{y}_i - \hat{x}'_i \hat{\beta}_{(i)})^2 / \hat{\sigma}^2$  à  $1/p$  près. Ceci représente le carré de l'écart entre  $\hat{y}_i$  et sa prévision  $\hat{y}'_i$  divisé par la variance estimée de l'erreur.

Il faut donc utiliser un estimateur de  $\sigma^2$ . Si l'on utilise l'estimateur classique  $\hat{\sigma}^2$ , alors une observation influente risque de « perturber » l'estimation  $\hat{\sigma}^2$ . Il est donc préférable d'utiliser  $\hat{\sigma}_{(i)}^2$ .

**Définition 4.5 (DFFITS)**

L'écart de Welsh-Kuh, souvent appelé DFFITS par les logiciels, est défini par

$$Wk_i = |t_i^*| \sqrt{\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}}.$$

Cette quantité permet d'évaluer l'écart standardisé entre l'estimation bâtie sur toutes les observations et l'estimation bâtie sur toutes les observations sauf la  $i^e$ . Cet écart de Welsh-Kuh mesure ainsi l'influence simultanée d'une observation sur l'estimation des paramètres  $\beta$  et  $\sigma^2$ . Si l'écart de Welsh-Kuh est supérieur à  $2\sqrt{p+1}/\sqrt{n}$  en valeur absolue, alors il est conseillé d'analyser les observations correspondantes.

D'autres mesures diagnostiques sont données dans le livre d'Antoniadis *et al.* (1992, pages 36-40). En guise de remarque finale, la régression robuste est une alternative très intéressante si le problème des observations influentes s'avère délicat (Rousseeuw & Leroy, 1987).

## 4.4 Effet d'une variable explicative

### 4.4.1 Ajustement au modèle

Nous désirons savoir si la modélisation de l'espérance de  $Y$  par  $X\beta$ , estimée par  $X\hat{\beta}$ , est correcte. Le modèle est-il satisfaisant ou ne faudrait-il pas rajouter de nouvelles variables explicatives ou de nouvelles fonctions fixées des variables explicatives et lesquelles ? Dans ce paragraphe, nous nous posons la question de la qualité d'ajustement du modèle pour une variable explicative  $X_j$  donnée, ce qui revient aux trois questions suivantes :

1. cette variable  $X_j$  est-elle utile ?
2. est-ce que cette variable agit linéairement sur la prévision de  $Y$  ou faut-il introduire une transformation de cette variable  $f(X_j)$  ?
3. quelle transformation  $f(X_j)$  est à introduire afin d'améliorer le modèle ?

Pour répondre à ces questions, remarquons que l'on peut toujours utiliser les procédures de choix de variables (cf. chapitre suivant) et par exemple les tests entre modèles emboîtés :

- si l'on se pose la question de l'utilité de la variable  $X_j$  on peut tester

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_j \neq 0$$

$$H_0 : \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1, k \neq j}^p \beta_k X_k \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{E}(Y) = X\beta;$$

- si l'on se pose la question d'une transformation  $f(X_j)$  notée  $X_{p+1}$  on peut tester

$$H_0 : \mathbb{E}(Y) = X\beta \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{E}(Y) = X\beta + \beta_{p+1}X_{p+1}.$$

Cependant, sans connaître *a priori*  $f(\cdot)$ , il est impossible d'effectuer le test. Ce paragraphe va proposer des outils graphiques permettant de répondre à ces trois questions rapidement, en conservant à l'esprit que la première question peut être résolue avec un test.

#### 4.4.2 Régression partielle : impact d'une variable

Afin de connaître l'impact de la  $j^{\text{e}}$  variable  $X_j$  lors d'une régression :

1. Nous effectuons d'abord une régression avec les  $p - 1$  autres variables. Les résidus obtenus correspondent alors à la part de  $Y$  qui n'a pas été expliquée par les  $p - 1$  variables ;
2. La seconde partie de l'analyse correspond alors à l'explication de ces résidus non pas par la variable  $X_j$  mais par la part de la variable  $X_j$  qui n'est pas déjà expliquée par les  $p - 1$  autres variables.

Tout d'abord supposons que le modèle complet soit vrai, c'est-à-dire que

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

Afin d'analyser l'effet de la  $j^{\text{e}}$  variable  $X_j$ , partitionnons la matrice  $X$  en deux, une partie sans la  $j^{\text{e}}$  variable que nous notons  $X_{\bar{j}}$  et l'autre avec la  $j^{\text{e}}$  variable  $X_j$ .

Le modèle s'écrit alors

$$Y = X_{\bar{j}}\beta_{\bar{j}} + \beta_j X_j + \varepsilon,$$

où  $\beta_{\bar{j}}$  désigne le vecteur  $\beta$  privé de sa  $j^{\text{e}}$  coordonnée notée  $\beta_j$ . Afin de quantifier l'apport de la variable  $X_j$ , projetons sur l'orthogonal de  $\mathfrak{S}(X_{\bar{j}})$ . Cette équation devient

$$\begin{aligned} P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y &= P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_{\bar{j}}\beta_{\bar{j}} + P_{X_{\bar{j}}^\perp} \beta_j X_j + P_{X_{\bar{j}}^\perp} \varepsilon \\ P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y &= \beta_j P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j + P_{X_{\bar{j}}^\perp} \varepsilon \\ P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y &= \beta_j P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j + \eta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous avons donc un modèle de régression dans lequel nous cherchons à expliquer une variable (aléatoire)  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y$  par un modèle linéaire dépendant d'une variable fixe  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j$  additionné à un bruit aléatoire  $\eta = P_{X_{\bar{j}}^\perp} \varepsilon$ .

Cette équation suggère que si le modèle complet est vrai, alors un modèle de régression univariée est valide entre  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y$  et  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j$  et donc qu'il suffit de dessiner  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y$  en fonction de  $P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j$  pour le vérifier graphiquement. Ce graphique est appelé graphique de la régression partielle pour la variable  $X_j$ .

1. Si les points forment une droite de pente  $|\beta_j| > 0$ , alors le modèle pour la variable  $X_j$  est bien linéaire ;
2. Si les points forment une droite de pente presque nulle, alors la variable  $X_j$  n'a aucune utilité dans le modèle ;
3. Si les points forment une fonction non linéaire  $f$ , il sera alors utile de remplacer  $X_j$  par une fonction non linéaire dans le modèle complet.

Remarquons l'utilité de l'abscisse, qui est  $P_{X_j^\perp} X_j$  et non pas directement  $X_j$ . Cette abscisse représente la projection de la variable  $X_j$  sur les autres variables explicatives  $X_{\bar{j}}$ , c'est-à-dire la partie de  $X_j$  non déjà expliquée linéairement par les autres variables, ou autrement dit la partie de l'information apportée par  $X_j$  non déjà prise en compte par le modèle linéaire sans cette variable. Cela permet donc de faire apparaître uniquement la partie non redondante de l'information apportée par  $X_j$  pour l'explication linéaire de  $Y$  (cf. exercice 4.5).

#### **Proposition 4.1 (Régession partielle)**

*Notons  $\tilde{\beta}_j$  l'estimateur des moindres carrés de  $\beta_j$  dans le modèle de régression simple (4.2). Notons  $\hat{\beta}_j$  la  $j^e$  composante de  $\hat{\beta}$ , l'estimateur des moindres carrés obtenu dans le modèle complet. Nous avons alors*

$$\tilde{\beta}_j = \hat{\beta}_j.$$

#### **4.4.3 Résidus partiels et résidus partiels augmentés**

Le problème de l'utilisation du graphique précédent correspond au calcul des abscisses  $P_{X_j^\perp} X_j$ . Afin de contourner ce problème et d'obtenir un graphique facile à effectuer, nous définissons les résidus partiels :

#### **Définition 4.6 (Résidus partiels)**

*Les résidus partiels pour la variable  $X_j$  sont définis par*

$$\hat{\varepsilon}_P^j = \hat{\varepsilon} + \hat{\beta}_j X_j. \quad (4.3)$$

*Le vecteur  $\hat{\varepsilon}$  correspond aux résidus obtenus avec toutes les variables et  $\hat{\beta}_j$  est la  $j^e$  coordonnée de  $\hat{\beta}$  estimateur des MC obtenu dans le modèle complet.*

Un graphique représentant  $X_j$  en abscisse et ces résidus partiels en ordonnée aura, si le modèle complet est valide, une allure de droite de pente estimée  $\hat{\beta}_j$  par MC. En effet, la pente de régression univariée estimée par MC est (cf. eq. 1.4)

$$\frac{\langle \hat{\varepsilon}_P^j, X_j \rangle}{\langle X_j, X_j \rangle} = \frac{\langle \hat{\varepsilon}, X_j \rangle + \hat{\beta}_j \langle X_j, X_j \rangle}{\langle X_j, X_j \rangle} = \frac{\langle P_{X^\perp} Y, X_j \rangle + \hat{\beta}_j \langle X_j, X_j \rangle}{\langle X_j, X_j \rangle} = \hat{\beta}_j.$$

Il est en général préférable d'enlever l'information apportée par la moyenne commune à chacune des variables et de considérer ainsi les variables centrées et les résidus partiels correspondants

$$\hat{\varepsilon}_P^j = \hat{\varepsilon} + \bar{y} \mathbb{1} + \hat{\beta}_j (X_j - \bar{X}_j),$$

où  $\bar{X}_j$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  ayant toujours la même coordonnée :  $\sum_{i=1}^n x_{ij}/n$ .

Les graphiques des résidus partiels sont à l'image de ceux des régressions partielles, ils comportent pour chaque variable  $X_j$  en abscisse cette variable  $X_j$  et en ordonnée les résidus partiels correspondants  $\hat{\varepsilon}_P^j$ . Si le modèle complet est vrai, le graphique montre une tendance linéaire et la variable  $X_j$  intervient bien de manière linéaire. Si par contre la tendance sur le graphique est non linéaire selon une fonction  $f(\cdot)$ , il sera bon de remplacer  $X_j$  par  $f(X_j)$ .

Le fait d'utiliser  $X_j$  en abscisse pour les graphiques des résidus partiels permet de trouver beaucoup plus facilement la transformation  $f(X_j)$  que dans les graphiques des régressions partielles correspondants. Par contre, en n'enlevant pas à  $X_j$  l'information déjà apportée par les autres variables, la pente peut apparaître non nulle alors que l'information supplémentaire apportée par  $X_j$  par rapport à  $X_{\bar{j}}$  n'est pas importante. Ceci peut se produire lorsque  $X_j$  est très corrélée linéairement à une ou plusieurs variables de  $X_{\bar{j}}$ . Cependant, notons qu'une procédure de test ou de sélection de modèle tranchera entre le cas où  $X_j$  est utile ou non. Si le but est de vérifier que la variable  $X_j$  entre linéairement dans le modèle et de vérifier qu'aucune transformation non linéaire  $f(X_j)$  n'améliorera le modèle, il est alors préférable d'utiliser les résidus partiels.

Des résultats empiriques ont montré que les résidus partiels augmentés (Mallows, 1986) sont dans cette optique en général meilleurs que les résidus partiels.

#### Définition 4.7 (Résidus partiels augmentés)

*Les résidus partiels augmentés pour la variable  $X_j$  sont définis par*

$$\hat{\varepsilon}_{AP}^j = \hat{\varepsilon}^* + \hat{\alpha}_j X_j + \hat{\alpha}_{p+1} X_j^2,$$

où  $\hat{\varepsilon}^* = \hat{Y}^* - Y$  et  $\hat{Y}^* = (X|X_j^2)\hat{\alpha}$  l'estimation par le modèle complet augmenté d'un terme quadratique  $X_{p+1} = X_j^2$ .

On peut encore utiliser une autre version sans l'effet de la moyenne

$$\hat{\varepsilon}_{AP}^j = \hat{\varepsilon}^* + \bar{y} + \hat{\alpha}_j (X_j - \bar{X}_j) + \hat{\alpha}_{p+1} \left[ (X_j - \bar{X}_j)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \right].$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé par l'heuristique de ces résidus partiels à l'article de Mallows (1986).

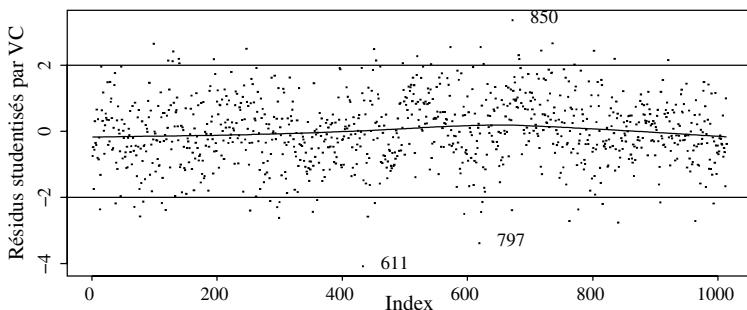
## 4.5 Exemple : la concentration en ozone

Revenons à l'exemple de la prévision des pics d'ozone. Nous expliquons le pic d'ozone 03 par 6 variables : la teneur maximum en ozone la veille (03v), la température prévue par Méteo France à 6 h (T6), à midi (T12), une variable synthétique (la projection du vent sur l'axe est-ouest notée Vx) et enfin les nébulosités prévues à midi (Ne12) et à 15 h (Ne15). Nous avons pour ce travail  $n = 1014$  observations. Pour valider notre modèle, nous pouvons commencer

par représenter les résidus studentisés en fonction du numéro d'observation, numéros qui sont dans l'ordre chronologique.

```
mod.lin6v <- lm(O3~T6+T12+Ne12+Ne15+Vx+O3v,data=ozone)
plot(rstudent(mod.lin6v),pch=". ",ylab="Résid studentisés par VC")
abline(h=c(-2,2))
lines(lowess(rstudent(mod.lin6v)))
```

Les résidus studentisés (fig. 4.9) font apparaître une structuration presque négligeable en forme de sinusoïde en fonction du numéro des observations, ou du temps, les observations étant rangées par date de mesure. Ceci peut paraître normal puisque nous avons des variables mesurées dans le temps et cette légère variation peut être vue comme une autocorrélation (éventuelle) des résidus.



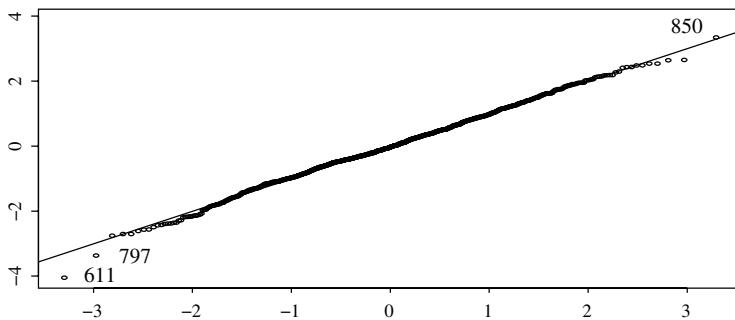
**Fig. 4.9.** Résidus studentisés par VC du modèle de régression à 6 variables explicatives.

Comme nous sommes en présence de 1014 observations, il est normal qu'un certain nombre de résidus apparaissent en dehors de la bande (-2,2). Seules les 3 observations franchement éloignées de l'axe horizontal (les numéros 611, 797 et 850) peuvent sembler aberrantes. Ces observations sont donc mal expliquées par le modèle à 6 variables. Une analyse complémentaire sur ces journées pour mieux comprendre ces individus pourrait être entreprise : sont-ils dus à une erreur de mesure, à une défaillance de l'appareillage, à une journée exceptionnelle ou autre ? Ces points sont mal prédisits mais ne sont pas forcément influents et ne faussent donc pas forcément le modèle. Il n'y a donc pas lieu de les éliminer même si l'on sait qu'ils sont mal expliqués.

Bien que nous n'utilisions pas l'hypothèse de normalité ici, nous pouvons tracer à titre d'exemple le graphique Quantile-Quantile.

```
plot(mod.lin6v,which=2,sub="",main="")
abline(0,1)
```

Nous observons sur le graphique 4.10 que la normalité semble bien respectée, tous les points étant sur la première bissectrice. Nous apercevons encore les points aberrants numéros 611, 797 et 850.

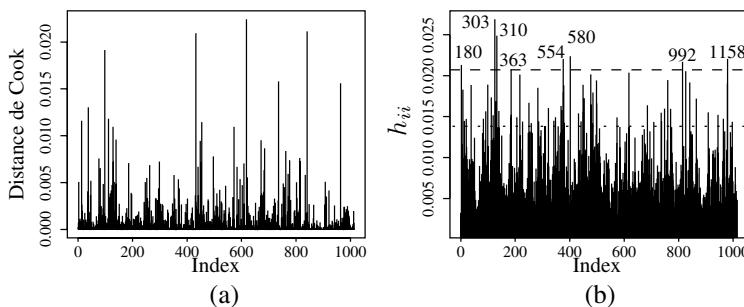


**Fig. 4.10.** Q-Q plot pour le modèle à 6 variables explicatives.

Représentons maintenant les points leviers et influents.

```
plot(cooks.distance(mod.lin6v),type="h",ylab="Distance de Cook")
## voir autres mesures diagnostiques pour les 3 seuils
seuil1 <- qf(0.1,p,n-p) ; abline(h=seuil1)
plot(infl.ozone.app$infmat[, "hat"],type="h",col="grey",ylab="hii")
seuil1 <- 3*p/n ; abline(h=seuil1,col=1,lty=2) ;
seuil2 <- 2*p/n ; abline(h=seuil2,col=1,lty=3)
```

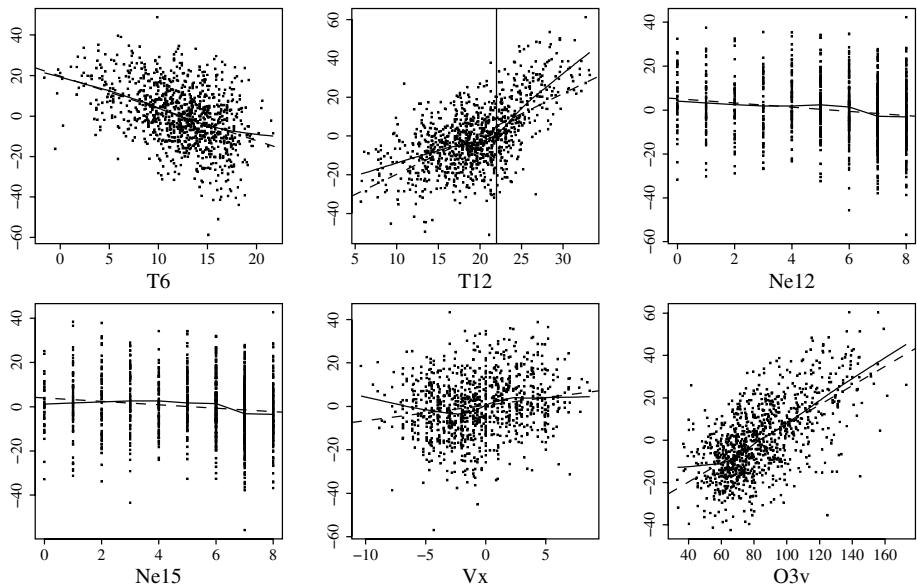
En ce qui concerne les observations influentes (fig. 4.11), aucune observation ne montre une distance de Cook nettement supérieure aux autres et il ne semble pas y avoir d'observation très influente. De plus, le seuil  $f_{p,n-p}(0.1) = 0.4$  est supérieur à toutes les observations. Au niveau des points leviers nous observons que beaucoup d'individus statistiques sont plus grands que le seuil indicatif de  $2p/n$ , 8 seulement sont au-dessus du seuil de  $3p/n$  et enfin aucun n'est aux environs de 0.5. De manière plus générale aucune observation ne montre un  $h_{ii}$  très différent des autres. En conclusion, nous conservons toutes les observations.



**Fig. 4.11.** Distance de Cook (a) et points leviers (b).

Nous avons vu que le graphique d'ajustement global, résidus studentisés en fonction d'un indice, montre une légère oscillation. Cela peut être dû à

une autocorrélation des résidus, donc une mauvaise structure de variance des résidus, qui n'est donc pas diagonale :  $V(\varepsilon) \neq \sigma^2 I_n$ . Cependant cela peut aussi être dû à une mauvaise modélisation de la moyenne. Nous allons donc considérer les graphiques des résidus partiels pour toutes les variables explicatives.



**Fig. 4.12.** Résidus partiels pour les 6 variables explicatives. Le trait continu représente le résumé lissé des données par le lisseur loess.

Les graphiques des résidus partiels (fig. 4.12) pour les variables  $T6$ ,  $Ne12$ ,  $Ne15$  et  $O3v$  montrent qu'aucune transformation n'est nécessaire, les résidus partiels étant répartis le long de la droite ajustée (en pointillé).

Pour la variable  $T12$  on note que le nuage est réparti en deux sous-ensembles : avant  $22^\circ\text{C}$  ou après. Chacun de ces deux sous-ensembles semble être réparti le long d'une droite de pente différente. Nous allons donc ajouter une variable qui va prendre la valeur 0 si  $T12 \leq 22$  et les valeurs  $(T12 - 22)$  si  $T12 > 22$ . Le  $R^2$  passe de 0.669 à 0.708. L'ajustement est donc grandement amélioré par cette variable.

Pour la variable  $Vx$  nous retrouvons une légère tendance sinusoïdale autour de l'axe des abscisses, indiquant que la variable  $Vx$  semble avoir peu d'influence. Si l'on ajuste une sinusoïde et que l'on remplace la variable  $Vx$  par la fonction  $f(Vx) = -4.54 \cos\{0.45(10.58 - Vx)\}$ , le  $R^2$  passe à 0.713. Cependant cette fonction ainsi que la fonction linéaire par morceau pour  $T12$  dépendent des données et ne sont pas des fonctions fixées *a priori* avant le début de l'étude.

Le graphique des résidus partiels est obtenu grâce aux commandes suivantes (les ordres étant identiques pour chacune des variables, nous ne donnons que

ceux concernant la variable 03v) :

```
residpartiels <- resid(mod.lin5v,type="partial")
prov <- loess(residpartiels[,"03v"]~ozone.app$03v)
ordre <- order(ozone.app$03v)
plot(ozone.app$03v,residpartiels[,"03v"],pch=". ",ylab="",xlab="")
matlines(ozone.app$03v[ordre],predict(prov)[ordre])
abline(lsfit(ozone.app$03v,residpartiels[,"03v"]),lty=2)
```

Pour toutes les variables, les résidus partiels augmentés offrent exactement les mêmes représentations et ne sont donc pas représentés ici.

## 4.6 Exercices

### Exercice 4.1 (Questions de cours)

1. Lors d'une régression multiple, la somme des résidus vaut zéro :
  - A. toujours ;
  - B. jamais ;
  - C. cela dépend des variables explicatives utilisées.
2. Les résidus studentisés sont-ils
  - A. homoscélastique ?
  - B. hétéroscélastique ?
  - C. on ne sait pas ?
3. Un point levier peut-il être aberrant ?
  - A. Toujours ;
  - B. Jamais ;
  - C. Parfois.
4. Un point aberrant peut-il être levier ?
  - A. Toujours ;
  - B. Jamais ;
  - C. Parfois.
5. La distance de Cook est-elle basée sur un produit scalaire ?
  - A. Oui ;
  - B. Non ;
  - C. Cela dépend des données.

### Exercice 4.2 (Lemme d'inversion matricielle)

Soit  $M$  une matrice symétrique inversible de taille  $p \times p$  et  $u$  et  $v$  de vecteur de taille  $p$ . Montrer que

$$(M + uv')^{-1} = M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + u'M^{-1}v}. \quad (4.4)$$

### Exercice 4.3 (†Résidus studentisés)

Nous considérons la matrice du plan d'expérience  $X$  de taille  $n \times p$ . Nous notons  $x'_i$  la  $i^{\text{e}}$  ligne de la matrice  $X$  et  $X_{(i)}$  la matrice  $X$  privée de la  $i^{\text{e}}$  ligne, de taille  $(n - 1) \times p$ .

1. Montrer que  $X'X = X'_{(i)}X_{(i)} + x_i x'_i$ .
2. Montrer que  $X'_{(i)}Y_{(i)} = X'Y - x_i y_i$ .
3. En vous servant de l'équation (4.4), montrer que

$$(X'_{(i)}X'_{(i)})^{-1} = (X'X)^{-1} + \frac{1}{1-h_{ii}}(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1},$$

où  $h$  est le terme courant de la matrice de projection sur  $\mathfrak{S}(X)$ .

4. Montrer que la prévision de l'observation  $x_i$  vaut

$$\hat{y}_i^p = \frac{1}{1-h_{ii}}\hat{y}_i - \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}y_i.$$

5. Montrer que les résidus studentisés par validation croisée définis par :

$$t_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1-h_{ii}}},$$

où  $\hat{\sigma}_{(i)}$  est l'estimateur de  $\sigma$  dans le modèle privé de la  $i^e$  observation, peuvent s'écrire sous la forme

$$t_i^* = \frac{y_i - \hat{y}_i^p}{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1+x'_i(X'_{(i)}X_{(i)})^{-1}x_i}}.$$

6. Sous l'hypothèse que  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ , quelle est la loi de  $t_i^*$  ?

#### **Exercice 4.4 (Distance de Cook)**

Nous reprenons les notations et résultats des exercices précédents.

1. Montrer que

$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - \frac{1}{1-h_{ii}}(X'X)^{-1}x_i(y_i - x'_i\hat{\beta}).$$

2. Montrer que la distance de Cook définie par

$$C_i = \frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})'X'X(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}),$$

s'écrit aussi sous la forme

$$C_i = \frac{1}{p} \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2(1-h_{ii})}.$$

#### **Exercice 4.5 (Régression partielle)**

Démontrer la proposition (4.1).

# Chapitre 5

## Régression sur variables qualitatives

### 5.1 Introduction

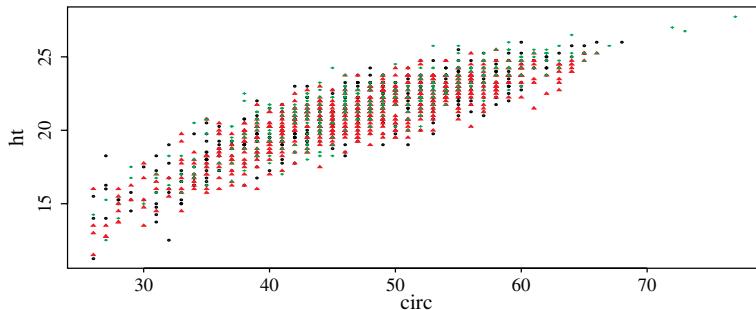
Jusqu'à présent, les variables explicatives étaient quantitatives continues, or il arrive fréquemment que certaines variables explicatives soient des variables qualitatives. Dans ce cas, pouvons-nous appliquer la méthode des moindres carrés que nous venons de voir ?

Reprendons l'exemple des eucalyptus, nous avons mesuré 1429 couples circonférence-hauteur. Parmi ces 1429 arbres, 527 proviennent d'une partie du champ notée bloc A1, 586 proviennent d'une autre partie du champ notée bloc A2 et 316 proviennent de la dernière partie du champ notée bloc A3. Le tableau suivant donne les 3 premières mesures effectuées dans chaque bloc :

**Tableau 5.1.** Mesures pour 9 eucalyptus de la hauteur et la circonférence et du bloc (`ht`, `circ` et `bloc`).

Individu	ht	circ	bloc
1	18.25	36	A1
2	19.75	42	A1
3	16.50	33	A1
528	17.00	38	A2
529	18.50	46	A2
530	16.50	37	A2
1114	17.75	36	A3
1115	19.50	45	A3
1116	17.25	36	A3

Nous avons dorénavant 2 variables explicatives : la circonference et la provenance de l'arbre. Pouvons-nous effectuer une régression multiple ? Comment utiliser la variable `bloc` ? Dans cet exemple simple, nous pouvons représenter les données avec en abscisse la circonference, en ordonnée la hauteur et en couleur (par exemple) la provenance :



**Fig. 5.1.** Nuage de points et régression simple pour chaque niveau de bloc. La provenance est représentée par un symbole (rond, triangle, +) différent.

La provenance pourrait avoir un effet sur la hauteur mais cela est difficile à observer. Afin d'intégrer la variable `bloc`, il faut commencer par la recoder car les calculs ne peuvent pas être effectués avec la variable en l'état. Chaque modalité sera transformée en un vecteur d'indicatrice d'appartenance à la modalité. Cela donne

$$\text{bloc} = A = \begin{bmatrix} \text{A1} \\ \text{A1} \\ \text{A1} \\ \text{A2} \\ \text{A2} \\ \text{A2} \\ \text{A3} \\ \text{A3} \\ \text{A3} \end{bmatrix} \implies A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce codage, appelé codage disjonctif complet, remplace donc une variable admettant  $I$  modalités en  $I$  variables binaires<sup>1</sup>. Nous pouvons déjà remarquer que la somme des vecteurs colonnes de cette matrice  $A_c$  est égale au vecteur  $\mathbb{1}_n$ . En effet un individu  $i$  admet obligatoirement une modalité et une seule et possède donc toujours un unique 1 sur la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A_c$ .

Ce chapitre va traiter en détail l'analyse de la covariance<sup>2</sup>, une variable  $Y$  est expliquée par une (ou des) variable(s) continue(s) et une (ou des) variable(s)

<sup>1</sup>Ces variables binaires sont appelées *dummy variables* en anglais, c'est-à-dire variables fictives.

<sup>2</sup>Nous noterons aussi cette analyse par l'acronyme anglo-saxon ANCOVA.

qualitative(s). Puis nous présenterons rapidement l'analyse de la variance à un facteur (une variable  $Y$  est expliquée par une variable qualitative) et l'analyse de la variance à deux facteurs (deux variables qualitatives).

## 5.2 Analyse de la covariance

### 5.2.1 Introduction : exemple des eucalyptus

L'analyse de la hauteur des arbres en fonction de la circonférence et de la provenance est un exemple classique d'analyse de la covariance. Afin de la mener à bien, il faut introduire la variable `bloc`.

La démarche la plus naturelle consiste à effectuer trois régressions différentes, une pour chaque champ. Cela donne en termes de modélisation :

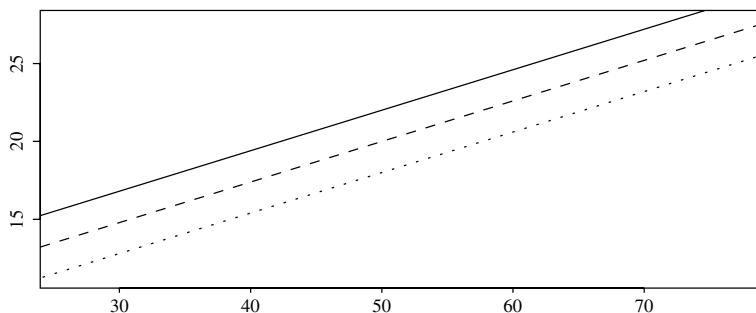
$$\begin{aligned} y_{i,A1} &= \alpha_{A1} + \gamma_{A1} x_{i,A1} + \varepsilon_{i,A1} \quad i = 1, \dots, 527 \quad \text{bloc A1} \\ y_{i,A2} &= \alpha_{A2} + \gamma_{A2} x_{i,A2} + \varepsilon_{i,A2} \quad i = 1, \dots, 586 \quad \text{bloc A2} \\ y_{i,A3} &= \alpha_{A3} + \gamma_{A3} x_{i,A3} + \varepsilon_{i,A3} \quad i = 1, \dots, 316 \quad \text{bloc A3}, \end{aligned}$$

et de manière simplifiée :

$$y_{i,j} = \alpha_j + \gamma_j x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ } j \quad j = A1, A2, A3. \quad (5.1)$$

Pour chaque modèle, il suffit d'effectuer une régression simple.

Cependant, imaginons que nous savons que la circonférence intervient de la même façon dans chaque parcelle, c'est-à-dire que la pente est identique d'un champ à un autre. Les droites de régression sont donc parallèles. Cela donne graphiquement :



**Fig. 5.2.** Trois droites de régression fictives parallèles.

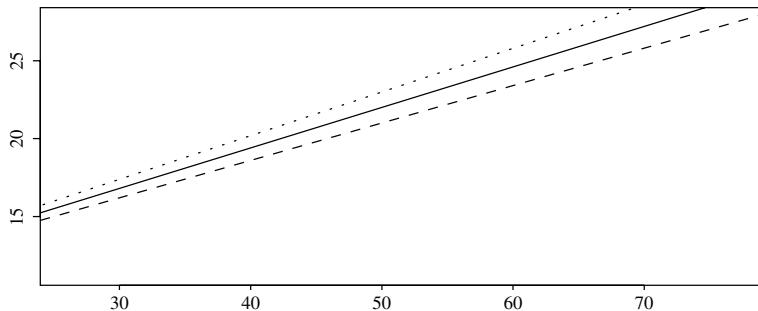
et en termes de modélisation :

$$\begin{aligned} y_{i,A1} &= \alpha_{A1} + \gamma x_{i,A1} + \varepsilon_{i,A1} \quad i = 1, \dots, 527 \quad \text{bloc A1} \\ y_{i,A2} &= \alpha_{A2} + \gamma x_{i,A2} + \varepsilon_{i,A2} \quad i = 1, \dots, 586 \quad \text{bloc A2} \\ y_{i,A3} &= \alpha_{A3} + \gamma x_{i,A3} + \varepsilon_{i,A3} \quad i = 1, \dots, 316 \quad \text{bloc A3}. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire de manière simplifiée :

$$y_{i,j} = \alpha_j + \gamma x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \text{ champ } j \quad j = A1, A2, A3. \quad (5.2)$$

Si nous savons que l'ordonnée à l'origine est la même pour chaque parcelle et que seule la pente change, nous obtenons graphiquement :



**Fig. 5.3.** Trois droites de régression fictives ayant la même ordonnée à l'origine.

et en terme de modélisation :

$$y_{i,j} = \alpha + \gamma_j x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \text{ champ } j \quad j = A1, A2, A3. \quad (5.3)$$

Le coefficient  $\gamma$  dans le modèle (5.2) est le même dans tous les blocs. Si nous effectuons trois régressions distinctes, comment trouverons-nous la même estimation de  $\gamma$ ? De même, comment allons-nous procéder pour obtenir le même estimateur de  $\alpha$  dans chaque population en effectuant trois régressions distinctes dans le modèle (5.3)? Il semble raisonnable de n'effectuer qu'une seule régression mais avec des coefficients qui peuvent différer (ou non) selon les blocs.

### 5.2.2 Modélisation du problème

Nous traitons dans cette section le cas simple où nous disposons de deux variables explicatives : une variable quantitative notée  $X$  (dans l'exemple de l'eucalyptus  $X$  correspond à `circ`) et une variable qualitative notée  $A$  admettant  $I$  modalités dont le codage disjonctif est notée  $A_c$  (dans l'exemple de l'eucalyptus, la variable est `bloc` admettant 3 modalités et  $A_c$  est alors une matrice de taille  $1429 \times 3$ ). Nous noterons  $X_c$  la matrice composée de  $n$  lignes et  $I$  colonnes où la  $j^e$  colonne de  $X_c$  correspond à la valeur de  $X$  lorsque les individus appartiennent à la modalité  $j$ , cela correspond au produit terme à terme de  $X$  avec chaque colonne de  $A_c$ .

$$circ = X = \begin{bmatrix} 36 \\ 42 \\ 33 \\ 38 \\ 46 \\ 37 \\ 36 \\ 45 \\ 36 \end{bmatrix} \implies X_c = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 42 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 46 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $X_c$  correspond à l'interaction entre  $X$  et  $A$ . Pour chaque niveau  $j$  de la variable qualitative, nous observons  $n_j$  individus et les valeurs correspondantes de la variable  $X$  sont notées  $x_{1j}, \dots, x_{n_j j}$ . De la même manière nous notons les valeurs de la variable à expliquer  $y_{1j}, \dots, y_{n_j j}$ . Le nombre total d'observations vaut  $n = \sum_{i=1}^I n_i$ .

Ecrivons matriciellement les trois modélisations proposées.

1. Soit nous considérons pour chaque niveau de la variable qualitative un modèle de régression (modèle 5.1), cela revient à analyser l'interaction entre les variables  $X$  et  $A$  et le modèle s'écrit alors

$$Y = A_c \alpha + X_c \gamma + \varepsilon. \quad (5.4)$$

Dans cette modélisation, nous avons 7 paramètres à estimer ( $\alpha$  et  $\gamma$  sont des vecteurs à 3 coordonnées) et  $\sigma$  est un scalaire correspondant à l'écart-type du bruit.

2. Soit nous considérons que la variable  $X$  intervient de la même façon quels que soient les niveaux de la variable  $A$  (la pente de la droite est toujours la même) et la variable  $A$  intervient seulement sur le niveau (l'ordonnée à l'origine de la droite de régression). Le modèle s'écrit alors

$$Y = A_c \alpha + X \gamma + \varepsilon. \quad (5.5)$$

Dans cette modélisation, nous avons 5 paramètres à estimer ( $\alpha$  est un vecteur à 3 coordonnées) et  $\gamma$  et  $\sigma$  sont des scalaires. Remarquons qu'ici l'interaction avec  $A$  ne se fait plus avec  $X$ , les pentes étant identiques. Cependant les ordonnées à l'origine étant différentes selon les niveaux de  $A$ , il subsiste une interaction entre  $A$  et la variable  $\mathbb{1}$  de la régression (appelée en anglais et dans les logiciels **intercept**).

3. Soit nous considérons que la variable  $A$  intervient uniquement sur la pente et donc que l'ordonnée à l'origine ne change pas. Le modèle s'écrit

$$Y = \mathbb{1} \alpha + X_c \gamma + \varepsilon. \quad (5.6)$$

Dans cette modélisation, nous avons 5 paramètres à estimer ( $\gamma$  est un vecteur à 3 coordonnées) et  $\alpha$  et  $\sigma$  sont des scalaires.

Le choix du modèle (5.4) ou (5.5) ou (5.6) dépend du problème posé. Nous préconisons de commencer par le modèle le plus général (5.4) puis, si les pentes sont les mêmes, de passer au modèle simple (5.5) ou, si les ordonnées à l'origine sont les mêmes, de passer au modèle simple (5.6). Les modèles étant emboîtés, il est possible de tester un modèle contre un autre.

En pratique, avant d'effectuer une modélisation, il est préférable de représenter le nuage des points  $(X, Y)$  en couleur, où chaque couleur représente une modalité de la variable  $A$ . Cette représentation permet de se faire une idée des effets respectifs des différentes variables.

### Remarque

Si nous additionnons toutes les colonnes de  $A_c$  nous obtenons le vecteur  $\mathbb{1}$ , la matrice  $(\mathbb{1}, A_c)$  n'est pas de plein rang. De la même manière, si nous additionnons toutes les colonnes de  $X_c$ , nous obtenons la variable  $X$ , la matrice  $(X, X_c)$  n'est pas de plein rang. Dans ces cas, l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. Le projeté  $\hat{Y}$  sur l'espace engendré par les colonnes de  $(\mathbb{1}, A_c, X, X_c)$  existe et est unique mais son écriture en fonction des vecteurs (vecteurs colonnes) engendrant l'espace ne l'est pas. Nous aborderons dans la partie analyse de la variance de ce chapitre les différentes manières de procéder.

Les trois modèles que nous venons de voir peuvent s'écrire de manière générique

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

où  $X$  est de taille respective  $n \times 2I$  (5.4), et  $n \times (I + 1)$  dans les autres cas. Nous avons la propriété suivante (cf. exercice 5.2) :

### Proposition 5.1

*L'estimateur des MC de  $\beta$  est obtenu dans le modèle (5.4) en effectuant une régression simple pour chaque niveau  $i$  de la variable qualitative  $A$ . L'estimateur des MC de  $\sigma^2$  est*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - 2I} \sum_{j=1}^I \sum_{i=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2.$$

Remarquons que, même si l'estimateur des MC de  $\beta$  peut être obtenu en effectuant une régression simple pour chaque niveau  $i$  de la variable  $A$ , l'analyse de la covariance suppose l'égalité des variances des erreurs pour chacun des niveaux  $i$  de la variable  $A$ . Il n'en va pas de même pour les  $I$  régressions simples où les modèles ne sont pas contraints à avoir la même variance et où l'on aura donc  $I$  variances d'erreurs différentes.

### 5.2.3 Hypothèse gaussienne

Sous l'hypothèse de normalité des résidus, nous pouvons tester toutes les hypothèses linéaires possibles. Les modèles (5.5) et (5.6) sont emboîtés dans le modèle général (5.4). Un des principaux objectifs de l'analyse de la covariance

est de *savoir si les variables explicatives influent sur la variable à expliquer.*  
Les deux premiers tests que nous effectuons sont :

1. le test d'égalité des pentes

$$H_0 : \gamma_1 = \dots = \gamma_I = \gamma \quad H_1 : \exists(i, j) : \gamma_i \neq \gamma_j.$$

Cela revient à tester le modèle (5.5) contre (5.4) ;

2. le test d'égalité des ordonnées à l'origine

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_I = \alpha \quad H_1 : \exists(i, j) : \alpha_i \neq \alpha_j,$$

Cela revient à tester le modèle (5.6) contre (5.4).

La statistique de test vaut donc (théorème 3.2 p. 63) :

$$F = \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 / (I - 1)}{\|Y - \hat{Y}\|^2 / (n - I)}.$$

L'hypothèse  $H_0$  sera rejetée en faveur de  $H_1$  si l'observation de la statistique  $F$  est supérieure à  $f_{I-1, n-I}(1 - \alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ou erreur de première espèce et nous conclurons à l'effet du facteur explicatif.

Pour résumer, nous partons donc du modèle complet

$$Y = A_c \alpha + X_c \gamma + \varepsilon,$$

et acceptons

– soit

$$Y = A_c \alpha + X \gamma + \varepsilon.$$

Nous pouvons alors soit tester la nullité de la pente (la variable quantitative  $X$  n'apporte pas d'information quant à l'explication de la variable  $Y$ ) soit l'égalité des différentes  $\alpha_i$  (la variable qualitative  $A$  n'apporte pas d'information quant à l'explication de la variable  $Y$ ) ;

– soit

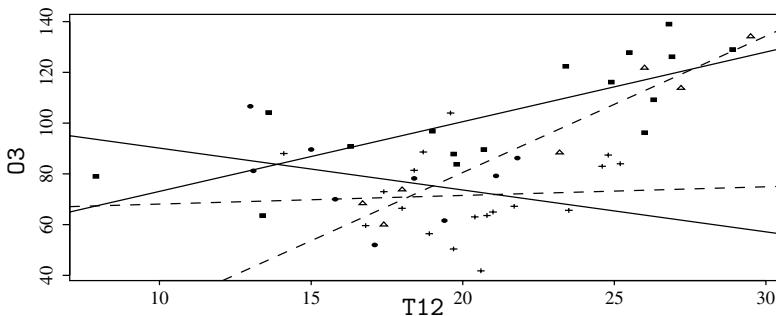
$$Y = \mathbb{1} \alpha + X_c \gamma + \varepsilon.$$

Nous pouvons alors tester l'égalité des pentes (la variable qualitative  $A$  n'apporte pas d'information quant à l'explication de la variable  $Y$ ).

#### 5.2.4 Exemple : la concentration en ozone

Nous souhaitons expliquer la concentration en ozone O3 en fonction de la température T12 et de la direction du vent vent, variable qualitative prenant 4 modalités : NORD, SUD, EST et OUEST.

Nous commençons cette étude par l'analyse graphique.



**Fig. 5.4.** Nuage de points et régression simple pour chaque niveau de vent. Le niveau de vent est représenté par un symbole (rond, triangle, +, carré) différent.

Les pentes des différentes régressions sont différentes, il semble que la modélisation de la concentration de l'ozone en fonction de la température dépende de la variable vent. Pour obtenir le graphique (5.4), nous utilisons les commandes suivantes :

```

ozone <- read.table("ozone.txt", header=T, sep=";")
plot(ozone[, "T12"], ozone[, 1], pch=as.numeric(ozone[, "vent"]),
     col=as.numeric(ozone[, "vent"]))
a1 <- lm(03~T12, data=ozone[ozone[, "vent"]=="EST",])
a2 <- lm(03~T12, data=ozone[ozone[, "vent"]=="NORD",])
a3 <- lm(03~T12, data=ozone[ozone[, "vent"]=="OUEST",])
a4 <- lm(03~T12, data=ozone[ozone[, "vent"]=="SUD",])
abline(a1, col=1)
abline(a2, col=2)
abline(a3, col=3)
abline(a4, col=4)

```

Pour écrire sous GNU-R le modèle avec interaction (5.4), nous écrivons

```
mod1b <- lm(formula = 03 ~ -1 + vent + T12:vent, data = ozone)
```

Nous enlevons la constante en écrivant  $-1$ . Ensuite il faut conserver une donnée à l'origine différente pour chacune des modalités du vent, ce qui est représenté par le facteur `vent` (ou une interaction de la variable `1` avec `vent`). Ensuite nous ajoutons un coefficient directeur différent pour chacune des modalités du vent, ce qui est représenté par la variable `T12` en interaction avec `vent`.

Cela donne :

```
summary(mod1b)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ventEST        45.6090   13.9343   3.273 0.002133 **
ventNORD       106.6345   28.0341   3.804 0.000456 ***
ventOUEST      64.6840   24.6208   2.627 0.011967 *
ventSUD        -27.0602   26.5389  -1.020 0.313737
ventEST:T12    2.7480    0.6342   4.333 8.96e-05 ***
ventNORD:T12  -1.6491    1.6058  -1.027 0.310327
ventOUEST:T12  0.3407    1.2047   0.283 0.778709
ventSUD:T12    5.3786    1.1497   4.678 3.00e-05 ***
```

Si, dans l'écriture du modèle, la constante est conservée, le logiciel va prendre comme cellule de référence la première cellule (définie par ordre lexicographique). Cela donne :

```
mod1 <- lm(formula = O3 ~ vent + T12:vent, data = ozone)
summary(mod1)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  45.6090   13.9343   3.273 0.002133 **
ventNORD     61.0255   31.3061   1.949 0.05796 .
ventOUEST    19.0751   28.2905   0.674 0.50384
ventSUD      -72.6691   29.9746  -2.424 0.01972 *
ventEST:T12   2.7480    0.6342   4.333 8.96e-05 ***
ventNORD:T12 -1.6491    1.6058  -1.027 0.31033
ventOUEST:T12  0.3407    1.2047   0.283 0.77871
ventSUD:T12   5.3786    1.1497   4.678 3.00e-05 ***
```

Les coefficients des ordonnées à l'origine sont des effets différentiels par rapport à la cellule de référence (ici `ventEST`), exemple  $61.02+45.60=106.62$  valeur de `ventNord` dans l'écriture précédente.

Le modèle avec une seule pente (5.5) peut s'écrire

```
mod2 <- lm(formula = O3 ~ vent + T12, data = ozone)
mod2b <- lm(formula = O3 ~ -1 + vent + T12, data = ozone)
```

Le modèle avec une seule ordonnée à l'origine (5.6) peut s'écrire

```
mod3 <- lm(formula = O3 ~ vent:T12, data = ozone)
```

Choisissons la meilleure modélisation :

1. **égalité des pentes** : nous effectuons un test entre les modèles (5.5) et (5.4) grâce à la commande

```
anova(mod2,mod1)
Analysis of Variance Table
Model 1: O3 ~ T12 + vent
```

```
Model 2: O3 ~ vent + T12:vent
      Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F   Pr(>F)
1       45 12612.0
2       42  9087.4  3     3524.5 5.4298 0.003011 **
```

Nous concluons donc à l'effet du vent sur les pentes comme nous le suggérait la figure 5.4. Nous aurions obtenu les mêmes résultats avec mod2b contre mod1, ou mod2 contre mod1b ou encore mod2b contre mod1b;

2. **égalité des ordonnées à l'origine** : nous effectuons un test entre le modèle (5.6) et (5.4) grâce à la commande

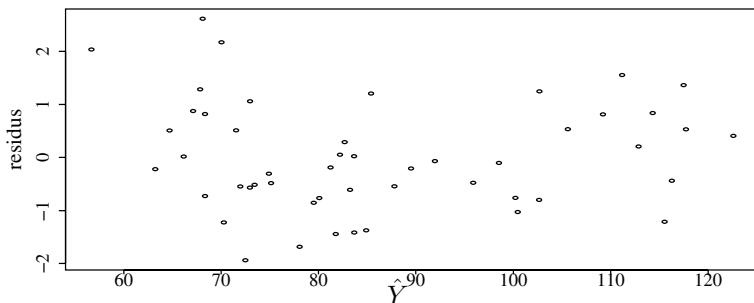
```
anova(mod3,mod1)
Analysis of Variance Table
Model 1: O3 ~ vent:T12
Model 2: O3 ~ vent + T12:vent
      Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F   Pr(>F)
1       45 11864.1
2       42  9087.4  3     2776.6 4.2776 0.01008 *
```

Nous concluons donc à l'effet du vent sur les ordonnées à l'origine comme nous le suggérait la figure 5.4.

Enfin le graphique de résidus (fig. 5.5) obtenu avec

```
plot(rstudent(mod2)~fitted(mod2),xlab="ychap",ylab="residus")
```

ne fait apparaître ni structure ni point aberrant.

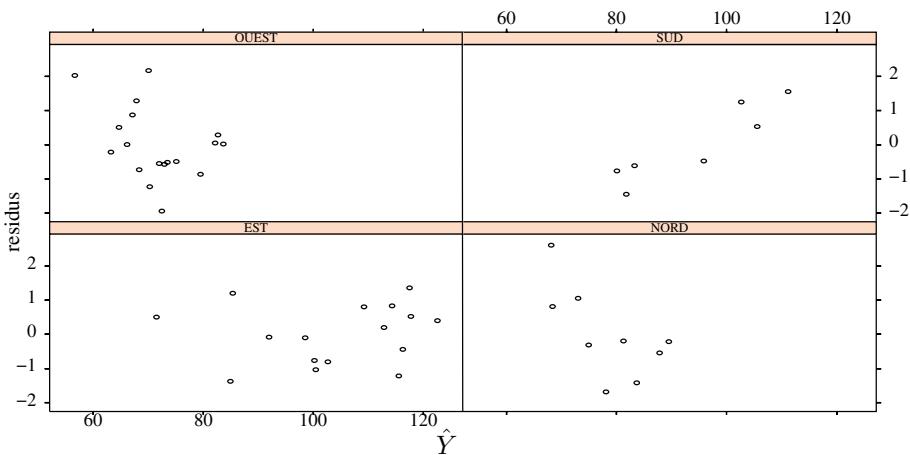


**Fig. 5.5.** Résidus studentisés du modèle 1.

Par contre, si on analyse la structure des résidus par modalité de Vent grâce à la commande

```
xyplot(rstudent(mod2)~fitted(mod2)|vent,data=ozone,ylab="residus")
```

on constate une structuration des résidus pour la modalité SUD. Cependant cette structuration n'est constatée qu'avec 7 individus, ce qui semble trop peu pour que cette conclusion soit fiable.



**Fig. 5.6.** Résidus studentisés du modèle 1 (ou 1b) par niveau de vent.

### Remarque

Pour l'exemple de l'ozone, nous conservons donc le modèle complet. Il faut faire attention à l'écriture du modèle en langage « logiciel ». L'écriture logique du point de vue du logiciel consiste à écrire

```
mod <- lm(formula = O3 ~ vent + T12 + T12:vent, data = ozone)
```

En effet, nous utilisons bien les 3 variables `vent`, `T12` et leur interaction. En écrivant de cette manière, la matrice  $X$  du modèle est composée de  $\mathbb{1}$ ,  $A_c$ ,  $T12$  et de  $T12_c$ . Cette matrice n'est pas de plein rang. Le logiciel, pour pouvoir inverser cette matrice, doit imposer des contraintes (que nous verrons plus en détail dans la suite de ce chapitre). Le logiciel  $\mathcal{R}$  va prendre comme cellule de référence la première cellule (définie par ordre lexicographique), SAS la dernière et calculer des effets différentiels par rapport à cette cellule. Sur l'exemple de l'ozone la cellule de référence va être `ventEST` et nous obtenons

```
mod0 <- lm(formula = O3 ~ vent + T12 + T12:vent, data = ozone)
summary(mod0)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	45.6090	13.9343	3.273	0.00213 **
ventNORD	61.0255	31.3061	1.949	0.05796 .
ventOUEST	19.0751	28.2905	0.674	0.50384
ventSUD	-72.6691	29.9746	-2.424	0.01972 *
T12	2.7480	0.6342	4.333	8.96e-05 ***
ventNORD:T12	-4.3971	1.7265	-2.547	0.01462 *
ventOUEST:T12	-2.4073	1.3614	-1.768	0.08429 .
ventSUD:T12	2.6306	1.3130	2.004	0.05160 .

Intercept et T12 sont bien les valeurs de l'ordonnée à l'origine et de la pente pour le vent d'est.

### 5.2.5 Exemple : la hauteur des eucalyptus

Nous commençons par le modèle complet obtenu grâce à la commande  
`m.complet=lm(ht~bloc-1+bloc:circ,data=eucalypt)`

qui correspond au modèle

$$y_{i,j} = \alpha_j + \gamma_j x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ } j \quad j = A1, A2, A3,$$

puis nous estimons les paramètres dans le modèle admettant une pente commune quelle que soit l'origine des eucalyptus

$$y_{i,j} = \alpha_j + \gamma x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ } j \quad j = A1, A2, A3,$$

grâce à la commande

`m.pente=m(ht~bloc-1+circ,data=eucalypt).`

Nous estimons également les paramètres dans le modèle où nous supposons que l'origine de l'arbre influence la pente uniquement

$$y_{i,j} = \alpha + \gamma_j x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ } j \quad j = A1, A2, A3,$$

via la commande

`m.ordonne=lm(ht~bloc:circ,data=eucalypt).`

Le second et le troisième modèles sont emboîtés dans le premier. Nous pouvons tester

#### 1. l'égalité des pentes

```
anova(m.pente,m.complet)
Analysis of Variance Table
Model 1: ht ~ bloc - 1 + circ
Model 2: ht ~ bloc - 1 + bloc:circ
  Res.Df   RSS   Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1   1425 2005.90
2   1423 2005.05   2      0.85 0.3007 0.7403
```

Nous conservons le modèle avec une seule pente.

#### 2. l'égalité des ordonnées

```
anova(m.ordonne,m.complet)
Analysis of Variance Table
Model 1: ht ~ bloc:circ
Model 2: ht ~ bloc - 1 + bloc:circ
  Res.Df   RSS   Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1   1425 2009.21
2   1423 2005.05   2      4.16 1.4779 0.2285
```

Nous conservons le modèle avec une seule ordonnée à l'origine.

Nous avons donc le choix entre les 2 modèles

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= \alpha + \gamma_j x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ j} \quad j = A1, A2, A3, \\ y_{i,j} &= \alpha_j + \gamma x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ j} \quad j = A1, A2, A3. \end{aligned}$$

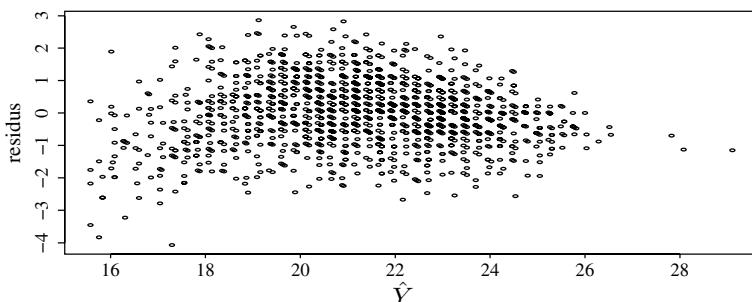
Ces modèles ne sont pas emboîtés. Cependant nous estimons le même nombre de paramètres (4) et nous pouvons donc comparer ces modèles *via* leur  $R^2$ . Nous choisissons le modèle avec une pente. Pour terminer cette étude, nous comparons le modèle retenu avec le modèle de régression simple, c'est-à-dire le modèle où l'origine n'intervient pas

$$y_{i,j} = \alpha + \gamma x_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, n_j \quad \text{champ j} \quad j = A, B, C.$$

```
m.simple=lm(ht~circ,data=eucalypt)
anova(m.simple,m.pente)
Analysis of Variance Table

Model 1: ht ~ circ
Model 2: ht ~ bloc - 1 + circ
  Res.Df   RSS   Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1   1427 2052.08
2   1425 2005.90     2      46.19 16.406 9.03e-08 ***
```

Nous conservons le modèle avec des ordonnées différentes à l'origine selon le bloc mais une même pente. Pour terminer cette étude, il faut analyser les résidus studentisés.



**Fig. 5.7.** Résidus studentisés du modèle avec des pentes identiques.

## 5.3 Analyse de la variance à un facteur

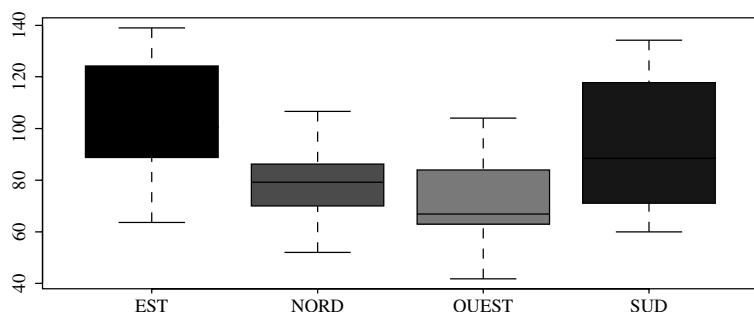
### 5.3.1 Introduction

Nous modélisons la concentration d'ozone en fonction du vent (4 secteurs donc 4 modalités). Dans le tableau suivant figurent les 10 premières lignes du tableau de données.

**Tableau 5.2.** Tableau des données brutes.

individu	O <sub>3</sub>	Vent
1	64	E
2	90	N
3	79	E
4	81	N
5	88	O
6	68	S
7	139	E
8	78	N
9	114	S
10	42	O

La première analyse à effectuer est une représentation graphique des données. Les boîtes à moustaches (*boxplots*) de la variable  $Y$  par cellule semblent les plus adaptées à notre analyse.



**Fig. 5.8.** Boxplot de la variable vent (4 modalités).

Au vu de ce graphique, il semblerait que le vent ait une influence sur la valeur de la concentration d'ozone. La concentration est plus élevée en moyenne lorsque le vent vient de l'EST et au contraire moins élevée lorsque le vent vient de la mer (NORD et OUEST). Afin de préciser cette hypothèse, nous allons construire une analyse de la variance à un facteur explicatif : le vent.

### 5.3.2 Modélisation du problème

Dans ce cas simple, nous avons une variable explicative et une variable à expliquer et nous voulons expliquer la concentration d'ozone par le vent. Ce cas est appelé analyse de variance<sup>3</sup> à un facteur, qui est la variable qualitative explicative. Nous remplaçons la variable  $A$  par son codage disjonctif complet, c'est-à-dire que nous remplaçons le vecteur  $A$  par  $I = 4$  vecteurs  $\mathbb{1}_{\text{NORD}}$ ,  $\mathbb{1}_{\text{SUD}}$ ,  $\mathbb{1}_{\text{EST}}$ ,  $\mathbb{1}_{\text{OUEST}}$  indiquant l'appartenance aux modalités NORD, SUD, EST ou OUEST. Ces quatre vecteurs sont regroupés dans la matrice  $A_c = (\mathbb{1}_{\text{NORD}}, \mathbb{1}_{\text{SUD}}, \mathbb{1}_{\text{EST}}, \mathbb{1}_{\text{OUEST}})$ . Le modèle de régression s'écrit alors sous forme matricielle

$$Y = \mu \mathbb{1} + A_c \alpha + \varepsilon. \quad (5.7)$$

La variable qualitative  $A$  engendre une partition des observations en  $I$  groupes (ici 4) souvent appelés cellules. La  $i^{\text{e}}$  cellule est constituée des  $n_i$  observations de la variable à expliquer  $Y$  admettant le caractère  $i$  de la variable explicative. Nous avons au total  $n$  observations avec  $n = \sum_{i=1}^I n_i$ . Les données sont ainsi regroupées en cellules selon le tableau suivant :

**Tableau 5.3.** Tableau des données brutes regroupées par cellule.

Vent	NORD	SUD	EST	OUEST
O <sub>3</sub>	90	68	64	88
	81	114	79	42
	78		139	

Classiquement, en analyse de la variance, on utilise des tableaux de la forme (5.3) de préférence au tableau de la forme (5.2). Dans le tableau (5.3), la notation des  $n$  individus ne se fait pas classiquement de 1 à  $n$ . En effet, doit-on lire l'ordre des individus dans le sens des lignes du tableau ou dans le sens des colonnes ? Par convention, la valeur  $y_{ij}$  correspond au  $j^{\text{e}}$  individu de la cellule  $i$ . Les individus ne seront donc plus numérotés de 1 à  $n$  mais suivant le schéma  $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n_1), (2, 1), (2, 2), \dots, (I, 1), \dots, (I, n_I)$  pour bien insister sur l'appartenance de l'individu à la modalité  $i$  qui varie de 1 à  $I$ .

Le modèle précédent

$$y_i = \mu + \alpha_1 A_{1i} + \alpha_2 A_{2i} + \alpha_3 A_{3i} + \alpha_4 A_{4i} + \varepsilon_i,$$

s'écrit alors avec ces notations

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}.$$

Revenons à l'écriture matricielle

$$\begin{aligned} Y &= \mu \mathbb{1} + A_c \alpha + \varepsilon \\ &= X \beta + \varepsilon. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Nous utiliserons aussi l'acronyme anglo-saxon ANOVA (*analysis of variance*) qui est très répandu en statistiques.

Si nous additionnons toutes les colonnes de  $A_c$  nous obtenons le vecteur  $\mathbb{1}$ , la matrice  $X = (\mathbb{1}, A_c)$  n'est pas de plein rang et l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. Remarquons que cela entraîne que  $(\mathbb{1}, A_c)'(\mathbb{1}, A_c)$  n'est pas de plein rang et nous ne pouvons pas calculer son inverse directement. Nous ne pouvons donc pas appliquer directement au modèle (5.7) les résultats des trois chapitres précédents.

**Peut-on estimer  $\mu$  et  $\alpha$  ou plus exactement peut-on déterminer  $\mu$  et  $\alpha$  de manière unique ?**

En termes statistiques cette question devient : est-ce que le modèle est identifiable ? Pour répondre à cette question, nous pouvons soit utiliser un contre-exemple, soit quelques notions d'algèbre linéaire.

- Posons  $\tilde{\mu} = \mu + 1024$  et  $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - 1024$  pour  $i = 1, \dots, I$ , nous avons alors

$$y_{ij} = \tilde{\mu} + \tilde{\alpha}_i + \varepsilon_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}.$$

Deux valeurs différentes des paramètres donnent les mêmes valeurs pour  $Y$ , donc le modèle est non identifiable. En conséquence, nous ne pouvons pas estimer sans biais  $\mu$  ou les  $\alpha_i$ ;  $\mu$  et  $\alpha_i$  peuvent prendre des valeurs arbitrairement petites ou grandes sans que cela ne change  $Y$  (SAS met alors un B devant la valeur des estimateurs).

- D'un point de vue d'algèbre linéaire, la matrice  $X$  n'est pas de plein rang, c'est-à-dire que le noyau de  $X$ , noté  $\ker(X) = \{\gamma \in \mathbb{R}^p : X\gamma = 0\}$  est différent de  $\{0\}$ . Choisissons un élément du noyau,  $\beta^\dagger$ , nous avons alors  $X\beta^\dagger = 0$ . Considérons  $\beta$ , le vecteur inconnu de coefficients solution du modèle  $Y = X\beta + \varepsilon$ , or  $X\beta^\dagger = 0$ , nous avons également  $Y = X\beta + \varepsilon + X\beta^\dagger = X(\beta + \beta^\dagger) + \varepsilon$ . Le vecteur  $\beta + \beta^\dagger$  est donc également solution et il n'y a donc pas unicité.

## Identifiabilité et contraintes

Afin d'obtenir des estimateurs uniques, ou de façon équivalente un modèle identifiable, la méthode la plus classique consiste à se donner des contraintes. D'autres méthodes peuvent aussi être utilisées et nous invitons le lecteur intéressé à se reporter au paragraphe 5.6. Ici nous aurons besoin d'une contrainte linéaire sur les coefficients de la forme  $\sum_{j=1}^p a_j \beta_j = 0$  où les  $\{a_j\}$  sont à choisir. Avec cette contrainte vérifiée, une fois estimés  $p - 1 = I$  coefficients, le dernier se déduit des autres grâce à la contrainte.

Ces contraintes linéaires sont appelées contraintes identifiantes et voici les plus classiques :

- Choisir  $\mu = 0$ , cela correspond à supprimer la colonne  $\mathbb{1}$  et donc poser  $X = A_c$  ;
- Choisir un des  $\alpha_i = 0$ , c'est-à-dire que la cellule  $i$  sert de cellule de référence (SAS ou GNU-R) ;

- Choisir  $\sum n_i \alpha_i = 0$ , la contrainte d'orthogonalité. Lorsque le plan est équilibré (les  $n_i$  sont tous égaux), cette contrainte devient  $\sum \alpha_i = 0$  ;
- Choisir  $\sum \alpha_i = 0$ , contrainte qui est parfois utilisée par certains logiciels. Cette contrainte représente l'écart au coefficient constant  $\mu$ . Remarquons toutefois qu'à l'image de la régression simple, le coefficient constant  $\mu$  n'est pas en général estimé par la moyenne empirique générale  $\bar{y}$ , sauf si le plan est équilibré.

### 5.3.3 Estimation des paramètres

#### Proposition 5.2

Soit le modèle d'analyse de la variance à un facteur

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}.$$

1. Sous la contrainte  $\mu = 0$ , qui correspond à  $y_{ij} = \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont :

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i.$$

Les  $\hat{\alpha}_i$  correspondent à la moyenne de la cellule.

2. Sous la contrainte  $\alpha_1 = 0$ , qui correspond à  $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont :

$$\hat{\mu} = \bar{y}_1 \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_1.$$

La première cellule sert de référence. Le coefficient  $\hat{\mu}$  est donc égal à la moyenne empirique de la cellule de référence, les  $\hat{\alpha}_i$  correspondent à l'effet différentiel entre la moyenne de la cellule  $i$  et la moyenne de la cellule de référence.

3. Sous la contrainte  $\sum n_i \alpha_i = 0$ , qui correspond à  $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont :

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}.$$

L'estimateur de la constante, noté  $\hat{\mu}$ , est donc la moyenne générale. Les  $\hat{\alpha}_i$  correspondent à l'effet différentiel entre la moyenne de la cellule  $i$  et la moyenne générale.

4. Sous la contrainte  $\sum \alpha_i = 0$ , qui correspond à  $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont :

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{y}_i \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}.$$

Les  $\hat{\alpha}_i$  correspondent à l'effet différentiel entre la moyenne empirique de la cellule  $i$  et la moyenne des moyennes empiriques. Lorsque le plan est

déséquilibré, les  $\alpha_i$  sont toujours les écarts à  $\mu$ , cependant ce dernier n'est pas estimé par la moyenne générale empirique, mais par la moyenne des moyennes empiriques.

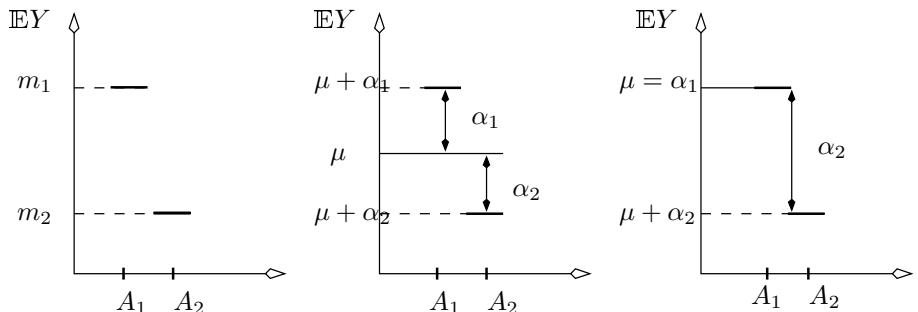
Dans tous les cas,  $\sigma^2$  est estimé par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n - I}.$$

La preuve est à faire en exercice (cf. exercice 5.3).

### 5.3.4 Interprétation des contraintes

Il est intéressant de visualiser ces différentes modélisations sur un graphique. Pour ce faire, nous considérons un facteur admettant deux modalités.



**Fig. 5.9.** Modélisations selon les contraintes sur les paramètres.

La premier graphique à gauche représente les espérances  $m_1$  et  $m_2$  dans chaque cellule, ce qui correspond à  $\mu = 0$ . Le second graphique représente la contrainte  $\sum_i \alpha_i = 0$ . Rappelons que si le plan est équilibré cette contrainte revient à  $\sum_i n_i \alpha_i = 0$ . Ici  $\mu$  représente la moyenne générale et les  $\alpha$  sont les effets différenciels. Le troisième graphique représente la contrainte  $\alpha_1 = 0$ , une cellule est prise comme cellule de référence.

### 5.3.5 Hypothèse gaussienne et test d'influence du facteur

Afin d'établir des intervalles de confiance pour ces estimateurs, nous devons introduire l'hypothèse de normalité des erreurs  $\varepsilon$ , notée  $\mathcal{H}_3 : \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Grâce à cette hypothèse, nous pouvons également utiliser les tests d'hypothèses vus au chapitre 3. Un des principaux objectifs de l'analyse de la variance est de savoir si le facteur possède une influence sur la variable à expliquer. Les hypothèses du test seront alors :

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0 \text{ contre } H_1 : \exists (i, j) \text{ tel que } \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Le modèle sous  $H_0$  peut s'écrire encore sous la forme suivante  $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ . Dans ce cas-là nous sommes en présence d'un test entre deux modèles dont l'un est un cas particulier de l'autre (section 3.6.2, p. 61). La statistique de test vaut donc (théorème 3.2 p. 63)

$$F = \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 / (I - 1)}{\|Y - \hat{Y}\|^2 / (n - I)}.$$

Il faut calculer les estimations des paramètres du modèle sous  $H_0$ . Notons  $\hat{Y}_0$  la projection orthogonale de  $Y$  sur la constante et nous avons donc

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

Les termes de la statistique de test s'écrivent alors

$$\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 = \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2, \quad (5.8)$$

$$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (5.9)$$

Pour tester l'influence de la variable explicative, nous avons alors le théorème suivant.

### Théorème 5.1

*Soit un modèle d'analyse de la variance à un facteur. Nous souhaitons tester la validité d'un sous-modèle. Notons l'hypothèse nulle (modèle restreint)  $H_0$  :  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$  qui correspond au modèle  $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$  et l'hypothèse alternative (modèle complet)  $H_1$  :  $\exists(i, j)$  tel que  $\alpha_i \neq \alpha_j$  qui correspond au modèle complet  $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ .*

*Pour tester ces deux hypothèses nous utilisons la statistique de test ci-dessous  $F$  qui possède comme loi sous  $H_0$  :*

$$F = \frac{\sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2} \times \frac{n - I}{I - 1} \sim F_{I-1, n-I}.$$

*L'hypothèse  $H_0$  sera rejetée en faveur de  $H_1$  si l'observation de la statistique  $F$  est supérieure à  $f_{I-1, n-I}(1 - \alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ou erreur de première espèce et nous conclurons alors à l'effet du facteur explicatif.*

La preuve de ce théorème se fait facilement. Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 p. 63 avec l'écriture des normes données en (5.8) et (5.9). Ces résultats sont en général résumés dans un tableau dit tableau d'analyse de la variance.

**Tableau 5.4.** Tableau d'analyse de la variance.

variation	ddl	SC	CM	valeur du F	Pr(> F)
facteur	$I - 1$	$SCA = \ \hat{Y} - \hat{Y}_0\ ^2$	$CMA = \frac{SCA}{(I - 1)}$	$\frac{CMA}{CMR}$	
résiduelle	$n - I$	$SCR = \ Y - \hat{Y}\ ^2$	$CMR = \frac{SCR}{(n - I)}$		

La première colonne indique la source de la variation, la seconde le degré de liberté associé à chaque effet. La somme des carrées (SCR) est rappelée dans le tableau ainsi que le carré moyen (CM) qui par définition est la SCR divisée par le ddl.

### Conclusion

- En général, lors d'une analyse de la variance, nous supposons l'hypothèse de normalité car nous nous intéressons à l'effet du facteur *via* la question « l'effet du facteur est-il significativement différent de 0 ? ». Le tableau d'analyse de la variance répond à cette question.
- Il faut représenter les résidus estimés afin de vérifier les hypothèses. Une attention particulière sera portée à *l'égalité des variances dans les cellules*, hypothèse fondamentale de validité des tests entrepris. Les tests *F* utilisés sont relativement robustes à la non-normalité dans le cas où la distribution est unimodale et peu dissymétrique.
- Une investigation plus fine peut être ensuite entreprise en testant des hypothèses particulières comme la nullité de certains niveaux du facteur. Bien évidemment, après avoir choisi une contrainte identifiante, nous pouvons nous intéresser aux coefficients eux-mêmes en conservant à l'esprit que le choix de la contrainte a une influence sur la valeur des estimateurs.

### 5.3.6 Exemple : la concentration en ozone

Voici les résultats de l'ANOVA à un facteur présentée en introduction à cette partie. Les données correspondent aux 50 données journalières. Une variable `vent` à 4 modalités a été créée à partir du tableau de données. Nous allons présenter les différentes contraintes et les commandes associées à ces contraintes. Quelle que soit la contrainte utilisée, nous obtiendrons toujours le même  $\hat{Y}$  car il est unique, et nous aurons toujours le même tableau d'analyse de la variance. A l'issue de ces trois analyses similaires, nous analyserons les résidus.

1.  $\mu = 0$ . Pour obtenir cette contrainte, il suffit de spécifier au logiciel un modèle sans `intercept`

```
mod1<-lm(O3~vent-1,data=ozone)
```

Si nous souhaitons quantifier les effets des modalités nous examinons les coefficients.

```
summary(mod1)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ventEST     103.850    4.963   20.92 < 2e-16 ***
ventNORD    78.289    6.618   11.83 1.49e-15 ***
ventOUEST   71.578    4.680   15.30 < 2e-16 ***
ventsUD    94.343    7.504   12.57 < 2e-16 ***

```

Nous obtenons bien comme estimateur de chaque paramètre la moyenne empirique de la teneur en O<sub>3</sub> dans chaque groupe. Il faut faire attention au listing lorsque la constante n'est pas dans le modèle. Ainsi, pour le calcul du R<sup>2</sup>, le logiciel utilise la formule sans constante. En général, lors d'une analyse de la variance, nous ne sommes pas intéressés par le test admettant comme hypothèse H<sub>0</sub> :  $\alpha_i = 0$  et donc les dernières colonnes du listing ne sont pas d'un grand intérêt. Nous sommes intéressés par la question suivante : y a-t-il une influence du vent sur la concentration en O<sub>3</sub>? Pour répondre à cette question, GNU-R propose la fonction `anova()`, que nous avons déjà utilisée dans la section précédente, et qui permet de tester des modèles emboîtés. Si cette fonction est utilisée avec un seul modèle, il faut que la constante soit dans le modèle. Quand la constante ne fait pas partie du modèle, le tableau est faux. Ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons :

```
anova(mod1)
Analysis of Variance Table
Response: O3
            Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
vent         4 382244  95561  242.44 < 2.2e-16 ***
Residuals  46 18131    394

```

**Ce tableau est faux car la constante ne fait pas partie du modèle.**  
Pour savoir s'il y a un effet vent dans le cas de l'analyse à un facteur il faut utiliser les autres contraintes comme nous allons le voir.

2.  $\alpha_1 = 0$ . Le logiciel GNU-R utilise par défaut la contrainte  $\alpha_1 = 0$  appelée contraste « treatment ». Cela revient dans notre cas à prendre la cellule EST comme cellule de référence (la première par ordre alphabétique). La commande pour effectuer l'analyse est

```
mod2<-lm(O3~vent,data=ozone)
```

Pour répondre à la question sur l'influence du vent sur la concentration, nous analysons le tableau d'analyse de la variance donné par

```
anova(mod2)
Analysis of Variance Table
Response: O3
            Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
vent          3 9859.8  3286.6  8.3383 0.0001556 ***
Residuals    46 18131.4    394.2

```

Et nous retrouvons heureusement le même tableau d'ANOVA que précédemment. En effet, même si les coefficients  $\mu, \alpha$  ne sont pas estimables de manière unique, les projections  $\hat{Y}$  et  $\hat{Y}_0$  restent uniques et le test  $F$  est identique. La valeur calculée est donc bien supérieure à la valeur théorique, l'hypothèse  $H_0$  est donc rejetée. En conclusion, il existe un effet vent.

Si nous nous intéressons aux coefficients, ceux-ci sont différents puisque nous avons changé la formulation du modèle. Examinons-les grâce à la commande suivante :

```
summary(mod2)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 103.850     4.963 20.923 < 2e-16 ***
ventNORD    -25.561     8.272 -3.090 0.00339 **
ventOUEST   -32.272     6.821 -4.731 2.16e-05 ***
ventSUD      -9.507     8.997 -1.057 0.29616
```

L'estimateur de  $\mu$ , noté ici Intercept, est la moyenne de la concentration en  $O_3$  pour le vent d'EST. Les autres valeurs obtenues correspondent aux écarts entre la moyenne de la concentration en  $O_3$  de la cellule pour le vent considéré et la moyenne de la concentration en  $O_3$  pour le vent d'EST (cellule de référence).

La colonne correspondant au test  $H_0 : \beta_i = 0$  a un sens pour les 3 dernières lignes du listing. Le test correspond à la question suivante : y a-t-il une ressemblance entre le vent de la cellule de référence (EST) et le vent considéré. Le vent du SUD n'est pas différent au contraire des vents du NORD et d'OUEST.

### Remarque

Nous pouvons utiliser le contraste « treatment », utilisé par défaut en écrivant :

```
lm(O3~C(vent,treatment),data=ozone)
```

Si nous voulons choisir une cellule témoin spécifique, nous l'indiquons de la manière suivante :

```
lm(O3~C(vent,base=2),data=ozone)
```

Nous choisissons ici la seconde modalité comme modalité de référence. Le numéro des modalités correspond à celui des coordonnées du vecteur `levels(ozone[, "vent"])`.

3.  $\sum n_i \alpha_i = 0$  Cette contrainte n'est pas pré-programmée dans GNU-R, il faut définir une matrice qui servira de contraste. Cette matrice appelée CONTRASTE correspond à  $X_{[\sum n_i \alpha_i = 0]}$

```
II <- length(levels(ozone$vent))
nI <- table(ozone$vent)
CONTRASTE<-matrix(rbind(diag(II-1),-nI[-II]/nI[II]),II,II-1)
```

et le modèle est donné par l'expression suivante :

```
mod3<-lm(O3~C(vent,CONTRASTE),data=ozone)
```

Nous retrouvons le même tableau d'analyse de la variance :

```
anova(mod3)
```

Analysis of Variance Table

Response: O3

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
vent	3	9859.8	3286.6	8.3383	0.0001556 ***
Residuals	46	18131.4	394.2		

L'effet vent semble significatif. Si nous nous intéressons maintenant aux coefficients, nous avons :

```
summary(mod3)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	86.300	2.808	30.737	< 2e-16 ***
C(vent, CONTRASTE)1	17.550	4.093	4.288	9.15e-05 ***
C(vent, CONTRASTE)2	-8.011	5.993	-1.337	0.187858
C(vent, CONTRASTE)3	-14.722	3.744	-3.933	0.000281 ***

En effectuant les calculs, nous retrouvons que  $\hat{\mu}$  est bien la moyenne de la concentration en  $O_3$ .

4.  $\sum \alpha_i = 0$ . Cette contrainte est implémentée sous GNU-R :

```
mod4<-lm(O3~C(vent,sum),data=ozone)
```

A nouveau, nous retrouvons le même tableau d'analyse de la variance :

```
anova(mod4)
```

Analysis of Variance Table

Response: O3

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
vent	3	9859.8	3286.6	8.3383	0.0001556 ***
Residuals	46	18131.4	394.2		

L'effet vent est significatif. Si nous nous intéressons maintenant aux coefficients, nous avons :

```
summary(mod4)
```

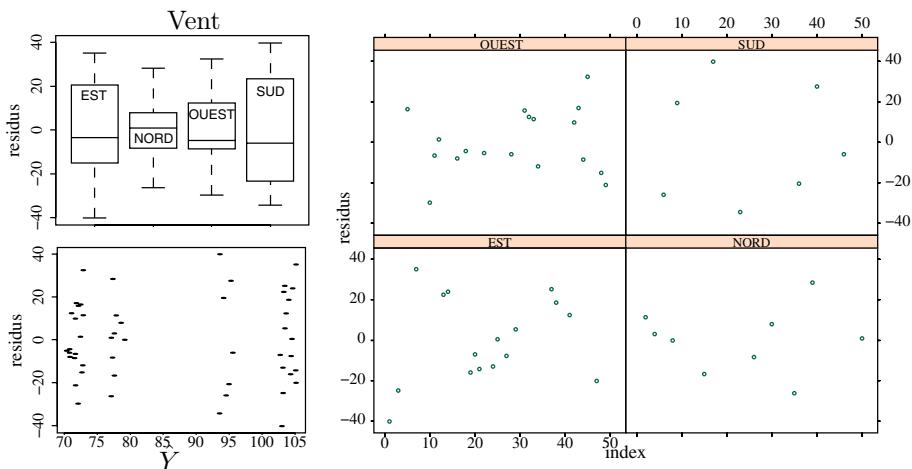
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	87.015	3.027	28.743	< 2e-16 ***
C(vent, sum)1	16.835	4.635	3.632	0.000705 ***
C(vent, sum)2	-8.726	5.573	-1.566	0.124284
C(vent, sum)3	-15.437	4.485	-3.442	0.001240 **

Le coefficient Intercept correspond à la moyenne des concentrations moyenne en  $O_3$  pour chaque vent.

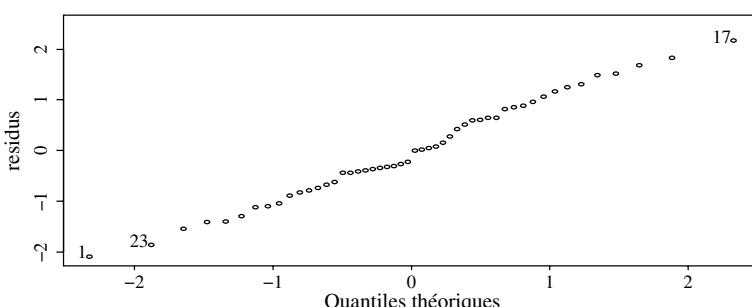
Enfin, il est utile d'analyser les résidus afin de constater si l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus est bien vérifiée.

```
resid2 <- resid(mod2)
plot(resid2~vent,data=ozone,ylab="résidus")
plot(resid2~jitter(fitted(mod2)),xlab="ychap",ylab="résidus")
lset(theme = col.whitebg())
xyplot(resid2~I(1:50) | vent,data=ozone,xlab="index",ylab="résidus")
```



**Fig. 5.10.** Trois représentations similaires des résidus.

Ainsi, sur la figure 5.10, nous constatons, malgré le faible nombre d'individus par cellule, que les variances semblent voisines d'une cellule à l'autre. La figure 5.11 permet de constater que l'hypothèse de normalité semble vérifiée.



**Fig. 5.11.** Examen de la normalité par un diagramme Quantile-Quantile.

Nous terminons cette section par une dernière approche de l'analyse de la variance basée sur une décomposition directe de la variance.

### 5.3.7 Une décomposition directe de la variance

Une introduction très classique de l'analyse de variance consiste à décomposer la variance totale en somme de différentes parties. Rappelons les notations utilisées.

- La variable qualitative explicative admet  $I$  modalités (ou niveaux) et le nombre d'individus par niveau vaut  $n_i$ . Le nombre total d'individus est  $n = \sum_{i=1}^I n_i$ .
- $y_{ij}$  : observation de la v.a. correspondant à l'individu  $j$  du niveau  $i$ , où  $i = 1, \dots, I$  et  $j = 1, \dots, n_i$ .
- La moyenne empirique par niveau et la moyenne générale sont données par les relations suivantes :

$$\bar{y}_i = y_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \text{moyenne par niveau } i.$$

$$\bar{y} = y_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_i \bar{y}_i.$$

Cette approche consiste à décomposer la variance totale

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$$

en somme de deux termes. Le premier est une variance intra due au hasard, appelée aussi variance intrastratée (ou résiduelle)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

et le second une variance inter due au facteur, appelée aussi variance interstratée (ou des écarts)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

## 5.4 Analyse de la variance à deux facteurs

### 5.4.1 Introduction

Nous voulons maintenant modéliser la concentration en ozone par le vent (4 modalités) et la nébulosité, que nous avons regroupée en 2 modalités (soleil-nuageux). Nous avons mesuré 2 observations par niveau (tableau 5.5) ;

**Tableau 5.5.** Concentration en ozone.

	NORD	SUD	EST	OUEST
SOLEIL	89.6	134.2	139.0	87.4
NUAGEUX	106.6	121.8	126.2	84.0
	81.2	68.4	63.6	88.0
	78.2	113.8	79.0	41.8

En général, la première variable explicative ou premier facteur est celui indiqué en ligne (ici **Nébulosité**) admettant  $I$  modalités, le seconde variable explicative ou second facteur est celui indiqué en colonne (ici **Vent**) admettant  $J$  modalités. Les individus ne sont plus repérés par un couple  $(i, j)$  mais maintenant par un triplet  $(i, j, k)$ , représentant le  $k^e$  individu admettant la modalité  $i$  de la première variable explicative et la modalité  $j$  de la seconde variable explicative. Le nombre  $n_{ij}$  correspond au nombre d'observations ayant la modalité  $i$  du premier facteur et  $j$  du second. Nous avons la définition suivante.

### Définition 5.1

*Si  $\forall(i, j)$ ,  $n_{ij} \geq 1$ , le plan est dit complet,  
si  $\exists(i, j) : n_{ij} = 0$ , le plan est dit incomplet,  
si  $\forall(i, j)$ ,  $n_{ij} = r$ , le plan est dit équilibré.*

### 5.4.2 Modélisation du problème

Les deux variables explicatives **Vent** et **Nébulosité** ne sont pas utilisables directement et nous allons donc travailler avec leur version codée notée  $A$  pour la nébulosité et  $B$  pour le vent. Le modèle le plus simple est

$$y_{ijk} = \mu + \beta_1 A_{i1} + \beta_2 A_{i2} + \beta_3 B_{j1} + \beta_4 B_{j2} + \beta_5 B_{j3} + \beta_6 B_{j4} + \varepsilon_{ijk}.$$

Afin d'écrire ce modèle sous forme matricielle, considérons le vecteur  $Y \in \mathbb{R}^n$  des observations  $y_{ijk}$  rangées dans l'ordre lexicographique de leurs indices. Nous notons  $\vec{e}_{ij} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celles repérées par les indices  $ijk$  pour  $k = 1, \dots, n_{ij}$ , qui valent 1. Ce vecteur est le vecteur d'appartenance à la cellule  $(i, j)$ . Les vecteurs  $\vec{e}_{ij}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  orthogonaux entre eux. Nous définissons

$$\vec{e}_i = \sum_j \vec{e}_{ij} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{.j} = \sum_i \vec{e}_{ij},$$

où  $\vec{e}_i$  est le vecteur d'appartenance à la modalité  $i$  du premier facteur et  $\vec{e}_{.j}$  est le vecteur d'appartenance à la modalité  $j$  du second facteur. Le modèle s'écrit alors sous la forme suivante :

$$Y = \mu \mathbb{1} + \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_{.1} + \beta_4 \vec{e}_{.2} + \beta_5 \vec{e}_{.3} + \beta_6 \vec{e}_{.4} + \varepsilon.$$

ou encore avec les notations précédentes

$$Y = \mu \mathbb{1} + A_c \alpha + B_c \beta + \varepsilon, \quad (5.10)$$

avec  $A_c = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $B_c = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ . Si nous additionnons toutes les colonnes de  $A_c$  (*idem* pour  $B_c$ ), nous obtenons le vecteur  $\mathbb{1}$ . La matrice  $(\mathbb{1}, A_c, B_c)$  n'est donc pas de plein rang et l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. Nous ne pouvons donc appliquer directement les résultats des trois chapitres précédents au modèle (5.10). Il faudra à nouveau imposer des contraintes.

En régression multiple, nous avons  $p$  variables explicatives  $X_1, \dots, X_p$  et nous travaillons en général avec ces  $p$  variables. Nous pouvons bien évidemment travailler avec des transformations de ces variables ou travailler avec des interactions (par exemple une nouvelle variable serait  $X_1 \times X_2$ ), comme cela a été indiqué au chapitre 2. En analyse de la variance comme en analyse de la covariance, nous commençons toujours par traiter le modèle avec interaction. Le produit **Nébulosité** avec **Vent** est impossible à effectuer et nous codons ce produit *via* une matrice  $C_c$  dont la première colonne indique l'appartenance au croisement **SOLEIL-NORD**, la seconde colonne au croisement **SOLEIL-SUD** et ainsi de suite. Nous obtenons le modèle suivant :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad (5.11)$$

avec un effet moyen général  $\mu$ , un effet différentiel  $\alpha_i$ , un effet différentiel  $\beta_j$  et un terme d'interaction  $\gamma_{ij}$ . En utilisant les notations précédentes, l'écriture du modèle sous forme matricielle est :

$$Y = \mu \mathbb{1} + A_c \alpha + B_c \beta + C_c \gamma + \varepsilon,$$

où  $C_c = (\vec{e}_{11}, \vec{e}_{12}, \vec{e}_{13}, \vec{e}_{14}, \vec{e}_{21}, \vec{e}_{22}, \vec{e}_{23}, \vec{e}_{24})$ . A titre d'exemple, écrivons les matrices obtenues avec le jeu de données présenté :

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{141} \\ y_{142} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \\ y_{241} \\ y_{242} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{14} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{141} \\ \varepsilon_{142} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \\ \varepsilon_{241} \\ \varepsilon_{242} \end{bmatrix}$$

Remarquons à titre de comparaison que les interactions de variables continues, construites avec le produit des variables, et l'interaction de deux facteurs, représentée ici par  $C$ , suivent la même logique de construction. En effet, les colonnes

de  $C_c$  sont tout simplement le résultat des produits 2 à 2 des colonnes de  $A_c$  par celle de  $B_c$ .

A nouveau la matrice  $(\mathbb{1}, A, B, C)$  n'est pas de plein rang et l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. La matrice  $X = (\mathbb{1}, A, B, C)$  de taille  $n \times (1+I+J+IJ)$  est de rang  $IJ$ . Il faut imposer donc  $1+I+J$  contraintes linéairement indépendantes afin qu'elle devienne inversible.

Les contraintes classiques sont :

1. contrainte de type analyse par cellule

$$\mu = 0 \quad \forall i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall j \quad \beta_j = 0;$$

2. contrainte de type cellule de référence

$$\alpha_1 = 0 \quad \beta_1 = 0 \quad \forall i \quad \gamma_{i1} = 0 \quad \forall j \quad \gamma_{1j} = 0;$$

3. contrainte de type somme

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad \forall i \quad \sum_j \gamma_{ij} = 0 \quad \forall j \quad \sum_i \gamma_{ij} = 0.$$

### Remarque

Pour les contraintes de type analyse par cellule ou cellule de référence, nous avons bien  $1 + 1 + I + (J - 1)$  contraintes. En effet, la dernière contrainte  $\gamma_{1j} = 0$  pour  $j = 1, \dots, J$  pourrait s'écrire  $\gamma_{1j} = 0$  pour  $j$  variant de 2 à  $J$ . Le cas correspondant à  $j = 1$ , soit  $\gamma_{11}$  est déjà donné dans la contrainte précédente.

Pour la contrainte de type somme, c'est plus difficile à voir. Montrons que les  $I + J$  contraintes  $\forall i \sum_j \gamma_{ij} = 0$  et  $\forall j \sum_i \gamma_{ij} = 0$  ne sont pas indépendantes. En effet quand  $I + J - 1$  contraintes sont vérifiées, la dernière restante l'est aussi.

$$\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1J-1} & c_{1J} & = 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2J-1} & c_{2J} & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{I1} & c_{I2} & \dots & c_{IJ-1} & c_{IJ} & = 0 \\ \hline = 0 & = 0 & \dots & = 0 & c & \end{array} = 0$$

Posons que  $I + J - 1$  contraintes sont vérifiées :  $I$  en ligne et  $J - 1$  en colonnes (voir ci-dessus). La dernière somme  $c$  vaut 0 (voir ci-dessus).

Nous n'aborderons ici que la contrainte de type analyse par cellule et la contrainte de type somme et *nous considérerons uniquement les plans équilibrés avec  $r$  observations par cellule.*

### 5.4.3 Estimation des paramètres

Considérons les notations suivantes :

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r y_{ijk}, \quad \bar{y}_{i \cdot} = \frac{1}{Jr} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^r y_{ijk}, \quad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{Ir} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^r y_{ijk}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k} y_{ijk}.$$

### Proposition 5.3

Soit le modèle d'analyse de la variance à deux facteurs suivant :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

1. sous les contraintes  $\mu = 0$ ,  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, I$  et  $\beta_j = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, J$ , qui correspond au modèle  $y_{ijk} = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont

$$\hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij}.$$

Les  $\hat{\gamma}_{ij}$  correspondent aux moyennes par cellule.

2. sous les contraintes  $\sum_i \alpha_i = 0$ ,  $\sum_j \beta_j = 0$ ,  $\forall i \sum_j \gamma_{ij} = 0$  et  $\forall j \sum_i \gamma_{ij} = 0$ , les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus sont

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{y} \\ \hat{\alpha}_i &= \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} \\ \hat{\beta}_j &= \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y} \\ \hat{\gamma}_{ij} &= \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y},\end{aligned}$$

Dans tous les cas, la variance résiduelle  $\sigma^2$  est estimée par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2}{n - IJ}.$$

La preuve est à faire en exercice (cf. exercices 5.4 et 5.5).

#### 5.4.4 Analyse graphique de l'interaction

Nous souhaitons savoir si les facteurs influent sur la variable à expliquer. La première analyse à effectuer consiste à étudier l'interaction. En effet, si l'interaction a un sens, alors les facteurs  $A$  et  $B$  influent sur la variable à expliquer car l'interaction est le produit de  $A$  avec  $B$ . Considérons le modèle complet

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

que nous pouvons réécrire sous une forme simplifiée

$$y_{ijk} = m_{ij} + \varepsilon_{ijk}.$$

Considérons maintenant le modèle sans interaction

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}.$$

La première étape consiste à tester la significativité de l'interaction. Cela revient à tester entre les deux modèles présentés. Avant d'aborder les tests, nous étudions une approche graphique de l'interaction. Si l'interaction est absente nous avons le modèle simplifié ci-dessus.

Fixons le facteur  $A$  au niveau  $i$ . Pour ce niveau donné, nous avons  $J$  cellules correspondant chacune à un niveau du facteur  $B$ . Prenons l'espérance dans chacune de ces cellules, nous obtenons sous l'hypothèse que l'interaction n'est pas significative :  $\mu + \alpha_i + \beta_j$ ,  $1 \leq j \leq J$ .

En traçant en abscisse le numéro  $j$  de la cellule et en ordonnée son espérance, nous obtenons une ligne brisée appelée *profil*.

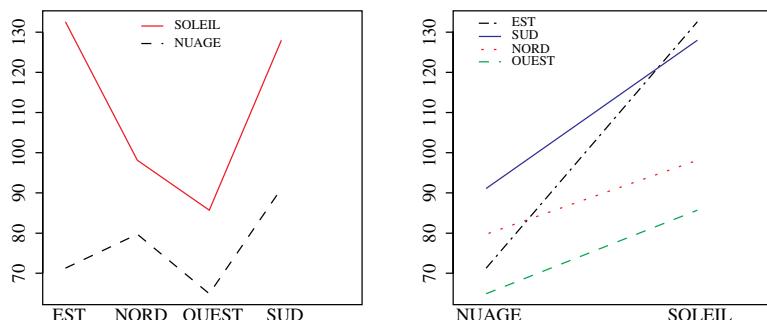
Maintenant changeons de niveau pour le facteur  $A$  et passons au niveau  $\alpha_{i+1}$ . Nous pouvons tracer la même ligne brisée et ce profil sera, sous l'hypothèse de non-interaction :  $\mu + \alpha_{i+1} + \beta_j$ , soit le profil précédent translaté verticalement de  $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ .

En conclusion, l'absence d'interaction se reflète graphiquement par un parallélisme des profils. N'ayant pas les vecteurs de paramètres, nous pouvons les estimer par les moyennes empiriques des cellules et constater, ou non, leur parallélisme. Puisque nous utilisons des estimations et non les paramètres, le parallélisme ne sera pas, même sous  $H_0$ , vérifié au sens strict. Cependant l'examen des profils donne une idée sur l'existence d'une interaction.

Dans l'exemple de l'ozone, nous avons, grâce aux ordres suivants :

```
interaction.plot(ano2[, "vent"], ano2[, "NEBU"], ano2[, "O3"], col=1:2)
interaction.plot(ano2[, "NEBU"], ano2[, "vent"], ano2[, "O3"], col=1:4)
```

les graphiques ci-dessous.



**Fig. 5.12.** Examen graphique de l'interaction entre nébulosité et vent.

Bien évidemment les profils ne sont pas parallèles sur les graphiques 5.12. Nous constatons que la modalité EST-SOLEIL (ou EST-NUAGE) est très éloignée de la position qu'elle aurait dû occuper si les profils étaient parallèles. Le vent d'EST associé à un temps ensoleillé semble propice à un fort pic d'ozone. Ces graphiques suggèrent donc l'existence d'une interaction entre Vent et Nébulosité, principalement entre EST et SOLEIL. Mais est-ce que cette différence locale est suffisante par rapport aux différences entre individus dues à la variabilité  $\varepsilon$ ? Afin de répondre à cette question il est nécessaire d'utiliser un test statistique et de supposer l'hypothèse gaussienne vérifiée.

### 5.4.5 Hypothèse gaussienne et test de l'interaction

Grâce à l'hypothèse gaussienne, nous pouvons utiliser les tests d'hypothèses vus au chapitre 3. Rappelons encore que notre principal objectif est de *savoir si les facteurs influent sur la variable à expliquer*.

Nous préconisons de tester en premier la significativité de l'interaction. En effet, si l'interaction est significative, les deux facteurs sont influents *via* leur interaction, il n'est donc pas nécessaire de tester leur influence respective.

Ecrivons ce test de l'interaction et explicitons les hypothèses du test

$$(H_0)_{AB} : \forall(i,j) \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \text{contre} \quad (H_1)_{AB} : \exists(i,j) \quad \gamma_{ij} \neq 0.$$

Les modèles sous  $(H_0)_{AB}$  et  $(H_1)_{AB}$  peuvent s'écrire encore sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} && \text{modèle sous } (H_0)_{AB} \\ y_{ijk} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} && \text{modèle sous } (H_1)_{AB}. \end{aligned}$$

Ce test, qui permet de connaître l'influence globale de l'interaction des facteurs, est tout simplement un test entre deux modèles dont l'un est un cas particulier de l'autre (section 3.6.2, p. 61). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

#### Théorème 5.2

*Soit un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs. Nous souhaitons tester la validité d'un sous-modèle. Notons l'hypothèse nulle (modèle restreint)  $(H_0)_{AB} : \forall(i,j) \quad \gamma_{ij} = 0$ , qui correspond au modèle  $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$ , contre l'hypothèse alternative  $(H_1)_{AB} : \exists(i,j) \quad \gamma_{ij} \neq 0$  qui correspond au modèle complet  $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ . Pour tester ces deux hypothèses, nous utilisons la statistique de test F ci-dessous qui possède comme loi sous  $(H_0)_{AB}$  :*

$$F = \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2 / (IJ - I - J + 1)}{\|Y - \hat{Y}\|^2 / (n - IJ)} \sim \mathcal{F}_{IJ-I-J+1, n-IJ}.$$

Lorsque le plan est équilibré, la statistique de test s'écrit

$$F = \frac{r \sum_i \sum_j (y_{ij} - y_{i..} - y_{.j} + \bar{y})^2}{\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2} \frac{n - IJ}{I + J - 1} \sim \mathcal{F}_{IJ-I-J+1, n-IJ}.$$

*L'hypothèse  $(H_0)_{AB}$  sera rejetée en faveur de  $(H_1)_{AB}$  si l'observation de la statistique F est supérieure à  $f_{IJ-I-J+1, n-IJ}(1-\alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $(H_0)_{AB}$ , ou erreur de première espèce, et nous conclurons alors à l'effet des facteurs explicatifs.*

La preuve de ce théorème se fait facilement. Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 p. 63 avec l'écriture des normes données en (5.8) et (5.9). Nous avons un premier modèle, ou modèle complet,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{modèle (1)}$$

et obtenons les estimations suivantes :  $\hat{\mu}(1), \dots, \hat{Y}(1)$  et  $\sigma^2(1)$ , le (1) précise que nous sommes dans le premier modèle.

L'interaction n'est pas significative, nous avons repoussé ce modèle (1) au profit d'un second modèle (modèle 2)

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad \text{modèle (2)}$$

dans lequel nous obtenons les estimations  $\hat{\mu}(2), \dots, \hat{Y}(2)$  et  $\hat{\sigma}^2(2)$ .

L'étape suivante consiste à tester l'influence des facteurs A et/ou B et donc tenter de simplifier le modèle. Testons par exemple l'influence du facteur A. Nous avons déjà le modèle (2) qui prend en compte l'effet de A, ce qui sera donc l'hypothèse alternative  $(H_1)_A$ . En simplifiant ce modèle pour éliminer l'influence de A, nous obtenons le modèle (3). Ce modèle sera le vrai modèle sous l'hypothèse nulle du test,  $(H_0)_A$ ,

$$y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad \text{modèle (3)}$$

avec les estimations suivantes :  $\hat{\mu}(3), \dots, \hat{Y}(3)$  et  $\sigma^2(3)$ .

Pour tester l'influence du facteur A, nous cherchons à départager 2 modèles, le modèle (2) et le modèle (3) ; nous avons la statistique de test

$$F = \frac{\|\hat{Y}(2) - \hat{Y}(3)\|^2/(I-1)}{\hat{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}_{(I-1), \text{ddl(résiduelle)}}.$$

Lorsque le plan est équilibré et que les contraintes choisies sont de type somme, les sous-espaces sont orthogonaux et la statistique de test peut se récrire sous la forme suivante :

$$F = \frac{\|P_{E_2} Y\|^2/(I-1)}{\hat{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}_{(I-1), \text{ddl(résiduelle)}}.$$

Quel estimateur de  $\sigma^2$  choisit-on pour le dénominateur de la statistique de test ?  $\hat{\sigma}^2(2)$  ou  $\hat{\sigma}^2(1)$  ?

- Si nous sommes dans la logique des tests entre modèles emboîtés, le premier modèle a été rejeté, nous travaillons donc avec les modèles (2) et (3), nous estimons alors  $\sigma^2$  par  $\hat{\sigma}^2(2)$ . La statistique de test vaut

$$F = \frac{\|\hat{Y}(2) - \hat{Y}(3)\|^2/(I-1)}{\|\hat{Y}(2)\|^2/(n-I-J+1)} \sim \mathcal{F}_{(I-1), (n-I-J+1)}.$$

- Bien que l'on ait rejeté le modèle complet avec interaction, certains auteurs et utilisateurs préconisent de conserver le modèle complet pour estimer  $\sigma^2$  en arguant de la précision de cet estimateur. Il est vrai que la SCR obtenue dans le modèle complet est plus petite que la SCR obtenue dans le modèle sans interaction, mais les degrés de liberté associés sont différents. Ainsi, dans le modèle complet, le ddl vaut  $n - IJ$ , alors que, dans le modèle sans interaction, le ddl vaut  $n - I - J + 1$ . La précision

accrue de l'estimateur peut être vue comme une précaution envers la possibilité d'une interaction, même si on l'a rejetée par le test d'hypothèse  $(H_0)_{AB}$  contre  $(H_1)_{AB}$ .

La statistique de test vaut

$$F = \frac{\|\hat{Y}(2) - \hat{Y}(3)\|^2 / (I - 1)}{\|Y - \hat{Y}(1)\|^2 / (n - IJ)} \sim \mathcal{F}_{(I-1), (n-IJ)}.$$

#### 5.4.6 Tableau d'analyse de la variance

En pratique, les résultats d'une analyse de la variance sont présentés dans un tableau récapitulatif, appelé tableau d'analyse de la variance.

**Tableau 5.6.** Tableau d'analyse de la variance.

Variation	ddl	SC	CM	Valeur du F	Pr(> F)
Facteur A	I-1	$SC_A$	$CM_A = \frac{SC_A}{(I-1)}$	$\frac{CM_A}{CMR}$	
Facteur B	J-1	$SC_B$	$CM_B = \frac{SC_B}{(J-1)}$	$\frac{CM_B}{CMR}$	
Interaction	(I-1)(J-1)	$SC_{AB}$	$CM_{AB} = \frac{SC_{AB}}{(I-1)(J-1)}$	$\frac{CM_{AB}}{CMR}$	
Résiduelle	n-IJ	SCR	$CMR = \frac{SCR}{(n-IJ)}$		

La première colonne indique la source de la variation, puis le degré de liberté associé à chaque effet. La somme des carrés (SCR) est donnée avant le carré moyen (CM), qui est par définition la SCR divisée par le ddl. Ainsi, dans le cas où les sous-espaces  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  sont orthogonaux, ce tableau donne tous les tests indiqués précédemment, en utilisant l'estimation de  $\sigma^2$  donnée par le modèle avec interaction (cf. numéro 2 p. 134) :

- la statistique de test d'interaction,  $(H_0)_{AB}$  contre  $(H_1)_{AB}$ , est le rapport  $CM_{AB} / CMR$ ;
- la statistique de test d'influence du facteur A,  $(H_0)_A$  contre  $(H_1)_A = (H_0)_{AB}$ , est  $CM_A / CMR$ ;
- la statistique de test d'influence du facteur B,  $(H_0)_B$  contre  $(H_1)_B = (H_0)_{AB}$ , est  $CM_B / CMR$ .

Ce tableau d'analyse de variance est donc une présentation synthétique des tests d'influence des différents facteurs et interactions.

Lorsque le plan est équilibré, nous avons la proposition suivante (cf. exercice 5.6).

#### Proposition 5.4

*Lorsque le plan est équilibré, les quantités intervenant dans le tableau d'analyse*

de la variance ont pour expression :

$$\begin{aligned} \text{SCT} &= \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_A &= Jr \sum_i (y_{i..} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_B &= Ir \sum_j (y_{.j.} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_{AB} &= r \sum_i \sum_j (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + \bar{y})^2 \\ \text{SCR} &= \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2. \end{aligned}$$

#### 5.4.7 Conclusion

Résumons donc la mise en œuvre d'une analyse de la variance à deux facteurs. Il est utile de commencer par examiner l'interaction graphiquement. Ensuite nous pouvons toujours supposer l'hypothèse gaussienne vérifiée et commencer par tester l'hypothèse d'interaction ( $H_0$ )<sub>AB</sub>. Comme le test dépend de projections qui sont uniques, il est inchangé, quel que soit le type de contrainte utilisé. Ensuite, si l'interaction n'est pas significative, il est possible de tester les effets principaux ( $H_0$ )<sub>A</sub> et ( $H_0$ )<sub>B</sub> et de conclure. Enfin, l'analyse des résidus permet quant à elle de confirmer l'hypothèse d'homoscédasticité et l'hypothèse de normalité.

Pour une présentation plus complète de l'analyse de la variance nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Scheffé (1959). De même, un traitement complet des plans d'expérience peut être trouvé dans Drosbeke *et al.* (1997).

#### 5.4.8 Exemple : la concentration en ozone

Afin de savoir si les variables Vent et Nébulosité ont un effet sur la concentration d'ozone, nous allons utiliser une ANOVA à deux facteurs. N'ayant aucune autre connaissance *a priori*, tous les modèles incluant le vent sont possibles : avec interaction, sans interaction, sans effet du facteur Nébulosité.

Il est conseillé de commencer par le modèle avec le plus d'interactions et ensuite d'essayer d'éliminer les interactions. Ainsi nous pouvons essayer de tester ( $H_0$ )<sub>AB</sub>,  $y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \forall(i, j, k)$  contre ( $H_1$ )<sub>AB</sub>,  $y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \forall(i, j, k)$ . Ces deux modèles s'écrivent et se testent sous GNU-R de la façon suivante :

```
mod1 <- lm(O3~vent+NEBU+vent:NEBU,data=ozone)
mod2 <- lm(O3~vent+NEBU,data=ozone)
anova(mod2,mod1)
Analysis of Variance Table
```

```

Model 1: 03 ~ vent + NEBU
Model 2: 03 ~ vent + NEBU + vent:NEBU
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1      45 11729.9
2      42 11246.2  3     483.6 0.602 0.6173

```

L'hypothèse de non-interaction  $(H_0)_{AB}$  est donc conservée. La différence constatée graphiquement (fig. 5.12) n'est pas suffisante pour repousser l'hypothèse de non-interaction. Ensuite nous souhaitons savoir si la nébulosité possède un effet sur le taux d'ozone. Nous testons alors  $(H_0)_B, y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk} \forall (i, j, k)$  contre  $(H_1)_B, y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \forall (i, j, k)$ . Nous allons donc utiliser la statistique  $F_B$ , mais se pose la question de l'estimateur  $\hat{\sigma}^2$ . Nous avons deux choix (cf. p. 134) :

- le premier consiste à utiliser  $\|Y - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j\|^2/(n - I - J + 1)$ , qui est l'estimateur classique de  $\hat{\sigma}^2$  dans un test entre modèles emboîtés ;
- le second consiste à conserver l'estimateur de  $\sigma^2$  utilisé lors du test précédent  $(H_0)_{AB}$  (test d'existence d'interaction) où l'estimateur était :  $\|Y - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\gamma}_{ij}\|^2/(n - IJ)$ .

La première méthode consiste à dire, puisque le modèle sans interaction a été conservé, il est donc « vrai » et on l'utilise pour estimer l'erreur. La seconde méthode consiste à dire, bien que le modèle à interaction ait été repoussé, il se peut qu'il subsiste une interaction même faible qui pourrait modifier l'estimation de  $\sigma^2$ . Afin d'éviter cette modification, la même estimation de  $\sigma^2$  est conservée.

Afin de traduire tout cela sous GNU-R, nous introduisons un nouveau modèle sans effet nébulosité :

```
mod3 <- lm(03~vent,data=ozone)
```

Ensuite nous testons selon la première procédure grâce à

```

anova(mod3,mod2)
Model 1: 03 ~ vent
Model 2: 03 ~ vent + NEBU
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F     Pr(>F)
1      46 18131.4
2      45 11729.9  1     6401.5 24.558 1.066e-05 ***

```

et nous repoussons  $(H_0)_B$ , il existe un effet du vent et de la nébulosité. Si l'on utilise la première procédure nous avons :

```

anova(mod3,mod2,mod1)
Analysis of Variance Table
Model 1: 03 ~ vent
Model 2: 03 ~ vent + NEBU
Model 3: 03 ~ vent + NEBU + vent:NEBU
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F     Pr(>F)

```

```

1      46 18131.4
2      45 11729.9  1     6401.5 23.907 1.523e-05 ***
3      42 11246.2  3     483.6  0.602     0.6173

```

et nous lisons encore une fois qu'au niveau de 5 % l'hypothèse  $(H_0)_B$  est rejetée (cf. ligne 2). L'analyse des résidus ne donne rien de particulier ici et sera donc omise.

## 5.5 Exercices

### Exercice 5.1 (Questions de cours)

1. Vous faites une analyse de la variance à 1 facteur équilibrée, la variance de l'estimateur des MC est diagonale.
  - A. Oui, toujours ;
  - B. Non, jamais ;
  - C. Peut-être, cela dépend des données de  $X$ .
2. Lors d'une analyse de la variance à deux facteurs, le modèle utilisé est  $y_{ijk} = m_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ . Les paramètres estimés sont  $\hat{m}_{ij}$ , la région de confiance de deux paramètres est :
  - A. une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes du repère ;
  - B. une ellipse dont les axes peuvent ne pas être parallèles aux axes du repère ;
  - C. un cercle.
3. Lors d'une analyse de la variance à deux facteurs, le modèle utilisé est  $y_{ijk} = m_{ij} + \varepsilon_{ijk}$  et le plan équilibré. Les paramètres estimés sont  $\hat{m}_{ij}$ , la région de confiance de deux paramètres est :
  - A. une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes du repère ;
  - B. une ellipse dont les axes peuvent ne pas être parallèles aux axes du repère ;
  - C. un cercle.
4. Vous souhaitez tester l'effet d'un facteur lors d'une analyse de la variance à 2 facteurs, l'interaction est positive :
  - A. vous effectuez l'analyse à un facteur correspondant et concluez en conséquence ;
  - B. vous ne faites rien car il y a un effet du facteur ;
  - C. vous regardez dans le tableau de l'ANOVA la valeur de la p-value de l'effet désiré afin de conclure.

### Exercice 5.2 (Analyse de la covariance)

Nous souhaitons expliquer une variable  $Y$  par une variable continue et une variable qualitative admettant  $I$  modalités.

1. Donner la forme explicite des matrices  $X$  pour les 3 modélisations proposées.

2. Calculer ensuite l'estimateur des MC obtenu dans le modèle 5.1.
3. Montrer que cet estimateur peut être obtenu en effectuant  $I$  régressions simples.

**Exercice 5.3 (†Estimateurs des MC en ANOVA à 1 facteur)**

Démontrer la proposition 5.2 p. 119.

**Exercice 5.4 (Estimateurs des MC en ANOVA à 2 facteurs)**

Démontrer la proposition 5.3 p. 131 lorsque les contraintes sont de type analyse par cellule.

**Exercice 5.5 (††Estimateurs des MC en ANOVA à 2 facteurs, suite)**

Démontrer la proposition 5.3 p. 131 lorsque les contraintes sont de type somme dans un plan équilibré.

**Exercice 5.6 (†Tableau d'ANOVA à 2 facteurs équilibrée)**

Démontrer la proposition 5.4 p. 135.

## 5.6 Notes : identifiabilité et contrastes

L'objectif de cette partie est de répondre à la question suivante : comment trouver une solution unique et d'une manière relativement générale ?

Nous allons adopter ici un point de vue issu de l'algèbre linéaire. Rappelons que nous avons  $X = (\mathbb{1}, A_c)$  où  $A_c$ , de dimension  $n \times I$ , est de rang  $I$ . La matrice  $X$  de dimension  $n \times p$  (ou  $n \times I + 1$ ) n'est pas de plein rang. Nous avons donc  $\text{rang}(X) = I$ , c'est-à-dire que  $\dim(\mathfrak{S}(X)) = I$  et non pas  $I + 1$ , ce qui serait le cas si  $X$  était de plein rang. Rappelons que la matrice  $X$  peut être vue comme la matrice dans les bases canoniques d'une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ . En identifiant  $X$  et  $f$  ainsi que les vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  (et  $\mathbb{R}^n$ ) à leurs coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  (et  $\mathbb{R}^n$ ), nous avons

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \beta &\mapsto X(\beta) = X\beta. \end{aligned}$$

L'espace de départ  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des coefficients. L'espace d'arrivée est l'espace  $\mathbb{R}^n$  des variables. Chacun de ces espaces est muni d'un produit scalaire, le produit scalaire euclidien. On peut donc décomposer chacun de ces deux espaces en deux supplémentaires orthogonaux. Comme nous cherchons un vecteur de coefficients, nous nous intéressons à  $\mathbb{R}^p$  qui se décompose en deux :

$$\mathbb{R}^p = \ker(X) \oplus \ker(X)^\perp,$$

avec  $\ker(X) = \{\beta \in \mathbb{R}^p : X\beta = 0\}$  le noyau de  $X$ . Donc pour un coefficient quelconque  $\gamma \in \mathbb{R}^p$ , nous pouvons l'écrire comme suit :

$$\gamma = \gamma^\dagger + \gamma^\ddagger, \quad \gamma^\dagger \in \ker(X) \text{ et } \gamma^\ddagger \in \ker(X)^\perp.$$

Maintenant si on prend un coefficient  $\hat{\beta}$  qui minimise les MC nous avons

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^\dagger + \hat{\beta}^\ddagger, \text{ avec } X\hat{\beta} = X\hat{\beta}^\dagger + X\hat{\beta}^\ddagger = X\hat{\beta}^\dagger.$$

Comme nous l'avons déjà vu, si l'on ajoute à  $\hat{\beta}^\ddagger$  n'importe quel  $\beta^\dagger$  qui soit élément de  $\ker(X)$ , alors on a toujours que  $\hat{\beta}^\dagger + \beta^\dagger$  est aussi solution des MC. Il n'y a pas unicité. Si l'on souhaite un unique vecteur de coefficient solution des MC, il semble naturel de poser que  $\beta^\dagger = 0$  et de garder  $\hat{\beta}^\ddagger \in \ker(X)^\perp$  comme solution de notre problème. Donc nous cherchons l'élément (unique)  $\hat{\beta}^\ddagger \in \ker(X)^\perp$  qui soit solution des MC.

## Solution de norme minimum

Montrons que le vecteur  $\hat{\beta}^\ddagger$ , qui est le vecteur solution du problème et qui est élément de  $\ker(X)^\perp$ , est le vecteur solution des MC qui est de norme minimum.

Soit un vecteur quelconque  $\hat{\beta}$  solution des MC, il se décompose en deux parties orthogonales, et du fait de cette orthogonalité nous avons la décomposition suivante :

$$\|\hat{\beta}\|^2 = \|\hat{\beta}^\dagger + \hat{\beta}^\ddagger\|^2 = \|\hat{\beta}^\dagger\|^2 + \|\hat{\beta}^\ddagger\|^2 \geq \|\hat{\beta}^\ddagger\|^2.$$

Nous avons donc que  $\hat{\beta}^\ddagger$  est la solution des MC de norme minimum.

Une première approche est de le chercher directement ce qui est donné par  $\hat{\beta}^\ddagger = (X'X)^+X'Y$ , où  $(X'X)^+$  est l'inverse généralisé de Moore-Penrose (voir Golub & Van Loan, 1996, pp. 256-257).

Une autre approche consiste à utiliser une solution du problème des MC quelconque et de la projeter dans  $\ker(X)^\perp$ . Pour cela, il nous faut déterminer  $\ker(X)^\perp$ , ou plus simplement  $\ker(X)$ . Quelle est la dimension de  $\ker(X)$  ?

Rappelons le théorème du rang :

$$\dim(\mathfrak{S}(X)) + \dim(\ker(X)) = p = I + 1,$$

où  $p$  est la dimension de l'espace de départ de l'application linéaire associée à  $X$  (ou le nombre de colonne de  $X$ ). Ici nous savons que  $\dim(\mathfrak{S}(X)) = I$  et donc  $\dim(\ker(X)) = 1$ . Le sous-espace vectoriel  $\ker(X)$  est engendré par un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^p$ , vecteur que nous pouvons noter  $\beta^\dagger$ . Nous savons donc que  $\ker(X)^\perp$  est engendré par  $I = p - 1$  vecteurs. En termes de coefficients, cela se traduit par la phrase suivante : si l'on souhaite avoir un vecteur de coefficients unique, on ne pourra avoir que  $p - 1$  coefficients indépendants, le dernier se déduira des autres par une combinaison linéaire.

Trouvons maintenant un vecteur  $\beta^\dagger$  non nul de  $\ker(X)$ , formant ainsi une base de  $\ker(X)$ . Si nous posons que  $\beta^\dagger = (-1, 1, \dots, 1)'$ , il est bien sûr non nul. Nous savons que  $X = (\mathbb{1}_n, A_c)$ , mais aussi que la somme des colonnes de  $A_c$  vaut  $\mathbb{1}_n$ . Donc, lorsque l'on effectue  $X\beta^\dagger$ , nous trouvons  $O_n$  et donc  $\beta^\dagger = (-1, 1, \dots, 1)'$  est une base de  $\ker(X)$ . Tout vecteur orthogonal à  $\beta^\dagger$

sera dans  $\ker(X)^\perp$ , et il suffit donc de projeter une solution  $\hat{\beta}$  des MC dans l'orthogonal de  $\beta^\dagger$  pour obtenir la solution de norme minimum  $\beta^\ddagger$  :

$$\beta^\ddagger = (I_n - \beta^\dagger(\beta^{\dagger\prime}\beta^\dagger)^{-1}\beta^{\dagger\prime})\hat{\beta}.$$

Cette solution offre l'intérêt d'être la plus faible en norme, cependant elle n'est pas forcément interprétable au niveau des coefficients, dans le sens où l'on ne contrôle pas la contrainte linéaire reliant les coefficients entre eux.

## Contrastes

Une autre approche combine l'élégance de la solution de norme minimum (pas de choix arbitraire) à l'interprétabilité. Cette approche part du constat que souvent, le praticien n'est pas intéressé par les coefficients en soit, mais par leur différence ou toute autre combinaison linéaire des coefficients. Par exemple, si nous avons  $I = 3$  médicaments à tester avec 1 médicament de référence (le premier) et 2 nouveaux (les 2 suivants), l'intérêt sera certainement d'estimer l'apport des nouveaux médicaments en comparaison avec le médicament de référence et donc d'estimer 2 différences,  $(\mu + \alpha_1) - (\mu + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$  et  $(\mu + \alpha_1) - (\mu + \alpha_3) = \alpha_1 - \alpha_3$ . De même, si nous disposons de 2 témoins (les 2 premiers) et de 2 nouveaux médicaments (2 suivants), nous pouvons souhaiter estimer l'apport d'un nouveau médicament en comparaison avec l'effet de référence (i.e. la moyenne des 2 témoins). Cela veut dire estimer  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 - \alpha_3$  et  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 - \alpha_4$ .

La question est donc : sous quelles conditions une combinaison linéaire des coefficients est-elle estimable de manière unique ? Nous savons qu'il faut que cette combinaison linéaire se trouve dans  $\ker(X)^\perp$ , mais existe-t-il un critère simple qui assure cela ? C'est l'objet d'un contraste, défini ci-dessous.

### Définition 5.2

$\sum_{i=1}^I a_i \alpha_i$  est un *contraste* sur les  $\alpha_i$  si  $\sum_{i=1}^I a_i = 0$ .

La définition 5.2 permet de s'assurer que les contrastes sont estimables de manière unique. Les contrastes sont des éléments orthogonaux à  $\beta^\dagger$ , vecteur de base de  $\ker(X)$ . En effet, nous n'avons pas de contrainte sur  $\mu$  mais uniquement sur  $\alpha$ , c'est-à-dire

$$0 = \sum_{i=1}^I a_i \times 1 = a' \mathbb{1}_I = \langle (0, a'), \beta^\dagger \rangle.$$

Tout vecteur  $a$  complété par 0 est donc élément de l'orthogonal de  $\ker(X)$  et donc tout contraste est estimable de manière unique.

Ainsi nous pouvons vérifier que dans le premier exemple ci-dessus les combinaisons linéaires de coefficients  $a = (1, -1, 0)'$  et  $b = (1, 0, -1)'$  sont bien des contrastes et donc estimables de manière unique.

De même, dans le second exemple, les combinaisons linéaires de coefficients  $a = (1/2, 1/2, -1, 0)'$  et  $b = (1/2, 1/2, 0, -1)'$  sont aussi des contrastes et donc estimables de manière unique.

# Chapitre 6

## Choix de variables

### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons supposé que le modèle proposé

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

était le bon et que toutes les variables explicatives ( $X_1, \dots, X_p$ ) formant le tableau  $X$  étaient importantes dans l'explication de la variable  $Y$ .

Cependant, dans bon nombre d'études statistiques, nous disposons d'un ensemble de variables explicatives pour expliquer une variable (exemple de la concentration de l'ozone) et rien ne nous assure que toutes les variables interviennent dans l'explication. L'utilisateur a donc à sa disposition un ensemble de variables potentiellement explicatives ou variables candidates. Parmi ces variables, nous supposerons l'existence des variables transformées par des fonctions connues (cf. chapitre 4). Nous supposerons également dans ce chapitre que les données sont de « bonne » qualité, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point aberrant ou levier (cf. chapitre 4). En pratique, ces conditions sont rarement satisfaites.

Nous avons  $p$  variables à notre disposition et nous supposons, comme nous l'avons toujours fait dans ce livre, que la constante (la variable  $\mathbb{1}$ ) fait partie des variables candidates. Nous pouvons donc étudier  $(2^p - 1)$  modèles en considérant tous les modèles possibles ou, si nous forçons la variable  $\mathbb{1}$  à être dans tous les modèles,  $(2^{p-1})$  modèles. Comment alors choisir le meilleur modèle parmi ces modèles ? Il faut donc définir un critère quantifiant la qualité du modèle. Ce critère dépend de l'objectif de la régression. Une fois le critère choisi, il faudra déterminer des procédures permettant de trouver le meilleur modèle.

Essayons dans un premier temps de rappeler les objectifs de la régression. Mallows (1973) a proposé la liste suivante :

a. *Description*

Si le but avoué est de décrire la variable à expliquer et si le critère à

minimiser est celui des moindres carrés, il semble indiqué de choisir le modèle ayant la plus petite erreur résiduelle ou le plus grand  $R^2$ . Le modèle ayant toutes les variables, c'est-à-dire le modèle complet, va alors être le modèle retenu.

b. *Estimation des paramètres*

Lorsque les paramètres sont estimés dans des modèles plus petits que le modèle complet (des variables explicatives sont enlevées du modèle complet), les estimateurs obtenus dans ces modèles peuvent être biaisés. En contrepartie, leur variance peut être plus faible que la variance des estimateurs obtenus dans un modèle plus « gros ». Un critère prenant en compte ces deux caractéristiques est l'erreur quadratique moyenne (EQM) que nous définirons.

c. *Prévision*

Le but de l'étude est de prévoir le mieux possible des nouvelles observations. Pour comparer des modèles sur cette base, nous supposerons que nous recevrons de nouvelles observations notées  $(X^*, Y^*)$  et nous comparerons l'erreur de prévision effectuée par chaque modèle.

Cette liste succincte d'objectifs de la régression est primordiale pour choisir le critère de sélection d'un sous-ensemble de variables parmi les  $p$  variables initiales. Reprenons cette liste et essayons de voir les estimateurs qui pourraient être utilisés :

a. *Description*

Nous pouvons comparer les modèles *via* la comparaison des valeurs ajustées  $\hat{Y}$ . Dans tous les cas, nous obtenons un vecteur  $\hat{Y}$  de  $\mathbb{R}^n$  et donc, quel que soit le modèle utilisé, nous avons le même objet à analyser. Nous pouvons également analyser la SCR.

b. *Estimation des paramètres*

Nous pouvons comparer les modèles *via* les estimateurs des paramètres  $\hat{\beta}$  ou *via*  $\hat{Y}$ . Cependant la taille des  $\hat{\beta}$  est différente d'un modèle à l'autre. Une façon de procéder consiste à comparer la partie commune des  $\hat{\beta}$ , cela revient à travailler sur les composantes de  $\hat{\beta}$  qui correspondent aux variables utilisées dans le modèle le plus petit.

c. *Prévision*

Nous pouvons comparer les qualités prédictives des différents modèles en utilisant un second jeu de données par exemple.

Avant de présenter en détail les différentes procédures et les différents critères de choix, il nous semble important de bien comprendre sur un exemple ce qui se passe lorsque l'ensemble de variables sélectionnées n'est pas le bon (si cet ensemble existe).

Les notations que nous utilisons sont :

- $X$  est la matrice composée de toutes les variables explicatives (de taille  $n \times p$ );

- $\xi$  est un sous-ensemble (d'indices) de  $\{1, 2, \dots, p\}$ , son cardinal est noté  $|\xi|$  et  $\bar{\xi}$  est le sous-ensemble complémentaire de cardinal  $p - |\xi|$  ;
- $X_\xi$  est la sous-matrice extraite de  $X$  dont les colonnes correspondent aux indices contenus dans  $\xi$  ;
- Dans le modèle  $\xi$  sélectionnant  $|\xi|$  variables, les paramètres associés aux variables sont notés  $\beta_\xi$  ;
- Les coordonnées d'indice  $\xi$  du vecteur  $\hat{\beta}$  sont notées  $[\hat{\beta}]_\xi$ . En général,  $[\hat{\beta}]_\xi \neq \hat{\beta}_\xi$  sauf si  $\Im(X_\xi) \perp \Im(X_{\bar{\xi}})$  ;
- Si nous disposons d'une nouvelle observation  $x^{*\prime} = [x_\xi^{*\prime}, x_{\bar{\xi}}^{*\prime}]$ , nous avons les prévisions suivantes :

$$\hat{y}^p = x^{*\prime} \hat{\beta} \quad \hat{y}_\xi^p = x_\xi^{*\prime} \hat{\beta}_\xi.$$

## 6.2 Choix incorrect de variables : conséquences

L'objectif de cette section est de bien comprendre les conséquences d'un mauvais choix des variables explicatives. Par « choix », nous entendons soit en prendre trop peu, soit en prendre le bon nombre mais pas les bonnes, soit en prendre trop. Nous allons analyser un exemple simple et généraliser ensuite les résultats. L'exemple que nous traitons dans cette partie est le suivant : admettons que nous ayons trois variables explicatives potentielles  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  et que le vrai modèle soit

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon = X_{12} \beta_{12} + \varepsilon.$$

Une variable ne sert donc à rien mais ce fait n'est pas connu de l'utilisateur de la régression. Nous pouvons donc analyser sept modèles différents, trois modèles à une variable, trois modèles à deux variables et un modèle à trois variables. Nous analysons les 7 modèles mais ne précisons les calculs que lorsque  $\xi = \{1\}$ . Nous obtenons alors comme estimateurs :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 Y \\ \hat{Y}_1 &= P_{X_1} Y \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \|P_{X_1^\perp} Y\|^2 / (n - 1).\end{aligned}$$

### 6.2.1 Analyse du biais des estimateurs

Analysons le biais de ces estimateurs en nous servant du vrai modèle  $\mathbb{E}Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = X_{12} \beta_{12}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{\beta}_1 &= (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 \mathbb{E}Y = \beta_1 + (X'_1 X_1)^{-1} X_1 X_2 \beta_2 \\ \mathbb{E}\hat{Y}_1 &= X_1 \beta_1 + P_{X_1} X_2 \beta_2.\end{aligned}$$

Le biais est donc :

$$\begin{aligned}B(\hat{\beta}_1) &= \mathbb{E}(\hat{\beta}_1) - \beta_1 = (X'_1 X_1)^{-1} X_1 X_2 \beta_2 \\ B(\hat{Y}_1) &= \mathbb{E}(\hat{Y}_1) - \mathbb{E}(Y) = P_{X_1} X_2 \beta_2 - X_2 \beta_2 = P_{X_1^\perp} X_2 \beta_2.\end{aligned}$$

La matrice de projection orthogonale  $P_{X_1^\perp}$  est non aléatoire (le choix de  $X_1$  ne se fait pas en fonction des données), nous pouvons sortir cette matrice de l'espérance. La trace d'un projecteur est la dimension de l'espace sur lequel on projette, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\text{tr}(Y'P_{X_1^\perp}Y) = \frac{1}{n-1}\text{tr}(P_{X_1^\perp}\mathbb{E}(YY')) \\ &= \frac{1}{n-1}\text{tr}(P_{X_1^\perp}(V(Y) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y)')) = \sigma^2 + \frac{1}{n-1}\beta'_{12}X'_{12}P_{X_1^\perp}X_{12}\beta_{12} \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{n-1}\beta_2^2\|P_{X_1^\perp}X_2\|^2.\end{aligned}$$

Le biais vaut alors :

$$B(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n-1}\beta_2^2\|P_{X_1^\perp}X_2\|^2.$$

En effectuant les calculs pour les 7 modèles possibles, nous avons le tableau 6.1.

**Tableau 6.1.** Biais des différents estimateurs.

modèle	estimations	propriétés
$Y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon$	$\hat{Y}_1 = X_1\hat{\beta}_1$ $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\ P_{X_1^\perp}Y\ ^2}{n-1}$	$B(\hat{Y}_1) = P_{X_1^\perp}X_2\beta_2$ $B(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n-1}\beta_2^2\ P_{X_1^\perp}X_2\ ^2$
$Y = X_2\beta_2 + \varepsilon$	$\hat{Y}_2 = X_2\hat{\beta}_2$ $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\ P_{X_2^\perp}Y\ ^2}{n-1}$	$B(\hat{Y}_2) = P_{X_2^\perp}X_1\beta_1$ $B(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n-1}\beta_1^2\ P_{X_2^\perp}X_1\ ^2$
$Y = X_3\beta_3 + \varepsilon$	$\hat{Y}_3 = X_3\hat{\beta}_3$ $\hat{\sigma}_3^2 = \frac{\ P_{X_3^\perp}Y\ ^2}{n-1}$	$B(\hat{Y}_3) = P_{X_3^\perp}X_{12}\beta_{12}$ $B(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{1}{n-1}\beta'_{12}X'_{12}P_{X_3^\perp}X_{12}\beta_{12}$
$Y = X_{12}\beta_{12} + \varepsilon$	$\hat{Y}_{12} = X_{12}\hat{\beta}_{12}$ $\hat{\sigma}_{12}^2 = \frac{\ P_{X_{12}^\perp}Y\ ^2}{n-2}$	$B(\hat{Y}_{12}) = 0$ $B(\hat{\sigma}_{12}^2) = 0$
$Y = X_{13}\beta_{13} + \varepsilon$	$\hat{Y}_{13} = X_{13}\hat{\beta}_{13}$ $\hat{\sigma}_{13}^2 = \frac{\ P_{X_{13}^\perp}Y\ ^2}{n-2}$	$B(\hat{Y}_{13}) = P_{X_{13}^\perp}X_{12}\beta_{12}$ $B(\hat{\sigma}_{13}^2) = \frac{1}{n-2}\beta'_{12}X'_{12}P_{X_{13}^\perp}X_{12}\beta_{12}$
$Y = X_{23}\beta_{23} + \varepsilon$	$\hat{Y}_{23} = X_{23}\hat{\beta}_{23}$ $\hat{\sigma}_{23}^2 = \frac{\ P_{X_{23}^\perp}Y\ ^2}{n-2}$	$B(\hat{Y}_{23}) = P_{X_{23}^\perp}X_{12}\beta_{12}$ $B(\hat{\sigma}_{23}^2) = \frac{1}{n-2}\beta'_{12}X'_{12}P_{X_{23}^\perp}X_{12}\beta_{12}$
$Y = X_{123}\beta_{123} + \varepsilon$	$\hat{Y}_{123} = X_{123}\hat{\beta}_{123}$ $\hat{\sigma}_{123}^2 = \frac{\ P_{X_{123}^\perp}Y\ ^2}{n-3}$	$B(\hat{Y}_{123}) = 0$ $B(\hat{\sigma}_{123}^2) = 0$

Nous constatons alors que dans les modèles « trop petits » (ici à 1 variable), c'est-à-dire admettant moins de variables que le modèle « correct » inconnu du statisticien, les estimateurs obtenus sont biaisés.

A l'inverse, lorsque les modèles sont « trop grands » (ici à 3 variables), les estimateurs ne sont pas biaisés. Il semblerait donc qu'il vaille mieux travailler avec des modèles « trop grands », ce qui est contraire au principe de parcimonie.

Nous pouvons énoncer un résultat général (cf. exercice 6.2) :

### **Proposition 6.1**

1.  $\hat{\beta}_\xi$  est en général biaisé.
2.  $\hat{\sigma}_\xi^2$  est en général biaisé positivement, c'est-à-dire que, en moyenne, l'espérance de  $\hat{\sigma}_\xi^2$  vaut  $\sigma^2$  plus une quantité positive. Rappelons que  $\hat{\sigma}^2$  n'est pas biaisé.
3.  $\hat{y}_\xi$  est en général biaisé.

L'estimation du biais est difficile car nous ne connaissons pas  $x'\beta$ . Cependant si le critère de choix de modèle est le biais, l'utilisateur conservera le modèle ayant le plus de variables explicatives. Or l'analyse de la variance des estimateurs va nous montrer que ce choix n'est peut-être pas le bon.

#### **6.2.2 Analyse de la variance des estimateurs**

Analysons maintenant la variance des estimateurs

$$\begin{aligned} Y = X_1\beta_1 + \varepsilon & \quad V(\hat{\beta}_1) = (X'_1 X_1)^{-1} \sigma^2 \\ Y = X_{12}\beta_{12} + \varepsilon & \quad V(\hat{\beta}_{12}) = \begin{pmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 \end{pmatrix} \sigma^2 \\ Y = X_{123}\beta_{123} + \varepsilon & \quad V(\hat{\beta}_{123}) = \begin{pmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 & X'_1 X_3 \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 & X'_2 X_3 \\ X'_3 X_1 & X'_3 X_2 & X'_3 X_3 \end{pmatrix} \sigma^2. \end{aligned}$$

Les dimensions des estimateurs varient avec la taille du modèle. Cependant, en nous servant de la formule d'inverse par bloc donnée en annexe, nous pouvons montrer que les estimateurs des composantes communes ont des variances plus faibles dans le modèle le plus petit :

$$V(\hat{\beta}_1) \leq V([\hat{\beta}_{12}]_1) \leq V([\hat{\beta}_{123}]_1).$$

Si nous travaillons avec les valeurs ajustées, nous avons le même phénomène :

$$\begin{aligned} Y = X_1\beta_1 + \varepsilon & \quad V(\hat{Y}_1) = P_{X_1} \sigma^2 \\ Y = X_{12}\beta_{12} + \varepsilon & \quad V(\hat{Y}_{12}) = P_{X_{12}} \sigma^2 = P_{X_1} \sigma^2 + P_{X_2 \cap X_1^\perp} \sigma^2 \\ Y = X_{123}\beta_{123} + \varepsilon & \quad V(\hat{Y}_{123}) = P_{X_{123}} \sigma^2 = P_{X_1} \sigma^2 + P_{X_{23} \cap X_1^\perp} \sigma^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer un résultat général (cf. exercice 6.3) :

**Proposition 6.2**

1.  $V([\hat{\beta}]_\xi) - V(\hat{\beta}_\xi)$  est une matrice semi-définie positive, ce qui veut dire que les estimateurs des composantes communes aux deux modèles sont mieux estimées (moins variables) dans le modèle le plus petit.
2. La variance des données ajustées dans le modèle le plus petit est plus faible que celle des données ajustées dans le modèle plus grand  $V(\hat{Y}) \geq V(\hat{Y}_\xi)$ .

Si le critère de choix de modèle est la variance, l'utilisateur choisira des modèles admettant peu de paramètres à estimer ! En général, il est souhaitable d'avoir un modèle précis en moyenne (faible biais) et ayant une variance faible. Nous venons de voir qu'un moyen simple d'atteindre le premier objectif consiste à conserver toutes les variables dont nous disposons alors que le second sera atteint en éliminant beaucoup de variables. L'erreur quadratique moyenne (EQM) va concilier ces deux objectifs et est en général le critère utilisé pour le choix de modèle.

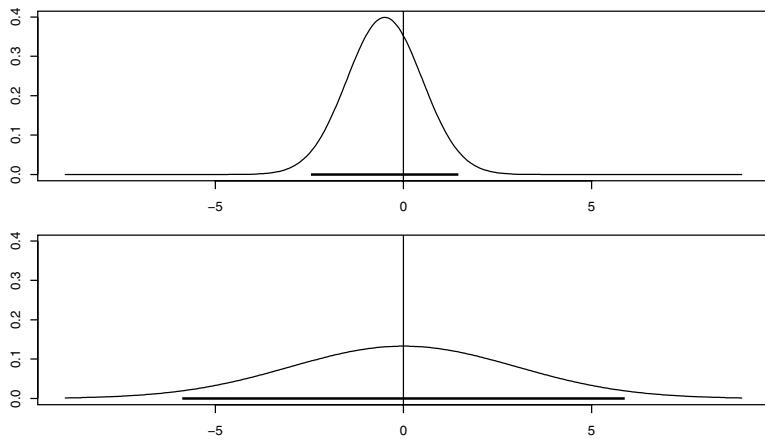
**6.2.3 Erreur quadratique moyenne**

Commençons cette section par un exemple et un rappel de la définition de l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'un estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  de dimension  $p$

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\theta}) &= \mathbb{E}((\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})') \\ &= \mathbb{E}(\theta - \hat{\theta})\mathbb{E}(\theta - \hat{\theta})' + V(\hat{\theta}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire le biais « au carré » plus la variance. Un estimateur biaisé peut être meilleur qu'un estimateur non biaisé si sa variance est plus petite. Voyons cela sur un exemple simple qui va permettre de comprendre la balance entre biais et variance.

Supposons que nous connaissons la valeur du vrai paramètre  $\theta$ , ici  $\theta = 0$ . Supposons aussi que nous connaissons la loi de deux estimateurs  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$ . Ici ces lois sont connues et sont de la forme  $\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(-0.5, 1)$  et  $\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(0, 3^2)$ . Nous savons donc que  $\hat{\theta}_1$  est biaisé, car  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = -0.5 \neq \theta$  mais pas  $\hat{\theta}_2$ . *A priori*, nous serions tentés de prendre  $\hat{\theta}_2$ , puisqu'en moyenne il tombe sur le vrai paramètre  $\theta$ . Si nous souhaitons comparer plus attentivement ces deux estimateurs nous traçons leur densité. La densité contient toutes les informations sur ces estimateurs. La figure 6.1 présente les densités de ces deux estimateurs et un intervalle de confiance à 95 % de ceux-ci. Nous voyons bien que si nous choisissons  $\hat{\theta}_1$ , la distance entre le vrai paramètre et une estimation est, en moyenne, plus faible que pour le choix de  $\hat{\theta}_2$ . La moyenne de cette distance euclidienne peut être calculée et c'est l'EQM. Ici l'EQM de  $\hat{\theta}_1$  vaut 1.25 (biais au carré + variance) et celui de  $\hat{\theta}_2$  vaut 3 donc le choix de  $\hat{\theta}_1$  est plus raisonnable que  $\hat{\theta}_2$  : en moyenne il ne vaudra pas la valeur du paramètre, il est biaisé, mais en général il « tombe » moins loin du paramètre car il est moins variable (faible variance).



**Fig. 6.1.** Estimateurs biaisé et non biaisé. En trait plein est figurée la densité de l'estimateur biaisé (en haut) et non biaisé (en bas). La droite verticale est le vrai paramètre réel à estimer. Le segment horizontal épais figure l'étendue correspondant à 95 % de la probabilité.

L'EQM permet donc de comparer les estimateurs d'un même paramètre fixe. Il est le résultat d'un équilibre entre le biais et la variance, qui réagissent en général en sens contraire.

Revenons au problème de la régression où nous avons plusieurs ensembles de variables  $\xi$ . Nous allons utiliser l'EQM comme mesure de comparaison. Nous pouvons comparer soit des estimateurs  $\hat{\beta}_\xi \in \mathbb{R}^{p_\xi}$ , soit des valeurs ajustées  $x'_\xi \hat{\beta}_\xi \in \mathbb{R}$ , où  $x'_\xi$  correspond à une ligne de la matrice  $X_\xi$ , soit des valeurs prévues  $x_\xi^* \hat{\beta}_\xi \in \mathbb{R}$ , où  $x_\xi^* \in \mathbb{R}^{p_\xi}$  est une nouvelle observation. Il est classique de traiter le choix de variables *via* l'analyse de la valeur ajustée ou de la valeur prévue et non pas *via* les estimateurs  $\hat{\beta}_\xi$  dont les dimensions varient avec  $|\xi|$ . Les définitions que nous allons introduire de l'EQM et de l'EQM de prévision, notée EQMP, seront adaptées à notre problème.

### Définition 6.1 (EQM)

Considérons le modèle de régression  $Y = X\beta + \varepsilon$  où  $\beta$ , le paramètre inconnu du modèle, peut avoir des coordonnées nulles. Soit  $x \in \mathbb{R}^p$  le vecteur colonne d'une observation, nous avons  $x_\xi \in \mathbb{R}^{|\xi|}$  et  $\hat{\beta}_\xi$  l'estimateur des MC obtenus avec ces  $|\xi|$  variables. L'erreur quadratique moyenne est définie par

$$\text{EQM}(\hat{y}_\xi) = \mathbb{E}((x'_\xi \hat{\beta}_\xi - x'\beta)^2) = V(x'_\xi \hat{\beta}_\xi) + B^2(x'_\xi \hat{\beta}_\xi),$$

où  $B(x'_\xi \hat{\beta}_\xi) = \mathbb{E}(x'_\xi \hat{\beta}_\xi) - x'\beta$  est le biais de  $x'_\xi \hat{\beta}_\xi$ .

Si nous possédons  $n$  observations  $x_\xi$  regroupées dans une matrice  $X_\xi$  et  $\hat{\beta}_\xi$  l'estimateur des MC obtenu avec ces  $|\xi|$  variables, nous définissons la trace de la matrice de l'EQM par

$$\text{tr}[\text{EQM}(\hat{Y}_\xi)] = \text{tr}[V(X_\xi \hat{\beta}_\xi)] + B(X_\xi \hat{\beta}_\xi)'B(X_\xi \hat{\beta}_\xi).$$

Nous pouvons développer le calcul de la décomposition de l'EQM pour les valeurs ajustées avec le modèle  $\xi$

$$\begin{aligned}\text{tr}[\text{EQM}(\hat{Y}_\xi)] &= \text{tr}[V(X_\xi \hat{\beta}_\xi)] + B(X_\xi \hat{\beta}_\xi)' B(X_\xi \hat{\beta}_\xi) \\ &= \text{tr}[V(P_{X_\xi} Y)] + (\mathbb{E}(X_\xi \hat{\beta}_\xi) - X\beta)' (\mathbb{E}(X_\xi \hat{\beta}_\xi) - X\beta) \\ &= |\xi| \sigma^2 + \|(I - P_{X_\xi}) X \beta\|^2.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Afin de pouvoir sortir  $P_{X_\xi}$  de la variance, il faut que  $P_{X_\xi}$  soit fixe et donc que *le choix du modèle  $X_\xi$  ne dépende pas des données sur lesquelles on évalue le projecteur*. Si le choix des variables a été effectué sur le même jeu de données que celui qui sert à estimer les paramètres, nous devrions considérer un terme de biais supplémentaire appelé biais de sélection. Nous reviendrons sur ce concept à la fin du chapitre.

Revenons à l'exemple et calculons l'EQM des 7 modèles

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon = X_{12} \beta_{12} + \varepsilon.$$

Considérons le modèle avec une variable  $X_1$ , nous avons pour la  $\text{tr}(\text{EQM})$ , en nous servant de  $\mathcal{H}_2$  et des propriétés des projecteurs (symétrie, idempotence et trace) :

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{EQM}(X_1 \hat{\beta}_1)) &= \text{tr}(V(X_1 \hat{\beta}_1)) + B(X_1 \hat{\beta}_1)' B(X_1 \hat{\beta}_1) \\ &= \text{tr}(V(P_{X_1} Y)) + \|\mathbb{E}(X_1 \hat{\beta}_1) - X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ &= \sigma^2 \text{tr}(P_{X_1}) + \|\mathbb{E}(P_{X_1}(X_{12} \beta_{12} + \varepsilon)) - X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ &= \sigma^2 + \|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2.\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{EQM}(X_1 \hat{\beta}_1)) &= \sigma^2 + \|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_2 \hat{\beta}_2)) &= \sigma^2 + \|P_{X_2^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_3 \hat{\beta}_3)) &= \sigma^2 + \|P_{X_3^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{12} \hat{\beta}_{12})) &= 2\sigma^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{13} \hat{\beta}_{13})) &= 2\sigma^2 + \|P_{X_{13}^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{23} \hat{\beta}_{23})) &= 2\sigma^2 + \|P_{X_{23}^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{123} \hat{\beta}_{123})) &= 3\sigma^2.\end{aligned}$$

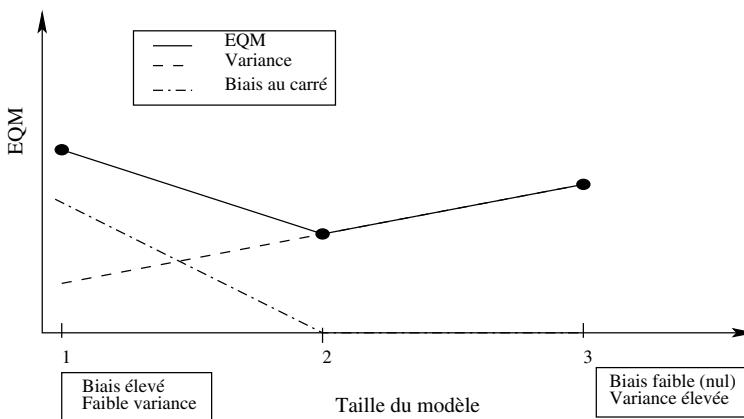
Le choix du modèle ayant la plus petite  $\text{tr}(\text{EQM})$  parmi les sept modèles initiaux revient à analyser la  $\text{tr}(\text{EQM})$  des quatre modèles suivants :

$$\text{tr}(\text{EQM}(X_1 \hat{\beta}_1)), \quad \text{tr}(\text{EQM}(X_2 \hat{\beta}_2)), \quad \text{tr}(\text{EQM}(X_3 \hat{\beta}_3)) \quad \text{et} \quad \text{tr}(\text{EQM}(X_{12} \hat{\beta}_{12})).$$

Supposons maintenant que nous connaissons les autres quantités inconnues et que la plus petite norme soit celle de  $\|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2$ . Il nous faut donc choisir entre

$$\text{tr}(\text{EQM}(X_1 \hat{\beta}_1)) = \sigma^2 + \|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(\text{EQM}(X_{12} \hat{\beta}_{12})) = 2\sigma^2.$$

Afin de choisir le modèle ayant la plus petite  $\text{tr}(\text{EQM})$ , il faut comparer  $\sigma^2$  à  $\|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2$ . Cela sera donc le modèle  $X_1$  ou le modèle  $X_{12}$ , tout dépendra de la valeur de  $\sigma^2$  et de  $\|P_{X_1^\perp} X_{12} \beta_{12}\|^2$ . Nous constatons que selon ce critère nous pouvons éventuellement choisir le modèle 1, c'est-à-dire un modèle un peu faux (le terme de biais) mais plus précis (la variance est plus faible) que le vrai modèle.



**Fig. 6.2.** Compromis biais<sup>2</sup>/variance dans le cas où  $\text{EQM}(1) > 2\sigma^2$ .

Il est en général difficile d'estimer le biais car la valeur du paramètre est inconnue, il est par contre plus facile d'estimer la variance. Nous verrons dans la suite de ce chapitre des procédures pour estimer l'EQM, mais dans un premier temps il semble plus facile de considérer « le frère jumeau » de l'EQM, l'EQMP ou sa trace.

#### 6.2.4 Erreur quadratique moyenne de prévision

L'EQM ou sa trace est un critère classique en statistique, mais il ne fait pas intervenir de nouvelles observations  $Y^*$ . Si l'on souhaite donc évaluer le coût de prévision de ces nouvelles observations  $Y^*$  nous avons la définition suivante.

##### Définition 6.2 (EQMP)

Considérons  $x^* \in \mathbb{R}^p$ , une nouvelle observation, et  $x_\xi^*$  ses composantes correspondant à  $\xi$ . L'erreur quadratique moyenne de prévision est définie par

$$\text{EQMP}(\hat{y}_\xi^p) = \mathbb{E}((x_\xi^{*\prime} \hat{\beta}_\xi - y^*)^2) = \text{EQM}(x_\xi^{*\prime} \hat{\beta}_\xi) + \sigma^2 - 2\mathbb{E}([x_\xi^{*\prime} \hat{\beta}_\xi - x^{*\prime} \beta] \varepsilon^*).$$

*Si  $\varepsilon^*$  n'est pas corrélé avec les  $\varepsilon$ , nous avons alors*

$$\text{EQMP}(\hat{y}_\xi^p) = \text{EQM}(x_\xi^* \hat{\beta}_\xi) + \sigma^2.$$

*Si nous possédons  $n^*$  nouvelles observations  $x^*$  regroupées dans une matrice  $X^*$  nous utilisons la trace de l'EQMP*

$$\text{tr}[\text{EQMP}(\hat{Y}_\xi^p)] = \text{tr}[\text{EQM}(X_\xi^* \hat{\beta})] + n^* \sigma^2 - 2\mathbb{E}((X_\xi^* \hat{\beta} - X^* \beta)' \varepsilon^*).$$

*Si  $\varepsilon^*$  n'est pas corrélé avec les  $\varepsilon$ , nous avons alors*

$$\text{tr}[\text{EQMP}(\hat{y}_\xi^p)] = E \text{tr}[QM(x_\xi^* \hat{\beta}_\xi)] + n^* \sigma^2.$$

- Nous pouvons constater que si les données sur lesquelles se fait la prévision sont indépendantes des données sur lesquelles sont calculées les estimations (deux jeux de données différents), alors l'EQM et l'EQMP sont identiques à la variance de l'erreur près.

Reprendons l'exemple précédent

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon = X_{12} \beta_{12} + \varepsilon$$

et supposons que nous ayons  $n^*$  nouvelles observations concaténées dans la matrice  $X^*$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{EQM}(X_1^* \hat{\beta}_1)) &= (n^* + 1)\sigma^2 + \|P_{X_1^\perp} X_{12}^* \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_2^* \hat{\beta}_2)) &= (n^* + 1)\sigma^2 + \|P_{X_2^\perp} X_{12}^* \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_3^* \hat{\beta}_3)) &= (n^* + 1)\sigma^2 + \|P_{X_3^\perp} X_{12}^* \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{12}^* \hat{\beta}_{12})) &= (n^* + 2)\sigma^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{13}^* \hat{\beta}_{13})) &= (n^* + 2)\sigma^2 + \|P_{X_{13}^\perp} X_{12}^* \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{23}^* \hat{\beta}_{23})) &= (n^* + 2)\sigma^2 + \|P_{X_{23}^\perp} X_{12}^* \beta_{12}\|^2 \\ \text{tr}(\text{EQM}(X_{123}^* \hat{\beta}_{123})) &= (n^* + 3)\sigma^2. \end{aligned}$$

- Si nous appliquons la formule de l'EQMP aux données  $X$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{EQMP}(\hat{Y})) &= \mathbb{E} \|\hat{Y} - Y\|^2 \\ &= \text{tr}(\text{EQM}(X \hat{\beta})) + n\sigma^2 - 2\mathbb{E}(\langle X \hat{\beta} - X \beta, \varepsilon \rangle) \\ &= \text{tr}(\text{EQM}(X \hat{\beta})) + n\sigma^2 - 2\mathbb{E}(\langle X \hat{\beta}, \varepsilon \rangle) \\ &= \text{tr}(\text{EQM}(X \hat{\beta})) + n\sigma^2 - 2\mathbb{E}(\varepsilon' P_X \varepsilon) \\ &= \text{tr}(\text{EQM}(X \hat{\beta})) + n\sigma^2 - 2p\sigma^2. \end{aligned}$$

- Si nous calculons la  $\text{tr}(\text{EQMP})$  théorique des trois modèles, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{EQMP}(\hat{Y}(X_1))) &= \|P_{X_1^\perp} X \beta\|^2 + \sigma^2(n-1) \\ \text{tr}(\text{EQMP}(\hat{Y}(X_{12}))) &= \sigma^2(n-2) \\ \text{tr}(\text{EQMP}(\hat{Y}(X_{123}))) &= \sigma^2(n-3).\end{aligned}$$

La  $\text{tr}(\text{EQMP})$  préconise d'utiliser le modèle ayant le plus de variables explicatives. En fait ce critère n'a pas de sens lorsqu'il est utilisé sur les données qui ont servi à estimer les paramètres.

Nous pouvons maintenant résumer toutes les conclusions tirées au cours de cette section en une démarche à suivre pour la sélection de variables.

## 6.3 La sélection de variables en pratique

### 6.3.1 Deux jeux de données ou beaucoup d'observations

Si nous disposons de deux jeux de données, l'un d'apprentissage  $(X, Y)$  pour estimer le modèle et l'autre de validation  $(X^*, Y^*)$ , nous pouvons estimer l'EQMP en utilisant l'erreur de prévision (ou MSEP)

$$\widehat{\text{tr}}(\text{EQMP}(\hat{Y}_\xi^p)) = \frac{1}{n^*} \|Y_i^* - \hat{Y}_\xi^p\|^2 = \frac{1}{n^*} \|Y^* - X_\xi^* \hat{\beta}_\xi\|^2, \quad (6.2)$$

où  $\hat{\beta}_\xi$  est l'estimateur des coefficients utilisant le jeu de données d'apprentissage uniquement. Nous avons un estimateur de  $\text{tr}(\text{EQMP})$ .

Il suffit donc, pour tous les ensembles  $\xi$  de variables explicatives, de calculer la trace de l'EQM. Les variables sélectionnées  $\xi$  sont celles dont la trace de l'EQM associé est minimale.

Deux problèmes importants sont à noter.

1. Il faut posséder suffisamment d'observations, tant dans le jeu d'apprentissage que dans le jeu de validation. Il faut suffisamment de données pour pouvoir bien estimer dans le jeu d'apprentissage et suffisamment dans le jeu de validation pour avoir une bonne idée du comportement « moyen » du modèle.

De plus, nous avons rarement deux jeux de données. Une possibilité consiste alors à séparer le jeu initial en deux parties, l'une réservée à l'apprentissage, l'autre à la validation. Cela nécessite donc beaucoup d'observations.

Évidemment il n'est pas possible de donner de règle quant à la taille minimum  $n$  requise. De même, pour les tailles respectives  $n_a$  et  $n_v$  des jeux d'apprentissage et de validation, sont souvent énoncées les proportions  $3/4, 1/4$  ou  $1/2, 1/2$  sans aucune véritable justification.

2. Le second problème réside dans l'obligation de calculer la trace de l'EQM pour tous les ensembles  $\xi$  possibles. Cela nécessite de l'ordre de  $2^p$  calculs de la trace de l'EQM. Dès que  $p$  est grand ( $p > 6$ ), cela devient presque impossible. Des algorithmes adaptés sont alors nécessaires mais aucun logiciel, à notre connaissance, n'en propose.

Nous proposons toujours de travailler avec un échantillon d'apprentissage et un échantillon de validation. Sur l'échantillon d'apprentissage, le statisticien choisit des modèles en utilisant les critères et les algorithmes de sélection que nous allons présenter dans les sections suivantes. Ces méthodes sont implémentées dans tous les logiciels. Selon le critère de sélection choisi (AIC, BIC,  $C_p$ , test entre modèles, voir section 6.4) et l'algorithme utilisé, l'utilisateur aura un ou plusieurs modèles candidats. Parmi ce nombre restreint de modèles candidats, il suffit alors d'utiliser l'échantillon de validation pour choisir le modèle qu'il va conserver et étudier. Bien entendu, cette démarche ne permet pas d'envisager tous les modèles, mais elle reste la méthode pratique recommandée dès que cela est possible, c'est-à-dire dès que  $n$  est suffisamment grand.

### 6.3.2 Un seul jeu de données et peu d'observations

En général, le statisticien ne dispose que d'un jeu de données. Quand le nombre  $n$  d'observations est trop faible pour pouvoir séparer le jeu de données en 2 parties, un critère de choix de modèle doit être utilisé. La section suivante discute des critères classiques. Le grand avantage de ces critères réside dans le fait qu'ils sont disponibles dans tous les logiciels de statistiques.

Une autre solution, proche de la méthode de la section précédente, existe. Ici, le nombre d'observations étant trop faible pour avoir suffisamment de données dans le jeu de validation et dans le jeu d'apprentissage, nous séparons le jeu de données en  $B$  blocs disjoints. Chaque bloc possède  $n_v$  observations sauf un dont la taille est ajustée sur les observations restantes ( $n - (B - 1)n_v$ ). Un bloc  $k$  est mis de côté et il sert de jeu de validation. Les autres  $B - 1$  blocs servent d'apprentissage. Sur ces  $B - 1$  blocs restants, on estime, pour tous les ensembles  $\xi$  de variables, les paramètres notés  $\hat{\beta}_\xi$ . On calcule ensuite la trace de l'EQMP sur le  $k^e$  bloc (de validation)

$$\text{tr}(\widehat{\text{EQMP}}^{(k)}(\hat{Y}_\xi^p)) = \frac{1}{n_k} \|Y^{(k)} - \hat{Y}_\xi^p\|^2 = \frac{1}{n_k} \|Y^{(k)} - X_\xi^{(k)} \hat{\beta}_\xi\|^2,$$

où  $\hat{\beta}_\xi$  est l'estimateur des coefficients utilisant les  $B - 1$  blocs d'apprentissage uniquement et  $(X^{(k)}, Y^{(k)})$  sont les données du  $k^e$  bloc. Le  $k^e$  bloc possède  $n_k$  observations (qui vaut en général  $n_v$  sauf pour le dernier bloc). Cette procédure est réitérée pour tous les blocs  $k$  variant entre 1 et  $B$  et on calcule donc pour tous les ensembles  $\xi$  possibles la moyenne  $\sum_{k=1}^B \text{tr}(\widehat{\text{EQMP}}^{(k)}(\hat{Y}_\xi^p))/B$ . Le modèle sélectionné est bien sûr le modèle  $\tilde{\xi}$  qui minimise cette moyenne. La procédure est une procédure de validation croisée de taille  $B$  (*B-fold cross-validation*).

Nous sommes toujours confrontés aux mêmes problèmes, à savoir le choix de  $B$  (et donc de la proportion de l'apprentissage par rapport à la validation). En général, l'ordre de grandeur de  $B$  est 10, si le nombre d'observations par bloc est suffisant. Le second problème réside dans le fait qu'il faille calculer le critère de choix, sur tous les ensembles de variables  $\xi$ . Cette procédure n'étant pas implémentée dans les logiciels, la démarche pratique consiste à sélectionner un petit nombre de modèles candidats par des critères de sélection classique, puis à les comparer par la procédure de validation croisée de taille  $B$ .

## 6.4 Critères classiques de choix de modèles

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser aux méthodes classiques de sélection de modèle. Les principaux critères de choix sont le  $R^2$ , le  $R_a^2$ , le  $C_p$ , l'AIC, le BIC et leurs extensions. D'un autre côté, le test  $F$  entre modèles emboîtés permet de comparer selon une approche de type test classique les modèles entre eux. Quand ceux-ci ne sont pas emboîtés l'un dans l'autre, une approche basée sur des intervalles de confiance peut être utilisée. Cependant cette approche moins répandue (Spjøtvoll, 1972) n'est en général pas implémentée dans les logiciels. Le lecteur intéressé par cette approche pourra consulter la description de Miller (2002).

Nous allons présenter différents critères de choix de modèles et l'appliquer aux données de l'ozone. Nous allons traiter les 50 données fournies en annexe. Il y a donc  $n = 50$  observations, la constante sera toujours dans le modèle et nous avons 9 variables explicatives potentielles. Sur ce jeu de données, nous pouvons analyser 512 ( $2^9$ ) modèles (la constante est dans tous les modèles).

### 6.4.1 Tests entre modèles emboîtés

Si les modèles concurrents sont emboîtés les uns dans les autres, il est alors possible d'utiliser une procédure de test (3.2 p. 63). Notons le modèle  $\xi$  à  $|\xi|$  variables et le modèle  $\xi_{+1}$  correspondant au modèle  $\xi$  auquel on a rajouté une variable supplémentaire. Afin de choisir entre ces deux modèles emboîtés, nous avons la statistique de test suivante (cf. p. 63) :

$$F = \frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi_{+1})}{\hat{\sigma}^2}.$$

Afin que  $F$  suive une loi Fisher, l'estimation de  $\hat{\sigma}^2$  doit suivre une loi du  $\chi^2$  indépendante du numérateur. Classiquement  $\sigma^2$  est estimé de deux manières différentes :

1. Estimation de  $\sigma^2$  par  $\text{SCR}(\xi_{+1})/(n - |\xi| - 1)$ .

L'estimateur utilisé de  $\sigma^2$  est celui provenant du modèle le plus « grand », soit le modèle  $(\xi_{+1})$ . Cette solution est en général utilisée par les logiciels de statistiques ;

2. Estimation de  $\sigma^2$  par  $\text{SCR}(p)/(n - p)$ .

L'estimateur utilisé provient de l'estimateur trouvé pour le modèle complet.

Nous avons donc le théorème suivant.

**Théorème 6.1 (Tests entre modèles emboîtés)**

Soit deux modèles, le modèle  $\xi$  et le modèle  $\xi_{+1}$ . La statistique de test permettant de tester l'hypothèse  $H_0 : \mathbb{E}Y \in \mathcal{M}_{X_\xi}$  contre l'hypothèse  $H_1 : \mathbb{E}Y \in \mathcal{M}_{X_{\xi+1}}$ , est

1. La variance  $\sigma^2$  est estimée par  $\text{SCR}(\xi_{+1})/(n - |\xi| - 1)$ . Si

$$F_1 = \frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi_{+1})}{\text{SCR}(\xi_{+1})} \times (n - |\xi| - 1) > f_{1,n-|\xi|-1}(1 - \alpha)$$

alors le modèle  $\xi$  est repoussé au profit du modèle  $(\xi_{+1})$ , nous rajoutons une variable au modèle.

2. La variance  $\sigma^2$  est estimée par  $\text{SCR}(p)/(n - p)$ . Si

$$F_2 = \frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi_{+1})}{\text{SCR}(p)} \times (n - p) > f_{1,n-p}(1 - \alpha).$$

alors le modèle  $\xi$  est repoussé au profit du modèle  $(\xi_{+1})$ , nous rajoutons une variable au modèle.

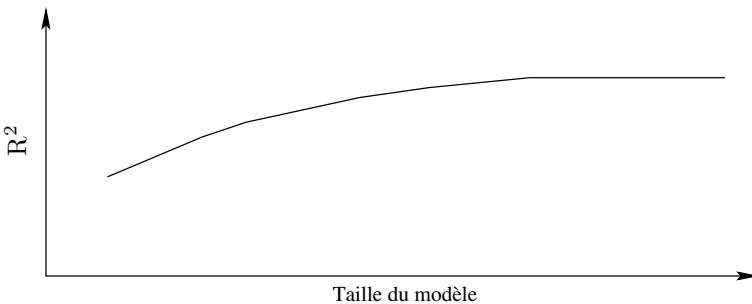
Il est difficile de comparer ces deux manières de procéder. Notons toutefois que  $|\xi_{+1}| < p$  donc  $n - |\xi| - 1 > n - p$ , ce qui implique que  $f_{1,n-p}(1 - \alpha) > f_{1,n-|\xi|-1}(1 - \alpha)$ .

#### 6.4.2 Le $R^2$

Le  $R^2$  est défini via la SCR, en effet

$$R^2(\xi) = \frac{\|\hat{Y}(|\xi|) - \bar{y}\mathbb{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2} = 1 - \frac{\text{SCR}(\xi)}{\text{SCT}}.$$

Il s'agit d'un critère relié à l'estimateur de l'EQMP (i.e.  $\text{SCR}(\xi)$ ) et nous avons donc que la valeur du  $R^2$  augmente toujours avec le nombre de variables  $|\xi|$ . Comparons la variation du  $R^2(\xi)$  obtenu avec les  $\xi$  variables et le  $R^2$  obtenu avec les mêmes  $\xi$  variables plus une autre variable, soit  $R^2(\xi_{+1})$ . Nous avons le graphique général suivant.



**Fig. 6.3.**  $R^2$  théorique.

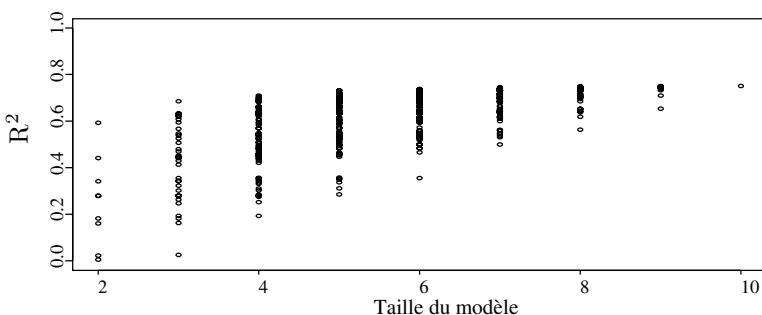
Montrons en effet que le  $R^2$  ne peut pas diminuer :

$$\begin{aligned} R^2(\xi_{+1}) - R^2(\xi) &= \frac{\|P_{X_{\xi+1}}Y\|^2 - \|P_{X_\xi}Y\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2} \\ &= \frac{\|P_{X_\xi}P_{X_{\xi+1}}Y + P_{X_\xi}^\perp P_{X_{\xi+1}}Y\|^2 - \|P_{X_\xi}Y\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2} \\ &= \frac{\|P_{X_\xi}^\perp P_{X_{\xi+1}}Y\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbb{1}\|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Bien entendu le même résultat est obtenu avec la définition du  $R^2$  quand les deux modèles ne contiennent pas la constante (2.3, p. 45).

*En général, il ne faut donc pas utiliser le  $R^2$  comme critère de choix de modèle car ce critère va toujours augmenter avec le nombre de variables. Il peut cependant servir à comparer des modèles ayant le même nombre de variables explicatives.*

Voyons cela sur l'exemple de l'ozone :



**Fig. 6.4.**  $R^2$  pour les 511 modèles possibles de l'exemple de l'ozone.

Nous savons que cette quantité croît avec le nombre de variables incluses dans le modèle et ce résultat se retrouve sur le graphique (fig. 6.4). Le  $R^2$  ne permet pas de choisir entre différents modèles. De manière classique on parle alors d'ajustement de qualité croissante des données : le  $R^2$  augmente, la SCR diminue, donc l'erreur estimée est de plus en plus petite et donc les ajustements  $\hat{Y}$  sont de plus en plus proches de  $Y$ . On ne parle pas de prévision puisqu'on a utilisé les  $Y$  pour estimer  $\hat{Y}$ . Par contre, à taille fixée, le  $R^2$  permet de comparer les modèles entre eux et de sélectionner celui qui donne le meilleur ajustement.

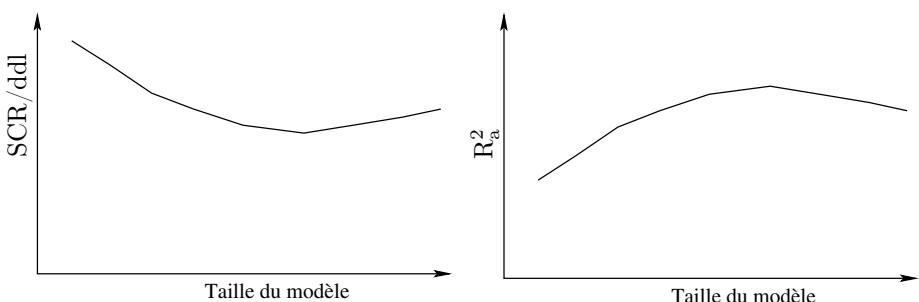
En considérant le graphique 6.4, le meilleur modèle au sens du  $R^2$  est donc celui avec 10 variables. Cependant la valeur du  $R^2$  obtenue pour le meilleur modèle à 5 variables est relativement proche de la valeur du  $R^2$  obtenue avec le modèle complet. L'utilisateur pourra peut-être considérer ce modèle.

#### 6.4.3 Le $R^2$ ajusté

Le  $R^2$  ajusté est défini par

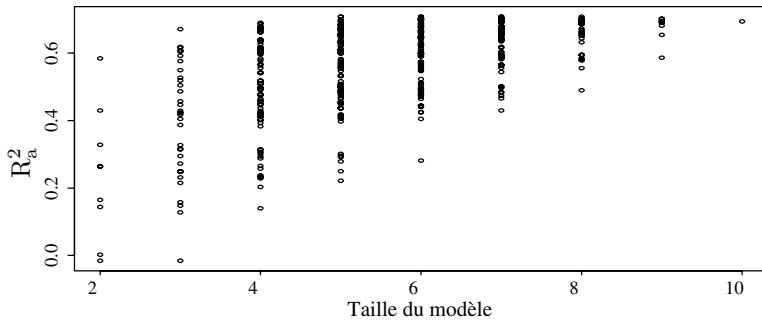
$$\begin{aligned} R_a^2(\xi) &= 1 - \frac{n-1}{n-|\xi|} (1 - R^2(\xi)) \\ &= 1 - \frac{n-1}{n-|\xi|} \frac{\text{SCR}(\xi)}{\text{SCT}} \\ &= 1 - \frac{n-1}{\text{SCT}} \frac{\text{SCR}(\xi)}{n-|\xi|}. \end{aligned}$$

Le  $R_a^2$  est donc fonction des carrés moyens définis comme la somme des carrés divisée par le nombre de degrés de liberté. Le but est de maximiser le  $R_a^2$ , ce qui revient à minimiser  $\text{SCR}(\xi)$  divisée par son degré de liberté. La SCR et  $n - |\xi|$  diminuent lorsque  $|\xi|$  augmente. Le carré moyen résiduel  $\text{CMR}(\xi)$  peut augmenter lorsque la réduction de la SCR, obtenue en ajoutant une variable dans le modèle, ne suffit pas à compenser la perte d'un ddl du dénominateur. Nous obtenons alors en général le graphique suivant pour la  $\text{SCR}/\text{ddl}$  et le  $R_a^2$  ajusté :



**Fig. 6.5.** CMR et  $R_a^2$ .

Voyons maintenant le critère du  $R_a^2$  sur l'exemple de l'ozone :



**Fig. 6.6.**  $R^2$  ajusté pour l'exemple de l'ozone.

Sur le graphique précédent, l'utilisation du  $R_a^2$  nous conduirait à choisir un modèle à 5 ou 6 variables.

#### 6.4.4 Le $C_p$ de Mallows

La définition du  $C_p$  de Mallows (1973) est la suivante.

##### Définition 6.3

*Le  $C_p(\xi)$  d'un modèle à  $\xi$  variables explicatives est défini par*

$$C_p(\xi) = \frac{SCR(\xi)}{\hat{\sigma}^2} - n + 2|\xi|, \quad (6.3)$$

où  $SCR$  est la valeur de la  $SCR(\xi)$  dans le sous-modèle caractérisé par  $\xi$  alors que  $\hat{\sigma}^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ . En général  $\hat{\sigma}^2$  a été estimé dans le modèle complet à  $p$  variables.

##### Remarque

Rappelons (6.1) que si  $P_{X_\xi}$  est non aléatoire

$$\text{tr}(\text{EQM}(\hat{Y}_\xi)) = |\xi|\sigma^2 + \|(I - P_{X_\xi})X\beta\|^2.$$

Calculons l'espérance de la somme des carrés résiduels :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(SCR(\xi)) &= \mathbb{E}(\|Y - \hat{Y}_\xi\|^2) \\ &= \mathbb{E}(\|(I - P_{X_\xi})X\beta + (I - P_{X_\xi})\varepsilon\|^2) \\ &= \|(I - P_{X_\xi})X\beta\|^2 + (n - |\xi|)\sigma^2. \end{aligned}$$

En remplaçant, nous obtenons

$$\text{tr}(\text{EQM}(\hat{Y}_\xi)) = \mathbb{E}(SCR(\xi)) - (n - 2|\xi|)\sigma^2$$

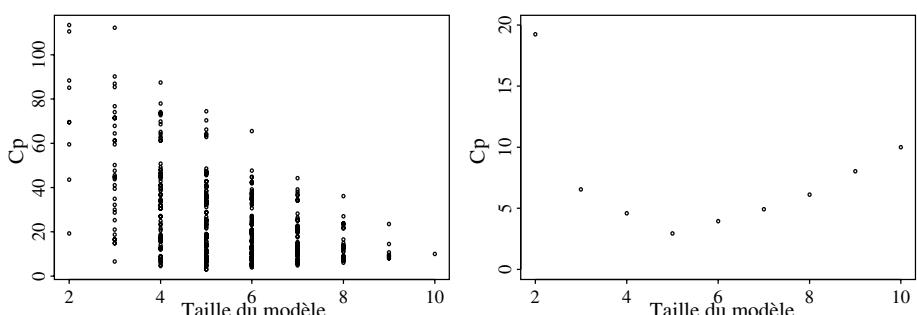
Nous voyons donc que  $\hat{\sigma}^2 C_p$  est un estimateur sans biais de la trace de l'EQM. Apparemment le modèle avec le  $\hat{\sigma}^2 C_p$  le plus faible sera (en moyenne du moins) le modèle avec la  $\text{tr}(\text{EQM})$  la plus faible et donc la  $\text{tr}(\text{EQMP})$  la plus faible.

Cependant, pour que ce précédent calcul d'espérance soit valide, il faut, outre les hypothèses classiques (indépendance du bruit, homoscédasticité et  $X$  fixé) que l'égalité  $\mathbb{E}(P_{X_\xi} Y) = P_{X_\xi} \mathbb{E}(Y)$  soit vérifiée. C'est-à-dire que  $P_{X_\xi}$  est fixe et donc *le choix du modèle  $X_\xi$  ne dépend pas des données sur lesquelles on évalue le  $C_p$* .

Autrement dit, pour que le  $C_p$  ou plus exactement  $\hat{\sigma}^2 C_p$  soit un bon estimateur de l'EQM, il faut que l'estimation des paramètres et le choix des modèles ne dépendent pas de données sur lesquelles on calcule le  $\hat{\sigma}^2 C_p$ . Ce critère est donc un estimateur sans biais uniquement si l'on a au moins deux jeux de données distincts, l'un d'apprentissage sur lequel on estime les coefficients et l'autre de validation sur lequel on calcule les  $C_p$ . Si l'on utilise un seul jeu de données pour sélectionner le modèle et estimer les paramètres, ce qui est l'utilisation traditionnelle du  $C_p$ , l'estimateur du  $C_p$  est biaisé. Ce biais de sélection sera calculé en détail sur un exemple. En conclusion, avec un jeu de données, sélectionner un modèle avec le  $C_p$  ne revient pas à sélectionner avec un estimateur raisonnable de l'EQM.

### Dessiner le $C_p(\xi)$

En général, nous dessinons en abscisse la valeur de  $|\xi|$  et en ordonnée la valeur correspondante de  $C_p(\xi)$  pour tous les modèles. Ce dessin est en général peu lisible et on préfère retenir le meilleur modèle à  $\xi$  variables et dessiner les  $p$  valeurs de  $C_p(\xi)$  en fonction de  $|\xi|$  (fig. 6.7).



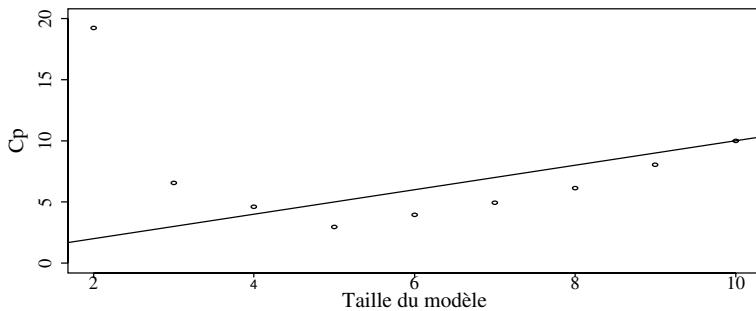
**Fig. 6.7.** Choix du  $C_p$  pour l'exemple de l'ozone, 511 modèles, ou meilleur modèle pour chaque taille possible.

### Choisir le modèle grâce au $C_p(\xi)$ et interpréter

Classiquement il est recommandé de choisir le modèle admettant

$$C_p(\xi) \leq |\xi|.$$

Le choix du modèle *via* le  $C_p(\xi)$  sera le modèle dont la valeur du  $C_p(\xi)$  sera proche de la première bissectrice ( $y = |\xi|$ ).



**Fig. 6.8.** Choix du  $C_p$  pour l'exemple de l'ozone.

Au vu de ce graphique, les modèles admettant plus de 4 variables sont susceptibles d'être sélectionnés.

### Interprétation

Plus le modèle est explicatif, plus la quantité  $SCR(\xi)$  est faible. Cette quantité diminue si l'on ajoute des variables à un modèle donné puisque l'on projette sur des sous-espaces de taille croissante. Le critère  $C_p$  permet donc un équilibre entre un faible nombre de variables ( $|\xi|$  faible) et une  $SCR(\xi)$  faible. Il est possible de généraliser le  $C_p$  en remplaçant le coefficient 2 qui assure la « balance » par une fonction des données notée  $f(n)$  qui soit différente de 2. Si le modèle est correct (si les variables intervenant dans le modèle ont été sélectionnées sans utiliser les données), alors  $SCR(\xi)$  est un estimateur sans biais de  $(n - |\xi|)\sigma^2$  et  $C_p(\xi)$  vaudra approximativement  $|\xi|$ . Cette interprétation n'est valable que si le  $C_p(\xi)$  est calculé avec d'autres données que celles qui permettent le choix de  $\xi$ . A la fin de ce chapitre, une section intitulée « Pour aller plus loin » présente en détail ce problème.

Si nous rajoutons des variables qui n'interviennent pas dans le modèle, la  $SCR$  ne va pas beaucoup diminuer mais  $|\xi|$  va augmenter, nous aurons alors un  $C_p(\xi)$  qui sera plus grand que  $|\xi|$ .

Si nous avons omis des variables importantes, la  $SCR$  sera un estimateur de  $(n - |\xi|)\sigma^2$  et d'une quantité positive. Le  $C_p(\xi)$  sera donc plus grand que  $|\xi|$ .

### 6.4.5 Vraisemblance et pénalisation

Sous l'hypothèse de normalité des résidus, la log-vraisemblance de l'échantillon vaut (section 3.1 p. 53)

$$\log \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|^2.$$

Le calcul de la log-vraisemblance pour le modèle admettant  $|\xi|$  variables vaut alors

$$\log \mathcal{L}(\xi) = -\frac{n}{2} \log \frac{\text{SCR}(\xi)}{n} - \frac{n}{2} \left(1 + \log \frac{2}{\pi}\right).$$

Choisir un modèle en maximisant la vraisemblance revient à choisir le modèle ayant la plus petite SCR. Il faut donc introduire une pénalisation. Afin de minimiser un critère, on travaille avec l'opposé de la log-vraisemblance et les critères s'écrivent en général

$$-2 \log \mathcal{L}(\xi) + 2|\xi|f(n),$$

où  $f(n)$  est une fonction pénalisation dépendant de  $n$ .

#### L'Akaike Information Criterion (AIC)

Ce critère, introduit par Akaike (1973), est défini pour un modèle contenant les variables indiquées par  $\xi$  :

$$\text{AIC}(\xi) = -2 \log \mathcal{L}(\xi) + 2|\xi|.$$

Par définition  $f(n)$  vaut 1. L'AIC est une pénalisation de la log-vraisemblance par deux fois le nombre de paramètres  $|\xi|$ . Nous obtenons une définition équivalente

$$\text{AIC}(\xi) = cte + n \log \frac{\text{SCR}(\xi)}{n} + 2|\xi|$$

L'utilisation de ce critère est simple : il suffit de le calculer pour tous les modèles  $\xi$  concurrents et de choisir celui qui possède l'AIC le plus faible.

#### Le critère Bayesian Information Criterion (BIC)

Le BIC (Schwarz, 1978) est défini comme

$$\text{BIC}(\xi) = -2 \log \mathcal{L}(\xi) + |\xi| \log n = cte + n \log \frac{\text{SCR}(\xi)}{n} + |\xi| \log n.$$

L'utilisation de ce critère est identique à celle de l'AIC et nous pouvons constater qu'il revient aussi à pénaliser la log-vraisemblance par le nombre de paramètres  $|\xi|$  multiplié par une fonction des observations (et non plus 2). Par définition,  $f(n)$  vaut ici  $\log n / 2$ . Ainsi, plus le nombre d'observations  $n$  augmente, plus la pénalisation est faible. Cependant cette pénalisation est en général plus grande que 2 (dès que  $n > 7$ ) et donc le *BIC a tendance à sélectionner des modèles plus petits que l'AIC*.

## D'autres critères

A titre d'exemple, Bozdogan (1987) a proposé  $2f(n) = \log n + 1$ , Hannan & Quinn (1979) ont proposé  $f(n) = c \log \log n$  où  $c$  est une constante plus grande que 1. Il existe de très nombreuses pénalisations dans la littérature mais les deux les plus répandues sont le BIC et l'AIC.

### 6.4.6 Lien entre les critères

Avec la procédure de test, nous conservons le modèle à  $\xi$  variables si

$$\frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi+1)}{\text{SCR}(\xi+1)/(n - |\xi| - 1)} < 4,$$

où 4 est une approximation du fractile  $f_{1,n-|\xi|-1}(1-\alpha)$ . Qu'en est-il des autres critères ?

Commençons par le  $R_a^2$ . Si nous choisissons le modèle à  $\xi$  variables c'est que nous avons

$$R_a^2(\xi) > R_a^2(\xi+1).$$

En récrivant ces termes en fonction des SCR, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\text{SCR}(\xi)}{n - |\xi|} &< \frac{\text{SCR}(\xi+1)}{n - |\xi+1|} \\ \frac{(n - |\xi| - 1) \text{SCR}(\xi)}{\text{SCR}(\xi+1)} &< n - |\xi| - 1 + 1 \\ \frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi+1)}{\text{SCR}(\xi+1)/(n - |\xi| - 1)} &< 1. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc une procédure de type test, mais la valeur seuil ici ne vaut pas  $f_{1,n-|\xi|-1}(1-\alpha)$  mais la valeur 1. L'utilisation du  $R_a^2$  et de la valeur seuil 1 est plus facilement atteinte que la valeur seuil issue du test (car  $f_{1,n-|\xi|-1}(1-\alpha) > 3.84$  en général lorsque  $n - |\xi| - 1$  est grand). La procédure du  $R_a^2$  ajusté conduit à choisir des modèles ayant un nombre de variables plus important qu'avec la procédure des tests.

De la même façon, si nous choisissons le modèle à  $\xi$  variables avec le  $C_p$ , c'est que la relation suivante est satisfaite :

$$C_p(\xi) < C_p(\xi+1).$$

En récrivant ces termes, nous avons

$$\frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi+1)}{\text{SCR}(p)/(n - p)} \leq 2.$$

Le dénominateur du  $C_p$  est calculé avec toutes les variables initiales. Il faudrait comparer alors avec la procédure de test  $F_2$ . Dans ce cas, nous retrouvons

l'observation de la statistique de test  $F$  qui suit une loi  $F(1, n - p)$  et la valeur seuil est choisie arbitrairement égale à 2. Là encore, le  $C_p$  aura tendance à choisir des modèles plus grands que ceux choisis avec un test entre modèles emboîtés et une erreur de première espèce  $\alpha = 5\%$ , mais uniquement si l'on choisit comme estimateur de  $\sigma^2$ , la valeur  $SCR(p)/(n - p)$ .

Pour finir, analysons le résultat obtenu avec un critère de vraisemblance pénalisée. Si nous choisissons le modèle à  $\xi$  variables, nous avons

$$-2 \log \mathcal{L}(\xi) + 2|\xi|f(n) \leq -2 \log \mathcal{L}(\xi_{+1}) + 2|\xi|f(n) + 2f(n).$$

En remplaçant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \log \frac{SCR(\xi)}{n} &\leq \log \frac{SCR(\xi_{+1})}{n} + 2 \frac{f(n)}{n} \\ SCR(\xi) &\leq SCR(\xi_{+1}) \exp \frac{2f(n)}{n} \\ SCR(\xi) &\leq SCR(\xi_{+1}) \left[ \exp \frac{2f(n)}{n} - 1 \right] + SCR(\xi_{+1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\frac{SCR(\xi) - SCR(\xi_{+1})}{SCR(\xi_{+1})/(n - |\xi| - 1)} \leq (n - |\xi| - 1) \left[ \exp \frac{2f(n)}{n} - 1 \right].$$

Si  $2f(n)/n$  est proche de 0, nous obtenons après un développement limité à l'ordre 1

$$\frac{SCR(\xi) - SCR(\xi_{+1})}{SCR(\xi_{+1})/(n - |\xi| - 1)} \leq 2f(n) \left( 1 - \frac{|\xi| + 1}{n} \right).$$

Nous avons alors les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{test} &< 4 \\ \hat{F}_{R_a^2} &< 1 \\ \hat{F}_{C_p} &< 2 \\ \hat{F}_{AIC} &< 2 \left( 1 - \frac{|\xi| + 1}{n} \right) \\ \hat{F}_{BIC} &< \log n \left( 1 - \frac{|\xi| + 1}{n} \right). \end{aligned}$$

En fonction du nombre d'individus  $n$  et du nombre de variables sélectionnées, nous pouvons résumer les critères et la taille du modèle dans le tableau suivant :

**Tableau 6.2.** Comparaison des tailles  $|\xi|$  des modèles sélectionnés selon le critère choisi avec  $n > 7$ .

Critères classiques	Taille $ \xi $ du modèle
TEST ou BIC	faible
AIC	↓
$R_a^2$	forte

Il est délicat d'intégrer le  $C_p(\xi)$  dans ce tableau car lorsque nous avons écrit le  $C_p(\xi)$  sous forme de test, nous avions vu que le dénominateur est calculé avec la  $SCR(p)/(n-p)$ . En supposant que les estimateurs de  $\sigma^2$  (dans un cas  $SCR(p)/(n-p)$  et dans l'autre  $SCR(\xi+1)/(n-|\xi|-1)$ ) soient presque identiques, la borne du  $C_p(\xi)$  vaut 2 et celle de l'AIC vaut  $2(1 - (|\xi| + 1)/n)$ , l'AIC tend à sélectionner des modèles de taille plus grande que le  $C_p$ .

## 6.5 Procédure de sélection

La sélection de modèle peut être vue comme la recherche le modèle optimal, au sens d'un critère choisi, parmi toutes les possibilités. Cela peut donc être vu comme une optimisation d'une fonction objectif (le critère). Pour cela, et à l'image des possibilités en optimisation, on peut soit faire une recherche exhaustive car le nombre de modèles possibles est fini, soit partir d'un point de départ et utiliser une méthode d'optimisation de la fonction objectif (recherche pas à pas).

Remarquons qu'en général trouver le minimum global de la fonction objectif n'est pas garanti dans les recherches pas à pas et que seul un optimum local dépendant du point de départ choisi sera trouvé. Si les variables explicatives sont orthogonales, alors l'optimum trouvé sera toujours l'optimum global.

### 6.5.1 Recherche exhaustive

Lorsque tous les modèles avec  $p$  variables sont possibles, il y a  $2^p$  possibilités et donc cette méthode n'est pas envisageable si  $p$  est grand. Des techniques algorithmiques permettent cependant de minimiser le nombre de calculs à effectuer et permettent d'envisager cette possibilité dans des cas de taille modérée (Miller, 2002).

Remarquons que ce type de recherche n'a aucun sens lorsque l'on souhaite utiliser des tests puisque cette procédure compare uniquement deux modèles emboîtés l'un dans l'autre.

Pour obtenir ce type de recherche avec le logiciel GNU-R, nous utilisons le package `leaps`.

```
library(leaps)
choix <- regsubsets(Y~X,int=T,nbest= ,nvmax= ,method='exh')
resume.choix <- summary(choix)
```

Cette procédure évalue tous les modèles possibles, et conserve les `nbest` (valeur précisée par l'utilisateur), meilleurs modèles pour 1 variable explicative, 2 variables explicatives, ..., `nvmax` (valeur précisée par l'utilisateur) variables explicatives.

Pour obtenir les différents graphiques, nous utilisons les commandes suivantes :

```
taille <- as.real(rownames(resume.choix$wh)+1
```

puis en fonction du critère utilisé :

```
plot(taille,resume.choix$adjr2)
plot(taille,resume.choix$adjr2)
plot(taille,resume.choix$cp)
plot(taille,resume.choix$BIC)
```

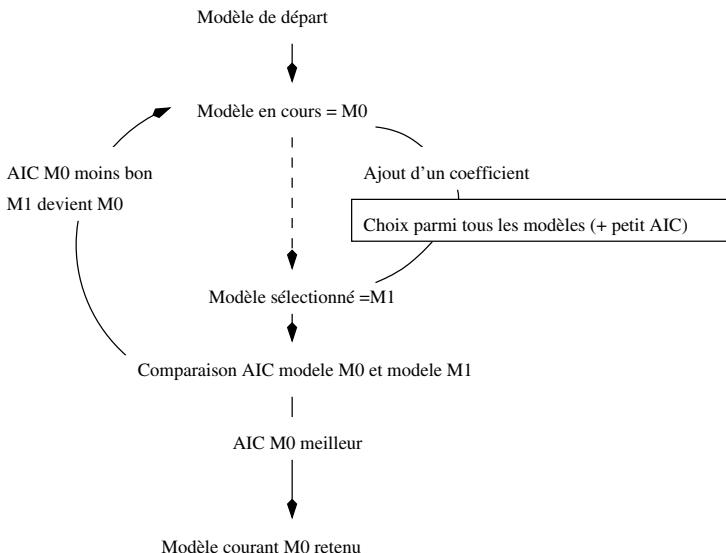
### 6.5.2 Recherche pas à pas

Ce type de recherche est obligatoire pour les tests puisque l'on ne peut tester que des modèles emboîtés. Par contre elle ne permet en général que de trouver un optimum local. Il est bon de répéter cette procédure à partir de différents points de départ. Pour les autres critères, ce type de recherche n'est à conseiller que lorsque la recherche exhaustive n'est pas possible ( $n$  grand,  $p$  grand, etc.).

#### Méthode ascendante (*forward selection*)

A chaque pas, une variable est ajoutée au modèle.

- Si la méthode ascendante utilise un test  $F$ , nous rajoutons la variable  $X_i$  dont la probabilité critique (*fp-value*) associée à la statistique partielle de test de Fisher qui compare les 2 modèles est minimale. Nous nous arrêtons lorsque toutes les variables sont intégrées ou lorsque la probabilité critique est plus grande qu'une valeur seuil.
- Si la méthode ascendante utilise un critère de choix, nous ajoutons la variable  $X_i$  dont l'ajout au modèle conduit à l'optimisation la plus grande du critère de choix. Nous nous arrêtons lorsque toutes les variables sont intégrées ou lorsqu'aucune variable ne permet l'optimisation du critère de choix (voir aussi fig. 6.9).



**Fig. 6.9.** Technique ascendante utilisant l'AIC.

### Méthode descendante (*backward selection*)

- A la première étape toutes les variables sont intégrées au modèle.
- Si la méthode descendante utilise un test  $F$ , nous éliminons ensuite la variable  $X_i$  dont la valeur  $p$ , associée à la statistique partielle de test de Fisher, est la plus grande. Nous nous arrêtons lorsque toutes les variables sont retirées du modèle ou lorsque la valeur  $p$  est plus petite qu'une valeur seuil.
- Si la méthode descendante utilise un critère de choix, nous retirons la variable  $X_i$  dont le retrait du modèle conduit à l'augmentation la plus grande du critère de choix. Nous nous arrêtons lorsque toutes les variables sont retirées ou lorsque qu'aucune variable ne permet l'augmentation du critère de choix.

### Méthode progressive (*stepwise selection*)

Même principe que pour la méthode ascendante, sauf que l'on peut éliminer des variables déjà introduites. En effet, il peut arriver que des variables introduites en début ne soient plus significatives après introduction de nouvelles variables.

Remarquons qu'en général la variable « constante », constituée de 1 et associée au coefficient « moyenne générale », est en général traitée à part et elle est toujours présente dans le modèle.

## 6.6 Exemple : la concentration en ozone

Nous continuons à analyser le jeu de données de l'ozone. Le logiciel permet d'effectuer une recherche exhaustive lorsque le nombre de variables explicatives n'est pas trop important. Nous allons donc effectuer cette recherche. Le logiciel propose également de retenir *via* l'argument `nbest`, un nombre défini par l'utilisateur de modèles ayant 1, puis 2, puis 3 ... variables. Nous fixons ce niveau à 1.

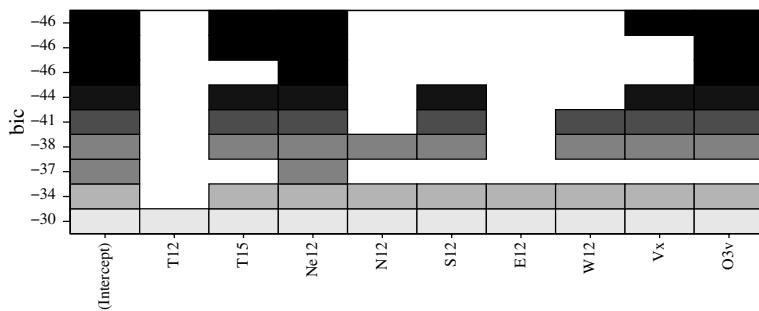
```
recherche.ex <- regsubsets(O3~, int=T, nbest=1, nvmax=10,
method="exhaustive", really.big=T, data=donnee)
```

Pour pouvoir utiliser les résultats de cette procédure, le graphique est l'outil le plus approprié. Le logiciel propose 4 critères de choix : le BIC, le  $C_p$ , le  $R_a^2$  et le  $R^2$ . Nous allons donc dessiner ces résultats avec les 4 critères.

*Minimisation du BIC*

```
plot(recherche.ex, scale="bic")
```

Nous obtenons le graphique suivant :



**Fig. 6.10.** Méthode exhaustive, critère du BIC.

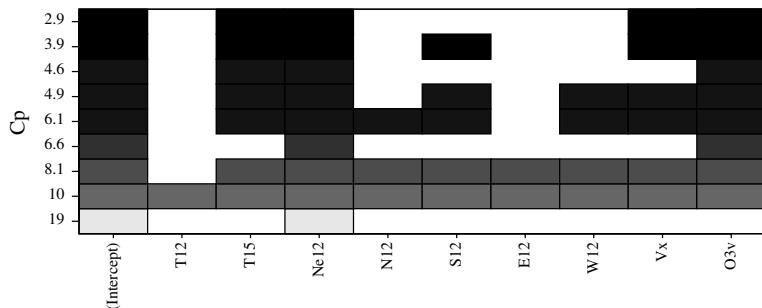
Le modèle retenu alors serait le modèle à 5 variables

$$O3 = \beta_1 + \beta_2 T15 + \beta_3 Ne12 + \beta_4 Vx + \beta_5 O3v + \varepsilon.$$

*Minimisation du  $C_p$*

```
plot(recherche.ex, scale="Cp")
```

Nous obtenons le graphique suivant :



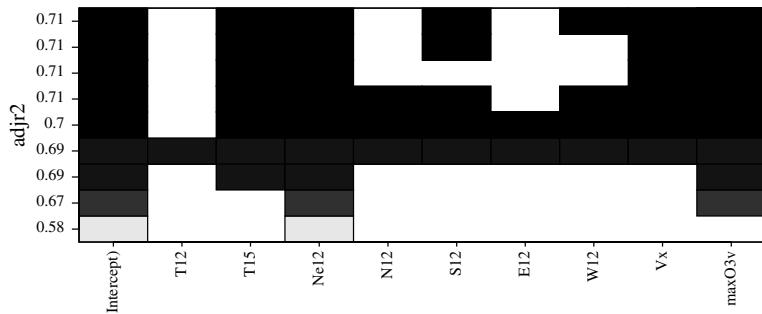
**Fig. 6.11.** Méthode exhaustive, critère du  $C_p$ .

Le modèle retenu est identique au modèle retenu par le critère du BIC.

*Maximisation du  $R_a^2$*

`plot(recherche.ex,scale="adjr2")`

Nous obtenons le graphique suivant :



**Fig. 6.12.** Méthode exhaustive, critère du  $R_a^2$ .

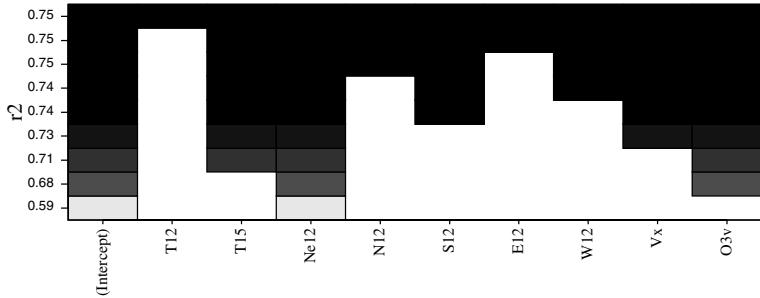
Le modèle retenu admet plus de variables que les modèles retenus avec les critères précédents. Nous avons

$$03 = \beta_1 + \beta_2 T15 + \beta_3 Ne12 + \beta_4 S12 + \beta_5 W12 + \beta_6 Vx + \beta_7 O3v + \varepsilon.$$

*Maximisation du  $R^2$*

`plot(recherche.ex,scale="r2")`

Nous obtenons le graphique suivant :



**Fig. 6.13.** Méthode exhaustive, critère du  $R^2$ .

Comme prévu, nous conservons avec ce critère toutes les variables du modèle.

## 6.7 Sélection et shrinkage

Dans cette partie, afin de simplifier le problème et de bien comprendre les idées, nous allons supposer que les variables explicatives sont orthogonales et de norme unité. La matrice  $X$  est donc une matrice orthogonale et  $X'X = I_p$ . Nous supposons également  $\sigma^2$  connue. L'estimateur des moindres carrés s'écrit alors

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = X'(X\beta + \varepsilon) = \beta + X'\varepsilon,$$

et la somme des résidus

$$\text{SCR} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip} \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j^2.$$

Dans ces cas-là, les procédures de choix de variables récrites en terme de SCR deviennent

$$\frac{\text{SCR}(\xi) - \text{SCR}(\xi+1)}{\text{SCR}(\xi+1)/(n - |\xi| - 1)} = \frac{\hat{\beta}_l^2}{\sigma^2}.$$

Nous conservons la variable  $l$  dans le modèle si son coefficient estimé associé vaut

Test	$ \hat{\beta}_l  > 2\sigma$
$R_a^2$	$ \hat{\beta}_l  > \sigma$
$C_p$	$ \hat{\beta}_l  > \sqrt{2}\sigma$
AIC	$ \hat{\beta}_l  > \sqrt{2 \left( 1 - \frac{ \xi  + 1}{n} \right) \sigma}$
BIC	$ \hat{\beta}_l  > \sqrt{\log n \left( 1 - \frac{ \xi  + 1}{n} \right) \sigma}$ .

Si le coefficient est plus faible que la valeur donnée, la variable n'est pas sélectionnée, cela revient à donner la valeur 0 au coefficient. Si la valeur du coefficient est plus grande que la valeur donnée, la variable est conservée et le coefficient également. Il y a donc un effet de seuillage. Au-dessus d'une certaine valeur, on conserve la valeur, en dessous on met zéro.

Nous avons vu qu'il peut être intéressant d'avoir des estimateurs biaisés (un peu) à condition que leur variance soit plus faible. Lorsque les variables sont orthonormales, nous obtenons une forme simplifiée pour l'estimateur des MC (qui est toujours de variance minimale parmi les estimateurs linéaires sans biais)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{\beta}_i &= \beta_i \\ V(\hat{\beta}_i) &= \sigma^2 \\ \text{EQM}(\hat{\beta}_i) &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Au lieu de seuiller des coefficients, analysons l'effet d'un rétrécissement et considérons les estimateurs

$$\tilde{\beta}_i = \frac{1}{1+\lambda}\hat{\beta}_i,$$

où  $\lambda$  est une constante positive à déterminer. Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\tilde{\beta}_i &= \frac{1}{1+\lambda}\beta_i \\ V(\tilde{\beta}_i) &= \frac{1}{(1+\lambda)^2}\sigma^2 \\ \text{EQM}(\tilde{\beta}_i) &= \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\lambda^2\beta_i^2 + \sigma^2).\end{aligned}$$

En partant de ce constat, James et Stein ont proposé l'estimateur de James-Stein défini par Lehmann & Casella (1998, pp. 359 et 368)

$$\hat{\beta}_{JS,i} = \left(1 - \frac{(p-2)\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2}\right)\hat{\beta}_i.$$

Ils ont démontré que la trace de l'EQM de l'estimateur  $\hat{\beta}_{JS}$  était plus petite que la trace de l'EQM de l'estimateur des MC  $\hat{\beta}$  lorsque  $p$  est plus grand que 2.

Enfin, si l'on prend uniquement la partie positive du premier terme, on obtient un estimateur de James-Stein tronqué

$$\hat{\beta}_{JST,i} = \max\left(0, \left[1 - \frac{(p-2)\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2}\right]\hat{\beta}_i\right),$$

et l'estimateur est encore amélioré en terme d'*EQM*. Cet estimateur combine le rétrécissement et le seuillage. En effet lorsque  $(p - 2)\sigma^2/\|\hat{\beta}\|^2$  est plus grand que 1, le coefficient associé vaut alors 0.

Remarquons que, selon la définition de ces deux estimateurs, ils reviennent tous deux à « rétrécir » les coordonnées de  $\hat{\beta}$  vers 0 d'une même grandeur et donc à contraindre la norme de  $\hat{\beta}$ . En suivant cette idée, il est intéressant d'envisager de contraindre la norme de l'estimation afin d'obtenir des estimateurs possédant un meilleur pouvoir prédictif. Nous avons vu que l'estimateur de James-Stein (tronqué ou non) est un de ces estimateurs. Nous allons détailler d'autres types de contraintes classiques : l'estimateur des moindres carrés sous contrainte de norme, tels que la régression ridge (Hoerl & Kennard, 1970), la régression PLS (*partial least square*), la régression sur composantes principales ou le lasso (Tibshirani, 1996) dans le chapitre 8.

Tout d'abord, si l'on souhaite contraindre la norme du coefficient à estimer, il est naturel de supposer que cette norme est inférieure à un nombre  $\delta$  fixé. Le problème de régression s'écrit alors comme la recherche de  $\tilde{\beta}$  tel que

$$\tilde{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p, \|\beta\|^2 \leq \delta}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2.$$

Cette méthode revient à la régression ridge (Hastie *et al.*, 2001) dont le principe sera exposé à la section 8.1 (p. 198). Géométriquement elle revient à chercher dans un cercle de contrainte de rayon  $\delta$  le coefficient  $\tilde{\beta}$  le plus proche au sens des moindres carrés.

Les méthodes de régression PLS et de régression sur composantes principales, projetant sur un sous-espace de  $\Im(X)$  reviennent aussi à contraindre la norme de  $\hat{Y}$ . Il est aussi possible de montrer que la méthode PLS revient à contraindre la norme de  $\beta$  vers 0 (De Jong, 1995). Ces deux méthodes seront exposées plus en détail au chapitre 8.

A l'image de la régression ridge, il est possible de contraindre non plus la norme euclidienne (au carré)  $\|\beta\|^2$ , mais la norme de type  $l^1$ , à savoir  $\|\beta\|_1 = \sum_{i=1}^p |\beta_i|$ . Si l'on utilise cette contrainte, la méthode, appelée Lasso, revient à trouver le minimum  $\tilde{\beta}$  défini par

$$\tilde{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p, \|\beta\|_1 \leq \delta}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2.$$

Notons enfin que ces méthodes permettent à la fois d'obtenir une prévision fiable (moins variable) et de sélectionner des variables. Classiquement elles sont indiquées lorsque les variables explicatives sont colinéaires ou presque (voir chapitre 8). Cependant nous avons vu que le MSE de la prévision est diminué par l'estimateur de James-Stein, et ce dans tous les cas, lorsque l'hypothèse de normalité est vérifiée. Il semble donc assez cohérent de penser que les estimateurs contraignant la norme du coefficient à estimer  $\beta$  donneront de meilleures prévisions que l'estimateur des moindres carrés et ce dans de nombreux cas de figure.

## 6.8 Exercices

### Exercice 6.1 (Questions de cours)

1. Un modèle à  $p$  variables a été estimé donnant un  $R^2$  noté  $R^2(p)$ . Une nouvelle variable explicative est rajoutée au modèle précédent, après estimation un nouvel  $R^2$  noté  $R^2(p+1)$  est obtenu.
  - A.  $R^2(p+1)$  est toujours plus grand que  $R^2(p)$  ;
  - B.  $R^2(p+1)$  est parfois plus petit parfois plus grand cela dépend de la variable rajoutée ;
  - C.  $R^2(p+1)$  est toujours plus petit que  $R^2(p)$ .
2. Le  $R^2$  permet-il de sélectionner des modèles ?
  - A. Jamais ;
  - B. Toujours ;
  - C. Oui si les modèles admettent le même nombre de variables explicatives.
3. Vous travaillez avec un modèle restreint  $\xi$  par rapport au vrai modèle (des variables sont omises), l'estimateur  $\hat{\beta}_\xi$  de  $\beta_\xi$  dans ce nouveau modèle est :
  - A. Toujours biaisé ;
  - B. Parfois biaisé ;
  - C. Jamais biaisé.

### Exercice 6.2 (Analyse du biais)

Démontrer la proposition 6.1 p. 147.

### Exercice 6.3 ( $\dagger$ Variance des estimateurs)

Démontrer la proposition 6.2 p. 148.

### Exercice 6.4 (Utilisation du $R^2$ )

Soit  $Z_{(n,q)}$  une matrice de rang  $q$  et soit  $X_{(n,p)}$  une matrice de rang  $p$  composée des  $q$  vecteurs de  $Z$  et de  $p-q$  autres vecteurs linéairement indépendants. Nous avons les deux modèles suivants :

$$\begin{aligned} Y &= Z\beta + \varepsilon \\ Y &= X\beta^* + \eta. \end{aligned}$$

Comparer les  $R^2$  dans les deux modèles. Discuter de l'utilisation du  $R^2$  pour le choix de variables.

### Exercice 6.5 (Choix de variables)

Nous considérons le modèle de régression multiple avec  $p$  variables explicatives. Nous avons un modèle avec 4 variables explicatives et avons fait toutes les régressions possibles. En utilisant la première question, choisissez votre modèle. Les différentes méthodes que vous avez présentées donnent-elles le même modèle ?

Voici les résultats numériques avec  $n = 10$  et entre parenthèses la valeur absolue de la statistique de test. Prenez pour fractile de la loi de Student (ddl  $< 10$ ) la valeur 2.3.

	modèle	R <sup>2</sup>	AIC	BIC
M1	$\hat{Y} = -1.24_{(3.3)} + 0.12_{(41.9)}x_1$	.996	-2.18	-2.12
M2	$\hat{Y} = 2.11_{(2.6)} + 0.33_{(15.3)}x_2$	.967	-0.20	-0.14
M3	$\hat{Y} = -38.51_{(9.2)} + 0.52_{(12.5)}x_3$	.952	0.18	0.24
M4	$\hat{Y} = -53.65_{(14.8)} + 0.66_{(18.6)}x_4$	.977	-0.58	-0.52
M12	$\hat{Y} = -1.59_{(2.6)} + 0.13_{(6.9)}x_1 - 0.04_{(0.7)}x_2$	.996	-2.06	-1.97
M13	$\hat{Y} = 1.40_{(0.3)} + 0.12_{(8.4)}x_1 - 0.04_{(0.5)}x_3$	.996	-2.03	-1.94
M14	$\hat{Y} = -8.37_{(1.0)} + 0.10_{(5.6)}x_1 + 0.09_{(0.9)}x_4$	.996	-2.09	-2.00
M23	$\hat{Y} = -13.29_{(1.3)} + 0.21_{(2.6)}x_2 + 0.19_{(1.5)}x_3$	.975	-0.27	-0.18
M24	$\hat{Y} = -31.2_{(3.2)} + 0.14_{(2.4)}x_2 + 0.39_{(3.5)}x_4$	.988	-0.99	-0.90
M34	$\hat{Y} = -58_{(8.21)} - 0.16_{(0.7)}x_3 + 0.87_{(3)}x_4$	.979	-0.46	-0.37
M123	$\hat{Y} = 0.95_{(0.2)} + 0.14_{(5.6)}x_1 - 0.04_{(0.7)}x_2 - 0.03_{(0.5)}x_3$	.996	-1.90	-1.78
M124	$\hat{Y} = -7.4_{(0.8)} + 0.11_{(3.5)}x_1 - 0.03_{(0.5)}x_2 + 0.07_{(0.6)}x_4$	.996	-1.93	-1.80
M134	$\hat{Y} = -12.7_{(1.9)} + 0.1_{(7.5)}x_1 - 0.19_{(2.5)}x_3 + 0.31_{(2.6)}x_4$	.998	-2.59	-2.47
M234	$\hat{Y} = -34.9_{(4.2)} + 0.16_{(3.3)}x_2 - 0.3_{(2)}x_3 - 0.7_{(3.8)}x_4$	.993	-1.30	-1.18
M1234	$\hat{Y} = -13.5_{(1.8)} + 0.1_{(3.7)}x_1 + 0.02_{(0.3)}x_2 - 0.2_{(2.2)}x_3 + 0.34_{(2.3)}x_4$	.998	-2.40	-2.25

## 6.9 Notes : extension du C<sub>p</sub>

Dans la section consacrée au C<sub>p</sub>( $\xi$ ), nous avons insisté sur le caractère non aléatoire de  $P_{X_\xi}$ . Afin que l'égalité  $\mathbb{E}(P_{X_\xi}Y) = P_{X_\xi}\mathbb{E}(Y)$  soit valide, il faut que  $P_{X_\xi}$  soit fixe et donc que *le choix du modèle  $X_\xi$  ne dépende pas des données sur lesquelles on évalue le C<sub>p</sub>*. En d'autres termes, pour que le C<sub>p</sub> ou plus exactement  $\hat{\sigma}^2 C_p$  soit un bon estimateur de l'EQM, il faut que l'estimation des paramètres et le choix des modèles ne dépendent pas des données permettant le calcul de  $\hat{\sigma}^2 C_p$ . Ce critère est donc un estimateur sans biais uniquement si l'on a au moins deux jeux de données distincts, l'un d'apprentissage sur lequel on estime les coefficients et l'autre de validation sur lequel on calcule les C<sub>p</sub>.

Nous savons qu'avec seulement un jeu de  $n$  observations le  $\hat{\sigma}^2 C_p$  n'est pas un estimateur sans biais de l'EQM. Essayons au travers d'un exemple simple de comprendre la procédure de sélection par C<sub>p</sub> et ses problèmes.

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_p$  des variables orthogonales de norme unité. La matrice  $X$  est donc une matrice orthogonale et  $X'X = I_p$ . L'estimateur des moindres carrés s'écrit alors

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = X'(\beta + \varepsilon) = \beta + X'\varepsilon.$$

Si l'hypothèse de normalité des résidus est vérifiée, alors  $X'\varepsilon$  suit une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2 I_n$ . Nous avons, alors  $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 I_n)$ . Pour reformuler le C<sub>p</sub> nous devons nous intéresser à la valeur de SCR( $\xi$ ) :

$$\begin{aligned} \text{SCR}(\xi) &= \|Y - \hat{Y}_\xi\|^2 = \|P_{X^\perp}Y + P_XY - P_{X_\xi}Y\|^2 \\ &= \|P_{X^\perp}Y\|^2 + \|P_XY - P_{X_\xi}Y\|^2 = (n-p)\hat{\sigma}^2 + \|P_XY - P_{X_\xi}Y\|^2 \\ &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + \|P_{X_\xi^\perp}P_XY + P_{X_\xi}P_XY - P_{X_\xi}Y\|^2. \end{aligned}$$

Notons  $\bar{\xi}$  l'ensemble des indices des variables non incluses dans le modèle  $\xi$  (le complémentaire par rapport à  $\{1, 2, \dots, p\}$ ), nous avons en nous rappelant que  $P_X Y = X\hat{\beta}$  et que toutes les variables sont orthogonales :

$$\begin{aligned} \text{SCR}(\xi) &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + \|P_{X_\xi^\perp} X \hat{\beta} + P_{X_\xi} Y - P_{X_\xi} Y\|^2 = (n-p)\hat{\sigma}^2 + \|X_{\bar{\xi}} \hat{\beta}_{\bar{\xi}}\|^2 \\ &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + \hat{\beta}'_{\bar{\xi}} X_{\bar{\xi}}' X_{\bar{\xi}} \hat{\beta}_{\bar{\xi}} \\ &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + \sum_{j \notin \xi} \hat{\beta}_j^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

La définition du  $C_p(\xi)$  (équation 6.3) donne

$$\hat{\sigma}^2 C_p(\xi) = \text{SCR}(\xi) - (n-2|\xi|)\hat{\sigma}^2.$$

En remplaçant dans cette équation la quantité  $\text{SCR}(\xi)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 C_p(\xi) &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + \sum_{j \notin \xi} \hat{\beta}_j^2 - (n-2|\xi|)\hat{\sigma}^2 \\ &= \sum_{j \notin \xi} \hat{\beta}_j^2 + (2|\xi|-p)\hat{\sigma}^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j^2 - \sum_{j \in \xi} \hat{\beta}_j^2 - p\hat{\sigma}^2 + 2|\xi|\hat{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Nous avons  $p\hat{\sigma}^2$  que nous mettons dans la première somme de  $p$  termes et  $2|\xi|\hat{\sigma}^2$  que nous mettons dans la seconde somme de  $|\xi|$  termes. Cela donne

$$\hat{\sigma}^2 C_p(\xi) = \sum_{j=1}^p (\hat{\beta}_j^2 - \hat{\sigma}^2) - \sum_{j \in \xi} (\hat{\beta}_j^2 - 2\hat{\sigma}^2).$$

## Choix de variables, $|\xi|$ fixé

Si nous souhaitons grâce au critère du  $\hat{\sigma}^2 C_p$  sélectionner parmi les ensembles  $\xi$  de cardinal  $|\xi|$  fixé, nous allons donc devoir chercher l'ensemble de  $\text{SCR}(\xi)$  minimum, soit celui dont les normes  $\hat{\beta}_j^2, j \in \xi$ , sont maximales (ou minimales dans le complémentaire). La procédure conduit donc à sélectionner les  $|\xi|$  variables dont les coefficients estimés sont les plus grands en valeur absolue.

## Choix de variables, $|\xi|$ non fixé

Maintenant, nous considérons que le cardinal  $|\xi|$  est variable.

Si ce cardinal est 1, alors nous choisissons la variable dont le coefficient estimé est le plus grand et le  $C_p(1)$  vaut

$$C_p(1) = \sum_{j=1}^p (\hat{\beta}_j^2 - \hat{\sigma}^2) - (\hat{\beta}_{(1)}^2 - 2\hat{\sigma}^2),$$

où  $\hat{\beta}_{(1)}$  est le coefficient associé à la variable admettant la plus grande valeur des  $\hat{\beta}_i$ .

Maintenant, comme le  $|\xi|$  est variable, nous souhaitons savoir si des ensembles  $\xi$  de cardinal 2 conduisent à une diminution du  $C_p$ . Nous savons que l'une des deux variables est la même que celle sélectionnée quand  $|\xi| = 1$ . La deuxième variable est ajoutée au modèle optimal de cardinal  $|\xi| = 1$ . Si l'ajout de cette variable permet une diminution du  $\hat{\sigma}^2 C_p$  alors le modèle optimum de cardinal 2 est préféré à celui de cardinal 1. Le  $C_p(2)$  vaut

$$C_p(2) = \sum_{j=1}^p (\hat{\beta}_j^2 - \hat{\sigma}^2) - (\hat{\beta}_{(1)}^2 - 2\hat{\sigma}^2) - (\hat{\beta}_{(2)}^2 - 2\hat{\sigma}^2).$$

La différence des  $C_p$  vaut

$$\Delta_{1-2} = C_p(1) - C_p(2) = \hat{\beta}_{(2)}^2 - 2\hat{\sigma}^2.$$

Si  $\Delta_{1-2} > 0$ , c'est-à-dire  $\hat{\beta}_{(2)}^2 > 2\hat{\sigma}^2$ , alors le modèle de cardinal 2 est préféré à celui de cardinal 1. De même pour le passage du cardinal 2 à celui du cardinal 3 ; à chaque fois la différence de  $\hat{\sigma}^2 C_p$  diminue car par définition  $\hat{\beta}_{(j)}^2$  diminue quand  $j$  augmente. *Au final, le modèle retenu sera celui dont les carrés des coefficients estimés sont tous plus grands que  $2\hat{\sigma}^2$ .*

## Espérance du $C_p$

Si maintenant nous nous intéressons à ce que donne cette sélection en moyenne, calculons l'espérance de  $\hat{\sigma}^2 C_p$ . Simplifions les calculs en supposant tous les  $\beta_j$  nuls. Nous savons que  $\mathbb{E}(\hat{\beta}_j^2) = \beta_j^2 + \sigma^2 = \sigma^2$  et que  $\hat{\sigma}^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ . Le premier terme  $\sum_{j=1}^p (\hat{\beta}_j^2 - \hat{\sigma}^2)$  a une espérance nulle. Si nous nous intéressons au second terme  $\sum_{j \in \xi} (\hat{\beta}_j^2 - 2\hat{\sigma}^2)$ , nous savons que tous les  $\hat{\beta}_j$  sélectionnés dans  $\xi$  sont tels que  $\hat{\beta}_j^2 > 2\hat{\sigma}^2$ , donc ce terme est toujours positif et donc son espérance aussi. En conclusion,  $\hat{\sigma}^2 C_p$  est donc en moyenne négatif, alors qu'il est censé donner une idée de la qualité d'approximation via l'EQM, qui est une quantité positive ! *Le  $C_p$  va donc sous-estimer en moyenne l'EQM, il sera trop optimiste.*

## Espérance de la taille du modèle $|\xi|$

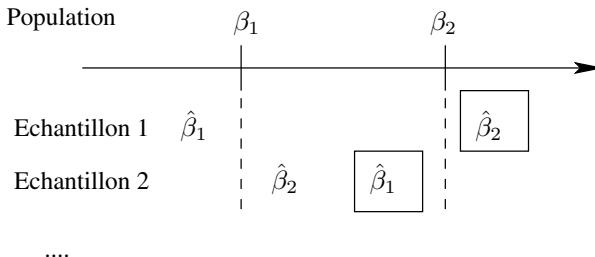
Analysons en moyenne la dimension du modèle sélectionné par  $C_p$ . La taille  $|\xi|$  est le nombre de coefficients  $\hat{\beta}_j$  qui sont tels que  $\hat{\beta}_j^2 > 2\hat{\sigma}^2$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\xi|) &= \sum_{j=1}^p \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\hat{\beta}_j^2 > 2\hat{\sigma}^2\}}) = \sum_{j=1}^p \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\hat{\beta}_j^2 / \hat{\sigma}^2 > 2\}}) \\ &= p \Pr(\hat{\beta}_j^2 / \hat{\sigma}^2 > 2) = p \Pr(|\hat{\beta}_j / \hat{\sigma}| > \sqrt{2}) = 2p \Pr(\hat{\beta}_j / \hat{\sigma} > \sqrt{2}), \end{aligned}$$

avec bien sûr  $\Pr(\cdot)$  dénotant la probabilité. Or  $\hat{\beta}_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $(n-p)\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-p)$  et ces deux variables aléatoires sont indépendantes, donc  $\sigma\hat{\beta}_j/\hat{\sigma} \sim t(n-p)$  et donc  $\mathbb{E}(|\xi|) = 2p t_{\sqrt{2}\sigma}(n-p) > 0$ . Si nous supposons pour fixer les idées que  $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ , nous avons alors une loi normale centrée réduite et  $\mathbb{E}(|\xi|) = 2p z_{\sqrt{2}} \approx 0.16p$ . Rappelons que tous les coefficients  $\beta_j$  sont supposés égaux à 0 et donc que la taille  $|\xi|$  idéale est 0. *La taille sélectionnée est donc en moyenne toujours trop grande.*

## Conclusion

Le  $C_p$ , quand il est utilisé de manière classique sur le même jeu de données que celui utilisé pour estimer les paramètres, conduit à sélectionner les variables associées à de grandes valeurs de paramètres. Lorsque l'on considère la moyenne sur tous les échantillons sur lesquels on applique la procédure de sélection/estimation, les variables sélectionnées seront celles qui auront des valeurs élevées pour leur coefficient. Si l'on applique la même procédure d'estimation, suivie de la sélection du modèle par  $C_p$ , alors en moyenne cela conduit à des modèles dont les coefficients sont trop élevés en valeur absolue. Certains cas de figure vont être exclus par la procédure de sélection. Nous ne pourrons jamais obtenir de modèle avec la variable 1 sélectionnée quand le coefficient estimé est inférieur à celui de la variable 2 (fig. 6.14). L'exclusion de ces cas conduit à des coefficients biaisés vers de plus grandes valeurs absolues. Ce biais est quelquefois appelé biais de sélection (Miller, 2002).



**Fig. 6.14.** Biais de sélection dans un modèle à une variable sélectionnée. Le coefficient encadré est celui de la variable sélectionnée.

Ces conclusions sont valides dans le cas où les variables sont orthogonales. Pour généraliser ces résultats au cas général, l'équation (6.4) devient  $(n-p)\hat{\sigma}^2 + \|P_{X_\xi}^\perp X \hat{\beta}\|^2$ , ce qui conduit, avec la définition de  $\hat{\sigma}^2 C_p$ , à l'équation suivante :

$$\hat{\sigma}^2 C_p = \|P_{X_\xi}^\perp X \hat{\beta}\|^2 + (2|\xi| - p)\hat{\sigma}^2.$$

Ici la matrice  $X$  n'est pas orthogonale, donc les normes des variables explicatives ne sont pas toutes identiques et égales à 1, en d'autres termes les échelles

(ou dispersions) sont différentes. De plus, les variables explicatives sont peut-être corrélées. La sélection par le  $C_p$  va donc favoriser les variables qui mènent à un terme  $\|P_{X_\xi}^\perp X \hat{\beta}\|^2$  faible. Ceci dépend donc de la valeur des coefficients estimés, de la norme de la variable mais aussi des corrélations qu'une variable entretient avec les autres variables. Ainsi prenons le cas où toutes les variables explicatives ont la même norme et deux variables, numérotées par exemple 3 et 4, sont très fortement corrélées. Si l'on en prend une, par exemple la 3, dans l'ensemble  $\xi$ , alors pour la seconde, même si son coefficient  $\hat{\beta}_4$  est élevé par rapport aux autres, la projection dans l'orthogonal de  $\Im(X_\xi)$  de  $X_4\hat{\beta}_4$  sera de norme peu élevée puisque  $X_3$  et  $X_4$  sont très corrélées. Ainsi la variable 4 ne sera pas forcément sélectionnée.

# Chapitre 7

## Moindres carrés généralisés

### 7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons supposé que le modèle de régression

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

était valide et que la variance de  $\varepsilon$  était  $V(\varepsilon) = \sigma^2 I$  (hypothèse  $\mathcal{H}_2$ ).

Cependant, il existe des cas fréquents où cette hypothèse n'est pas satisfaite. Les cas rencontrés dans la pratique peuvent être regroupés en deux catégories :

1. La variance des erreurs n'est pas constante, la matrice de variance de  $\varepsilon$  reste diagonale mais les termes de la diagonale sont différents les uns des autres, on parle alors d'hétéroscédasticité par opposition au cas classique d'homoscédasticité où la variance des erreurs est identique et égale à  $\sigma^2$ ;
2. Les erreurs sont corrélées entre elles, la matrice de variance de  $\varepsilon$  n'est plus diagonale.

Notons la matrice de variance-covariance des erreurs  $\Sigma_\varepsilon = \sigma^2 \Omega$ . Cette matrice  $\Omega$  est symétrique définie positive<sup>1</sup> et de rang  $n$ . Nous allons tout d'abord analyser, en supposant  $\Omega$  connue, l'impact de cette modification sur les propriétés des estimateurs des MC. L'estimateur des MC est toujours défini par  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  et reste sans biais

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(Y) = \beta,$$

mais sa variance a changé et vaut

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'V(Y)X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

et dépend donc de  $\Omega$ . L'estimateur n'est plus de variance minimale parmi les estimateurs linéaires sans biais.

---

<sup>1</sup>Une matrice de variance est toujours définie positive.

De même, nous avons toujours un estimateur  $\hat{\sigma}^2$  de  $\sigma^2$ , mais son biais dépend aussi de  $\Omega$ . En effet :

$$\frac{1}{n-p}\mathbb{E}(\varepsilon' P_X \varepsilon) = \frac{1}{n-p}\mathbb{E}(\text{tr}(P_X \varepsilon \varepsilon')) = \frac{1}{n-p} \text{tr}(P_X \Sigma_\varepsilon) = \frac{\sigma^2}{n-p} \text{tr}(P_X \Omega) = ?$$

L'estimateur  $\hat{\sigma}^2$  ne semble pas adapté puisqu'il est biaisé.

Au cours de ce chapitre, nous allons construire des estimateurs adaptés au problème. Dans un premier temps nous allons nous intéresser au cas le plus simple, celui de l'hétéroscédasticité et obtenir un estimateur par moindres carrés pondérés. Nous généraliserons ensuite au cas où  $\Omega$  est définie positive, donnant ainsi la méthode des moindres carrés généralisés.

## 7.2 Moindres carrés pondérés

Considérons donc le modèle

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 \Omega = \sigma^2 \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2).$$

Une ligne de cette écriture matricielle s'écrit alors

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i.$$

Une méthode pour obtenir un estimateur sans biais de variance minimale consiste à se ramener à  $\mathcal{H}_2$  et à utiliser l'estimateur des MC. Il faudrait donc avoir une variance des résidus constante. En divisant chaque ligne par  $\omega_i$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\omega_i} &= \beta_1 \frac{x_{i1}}{\omega_i} + \dots + \beta_p \frac{x_{ip}}{\omega_i} + \frac{\varepsilon_i}{\omega_i} \\ y_i^* &= \beta_1 x_{i1}^* + \dots + \beta_p x_{ip}^* + \varepsilon_i^*. \end{aligned}$$

La variance de  $\varepsilon^*$  est constante et vaut  $\sigma^2$ . Nous pouvons donc appliquer les moindres carrés ordinaires sur les variables transformées. Nous obtiendrons un estimateur linéaire sans biais de variance minimale.

Ecrivons cette transformation en écriture matricielle. Définissons  $\Omega^{1/2}$  la matrice diagonale des racines carrées des éléments de  $\Omega$ . Nous avons bien évidemment  $\Omega^{1/2}\Omega^{1/2} = \Omega$ . L'inverse de la matrice  $\Omega^{1/2}$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les inverses des termes diagonaux de  $\Omega^{1/2}$ , nous noterons cette matrice  $\Omega^{-1/2}$ , c'est-à-dire

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\omega_n} \end{pmatrix}.$$

L'écriture matricielle de la transformation proposée ci-dessus est donc

$$\begin{aligned} \Omega^{-1/2} Y &= \Omega^{-1/2} X \beta + \Omega^{-1/2} \varepsilon \\ Y^* &= X^* \beta + \varepsilon^*. \end{aligned}$$

Afin de simplifier certaines explications, nous nous référerons à cette modélisation sous le terme « modèle (\*) ». La variance de  $\varepsilon^*$  vaut

$$V(\varepsilon^*) = \sigma^2 \Omega^{-1/2} \Omega \Omega^{-1/2} = \sigma^2 \Omega^{-1/2} \Omega^{1/2} \Omega^{1/2} \Omega^{-1/2} = \sigma^2 I_n.$$

Les hypothèses classiques sont vérifiées, nous pouvons estimer  $\beta$  par la méthode des moindres carrés, nous obtenons

$$\hat{\beta}_\Omega = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y^* = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y.$$

### Théorème 7.1 (Gauss-Markov)

*L'estimateur  $\hat{\beta}_\Omega^*$  est sans biais de variance  $\sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$  et meilleur que tout estimateur linéaire sans biais au sens où sa variance est minimale.*

Nous démontrerons ce théorème dans la partie suivante.

Les valeurs ajustées  $\hat{Y}$  sont obtenues par

$$\hat{Y} = X \hat{\beta}_\Omega.$$

Les résidus valent donc

$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}.$$

### Remarque

En pratique il n'est pas possible d'utiliser cette méthode sans connaître les  $\{\omega_i\}$ . En effet, lors du passage au modèle (\*), nous supposons les  $\{\omega_i\}$  connus. Si les  $n \omega_i$  sont inconnus, nous allons devoir les estimer ainsi que les  $p$  paramètres inconnus du modèle. Il est impossible d'estimer  $n + p$  paramètres avec  $n$  observations seulement. Il existe cependant deux cas pratiques classiques où cette méthode prend tout son sens.

### Cas pratique 1 : régression sur données agrégées par groupes

Supposons que les données individuelles suivent le modèle classique de régression

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n.$$

Cependant ces données ne sont pas disponibles et nous disposons seulement de moyennes de groupe d'observations : moyenne d'un site, moyenne de différents groupes ou autre...

Suite à cette partition en  $I$  classes d'effectifs  $n_1, \dots, n_I$  avec  $n_1 + \dots + n_I = n$ , nous observons les moyennes par classe :

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in C_j} y_i, \quad \bar{x}_{jl} = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in C_j} x_{il}.$$

Bien évidemment, nous n'observons pas les résidus, mais nous noterons

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in C_j} \varepsilon_i.$$

Le modèle devient alors

$$\bar{Y} = \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon} \quad \mathbb{E}(\bar{\varepsilon}) = 0 \quad V(\bar{\varepsilon}) = \sigma^2 \Omega = \sigma^2 \text{diag}\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_I}\right).$$

Les résultats précédents nous donnent

$$\hat{\beta}_\Omega = (\bar{X}'\Omega^{-1}\bar{X})^{-1}\bar{X}'\Omega^{-1}\bar{Y}.$$

Lorsque les données sont agrégées par groupes, il est toujours possible d'utiliser l'estimateur des MC. Cependant, cet estimateur n'est pas de variance minimale et l'estimateur de  $\sigma^2$  obtenu est en général biaisé. Il faut donc utiliser les moindres carrés pondérés et leur estimateur ci-dessus.

Les logiciels ne permettent pas toujours de modifier la matrice de variance-covariance des erreurs, l'objectif de ce second cas pratique est de montrer le lien entre hétéroscédasticité et régression pondérée. La régression pondérée est implémentée dans la plupart des logiciels de statistiques.

### Cas pratique 2 : régression pondérée

Nous connaissons ici  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . Nous venons de voir que, si nous travaillons dans le modèle (\*), nous pouvons appliquer les MC classiques. Le problème de minimisation est donc

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \min \sum_{i=1}^n \left( y_i^* - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}^* \right)^2 \\ &= \min \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{w_i} - \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{x_{ij}}{w_i} \right)^2 \\ &= \min \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2} \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 \\ &= \min \sum_{i=1}^n p_i \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 \end{aligned}$$

Les  $p_i$  sont appelés poids et dans les logiciels ces poids sont en général nommés *weight*. Il suffit donc de remplacer les poids par les  $1/w_i^2$  et d'appliquer le programme de minimisation pour obtenir l'estimateur

$$\hat{\beta}_\Omega = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y,$$

où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}.$$

Nous reviendrons en fin de chapitre sur la régression pondérée.

### 7.3 Estimateur des moindres carrés généralisés

Nous supposons dans cette partie que le modèle est

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (7.1)$$

et que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{H}_1 : \text{rang}(X) = p,$$

$$\mathcal{H}'_2 : \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 \Omega, \text{ avec } \text{rang}(\Omega) = n.$$

L'hypothèse classique  $\mathcal{H}_2$  des MC a été modifiée en  $\mathcal{H}'_2$ . Afin de démontrer aisément pour les estimateurs des moindres carrés généralisés (MCG) toutes les propriétés obtenues pour les estimateurs des MC, à savoir la formule de l'estimateur, son espérance, sa variance, nous allons poser un changement de variables.

La matrice  $\Omega$  est symétrique définie positive, il existe donc une matrice  $P$  inversible de rang  $n$  telle que  $\Omega = PP'$ . Notons que cette matrice  $P$  n'est pas unique car il suffit, par exemple, de prendre une matrice orthogonale  $Q$  et l'on a une nouvelle matrice  $Z = PQ$  qui vérifie  $\Omega = ZZ'$  car  $PP' = PQQ'P' = ZZ'$ . Cependant le choix de  $P$  ne va pas intervenir dans les résultats qui suivent. Posons  $Y^* = P^{-1}Y$  et multiplions à gauche par  $P^{-1}$  l'équation (7.1) :

$$\begin{aligned} P^{-1}Y &= P^{-1}X\beta + P^{-1}\varepsilon \\ Y^* &= X^*\beta + \varepsilon^*, \end{aligned}$$

où  $X^* = P^{-1}X$  et  $\varepsilon^* = P^{-1}\varepsilon$ . Dans ce nouveau modèle appelé modèle (\*), l'hypothèse concernant le rang de  $X^*$  est conservée,  $\text{rang}(X^*) = p$ . Les hypothèses d'espérance et de variance du bruit  $\varepsilon^*$  deviennent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon^*) &= 0 \\ V(\varepsilon^*) &= V(P^{-1}\varepsilon) = \sigma^2 P^{-1}\Omega P = \sigma^2 I. \end{aligned}$$

Le modèle (\*) est donc un modèle linéaire qui satisfait les hypothèses des MC. Pour obtenir toutes les propriétés souhaitées sur le modèle des MCG, il suffira donc d'utiliser les propriétés du modèle (\*) et de remplacer  $X^*$  par  $P^{-1}X$  et  $Y^*$  par  $P^{-1}Y$ .

### 7.3.1 Estimateur des MCG et optimalité

Ainsi l'estimateur des MC du modèle (\*) vaut

$$\hat{\beta} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*,$$

donnant l'estimateur des MCG

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^* Y^* = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y.$$

Nous avons donc la définition suivante.

#### Définition 7.1

*L'estimateur des MC généralisés (ou estimateur d'Aitken) est*

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y.$$

#### Remarques

- Nous pouvons réinterpréter l'estimateur des MCG avec la notion de métrique particulière de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, il existe une multitude de produits scalaires dans  $\mathbb{R}^n$ , chacun issu d'une matrice symétrique définie positive  $M$ , grâce à

$$\langle u, v \rangle_M = u' M v.$$

Avec cette remarque, l'estimateur des MCG peut être défini comme le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  qui minimise la norme  $\|Y - X\alpha\|_{\Omega^{-1}}$ , définie au sens de la métrique  $\Omega^{-1}$ . Donc ce vecteur  $\hat{\beta}_{MCG}$  est tel que  $P_X Y = X \hat{\beta}_{MCG}$ , où  $P_X = X(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1}$  est le projecteur  $\Omega^{-1}$ -orthogonal sur  $\mathfrak{S}(X)$ . Il est bien sûr possible de retrouver ce résultat par le calcul en considérant l'orthogonalité entre  $Y - X \hat{\beta}_{MCG}$  et un élément de  $\mathfrak{S}(X)$ . Pour tout vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle X\alpha, Y - X\hat{\beta}_{MCG} \rangle_{\Omega^{-1}} &= 0 \\ \alpha' X' \Omega^{-1} (Y - X\hat{\beta}_{MCG}) &= 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat ;

- Il est possible d'utiliser comme matrice  $P$  la matrice  $\Omega^{1/2}$  définie par  $U \Lambda^{1/2} V'$  où  $U \Lambda V'$  est la décomposition en valeurs singulières de  $\Omega$ .

Les propriétés concernant l'espérance, la variance de l'estimateur des MCG, i.e. le théorème de Gauss-Markov, peuvent être déduites du modèle (\*) et conduisent au théorème suivant.

#### Théorème 7.2 (Gauss-Markov)

*L'estimateur  $\hat{\beta}_{MCG}^*$  est sans biais de variance  $\sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$  et meilleur que tout estimateur linéaire sans biais, au sens où sa variance est minimale.*

**Preuve**

L'estimateur  $\hat{\beta}_{MCG}$  est bien linéaire. Calculons son biais et sa variance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\beta}_{MCG}) &= \mathbb{E}((X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\beta = \beta \\ \text{V}(\hat{\beta}_{MCG}) &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\text{V}(Y)X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\sigma^2.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que cet estimateur est de variance minimale parmi les estimateurs linéaires sans biais. Considérons un autre estimateur linéaire  $\tilde{\beta} = CY$  sans biais de  $\beta$ . Posons

$$\tilde{\beta} = CPP^{-1}Y = CPY^*.$$

$\tilde{\beta}$  est linéaire en  $Y^*$  et sans biais dans le modèle (\*). Or  $\hat{\beta}_{MCG}$  est l'estimateur des MC dans le modèle (\*), il est donc de variance minimale. La variance de  $\hat{\beta}_{MCG}$  est donc plus faible que la variance de  $\tilde{\beta}$ .

**Remarque**

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}'_2$ , l'estimateur des MC,  $\hat{\beta}_{MC} = (X'X)^{-1}X'Y$ , qui est toujours linéaire en  $y$  et sans biais, n'est plus de variance minimale.

### 7.3.2 Résidus et estimateur de $\sigma^2$

Les résidus sont définis par  $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta}_{MCG}$ . Remarquons qu'à l'image du vrai bruit où nous avons  $\varepsilon^* = P^{-1}\varepsilon$ , nous avons pour l'estimation  $\hat{\varepsilon}^* = P^{-1}\hat{\varepsilon}$ .

Un estimateur  $\sigma^2$  est donné par

$$\hat{\sigma}_{MCG}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\beta}_{MCG}\|_{\Omega^{-1}}^2}{n-p}.$$

**Proposition 7.1**

L'estimateur  $\hat{\sigma}_{MCG}^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

**Preuve**

$$\begin{aligned}(n-p)\hat{\sigma}_{MCG}^2 &= \langle Y - X\hat{\beta}_{MCG}, Y - X\hat{\beta}_{MCG} \rangle_{\Omega^{-1}} \\ &= (Y - X\hat{\beta}_{MCG})'\Omega^{-1}(Y - X\hat{\beta}_{MCG}) \\ &= (PP^{-1}(Y - X\hat{\beta}_{MCG}))'\Omega^{-1}(PP^{-1}(Y - X\hat{\beta}_{MCG})) \\ &= (Y^* - X^*\hat{\beta}_{MCG})'P'\Omega^{-1}P(Y^* - X^*\hat{\beta}_{MCG}) \\ &= \hat{\varepsilon}^{*\prime}\hat{\varepsilon}^*.\end{aligned}$$

Dans le modèle (\*),  $\hat{\sigma}_{MCG}^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ , d'où le résultat.

### 7.3.3 Hypothèse gaussienne

Nous supposons dorénavant que les résidus suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2\Omega$ . Nous avons alors les propriétés classiques suivantes (dont la démonstration consiste à se ramener au modèle (\*)) et à faire comme pour les MC).

#### Proposition 7.2

- i)  $\hat{\beta}_{MCG}$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\beta$  et de variance  $\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$ ,
- ii)  $\hat{\sigma}_{MCG}^2$  vérifie  $(n-p)\hat{\sigma}_{MCG}^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-p}^2$ ,
- iii)  $\hat{\beta}_{MCG}$  et  $\hat{\sigma}_{MCG}^2$  sont indépendants.

Nous pouvons aussi tester une hypothèse linéaire quelconque.

#### Théorème 7.3

*Soit un modèle de régression à p variables  $Y = X\beta + \varepsilon$  satisfaisant  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Nous souhaitons tester dans le cadre de ce modèle la validité d'une hypothèse linéaire quelconque  $H_0: R\beta = r$ , avec le rang de  $R$  égal à  $q$ , contre  $H_1: R\beta \neq r$ . Soit  $\mathfrak{S}_0$  le sous-espace de  $\mathfrak{S}_X$  de dimension  $(p-q)$  engendré par la contrainte  $R\beta = r$  (ou  $H_0$ ) et  $\mathfrak{S}_X$  le sous-espace de dimension  $p$  associé à  $H_1$ .*

*Pour tester ces deux hypothèses nous utilisons la statistique de test  $F$  :*

$$F = \frac{\|r - R\hat{\beta}_{MCG}\|_{[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}}^2}{\|Y - X\hat{\beta}_{MCG}\|_{\Omega^{-1}}^2} \frac{n-p}{q},$$

*qui sous  $H_0$  suit la loi  $\mathcal{F}_{q,n-p}$ . L'hypothèse  $H_0$  sera repoussée en faveur de  $H_1$  si l'observation de la statistique  $F$  est supérieure à  $f_{q,n-p}(1-\alpha)$ , la valeur  $\alpha$  étant la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ou erreur de première espèce.*

Les applications sont identiques à celles rencontrées en régression ordinaire et l'on peut citer par exemple les tests de Student de nullité d'un coefficient ou les tests de Fisher de nullité simultanée de  $q$  coefficients.

### 7.3.4 Matrice $\Omega$ inconnue

Dans les problèmes rencontrés la matrice  $\Omega$  est souvent inconnue. Il faut donc l'estimer puis remplacer dans les calculs  $\Omega$  par son estimateur  $\hat{\Omega}$ . Cependant, si nous n'avons aucune information sur  $\Omega$ , il est impossible d'estimer les termes de  $\Omega$  car il faut estimer  $(n^2 - n)/2$  termes non diagonaux et  $n$  termes diagonaux. Il est cependant possible d'estimer  $\Omega$  dans certains cas particuliers :

- $\Omega$  diagonale de forme particulière (voir 7.2, p. 181) ;
- $\Omega$  admet une expression particulière paramétrable avec seulement quelques paramètres ( $\sigma^2, \theta$ ) à estimer.

En règle générale, pour estimer  $\theta$ , on maximise la vraisemblance  $\mathcal{L}(\beta, \sigma^2, \theta)$ . Cependant nous allons détailler un premier exemple classique où l'estimation de  $\theta$  est conduite par une procédure beaucoup plus simple.

## Corrélation temporelle

Considérons le modèle

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

où l'erreur est supposée suivre un processus autorégressif  $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$  avec  $0 < \rho < 1$  et où  $\text{Cov}(\eta_i, \eta_j) = \sigma^2\delta_{ij}$ . La matrice de variance  $\Omega$  des erreurs  $\varepsilon$  s'écrit alors

$$\Omega = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est donc fonction de deux paramètres inconnus,  $\sigma^2$  et  $\rho$ . Le calcul de son inverse donne

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1+\rho^2 & -\rho \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous venons de calculer  $\Omega^{-1}$  dans ce cas précis. Afin de calculer l'estimateur d'Aitken de  $\beta$ , il faut estimer  $\Omega^{-1}$  et donc estimer  $\rho$ . Pour pouvoir estimer  $\rho$ , il faudrait disposer des  $\varepsilon_t$  et ce n'est évidemment pas le cas.

Dans la pratique, nous calculons  $\hat{\beta}_{MC} = (X'X)^{-1}X'Y$ , et calculons les résidus  $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta}_{MC}$ . Nous supposons ensuite que  $\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + \eta_t$ , nous pouvons donc estimer  $\rho$  par les MC, cela nous donne

$$\hat{\rho}_{MC} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}.$$

A partir de cet estimateur, nous estimons  $\Omega$  par  $\hat{\Omega}$  puis appliquons l'estimateur d'Aitken :

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}Y.$$

### Remarque

Cet estimateur a été calculé en deux étapes (*two stages*), estimation des résidus par MC puis, à partir des résidus estimés, calcul de  $\beta_{MCG}$ . Cet estimateur est appelé  $\hat{\beta}_{TS}$  pour *two stages*. Un autre estimateur peut être trouvé en itérant ce processus jusqu'à convergence, l'estimateur est alors qualifié simplement d'itéré (*iterated*).

## Corrélation spatiale

Revenons à l'exemple tiré du livre de Upton & Fingleton (1985) : explication du nombre de plantes endémiques observées par trois variables : la surface de l'unité de mesure, l'altitude et la latitude. Nous avons vu au chapitre sur les résidus qu'une structuration spatiale semblait présente. Nous allons donc introduire dans les résidus  $\varepsilon$  une dépendance entre sites. Nous considérons donc le modèle

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

où

$$\varepsilon = \rho M\varepsilon + \eta, \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n), \quad (7.2)$$

où  $M$  est une matrice *connue* de dépendance entre sites avec  $M_{ii} = 0$  et définie par la distance en miles entre sites grâce à

$$M_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{j=1}^n D_{ij}}$$

où les termes de la matrice  $D$  sont définis par

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d(i,j)^2} & \text{si } d(i,j) < 187.5 \text{ miles,} \\ 0 & \text{si } d(i,j) \geq 187.5 \text{ ou si } i \text{ ou } j \text{ est une île} \end{cases}$$

où  $d(i,j)$  est la distance en miles entre le site  $i$  et le site  $j$ .

Lorsque l'on réécrit cette équation pour un site  $i$ , nous avons

$$\varepsilon_i = \rho \sum_{j \neq i, j=1}^n M_{ij} \varepsilon_j + \eta_i,$$

l'erreur du modèle est la somme d'une erreur classique  $\eta_i$  et des erreurs aux autres sites. Rappelons que l'erreur n'est pas uniquement l'erreur de mesure en soit, mais contient tout ce qui n'est pas modélisé dans la moyenne. Nous avons donc une autorégression des résidus de manière simultanée. Ce modèle est souvent noté SAR pour *simultaneous autoregressive*. Nous pouvons tirer de (7.2) que

$$\begin{aligned} (I_n - \rho M)\varepsilon &= \eta \\ \varepsilon &= (I_n - \rho M)^{-1}\eta = A^{-1}\eta. \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse, la variable  $\eta$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ , la variable  $\varepsilon$  suit une loi multinormale d'espérance nulle et de variance  $\Omega = \sigma^2 A^{-1} A'^{-1}$ . La vraisemblance s'écrit alors

$$\mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2, \rho) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y - X\beta)' \Omega^{-1} (Y - X\beta) \right\},$$

et la log-vraisemblance s'écrit à une constante près

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2}(Y - X\beta)' \Omega^{-1} (Y - X\beta) \\ &= -n \log \sigma + \frac{1}{2} \log |A|^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (Y - X\beta)' A'A (Y - X\beta).\end{aligned}$$

En dérivant la log-vraisemblance et en annulant les dérivées au point  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})$  nous pouvons exprimer  $\hat{\beta}$  en fonction de  $(\hat{\sigma}^2, \hat{\rho})$

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}Y \\ &= (X'\hat{A}'\hat{A}X)^{-1}X'\hat{A}'\hat{A}Y.\end{aligned}$$

Comme  $\hat{A} = I_n - \hat{\rho}M$ ,  $\hat{\beta}$  est une fonction de  $\hat{\rho}$  uniquement. Si nous connaissons  $\hat{\rho}$  nous connaissons  $\hat{\beta}$ .

Ensuite nous pouvons faire de même pour le paramètre  $\sigma$  et son estimation est égale à

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (Y - X\hat{\beta})'\hat{A}'\hat{A}(Y - X\hat{\beta}).$$

Nous en déduisons qu'une fois estimé  $\rho$  par  $\hat{\rho}$ , nous pouvons déterminer  $\hat{\beta}$  puis  $\hat{\sigma}$ . Nous pouvons donc récrire la vraisemblance comme fonction uniquement de  $\rho$  en remplaçant  $(\beta, \sigma)$  par  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma})$  puisque nécessairement, à l'optimum, ils seront de cette forme. Nous avons donc la log-vraisemblance, dite concentrée, qui s'écrit comme

$$\begin{aligned}h(\rho) &= -\frac{n}{2} \log \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \log |A|^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} (Y - X\hat{\beta})' A'A (Y - X\hat{\beta}) \\ &= -\frac{n}{2} \log \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \log |A|^2 - \frac{n\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}^2} \\ &= -n \log Y'(I - X(X'\hat{A}'\hat{A}X)^{-1}X'\hat{A}'\hat{A})'\hat{A}'\hat{A}(I - X(X'\hat{A}'\hat{A}X)^{-1}X'\hat{A}'\hat{A})Y \\ &\quad + \frac{1}{2} \log |A|^2 + cte.\end{aligned}$$

Cette fonction peut être optimisée par un algorithme de minimisation sous GNU-R en utilisant les commandes suivantes :

```
n <- nrow(don)
X <- cbind(rep(1,n),data.matrix(don[,-1]))
y <- data.matrix(don[,1])
concentre <- function(rho,MM,nn,yy,XX) {
  AA <- diag(nn)-rho*MM
  PP <- AA%*%(diag(nn)-XX%*%
    solve(crossprod(AA%*%XX))%*%t(XX)%*%crossprod(AA))%*%yy
  res <- 0.5*nn*log(crossprod(PP))-0.5*(log(det(crossprod(AA))))
  return(res)
}
resconc <- optimize(concentre,c(-1,1),MM=M,nn=n,yy=y,XX=X)
```

Ensuite les paramètres estimés sont obtenus grâce aux commandes suivantes :

```
rhoconc <- resconc$minimum
A <- diag(n)-rhoconc*M
betaconc <- solve(crossprod(A%*%X))%*%t(X)%*%crossprod(A)
            %*%(as.matrix(don[, "nbe.plante"]))
sigmaconc <- sqrt(as.vector(crossprod(A%*%
            (as.matrix(don[, "nbe.plante"]) - X%*%betaconc))))/n)
```

Nous obtenons alors le tableau suivant :

**Tableau 7.1.** Estimation selon un modèle linéaire avec résidus SAR.

	$\sigma$	$\rho$	coef cst	surface	altitude max.	latitude
Valeur	135	0.754	-856.6	0.148	0.102	26.9
Ecart-type	19.1	0.133	382	0.0378	0.0246	11.5

Si nous souhaitons des intervalles de confiance, nous pouvons utiliser la théorie du maximum de vraisemblance (e.g. Scheffé, 1959, p. 423) et approximer un intervalle de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  par

$$IC_\alpha(\hat{\theta}_j) = [\hat{\theta}_j - u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_j}; \hat{\theta}_j + u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_j}]$$

où  $\hat{\theta} = (\hat{\sigma}, \hat{\rho}, \hat{\beta}')'$ ,  $u_{1-\alpha/2}$  représente le quantile de niveau  $(1 - \alpha/2)$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_j}^2$  est égal à  $[I(\hat{\theta})]_{jj}^{-1}$ , où  $[I(\hat{\theta})]_{jj}^{-1}$  est l'élément  $(j, j)$  de l'inverse de la matrice d'information de Fisher, c'est-à-dire l'inverse de  $-\mathbb{E}(d^2\mathcal{L}/d\theta^2)$  évalué au point  $\hat{\theta}$ .

En notant  $\{\lambda_i\}$  les valeurs propres de  $A$ , et en notant que  $|A| = \prod_i (1 - \rho \lambda_i)$ , nous avons après quelques calculs qui sont détaillés dans Upton & Fingleton (1985)

$$\frac{I(\theta)}{\sigma^2} = \begin{bmatrix} 2n & 2\sigma tr(MA^{-1}) & 0 \\ 2\sigma tr(MA^{-1}) & \sigma^2 tr(MA^{-1}MA^{-1}) + \sum_i \frac{\sigma^2 \lambda_i^2}{(1 - \rho \lambda_i)^2} & 0 \\ 0 & 0 & (X'A'AX)^{-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ainsi, grâce à la fonction suivante,

```
ecarttype <- function(rhoo, sigmaaa, XX, MM, vprr) {
  AA <- diag(nrow(MM))-rhoo*MM
  V=sigmaaa^2*solve(rbind(cbind(matrix(c(2*nrow(MM), 2*sigmaaa*
    sum(diag(MM%*%solve(AA))), 2*sigmaaa*sum(diag(MM%*%solve(AA),
    sigmaaa^2*sum(diag(t(MM%*%solve(AA))%*%MM%*%solve(AA)))
    +sigmaaa^2*sum(vprr^2/(1-rhoo*vprr)^2)), 2, 2), matrix(0, 2, 4)),
```

```

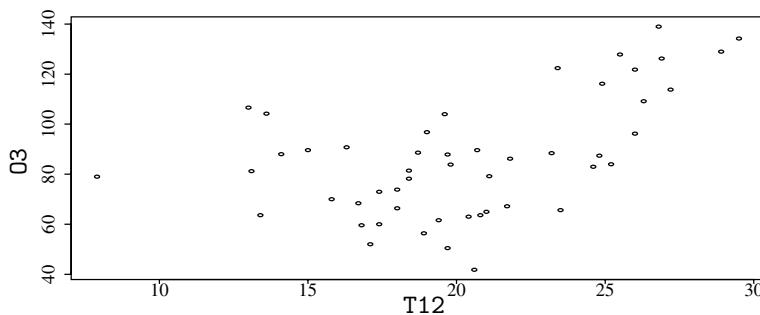
cbind(matrix(0,4,2),crossprod(AA%*%XX)))
return(sqrt(diag(V)))
}

```

nous avons les écarts-types des paramètres figurant au tableau 7.1.

## 7.4 Extension des moindres carrés pondérés : la régression locale

Dans cette section, nous allons revenir sur la régression pondérée et ses possibles extensions. Nous allons traiter cette extension *via* l'exemple de l'ozone et de la température.



**Fig. 7.1.** 50 données journalières de T12 et O3.

Afin de faciliter la suite de cette section, nous classons les données de température et de concentration en ozone par ordre croissant de la température. Cela permet alors de dire que le premier couple de mesure correspond au premier point (7.9,79) et ainsi de suite jusqu'au 50<sup>e</sup>. Ce classement s'obtient facilement sous GNU-R

```

ind=order(T12)
T12o=T12[ind]
O3o=O3[ind]

```

Nous allons effectuer une régression constante pondérée, c'est-à-dire que nous voulons estimer  $\beta_1$  à partir de

$$\hat{\beta}_1 = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n p_i (y_i - \beta_1)^2.$$

La solution est (cf. exercice en fin de chapitre)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i}.$$

Si tous les poids sont égaux, nous retrouvons bien pour  $\hat{\beta}_1$  la valeur de la moyenne des  $Y_i$ .

Nous pensons que l'ozone est fonction de la température, en terme de modèle, nous écrivons

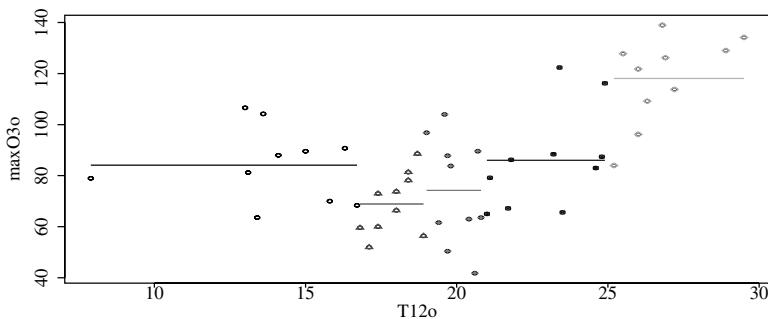
$$Y_i = f(T12_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $f$  peut être une fonction non linéaire.

La première approximation que nous pouvons faire est d'approcher cette fonction inconnue par une fonction en escalier. Nous avons 50 points, imaginons que nous faisons 5 régressions constantes avec les 10 premiers points (les poids correspondants vaudront 1 pour les 10 premières observations puis 0 pour les suivantes), puis les 10 suivantes... Les commandes pour effectuer ces régressions sont

```
reg1=lm(O3o~1,weight=c(rep(1,10),rep(0,40)))
reg2=lm(O3o~1,weight=c(rep(0,10),rep(1,10),rep(0,30)))
reg3=lm(O3o~1,weight=c(rep(0,20),rep(1,10),rep(0,20)))
reg4=lm(O3o~1,weight=c(rep(0,30),rep(1,10),rep(0,10)))
reg5=lm(O3o~1,weight=c(rep(0,40),rep(1,10)))
```

et nous obtenons alors un estimateur en escalier de la fonction  $f$ .



**Fig. 7.2.** Estimation par morceaux.

Nous avons effectué 5 régressions pondérées en choisissant les poids en fonction de la valeur  $x$  que prend la variable T12. Ces poids dans un premier temps prennent la valeur 0 ou 1.

Prenons le 10<sup>e</sup> point, il va servir à la première régression mais pas à la seconde. Une façon naturelle de remédier à cette constatation consiste alors à effectuer plus de régressions pondérées et à trouver une méthode « intelligente » pour affecter des poids.

En chaque point  $x$  appartenant à l'étendue de la variable explicative, nous effectuons une régression pondérée dont les poids vont dépendre de la valeur

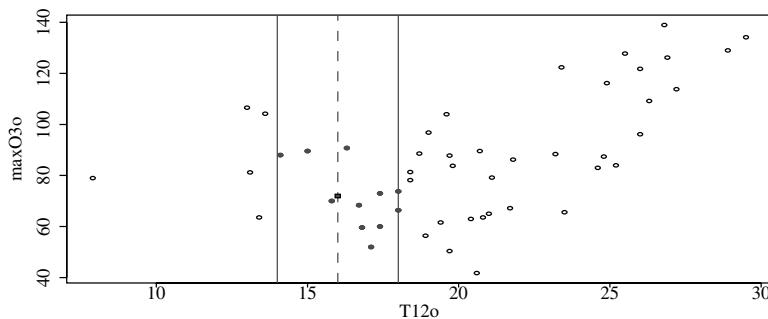
$x$ . Par exemple, les points dont les  $x_i$  sont proches de  $x$  vont être affectés d'un poids 1, les autres 0. Nous avons alors des poids qui dépendent de  $x$  que nous notons  $p_i(x)$ . Nous effectuons alors une régression pondérée et obtenons ainsi  $\hat{\beta}_1(x)$ . Nous effectuons cela pour un grand nombre de valeurs  $x$ , puis traçons la courbe passant par les points  $(\hat{\beta}_1(x))$ .

En général, les poids sont calculés grâce à la fonction

$$p_i(x) = K\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

où  $K$  appelé **noyau** est en général une densité symétrique et  $h$  est un paramètre fixé qui permet à l'utilisateur de contrôler le caractère **local** des poids. Ce paramètre est appelé la **fenêtre**.

Prenons le cas d'un noyau uniforme  $K(x) = \mathbb{1}_{\{-1/2,1/2\}}(x)$ . Représentons les données que nous utilisons au point  $x = 16$  avec une fenêtre  $h$  valant 2. Nous allons prendre tous les points situés dans l'intervalle  $[14; 18]$ . En effectuant une régression pondérée avec des poids valant 1 pour les points dont la valeur de la température est comprise dans l'intervalle, nous obtenons  $\hat{\beta}_1(16) = 71.96$ .



**Fig. 7.3.** Points pris en compte pour calculer la fonction de régression au point 16.

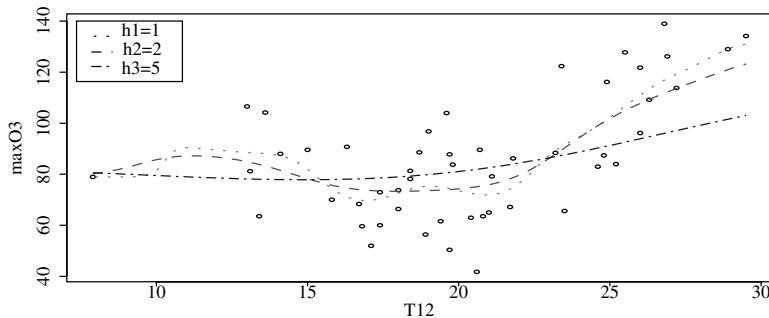
Le choix de ce noyau n'est pas très adapté. En effet, des points  $T12_i$  situés dans la bande mais éloignés de  $x$  auront le même poids qu'un point de la bande proche de  $x$ . Le noyau utilisé en général est la densité gaussienne

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Pour une fenêtre de taille donnée, nous effectuons alors des régressions locales en différents  $x$ , nous obtenons des  $\hat{\beta}_1(x)$  que nous relions ensuite pour obtenir un tracé de l'estimateur de la fonction  $f$ . Nous obtenons alors l'estimateur de Nadaraya-Watson

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_i Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}{\sum_i K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}.$$

Pour l'exemple de l'ozone, voici le tracé des estimateurs de  $f$  avec le noyau gaussien et trois fenêtres différentes



**Fig. 7.4.** Estimation non paramétrique de la fonction de régression.

## 7.5 Exercices

### Exercice 7.1 (Questions de cours)

1. Nous utilisons les moindres carrés généralisés car l'hypothèse suivante n'est pas satisfaite (cocher la bonne réponse) :
  - A.  $\mathcal{H}_1$  le rang du plan d'expérience ;
  - B.  $\mathcal{H}_2$  l'espérance et la variance des résidus ;
  - C.  $\mathcal{H}_3$  la normalité des résidus.
2. La matrice de variance de  $\varepsilon$  est  $\Omega$ . L'estimateur d'Aitken a une variance (cocher la bonne réponse) que la variance de l'estimateur des MC :
  - A. plus petite ;
  - B. plus grande ;
  - C. les variances ne peuvent pas être comparées.
3. En estimation non paramétrique, si la fenêtre utilisée est petite, l'estimateur obtenu, en général,
  - A. varie beaucoup ;
  - B. ne varie pas ;
  - C. il n'y a pas de rapport entre la variation de l'estimateur et la taille de la fenêtre.

### Exercice 7.2 (Régression pondérée)

Nous voulons effectuer une régression pondérée, c'est-à-dire que nous voulons minimiser

$$\hat{\beta}_{pond} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 p_i,$$

où  $p_i$  est un réel positif (le poids).

1. Afin de trouver  $\hat{\beta}_{pond}$ , trouver un changement de variable dans lequel le critère à minimiser s'écrit comme les moindres carrés classiques avec les nouvelles variables  $X^*$  et  $Y^*$ .
2. En appliquant le changement de variable précédent, trouver l'estimateur  $\hat{\beta}_{pond}$ .
3. Montrer que lorsque la seule variable explicative est la constante, la solution est

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i}.$$

4. Retrouver un estimateur connu si les  $p_i$  sont constants pour  $i = 1, \dots, n$ ?

### Exercice 7.3 (Estimateur de Nadaraya-Watson)

Nous souhaitons effectuer une régression constante locale, cela revient à minimiser

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1)^2 p_i(x),$$

où

$$p_i(x) = K\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$

Montrer que l'estimateur de  $\beta_1(x)$  est

$$\hat{\beta}_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i p_i(x)}{\sum_{i=1}^n p_i(x)}.$$

### Exercice 7.4 (†Polynômes locaux)

Il est souvent préférable d'effectuer une régression linéaire locale à la place d'une régression constante. Cela revient alors à minimiser

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 - \beta_2(X_i - x))^2 p_i(x),$$

où

$$p_i(x) = K\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$

Montrer que l'estimateur de  $\beta_1(x)$  est

$$\hat{\beta}_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i q_i(x)}{\sum_{i=1}^n q_i(x)},$$

où

$$\begin{aligned} q_i(x) &= p_i(x)(S_2 - (X_i - x)S_1) \\ S_1 &= \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)(X_i - x) \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)(X_i - x)^2. \end{aligned}$$

Indication : écrire  $(X'\Omega^{-1}X)$  en fonction de  $S_1$  et  $S_2$ .

# Chapitre 8

## Régression biaisée

Nous avons vu au chapitre 2 que la régression linéaire reposait sur deux hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , à savoir :

- $\mathcal{H}_1 : \text{rang}(X) = p,$
- $\mathcal{H}_2 : \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n.$

La non-vérification de l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$  avait conduit aux moindres carrés généralisés (voir chapitre 7). Nous allons maintenant traiter le cas où  $\mathcal{H}_1$  n'est plus vérifiée. Cela revient à dire que  $X'X$  a son déterminant de nul et donc qu'elle n'est plus inversible. Nous étendrons l'étude au cas où le déterminant de  $X'X$  est si proche de 0 que nous pourrons le considérer comme nul.

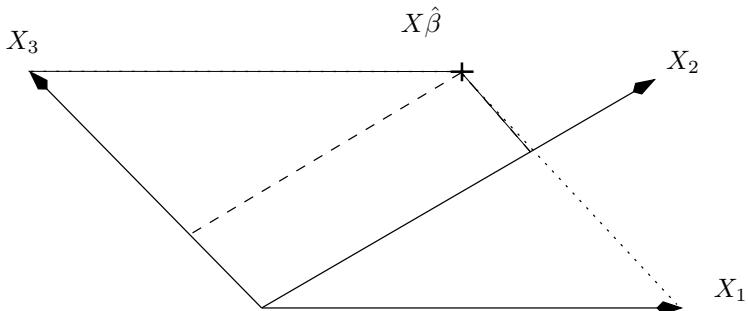
Pratiquement, le cas où  $\text{rang}(X) < p$  se présente dans les deux situations suivantes :

- $n < p$ , le nombre de variables est supérieur au nombre d'observations ;
- $n \geq p$  mais  $\{X_1, \dots, X_p\}$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci correspond à une (ou plusieurs) variable(s) linéairement(s) redondante(s), c'est-à-dire

$$\exists j \quad : \quad X_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i X_i.$$

De manière pratique, on énonce souvent ce dernier cas ou un cas assez voisin  $X_j \approx \sum_{i \neq j} \alpha_i X_i$  avec la phrase suivante, « les variables (expliquantes) sont très corrélées (empiriquement) », même s'il ne s'agit pas à proprement parler de corrélation, puisque la corrélation empirique simple ne concerne que deux variables (voir exercice 8.2).

Remarquons que si les colonnes de  $X$  sont linéairement dépendantes (ou si  $\text{rang}(X) < p$ ), alors la matrice  $(X'X)$  n'est pas inversible et la relation donnant  $\hat{\beta}$  n'a plus de sens. Nous pouvons toujours projeter  $Y$  sur  $\mathfrak{I}(X)$  mais  $\hat{Y}$  n'admet plus une décomposition unique sur les colonnes de  $X$  (fig. 8.1).



**Fig. 8.1.** Décomposition de  $\hat{Y}$  dans  $\mathfrak{S}(X)$ , nous avons  $\hat{Y} = 1 \times X_1 + 1 \times X_3 = 2/3 \times X_2 + 1/3X_3$ .

Nous sommes en présence, pour le même  $\hat{Y}$ , d'une infinité de  $\hat{\beta}$ , les coefficients ne sont pas uniques et le modèle n'est pas identifiable. De plus, puisque  $V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ , la précision des estimateurs va diminuer dès que  $X'X$  va se rapprocher d'une matrice non inversible. Pour que les estimations aient un sens et soient précises, il sera donc nécessaire d'utiliser des méthodes adaptées à la déficience de rang.

## 8.1 Régression ridge

La matrice  $X'X$  est une matrice semi-définie positive, ses valeurs propres sont donc positives ou nulles. Lorsque le déterminant de  $X'X$  est nul (ou proche de 0), nous avons une ou des valeurs propres de  $X'X$  nulles (ou proches de 0). En notant  $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$  les valeurs propres de  $X'X$  et en les ordonnant  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_p \geq 0$ , nous avons qu'à partir d'un certain rang  $r$ , la valeur propre  $\lambda_r = 0$  (ou  $\lambda_r \approx 0$ ). Si par contre les valeurs propres (chacune associée à un certain vecteur propre) étaient plus grandes, alors le déterminant, qui est le produit des valeurs propres, serait différent de 0.

Un résultat d'algèbre linéaire indique que  $X'X$  et  $(X'X + \kappa I_p)$  ont les mêmes vecteurs propres mais des valeurs propres différentes, à savoir  $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$  et  $\{\lambda_j + \kappa\}_{j=1}^p$  respectivement (cf. exercice 8.4). Ainsi, si l'on revient à la définition de  $\hat{\beta}$ , remplacer  $(X'X)^{-1}$  par  $(X'X + \kappa I)^{-1}$  permettrait d'augmenter toutes les valeurs propres et donc celles qui sont (quasi) nulles et d'obtenir un vecteur de coefficient  $\hat{\beta}$  unique et stable.

Cette méthode, appelée régression ridge, a été proposée par Hoerl & Kennard (1970) et elle consiste à utiliser comme estimateur :

$$\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa) = (X'X + \kappa I)^{-1}X'Y,$$

où  $\kappa$  est une constante positive à déterminer. Cela constitue le point le plus délicat de cette méthode. Si  $\kappa \rightarrow \infty$ , alors  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa) \rightarrow 0$ ; mais pour toute valeur finie de  $\kappa$ ,  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa)$  est non nul. Si par contre  $\kappa \rightarrow 0$ , alors  $\hat{\beta}_{\text{ridge}} \rightarrow \hat{\beta}$ .

Remarquons que si  $X$  est orthogonale, alors par définition  $X'X = I$  et donc la définition de la régression ridge revient à diviser  $\hat{\beta} = X'Y$  l'estimateur des MC par  $(1 + \kappa)$  et donc à « diminuer » les coefficients d'une même valeur, à l'image de l'estimateur de James-Stein (6.7 p. 172).

### 8.1.1 Équivalence avec une contrainte sur la norme des coefficients

Cette méthode équivaut à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p, \|\beta\|^2 \leq \delta}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2. \quad (8.1)$$

Pour résoudre ce problème sous contrainte, nous sommes en présence de deux cas (Miller, 2000). Le premier est simplement que le minimum sans contrainte (i.e.  $\hat{\beta}$  l'estimateur des MC) réalise la contrainte donc que  $\|\hat{\beta}\|^2 \leq \delta$ . Dans ce cas la solution sous contrainte est la même que celle sans contrainte :  $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$ . Ce cas n'a pas d'intérêt puisque l'on se retrouve dans le cadre des MC. Si par contre  $\delta$  est « petit » et tel que  $\|\hat{\beta}\|^2 > \delta$ , il nous faut calculer l'estimateur obtenu. Pour cela, nous introduisons le lagrangien du problème

$$\mathcal{L}(\beta, \tau) = \|Y - X\beta\|^2 - \tau(\|\beta\|^2 - \delta).$$

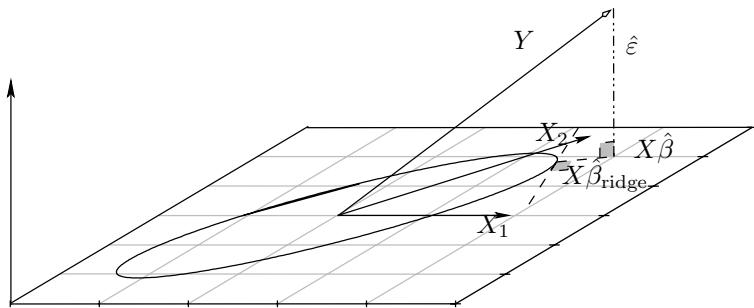
Une condition nécessaire d'optimum est donnée par l'annulation de ses dérivées partielles au point optimum  $(\hat{\beta}_{\text{ridge}}, \tilde{\tau})$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} -2X'(Y - X\hat{\beta}_{\text{ridge}}) + 2\tilde{\tau}\hat{\beta}_{\text{ridge}} &= 0 \\ \|\beta_{\text{ridge}}\|^2 - \delta &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

A partir de la première équation, nous retrouvons l'estimateur ridge  $\hat{\beta}_{\text{ridge}} = (X'X + \tilde{\tau}I)^{-1}X'Y$  qui est forcément un optimum du problème. Afin de calculer la valeur de  $\tilde{\tau}$ , pré-multiplions (8.2) à gauche par  $\hat{\beta}'_{\text{ridge}}$ , cela donne  $\tilde{\tau} = (\hat{\beta}_{\text{ridge}}X'Y - \hat{\beta}'_{\text{ridge}}X'X\hat{\beta}_{\text{ridge}})/\delta$  et remplaçons  $\delta$  par  $\|\hat{\beta}_{\text{ridge}}\|^2$ . On peut également vérifier que ce couple est bien un minimum de la fonction en remarquant que le hessien<sup>1</sup> est bien une matrice symétrique de la forme  $A'A$ , donc semi-définie positive.

Géométriquement, la régression ridge revient à chercher dans une boule de  $\mathbb{R}^p$  de rayon  $\delta$ , le coefficient  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  le plus proche au sens des moindres carrés. D'un point de vue géométrique, en nous plaçant dans l'espace des observations  $\mathbb{R}^n$ , l'image de la sphère de contrainte par  $X$  est un ellipsoïde de contrainte. Puisque l'ellipsoïde est inclus dans  $\mathfrak{S}(X)$ , dans le cas où  $\delta$  est « petit », le coefficient optimum  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  est tel que  $X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  est la projection de  $X\hat{\beta}$  sur cet ellipsoïde de contrainte (voir fig. 8.2). Dans le cas contraire où  $\|\hat{\beta}\|^2 \leq \delta$ ,  $\hat{\beta}$  est dans ou sur l'ellipsoïde et donc sa projection reste égale à  $\hat{\beta}$ .

<sup>1</sup>Matrice de dérivée seconde de la fonction.



**Fig. 8.2.** Contrainte sur les coefficients et régression ridge :  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  représente l'estimateur ridge et  $\hat{\beta}$  représente l'estimateur des MC.

### 8.1.2 Propriétés statistiques de l'estimateur ridge $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$

Revenons aux définitions des estimateurs ridge et MC :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{ridge}} &= (X'X + \kappa I)^{-1}X'Y \\ \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y.\end{aligned}$$

En pré-multippliant la seconde égalité à gauche par  $X'X$ , nous avons  $X'Y = X'X\hat{\beta}$ , cela donne alors

$$\hat{\beta}_{\text{ridge}} = (X'X + \kappa I)^{-1}X'X\hat{\beta}.$$

Cette écriture permet de calculer facilement les propriétés de biais et de variance de l'estimateur ridge. Le calcul de l'espérance de l'estimateur ridge donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= (X'X + \kappa I)^{-1}(X'X)\mathbb{E}(\hat{\beta}) \\ &= (X'X + \kappa I)^{-1}(X'X)\beta \\ &= (X'X + \kappa I)^{-1}(X'X + \kappa I - \kappa I)\beta \\ &= \beta - \kappa(X'X + \kappa I)^{-1}\beta.\end{aligned}$$

Le biais de l'estimateur ridge vaut donc

$$B(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) = -\kappa(X'X + \kappa I)^{-1}\beta. \quad (8.3)$$

En général cette quantité est non nulle, l'estimateur ridge est biaisé. En moyenne sur toutes les expériences possibles, l'estimateur ridge ne sera pas égal au coefficient  $\beta$ . Cependant, même si nous perdons de la précision en moyenne, nous pouvons espérer que les variations autour du vrai paramètre soient plus faibles

dans le cas de l'estimateur ridge que dans le cas de l'estimateur des MC. Calculons la variance de l'estimateur ridge

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= \text{V}((X'X + \kappa I)^{-1}X'Y) \\ &= (X'X + \kappa I)^{-1}X' \text{V}(Y)X(X'X + \kappa I)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X + \kappa I)^{-1}X'X(X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

L'estimateur ridge est biaisé, ce qui constitue un handicap par rapport à l'estimateur des MC. Par contre sa variance fait intervenir  $(X'X + \kappa I)^{-1}$  et non pas  $(X'X)^{-1}$ . Or l'introduction de  $\kappa I$  permet d'augmenter les valeurs propres de  $(X'X + \kappa I)$ , donc la variance sera plus faible.

Après avoir calculé le biais et la variance de cet estimateur, nous allons calculer son EQM (cf. p. 148) et le comparer à celui de l'estimateur des MC :

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X'X)^{-1} \\ \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= \mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{ridge}})\mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{ridge}})' + V(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) \\ &= \kappa^2(X'X + \kappa I)^{-1}\beta\beta'(X'X + \kappa I)^{-1} \\ &\quad + \sigma^2(X'X + \kappa I)^{-1}X'X(X'X + \kappa I)^{-1} \\ &= (X'X + \kappa I)^{-1}[\kappa^2\beta\beta' + \sigma^2(X'X)](X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned}$$

Il n'est pas aisés de comparer deux matrices, aussi nous prendrons une mesure de la qualité globale *via* la trace. Lorsque nous considérons la trace de la matrice de l'EQM nous avons

$$\text{tr}[\text{EQM}(\hat{\beta})] = \sigma^2 \text{tr}((X'X)^{-1}) = \sigma^2 \left( \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \right),$$

où  $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$  sont les valeurs propres de  $X'X$ . Comme certaines de ces valeurs propres sont nulles ou presque nulles, la trace de l'EQM est donc infinie ou très grande. Nous pouvons montrer que la trace de cette matrice de l'EQM de l'estimateur ridge (voir exercice 8.5) est égale à

$$\text{tr}[\text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}})] = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2\lambda_i + \kappa^2[P'\beta]_i^2}{(\lambda_i + \kappa)^2},$$

où  $X'X = P \text{diag}(\lambda_i)P'$ .

Cette dernière équation donne la forme de l'EQM en fonction du paramètre de la régression ridge  $\kappa$ . Nous pouvons trouver une condition suffisante sur  $\kappa$  (voir exercice 8.5), condition indépendante des variables explicatives,

$$\kappa \leq \frac{2\sigma^2}{\beta'\beta},$$

qui permet de savoir que la trace de l'EQM de l'estimateur ridge est plus petite que celle de l'estimateur des MC. Autrement dit, quand  $\kappa \leq 2\sigma^2/\beta'\beta$ ,

la régression ridge est plus précise (dans l'estimation des paramètres) que la régression ordinaire, au sens de la trace de l'EQM pour les paramètres. Cependant, cette condition dépend de paramètres inconnus  $\beta$  et  $\sigma^2$  et elle n'est donc pas utilisable pour choisir une valeur de  $\kappa$ .

### 8.1.3 La régression ridge en pratique

#### Centrage et réduction

A la différence de la régression classique, où les variables sont en général conservées telles que mesurées, il est d'usage de centrer et réduire les variables explicatives. Une variable centrée-réduite  $\tilde{X}_j$  issue de la variable  $X_j$  s'écrit

$$\tilde{X}_j = (X_j - \bar{X}_j \mathbb{1}_n) / \hat{\sigma}_j,$$

où  $\bar{X}_j$  est la moyenne empirique de  $X_j$  (i.e.  $\sum_{i=1}^n X_{ij}/n$ ) et  $\hat{\sigma}_j^2$  une estimation de la variance (par exemple  $\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2/n$ ).

En général, la valeur de  $\beta$  dépend de l'échelle de mesure de la variable explicative associée :  $\beta$  sera différent si la variable est mesurée en gramme ou en kilo. Rappelons que la régression ridge constraint la norme au carré de  $\beta$  ( $\|\beta\|^2$ ) à être inférieure à une valeur  $\delta$  (voir équation (8.1) p. 199). Lors du calcul de la norme, afin de ne pas pénaliser ou favoriser un coefficient, il est souhaitable que chaque coefficient soit affecté de manière « semblable ». Une manière de réaliser cet équilibre consiste à centrer et réduire toutes les variables.

Le coefficient associé à la variable  $\mathbb{1}_n$ , appelé coefficient constant (ou *intercept* en anglais) est un coefficient qui joue un rôle particulier. Il permet au modèle envisagé de se situer autour de la moyenne de  $Y$ , de localiser le problème. Il n'est donc pratiquement *jamais inclus* dans la contrainte de norme. Les variables  $X$  sont déjà centrées (car centrées-réduites), l'usage consiste à centrer  $Y$  qui est remplacée par  $Y - \bar{Y} \mathbb{1}_n$ . Toutes les variables étant centrées, il ne sert à rien d'introduire la constante dans le modèle (voir exercice 8.8). De même on peut remplacer la variable à expliquer  $Y$  par la variable centrée-réduite correspondante  $\tilde{Y}$ .

A  $\kappa$  fixé, nous obtenons un estimateur ridge donné par

$$\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa) = (\tilde{X}' \tilde{X} + \kappa I)^{-1} \tilde{X}' \tilde{Y}.$$

Afin de retrouver les valeurs ajustées, nous calculons

$$\hat{Y}_{\text{ridge}}(\kappa) = \hat{\sigma}_Y^2 \left[ \tilde{X} \hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa) \right] + \bar{Y} \mathbb{1}_n.$$

#### Choix de $\tilde{\kappa}$

Ensuite il faut choisir la valeur « optimum » de  $\kappa$ , valeur notée  $\tilde{\kappa}$  (ou la valeur de  $\delta$ ). En général cette étape est pratiquement impossible à réaliser *a priori*. La valeur  $\tilde{\kappa}$  sera choisie grâce aux données, elle sera donc stochastique.

**Méthode graphique.** Une première méthode consiste à tracer un diagramme d'évolution des coefficients  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa)$  en fonction de  $\kappa$ . Un diagramme similaire existe, utilisant non plus en abscisses  $\kappa$ , mais le nombre effectif de paramètres

$$\text{tr}(\tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X} + \kappa I)^{-1}\tilde{X}') = \sum_{i=1}^p \frac{d_j^2}{d_j^2 + \kappa},$$

où  $d_j^2$  représente la  $j^{\text{e}}$  valeur propre de  $\tilde{X}'\tilde{X}$ . Rappelons que pour la régression classique à  $p$  variables (et donc  $p$  paramètres), nous avons  $\hat{Y} = X(X'X)^{-1}X'Y$  et la trace de  $P_X = X(X'X)^{-1}X'$  vaut  $p$ , le nombre de paramètres. En généralisant, le nombre effectif de paramètres peut être vu comme la trace de l'opérateur qui permet de passer de  $Y$  à  $\hat{Y}$ . Cet opérateur est  $P_X$  dans le cas de la régression et  $H^*(\kappa) = (\tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X} + \kappa I)^{-1}\tilde{X}')$  dans le cas de la régression ridge. La démonstration de cette égalité figure en exercice 8.4.

La valeur de  $\tilde{\kappa}$  est alors choisie comme la valeur la plus petite avant laquelle tous les coefficients « plongent » vers 0. Ce choix est évidemment éminemment subjectif.

**Critères analytiques.** Il est possible de choisir de manière plus analytique la valeur de  $\kappa$  en suivant la recommandation de Hoerl *et al.* (1975)

$$\tilde{\kappa} = \frac{p\hat{\sigma}^{*2}}{\hat{\beta}'_{\text{ridge}}\hat{\beta}_{\text{ridge}}},$$

où, comme toujours,  $\hat{\beta}^*$  est l'estimateur des MC avec comme jeu de données  $(\hat{Y}, \tilde{X})$  et  $\hat{\sigma}^{*2}$  est l'estimateur obtenu par la procédure classique d'estimation issue des MC. Hoerl *et al.* (1976) ont également proposé une méthode itérative pour raffiner le choix précédent.

D'autres méthodes analytiques existent comme le  $C_\kappa$  (Mallows, 1973) qui est un  $C_p$  modifié

$$C_\kappa = \frac{\text{SCR}(\kappa)}{\hat{\sigma}^{*2}} - n + 2 + 2 \text{tr}(H^*(\kappa)H^*(\kappa)).$$

Mallows (1973) recommande de représenter le  $C_\kappa$  en fonction de  $v_\kappa$  où  $v_\kappa = 1 + \text{tr}(H^*(\kappa)H^*(\kappa))$  représente « 2 fois le nombre effectif de paramètres » plus 1, puisque l'on a enlevé la moyenne empirique à  $Y$  et que cela constitue un paramètre. Enfin, pour clore le chapitre des choix analytiques de  $\kappa$ , notons une dernière méthode (Mc Donald & Galarneau, 1975) qui consiste à choisir  $\tilde{\kappa}$  tel que

$$\hat{\beta}'_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa}) = \hat{\beta}'_{\text{ridge}}\hat{\beta}_{\text{ridge}} - \hat{\sigma}^{*2} \sum_{i=1}^p d_j^2,$$

où  $d_j^2$  représente la  $j^{\text{e}}$  valeur propre de  $\tilde{X}'\tilde{X}$ . Si le membre de droite est négatif, la valeur de  $\kappa$  est fixée à 0, ramenant aux MC.

**Apprentissage-validation.** La procédure de validation consiste à séparer de manière aléatoire les données en deux parties distinctes  $(X_a, Y_a)$  et  $(X_v, Y_v)$ . Le cas échéant, le jeu d'apprentissage est centré-réduit. Les valeurs des moyennes et des variances serviront à calculer les prévisions sur les données de validation. Une régression ridge est conduite avec le jeu d'apprentissage  $(X_a, Y_a)$  pour toutes les valeurs de  $\kappa$  possibles. En général, on choisit une grille de valeurs possibles pour  $\kappa$ , comprise entre 0 et un nombre maximum. Ensuite, en utilisant tous ces modèles et les variables explicatives  $X_v$ , les valeurs de la variable à expliquer sont prédites  $\hat{Y}_v^{\text{ridge}}(\kappa)$  pour tous les  $\kappa$ .

Si les paramètres sont estimés sur des données centrées-réduites, la prévision des données initiales s'obtient grâce à la formule suivante :

$$\hat{Y}_v^{\text{ridge}}(\kappa) = \hat{\sigma}_{aY}^2 \sum_{j=1}^p \frac{X_{vj} - \bar{X}_{aj} \mathbf{1}_{n_v}}{\hat{\sigma}_{aj}} \hat{\beta}_j^{\text{ridge}}(\kappa) + \bar{Y}_a \mathbf{1}_{n_v}.$$

La qualité du modèle est ensuite obtenue en mesurant la distance entre les observations prévues et les vraies observations par un critère. Le plus connu est le PRESS

$$\text{PRESS}(\kappa) = \|\tilde{Y}_v(\kappa) - Y_v\|^2.$$

D'autres critères peuvent être utilisés comme

$$\text{MAE}(\kappa) = \|\tilde{Y}_v(\kappa) - Y_v\|_1, \quad (8.5)$$

où  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$  est la norme de type  $l^1$ .

Le coefficient optimal  $\tilde{\kappa}$  choisi est celui qui conduit à la minimisation du critère choisi. Cette procédure semble la plus indiquée mais elle nécessite beaucoup de données puisqu'il en faut suffisamment pour estimer le modèle, mais il faut aussi beaucoup d'observations dans le jeu de validation  $(X_v, Y_v)$  pour bien évaluer la capacité de prévision dans de nombreux cas de figure. De plus, comment diviser le nombre d'observations entre le jeu d'apprentissage et le jeu de validation ? Là encore, aucune règle n'existe mais l'on mentionne souvent la règle 3/4 dans l'apprentissage et 1/4 dans la validation (ou 1/2, 1/2).

**Validation croisée.** Comme pour l'apprentissage-validation, il faut choisir un critère mesurant la qualité du modèle grâce à une distance entre les observations prévues et les vraies observations. Nous nous limiterons au PRESS en sachant que d'autres sont possibles comme par exemple le MAE (équation 8.5). Ensuite une grille de valeurs possibles pour  $\kappa$  doit être choisie. Nous choisissons la valeur  $\tilde{\kappa}$  qui minimise le critère choisi. Pour la validation croisée de taille 1

$$\tilde{\kappa} = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{(i)}^{\text{ridge}}(\kappa))^2,$$

où  $y_i$  est la  $i^{\text{e}}$  observation et  $\hat{y}_{(i)}^{\text{ridge}}(\kappa)$  est la prévision (c'est-à-dire que l'observation  $i$  a été enlevée au départ de la procédure) de cette observation réalisée

avec la ridge régression pour la valeur  $\kappa$ . Bien entendu, il est possible d'enlever non plus une observation à la fois mais plusieurs en découplant le jeu de données en  $b$  parties (voir la section 8.4.2 p. 228 concernant la régression PLS pour plus de détails). Afin d'alléger les calculs, le PRESS issu de la validation croisée de taille 1 peut être approché par

$$\text{PRESS}_{\text{ridge}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \hat{y}_i^{\text{ridge}}(\kappa)}{1 - H_{ii}^*(\kappa)} \right),$$

ou par la validation croisée généralisée

$$\text{GCV} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - \hat{y}_i^{\text{ridge}}(\kappa)}{1 - \text{tr}(H^*(\kappa))/n} \right]^2.$$

Ces deux dernières méthodes sont des approximations qui permettent simplement un calcul plus rapide. Si le temps de calcul n'est pas problématique, le calcul explicite semble plus indiqué.

**Conclusion.** Mis à part l'apprentissage-validation, lorsqu'on dispose de gros jeux de données, aucune de ces méthodes n'est supérieure aux autres et il n'est pas garanti qu'elles donnent toutes la même valeur de  $\tilde{\kappa}$ . Enfin, une fois la valeur  $\tilde{\kappa}$  choisie, les estimations  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$  peuvent être calculées. Le choix de  $\tilde{\kappa}$  dépendant des données, la théorie permettant les calculs des intervalles de confiance n'est plus valable puisque  $H^*(\tilde{\kappa})$  est aléatoire. L'exercice 8.9 propose une construction possible d'intervalles de confiance.

### 8.1.4 Exemple des biscuits

#### Jeu de données

Cet exemple est cité par Brown *et al.* (2001) et les données sont disponibles sur la page personnelle de M. Vannucci ([www.stat.tamu.edu/~mvannucci/](http://www.stat.tamu.edu/~mvannucci/)). Nous sommes en présence de biscuits non cuits pour lesquels on souhaite connaître rapidement et à moindre coût, la composition en quatre ingrédients : les lipides, les sucres, la farine et l'eau. Des méthodes classiques de chimie analytique permettent de mesurer la composition des biscuits mais elles sont assez longues et coûteuses et ne peuvent pas être mises en ligne sur une chaîne de production. Il serait souhaitable de pouvoir les remplacer par la mesure d'un spectre d'absorbance dans le domaine proche infrarouge (ou spectre proche infrarouge). Pour savoir si cela est possible, nous allons devoir essayer d'expliquer la composition par le spectre.

Nous avons  $n_a = 40$  biscuits non cuits sur lesquels sont mesurés les spectres proches infrarouges : on mesure l'absorbance à une longueur d'onde donnée, pour toutes les longueurs d'ondes entre 1100 et 2498 nanomètres et régulièrement espacées de 2 nanomètres. Nous avons donc 700 variables potentiellement

explicatives. Ensuite, pour chaque biscuit, on mesure sa composition par les méthodes traditionnelles. Ici nous allons nous intéresser uniquement au pourcentage de sucres. Nous avons donc  $p = 700$  variables pour  $n_a = 40$  individus. Nous sommes bien dans le cas où l'estimateur des moindres carrés classiques  $(X'X)^{-1}X'Y$  n'est pas défini, puisque le rang de  $X'X$  vaut ici 40 et non pas  $p = 700$ .

Comme nous souhaitons savoir si l'on peut vraiment expliquer le taux de sucres par le spectre proche infrarouge, nous disposons d'un échantillon de validation pour comparer les méthodes. Cet échantillon de validation comporte  $n_v = 32$  individus et ne sera jamais utilisé pour estimer les coefficients d'un modèle quel qu'il soit. Il sert uniquement à comparer une méthode avec une autre et à connaître, pour une méthode, sa capacité de prévision. Cette séparation en deux échantillons de tailles 40 et 32 fait partie du jeu de données et nous ne nous poserons donc pas la question de cette répartition.

Les ordres permettant d'importer les données sont les suivants :

```
Xbrut.app <- matrix(scan("nirc.asc"),ncol=700,byrow=T)
Ybrut.app <- matrix(scan("labc.asc"),ncol=4,byrow=T)
Xbrut.val <- matrix(scan("nirp.asc"),ncol=700,byrow=T)
Ybrut.val <- matrix(scan("labp.asc"),ncol=4,byrow=T)

Yselec <- 2
cookie.app <- cbind.data.frame(Ybrut.app[,Yselec],Xbrut.app)
names(cookie.app) <- c("sucres",paste("X",1:ncol(Xbrut.app),
                                         sep=""))
cookie.val <- cbind.data.frame(Ybrut.val[,Yselec],Xbrut.val)
names(cookie.val) <- c("sucres",paste("X",1:ncol(Xbrut.val),
                                         sep=""))
```

## Régression ridge

Nous allons dans un premier temps utiliser la régression ridge. Comme cela est l'usage, la régression ridge sous GNU-R centre et réduit toutes les variables explicatives. Elle centre aussi la variable à expliquer mais ne la réduit pas.

Rappelons que cette régression nécessite d'estimer  $\kappa$  et  $\beta$  par  $\tilde{\kappa}$  et  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  sur le jeu de données d'apprentissage regroupant  $n_a = 40$  individus et  $p = 700$  variables explicatives.

Pour cela, nous allons utiliser la validation croisée et diviser les 40 observations en 4 parties de 10 individus, de manière aléatoire. Cette séparation sera toujours la même quelles que soient les méthodes et elle est effectuée en utilisant une fonction du package `pls`. Celle-ci nous donne une liste des numéros d'observations contenus dans chaque partie. La graine du générateur est fixée afin d'obtenir toujours la même partition pour les autres méthodes proposées dans ce chapitre.

```
library(pls)
```

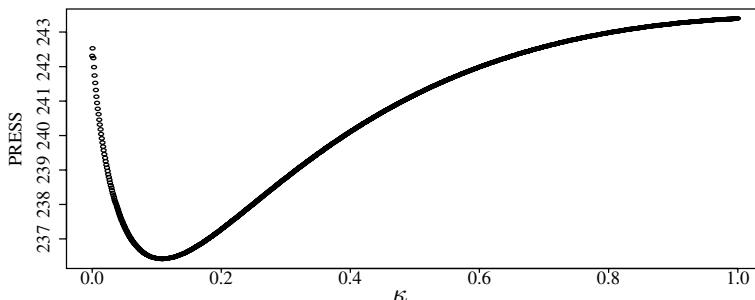
```
set.seed(87)
cvseg <- cvsegments(nrow(cookie.app), k=4, type="random")
```

Nous choisissons un ensemble de valeurs possibles régulièrement espacées pour  $\kappa$  entre 0 et  $\kappa_{\max}$ . Pour chaque valeur de  $\kappa$  nous avons donc un estimateur  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa)$  calculé sur toutes les observations sauf celle de la  $i^{\text{e}}$  partie. Ensuite nous calculons le PRESS sur les observations de la  $i^{\text{e}}$  partie. Ces PRESS sont ensuite sommés pour obtenir le PRESS de validation croisée et nous déduisons la valeur  $\tilde{\kappa}$  qui minimise le PRESS. Ces calculs sont effectués dans la fonction suivante :

```
library(MASS)
choix.kappa <- function(df, kappamax, cvseg, nbe=1000) {
  press <- rep(0, nbe)
  for (i in 1:length(cvseg)) {
    valid <- cookie.app[unlist(cvseg[i]),]
    modele <- lm.ridge(sucres~, data = cookie.app[unlist(cvseg[-i
      ]),], lambda=seq(0, kappamax, length=nbe))
    coeff <- coef.lmridge(modele)
    prediction <- matrix(coeff[,1], nrow(coeff), nrow(valid))
    +coeff[, -1] %*% t(data.matrix(valid[, -1]))
    press <- press+rowSums((matrix(valid[,1], nrow(coeff)
      , nrow(valid), byrow=T)-prediction)^2)
  }
  kappaet <- seq(0, kappamax, length=nbe)[which.min(press)]
  return(list(kappaet=kappaet, press=press))
}
```

Nous pouvons donc regarder l'évolution du PRESS en fonction de  $\kappa$  et choisir la valeur  $\tilde{\kappa}$  par validation croisée.

```
kappaet <- res$kappaet
plot(res$press)
```



**Fig. 8.3.** Evolution du PRESS en fonction de  $\kappa$ .

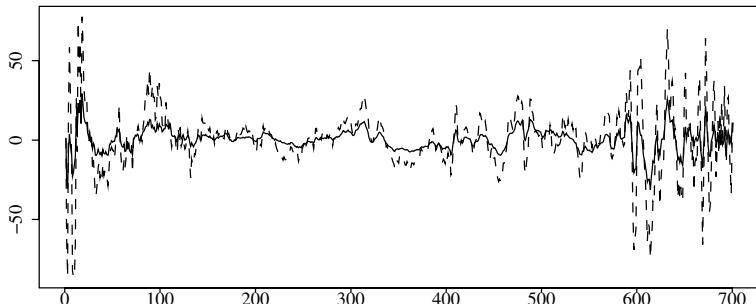
Nous prenons donc comme valeur de  $\tilde{\delta}$  la valeur  $0.206 \times \|\hat{\beta}\|_1$ . Nous calculons ensuite les prévisions et la moyenne des erreurs de prévision (ou MSEP, un estimateur de l'EQMP, voir équation (6.2), p. 153) via les ordres suivants :

```
coeff <- coef.lmridge(lm.ridge(sucres~, data = cookie.app,
                               lambda=kappaet))
prediction <- rep(coeff[1,1], n.val)+as.vector(coeff[,-1] %*%
                                         t(data.matrix(cookie.val[,-1])))
mean((cookie.val[,1]-prediction)^2)
modele.lm=lm(sucres~, data = cookie.app)
mean((cookie.val[,1]-predict(modele.lm,newdata=cookie.val))^2)
```

L'erreur moyenne de prévision vaut ici 4.95 alors que celui de la régression linéaire calculé avec la méthode standard vaut 4304. La régression ridge apporte donc une amélioration considérable à la régression linéaire ordinaire. La prévision par proche infrarouge du taux de sucres semble assez satisfaisante, à condition de bien choisir la méthode de régression.

A titre indicatif, visualisons les coefficients obtenus par la régression ridge  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$  et ceux de la régression linéaire  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(0) = \hat{\beta}$  grâce aux commandes suivantes :

```
coefflm <- coef.lmridge(lm.ridge(sucres~, data = cookie.app,
                                 lambda=0))
matplot(t(rbind(coeff, coefflm)), type="l", col=1)
```



**Fig. 8.4.** Valeur des coordonnées de  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$  en trait plein et de  $\hat{\beta}$  en trait pointillé.

La figure 8.4 montre clairement que les valeurs des coefficients sont « rétrécies » vers 0.

## 8.2 Lasso

### 8.2.1 La méthode

A l'image de la régression ridge, il est possible de contraindre non plus la norme euclidienne (au carré)  $\|\beta\|^2$  mais la norme de type  $l^1$ , à savoir  $\|\beta\|_1 = \sum_{i=1}^p |\beta_i|$ . Si l'on utilise cette contrainte, la méthode, appelée lasso, revient à trouver le minimum  $\tilde{\beta}$  défini par

$$\tilde{\beta}(\delta) = \operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p, \|\beta\|_1 \leq \delta} \|Y - X\beta\|^2. \quad (8.6)$$

En général,  $\tilde{\beta}(\delta)$  ne peut pas être trouvé explicitement et un algorithme doit être mis en œuvre. Différents types d'algorithmes existent selon que l'on souhaite trouver  $\tilde{\beta}(\delta)$  pour un  $\delta$  fixé ou pour un intervalle (Osborne, Presnell & Turlach, 2000a). Au niveau de l'optimisation, le problème sous contrainte peut être ramené au problème de pénalisation suivant, qui est en général plus facile à manipuler :

$$\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tau) = \operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|Y - X\beta\|^2 - \tau \|\beta\|_1. \quad (8.7)$$

Les deux problèmes sont équivalents au sens où  $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que les solutions des problèmes (8.6) et (8.7) coïncident.

Le changement de norme pour la contrainte entre le problème du lasso et celui de la régression ridge induit de grosses différences. Ainsi si on choisit une valeur de  $\tau \geq \|X'Y\|_\infty = \max_j |[X'Y]_j|$ , où  $[X'Y]_j$  désigne la  $j^{\text{e}}$  coordonnée du vecteur de  $\mathbb{R}^p X'Y$ , alors  $\tilde{\beta}(\tau) = 0$  est une solution. Il existe des valeurs finies de  $\tau$  pour lesquelles le vecteur de paramètres est nul et donc telles qu'aucune variable n'est retenue. Dès que la valeur de  $\tau$  passe sous ce seuil, la première variable, celle dont l'indice correspond à  $\|X'Y\|_\infty$ , est ajoutée au modèle. Si les variables sont centrées et réduites au préalable, cela correspond à la variable explicative la plus corrélée avec  $Y$ , c'est-à-dire la même variable ajoutée que dans une sélection ascendante partant d'un modèle avec juste la constante.

Lorsque l'on utilise la contrainte de type  $l^1$ , si l'on prend une valeur de  $\tau$  fixée et comme point de départ le vecteur 0 de  $\mathbb{R}^p$ , l'algorithme ajoutera des variables petit à petit tout en modifiant leur coefficient, mais il pourra aussi supprimer des variables, rappelant la sélection alternée. Si les variables sont centrées et réduites au préalable, les variables ajoutées à l'étape  $k$  seront les plus corrélées avec les résidus du modèle de l'étape précédente, comme pour une procédure ascendante classique (Osborne, Presnell & Turlach, 2000b). Certaines variables pourront sortir du modèle, rappelant la sélection alternée. Remarquons enfin que cette procédure de sélection possède un critère global de choix puisqu'elle s'arrêtera à un minimum  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tau)$  ayant, ou non, des composantes nulles.

## 8.2.2 La régression lasso en pratique

### Centrage et réduction

Afin de préserver la localisation (le coefficient constant) de toute contrainte, les données  $(X, Y)$  sont toujours centrées et le modèle est ensuite ajusté sans coefficient constant (voir exercice 8.8). Nous savons également que la régression lasso constraint  $\|\beta\|_1$  à être inférieure à  $\tau$ , chaque coefficient est affecté de manière « semblable ». Il est donc préférable que les variables soient toutes sur la même échelle. En préalable à toute régression lasso, il est ainsi d'usage de centrer et réduire les variables menant au tableau  $\tilde{X}$ . Il est aussi possible de centrer et réduire le vecteur  $Y$ , donnant ainsi le vecteur  $\tilde{Y}$ .

Une fois choisie la valeur optimale de  $\tau$ , notée  $\tilde{\tau}$ , ou celle de  $\delta$ , notée  $\tilde{\delta}$ , le modèle de prévision sur les variables initiales sera donc

$$\hat{Y}_{\text{lasso}}(\tilde{\tau}) = \hat{\sigma}_Y^2 \left[ \tilde{X} \hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tilde{\tau}) \right] + \bar{Y} \mathbb{1}_n.$$

### Choix de $\tilde{\tau}$ ou de $\tilde{\delta}$

Il faut donc choisir la valeur « optimum » de  $\tau$ , valeur notée  $\tilde{\tau}$ . Comme pour la régression ridge, cette étape est pratiquement impossible à réaliser *a priori*. La valeur  $\tilde{\tau}$  sera choisie grâce aux données, elle sera donc stochastique.

**Méthode graphique.** Une première méthode consiste à tracer un diagramme d'évolution des coefficients  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tau)$  en fonction de  $\tau$  ou  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\delta)$  en fonction de  $\delta$ . Le choix de  $\tilde{\delta}$  est obtenu visuellement.

**Méthode analytique.** Les méthodes de  $C_p$  et de GCV peuvent être adaptées à la régression lasso. Les définitions sont identiques à celles vues précédemment. Chacune fait appel au nombre effectif de paramètres que nous allons définir.

Dans la régression multiple sur  $p$  variable explicatives, le nombre de coefficients inconnus  $\{\beta_j\}$  vaut  $p$ , c'est-à-dire  $\text{tr}(P_X)$ . Rappelons que l'application, qui à  $Y$  fait correspondre  $\hat{Y}$ , est  $P_X$ . La trace de cette application donne le nombre effectif de paramètres. Cette notion peut être étendue à la régression lasso. La définition de l'estimateur lasso est

$$\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tau) = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 - \tau \sum_{j=1}^p |\beta|,$$

définition qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tau) &= \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 - \tau \sum_{j=1}^p \beta_j^2 / |\beta_j| \\ &= \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 - \sum_{j=1}^p \delta_j \beta_j^2 = \hat{\beta}_{\text{lasso}}(\delta), \quad \text{avec } \delta_j = \tau / |\beta_j|. \end{aligned}$$

Par analogie, nous pouvons résoudre le problème voisin suivant (voir exercice 8.7 p. 237) :

$$\hat{\beta}_{RG}(\tau) = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 - \sum_{j=1}^p \delta_j \beta_j^2,$$

et en déduire l'estimateur généralisant la régression ridge, ainsi que le nombre effectif de paramètres de cette méthode :  $\operatorname{tr}(X(X'X - \Delta)^{-1}X')$ . En suivant Tibshirani (1996), nous poserons donc que le nombre effectif de paramètres est

$$\operatorname{tr}(H^{\text{lasso}}(\tau)) = \operatorname{tr}(X'(X'X - \tau\Delta^{-1})^{-1}X'),$$

où  $\Delta = \operatorname{diag}(|\hat{\beta}_1^{\text{lasso}}|, \dots, |\hat{\beta}_p^{\text{lasso}}|)$ ,  $\Delta^{-1}$  est un inverse généralisé de  $\Delta$  et enfin  $\tau$  est la valeur telle que  $\|(X'X - \tau\Delta^{-1})^{-1}X'Y\|_1 = \delta$ .

Une fois ce nombre effectif de paramètres défini, nous pouvons définir la validation croisée généralisée comme

$$\text{GCV} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - \hat{y}_i^{\text{lasso}}(\tau)}{1 - \operatorname{tr}(H^{\text{lasso}}(\tau))/n} \right]^2.$$

De même, nous pouvons définir l'équivalent du  $C_p$  dans le cadre du lasso (Yuan & Lin, 2005) par

$$\frac{y_i - \hat{y}_i^{\text{lasso}}(\tau)}{\hat{\sigma}^2} - n + 2 \operatorname{tr}(H^{\text{lasso}}(\tau)),$$

où  $\hat{\sigma}^2$  est un estimateur de  $\sigma^2$ .

Enfin, le paramètre  $\tau$  optimal, noté  $\tilde{\tau}$ , est celui qui minimise le critère analytique choisi.

### Apprentissage-validation ou validation croisée

Une autre façon de choisir est d'utiliser l'apprentissage-validation ou la validation croisée. Nous ne détaillerons pas les procédures et il suffira d'adapter les présentations proposées pour la régression ridge.

#### 8.2.3 Exemple des biscuits

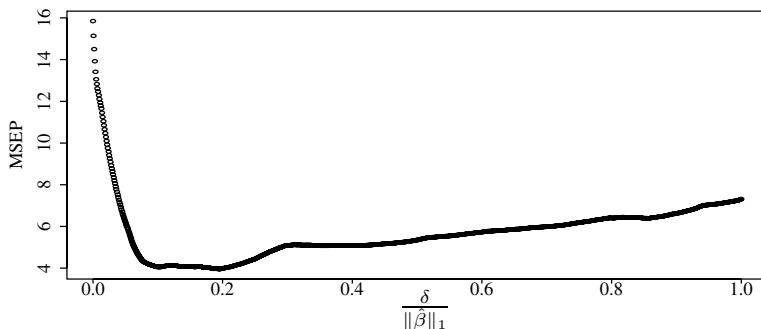
Nous reprenons encore l'exemple de la prévision du taux de sucres par un spectre proche infrarouge (700 variables explicatives). Le jeu de données est présenté en détail dans la section 8.1.4 (p. 205). Le calcul des estimateurs lasso pour 1000 contraintes régulièrement espacées, variant de  $\delta = 0 \times \|\hat{\beta}\|_1$  à  $\delta = 1 \times \|\hat{\beta}\|_1$ , est effectué par la méthode `lars`. Comme cela est l'usage et à l'image de la régression ridge sous GNU-R, la fonction utilisée centre et réduit toutes les variables explicatives. Elle centre aussi la variable à expliquer mais ne la réduit pas.

Rappelons que cette régression nécessite de choisir une contrainte  $\tilde{\delta}$  et ensuite d'estimer  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tilde{\delta})$ . Pour choisir  $\tilde{\delta}$ , nous allons prendre la valeur qui minimise la moyenne des erreurs quadratiques de prévision (MSEP).

```
frac.delta <- seq(from = 0, to = 1, length = 1000)
set.seed(87)
mse.cv <- cv.lars(data.matrix(cookie.app[,-1]),cookie.app[,1],K = 4,
se=F,frac=frac.delta,use.Gram=F)
frac.delta.et <-frac.delta[ which.min(mse.cv$cv) ]
```

Traçons l'évolution des MSEP en fonction de la fraction de contrainte :

```
plot(frac.delta,mse.cv$cv,xlab="delta",ylab="MSEP")
```



**Fig. 8.5.** Evolution du MSEP en fonction de la (fraction de) contrainte sur les coefficients.

La valeur qui minimise la MSEP vaut environ 0.206 et est notée `frac.delta.et`. Remarquons qu'une contrainte plus faible d'environ 0.11 donne des valeurs voisines du MSEP. Nous calculons ensuite les prévisions et la moyenne des erreurs de prévision (MSEP) avec cette valeur `frac.delta.et` via les ordres suivants :

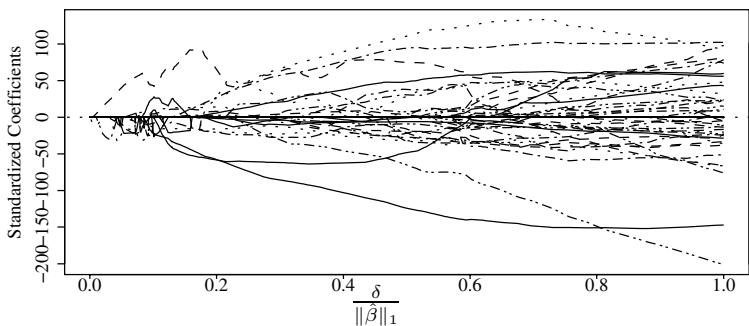
```
modele.lasso <- lars(data.matrix(cookie.app[,-1]),cookie.app[,1],
use.Gram=F,plot=F)
prediction <- predict(modele.lasso,data.matrix(cookie.val[,-1]),
s=frac.delta.et,mode="fraction")
mean((cookie.val[,1]-prediction$fit)^2)
```

L'erreur moyenne de prévision vaut maintenant 3.22, contre 4.95 avec la régression ridge et 4304 avec la régression classique.

A titre indicatif, visualisons les coefficients obtenus par la régression lasso  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}(\tilde{\delta})$  en fonction de la fraction de contrainte

```
plot(modele.lasso,breaks=F)
```

Nous obtenons le graphique suivant :



**Fig. 8.6.** Evolution de la valeur des coefficients en fonction de la (fraction de) contrainte sur les coefficients.

Cependant, sans connaissance des phénomènes régissant l'absorbance en proche infrarouge, il n'est pas possible d'interpréter réellement ce graphique. Nous constatons ici, comme annoncé par la théorie, que seuls quelques coefficients sont différents de 0 pour de fortes valeurs de contrainte (faible fraction). Pour la valeur sélectionnée, nous avons 16 coefficients qui sont non nuls. Si l'on utilise les 16 variables « sélectionnées » par la méthode lasso dans une régression, nous obtenons un MSEP de 82.6. Cette valeur est bien supérieure aux valeurs trouvées par les méthodes ridge et lasso.

### 8.3 Régression sur composantes principales

Nous allons dans ce chapitre introduire un changement de variable afin de reparamétriser le problème de régression et introduire les composantes principales. La matrice  $(X'X)$  est une matrice symétrique, nous pouvons donc écrire

$$X'X = P\Lambda P', \quad (8.8)$$

où  $P$  est la matrice des vecteurs propres normalisés de  $(X'X)$ , c'est-à-dire que  $P$  est une matrice orthogonale ( $P'P = I$ ) et  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  est la matrice diagonale des valeurs propres classées par ordre décroissant,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ .

#### Remarque

Si l'on effectue l'analyse en composantes principales (ACP) du tableau  $X$  (ou du triplet  $(X, I_p, I_n/n)$ ), la matrice  $P$  est la matrice des axes principaux normés à l'unité, mais les valeurs propres de l'ACP sont les  $\{\lambda_j\}$  avec  $j$  variant de 1 à  $p$  divisés par  $n$ .

### 8.3.1 Hypothèse $\mathcal{H}_1$ satisfaite : $|X'X| \neq 0$

La matrice  $X$  est de plein rang. Analysons l'impact de la transformation précédente sur le modèle de régression qui s'écrit alors

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon \\ &= XPP'\beta + \varepsilon \\ Y &= X^*\beta^* + \varepsilon, \end{aligned} \tag{8.9}$$

où  $X^* = XP$  correspond aux composantes principales,  $X_i^* = X P_i$  et  $X_i^{*\prime} X_i^* = \lambda_i$ . Lors de l'ACP du tableau  $X$  (ou du triplet  $(X, I_p, I_n/n)$ ), les composantes principales normées à la valeur propre obtenues sont égales aux vecteurs  $X_i^*$  que l'on obtient ici, d'où le nom de la méthode. Cette dernière équation (8.9) définit un modèle de régression que nous appellerons modèle « étoile » qui est tout simplement la régression sur les composantes principales  $X^*$ . Remarquons de plus que, par construction,

$$X^{*\prime} X^* = P' X' X P = P' P \Lambda P' P \Lambda P' P = \Lambda. \tag{8.10}$$

Les nouvelles variables de  $X^*$  sont orthogonales et de norme  $\lambda_j$  par construction. C'est une propriété classique des composantes principales d'une ACP.

La solution classique des MC vaut  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  et la variance de cet estimateur vaut

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \lambda_i^{-1} P_j P_j'.$$

Si maintenant nous calculons l'estimateur des MC dans le modèle « étoile », c'est-à-dire si nous effectuons une régression sur les composantes principales, nous obtenons  $X^*\hat{\beta}^* = X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y$  qui peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :  $X^*\hat{\beta}^* = X P \Lambda^{-1} P' X' Y$ . L'estimateur du modèle étoile est donc

$$\hat{\beta}^* = \Lambda^{-1} P' X' Y.$$

Cet estimateur minimise les moindres carrés puisque les moindres carrés du modèle étoile et du modèle initial sont identiques par construction :

$$\|Y - X\beta\|^2 = \|Y - XPP'\beta\|^2 = \|Y - X^*\beta^*\|^2.$$

La variance de cet estimateur vaut, en utilisant (8.10),

$$V(\hat{\beta}^*) = \sigma^2(X^{*\prime}X^*)^{-1} = \sigma^2 \Lambda^{-1}.$$

Les estimateurs des coefficients de chacune de ces nouvelles variables explicatives sont non corrélés. La variance pour l'estimation du coefficient de la  $i^e$  variable  $X_i^*$  est  $\sigma^2 \lambda_i^{-1}$ . Pour  $i < j$  nous avons  $V(\hat{\beta}_i^*) < V(\hat{\beta}_j^*)$ , cela veut dire

que l'estimation est plus précise sur les premières composantes principales de  $X$ .

Comme les composantes principales sont orthogonales entre elles, l'estimation des  $\beta_i^*$  peut se faire par régression linéaire simple sans constante sur la  $i^{\text{e}}$  composante principale  $X_i^*$ .

### 8.3.2 Colinéarité parfaite : $|X'X| = 0$

Reprendons l'équation (8.8)

$$X'X = P\Lambda P'.$$

Le rang de  $X$  vaut maintenant  $k$  avec  $k < p$ , nous avons donc les  $(p - k)$  dernières valeurs propres de  $(X'X)$  qui valent zéro,  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_p = 0$ . Cela veut dire que pour tout  $i > k$ , nous avons

$$X_i^{*'} X_i^* = \lambda_i = 0. \quad (8.11)$$

Décomposons la matrice  $\Lambda$  en matrices blocs

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k),$$

et décomposons la matrice orthogonale  $P$  de taille  $p \times p$  qui regroupe les vecteurs propres normés de  $X'X$  en deux matrices  $P_1$  et  $P_2$  de taille respective  $p \times k$  et  $p \times (p - k)$ . Soit  $P = [P_1, P_2]$ , nous avons alors

$$X^* = [X_1^*, X_2^*] = [XP_1, XP_2].$$

Cherchons maintenant la valeur de  $XP_2$ . Comme le rang de  $X$  vaut  $k$ , nous savons que la dimension de  $\mathfrak{I}(X)$  vaut  $k$  et de même pour la dimension de  $\mathfrak{I}(X'X)$ . Ce sous-espace vectoriel possède une base à  $k$  vecteurs que l'on peut choisir orthonormés. Nous savons, par construction, que  $P_1$  regroupe  $k$  vecteurs de base orthonormés de  $\mathfrak{I}(X'X)$  tandis que  $P_2$  regroupe  $p - k$  vecteurs orthonormés (et orthogonaux aux  $k$  de  $P_1$ ) qui complètent la base de  $\mathfrak{I}(X'X)$  afin d'obtenir une base de  $\mathbb{R}^p$ . Nous avons donc que, quel que soit  $u \in \mathfrak{I}(X'X)$ , alors

$$u' P_2 = 0.$$

Prenons  $u \neq 0$  et comme  $u \in \mathfrak{I}(X'X)$ , il existe  $\gamma \in \mathbb{R}^p$  tel que  $u = X'X\gamma \neq 0$ . Nous avons donc

$$\gamma' X' X P_2 = 0,$$

pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^p$  et donc  $X' X P_2 = 0$ , c'est-à-dire que  $XP_2 = 0$ . Nous avons alors

$$X^* = [X_1^*, X_2^*] = [XP_1, XP_2] = [XP_1, 0].$$

Au niveau des coefficients du modèle étoile, nous avons la partition suivante :

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_1 \beta \\ P'_2 \beta \end{pmatrix}.$$

Grâce à la reparamétrisation précédente, nous avons, avec  $X_2^* = X P_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} Y &= X^* \beta^* + \varepsilon \\ &= X_1^* \beta_1^* + X_2^* \beta_2^* + \varepsilon \\ &= X_1^* \beta_1^* + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette paramétrisation nous assure donc que les moindres carrés dans le modèle initial et dans le modèle étoile sont égaux et nous allons donc utiliser le modèle étoile. Par les MC, nous obtenons  $\hat{\beta}_1^* = (X_1^{*\prime} X_1^*)^{-1} X_1^{*\prime} Y$  et nous posons  $\hat{\beta}_2^* = 0$ , ce qui ne change rien car  $X_2^* = 0$ . Nous obtenons l'estimateur de la régression sur les  $k$  premières composantes principales (*principal component regression*)

$$\hat{\beta}_1^* = \Lambda_1^{-1} P'_1 X' Y,$$

de variance

$$V(\hat{\beta}_1^*) = \sigma^2 (X_1^{*\prime} X_1^*)^{-1} = \sigma^2 \Lambda_1^{-1}. \quad (8.12)$$

La stabilité des estimateurs peut être envisagée par leur variance, plus celle-ci est grande, plus l'estimateur sera instable. Cette variance dépend ici du bruit qui fait partie du problème et de  $\lambda_j$ . Une très faible valeur propre induit une grande variance et donc un estimateur instable et des conclusions peu fiables.

Nous avons donc que  $\hat{\beta}_1^*$  minimise le critère des MC pour le modèle étoile. Comme les MC du modèle étoile et ceux du modèle initial sont égaux, à partir de  $\hat{\beta}_1^*$ , le vecteur des coefficients associés aux composantes principales, nous pouvons obtenir simplement  $\hat{\beta}_{PCR}$ , le vecteur des coefficients associés aux variables initiales, par

$$\hat{\beta}_{PCR} = P_1 \hat{\beta}_1^*.$$

Ce vecteur de coefficient minimise les MC du modèle initial. Le résultat est donc identique au paragraphe précédent à ceci près que l'on s'arrête aux  $k$  premières composantes principales associées aux valeurs propres non nulles de  $(X' X)$ .

Ceci suggère le fait que l'on peut trouver une valeur, pour l'estimateur de la régression  $\hat{\beta}$ , qui est égale à  $\hat{\beta}_1^*$ . Mais nous pourrions trouver une infinité d'autres  $\hat{\beta}$  qui seraient aussi solution de la minimisation des MC. Ils seraient tels que  $\hat{\beta}_2^* \neq 0$ . Ceci donnerait une estimation  $\hat{\beta} = P_1 \hat{\beta}_1^* + P_2 \hat{\beta}_2$ . En plaçant cette valeur dans les moindres carrés cela donne exactement les mêmes moindres carrés que ceux obtenus par  $\hat{\beta}_{PCR}$ . Nous retrouvons là le fait que  $\hat{\beta}$  n'est plus unique car  $\mathcal{H}_1$  n'est plus vérifiée. Par contre, nous avons que  $\hat{\beta}_{PCR}$  est unique.

Puisque les résultats sont conservés quand l'on s'arrête à  $k$ , ce paragraphe suggère aussi que nous pouvons choisir une valeur de  $k$  de sorte que les valeurs propres associées  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  soient suffisamment différentes de 0, éliminant ainsi les problèmes de quasi non-inversibilité et de variance très grande. C'est cette méthode que nous allons exposer dans le prochain paragraphe. Evidemment, si l'on élimine les composantes principales associées à des valeurs propres non strictement nulles voire suffisamment grandes, la solution des MC dans le modèle initial et celle dans le modèle étoile seront différentes. Cependant, dans l'approche régression sur composantes principales, nous ne garderons que les estimateurs stables (i.e. de faible variance). Cette différence de moindres carrés est le prix à payer afin d'obtenir une solution unique et stable.

### 8.3.3 Pratique de la régression sur composantes principales

Nous utilisons la paramétrisation du problème (8.9) et nous avons donc

$$Y = X^* \beta^* + \varepsilon,$$

où  $X^* = XP$  représente la matrice des  $p$  composantes principales,  $P$  représente la matrice des  $p$  vecteurs propres normés à l'unité de la matrice  $X'X$  (ou axes principaux) associés aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  classées par ordre décroissant. Nous sommes donc en présence de  $p$  nouvelles variables (les composantes principales) qui sont orthogonales entre elles. Si l'on conserve toutes les composantes principales, le résultat est identique à la régression classique, un changement de variable mis à part.

Le but de la régression sur composantes principales consiste à ne conserver qu'une partie des composantes principales, à l'image de ce qui est fait en analyse en composantes principales (ACP). Les  $k$  composantes principales conservées seront la part conservée de l'information contenue dans les variables explicatives, alors que les  $(p-k)$  éliminées seront la part d'information contenue dans les variables explicatives qui sera éliminée, car considérée comme négligeable. Ici l'information est mesurée en terme d'inertie ou de dispersion et est égale à la valeur propre : plus la valeur propre  $\lambda_j$  est élevée, plus la part d'information apportée par la composante  $j$  est importante, propos illustrés par l'équation (8.11). Il semble donc assez naturel de ne conserver que les composantes dont la part d'information associée est grande, à savoir conserver les composantes associées aux  $k$  premières valeurs propres. Les estimateurs des coefficients des  $k$  premières composantes principales retenues seront les moins variables (8.12). Les étapes d'une régression sur composantes principales sont données ci-dessous.

#### Centrage-réduction

A la différence de la régression classique où les variables sont en général conservées telles que mesurées, il est d'usage de centrer et réduire toutes les va-

riables au préalable, tant les  $p$  variables explicatives que la variable à expliquer  $Y$ . Une variable centrée-réduite  $\tilde{X}_j$  issue de la variable  $X_j$  s'écrit donc

$$\tilde{X}_j = (X_j - \bar{X}_j \mathbf{1}_n) / \hat{\sigma}_j,$$

où  $\bar{X}_j$  est la moyenne empirique de  $X_j$  (i.e.  $\sum_{i=1}^n X_{ij}/n$ ) et  $\hat{\sigma}_j^2$  une estimation de la variance (par exemple  $\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2/n$ ).

Cette pratique a pour but d'accorder la même importance pour le choix des composantes. En effet, si deux variables explicatives sont mesurées à des échelles telles que la première varie de  $10^{-3}$  (par exemple un poids en tonne) autour de sa moyenne et la seconde varie elle de  $10^5$  autour de sa moyenne (par exemple des âges mesurés en heures), alors la composante va privilégier la direction ayant le maximum de dispersion, c'est-à-dire l'âge, et ce juste pour un problème d'unité. Cette étape est donc en général nécessaire.

Après centrage-réduction, nous avons que le produit scalaire entre variables centrées-réduites est la corrélation linéaire  $\rho$  :

$$\langle \tilde{X}_j, \tilde{X}_l \rangle = \rho(X_j; X_l).$$

De plus, les composantes principales sont de norme  $\lambda_j$  et orthogonales entre elles. Ces composantes, qui sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , sont des variables « synthétiques » constituées par une combinaison linéaire des variables initiales car  $X^* = \tilde{X}P$ . Nous avons donc pour la  $j^{\text{e}}$  composante principale la relation

$$X_j^* = \tilde{X}P_j,$$

donc sa moyenne empirique  $\bar{X}_j^*$  vaut 0. Le produit scalaire entre 2 composantes principales est donc la covariance empirique et l'équation (8.10) se traduit simplement comme « les composantes principales sont non corellées entre elles » et de variances décroissantes égales à  $\lambda_j$ .

### Choix de $k$ , le nombre de composantes du modèle

Le problème délicat de la régression sur composantes principales est la détermination du nombre de composantes  $k$  à conserver.

**Méthode graphique.** Pour déterminer  $k$ , il est possible, à l'image de ce qui est fait en ACP, de tracer le diagramme en tuyaux d'orgue des valeurs propres et de choisir le numéro  $k$  de la valeur propre après laquelle les valeurs propres sont nettement plus petites. En général, cette procédure est adaptée à l'interprétation (c'est-à-dire à l'ACP), mais sélectionne trop peu de composantes pour un modèle utilisé à des fins de prévision.

**Apprentissage-validation.** La procédure de validation consiste à séparer de manière aléatoire les données en deux parties distinctes  $(X_a, Y_a)$  et  $(X_v, Y_v)$ . Le cas échéant le jeu d'apprentissage est centré-réduit. Les valeurs des moyennes

et des variances serviront à calculer les prévisions sur les données de validation. Une régression sur composantes principales est conduite avec le jeu d'apprentissage  $(X_a, Y_a)$  pour tous les nombres de composantes principales possibles. Ensuite, en utilisant tous ces modèles et les variables explicatives  $X_v$ , les valeurs de la variable à expliquer sont prédites  $\hat{Y}_v^{\text{PCR}}(k)$  pour tous les  $k$ . Si le modèle est estimé sur des données centrées-réduites, la prévision des données initiales s'obtient à partir du modèle centré-réduit par

$$\hat{Y}_v^{\text{PCR}}(k) = \hat{\sigma}_{aY}^2 \sum_{j=1}^p \frac{X_{vj} - \bar{X}_{aj} \mathbb{1}_{n_v}}{\hat{\sigma}_{aj}} \hat{\beta}_j^*(k) + \bar{Y}_a \mathbb{1}_{n_v}.$$

La qualité du modèle est ensuite obtenue en mesurant la distance entre les observations prévues et les vraies observations par un critère. Le plus connu est le PRESS

$$\text{PRESS}(k) = \|\hat{Y}_v^{\text{PCR}}(k) - Y_v\|^2.$$

D'autres critères peuvent être utilisés comme

$$\text{MAE}(k) = \|\hat{Y}_v^{\text{PCR}}(k) - Y_v\|_1,$$

où  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$  est la norme de type  $l^1$ .

Le nombre de composantes principales optimal  $k$  choisi est celui qui conduit à la minimisation du critère choisi. Cette procédure semble la plus indiquée mais elle nécessite beaucoup de données puisqu'il en faut suffisamment pour estimer le modèle, mais il faut aussi beaucoup d'observations dans le jeu de validation  $(X_v, Y_v)$  pour bien évaluer la capacité de prévision. De plus, comment diviser le nombre d'observations entre le jeu d'apprentissage et le jeu de validation ? Là encore, aucune règle n'existe, mais l'on mentionne souvent la règle 3/4 dans l'apprentissage et 1/4 dans la validation (ou 1/2, 1/2).

**Validation croisée.** Il est aussi possible de choisir  $k$  par validation croisée. Pour toutes les valeurs de  $k$  possibles ( $k$  variant de 1 à  $K$  fixé, avec  $K \leq \text{rang}(X)$ ), on supprime une observation (ou un groupe de  $b$  observations) puis on estime le modèle sans cette (ou ces) observation(s). On peut alors prévoir cette (ou ces) observation(s) grâce à ce modèle estimé. Dans le cas d'une seule observation enlevée, la  $i^{\text{e}}$ , pour un nombre de composantes  $k$ , la prévision est notée  $\hat{y}_{(i)}(k)$ . On peut enfin à l'aide d'un critère, par exemple le PRESS, connaître la capacité de prévision d'un modèle à  $k$  composantes par

$$\text{PRESS}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_{(i)}^{\text{PCR}}(k) \right)^2.$$

Le nombre optimal  $k$  de composantes est celui qui réalise le minimum du PRESS, soit

$$k = \underset{l \in \{1, \dots, K\}}{\operatorname{argmin}} \text{PRESS}(l).$$

### Calculs et estimations

Une fois  $k$  choisi, les calculs sont identiques à ceux de la section 8.3.2. Le logiciel utilisé nous permet de calculer les  $k$  premiers axes principaux du tableau centré-réduit  $\bar{X}$ . Ils sont regroupés dans la matrice  $P_1$  orthogonale. A partir de cette matrice, sont calculées les composantes principales  $X_1^* = X P_1$ . Nous pouvons en déduire l'estimateur des coefficients associés aux composantes principales,  $\hat{\beta}_1^* = (X_1^{*\prime} X_1^*)^{-1} X_1^* \bar{Y}$ . Bien entendu, la valeur de  $k$  est choisie inférieure ou égale au rang de  $X^{*\prime} \bar{X}^*$  et donc l'inverse  $(X^{*\prime} X^*)^{-1}$  existe. Comme il est souvent difficile d'accorder une signification précise aux composantes principales, nous pouvons réexprimer les coefficients en fonction des variables initiales (centrées-réduites)

$$\hat{\beta}_{\text{PCR}} = P_1 \hat{\beta}_1^*.$$

Les variances des estimateurs sont égales à

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_1^*) &= \sigma^2 (X_1^{*\prime} X_1^*)^{-1} = \sigma^2 \Lambda_1^{-1}, \\ V(\hat{\beta}_{\text{PCR}}) &= \sigma^2 P_1 \Lambda_1^{-1} P_1'. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Enfin le modèle permet de faire de la prévision, il suffit d'utiliser le modèle étoile. Cela donne, si les données ne sont pas centrées-réduites,

$$\hat{Y}_{\text{PCR}} = X \hat{\beta}_{\text{PCR}},$$

ou alors, si les données sont centrées-réduites,

$$\hat{Y} = \hat{\sigma}_Y^2 \sum_{j=1}^p \frac{X_j - \bar{X}_j \mathbb{1}_n}{\hat{\sigma}_j} \hat{\beta}_j^* + \bar{Y} \mathbb{1}_n.$$

Comme le modèle étoile est un modèle de régression, tous les résultats s'appliquent à ce modèle.

#### Remarque

En général  $k < \text{rang}(X)$  et donc les moindres carrés obtenus avec la régression linéaire et ceux obtenus avec la régression sur composantes principales sont différents et les coefficients n'ont aucune raison d'être identiques. Il s'agit de deux modélisations différentes.

### Conclusion

L'avantage de la régression en composantes principales est de conserver une partie de l'information et d'utiliser de nouvelles variables qui sont orthogonales. Il en résulte une simplicité de calcul et une stabilité des estimations si  $k$  est convenablement choisi. Les composantes étant orthogonales, les tests de nullité de coefficients  $\beta_j^*$  associés aux composantes principales  $\bar{X}_j$  (indépendantes les unes des autres) s'effectuent facilement.

Un inconvénient de la régression en composantes principales réside dans le choix de  $k$  et un autre dans l'interprétation des variables. En effet, les nouvelles variables ne sont pas toujours interprétables puisqu'elles sont des combinaisons linéaires des variables explicatives originales. Cela est toutefois un inconvénient mineur car nous pouvons revenir aux variables initiales via  $\hat{\beta}_{\text{PCR}}$ . Le retour aux variables initiales fait tout de même perdre la propriété d'orthogonalité des variables. Le principal inconvénient réside dans l'élimination des  $(p - k)$  composantes principales de faibles variances (ou inerties), *or ce sont peut-être ces composantes de faibles variances qui sont les plus explicatives.*

Cette méthode n'est plus très utilisée actuellement, il est peut-être préférable d'utiliser une régression *partial least square* (PLS), qui conserve les mêmes avantages mais qui choisit des composantes en tenant compte de leur covariance avec la variable  $Y$  à expliquer.

### 8.3.4 Exemple des biscuits

Nous reprenons l'exemple de la prévision du taux de sucres par un spectre proche infrarouge (700 variables explicatives). Le jeu de données est présenté en détail dans la section 8.1.4 (p. 205).

Afin d'utiliser la régression sur composantes principales, nous devons déterminer le nombre de composantes à retenir. Ce nombre  $\hat{k}$  sera toujours déterminé par validation croisée sur 4 groupes de 10 observations. Rappelons la méthode proposée par le package **pls**. Nous contrôlons la graine du générateur afin d'obtenir toujours la même partition pour toutes les méthodes de ce chapitre.

```
library(pls)
set.seed(87)
cvseg <- cvsegments(nrow(cookie.app), k=4, type="random")
```

La régression sur composantes principales est conduite simplement grâce à la fonction **pcr**. Ici nous pouvons avoir au maximum 40 composantes principales ( $\min(n_a, p) = n_a = 40$ ), mais nous avons choisi un nombre maximum un peu moins grand ( $K = 28$ ) pour des raisons de présentation graphique.

Afin d'utiliser les mêmes estimateurs de variance empiriques, calculons ceux-ci sur les variables explicatives

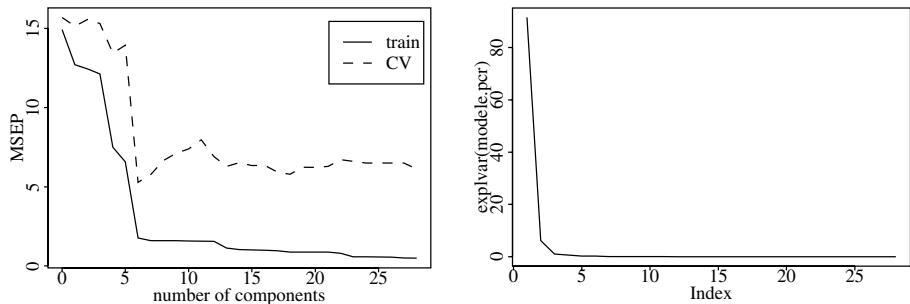
```
n.app <- nrow(cookie.app)
stdX.app <- sqrt(apply(cookie.app[, -1], 2, var))*(n.app-1)/n.app)
```

La modélisation est enfin obtenue grâce aux ordres ci-dessous :

```
modele.pcr <- pcr(sucres ~ ., ncomp=28, data = cookie.app, scale=
                     stdX.app, validation = "CV", segments=cvseg)
msepCV.pcr <- MSEP(modele.pcr, estimate=c("train", "CV"))
plot(explvar(modele.pcr), type="l", main="")
```

Cette fonction centre et réduit les variables et calcule aussi la MSEP pour la validation croisée. Nous faisons figurer aussi la part de variance des  $X$  prise en

compte par chaque composante. Dès la 3<sup>e</sup> composante, la part de variance des  $X$  expliquée par chaque composante est quasi nulle. Il ne subsiste que peu de variabilité initiale non prise en compte dans le modèle.



**Fig. 8.7.** Evolution du MSEP en fonction du nombre de composantes de la régression sur composantes principales (graphique de droite). Evolution de la part de variance (en %) des  $X$  prise en compte par chaque composante.

Le nombre de composantes  $k$  est trouvé numériquement par

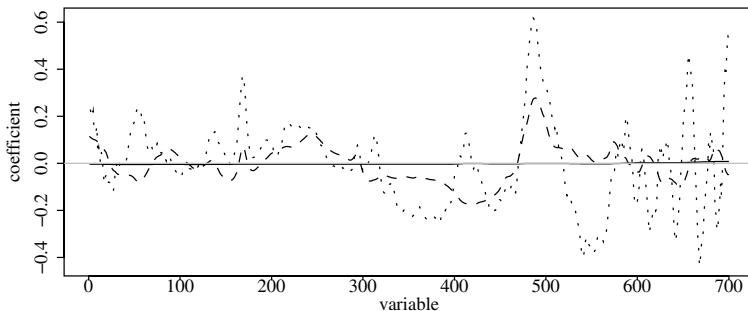
```
ncomp.pcr <- which.min(msepcv.pcr$val["CV", ,])-1
```

et vaut 6. Le graphique des résidus ne montre aucune structuration particulière et nous ne le reproduirons pas ici. La prévision par le modèle des observations du jeu de validation est obtenue par

```
modele.pcr.fin <- pcrr(sucres~, ncomp=ncomp.pcr, data = cookie.app,
                         scale=stdX.app)
ychap <- predict(modele.pcr.fin, newdata=cookie.val) [,1,ncomp.pcr]
res.pcr <- cookie.val[, "sucres"] - ychap
mean(res.pcr^2)
```

Nous en déduisons que le MSEP sur le jeu de données de validation vaut 1.03. Le résultat est donc meilleur que la régression ridge ou lasso. Il ne faut certainement pas en tirer une généralité. La performance des méthodes est surtout fonction des données que l'on utilise.

D'autres graphiques, comme la valeur des coefficients pour le modèle final ou la valeur des coefficients composante par composante, peuvent être obtenus. Sans connaissance sur le domaine de l'infrarouge pour la détection de sucres, ces graphiques n'ont pas d'intérêt. A titre de curiosité nous pouvons constater que la diminution du nombre de composantes revient à « rétrécir » les coefficients vers 0.



**Fig. 8.8.** Atténuation des coefficients  $\hat{\beta}_{PCR}(k)$  en fonction de  $k$  :  $k = 2$  (trait plein horizontal proche de 0),  $k = 6$  trait tiret et  $k = 15$  trait pointillé.

## 8.4 Régression aux moindres carrés partiels (PLS)

A l'image de la régression sur composantes principales, nous sommes intéressés par de nouvelles variables explicatives  $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(k)}$ , combinaisons linéaires des variables de départ  $t^{(j)} = X\tilde{c}_j$ , qui soient orthogonales entre elles et classées par ordre d'importance. Cependant, le choix de ces composantes doit être dicté, non pas par la part de variabilité qu'elles représentent parmi les variables explicatives originales, mais par leur lien avec la variable à expliquer.

Pour cela une procédure itérative va être utilisée. Celle-ci commence en général par le centrage et la réduction des variables initiales (p. 218). Malgré le centrage et la réduction, les données centrés-réduites seront notées  $(X, Y)$  afin de ne pas alourdir la notion par un  $\tilde{\cdot}$ .

### Définition 8.1

Quand  $Y$  est univarié, la régression PLS est appelée PLS1 et elle se définit itérativement.

- 1<sup>re</sup> étape : le tableau  $X$  est noté  $X^{(1)}$  et  $Y$  noté  $Y^{(1)}$ . La première composante PLS  $t^{(1)} \in \mathbb{R}^n$  est choisie telle que

$$t^{(1)} = \underset{t=X^{(1)}w, w \in \mathbb{R}^p, \|w\|^2=1}{\operatorname{argmax}} \langle t, Y^{(1)} \rangle.$$

Ensuite nous effectuons la régression univariée de  $Y^{(1)}$  sur  $t^{(1)}$

$$Y^{(1)} = r_1 t^{(1)} + \hat{\varepsilon}_1$$

où  $r_1 \in \mathbb{R}$  est le coefficient de la régression estimé par MC et  $\hat{\varepsilon}_1 = P_{t^{(1)\perp}} Y^{(1)}$  sont les résidus de la régression simple sans constante ;

- 2<sup>e</sup> étape : soit  $Y^{(2)} = P_{t^{(1)\perp}} Y^{(1)} = \hat{\varepsilon}_1$  la partie non encore expliquée de  $Y$ .

Soit  $X^{(2)} = P_{t^{(1)\perp}} X^{(1)}$  la partie de  $X^{(1)}$  n'ayant pas encore servi à expliquer. La seconde composante PLS est choisie telle que

$$t^{(2)} = \underset{t=X^{(2)}w, w \in \mathbb{R}^p, \|w\|^2=1}{\operatorname{argmax}} \langle t, Y^{(2)} \rangle.$$

Ensuite nous effectuons la régression univariée de  $Y^{(2)}$  sur  $t^{(2)}$

$$Y^{(2)} = r_2 t^{(2)} + \hat{\varepsilon}_2$$

où  $r_2 \in \mathbb{R}$  est le coefficient de la régression estimé par MC et  $\hat{\varepsilon}_2 = P_{t^{(2)\perp}} Y^{(2)}$  ;

...

-  $k^e$  étape : soit  $Y^{(k)} = P_{t^{(k-1)\perp}} Y^{(k-1)} = \hat{\varepsilon}_{k-1}$  la partie non encore expliquée de  $Y$ . Soit  $X^{(k)} = P_{t^{(k-1)\perp}} X^{(k-1)}$  la partie de  $X^{(k-1)}$  n'ayant pas encore servi à expliquer. La  $k^e$  composante PLS est choisie telle que

$$t^{(k)} = \underset{t=X^{(k-1)}w, w \in \mathbb{R}^p, \|w\|^2=1}{\operatorname{argmax}} \langle t, Y^{(k)} \rangle.$$

Ensuite nous effectuons la régression univariée de  $Y^{(k)}$  sur  $t^{(k)}$

$$Y^{(k)} = r_k t^{(k)} + \hat{\varepsilon}_k$$

où  $r_k \in \mathbb{R}$  est le coefficient de la régression estimé par MC et  $\hat{\varepsilon}_k = P_{t^{(k)\perp}} Y^{(k)}$ .

### Remarque

La régression PLS cherche donc une suite de composantes PLS qui soient orthogonales entre elles et ceci par construction. Puisque  $t^{(j)}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $X^{(j)}$ , qui est par construction dans l'orthogonal de  $\mathfrak{I}(t^{(1)}, \dots, t^{(j-1)})$ , alors  $t^{(j)}$  sera bien orthogonale à  $t^{(1)}, \dots, t^{(j-1)}$ .

Ces composantes sont choisies comme maximisant la covariance (empirique) entre  $Y$  et une composante  $t$  quand  $X$  et  $Y$  sont centrées au préalable.

### Théorème 8.1

Nous pouvons donc écrire le modèle PLS comme

$$\begin{aligned} Y &= P_{t^{(1)}} Y^{(1)} + \dots + P_{t^{(k)}} Y^{(k)} + \hat{\varepsilon}_k \\ Y &= r_1 t^{(1)} + \dots + r_k t^{(k)} + \hat{\varepsilon}_k, \end{aligned}$$

avec  $\hat{\varepsilon}_k = P_{t^{(k)\perp}} Y^{(k)} = P_{\mathfrak{I}(t^{(1)}, \dots, t^{(k)})^\perp} Y$ .

La preuve découle de la définition en notant que les composantes PLS sont orthogonales entre elles.

Ce modèle n'est pas forcément très commode puisqu'il ne fait pas intervenir les variables explicatives  $X$ . En remplaçant  $t^{(j)}$  par sa valeur, nous avons  $X^{(j)}w^{(j)}$ , ce qui fait intervenir non pas les variables explicatives originales, mais celles de l'étape  $j$ . Il faut donc réexprimer les composantes PLS en fonction du tableau initial, ce qui est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 8.2**

*Les composantes PLS peuvent s'exprimer en fonction des variables initiales sous la forme de combinaisons linéaires*

$$t^{(j)} = X\tilde{w}^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

où  $\tilde{w}^{(j)}$  est défini par

$$\tilde{w}^{(j)} = X \prod_{i=1}^j (I - w^{(i)}(t^{(i)})' t^{(i)})^{-1} t^{(i)}' X) w^{(j)}.$$

La preuve est à faire à titre d'exercice (cf. exercice 8.10).

Nous pouvons récrire le modèle PLS final à  $k$  composantes en fonction des variables explicatives.

**Théorème 8.3**

*Le modèle PLS à  $k$  composantes s'écrit*

$$Y = X\hat{\beta}_{\text{PLS}}(k) + \hat{\varepsilon}_k,$$

où  $\hat{\varepsilon}$  est le résidu final  $P_{t^{(k)\perp}}(Y^{(k)}) = P_{\mathfrak{I}(t^{(1)} \dots t^{(k)})^\perp}(Y)$  et  $\beta^*(k) = r_1\tilde{w}^{(1)} + \dots + r_k\tilde{w}^{(k)}$ .

Nous sommes bien en présence d'une régression dont la prévision est donnée par  $\hat{Y}_{\text{PLS}}(k) = X\hat{\beta}_{\text{PLS}}(k)$ . Si nous souhaitons revenir aux variables initiales après un travail sur le centrage et la réduction, la prévision s'écrit alors

$$\hat{Y}_{\text{PLS}}(k) = \hat{\sigma}_Y^2 \sum_{j=1}^p \frac{X_j - \bar{X}_j \mathbb{1}_n}{\hat{\sigma}_j} \hat{\beta}_{\text{PLS}}(k) + \bar{Y} \mathbb{1}_n.$$

Au contraire de la régression (MC ou MCG), l'estimateur de la régression PLS n'est pas une fonction linéaire de  $Y$ . En effet, sauf pour  $k = 1$ , la prévision ne peut pas être mise sous la forme  $\hat{Y}(k) = AY$  où  $A$  serait une matrice non dépendante de  $Y$ .

Une propriété notable de PLS est que  $\forall k, \|\hat{\beta}_{\text{PLS}}(k)\| \leq \|\hat{\beta}\|$ , où  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des MC. De plus, la norme  $\|\hat{\beta}_{\text{PLS}}(k)\|$  augmente avec  $k$  (De Jong, 1995).

### 8.4.1 Algorithmes PLS et recherche des composantes

A chaque étape nous cherchons à maximiser une fonction sous contrainte. La minimisation peut être considérée comme immédiate, mais introduisons tout de même la fonction lagrangien (Miller, 2000). Cela donne à chaque étape  $j$  la fonction suivante à maximiser :

$$\mathcal{L}(\beta, \tau) = Y^{(j)\prime} X^{(j)} w - \frac{1}{2} \tau (\|w\|^2 - 1).$$

Le facteur  $-1/2$  ne change pas fondamentalement le résultat, mais il permet une simplification des calculs. Une condition nécessaire d'optimum est alors donnée par l'annulation de ses dérivées partielles au point optimum  $(w^{(j)}, \tau_j)$  donnant

$$\begin{aligned} X'Y_j - \tau_j w^{(j)} &= 0 \\ {w^{(j)}}' w^{(j)} &= 1 \end{aligned}$$

La première équation montre que  $w^{(j)}$  est colinéaire au vecteur  $X'Y_j$  et la seconde montre qu'il est normé. Si l'on veut un maximum, il suffit de prendre le vecteur  $X^{(j)'}Y^{(j)}/\|X^{(j)'}Y^{(j)}\|$ . Le vecteur de signe opposé donnant le minimum.

Les différents algorithmes de PLS diffèrent de manière numérique si l'on possède plusieurs variables à expliquer (par exemple pour PLS2,  $Y$  est alors une matrice  $n \times q$ ). Elles correspondent à différentes méthodes de recherche du premier vecteur singulier de  $Y'X$  : puissance itérée (algorithme nipals), décomposition en valeurs singulières classique (SVD) ou encore diagonalisation de  $Y'XX'Y$ .

#### **Remarque**

L'algorithme nipals propose de calculer la régression PLS même si l'on possède des valeurs manquantes. Pour cela, dès qu'une valeur manquante est rencontrée, elle est ignorée. Ainsi le calcul devient :

$$[Y'X]_j = \sum_{i=1 \dots n, y_i \text{ ou } X_{ij} \text{ non manquants}} y_i X_{ij}$$

ce qui revient, après le centrage et la réduction, à remplacer les valeurs manquantes *dans les données centrées-réduites* par la valeur 0.

#### **8.4.2 Recherche de la taille $k$**

Plusieurs méthodes sont possibles et nous pouvons les regrouper en 4 points. Le premier est une méthode graphique que l'on retrouve aussi dans la régression ridge ou le lasso. Le second concerne les méthodes utilisant des critères simples tels l'AIC ou la variance expliquée. L'avant-dernier et le dernier concernent les procédures d'apprentissage-validation ou de validation croisée.

En général, on recherche une taille de modèle  $k$ , ou ici un nombre de composantes  $k$ , qui soit compris entre 1 et une taille maximum  $K$ . Cette taille maximum peut être choisie comme  $K = \text{rang}(X)$  ou comme la taille au-delà de laquelle il est certain que les composantes ne serviront à rien.

#### **Méthode graphique**

Une première méthode consiste à tracer un diagramme d'évolution des coefficients  $\beta^*(j)$  en fonction du nombre  $j$  de composantes. Cette méthode visuelle possède l'inconvénient majeur de n'avoir aucun support analytique d'aide à la décision.

## Critères analytiques

Le premier critère analytique simple est un critère construit à l'image de l'AIC ou d'une correction de celui-ci afin de réduire la taille des modèles :

$$\begin{aligned} AIC &= n \log(\hat{\sigma}^2(j)) + 2(j+1) \\ AIC_c &= \log(\hat{\sigma}^2(j)) + \frac{2n(j+1)}{n-j-2}, \end{aligned}$$

où  $\hat{\sigma}^2(j)$  est une estimation de la variance résiduelle. On choisit  $k$  comme la valeur qui minimise un des deux critères précédents.

Ces critères ne sont pas vraiment basés sur la vraisemblance et ne sont donc pas à proprement parler des AIC. Ils semblent moins crédibles mais sont assez faciles à calculer.

Un autre critère souvent utilisé est le pourcentage de variance expliquée. Ce pourcentage de variance est simplement le rapport de la variance expliquée à l'étape  $j$ , à savoir le rapport de la variance de la variable à expliquer  $Y$  sur la variance de l'ajustement  $\hat{Y}_{\text{PLS}}(j) = P_{\mathfrak{S}(t^{(1)}, \dots, t^{(j)})} Y$ . Ce rapport, du fait de l'augmentation du nombre de composantes  $j$ , ne peut qu'augmenter à chaque étape. Pour trouver le nombre de composantes, il est alors classique de chercher le nombre  $k$  à partir duquel l'augmentation semble être beaucoup moins forte. Ceci est souvent mis en parallèle avec la part d'inertie du tableau des variables explicatives utilisées dans le modèle. Rappelons que l'inertie d'un ensemble de variables regroupées dans une matrice  $X$  est tout simplement définie par

$$I(X) = \text{tr}(X'X).$$

Ainsi  $I(P_{t^{(j)}} X^{(j-1)}) = I(P_{t^{(j)}} X)$  est la part d'inertie du tableau des variables explicatives utilisées à l'étape  $j$ . La part d'inertie utilisée jusqu'à l'étape  $j$  est tout simplement le rapport  $\sum_{m=1}^j I(X^{(m)})/I(X)$ . Ce rapport augmente avec  $j$  et il peut aider à trancher entre les tailles déjà sélectionnées grâce au pourcentage de variance expliquée. Remarquons que le pourcentage de variance expliquée est nommé  $R^2$  dans le cadre de la régression classique. Cette méthode demande très peu de calculs mais est très subjective. De plus, elle n'évalue pas réellement le pouvoir prédictif du modèle.

## Apprentissage-validation.

La procédure d'apprentissage-validation consiste à séparer de manière aléatoire les données en deux parties distinctes  $(X_a, Y_a)$  et  $(X_v, Y_v)$ . Une régression PLS est conduite avec le jeu d'apprentissage  $(X_a, Y_a)$  pour toutes les tailles de modèles possibles. Ensuite, en utilisant tous ces modèles et les variables explicatives  $X_v$ , les valeurs de la variable à expliquer sont prédites  $\hat{Y}_v(j)$  pour toutes les tailles  $j$ . La qualité du modèle est ensuite obtenue en mesurant la distance entre les observations prévues et les vraies observations par un critère. Le plus connu est le PRESS

$$\text{PRESS}(j) = \|\hat{Y}_v^{\text{PLS}}(j) - Y_v\|^2.$$

D'autres critères peuvent être utilisés comme

$$MAE = \|\hat{Y}_v^{\text{PLS}}(j) - Y_v\|_1,$$

où  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$  est la norme de type  $l^1$ .

La taille optimale  $k$  choisie est celle qui conduit à la minimisation du critère choisi. Cette procédure semble la plus indiquée mais elle nécessite beaucoup de données puisqu'il en faut suffisamment pour estimer le modèle, mais il faut aussi beaucoup d'observations dans le jeu de validation  $(X_v, Y_v)$  pour bien évaluer la capacité de prévision. De plus, comment diviser le nombre d'observations entre le jeu d'apprentissage et le jeu de validation ? Là encore, aucune règle n'existe, mais l'on mentionne souvent la règle  $3/4$  dans l'apprentissage et  $1/4$  dans la validation ou, plus simplement,  $1/2$ ,  $1/2$ .

### Validation croisée.

Lorsque l'on n'a pas assez de données pour l'apprentissage-validation, la validation croisée est utilisée. C'est en général la procédure la plus utilisée en régression PLS. Le principe est toujours le même, à savoir qu'on divise le jeu de données initial en  $b$  parties distinctes approximativement de même taille. Pour une partie donnée, par exemple la  $i^{\text{e}}$ , on utilise la procédure d'apprentissage-validation, la  $i^{\text{e}}$  partie étant le jeu de validation et les autres observations formant le jeu d'apprentissage. On évalue la qualité du modèle par un critère, le PRESS par exemple, donnant ainsi  $\text{PRESS}(j)_i$ , et ensuite on itère le procédé sur toutes les parties  $i$  variant de 1 à  $b$ . Le critère final à minimiser est alors

$$\text{PRESS}_{CV}(j) = \sum_{i=1}^b \text{PRESS}(j)_i,$$

et la taille  $k$  retenue est celle qui conduit au minimum sur  $\{\text{PRESS}_{CV}(j)\}_{j=1}^K$ . Bien entendu, le choix du nombre  $b$  de parties n'est pas anodin. Plus le nombre  $b$  est faible, plus la capacité de prévision sera évaluée dans de nombreux cas puisque le nombre d'observations dans la validation sera élevé, mais moins l'estimation sera précise. Au contraire, un  $b$  élevé conduit à peu d'observations dans la validation et donc à une plus grande variance dans les PRESS.

### 8.4.3 Analyse de la qualité du modèle

Outre les graphiques classiques, il existe des graphiques que l'on retrouve souvent dans les logiciels proposant la régression PLS. Le premier type de graphique permet de connaître la qualité d'ajustement à chaque composante en traçant en abscisses les coordonnées de  $t^{(j)}$  et en ordonnées les coordonnées de  $y_j$ . Comme l'on cherche  $t^{(j)}$  orthogonale aux précédentes composantes PLS mais qui maximise le produit scalaire avec  $y_j$ , on devrait donc, si tout était parfait, avoir une droite. L'écart du diagramme à la droite de régression simple donne une idée de la qualité d'ajustement à l'étape  $j$ . De plus, numérotter les  $n$

points permet de repérer d'éventuels point aberrants qui seraient mal ajustés à plusieurs étapes.

La qualité globale sera bien sûr envisagée avec le dessin classique « ajustement  $\hat{Y}_{PLS}(k)$  versus résidus » donnant des indications sur la qualité du modèle et sur les points aberrants.

Un autre diagramme consiste à tracer sur un graphique les coordonnées de  $t^{(j)}$  en abscisses et les coordonnées de  $t_{j+1}$  en ordonnées. Si aucune structure notable n'apparaît, alors le graphique est normal. Si, par contre, des tendances apparaissent, cela signifie que  $t_{j+1} \approx f(t^{(j)})$ . Il sera bon alors de comprendre comment est construite  $t^{(j)}$  et de déterminer les variables contribuant à sa construction. Ensuite il sera bon d'ajouter de nouvelles variables, à savoir des variables importantes auxquelles on aura appliqué la fonction  $f$ . Si des groupes nettement séparés apparaissent, cela indique l'existence de sous-populations différentes, qu'il serait peut-être judicieux d'analyser de manière séparée. Enfin, les points éloignés des autres (ou aberrants) seront à noter et peuvent servir en complément de l'analyse globale.

L'interprétation des composantes en termes de variables initiales (centrées-réduites) peut être conduite en traçant en abscisses les coordonnées du vecteur de poids  $\tilde{w}^{(j)}$  et en ordonnées les coordonnées du vecteur de poids  $\tilde{w}^{(j+1)}$ . Les variables  $l$  pour lesquelles les  $|\tilde{w}_l^{(j)}|$  sont élevées sont des variables importantes. Ces variables apparaissent donc à la périphérie d'un tel graphique, alors que dans le noyau central figurent les variables non importantes dans la construction de  $t^{(j)}$  et  $t_{j+1}$ .

Un dernier graphique spécifique de la régression PLS est constitué par les DModX (selon la terminologie utilisée par le logiciel SIMCA)

$$DModX_i = \sqrt{\frac{v \sum_{j=1}^p [P_{\mathfrak{I}(t^{(1)} \dots t^{(k)})^\perp} X]_{ij}^2}{p - k}},$$

où  $v = 1$  si l'observation provient d'un jeu de validation et  $v = n/(n - k - 1)$  sinon. Cette grandeur mesure la contribution (ou plutôt la non-contribution) d'un individu au modèle. Pour cela nous savons que la partie des variables explicatives non utilisée dans le modèle est  $P_{\mathfrak{I}(t^{(1)} \dots t^{(k)})^\perp} X$ . L'élément  $(i, j)$  de ce tableau représente pour l'observation  $i$  et la variable  $j$  la part de  $X$  non utilisée dans le modèle PLS de taille  $k$  et donc, plus cet élément est faible, plus la contribution au modèle de la  $i^e$  observation pour la  $j^e$  variable est forte. Pour résumer cette contribution sur toutes les variables, le DModX est défini par la somme des carrés de ces contributions élémentaires, dont on prend la racine carrée afin de rester sur la même échelle que les variables initiales.

Graphiquement les DModX sont représentés comme les distances de Cook mais s'interprètent dans l'autre sens. Remarquons que le logiciel SIMCA introduit aussi les DModY qui ne sont rien d'autre que la valeur absolue du résidu. Nous renvoyons le lecteur intéressé par une application complète de PLS aux cas uni- et multivariés à l'ouvrage de Tenenhaus (1998).

#### 8.4.4 Exemple des biscuits

Nous reprenons l'exemple de la prévision du taux de sucres par un spectre proche infrarouge (700 variables explicatives). Le jeu de données est présenté en détail dans la section 8.1.4 (p. 205).

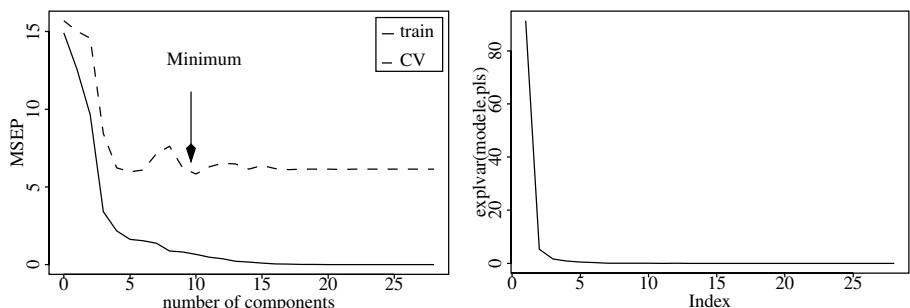
Nous n'exposerons pas ici toutes les représentations graphiques permettant d'examiner la qualité d'ajustement d'un modèle PLS. Pour cette méthode de régression, et à l'image de la régression sur composantes principales, nous devons déterminer le nombre  $k$  de composantes PLS. Il sera déterminé par validation croisée sur 4 groupes de 10 observations. En utilisant le package `pls` nous avons la modélisation PLS jusqu'au nombre maximal de  $K = 28$  composantes (voir 8.3.4 p. 221 pour plus de détails) grâce aux ordres ci-dessous :

```
set.seed(87)
cvseg <- cvsegments(nrow(cookie.app), k=4, type="random")
modele.pls <- plsr(sucres ~ ., ncomp=28, data = cookie.app, scale=
stdX.app, validation = "CV", segments=cvseg)
```

Le vecteur `stdX.app` contient les écarts-types empiriques (voir 8.3.4 p. 221 pour plus de détails). Le choix du nombre de composantes est réalisé graphiquement par

```
plot(msepcv.pls, col=1, type="l")
plot(explvar(modele.pls), type="l", main="")
```

La représentation graphique nous indique que 5 composantes pourraient donner un résultat presque aussi bon que le minimum numérique qui est de 10 composantes.



**Fig. 8.9.** Evolution du MSEP en fonction du nombre de composantes de la régression sur composantes principales (graphique de droite). Evolution de la part de variance (en %) des  $X$  prise en compte par chaque composante.

Ce minimum est obtenu simplement par

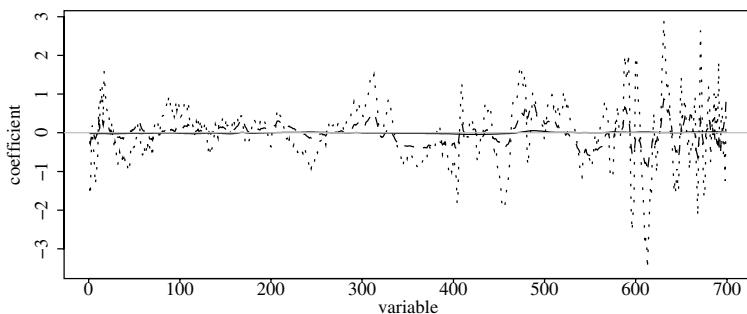
```
ncomp.pls <- which.min(msepcv.pls$val["CV", ,])-1
```

Nous pouvons ensuite évaluer la capacité de prévision par le MSEP sur notre jeu de validation

```
modele.pls.fin <- plsr(sucres~, ncomp=ncomp.pls, data=cookie.app,
                        scale=stdX.app)
ychap <- predict(modele.pls.fin, newdata=cookie.val) [,1,ncomp.pls]
res.pls <- cookie.val[, "sucres"] - ychap
mean(res.pls^2)
```

Cela donne un MSEP d'environ 4, ce qui s'inscrit entre la régression lasso (3.22) et la régression ridge (4.95). Si le modèle parcimonieux à 5 composantes avait été choisi, alors le MSEP serait de 0.78, chiffre plus faible (et donc meilleur) que celui de la régression sur composantes principales. Cette remarque montre bien la difficulté de choisir le nombre de composantes. Il est loin d'être garanti qu'un modèle parcimonieux fonctionne mieux en règle générale et cela dépend des données.

Pour terminer cet exemple, nous pouvons illustrer le fait que la norme  $\|\hat{\beta}_{PLS}(k)\|$  augmente avec  $k$ .



**Fig. 8.10.** Rétrécissement des coefficients  $\hat{\beta}_{PCR}(k)$  en fonction de  $k$  :  $k = 2$  (trait plein horizontal proche de 0),  $k = 6$  trait tiret et  $k = 15$  trait pointillé.

## 8.5 Exercices

### Exercice 8.1 (Questions de cours)

1. La régression biaisée est en général utilisée lorsque l'hypothèse ci-dessous (cocher la bonne réponse) n'est pas satisfaite :
  - A.  $\mathcal{H}_1$  concernant le rang de  $X$  (matrice du plan d'expérience) ;
  - B.  $\mathcal{H}_2$  concernant l'espérance et la variance des résidus ;
  - C.  $\mathcal{H}_3$  concernant la normalité des résidus.
2. Lorsque la matrice  $(X'X)$  n'est pas inversible, l'estimateur des moindres carrés
  - A. existe et est unique ;

- B. existe et n'est pas unique ;
  - C. n'existe pas, aucun estimateur ne minimise les moindres carrés.
3. La régression ridge peut être vue comme une régression avec comme critère d'estimation les moindres carrés et une contrainte de norme sur
- A. le plan d'expérience ( $X$ ) ;
  - B. les paramètres ;
  - C. aucun rapport.
4. La régression lasso peut être vue comme une régression avec comme critère d'estimation les moindres carrés et une contrainte de norme sur
- A. le plan d'expérience ( $X$ ) ;
  - B. les paramètres ;
  - C. aucun rapport.
5. Lors d'une régression PCR, la première composante principale est la composante dont le produit scalaire avec  $Y$  est :
- A. maximum ;
  - B. minimum ;
  - C. aucun rapport.
6. Lors d'une régression PLS, la première composante PLS est la composante dont le produit scalaire avec  $Y$  est
- A. maximum
  - B. minimum
  - C. aucun rapport.

### **Exercice 8.2 (Corrélation multiple et hypothèse $\mathcal{H}_1$ )**

Rappelons la définition du coefficient de corrélation multiple

#### **Définition**

Soit  $Y$  une variable continue et un ensemble de  $p$  variables explicatives continues notées  $X_1, \dots, X_p$ . La première variable explicative est la constante :  $X_1 = \mathbb{1}_n$ . Le coefficient de corrélation linéaire multiple entre  $Y$  et  $X_1, \dots, X_p$  est défini par la valeur maximale de la corrélation (empirique) linéaire  $\rho(\cdot)$  entre  $Y$  et une combinaison linéaire des variables  $X_1, \dots, X_p$

$$R(Y; X) = R(Y; X_1, \dots, X_p) = \sup_{\beta \in \mathbb{R}^p} \rho(Y; X\beta).$$

1. Etablir que le  $R^2$  de la régression multiple de  $Y$  sur  $X_1, \dots, X_p$  est le carré de  $\rho(Y; X\hat{\beta})$  (indice : montrer que la moyenne empirique de  $X\hat{\beta}$  vaut  $\bar{Y}$ ).
2. Soit

$$X_1 = \mathbb{1}_3, \quad X_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2})' \text{ et}$$

$$Y = \left( \frac{2(\sqrt{2}-1)+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{2(\sqrt{2}-1)-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2(1+\sqrt{2}) \right)'.$$

- (a) Montrer que  $Y = 2X_1 - 2X_2 + 3\eta$ , où  $\eta = (\sqrt{3}/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/\sqrt{2}, 0)'$ .

- (b) Montrer que  $\|X_1\| = \|X_2\| = \|\eta\|$  et que  $X_1 \perp X_2 \perp \eta$ .
- (c) Trouver  $\hat{Y} = P_X Y$ .
- (d) Construire graphiquement dans le repère  $(O, X_1, X_2, \eta)$  les vecteurs  $\overrightarrow{OY}$  et  $\overrightarrow{O\hat{Y}}$ .
- (e) Que représente graphiquement  $\rho(Y; X\hat{\beta})$  ?
- (f) Que représente graphiquement  $\rho(Y; X\alpha)$ , avec  $\alpha = (4, -3)'$  ?
- (g) Déduire graphiquement que  $\hat{\beta}$  réalise le maximum de  $\sup_{\beta \in \mathbb{R}^2} \rho(Y; X\beta)$ .
3. Soit une variable  $X_j$  et rappelons que la matrice  $X$  privée de sa  $j^{\text{e}}$  colonne est notée  $X_{(j)}$ . Etablir que si  $R(X_j; X_{(j)}) = 1$ , alors  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée. En déduire alors que si  $X_j$  et  $X_k$  sont corrélées linéairement ( $\rho(X_j, X_k) = 1$  avec  $j \neq k$ ), alors  $\mathcal{H}_1$  n'est pas vérifiée.

### Exercice 8.3 (†Géométrie des estimateurs)

Soit les observations suivantes :

**Tableau 8.1.** Observations d'une régression.

$X_1$	1	0	0
$X_2$	$1/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	0
$Y$	1.5	0.5	1

Soit le modèle de régression multiple (sans constante) suivant :

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Les régressions ridge, lasso, PCR et PLS seront effectuées sur les variables sans centrage ni réduction.

1. Vérifier que  $\Im(X) = (X)$  est le plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ .
2. Calculer  $\hat{Y} = P_X Y$ .
3. Représenter dans le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  les points  $X_1$ ,  $X_2$  et  $\hat{Y}$ .
4. Que vaut  $p$  ici ? Représenter dans  $\mathbb{R}^p$  l'ensemble  $B_1$  des  $\beta \in \mathbb{R}^p$  vérifiant la contrainte  $\sum_{j=1}^p \beta_j^2 = \|\beta\|_2^2 = 1$ . Faire de même avec  $B_2$  l'ensemble des  $\beta \in \mathbb{R}^p$  vérifiant la contrainte  $\sum_{j=1}^p |\beta_j| = \|\beta\|_1 = 1$ .
5. La matrice  $X$  peut être identifiée à une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Donner intuitivement la forme des ensembles  $B_1$  et  $B_2$  lorsqu'on leur applique  $X$  (ellipse, cercle, parallélogramme...). Ces ensembles notés respectivement  $C_1$  et  $C_2$  sont définis par  $C_1 = \{z \in \mathbb{R}^3, \exists \beta \in B_1 : z = X\beta\}$  et  $C_2 = \{z \in \mathbb{R}^3, \exists \beta \in B_2 : z = X\beta\}$ .
6. Vérifier grâce à un ordinateur que les formes de  $C_1$  et  $C_2$  données à la question précédente sont justes. Dessiner  $C_1$  et  $C_2$  sur le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  de la question 3.

7. Représenter géométriquement  $X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et  $X\hat{\beta}_{\text{lasso}}$  sur le plan précédent en utilisant  $C_1$  et  $C_2$  comme contraintes pour la régression ridge et lasso respectivement.
8. Que représente l'ensemble  $C_1$  en terme de « composante » ? Trouver graphiquement la première composante PLS grâce à sa définition. Que représente l'ajustement de  $Y$  par la régression PLS à une composante, ajustement noté  $\hat{Y}_{\text{PLS}}(1)$ , en terme de projection de  $Y$ , c'est la projection de  $Y$  sur .... ? Représenter la réponse sur le graphique.
9. Calculer  $X'X$ , trouver le premier axe principal et en déduire la première composante principale.
10. Figurer la droite portée par la première composante principale  $X_1^*$  (géométriquement il s'agit du grand axe de  $C_1$ ). Que représente  $X_1^*\beta_1^*$  en terme de projection de  $Y$ , c'est la projection de  $Y$  sur .... ? Représenter la réponse sur le graphique.

**Exercice 8.4 (Nombre effectif de paramètres de la régression ridge)**  
 Nous supposerons ici que toutes les variables sont centrées et réduites. Dans la régression multiple sur  $p$  variable explicatives, le nombre de coefficients inconnus  $\{\beta_j\}$  est  $p$ , c'est-à-dire  $\text{tr}(P_X)$ . Rappelons que l'application qui à  $Y$  fait correspondre  $\hat{Y}$  est  $P_X$ . La trace de cette application donne le nombre effectif de paramètres. Cette notion peut être étendue à la régression ridge.

1. Dans le cas de la régression ridge, quelle est l'application  $H(\kappa)$  qui à  $Y$  fait correspondre  $\hat{Y}_{\text{ridge}}(\kappa)$  ?
2. Soit  $A$  une matrice carrée symétrique  $p \times p$  (donc diagonalisable et de valeurs propres positives ou nulles). Montrer que si  $U_j$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $d_j^2$ , alors  $U_j$  est aussi vecteur propre de  $A + \lambda I_p$  associé à la valeur propre  $\lambda + d_j^2$ .
3. En utilisant la décomposition en valeurs singulières de  $X : X = QDP'$  avec  $Q$  et  $P$  matrice orthogonale et  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ , montrer que

$$\text{tr}(X(X'X + \lambda I_p)^{-1}X') = \text{tr}(PD(D^2 + \lambda I_p)^{-1}DP').$$

En déduire que le nombre effectif de paramètres de la régression ridge est

$$\sum_{j=1}^p \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda}.$$

**Exercice 8.5 (†EQM de la régression ridge)**  
 Soit le modèle habituel de régression

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

1. Redonner la définition de l'estimateur ridge  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et recalculer son biais, sa variance et sa matrice de l'EQM.

2. En utilisant la décomposition en valeurs singulières (ou valeurs propres) de  $X'X = P \text{diag}(\lambda_j)P'$ , établir que

$$\text{tr}(\text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}})) = \sum_{j=1}^r \frac{\sigma^2 \lambda_j + \kappa^2 [P'\beta]_j^2}{(\lambda_j + \kappa)^2}.$$

(Utiliser la question 2 de l'exercice 8.4)

3. Retrouver que la matrice de l'EQM pour l'estimateur des MC est

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}}) &= \sigma^2(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X + \kappa I)^{-1}(X'X + \kappa^2(X'X)^{-1} + 2\kappa I_p)(X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned}$$

4. Calculer la différence entre la matrice de l'EQM pour l'estimateur ridge et celle pour l'estimateur des MC et montrer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) - \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}}) \\ &= \kappa(X'X + \kappa I)^{-1}(\sigma^2(2I_p + \kappa^2(X'X)^{-1}) - \kappa\beta\beta')(X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned}$$

5. En utilisant le théorème suivant,

### Théorème

*Si  $A$  est inversible, alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit semi-définie positive est que  $ABA'$  le soit aussi,*

déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Delta$  soit semi-définie positive est que  $(\sigma^2(2I_p + \kappa^2(X'X)^{-1}) - \kappa\beta\beta')$  le soit aussi.

6. Démontrer que  $I_p - \gamma\gamma'$  est semi-définie positive si et seulement si  $\gamma'\gamma \leq 1$  (utiliser la décomposition en valeurs singulières (ou propres) de  $\gamma\gamma'$  dont on calculera les valeurs propres et le théorème ci-dessus).

7. En utilisant le théorème suivant,

### Théorème

*Si  $A$  et  $B$  sont des matrices semi-définies positives, alors pour tout  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  la matrice  $\alpha A + \beta B$  est aussi semi-définie positive,*

déduire qu'une condition suffisante pour que  $\Delta$  soit semi-définie positive est que  $\kappa \leq 2\sigma^2/\beta'\beta$ .

8. Conclure sur la différence des traces des EQM des estimateurs des MC et ridge.

### Exercice 8.6 (Estimateurs à retrécissement - shrinkage)

Soit le modèle de régression classique

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

Soit la décomposition en valeurs singulières de  $X$  :

$$PXQ' = D = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont 2 matrices orthogonales de dimension  $n \times n$  et  $p \times p$  et  $\Delta$  est la matrice diagonale des valeurs singulières  $\{\delta_i\}$  de dimension  $p$ . Posons  $Z = PY$ ,  $\gamma = Q\beta$  et  $\eta = P\varepsilon$ .

1. Etablir que si  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ , alors

$$Z = D\gamma + \eta,$$

$Z_{1:p} \sim \mathcal{N}(\Delta\gamma, \sigma^2 I_p)$  et  $Z_{(p+1):n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_{n-p})$ . Ici  $Z_{1:p}$  est le vecteur constitué des  $p$  premières coordonnées de  $Z$  alors que  $Z_{(p+1):n}$  contient les  $n-p$  dernières.

2. Etablir que la trace de la matrice de l'EQM pour un estimateur linéaire  $\hat{\beta} = AY$  de  $\beta$  est la même que celle de  $\hat{\gamma} = Q\hat{\beta}$ , estimateur de  $\gamma$ .
3. Etablir que l'estimateur des moindres carrés de  $\gamma$  est

$$\hat{\gamma}_{MC} = \Delta^{-1} Z_{1:p}.$$

et en déduire que  $\hat{\gamma}_{MC} \sim \mathcal{N}(\gamma, \sigma^2 \Delta^{-2})$ .

**Remarque :** l'estimateur  $\hat{\gamma}_{MC}$  est linéaire en  $Y$  et ses coordonnées sont indépendantes entre elles.

4. Montrer que l'EQM de la  $i^e$  coordonnée de  $\hat{\gamma}_{MC}$  vaut  $\sigma^2/\delta_i^2$ .
5. Prenons un estimateur linéaire de  $\gamma$  :

$$\hat{\gamma}(c) = \text{diag}(c_i) Z_{1:p}.$$

Vérifier que ses coordonnées sont normales et indépendantes entre elles.  
Montrer ensuite l'égalité suivante :

$$EQM(\hat{\gamma}(c)_i) = \mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i - \gamma_i)^2 = c_i^2 \sigma^2 + \gamma_i^2(c_i \delta_i - 1)^2.$$

6. En déduire que si  $\gamma_i^2 < \frac{\sigma^2(1/\delta_i) + c_i}{\delta_i^2(1/\delta_i) - c_i}$ , alors  $EQM(\hat{\gamma}(c)_i) < \hat{\gamma}_{MC}$ .

**Remarque :** pour une condition particulière dépendant des  $X$ , il existe un estimateur linéaire de coordonnées indépendantes qui possède un meilleur EQM que celui des MC.

7. Montrer que si  $c_i = \frac{\delta_i}{\delta_i^2 + \kappa}$ , alors

$$\hat{\gamma}(c) = Q(X'X + \kappa I_p)^{-1} Q'D'Z,$$

et en déduire que

$$\hat{\beta} = Q'\gamma = (X'X + \kappa I_p)^{-1} X'Y.$$

**Remarque :** pour une valeur particulière du vecteur  $c$ , nous retrouvons l'estimateur ridge. Ce type d'estimateur permet une généralisation de la régression ridge.

**Exercice 8.7 (Généralisation de la régression ridge)**

Soit le problème de minimisation suivant (ridge généralisé) :

$$\hat{\beta}_{\text{RG}}(\tau_j) = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|^2 - \sum_{j=1}^p \tau_j(\beta_j^2).$$

Montrer qu'à l'optimum nous avons

$$\hat{\beta}_{\text{RG}} = (X'X - \Delta)^{-1}X'Y,$$

où  $\Delta = \text{diag}(\dots, \delta_j, \dots)$ .

En déduire que le nombre effectif de paramètres est  $\text{tr}(X(X'X - \Delta)^{-1}X')$ .

**Exercice 8.8 (Centrage, centrage-réduction et coefficient constant)**

Soit un modèle de régression  $Y = X\beta + \varepsilon$ . La dernière colonne (la  $p^e$ ) de  $X$  est le vecteur  $\mathbb{1}_n$ .

1. Soit les variables  $\{X_j\}$  et  $Y$  et celles centrées notées  $\{\tilde{X}_j\}$  et  $\tilde{Y}$ . Montrer que la dernière colonne de  $\tilde{X}$  regroupant les variables  $\{\tilde{X}_j\}$  vaut 0. La matrice  $\tilde{X}$  sera dorénavant la matrice  $X$  centrée et privée de sa dernière colonne de 0. Elle est donc de dimension  $n \times (p-1)$ .
2. Soit le modèle suivant :  $\tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{\beta} + \varepsilon$ . En identifiant ce modèle avec le modèle de régression  $Y = X\beta + \varepsilon$ , trouver la valeur de  $\beta_p$  en fonction de  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{p-1}$  et des moyennes empiriques de  $Y$  et  $X$ . Ce coefficient  $\beta_p$  associé à la variable  $\mathbb{1}$  est appelé coefficient constant (ou *intercept* en anglais).
3. Supposons maintenant que les variables  $\{X_j\}$  sont centrées-réduites et que  $Y$  est simplement centrée. Nous continuons à les noter  $\{\tilde{X}_j\}$  et  $\tilde{Y}$ . Que valent  $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$  en fonction de  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{p-1}$ ? Que vaut le coefficient constant  $\beta_p$ ?
4. Même question que précédemment avec  $X$  et  $Y$  centrées-réduites.

**Exercice 8.9 (††IC pour la régression ridge)**

Soit un modèle de régression  $Y = X\beta + \varepsilon$  et nous nous intéressons à la régression ridge. Les variables sont supposées déjà centrées-réduites. Nous allons considérer que  $\tilde{\kappa}$  est un coefficient fixé. Nous supposerons vérifiée l'hypothèse  $\mathcal{H}_3$  de normalité des résidus. Nous nous plaçons dans le cas où la régression ridge est utile, c'est-à-dire  $X\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa}) \neq P_X Y$ .

1. Dans le cadre de la régression des MC pour  $Y = X\beta + \varepsilon$ , rappeler la loi de  $\hat{\beta}$ .
2. Rappeler la définition de l'estimateur  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$ .
3. Trouver la loi de  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$ .
4. Soit l'estimateur de  $\sigma^2$  issu de la régression ridge :  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}^2 = \|Y - \hat{Y}_{\text{ridge}}\|^2 / (n - \text{tr}(H^*(\tilde{\kappa}))$ , où  $\text{tr}(H^*(\tilde{\kappa}))$  est le nombre effectif de paramètres de la régression ridge. Nous allons considérer le vecteur aléatoire  $Y - \hat{Y}_{\text{ridge}}$ . Montrer qu'il n'est pas orthogonal à  $\hat{Y}_{MC}$ .

5. Trouver le point de la démonstration du théorème 3.3 qui n'est pas assuré avec l'estimateur  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et l'estimateur  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}^2$ . Nous en déduisons alors qu'il n'est plus assuré que l'intervalle de confiance de  $\beta$  en régression ridge soit de la forme énoncée par le théorème 3.1 (en remplaçant  $\hat{\beta}$  par  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et  $\hat{\sigma}^2$  par  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}^2$ ).
6. Concevoir un algorithme calculant les IC par bootstrap pour chaque coordonnée de  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$ , avec  $\tilde{\kappa}$  considéré comme fixé.
7. Généraliser la question précédente en incluant la détermination de  $\tilde{\kappa}$ .

**Exercice 8.10 (†Théorème 8.2)**

Démontrer par récurrence le théorème 8.2 (indice : montrer aussi que  $X^{(j)} = X \prod_{i=1}^{j-1} (I - w^{(i)}(t^{(i)'} t^{(i)})^{-1} t^{(i)'} X)$ ).

## Annexe A

# Corrections des exercices

### A.1 Régression linéaire simple

#### Exercice 1.1 (Questions de cours)

B, A, B, A.

#### Exercice 1.2 (Biais des estimateurs)

Les  $\hat{\beta}_j$  sont fonctions de  $Y$  (aléatoire), ce sont donc des variables aléatoires. Une autre façon d'écrire  $\hat{\beta}_2$  en fonction de  $\beta_2$  consiste à remplacer  $y_i$  dans (1.4) par sa valeur soit

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\beta_1 \sum(x_i - \bar{x}) + \beta_2 \sum x_i(x_i - \bar{x}) + \sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \\ &= \beta_2 + \frac{\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

Par hypothèse  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ , les autres termes ne sont pas aléatoires, le résultat est démontré.

Le résultat est identique pour  $\hat{\beta}_1$  car  $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = \mathbb{E}(\bar{y}) - \bar{x}\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \beta_1 + \bar{x}\beta_2 - \bar{x}\beta_2 = \beta_1$ , le résultat est démontré.

#### Exercice 1.3 (Variance de $\hat{\beta}_2$ )

Nous avons

$$V(\hat{\beta}_2) = V\left(\beta_2 + \frac{\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right).$$

Or  $\beta_2$  est inconnu mais pas aléatoire et les  $x_i$  ne sont pas aléatoires donc

$$\begin{aligned}V(\hat{\beta}_2) &= V\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{V(\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i)}{[\sum(x_i - \bar{x})^2]^2} \\ &= \frac{\sum_{i,j}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{[\sum(x_i - \bar{x})^2]^2}.\end{aligned}$$

Or  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}\sigma^2$  donc

$$\text{V}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sigma^2}{[\sum_i (x_i - \bar{x})^2]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Plus les mesures  $x_i$  sont dispersées autour de leur moyenne, plus  $\text{V}(\hat{\beta}_2)$  est faible et plus l'estimation est précise. Bien sûr, plus  $\sigma^2$  est faible, c'est-à-dire plus les  $y_i$  sont proches de la droite inconnue, plus l'estimation est précise.

#### **Exercice 1.4 (Variance de $\hat{\beta}_1$ )**

Puisque  $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{V}(\hat{\beta}_1) &= \text{V}(\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}) = \text{V}(\bar{y}) + \text{V}(\bar{x} \hat{\beta}_2) - 2 \text{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2 \bar{x}) \\ &= \text{V}\left(\frac{\sum y_i}{n}\right) + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - 2\bar{x} \text{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - 2\bar{x} \sum_i \text{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2). \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2) &= \frac{1}{n} \text{Cov}\left(\sum_i (\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i), \frac{\sum_j (x_j - \bar{x}) \varepsilon_j}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \text{Cov}\left(\varepsilon_i, \frac{\sum_j (x_j - \bar{x}) \varepsilon_j}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2} \sum_i \frac{1}{n} \text{Cov}\left(\varepsilon_i, \sum_j (x_j - \bar{x}) \varepsilon_j\right) \\ &= \frac{\sigma^2 \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\text{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Là encore, plus  $\sigma^2$  est faible, c'est-à-dire plus les  $y_i$  sont proches de la droite inconnue, plus l'estimation est précise. Plus les valeurs  $x_i$  sont dispersées autour de leur moyenne, plus la variance de l'estimateur sera faible. De même, une faible moyenne  $\bar{x}$  en valeur absolue contribue à bien estimer  $\beta_1$ .

#### **Exercice 1.5 (Covariance de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ )**

Nous avons

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \text{Cov}(\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}, \hat{\beta}_2) = \text{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2) - \bar{x} \text{V}(\hat{\beta}_2) = -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

La covariance entre  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est négative. L'équation  $\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}$  indique que la droite des MC passe par le centre de gravité du nuage  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Supposons  $\bar{x}$  positif, nous voyons bien que, si nous augmentons la pente, l'ordonnée à l'origine va diminuer et vice versa. Nous retrouvons donc le signe négatif pour la covariance entre  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ .

### Exercice 1.6 (Théorème de Gauss-Markov)

L'estimateur des MC s'écrit  $\tilde{\beta}_2 = \sum_{i=1}^n p_i y_i$ , avec  $p_i = (x_i - \bar{x}) / \sum(x_i - \bar{x})^2$ . Considérons un autre estimateur  $\tilde{\beta}_2$  linéaire en  $y_i$  et sans biais, c'est-à-dire

$$\tilde{\beta}_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i.$$

Montrons que  $\sum \lambda_i = 0$  et  $\sum \lambda_i x_i = 1$ . L'égalité  $\mathbb{E}(\tilde{\beta}_2) = \beta_1 \sum \lambda_i + \beta_2 \sum \lambda_i x_i + \sum \lambda_i \mathbb{E}(\varepsilon_i)$  est vraie pour tout  $\beta_2$  et  $\tilde{\beta}_2$  est sans biais donc  $\mathbb{E}(\tilde{\beta}_2) = \beta_2$  pour tout  $\beta_2$ , c'est-à-dire que  $\sum \lambda_i = 0$  et  $\sum \lambda_i x_i = 1$ .

Montrons que  $V(\tilde{\beta}_2) \geq V(\hat{\beta}_2)$ .

$$V(\tilde{\beta}_2) = V(\tilde{\beta}_2 - \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_2) = V(\tilde{\beta}_2 - \hat{\beta}_2) + V(\hat{\beta}_2) + 2 \operatorname{Cov}(\tilde{\beta}_2 - \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2).$$

$$\operatorname{Cov}(\tilde{\beta}_2 - \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2) = \operatorname{Cov}(\tilde{\beta}_2, \hat{\beta}_2) - V(-\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2 \sum \lambda_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = 0,$$

et donc

$$V(\tilde{\beta}_2) = V(\tilde{\beta}_2 - \hat{\beta}_2) + V(\hat{\beta}_2).$$

Une variance est toujours positive et donc

$$V(\tilde{\beta}_2) \geq V(\hat{\beta}_2).$$

Le résultat est démontré. On obtiendrait la même chose pour  $\hat{\beta}_1$ .

### Exercice 1.7 (Somme des résidus)

Il suffit de remplacer les résidus par leur définition et de remplacer  $\hat{\beta}_1$  par son expression

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i = \sum_i (y_i - \bar{y} + \hat{\beta}_2 \bar{x} - \hat{\beta}_2 x_i) = \sum_i (y_i - \bar{y}) - \hat{\beta}_2 \sum_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

### Exercice 1.8 (Estimateur de la variance du bruit)

Récrivons les résidus en constatant que  $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$  et  $\beta_1 = \bar{y} - \beta_2 \bar{x} - \bar{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i \\ &= \bar{y} - \beta_2 \bar{x} - \bar{\varepsilon} + \beta_2 x_i + \varepsilon_i - \bar{y} + \hat{\beta}_2 \bar{x} - \hat{\beta}_2 x_i \\ &= (\beta_2 - \hat{\beta}_2)(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}). \end{aligned}$$

En développant et en nous servant de l'écriture de  $\hat{\beta}_2$  donnée dans la solution de l'exercice 1.2, nous avons

$$\begin{aligned}\sum \hat{\varepsilon}_i^2 &= (\beta_2 - \hat{\beta}_2)^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 + 2(\beta_2 - \hat{\beta}_2) \sum (x_i - \bar{x})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \\ &= (\beta_2 - \hat{\beta}_2)^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 - 2(\beta_2 - \hat{\beta}_2)^2 \sum (x_i - \bar{x})^2.\end{aligned}$$

Prenons en l'espérance

$$\mathbb{E} \left( \sum \hat{\varepsilon}_i^2 \right) = \mathbb{E} \left( \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 \right) - \sum (x_i - \bar{x})^2 V(\hat{\beta}_2) = (n - 2)\sigma^2.$$

### Exercice 1.9 (Variance de $\hat{y}_{n+1}^p$ )

Calculons la variance

$$\begin{aligned}V(\hat{y}_{n+1}^p) &= V(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{n+1}) = V(\hat{\beta}_1) + x_{n+1}^2 V(\hat{\beta}_2) + 2x_{n+1} \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \left( \frac{\sum x_i^2}{n} + x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\bar{x} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} + \bar{x}^2 + x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\bar{x} \right) \\ &= \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right).\end{aligned}$$

Plus la valeur à prévoir s'éloigne du centre de gravité, plus la valeur prévue sera variable (i.e. de variance élevée).

### Exercice 1.10 (Variance de l'erreur de prévision)

Nous obtenons la variance de l'erreur de prévision en nous servant du fait que  $y_{n+1}$  est fonction de  $\varepsilon_{n+1}$  seulement, alors que  $\hat{y}_{n+1}^p$  est fonction des autres  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Les deux quantités ne sont pas corrélées. Nous avons alors

$$V(\hat{\varepsilon}_{n+1}^p) = V(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^p) = V(y_{n+1}) + V(\hat{y}_{n+1}^p) = \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

### Exercice 1.11 ( $R^2$ et coefficient de corrélation)

Le coefficient  $R^2$  s'écrit

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} + \hat{\beta}_2 x_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \\ &= \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \\ &= \frac{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \rho^2(X, Y).\end{aligned}$$

**Exercice 1.12 (Les arbres)**

Le calcul donne

$$\hat{\beta}_1 = \frac{6.26}{28.29} = 0.22 \quad \hat{\beta}_0 = 18.34 - 0.22 \times 34.9 = 10.662.$$

Nous nous servons de la propriété  $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0$  pour obtenir

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{20} (\hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_1 \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2} = 0.22^2 \times \frac{28.29}{2.85} = 0.48.$$

Les statistiques de test valent 5.59 pour  $\beta_0$  et 4.11 pour  $\beta_1$ . Elles sont à comparer à un fractile de la loi de Student admettant 18 ddl, soit 2.1. Nous rejetons dans les deux cas l'hypothèse de nullité du coefficient. Nous avons modélisé la hauteur par une fonction affine de la circonférence, il semblerait évident que la droite passe par l'origine (un arbre admettant un diamètre proche de zéro doit être petit), or nous rejetons l'hypothèse  $\beta_0 = 0$ . Les données mesurées indiquent des arbres dont la circonférence varie de 26 à 43 cm, les estimations des paramètres du modèle sont valides pour des données proches de [26; 43].

**Exercice 1.13 (Modèle quadratique)**

Les modèles sont

$$\begin{aligned} 03 &= \beta_1 + \beta_2 T12 + \varepsilon \quad \text{modèle classique,} \\ 03 &= \gamma_1 + \gamma_2 T12^2 + \epsilon \quad \text{modèle demandé.} \end{aligned}$$

L'estimation des paramètres donne

$$\begin{aligned} \widehat{03} &= 31.41 + 2.7 T12 \quad R^2 = 0.28 \quad \text{modèle classique,} \\ \widehat{03} &= 53.74 + 0.075 T12^2 \quad R^2 = 0.35 \quad \text{modèle demandé.} \end{aligned}$$

Les deux modèles ont le même nombre de paramètres, nous préférons le modèle quadratique car le  $R^2$  est plus élevé.

## A.2 Régression linéaire multiple

**Exercice 2.1 (Questions de cours)**

A, A, B, B, B, C.

**Exercice 2.2 (Covariance de  $\hat{\varepsilon}$  et de  $\hat{Y}$ )**

Les matrices  $X$ ,  $P_X$  et  $P_{X^\perp}$  sont non aléatoires. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{Y}) &= \mathbb{E}(\hat{\varepsilon} \hat{Y}') - \mathbb{E}(\hat{\varepsilon}) \mathbb{E}(\hat{Y}') \\ &= \mathbb{E}[P_{X^\perp} \varepsilon (P_X(X\beta + \varepsilon))'] \\ &= \mathbb{E}(P_{X^\perp} \varepsilon \beta' X') + \mathbb{E}(P_{X^\perp} \varepsilon \varepsilon' P_X) \\ &= 0 + P_{X^\perp} \sigma^2 P_X = 0. \end{aligned}$$

**Exercice 2.3 (Théorème de Gauss-Markov)**

Nous devons montrer que, parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, l'estimateur de MC est celui qui a la plus petite variance. La linéarité de  $\hat{\beta}$  est évidente. Calculons sa variance :

$$V(\hat{\beta}) = V((X'X)^{-1}X'Y) = (X'X)^{-1}X'V(Y)X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}.$$

Nous allons montrer que, pour tout autre estimateur  $\tilde{\beta}$  de  $\beta$  linéaire et sans biais,  $V(\tilde{\beta}) \geq V(\hat{\beta})$ . Décomposons la variance de  $\tilde{\beta}$

$$V(\tilde{\beta}) = V(\tilde{\beta} - \hat{\beta} + \hat{\beta}) = V(\tilde{\beta} - \hat{\beta}) + V(\hat{\beta}) - 2 \operatorname{Cov}(\tilde{\beta} - \hat{\beta}, \hat{\beta}).$$

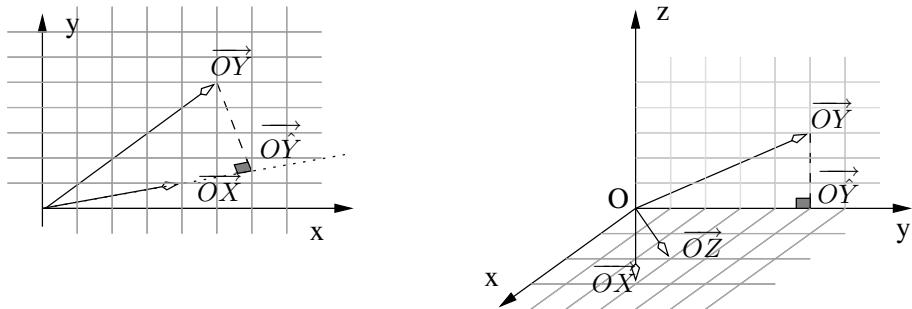
Les variances étant définies positives, si nous montrons que  $\operatorname{Cov}(\tilde{\beta} - \hat{\beta}, \hat{\beta}) = 0$ , nous aurons fini la démonstration.

Puisque  $\tilde{\beta}$  est linéaire,  $\tilde{\beta} = AY$ . De plus, nous savons qu'il est sans biais, c'est-à-dire  $E(\tilde{\beta}) = \beta$  pour tout  $\beta$ , donc  $AX = I$ . La covariance devient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\tilde{\beta} - \hat{\beta}, \hat{\beta}) &= \operatorname{Cov}(AY, (X'X)^{-1}X'Y) - V(\hat{\beta}) \\ &= \sigma^2 AX(X'X)^{-1} - \sigma^2(X'X)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

**Exercice 2.4 (Représentation des variables)**

Nous représentons les données dans  $\mathbb{R}^2$  pour le premier jeu et dans  $\mathbb{R}^3$  pour le second.



**Fig. 2.1.** Représentation des données.

Dans le premier modèle, nous projetons  $Y$  sur l'espace engendré par  $X$ , soit la droite de vecteur directeur  $\vec{OX}$ . Nous trouvons par le calcul  $\hat{\beta} = 1.47$ , résultat que nous aurions pu trouver graphiquement car  $\vec{OY}' = \hat{\beta} \vec{OX}$ .

Considérons  $\mathbb{R}^3$  muni de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les vecteurs  $\vec{OX}$  et  $\vec{OZ}$  engendrent le même plan que celui engendré par  $(\vec{i}, \vec{j})$ . La projection de  $Y$  sur ce plan donne  $\vec{OY}'$ . Il est quasiment impossible de trouver  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\gamma}$  graphiquement mais nous trouvons par le calcul  $\hat{\beta} = -3.33$  et  $\hat{\gamma} = 5$ .

**Exercice 2.5 (Modèles emboîtés)**

Nous obtenons

$$\hat{Y}_p = X\hat{\beta} \quad \text{et} \quad \hat{Y}_q = X_q\hat{\gamma}.$$

Par définition du  $R^2$ , il faut comparer la norme au carré des vecteurs  $\hat{Y}_p$  et  $\hat{Y}_q$ . Notons les espaces engendrés par les colonnes de  $X_q$  et  $X$ ,  $\mathfrak{I}_{X_q}$  et  $\mathfrak{I}_X$ , nous avons  $\mathfrak{I}_{X_q} \subset \mathfrak{I}_X$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\hat{Y}_p &= P_{X_p} Y = (P_{X_q} + P_{X_q^\perp})P_{X_p} Y = P_{X_q}P_{X_p} Y + P_{X_q^\perp}P_{X_p} Y \\ &= P_{X_q} Y + P_{X_q^\perp \cap X_p} Y \\ &= \hat{Y}_q + P_{X_q^\perp \cap X_p} Y.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|\hat{Y}_p\|^2 = \|\hat{Y}_q\|^2 + \|P_{X_q^\perp \cap X_p} Y\|^2 \geq \|\hat{Y}_q\|^2,$$

d'où

$$R^2(p) = \frac{\|\hat{Y}_p\|^2}{\|Y\|^2} \geq \frac{\|\hat{Y}_q\|^2}{\|Y\|^2} = R^2(q).$$

En conclusion, lorsque les modèles sont emboîtés  $\mathfrak{I}_{X_q} \subset \mathfrak{I}_X$ , le  $R^2$  du modèle le plus grand (ayant le plus de variables) sera toujours plus grand que le  $R^2$  du modèle le plus petit.

**Exercice 2.6**

La matrice  $X'X$  est symétrique,  $n$  vaut 30 et  $\bar{x} = \bar{z} = 0$ . Le coefficient de corrélation

$$\rho_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{30} (z_i - \bar{z})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{30} x_i^2 \sum_{i=1}^{30} z_i^2}} = \frac{7}{\sqrt{150}} = 0.57.$$

Nous avons

$$y_i = -2 + x_i + z_i + \hat{\varepsilon}_i$$

et la moyenne vaut alors

$$\bar{y} = -2 + \bar{x} + \bar{z} + \frac{1}{n} \sum_i \hat{\varepsilon}_i.$$

La constante étant dans le modèle, la somme des résidus est nulle car le vecteur  $\hat{\varepsilon}$  est orthogonal au vecteur  $\mathbb{1}$ . Nous obtenons donc que la moyenne de  $Y$  vaut 2 car  $\bar{x} = 0$  et  $\bar{z} = 0$ . Nous obtenons en développant

$$\begin{aligned}\|\hat{Y}\|^2 &= \sum_{i=1}^{30} (-2 + x_i + z_i)^2 \\ &= 4 + 10 + 60 + 14 = 88.\end{aligned}$$

Par le théorème de Pythagore, nous concluons que

$$\text{SCT} = \text{SCE} + \text{SCR} = 88 + 12 = 100.$$

### Exercice 2.7 (Régression orthogonale)

Les vecteurs étant orthogonaux, nous avons  $\mathfrak{I}_X = \mathfrak{I}_U \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{I}_V$ . Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\hat{Y}_X = P_X Y &= (P_U + P_{U^\perp})P_X Y \\ &= P_U P_X Y + P_{U^\perp} P_X Y = P_U Y + P_{U^\perp \cap X} Y \\ &= \hat{Y}_U + \hat{Y}_V.\end{aligned}$$

La suite de l'exercice est identique. En conclusion, effectuer une régression multiple sur des variables orthogonales revient à effectuer  $p$  régressions simples.

### Exercice 2.8 (Moindres carrés contraints)

L'estimateur des MC vaut

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

calculons maintenant l'estimateur contraint. Nous pouvons procéder de deux manières différentes. La première consiste à écrire le lagrangien

$$\mathcal{L} = S(\beta) - \lambda'(R\beta - r).$$

Les conditions de Lagrange permettent d'obtenir un minimum

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_c - R'\hat{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = R\hat{\beta}_c - r = 0, \end{cases}$$

Multiplions à gauche la première égalité par  $R(X'X)^{-1}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}-2R(X'X)^{-1}X'Y + 2R(X'X)^{-1}X'X\hat{\beta}_c - R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda} &= 0 \\ -2R(X'X)^{-1}X'Y + 2R\hat{\beta}_c - R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda} &= 0 \\ -2R(X'X)^{-1}X'Y + 2r - R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda} &= 0.\end{aligned}$$

Nous obtenons alors pour  $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = 2 \left[ R(X'X)^{-1}R' \right]^{-1} \left[ r - R(X'X)^{-1}X'Y \right].$$

Remplaçons ensuite  $\hat{\lambda}$

$$\begin{aligned}-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_c - R'\hat{\lambda} &= 0 \\ -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_c - 2R' \left[ R(X'X)^{-1}R' \right]^{-1} \left[ r - R(X'X)^{-1}X'Y \right] &= 0,\end{aligned}$$

d'où nous calculons  $\hat{\beta}_c$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_c &= (X'X)^{-1}X'Y + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - R\hat{\beta}) \\ &= \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - R\hat{\beta}).\end{aligned}$$

La fonction  $S(\beta)$  à minimiser est une fonction convexe sur un ensemble convexe (contraintes linéaires), le minimum est donc unique.

Une autre façon de procéder consiste à utiliser les projecteurs. Supposons pour commencer que  $r = 0$ , la contrainte vaut donc  $R\beta = 0$ . Calculons analytiquement le projecteur orthogonal sur  $\mathfrak{I}_0$ . Rappelons que  $\dim(\mathfrak{I}_0) = p - q$ , nous avons de plus

$$\begin{aligned}R\beta &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \in \text{Ker}(R) \\ R(X'X)^{-1}X'X\beta &= 0 \\ U'X\beta &= 0 \quad \text{où} \quad U = X(X'X)^{-1}R'.\end{aligned}$$

Nous avons donc que  $\forall \beta \in \text{ker}(R)$ ,  $U'X\beta = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathfrak{I}_U$ , l'espace engendré par les colonnes de  $U$ , est orthogonal à l'espace engendré par  $X\beta$ ,  $\forall \beta \in \text{ker}(R)$ . Nous avons donc que  $\mathfrak{I}_U \perp \mathfrak{I}_0$ . Comme  $U = X[(X'X)^{-1}R']$ ,  $\mathfrak{I}_U \subset \mathfrak{I}_X$ . En résumé, nous avons

$$\mathfrak{I}_U \subset \mathfrak{I}_X \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}_U \perp \mathfrak{I}_0 \quad \text{donc} \quad \mathfrak{I}_U \subset (\mathfrak{I}_X \cap \mathfrak{I}_0^\perp).$$

Afin de montrer que les colonnes de  $U$  engendrent  $\mathfrak{I}_X \cap \mathfrak{I}_0^\perp$ , il faut démontrer que la dimension des deux sous-espaces est égale. Or le rang de  $U$  vaut  $q$  ( $R'$  est de rang  $q$ ,  $(X'X)^{-1}$  est de rang  $p$  et  $X$  est de rang  $p$ ) donc la dimension de  $\mathfrak{I}_U$  vaut  $q$ . De plus, nous avons vu que

$$\mathfrak{I}_X = \mathfrak{I}_0 \overset{\perp}{\oplus} (\mathfrak{I}_0^\perp \cap \mathfrak{I}_X)$$

et donc, en passant aux dimensions des sous-espaces, nous en déduisons que  $\dim(\mathfrak{I}_0^\perp \cap \mathfrak{I}_X) = q$ . Nous venons de démontrer que

$$\mathfrak{I}_U = \mathfrak{I}_X \cap \mathfrak{I}_0^\perp.$$

Le projecteur orthogonal sur  $\mathfrak{I}_U = \mathfrak{I}_X \cap \mathfrak{I}_0^\perp$  s'écrit

$$P_U = U(U'U)^{-1}U' = X(X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R(X'X)^{-1}X'.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\hat{Y} - \hat{Y}_0 &= P_U Y \\ X\hat{\beta} - X\hat{\beta}_0 &= X(X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R(X'X)^{-1}X'Y \\ &= X(X'X)^{-1}R[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta}.\end{aligned}$$

Cela donne

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta}.$$

Si maintenant  $r \neq 0$ , nous avons alors un sous-espace affine défini par  $\{\beta \in \mathbb{R}^p : R\beta = r\}$  dans lequel nous cherchons une solution qui minimise les moindres carrés. Un sous-espace affine peut être défini de manière équivalente par un point particulier  $\beta_p \in \mathbb{R}^p$  tel que  $R\beta_p = r$  et le sous-espace vectoriel associé  $\mathfrak{S}_0^v = \{\beta \in \mathbb{R}^p : R\beta = 0\}$ . Les points du sous-espace affine sont alors  $\{\beta_0 \in \mathbb{R}^p : \beta_0 = \beta_p + \beta_0^v, \beta_0^v \in \mathfrak{S}_0^v \text{ et } \beta_p : R\beta_p = r\}$ . La solution qui minimise les moindres carrés, notée  $\hat{\beta}_0$ , est élément de ce sous-espace affine et est définie par  $\hat{\beta}_0 = \beta_p + \hat{\beta}_0^v$  où

$$\hat{\beta}_0^v = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta}.$$

Nous savons que  $R\beta_p = r$  donc

$$R\beta_p = [R(X'X)^{-1}R'][R(X'X)^{-1}R']^{-1}r$$

donc une solution particulière est  $\beta_p = (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}r$ . La solution  $\hat{\beta}_0$  qui minimise les moindres carrés sous la contrainte  $R\beta = r$  est alors

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \beta_p + \hat{\beta}_0^v \\ &= (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}r + \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta} \\ &= \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}).\end{aligned}$$

### A.3 Inférence dans le modèle gaussien

#### Exercice 3.1 (Questions de cours)

A, C, A, B, B.

#### Exercice 3.2 (Théorème 3.1)

L'IC (i) découle de la propriété (i) de la proposition 3.3. La propriété (ii) donnant un IC pour  $\sigma^2$  découle de la loi de  $\hat{\sigma}^2$ . Enfin, la propriété (iii) est une conséquence de la loi obtenue propriété (ii) de la proposition 3.3.

#### Exercice 3.3 (Test et $R^2$ )

En utilisant l'orthogonalité des sous-espaces (fig. 3.3 p. 62) et le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2 = \|\hat{\varepsilon}_0\|^2 - \|\hat{\varepsilon}\|^2.$$

Nous pouvons le démontrer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\|\hat{Y}_0 - \hat{Y}\|^2 &= \|\hat{Y}_0 - Y + Y - \hat{Y}\|^2 \\ &= \|\hat{\varepsilon}_0\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 + 2\langle \hat{Y}_0 - Y, Y - \hat{Y} \rangle \\ &= \|\hat{\varepsilon}_0\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 - 2\langle Y - \hat{Y}_0, Y - \hat{Y} \rangle \\ &= \|\hat{\varepsilon}_0\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 - 2\langle P_{X_0^\perp}Y, P_{X^\perp}Y \rangle \\ &= \|\hat{\varepsilon}_0\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 - 2\langle (P_{X^\perp} + P_X)P_{X_0^\perp}Y, P_{X^\perp}Y \rangle.\end{aligned}$$

Or  $\mathfrak{I}(X_0) \subset \mathfrak{I}(X)$ , nous avons donc  $P_{X^\perp} P_{X_0^\perp} = P_{X^\perp}$ . De plus,  $\hat{\varepsilon} = P_{X^\perp} Y$ , cela donne

$$\begin{aligned}\langle (P_{X^\perp} + P_X) P_{X_0^\perp} Y, P_{X^\perp} Y \rangle &= \langle P_{X^\perp} Y, P_{X^\perp} Y \rangle + \langle P_X P_{X_0^\perp} Y, P_{X^\perp} Y \rangle \\ &= \|\hat{\varepsilon}\|^2 + 0.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré, revenons à la statistique de test. Introduisons les différentes écritures du  $R^2$

$$R^2 = \frac{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2}{\|Y - \bar{Y}\|^2} = 1 - \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{\|Y - \bar{Y}\|^2}.$$

La statistique de test vaut

$$\begin{aligned}F &= \frac{\|\hat{\varepsilon}_0\|^2 - \|\hat{\varepsilon}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2} \frac{n-p}{p-p_0} \\ &= \frac{\|\hat{\varepsilon}_0\|^2/\|Y - \bar{Y}\|^2 - \|\hat{\varepsilon}\|^2/\|Y - \bar{Y}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2/\|Y - \bar{Y}\|^2} \frac{n-p}{p-p_0},\end{aligned}$$

nous obtenons

$$F = \frac{R^2 - R_0^2}{1 - R^2} \frac{n-p}{p-p_0},$$

soit le résultat annoncé. Cette dernière quantité est toujours positive car  $R_0^2 \leq R^2$  et nous avons là un moyen de tester des modèles emboités *via* le coefficient de détermination.

### Exercice 3.4 (Ozone)

Les résultats sont dans l'ordre

$$6.2, 0.8, 6.66, -1.5, -1, 50, 5, 124.$$

La statistique de test de nullité du paramètre se trouve dans la troisième colonne, nous conservons  $H_0$  pour les paramètres associés à Ne9 et Ne12, et la rejetons pour les autres. La statistique de test de nullité simultanée des paramètres autres que la constante vaut 50. Nous rejetons  $H_0$ .

Nous sommes en présence de modèles emboités, nous pouvons appliquer la formule adaptée (voir l'exercice précédent) :

$$\begin{aligned}F &= \frac{R^2 - R_0^2}{1 - R^2} \frac{n-p}{p-p_0} \\ &= \frac{0.66 - 0.5}{1 - 0.66} \frac{124}{2} = 29.\end{aligned}$$

Nous conservons  $H_0$ , c'est-à-dire le modèle le plus simple.

**Exercice 3.5 (Equivalence du test  $T$  et du test  $F$ )**

Récrivons la statistique de test  $F$ , en se rappelant que  $X_0$  est la matrice  $X$  privée de sa  $j^{\text{e}}$  colonne, celle correspondant au coefficient que l'on teste :

$$F = \frac{\|X\hat{\beta} - P_{X_0}X\hat{\beta}\|^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{\|X_j\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_j P_{X_0}X_j\|^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{\hat{\beta}_j^2}{\hat{\sigma}^2} X'_j(I - P_{X_0})X_j.$$

Récrivons maintenant le carré de la statistique  $T$  en explicitant  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2$  :

$$T^2 = \frac{\hat{\beta}_j^2}{\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{jj}},$$

où  $[(X'X)^{-1}]_{jj}$  est le  $j^{\text{e}}$  élément diagonal de la matrice  $(X'X)^{-1}$ . Afin de calculer ce terme, nous utilisons la formule permettant d'obtenir l'inverse d'une matrice bloc, formule donnée en annexe B.2 p. 283. Pour appliquer facilement cette formule, en changeant l'ordre des variables, la matrice  $X$  devient  $(X_0|X_j)$  et  $X'X$  s'écrit alors

$$X'X = \left( \begin{array}{c|c} X'_0X_0 & X'_0X_j \\ \hline X'_jX_0 & X'_jX_j \end{array} \right).$$

Son inverse, en utilisant la formule d'inverse de matrice bloc, est

$$[(X'X)^{-1}]_{jj} = (X'_jX_j - X'_jX_0(X'_0X_0)^{-1}X'_0X_j)^{-1} = (X'_j(I - P_{X_0})X_j)^{-1}.$$

Nous avons donc  $T^2 = F$ . Au niveau des lois, l'égalité est aussi valable et nous avons que le carré d'un Student à  $(n - p)$  ddl est une loi de Fisher à  $(1, n - p)$  ddl. Bien entendu, le quantile  $(1 - \alpha)$  d'une loi de Fisher correspond au quantile  $1 - \alpha/2$  d'une loi de Student. La loi  $T$  est symétrique autour de 0 et donc, lorsqu'elle est élevée au carré, les valeurs plus faibles que  $t_{n-p}(\alpha/2)$ , qui ont une probabilité sous  $H_0$  de  $\alpha/2$  d'apparaître, et celles plus fortes que  $t_{n-p}(1 - \alpha/2)$ , qui ont une probabilité sous  $H_0$  de  $\alpha/2$  d'apparaître, deviennent toutes plus grandes que  $t_{n-p}^2(1 - \alpha/2)$ . La probabilité que ces valeurs dépassent ce seuil sous  $H_0$  est de  $\alpha$  et correspond donc bien par définition à  $f_{1,n-p}(1 - \alpha)$ .

**Exercice 3.6 (Equivalence du test  $F$  et du test de VM.)**

Nous avons noté la vraisemblance en début du chapitre par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n f_Y(y_i) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 \right] \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Cette vraisemblance est maximale lorsque  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des MC et que

$\hat{\sigma}^2 = \|Y - X\hat{\beta}\|^2/n$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}\max_{\beta, \sigma^2} \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) &= \left( \frac{n}{2\pi \|Y - X\hat{\beta}\|^2} \right)^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \\ &= \left( \frac{n}{2\pi \text{SCR}} \right)^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) = \mathcal{L}(Y, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2),\end{aligned}$$

où  $\text{SCR} = \|Y - X\hat{\beta}\|^2$ .

Sous l'hypothèse  $H_0$  nous obtenons de façon évidente le résultat suivant :

$$\max_{\beta, \sigma^2} \mathcal{L}_0(Y, \beta_0, \sigma^2) = \left( \frac{n}{2\pi \text{SCR}_0} \right)^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) = \mathcal{L}_0(Y, \hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2),$$

où  $\text{SCR}_0$  correspond à la somme des carrés résiduels sous  $H_0$ , c'est-à-dire  $\text{SCR}_0 = \|Y - X_0\hat{\beta}_0\|^2$ .

On définit le test du rapport de vraisemblance maximale (VM) par la région critique (Lehmann, 1959) suivante :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ Y \in \mathbb{R}^n : \lambda = \frac{\mathcal{L}_0(Y, \hat{\beta}_0, \hat{\sigma}^2)}{\mathcal{L}(Y, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)} < \lambda_0 \right\}.$$

La statistique du rapport de vraisemblance maximale vaut ici

$$\lambda = \left( \frac{\text{SCR}}{\text{SCR}_0} \right)^{n/2} = \left( \frac{\text{SCR}_0}{\text{SCR}} \right)^{-n/2}.$$

Le test du rapport de VM rejette  $H_0$  lorsque la statistique  $\lambda$  est inférieure à une valeur  $\lambda_0$  définie de façon à avoir le niveau du test égal à  $\alpha$ . Le problème qui reste à étudier est de connaître la distribution (au moins sous  $H_0$ ) de  $\lambda$ .

Définissons, pour  $\lambda$  positif, la fonction bijective  $g$  suivante :

$$g(\lambda) = \lambda^{-2/n} - 1.$$

La fonction  $g$  est décroissante (sa dérivée est toujours négative), donc  $\lambda < \lambda_0$  si et seulement si  $g(\lambda) > g(\lambda_0)$ . Cette fonction  $g$  va nous permettre de nous ramener à des statistiques dont la loi est connue. Nous avons alors

$$\begin{aligned}g(\lambda) &> g(\lambda_0) \\ \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} &> g(\lambda_0) \\ \frac{n-p}{p-p_0} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} &> f_0\end{aligned}$$

où  $f_0$  est déterminée par

$$P_{H_0} \left( \frac{n-p}{p-p_0} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}} > f_0 \right) = \alpha,$$

avec la loi de cette statistique qui est une loi  $\mathcal{F}_{p-p_0, n-p}$  (cf. section précédente). Le test du rapport de VM est donc équivalent au test qui rejette  $H_0$  lorsque la statistique

$$F = \frac{n-p}{p-p_0} \frac{\text{SCR}_0 - \text{SCR}}{\text{SCR}}$$

est supérieure à  $f_0$ , où  $f_0$  est la valeur du fractile  $\alpha$  de la loi de Fisher à  $(p-p_0, n-p)$  degrés de liberté.

### Exercice 3.7 (Nouvelles propriétés)

Nous allons utiliser le théorème de factorisation. Une statistique  $T(y_1, \dots, y_n)$  est dite exhaustive si nous pouvons écrire la vraisemblance de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) = g_{(\beta, \sigma^2)}(T(y_1, \dots, y_n)).h(y_1, \dots, y_n).$$

Par le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|Y - X\beta\|^2 = \|Y - \hat{Y} + \hat{Y} - X\beta\|^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 + \|\hat{Y} - X\beta\|^2.$$

Cette décomposition nous permet d'écrire la vraisemblance de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\|Y - X\beta\|^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\|Y - \hat{Y}\|^2 + \|\hat{Y} - X\beta\|^2\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left((n-p)\hat{\sigma}^2 + \|X\hat{\beta} - X\beta\|^2\right)\right] \\ &= g_{(\beta, \sigma^2)}(T(y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

La statistique  $T(y_1, \dots, y_n) = (\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est donc exhaustive. Afin de montrer que cette statistique est complète, nous allons d'abord montrer que le modèle est un modèle exponentiel. Soit

$$\|Y - X\beta\|^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = \|Y\|^2 - 2\beta'X'Y + \|X\beta\|^2.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y, \beta, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\|Y - X\beta\|^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\|Y\|^2 - 2\beta'X'Y\right)\right] \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\|X\beta\|^2\right] \\ &= K(\beta, \sigma^2) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\|Y\|^2 - 2\sum_{j=1}^p \beta_j(X'Y)_j\right)\right] \\ &= K(\beta, \sigma^2) \exp\left[-\lambda_{p+1}T_{p+1} + \sum_{j=1}^p \lambda_j T_j\right], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\lambda' &= \left( \lambda_1 = \frac{\beta_1}{\sigma^2}, \dots, \lambda_p = \frac{\beta_p}{\sigma^2}, \lambda_{p+1} = -\frac{1}{2\sigma^2} \right) \\ T' &= (T_1 = (X'Y)_1, \dots, T_p = (X'Y)_p, T_{p+1} = \|Y\|^2).\end{aligned}$$

Par définition d'un modèle exponentiel, la statistique  $T$  est complète. Afin de montrer qu'il en est de même de  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ , il faut vérifier l'existence d'une application bijective entre  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  et  $T$ . Soit  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  fixé. Le vecteur  $(T_1, \dots, T_p)'$  s'écrit  $X'Y$  et nous avons  $(X'X)(X'X)^{-1}X'Y = (X'X)\hat{\beta}$ . Choisir un  $\hat{\beta}$  revient à fixer un unique  $(T_1, \dots, T_p)$ . Inversement, puisque  $(X'X)$  est inversible, choisir  $(T_1, \dots, T_p)$  revient à fixer  $\hat{\beta}$ . La dernière coordonnée  $T_{p+1}$  s'écrit  $\|Y\|^2 = \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2$  d'après le théorème de Pythagore. Nous avons donc  $T_{p+1} = \|X\hat{\beta}\|^2 + (n-p)\hat{\sigma}^2$  qui est défini quel que soit  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ .

Le passage de  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  à  $T$  est donc une application  $g$  :

$$(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) \rightarrow T : g(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = \left( [(X'X)\hat{\beta}]', \|X\hat{\beta}\|^2 + (n-p)\hat{\sigma}^2 \right).$$

A un vecteur  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  correspond donc un vecteur  $T$ . De plus, à un vecteur  $T$  quelconque correspond un  $\hat{\beta}$  unique car  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(T_1, \dots, T_p)'$ . Comme  $\hat{\beta}$  est unique et fixé par  $(T_1, \dots, T_p)$ , alors il correspond à un unique  $\hat{\sigma}^2$  à  $T_{p+1} = \|X\hat{\beta}\|^2 + (n-p)\hat{\sigma}^2$ . Grâce au théorème de Lehmann-Scheffe,  $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  est optimal dans la classe des estimateurs sans biais de  $(\beta, \sigma^2)$  et  $\hat{\beta}$  est donc optimal parmi les estimateurs non linéaires.

## A.4 Validation du modèle

### Exercice 4.1 (Questions de cours)

C si  $\mathbb{1}$  fait partie des variables ou si  $\mathbb{1} \in \mathfrak{S}(X)$ , A, C, C, A.

### Exercice 4.2 (Lemme d'inversion matricielle)

Commençons par effectuer les calculs en notant que la quantité  $u'M^{-1}v$  est un scalaire que nous noterons  $k$ . Nous avons

$$\begin{aligned}& (M + uv') \left( M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + u'M^{-1}v} \right) \\&= MM^{-1} - \frac{MM^{-1}uv'M^{-1}}{1 + k} + uv'M^{-1} - \frac{uv'M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + k} \\&= I + \frac{-uv'M^{-1} + uv'M^{-1} + kuv'M^{-1} - ukv'M^{-1}}{1 + k}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

**Exercice 4.3 (Résidus studentisés)**

- 1-2. Il suffit d'utiliser la définition du produit matriciel et de la somme matricielle et d'identifier les 2 membres des égalités.
3. En utilisant maintenant l'égalité (4.4) sur les inverses, avec  $u = -x_i$  et  $v = x'_i$ , nous avons

$$(X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} = (X' X - x_i x'_i)^{-1} = (X' X)^{-1} + \frac{(X' X)^{-1} x_i x'_i (X' X)^{-1}}{1 - x'_i (X' X)^{-1} x_i}.$$

La définition de  $h_{ii} = x'_i (X' X)^{-1} x_i$  donne le résultat.

4. Calculons la prévision où  $\hat{\beta}_{(i)}$  est l'estimateur de  $\beta$  obtenu sans la  $i^e$  observation

$$\begin{aligned}\hat{y}_i^p &= x'_i \hat{\beta}_{(i)} = x'_i (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} X'_{(i)} Y_{(i)} \\&= x'_i \left[ (X' X)^{-1} + \frac{(X' X)^{-1} x_i x'_i (X' X)^{-1}}{1 - h_{ii}} \right] (X' Y - x'_i y_i) \\&= x'_i \hat{\beta} + \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} x'_i \hat{\beta} - h_{ii} y_i - \frac{h_{ii}^2}{1 - h_{ii}} y_i \\&= \frac{1}{1 - h_{ii}} \hat{y}_i - \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} y_i.\end{aligned}$$

5. Ce dernier résultat donne

$$\hat{\varepsilon}_i = (1 - h_{ii})(y_i - \hat{y}_i^p).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}t_i^* &= \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 - h_{ii}}} \\&= \frac{\sqrt{1 - h_{ii}} (y_i - \hat{y}_i^p)}{\hat{\sigma}_{(i)}}.\end{aligned}$$

Pour terminer, remarquons qu'en multipliant l'égalité de la question 3 à gauche par  $x'_i$  et à droite par  $x_i$

$$\begin{aligned}x'_i (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} x_i &= h_{ii} + \frac{h_{ii}^2}{1 - h_{ii}}. \\1 + x'_i (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} x_i &= 1 + \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} = \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}.\end{aligned}$$

6. Utilisons l'expression

$$t_i^* = \frac{y_i - \hat{y}_i^p}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 + x'_i (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} x_i}}.$$

Nous pouvons alors appliquer la preuve de la proposition 3.4 p. 59, en constatant que la i<sup>e</sup> observation est une nouvelle observation. Nous avons donc  $n - 1$  observations pour estimer les paramètres, cela donne donc un Student à  $n - 1 - p$  paramètres.

#### Exercice 4.4 (Distance de Cook)

Nous reprenons une partie des calculs de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{(i)} &= (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} X'_{(i)} Y_{(i)} \\ &= (X' X)^{-1} [X' Y - x_i y_i] + \frac{1}{1 - h_{ii}} (X' X)^{-1} x_i x'_i (X' X)^{-1} [X' Y - x_i y_i] \\ &= \hat{\beta} - (X' X)^{-1} x_i y_i + \frac{1}{1 - h_{ii}} (X' X)^{-1} x_i x'_i \hat{\beta} - \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} (X' X)^{-1} x_i y_i,\end{aligned}$$

d'où le résultat. Pour obtenir la seconde écriture de la distance de Cook, nous écrivons d'abord que

$$\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta} = \frac{-\hat{\varepsilon}_i}{1 - h_{ii}} (X' X)^{-1} x_i.$$

Puis nous développons

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{1}{p\hat{\sigma}^2} (\hat{\beta}_{[i]} - \hat{\beta})' X' X (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}) \\ &= \frac{1}{p\hat{\sigma}^2} \left( \frac{-\hat{\varepsilon}_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 x'_i (X' X)^{-1} (X' X) (X' X)^{-1} x_i.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

#### Exercice 4.5 (Régression partielle)

Nous avons le modèle suivant :

$$P_{X_j^\perp} Y = \beta_j P_{X_j^\perp} X_j + \eta.$$

L'estimateur des moindres carrés  $\tilde{\beta}_j$  issu de ce modèle vaut

$$\tilde{\beta}_j = (X'_j P_{X_j^\perp} X_j)^{-1} X'_j P_{X_j^\perp} Y.$$

La projection de  $Y$  sur  $\Im(X_{\bar{j}})$  (i.e. la prévision par le modèle sans la variable  $X_j$ ) peut s'écrire comme la projection  $Y$  sur  $\Im(X)$  qui est ensuite projetée sur  $\Im(X_{\bar{j}})$ , puisque  $\Im(X_{\bar{j}}) \subset \Im(X)$ . Ceci s'écrit

$$P_{X_{\bar{j}}} Y = P_{X_{\bar{j}}} P_X Y = P_{X_{\bar{j}}} X \hat{\beta} = P_{X_{\bar{j}}} (X_{\bar{j}} \hat{\beta}_{\bar{j}} + \hat{\beta}_j X_j) = X_{\bar{j}} \hat{\beta}_{\bar{j}} + \hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}} X_j,$$

et donc

$$X_{\bar{j}} \hat{\beta}_{\bar{j}} = P_{X_{\bar{j}}} Y - \hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}} X_j.$$

Récrivons les résidus

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= P_{X^\perp} Y = Y - X\hat{\beta} = Y - X_{\bar{j}}\hat{\beta}_{\bar{j}} - \hat{\beta}_j X_j \\ &= Y - P_{X_{\bar{j}}} Y + \hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}} X_j - \hat{\beta}_j X_j \\ &= (I - P_{X_{\bar{j}}})Y - \hat{\beta}_j(I - P_{X_{\bar{j}}})X_j \\ &= P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y - \hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j.\end{aligned}$$

En réordonnant cette dernière égalité, nous pouvons écrire

$$P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y = \hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j + \hat{\varepsilon}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_j &= (X_j' P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j)^{-1} X_j' P_{X_{\bar{j}}^\perp} Y \\ &= (X_j' P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j)^{-1} X_j' (\hat{\beta}_j P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j + \hat{\varepsilon}) \\ &= \hat{\beta}_j + (X_j' P_{X_{\bar{j}}^\perp} X_j)^{-1} X_j' \hat{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Le produit scalaire  $X_j' \hat{\varepsilon} = \langle X_j, \hat{\varepsilon} \rangle$  est nul car les deux vecteurs appartiennent à des sous-espaces orthogonaux, d'où le résultat.

## A.5 Régression sur variables qualitatives

### Exercice 5.1 (Questions de cours)

A, A, C, B.

### Exercice 5.2 (Analyse de la covariance)

Nous avons pour le modèle complet la matrice suivante :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & x_{1n_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & x_{I1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & x_{In_I} \end{bmatrix}$$

et pour les deux sous-modèles, nous avons les matrices suivantes :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_{11} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & x_{1n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & x_{I1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & x_{In_I} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & x_{I1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x_{In_I} \end{bmatrix}$$

Dans le modèle complet, nous obtenons par le calcul

$$X'X = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & \cdots & \sum x_{i1} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & n_I & 0 & \cdots & \sum x_{iI} \\ \sum x_{i1} & 0 & \cdots & \sum x_{i1}^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \sum x_{iI} & 0 & \cdots & \sum x_{iI}^2 \end{pmatrix} \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_{i1} \\ \vdots \\ \sum y_{iI} \\ \sum_{x_{i1}y_{i1}} \\ \vdots \\ \sum_{x_{iI}y_{iI}} \end{pmatrix}$$

Une inversion par bloc de  $X'X$  et un calcul matriciel donnent le résultat indiqué.

Une autre façon de voir le problème est de partir du problème de minimisation

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_{ij})^2 \\ &= \min \sum_{j=1}^{n_i} (y_{j1} - \alpha_1 - \beta_1 x_{j1})^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_I} (y_{jI} - \alpha_I - \beta_I x_{JI})^2. \end{aligned}$$

Cela revient donc à calculer les estimateurs des MC pour chaque modalité de la variable qualitative.

### Exercice 5.3 (Estimateurs des MC en ANOVA à 1 facteur)

La preuve de cette proposition est relativement longue mais peu difficile. Nous avons toujours  $Y$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  à expliquer. Nous projetons  $Y$  sur le sous-espace engendré par les colonnes de  $A_c$ , noté  $\mathfrak{S}_{A_c}$ , de dimension I, et obtenons un unique  $\hat{Y}$ . Cependant, en fonction des contraintes utilisées, le repère de  $\mathfrak{S}_{A_c}$  va changer.

Le cas le plus facile se retrouve lorsque  $\mu = 0$ . Nous avons alors

$$(A'_c A_c) = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n_I \end{bmatrix} \quad (A'_c Y) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_I} y_{Ij} \end{bmatrix}$$

d'où le résultat. La variance de  $\hat{\alpha}$  vaut  $\sigma^2(A'_c A_c)^{-1}$  et cette matrice est bien diagonale.

Pour les autres contraintes, nous utilisons le vecteur  $\vec{e}_{ij}$  de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle repérée par le couple  $(i, j)$  qui vaut 1 pour repérer un individu. Nous notons  $\vec{e}_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celles repérées par les indices  $i, j$  pour  $j = 1, \dots, n_i$  qui valent 1. En fait, ce vecteur repère donc les individus qui admettent la modalité  $i$ . La somme des  $\vec{e}_i$  vaut le vecteur  $\mathbb{1}$ . Les vecteurs colonnes de la matrice  $A_c$  valent donc  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_I$ .

Considérons le modèle

$$Y = \mu \mathbb{1} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \cdots + \alpha_I \vec{e}_I + \varepsilon.$$

Voyons comment nous pouvons récrire ce modèle lorsque les contraintes sont satisfaites.

1.  $\alpha_1 = 0$ , le modèle devient alors

$$\begin{aligned} Y &= \mu \mathbb{1} + 0\vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \cdots + \alpha_I \vec{e}_I + \varepsilon \\ &= \mu \mathbb{1} + \alpha_2 \vec{e}_2 + \cdots + \alpha_I \vec{e}_I + \varepsilon \\ &= [\mathbb{1}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_I] \beta + \varepsilon \\ &= X_{[\alpha_1=0]} \beta_{[\alpha_1=0]} + \varepsilon. \end{aligned}$$

2.  $\sum n_i \alpha_i = 0$  cela veut dire que  $\alpha_I = -\sum_{j=1}^{I-1} n_j \alpha_j / n_I$ , le modèle devient

$$\begin{aligned} Y &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_{I-1} \vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \frac{n_j \alpha_j}{n_I} \vec{e}_I + \varepsilon \\ &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 (\vec{e}_1 - \frac{n_1}{n_I} \vec{e}_I) + \cdots + \alpha_{I-1} (\vec{e}_{I-1} - \frac{n_{I-1}}{n_I} \vec{e}_I) + \varepsilon \\ &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{I-1} \vec{v}_{I-1} + \varepsilon \quad \text{où } \vec{v}_i = (\vec{e}_i - \frac{n_i}{n_I} \vec{e}_I) \\ &= X_{[\sum n_i \alpha_i = 0]} \beta_{[\sum n_i \alpha_i = 0]} + \varepsilon. \end{aligned}$$

3.  $\sum \alpha_i = 0$  cela veut dire que  $\alpha_I = -\sum_{j=1}^{I-1} \alpha_j$ , le modèle devient

$$\begin{aligned} Y &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_{I-1} \vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \alpha_j \vec{e}_I + \varepsilon \\ &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 (\vec{e}_1 - \vec{e}_I) + \cdots + \alpha_{I-1} (\vec{e}_{I-1} - \vec{e}_I) + \varepsilon \\ &= \mu \mathbb{1} + \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_{I-1} \vec{u}_{I-1} + \varepsilon \quad \text{où } \vec{u}_i = (\vec{e}_i - \vec{e}_I) \\ &= X_{[\sum \alpha_i = 0]} \beta_{[\sum \alpha_i = 0]} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, la matrice  $X$  est de taille  $n \times I$ , et de rang  $I$ . La matrice  $X'X$  est donc inversible. Nous pouvons calculer l'estimateur  $\hat{\beta}$  des MC de  $\beta$  par la formule  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  et obtenir les valeurs des estimateurs. Cependant ce calcul n'est pas toujours simple et il est plus facile de démontrer les résultats via les projections.

Les différentes matrices  $X$  et la matrice  $A$  engendrent le même sous-espace, donc la projection de  $Y$ , notée  $\hat{Y}$  dans ce sous-espace, est toujours la même. La proposition (5.2) indique que

$$\hat{Y} = \bar{y}_1 \vec{e}_1 + \cdots + \bar{y}_I \vec{e}_I.$$

Avec les différentes contraintes, nous avons les 3 cas suivants :

1.  $\alpha_1 = 0$ , la projection s'écrit

$$\hat{Y} = \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_2\vec{e}_2 + \cdots + \hat{\alpha}_I\vec{e}_I.$$

2.  $\sum n_i \alpha_i = 0$ , la projection s'écrit

$$\hat{Y} = \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_1\vec{e}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_{I-1}\vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \frac{n_j \hat{\alpha}_j}{n_I} \vec{e}_I.$$

3.  $\sum \alpha_i = 0$ , la projection s'écrit

$$\hat{Y} = \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_1\vec{e}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_{I-1}\vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \hat{\alpha}_j \vec{e}_I.$$

Il suffit maintenant d'écrire que la projection est identique dans chaque cas et de remarquer que le vecteur  $\mathbb{1}$  est la somme des vecteurs  $\vec{e}_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $I$ . Cela donne

1.  $\alpha_1 = 0$

$$\begin{aligned} & \bar{y}_1\vec{e}_1 + \cdots + \bar{y}_I\vec{e}_I \\ &= \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_2\vec{e}_2 + \cdots + \hat{\alpha}_I\vec{e}_I \\ &= \hat{\mu}\vec{e}_1 + (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_2)\vec{e}_2 \cdots (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_I)\vec{e}_I. \end{aligned}$$

2.  $\sum n_i \alpha_i = 0$

$$\begin{aligned} & \bar{y}_1\vec{e}_1 + \cdots + \bar{y}_I\vec{e}_I \\ &= \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_1\vec{e}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_{I-1}\vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \frac{n_j \hat{\alpha}_j}{n_I} \vec{e}_I \\ &= (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1)\vec{e}_1 + \cdots + (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_{I-1})\vec{e}_{I-1} + (\hat{\mu} - \sum_{i=1}^{I-1} \frac{n_i}{n_I} \hat{\alpha}_i)\vec{e}_I. \end{aligned}$$

3.  $\sum \alpha_i = 0$

$$\begin{aligned} & \bar{y}_1\vec{e}_1 + \cdots + \bar{y}_I\vec{e}_I \\ &= \hat{\mu}\mathbb{1} + \hat{\alpha}_1\vec{e}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_{I-1}\vec{e}_{I-1} - \sum_{j=1}^{I-1} \hat{\alpha}_j \vec{e}_I \\ &= (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1)\vec{e}_1 + \cdots + (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_{I-1})\vec{e}_{I-1} + (\hat{\mu} - \sum_{i=1}^{I-1} \hat{\alpha}_i)\vec{e}_I. \end{aligned}$$

En identifiant les différents termes, nous obtenons le résultat annoncé.

**Exercice 5.4 (Estimateurs des MC en ANOVA à 2 facteurs)**

Nous notons  $\vec{e}_{ijk}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle indicée par  $ijk$  qui vaut 1. Sous les contraintes de type analyse par cellule, le modèle devient

$$y_{ijk} = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

et donc matriciellement

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad X = (\vec{e}_{11}, \vec{e}_{12}, \dots, \vec{e}_{IJ}),$$

où le vecteur  $\vec{e}_{ij} = \sum_k \vec{e}_{ijk}$ . Les vecteurs colonnes de la matrice  $X$  sont orthogonaux entre eux. Le calcul matriciel  $(X'X)^{-1}X'Y$  donne alors le résultat annoncé.

**Exercice 5.5 (Estimateurs des MC en ANOVA à 2 facteurs, suite)**

Nous notons  $\vec{e}_{ijk}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle indicée par  $ijk$  qui vaut 1. Nous définissons ensuite les vecteurs suivants :

$$\vec{e}_{ij} = \sum_k \vec{e}_{ijk} \quad \vec{e}_{i.} = \sum_j \vec{e}_{ij} \quad \vec{e}_{.j} = \sum_i \vec{e}_{ij} \quad \vec{e} = \sum_{i,j,k} \vec{e}_{ijk}.$$

Afin d'effectuer cet exercice, nous définissons les sous-espaces suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{m\vec{e}, m \text{ quelconque}\} \\ E_2 &:= \left\{ \sum_i a_i \vec{e}_{i.}, \sum_i a_i = 0 \right\} \\ E_3 &:= \left\{ \sum_j b_j \vec{e}_{.j}, \sum_j b_j = 0 \right\} \\ E_4 &:= \left\{ \sum_{ij} c_{ij} \vec{e}_{ij}, \forall j \sum_i c_{ij} = 0 \text{ et } \forall i \sum_j c_{ij} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ces espaces  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$  sont de dimension respective 1,  $I - 1$ ,  $J - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$ . Lorsque le plan est équilibré, tous ces sous-espaces sont orthogonaux. Nous avons la décomposition suivante :

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} E_3 \overset{\perp}{\oplus} E_4.$$

La projection sur  $E$  peut se décomposer en une partie sur  $E_1, \dots, E_4$  et l'estimateur des MC est obtenu par projection de  $Y$  sur  $E$ . Notons  $P_{E^\perp}$ ,  $P_E$ ,  $P_{E_1}$ ,  $P_{E_2}$ ,  $P_{E_3}$  et  $P_{E_4}$  les projections orthogonales sur les sous-espaces  $E^\perp$ ,  $E$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$ , nous avons alors

$$P_{E_1}Y = \bar{y}\mathbf{1},$$

puis, en remarquant que projeter sur le sous-espace engendré par les colonnes de  $A = [\vec{e}_{1.}, \dots, \vec{e}_{I.}]$  est identique à la projection sur  $E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$ , nous avons alors

avec  $\mathbb{1} = \sum_i \vec{e}_i.$ ,

$$P_A Y = \sum_i \bar{y}_{i.} \vec{e}_{i.} \quad \text{donc} \quad P_{E_2} Y = \sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}) \vec{e}_{i.}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_{E_3}(Y) &= \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}) \vec{e}_{.j}, \\ P_{E_4}(Y) &= \sum_{ij} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}) \vec{e}_{i.}, \\ P_{E^\perp}(Y) &= \sum_{ijk} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij}) \vec{e}_{ijk}, \end{aligned}$$

où  $\vec{e}_{ijk}$  est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle indiquée par  $ijk$  qui vaut 1. En identifiant terme à terme, nous retrouvons le résultat énoncé.

### Exercice 5.6 (Tableau d'ANOVA à 2 facteurs équilibré)

Lorsque le plan est équilibré, nous avons démontré, que les sous-espaces  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  sont orthogonaux (cf. exercice précédent) deux à deux. Nous avons alors

$$Y = P_{E_1}(Y) + P_{E_2}(Y) + P_{E_3}(Y) + P_{E_4}(Y) + P_{E^\perp}(Y).$$

Nous obtenons ensuite par le théorème de Pythagore

$$\begin{array}{rcl} \|Y - \bar{Y}\|^2 &=& \|P_{E_2}(Y)\|^2 + \|P_{E_3}(Y)\|^2 + \|P_{E_4}(Y)\|^2 + \|P_{E^\perp}(Y)\|^2 \\ \text{SCT} &=& \text{SC}_A + \text{SC}_B + \text{SC}_{AB} + \text{SCR}, \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \text{SCT} &= \sum_i \sum_j \sum k (y_{ijk} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_A &= Jr \sum_i (y_{i..} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_B &= Ir \sum_j (y_{.j.} - \bar{y})^2 \\ \text{SC}_{AB} &= r \sum_i \sum_j (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + \bar{y})^2 \\ \text{SCR} &= \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2. \end{aligned}$$

## A.6 Choix de variables

### Exercice 6.1 (Questions de cours)

A, C, B en général. Un cas particulier de la dernière question est le suivant : si les variables sélectionnées  $\xi$  engendrent un sous-espace orthogonal au sous-espace engendré par les variables non sélectionnées  $\bar{\xi}$ , alors C est la bonne réponse.

### Exercice 6.2 (Analyse du biais)

La preuve des deux premiers points s'effectue comme l'exemple de la section 6.2.1. Nous ne détaillerons que le premier point. Supposons que  $|\xi|$  soit plus petit que  $p$ , le « vrai » nombre de variables entrant dans le modèle. Nous avons pour estimateur de  $\beta$

$$\hat{\beta}_\xi = (X'_\xi X_\xi)^{-1} X'_\xi Y = P_{X_\xi} Y.$$

Le vrai modèle étant obtenu avec  $p$  variables,  $\mathbb{E}(Y) = X_p \beta$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\beta}_\xi) &= P_{X_\xi} X_p \beta \\ &= P_{X_\xi} X_\xi \beta_\xi + P_{X_\xi} X_{\bar{\xi}} \beta_{\bar{\xi}}.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité n'est pas nulle sauf si  $\Im(X_\xi) \perp \Im(X_{\bar{\xi}})$ . Comme  $\hat{\beta}_\xi$  est en général biaisé, il en est de même pour la valeur prévue  $\hat{y}_\xi$  dont l'espérance ne vaudra pas  $X\beta$ .

### Exercice 6.3 (Variance des estimateurs)

L'estimateur obtenu avec les  $|\xi|$  variables est noté  $\hat{\beta}_\xi$  et l'estimateur obtenu dans le modèle complet  $\hat{\beta}$ . Ces vecteurs ne sont pas de même taille, le premier est de longueur  $|\xi|$ , le second de longueur  $p$ . Nous comparons les  $|\xi|$  composantes communes, c'est-à-dire que nous comparons  $\hat{\beta}_\xi$  et  $[\hat{\beta}]_\xi$ . Partitionnons la matrice  $X$  en  $X_\xi$  et  $X_{\bar{\xi}}$ . Nous avons alors

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} X'_\xi X_\xi & X'_\xi X_{\bar{\xi}} \\ X'_{\bar{\xi}} X_\xi & X'_{\bar{\xi}} X_{\bar{\xi}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

En utilisant la formule d'inverse par bloc, donnée en annexe B, nous obtenons

$$V([\hat{\beta}]_\xi) = \sigma^2 \left[ X'_\xi X_\xi - X'_\xi X_{\bar{\xi}} (X'_{\bar{\xi}} X_{\bar{\xi}})^{-1} X'_\xi X_\xi \right]^{-1},$$

alors que la variance de  $\hat{\beta}_\xi$  vaut

$$V(\hat{\beta}_\xi) = \sigma^2 [X'_\xi X_\xi]^{-1}.$$

Nous devons comparer  $V([\hat{\beta}]_\xi)$  et  $V(\hat{\beta}_\xi)$ . Nous avons

$$X'_\xi X_\xi - X'_\xi X_{\bar{\xi}} (X'_{\bar{\xi}} X_{\bar{\xi}})^{-1} X'_\xi X_\xi = X'_\xi (I - P_{X_\xi}) X_\xi = X'_\xi P_{X_\perp^\perp} X_\xi.$$

La matrice  $P_{X_\xi^\perp}$  est la matrice d'un projecteur, alors elle est semi-définie positive (SDP) (cf. annexe B), donc  $X'_\xi P_{X_\xi^\perp} X_\xi$  est également SDP. La matrice  $X'_\xi P_{X_\xi^\perp} X_\xi - X'_\xi P_{X_\xi^\perp} X_\xi$  est définie positive (DP) puisque c'est  $V([\hat{\beta}]_\xi)/\sigma^2$ . Utilisons le changement de notation suivant :

$$A = X'_\xi X_\xi - X'_\xi P_{X_\xi^\perp} X_\xi \quad \text{et} \quad B = X'_\xi P_{X_\xi^\perp} X_\xi.$$

La matrice  $A$  est DP et la matrice  $B$  SDP. La propriété donnée en annexe B indique que  $A^{-1} - (A + B)^{-1}$  est SDP, or

$$V([\hat{\beta}]_\xi) - V(\hat{\beta}_\xi) = \sigma^2(A^{-1} - (A + B)^{-1}).$$

Donc la quantité  $V([\hat{\beta}]_\xi) - V(\hat{\beta}_\xi)$  est SDP. Le résultat est démontré. L'estimation, en terme de variance, de  $\xi$  composantes est plus précise que les mêmes  $\xi$  composantes extraites d'une estimation obtenue avec  $p$  composantes.

La variance des valeurs ajustées dépend de la variance de  $\hat{\beta}$ , le point 2 de la proposition se démontre de façon similaire.

**Remarque** : nous venons de comparer deux estimateurs de même taille *via* leur matrice de variance. Pour cela, nous montrons que la différence de ces deux matrices est une matrice SDP. Que pouvons-nous dire alors sur la variance de chacune des coordonnées ? Plus précisément, pour simplifier les notations, notons le premier estimateur (de taille  $p$ )  $\tilde{\beta}$  de variance  $V(\tilde{\beta})$  et le second estimateur  $\hat{\beta}$  de variance  $V(\hat{\beta})$ . Si  $V(\tilde{\beta}) - V(\hat{\beta})$  est SDP, pouvons-nous dire que  $V(\tilde{\beta}_i) - V(\hat{\beta}_i)$  est un nombre positif pour  $i$  variant de 1 à  $p$  ? Considérons par exemple le vecteur  $u'_1 = (1, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^p$ . Nous avons alors

$$u'_1 \hat{\beta} = \hat{\beta}_1 \quad \text{et} \quad u'_1 \tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1.$$

Comme  $V(\tilde{\beta}) - V(\hat{\beta})$  est SDP, nous avons pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^p$  que  $u'(V(\tilde{\beta}) - V(\hat{\beta}))u \geq 0$ , c'est donc vrai en particulier pour  $u_1$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} u'_1(V(\tilde{\beta}) - V(\hat{\beta}))u_1 &\geq 0 \\ u'_1 V(\tilde{\beta}) u_1 - u'_1 V(\hat{\beta}) u_1 &\geq 0 \\ V(u'_1 \tilde{\beta}) - V(u'_1 \hat{\beta}) &\geq 0 \\ V(\tilde{\beta}_1) &\geq V(\hat{\beta}_1). \end{aligned}$$

Nous pouvons retrouver ce résultat pour les autres coordonnées des vecteurs estimés ou encore pour des combinaisons linéaires quelconques de ces coordonnées.

#### Exercice 6.4 (Utilisation du R<sup>2</sup>)

La correction de cet exercice est identique à la correction de l'exercice 2.5, elle est donc omise.

**Exercice 6.5 (Choix de variables)**

Tous les modèles possibles ont été étudiés, la recherche est donc exhaustive. En prenant comme critère l'AIC ou le BIC, le modèle retenu est le modèle M134. Comme prévu, le  $R^2$  indique le modèle conservant toutes les variables. Cependant le  $R^2$  peut être utilisé pour tester des modèles emboîtés. Dans ce cas, le modèle retenu est également le M134.

## A.7 Moindres carrés généralisés

**Exercice 7.1 (Questions de cours)**

B, A, A.

**Exercice 7.2**

Nous souhaitons minimiser

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 p_i,$$

où  $p_i$  est un réel positif.

Nous pouvons écrire ce critère sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n \left( \sqrt{p_i} y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j \sqrt{p_i} x_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i^* - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}^* \right)^2,$$

où  $y_i^* = \sqrt{p_i} y_i$  et  $x_{ij}^* = \sqrt{p_i} x_{ij}$ . Notons  $P^{1/2}$  la matrice des poids qui vaut  $P^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_i})$ . Ce dernier critère est un critère des MC avec comme observations  $Y^*$  et  $X^*$  où  $Y^* = P^{1/2}Y$  et  $X^* = P^{1/2}X$ . L'estimateur vaut alors

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{pond} &= (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y^* \\ &= (X' P X)^{-1} X' P Y. \end{aligned}$$

Lorsque nous avons la constante comme seule variable explicative,  $X = \mathbb{1}_n$ , et nous avons alors

$$\hat{\beta}_{pond} = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i}.$$

Lorsque les poids sont constants, nous retrouvons, non plus une moyenne pondérée, mais la moyenne usuelle.

**Exercice 7.3**

Les poids changent en fonction du point  $x$ , mais à  $x$  fixé, nous effectuons simplement une régression pondérée comme indiqué à l'exercice précédent.

**Exercice 7.4**

Nous reprenons l'exercice 7.2. La matrice  $P$  vaut

$$P = \text{diag} \left( K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right),$$

et la matrice  $X$  vaut

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (X_1 - x) & \cdots & (X_n - x) \end{bmatrix}.$$

L'estimateur vaut

$$\hat{\beta}(x) = (X' P X)^{-1} X' P Y.$$

Le calcul donne

$$\begin{pmatrix} \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) & \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \\ \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) & \sum (X_i - x)^2 K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \\ \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \\ S_1 &= \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \\ S_2 &= \sum (X_i - x)^2 K \left( \frac{x - X_i}{h} \right). \end{aligned}$$

Cela nous donne, après calcul de l'inverse,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x, h) &= \frac{1}{S_0 S_2 - S_1^2} \begin{pmatrix} S_2 & -S_1 \\ -S_1 & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \\ \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{S_0 S_2 - S_1^2} \begin{pmatrix} S_2 \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i - S_1 \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \\ S_0 \sum (X_i - x) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i - S_1 \sum K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) Y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et finalement, en ne prenant que la première composante de  $\hat{\beta}$ , nous obtenons le résultat énoncé.

## A.8 Régression biaisée

### Exercice 8.1 (Questions de cours)

A, B, B, B, C, A.

### Exercice 8.2 (Corrélation multiple et hypothèse $\mathcal{H}_1$ )

- Montrons que la moyenne empirique de  $X\hat{\beta}$  vaut  $\bar{Y}$ . Le vecteur moyenne est obtenu en projetant sur  $\mathbb{1}_n$ . En effet, comme

$$P_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}_n (\mathbb{1}'_n \mathbb{1}_n)^{-1} \mathbb{1}'_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}'_n,$$

nous avons, pour une variable  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)'$ ,

$$P_{\mathbb{1}} Z = \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}'_n Z = \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \sum_{i=1}^n Z_i = \bar{Z} \mathbb{1}_n.$$

Comme  $\mathbb{1}_n \in \mathfrak{I}(X)$ , nous avons

$$\bar{Y} = P_{\mathbb{1}} Y = P_{\mathbb{1}} P_X Y = P_{\mathbb{1}} X \hat{\beta},$$

c'est-à-dire que la moyenne empirique de  $X \hat{\beta}$  vaut  $\bar{Y}$ .

Le coefficient de corrélation entre  $\hat{Y}$  et  $Y$  élevé au carré s'écrit donc

$$\begin{aligned} \rho^2(\hat{Y}, Y) &= \frac{\langle \hat{Y} - \bar{Y}, Y - \bar{Y} \rangle^2}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2 \|Y - \bar{Y}\|^2} \\ &= \frac{\langle \hat{Y} - \bar{Y}, Y - \hat{Y} + \hat{Y} - \bar{Y} \rangle^2}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2 \|Y - \bar{Y}\|^2} \\ &= \left\{ \frac{\langle \hat{Y} - \bar{Y}, Y - \hat{Y} \rangle}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\| \|Y - \bar{Y}\|} + \frac{\langle \hat{Y} - \bar{Y}, \hat{Y} - \bar{Y} \rangle}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\| \|Y - \bar{Y}\|} \right\}^2. \end{aligned}$$

Comme  $(Y - \hat{Y}) \in \mathfrak{I}(X)^\perp$  et que  $(\hat{Y} - \bar{Y}) \in \mathfrak{I}(X)$ , nous avons  $\langle \hat{Y} - \bar{Y}, Y - \hat{Y} \rangle = 0$  et donc

$$\rho^2(\hat{Y}, Y) = \frac{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2 \|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|^2 \|Y - \bar{Y}\|^2} = R^2.$$

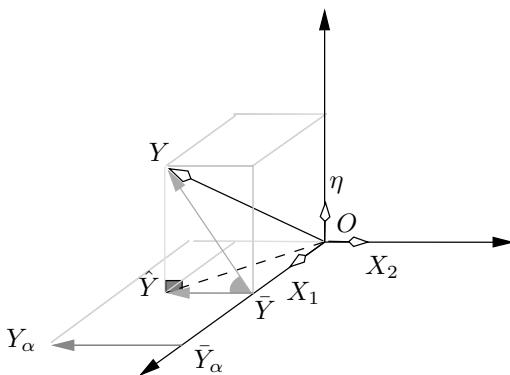
2. (a) En effectuant le calcul nous trouvons que  $Y - 2X_1 + 2X_2 = 3\eta$ .
- (b) En calculant les normes carrées, nous avons

$$\begin{aligned} \|X_1\|^2 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, \\ \|X_2\|^2 &= 1/2 + 1/2 + 2 = 3, \\ \|X_3\|^2 &= 3/2 + 3/2 = 3. \end{aligned}$$

En calculant les produits scalaires, nous avons

$$\begin{aligned} \langle X_1, X_2 \rangle &= 1 \times 1/\sqrt{2} + 1 \times 1/\sqrt{2} + 1 \times (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \\ \langle X_1, \eta \rangle &= \sqrt{3}/\sqrt{2} - \sqrt{3}/\sqrt{2} = 0, \\ \langle X_2, \eta \rangle &= 1/\sqrt{2} \times \sqrt{3}/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} \times \sqrt{3}/\sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

- (c) La représentation graphique est :



**Fig. 8.2.** Représentation de  $Y$ ,  $\hat{Y}$ ,  $Y_\alpha$  et  $\bar{Y}_\alpha$  dans le repère orthogonal  $(X_1, X_2, \eta)$ .

- (d) Nous avons ici  $X_1 \in \mathfrak{I}(X)$ ,  $X_2 \in \mathfrak{I}(X)$  et  $\eta \in \mathfrak{I}(X)^\perp$ , ce qui permet de trouver  $\hat{Y}$  :

$$\begin{aligned} P_X Y &= P_X(2X_1 - 2X_2 + 3\eta) = 2P_X X_1 - 2P_X X_2 + 3P_X \eta = \\ &= 2X_1 - 2X_2 = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})'. \end{aligned}$$

- (e) Puisque  $\mathbb{1}$  fait partie des variables explicatives, nous avons

$$\rho(Y, \hat{Y}) = \frac{\langle Y - \bar{Y}, \hat{Y} - \bar{Y} \rangle}{\|\hat{Y} - \bar{Y}\| \|Y - \bar{Y}\|},$$

ce qui est la définition du cosinus de l'angle entre  $\overrightarrow{\bar{Y}Y}$  et  $\overrightarrow{\bar{Y}\hat{Y}}$ .

- (f) Notons par  $Y_\alpha$  le vecteur  $X\alpha$ . Sa moyenne vaut  $\bar{Y}_\alpha$ . Nous avons maintenant le cosinus de l'angle entre  $\overrightarrow{\bar{Y}Y}$  et  $\overrightarrow{\bar{Y}_\alpha Y_\alpha}$ . Graphiquement, la moyenne de  $Y_\alpha$  est la projection sur  $X_1 = \mathbb{1}_3$ .

- (g) La représentation graphique nous permet de voir que l'angle entre  $\overrightarrow{\bar{Y}Y}$  et  $\overrightarrow{\bar{Y}_\alpha Y_\alpha}$  est le même que celui entre  $\overrightarrow{\bar{Y}Y}$  et  $\overrightarrow{\bar{Y}\hat{Y}}$ . L'angle est minimum (et le cosinus maximum) quand  $\alpha = \hat{\beta}$  ou pour tout  $\alpha$  tel que  $\overrightarrow{\bar{Y}_\alpha Y_\alpha} = k\overrightarrow{\bar{Y}Y}$  avec  $k > 0$ .

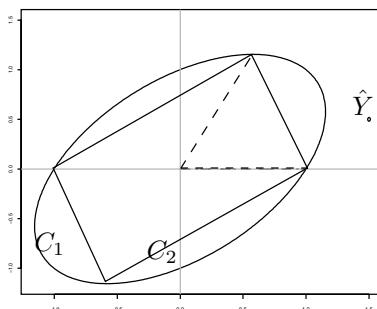
Du fait de l'orthogonalité entre  $X_1$  et  $X_2$ ,  $\overrightarrow{\bar{Y}_\alpha Y_\alpha}$  est toujours collinaire à  $\overrightarrow{\bar{Y}\hat{Y}}$ , seul le signe change en fonction de l'orientation des vecteurs (même sens ou sens opposé).

3. Comme  $\rho(X_j; X_k) = 1$  alors  $R(X_j; (\mathbb{1}, X_j)) = 1$  et donc puisque la constante fait partie du modèle  $R(X_j; X_{(j)}) = 1$ . L'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  n'est donc pas vérifiée.

### Exercice 8.3 (Géométrie des estimateurs)

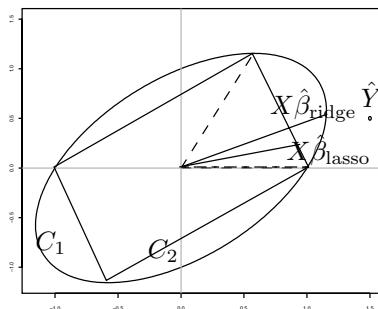
- 1-4. Les quatre premières réponses sont évidentes, les coordonnées de  $\hat{Y}$  valent 1.5, 0.5 et 0. Ici  $p$  vaut 2 et  $B_1$  est un cercle de centre  $O$  de rayon 1, alors que  $B_2$  est un losange.
5. Intuitivement, l'image d'un cercle par une application linéaire est une ellipse et l'image d'un losange est un parallélogramme.
6. Le dessin suivant représente les ensembles  $C_1$  et  $C_2$  et  $\hat{Y}$  grâce aux ordres GNU-R suivants :

```
X <- matrix(c(1,0,0,1/sqrt(3),2/sqrt(3),0),3,2)
sss <- 1
iter <- 1
coord <- matrix(0,500,2)
for (tt in seq(-pi,pi,length=500)) {
  coord[iter,] <- (X%*%as.matrix(sqrt(sss)
    *c(cos(tt),sin(tt))))[1:2,]
  iter <- iter+1
}
iter <- 1
coord2 <- matrix(0,500,2)
for (tt in seq(-1,1,length=250)) {
  coord2[iter,] <- (X%*%as.matrix(c(tt,1-abs(tt))))[1:2,]
  coord2[iter+250,] <- (X%*%as.matrix(c(tt,
    abs(tt)-1)))[1:2,]
  iter <- iter+1
}
plot(coord,type="l",xlab="",ylab="")
lines(coord2)
```



**Fig. 8.3.** Représentation de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\hat{Y}$ .

7. Par définition,  $X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  est l'élément de  $C_1$  le plus proche de  $\hat{Y}$ . De même,  $X\hat{\beta}_{\text{lasso}}$  est l'élément de  $C_2$  le plus proche de  $\hat{Y}$ . Cela donne graphiquement



**Fig. 8.4.** Représentation de  $X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et  $X\hat{\beta}_{\text{lasso}}$ .

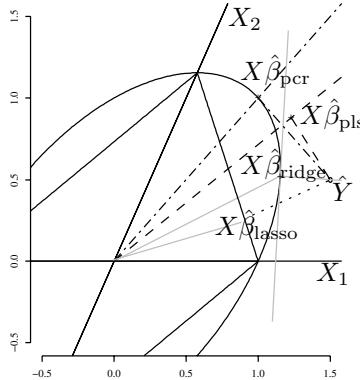
8. L'ensemble  $C_1$ , composé de vecteurs de la forme  $u = X_1\alpha_1 + X_2\alpha_2$  avec la norme du vecteur  $\alpha$  valant 1, peut être vu comme l'ensemble des composantes dans lequel on va choisir la composante PLS. La première composante PLS est le vecteur de  $C_1$  dont le produit scalaire avec  $Y$  (et donc  $\hat{Y}$ ) est le plus grand. Graphiquement, c'est le vecteur de  $C_1$  dont l'extrémité sur l'ellipse est le pied de la tangente à l'ellipse perpendiculaire à  $O\hat{Y}$ . La prévision de  $Y$  par la régression PLS est la projection de  $Y$  et donc de  $\hat{Y}$  sur la composante PLS.
9. La calcul donne simplement

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 2 et 2/3. Le premier axe principal correspond au vecteur propre associé à la valeur 2. Pour trouver la première composante principale, il faut pré-multiplier ce vecteur par  $X$ . Cela donne le vecteur de coordonnées  $(1, 1, 0)'$ . Les commandes GNU-R sont

```
X <- matrix(c(1,0,0,1/sqrt(3),2/sqrt(3),0),3,2)
svd <- eigen(t(X) %*% X)
X %*% svd$vect[,1]
```

10. La prévision de  $Y$  par la régression PCR est la projection de  $Y$  (et donc de  $\hat{Y}$ ) sur la composante PCR. Dans cet exemple, la projection de  $\hat{Y}$  sur la composante PCR est un point de l'ellipse, mais cela est uniquement dû aux données de cet exercice. Le graphique suivant représente les 4 projections :



**Fig. 8.5.** Représentation des différentes projections.

#### Exercice 8.4 (Nombre effectif de paramètres de la régression ridge)

1. Rappelons que pour une valeur  $\kappa$  donnée, le vecteur de coefficients de la régression ridge s'écrit

$$\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\kappa) = (X'X + \kappa I)^{-1}X'Y.$$

et donc l'ajustement par la régression ridge est

$$\hat{Y}_{\text{ridge}}(\kappa) = X(X'X + \kappa I)^{-1}X'Y = H^*(\kappa)Y$$

2. Soit  $U_i$  le vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $d_i^2$ . Nous avons donc par définition que

$$\begin{aligned} AU_i &= d_i^2 U_i \\ AU_i + \lambda U_i &= d_i^2 U_i + \lambda U_i = (d_i^2 + \lambda)U_i \\ (A + \lambda I_p)U_i &= (d_i^2 + \lambda)U_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $U_i$  est aussi vecteur propre de  $A + \lambda I_p$  associé à la valeur propre  $\lambda + d_i^2$ .

3. Nous savons que  $X = QDP'$  avec  $Q$  et  $P$  matrices orthogonales et  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ . Puisque  $Q$  est orthogonale, nous avons, par définition,  $Q'Q = I$ . Nous avons donc que  $X'X = (QDP')'QDP' = PDQ'QDP' = PD^2P'$ . Puisque  $P$  est orthogonale  $P'P = I_p$  et  $P^{-1} = P$ .

$$\begin{aligned} \text{tr}(X(X'X + \lambda I_p)^{-1}X') &= \text{tr}((X'X + \lambda I_p)^{-1}X'X) \\ &= \text{tr}((PD^2P' + \lambda PP')^{-1}PD^2P') \\ &= \text{tr}((P(D + \lambda I_p)P')^{-1}PD^2P'). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \text{tr}(X(X'X + \lambda I_p)^{-1}X') &= \text{tr}((P')^{-1}(D + \lambda I_p)^{-1}P^{-1}PD^2P') \\ &= \text{tr}((P')^{-1}(D + \lambda I_p)^{-1}D^2P') \\ &= \text{tr}((D + \lambda I_p)^{-1}D^2). \end{aligned}$$

Selon la définition de  $H^*(\kappa)$ , nous savons que sa trace vaut donc

$$\text{tr}((D + \kappa I_p)^{-1} D^2).$$

Comme  $D$  et  $I_p$  sont des matrices diagonales, leur somme et produit sont simplement leur somme et produit terme à terme des éléments de la diagonale, et donc cette trace (somme des éléments de la diagonale) vaut

$$\sum_{i=1}^p \frac{d_j^2}{d_j^2 + \kappa}.$$

### Exercice 8.5 (EQM de la régression ridge)

1. Les démonstrations figurent en p. 200 :

$$\begin{aligned} B(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= -\kappa(X'X + \kappa I)^{-1}\beta, \\ V(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= \sigma^2(X'X + \kappa I)^{-1}X'X(X'X + \kappa I)^{-1} \\ \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= (X'X + \kappa I)^{-1} [\kappa^2\beta\beta' + \sigma^2(X'X)] (X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned}$$

2. Puisque  $X'X = P \text{diag}(\lambda_i)P'$ , nous avons

$$(X'X + \kappa I) = P \text{diag}(\lambda_i)P' + \kappa PP' = P \text{diag}(\lambda_i + \kappa)P'.$$

En se rappelant que  $P^{-1} = P'$ , son inverse vaut

$$(X'X + \kappa I)^{-1} = P \text{diag}(1/(\lambda_i + \kappa))P'.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= P \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right)P' [\kappa^2\beta\beta' + \sigma^2(X'X)] P \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right)P' \\ &= P \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right) [\kappa^2(P'\beta\beta'P) + \sigma^2 I_p] \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right)P'. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que sa trace vaut

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) \right\} &= \text{tr} \left\{ \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right) [\kappa^2(P'\beta\beta'P) + \sigma^2 I_p] \right. \\ &\quad \left. \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i + \kappa}\right) P'P \right\}, \end{aligned}$$

et, comme  $P'P = I_p$ , nous avons alors

$$\text{tr} \left\{ \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) \right\} = \text{tr} \left\{ [\kappa^2(P'\beta\beta'P) + \sigma^2 I_p] \text{diag}\left(\frac{1}{(\lambda_i + \kappa)^2}\right) \right\}.$$

Le  $i^{\text{e}}$  élément de la diagonale de la matrice  $P'\beta\beta'P$  vaut  $[P'\beta]_i^2$ . Celui de  $[\kappa^2(P'\beta\beta'P) + \sigma^2 I_p]$  vaut  $\kappa^2[P'\beta]_i^2 + \sigma^2$  et celui de

$$[\kappa^2(P'\beta\beta'P) + \sigma^2 I_p] \text{diag}\left(\frac{1}{(\lambda_i + \kappa)^2}\right)$$

vaut donc

$$\kappa^2 [P' \beta]_i^2 + \sigma^2 / (\lambda_i + \kappa)^2.$$

On en déduit le résultat annoncé car la trace est la somme des éléments diagonaux d'une matrice.

3. L'estimateur des MC est non biaisé et son EQM vaut sa variance :

$$\text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}}) &= \sigma^2 (X'X + \kappa I)^{-1} (X'X + \kappa I) (X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'X + \kappa I)^{-1} (X'X (X'X)^{-1} + \kappa I (X'X)^{-1}) \\ &= \sigma^2 (X'X + \kappa I)^{-1} (I + \kappa (X'X)^{-1}) (X'X + \kappa I) (X'X + \kappa I)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'X + \kappa I)^{-1} (X'X + 2\kappa I + \kappa^2 (X'X)^{-1}) (X'X + \kappa I)^{-1}. \end{aligned}$$

4. Le calcul de  $\Delta = \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) - \text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}})$  est immédiat en utilisant l'expression précédente de  $\text{EQM}(\hat{\beta}_{\text{MC}})$  et celle rappelée en question 1.
5. En utilisant le théorème proposé avec  $A = (X'X + \kappa I)^{-1}$  et  $B = (\sigma^2(2I_p + \kappa^2(X'X)^{-1}) - \kappa\beta\beta')$  nous obtenons le résultat demandé. Cette condition dépend de  $\beta$  qui est inconnu, mais aussi de  $X$ , c'est-à-dire des mesures obtenues.
6. Intéressons-nous à la matrice  $\gamma\gamma'$ . Cette matrice est symétrique donc diagonalisable, de valeurs propres positives ou nulles. La somme de ses valeurs propres est égale à la trace de cette matrice

$$\text{tr}(\gamma\gamma') = \text{tr}(\gamma'\gamma) = \gamma'\gamma.$$

Montrons que cette matrice n'a qu'une seule valeur propre non nulle  $\gamma'\gamma$ . Pour cela, considérons le vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^p$  et montrons qu'il est vecteur propre de  $\gamma\gamma'$  associé à la valeur propre  $\gamma'\gamma$  :

$$(\gamma\gamma')\gamma = \gamma(\gamma'\gamma) = (\gamma'\gamma)\gamma.$$

Nous avons donc un vecteur propre de  $\gamma\gamma'$  qui est  $\gamma$  associé à la valeur propre  $\gamma'\gamma$ . De plus, nous savons que la somme des valeurs propres positives ou nulles de  $\gamma\gamma'$  vaut  $\gamma'\gamma$ . Nous en déduisons que les  $p - 1$  valeurs propres restantes sont toutes nulles.

Nous pouvons donc dire que la matrice  $\gamma\gamma'$  se décompose comme

$$\gamma\gamma' = UDU',$$

où  $U$  est la matrice orthogonale des vecteurs propres normés à l'unité de  $\gamma\gamma'$  et  $D = \text{diag}(\gamma'\gamma, 0, \dots, 0)$ . Nous avons donc

$$I_p - \gamma\gamma' = UU' - UDU' = U(\text{diag}(1 - \gamma'\gamma, 1, \dots, 1))U'.$$

Les valeurs propres de  $I_p - \gamma\gamma'$  sont donc  $1 - \gamma'\gamma, 1, \dots, 1$ , qui sont toutes positives ou nulles dès que  $\gamma'\gamma \leq 1$ .

7. Une condition pour que  $\sigma^2(2I_p - \kappa\beta\beta')$  soit semi-définie positive est que  $(\kappa\beta\beta') \leq \sigma^2$  (cf. question précédente) et donc  $(\sigma^2(2I_p + \kappa^2(X'X)^{-1}) - \kappa\beta\beta')$  est alors la somme de 2 matrices semi-définies positives donc semi-définie positive. Cela implique qu'il s'agit d'une condition suffisante pour que  $\Delta$  soit semi-définie positive.
8. Nous venons de montrer 2 conditions, l'une nécessaire et suffisante, l'autre suffisante, afin que  $\Delta$  soit semi-définie positive. Cette assertion signifie que, quelle que soit la combinaison linéaire du vecteur de paramètre (par exemple une coordonnée), l'estimateur ridge est meilleur que celui des MC au sens de l'EQM. Cela signifie aussi que, si une de ces conditions est vérifiée, globalement au sens de la trace de l'EQM, l'estimateur ridge est meilleur que celui des MC.

Au niveau des conditions, cela permet de trouver la valeur optimale de  $\kappa$ . Malheureusement chacune des 2 conditions dépend de la valeur  $\beta$  inconnue et donc n'est pas réellement utilisable en pratique. La condition suffisante procure une amélioration, dans le sens où elle ne dépend pas de  $X$  donc de l'expérience. Le prix à payer est bien sûr qu'il s'agit seulement d'une condition suffisante et donc plus restrictive.

### Exercice 8.6 (*Shrinkage*)

1. Soit le modèle de régression

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

En le pré-multipliant par  $P$ , nous avons

$$Z = PY = PX\beta + P\varepsilon = DQ\beta + \eta = D\gamma + \eta.$$

Puisque  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$  et  $P$  fixé, nous avons que  $\eta = P\varepsilon$  suit une loi normale de moyenne  $\mathbb{E}(\eta) = P\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$  et de variance  $V(\eta) = PV(\varepsilon)P' = \sigma^2 PP' = \sigma^2 I_n$ .

Par définition,  $Z$  vaut  $PY$  et nous savons que  $Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 I_n)$ , donc  $Z \sim \mathcal{N}(PX\beta, \sigma^2 PP')$ , c'est-à-dire  $Z \sim \mathcal{N}(DQ\beta, \sigma^2 I_n)$  ou encore  $Z \sim \mathcal{N}(D\gamma, \sigma^2 I_n)$ . En utilisant la valeur de  $D$  nous avons

$$D\gamma = \begin{pmatrix} \Delta\gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $Z_{1:p} \sim \mathcal{N}(\Delta\gamma, \sigma^2 I_p)$ .

2. Soit un estimateur de  $\beta$  linéaire en  $Y$  :  $\hat{\beta} = AY$ . Soit l'estimateur de  $\gamma = Q\beta$  linéaire en  $Y$  :  $\hat{\gamma} = QAY$ . Pour calculer leur matrice de l'EQM, nous devons calculer leur biais et leur variance. Le biais de  $\hat{\beta}$  est

$$B(\hat{\beta}) = \mathbb{E}(\hat{\beta}) - \beta = \mathbb{E}(AY) - \beta = A\mathbb{E}(Y) - \beta = AX\beta - \beta.$$

Le biais de  $\hat{\gamma}$  s'écrit

$$B(\hat{\gamma}) = \mathbb{E}(\hat{\gamma}) - \gamma = \mathbb{E}(Q\hat{\beta}) - \gamma = Q\mathbb{E}(\hat{\beta}) - \gamma = QAX\beta - \gamma.$$

Comme  $\gamma = Q\beta$  et  $Q'Q = I_p$  nous avons

$$B(\hat{\gamma}) = QAXQ'\gamma - \gamma.$$

La variance de  $\hat{\beta}$  s'écrit

$$V(\hat{\beta}) = V(AY) = A V(Y) A' = \sigma^2 AA',$$

et celle de  $\hat{\gamma}$  est

$$V(\hat{\gamma}) = V(Q\hat{\beta}) = Q V(\hat{\beta}) Q' = \sigma^2 QAA'Q'.$$

Nous en déduisons que les matrices des EQM sont respectivement

$$EQM(\hat{\beta}) = (AX\beta - \beta)(AX\beta - \beta)' + \sigma^2 AA',$$

$$EQM(\hat{\gamma}) = (QAXQ'\gamma - \gamma)(QAXQ'\gamma - \gamma)' + \sigma^2 QAA'Q',$$

et enfin les traces de ces matrices s'écrivent

$$\text{tr}(EQM(\hat{\beta})) = (AX\beta - \beta)'(AX\beta - \beta) + \sigma^2 \text{tr}(AA'),$$

$$\text{tr}(EQM(\hat{\gamma})) = (QAXQ'\gamma - \gamma)'(QAXQ'\gamma - \gamma) + \sigma^2 \text{tr}(AA').$$

Rappelons que  $\gamma = Q\beta$  et que  $Q'Q = I_p$ , nous avons donc

$$\text{tr}(EQM(\hat{\gamma})) = \gamma'(QAXQ' - I_p)'(QAXQ' - I_p)\gamma + \sigma^2 \text{tr}(AA')$$

$$= \beta'(QAX - Q)'(QAX - Q)\beta + \sigma^2 \text{tr}(AA')$$

$$= \beta'(AX - I_p)Q'Q(AX - I_p)\beta + \sigma^2 \text{tr}(AA')$$

$$= \beta'(AX - I_p)(AX - I_p)\beta + \sigma^2 \text{tr}(AA') = \text{tr}(EQM(\hat{\beta})).$$

En conclusion, que l'on s'intéresse à un estimateur linéaire de  $\beta$  ou à un estimateur linéaire de  $\gamma$ , dès que l'on passe de l'un à l'autre en multipliant par  $Q$  ou  $Q'$ , matrice orthogonale, la trace de l'EQM est identique, c'est-à-dire que les performances globales des 2 estimateurs sont identiques.

3. Nous avons le modèle de régression suivant :

$$Z_{1:p} = \Delta\gamma + \eta_{1:p},$$

et donc, par définition de l'estimateur des MC, nous avons

$$\hat{\gamma}_{MC} = (\Delta'\Delta)^{-1}\Delta'Z_{1:p}.$$

Comme  $\Delta$  est une matrice diagonale, nous avons

$$\hat{\gamma}_{MC} = \Delta^{-2}\Delta'Z_{1:p} = \Delta^{-1}Z_{1:p}.$$

Cet estimateur est d'expression très simple et il est toujours défini de manière unique, ce qui n'est pas forcément le cas de  $\hat{\beta}_{MC}$ .

Comme  $Z_{1:p} \sim \mathcal{N}(\Delta\gamma, \sigma^2 I_p)$  nous avons que  $\hat{\gamma}_{MC} = \Delta^{-1}Z_{1:p}$  suit une loi normale d'espérance  $\mathbb{E}(\Delta^{-1}Z_{1:p}) = \Delta^{-1}\mathbb{E}(Z_{1:p}) = \gamma$  et de variance  $V(\hat{\gamma}_{MC}) = \sigma^2 \Delta^{-2}$ . Puisque  $\hat{\gamma}_{MC}$  est un estimateur des MC, il est sans biais, ce qui est habituel.

4. L'EQM de  $\hat{\gamma}_{MC}$ , estimateur sans biais, est simplement sa variance. Pour la  $i^e$  coordonnée de  $\hat{\gamma}_{MC}$ , l'EQM est égal à l'élément  $i, i$  de la matrice de variance  $V(\hat{\gamma}_{MC})$ , c'est-à-dire  $\sigma^2/\delta_i^2$ . La trace de l'EQM est alors simplement la somme, sur toutes les coordonnées  $i$ , de cet EQM obtenu.
5. Par définition  $\hat{\gamma}(c) = \text{diag}(c_i)Z_{1:p}$  et nous savons que  $Z_{1:p} \sim \mathcal{N}(\Delta\gamma, \sigma^2 I_p)$ . Nous obtenons que  $\hat{\gamma}(c)$  suit une loi normale d'espérance  $\mathbb{E}(\text{diag}(c_i)Z_{1:p}) = \text{diag}(c_i)\Delta\gamma$  et de variance

$$V(\hat{\gamma}(c)) = \text{diag}(c_i) V(Z_{1:p}) \text{diag}(c_i)' = \sigma^2 \text{diag}(c_i^2).$$

La loi de  $\hat{\gamma}(c)$  étant une loi normale de matrice de variance diagonale, nous en déduisons que les coordonnées de  $\hat{\gamma}(c)$  sont indépendantes entre elles.

6. Calculons l'EQM de la  $i^e$  coordonnée de  $\hat{\gamma}(c)$

$$\text{EQM}(\hat{\gamma}(c)_i) = \mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i - \gamma)^2 = \mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i^2) + \mathbb{E}(\gamma_i^2) - 2\mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i \gamma_i).$$

Comme  $\gamma_i$  et que  $\mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i^2) = V(\hat{\gamma}(c)_i^2) + \{\mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i^2)\}^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\gamma}(c)_i) &= \sigma^2 c_i^2 + (c_i \delta_i \gamma_i)^2 + \gamma_i^2 - 2\gamma_i \mathbb{E}(\hat{\gamma}(c)_i) \\ &= \sigma^2 c_i^2 + (c_i \delta_i \gamma_i)^2 + \gamma_i^2 - 2\sigma^2 c_i \delta_i \gamma_i = \sigma^2 c_i^2 + \gamma_i^2 (c_i \delta_i - 1)^2. \end{aligned}$$

7. De manière évidente si  $\gamma_i^2$  diminue, alors l'EQM de  $\hat{\gamma}(c)_i$  diminue aussi. Calculons la valeur de l'EQM quand  $\gamma_i^2 = \frac{\sigma^2(1/\delta_i) + c_i}{\delta_i^2(1/\delta_i) - c_i}$ . Nous avons, grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\gamma}(c)_i) &= \sigma^2 c_i^2 + (c_i \delta_i - 1)^2 \frac{\sigma^2(1/\delta_i) + c_i}{\delta_i^2(1/\delta_i) - c_i} \\ &= \sigma^2 c_i^2 + \frac{\sigma^2}{\delta_i^2} (1 - c_i \delta_i)^2 \frac{1 + \delta_i c_i}{1 - \delta_i c_i} \\ &= \sigma^2 c_i^2 + \frac{\sigma^2}{\delta_i^2} (1 - c_i \delta_i)(1 + \delta_i c_i) \\ &= \sigma^2 c_i^2 + \frac{\sigma^2}{\delta_i^2} (1 - \delta_i^2 c_i^2) \\ &= \sigma^2 c_i^2 + \frac{\sigma^2}{\delta_i^2} - \sigma^2 c_i^2 = \frac{\sigma^2}{\delta_i^2} \\ &= \text{EQM}(\hat{\gamma}_{MC}), \end{aligned}$$

d'où la conclusion demandée.

8. Par définition de  $\hat{\gamma}(c)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(c) &= \text{diag}(c_i)Z_{1:p} = \text{diag}\left(\frac{\delta_i}{\delta_i^2 + \kappa}\right)Z_{1:p} \\ &= (\Delta' \Delta + \kappa I_p)^{-1} \Delta' Z_{1:p}, \end{aligned}$$

puisque  $\Delta$  est diagonale. De plus nous avons  $D = \begin{pmatrix} \Delta & \\ 0 & \end{pmatrix}$ , ce qui entraîne que  $D'D = \Delta'\Delta$  et  $D'Z = \Delta'Z_{1:p}$ . Nous obtenons donc

$$\hat{\gamma}(c) = (D'D + \kappa I_p)^{-1} D'Z.$$

Rappelons que  $D = PXQ'$  avec  $P$  et  $Q$  matrices orthogonales, nous avons alors

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(c) &= (QX'P'PXQ' + \kappa I_p)^{-1} D'Z = (QX'XQ' + \kappa QQ')^{-1} D'Z \\ &= (Q(X'X + \kappa I_p)Q')^{-1} D'Z = (Q')^{-1} (X'X + \kappa I_p)^{-1} (Q)^{-1} D'Z \\ &= Q(X'X + \kappa I_p)^{-1} Q'D'Z.\end{aligned}$$

Comme  $Z = PY$  et  $D = PXQ'$ , nous avons

$$\hat{\gamma}(c) = Q(X'X + \kappa I_p)^{-1} Q'QX'P'PY = Q(X'X + \kappa I_p)^{-1} XY.$$

Enfin, nous savons que  $Q\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ , nous en déduisons que  $\hat{\gamma} = Q'\hat{\beta}$  et donc que dans le cas particulier où  $c_i = \frac{\delta_i}{\delta_i^2 + \kappa}$  nous obtenons

$$\hat{\beta} = Q\hat{\gamma}(c) = (X'X + \kappa I_p)^{-1} XY,$$

c'est-à-dire l'estimateur de la régression ridge.

### Exercice 8.7 (Généralisation de la régression ridge)

Soit la fonction objectif à minimiser

$$\mathcal{L}(\beta) = \|Y - X\beta\|^2 - \sum_{j=1}^p \tau_j(\beta_j^2).$$

Dérivons cette fonction par rapport à  $\beta_j$  et nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_j} = 2[X'(Y - X\beta)]_j - 2\tau_j\beta_j.$$

Cette équation se récrit comme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 2X'(Y - X\beta) - 2\Delta\beta.$$

A l'optimum cette dérivée est nulle et nous avons

$$2X'(Y - X\hat{\beta}_{RG}) = 2\Delta\hat{\beta}_{RG},$$

c'est-à-dire

$$\hat{\beta}_{RG} = (X'X + \Delta)^{-1} X'Y.$$

Comme le nombre effectif de paramètres est égal à la trace de la matrice  $H$  permettant d'obtenir  $\hat{Y}$  à partir de  $Y$ , nous avons

$$\hat{Y}_{\text{RG}} = X\hat{\beta}_{\text{RG}} = X(X'X + \Delta)^{-1}X'Y = HY$$

Donc le nombre effectif de paramètres est ici

$$\text{tr}(H) = \text{tr}(X(X'X + \Delta)^{-1}X').$$

### Exercice 8.8 (Centrage, centrage-réduction et coefficient constant)

1. Comme la dernière colonne de  $X$ , notée  $X_p$  vaut  $\mathbb{1}_n$  sa moyenne empirique vaut 1 et la variable centrée issue de  $X_p$  est donc  $X_p - 1 \times \mathbb{1}_n = \mathbf{0}_n$ .
2. Nous avons le modèle sur variable centrée

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \tilde{X}\tilde{\beta} + \varepsilon \\ Y - \bar{Y}\mathbb{1}_n &= \sum_{j=1}^{p-1} (X_j - \bar{X}_j\mathbb{1}_n)\tilde{\beta}_j + \varepsilon \\ Y &= \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\beta}_j X_j + \left(\bar{Y} - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \tilde{\beta}_j\right)\mathbb{1}_n + \varepsilon.\end{aligned}$$

En identifiant cela donne

$$\begin{aligned}\beta_j &= \tilde{\beta}_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \beta_p &= \bar{Y}\mathbb{1}_n - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \tilde{\beta}_j.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Si l'on utilise des variables centrées dans le modèle de régression, on ne met pas de colonne 1 (pas de coefficient constant - *intercept*). Les coefficients du modèle sur les variables originales sont égaux à ceux sur les variables centrées et le coefficient constant est donné par la formule (8.1).

3. Maintenant les variables explicatives sont centrées et réduites :

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \tilde{X}\tilde{\beta} + \varepsilon \\ Y - \bar{Y}\mathbb{1}_n &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(X_j - \bar{X}_j\mathbb{1}_n)}{\hat{\sigma}_{X_j}} \tilde{\beta}_j + \varepsilon \\ Y &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}} X_j + \left(\bar{Y} - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}}\right)\mathbb{1}_n + \varepsilon.\end{aligned}$$

En identifiant cela donne

$$\begin{aligned}\beta_j &= \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \beta_p &= \bar{Y}\mathbb{1}_n - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}}.\end{aligned}$$

Nous obtenons ici que les coefficients du modèle sur les variables originales sont égaux à ceux sur les variables centrées-réduites divisés par l'écart-type empirique des variables explicatives. Plus la variable explicative  $X_j$  est dispersée, plus son coefficient  $\beta_j$  sera réduit par rapport à  $\tilde{\beta}_j$ . Le coefficient constant est donné par la formule ci-dessus.

4. La variable à expliquer  $Y$  est elle aussi centrée-réduite :

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \tilde{X}\tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon} \\ \frac{Y - \bar{Y}\mathbb{1}_n}{\hat{\sigma}_Y} &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(X_j - \bar{X}_j\mathbb{1}_n)}{\hat{\sigma}_{X_j}} \tilde{\beta}_j + \tilde{\varepsilon} \\ Y &= \hat{\sigma}_Y \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}} X_j + \left( \bar{Y} - \hat{\sigma}_Y \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}} \right) \mathbb{1}_n + \hat{\sigma}_Y \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

En identifiant cela donne

$$\begin{aligned}\beta_j &= \hat{\sigma}_Y \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \beta_p &= \bar{Y}\mathbb{1}_n - \hat{\sigma}_Y \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_j \frac{\tilde{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{X_j}}, \\ \varepsilon &= \hat{\sigma}_Y \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

L'écart-type empirique de  $Y$  entre en jeu et nous constatons que les résidus du modèle « centré-réduit » sont égaux à ceux initiaux divisés par l'écart-type empirique de  $Y$ .

### Exercice 8.9 (IC pour la régression ridge)

1. Nous savons que  $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$ .
2. La définition de l'estimateur ridge est  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa}) = (X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'Y$ .
3. Grâce à  $\mathcal{H}_3$  nous savons que  $Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 I_n)$ . Le vecteur  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  est une fonction fixée de  $Y$ , il suit donc une loi normale d'espérance et de variance à déterminer. L'espérance vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= \mathbb{E}((X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'Y) = (X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'\mathbb{E}(Y) \\ &= (X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'X\beta,\end{aligned}$$

et la variance

$$\begin{aligned}\text{V}(\hat{\beta}_{\text{ridge}}) &= \text{V}((X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'Y) = (X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'\text{V}(Y)X(X'X + \tilde{\kappa})^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X + \tilde{\kappa})^{-1}X'X(X'X + \tilde{\kappa})^{-1}.\end{aligned}$$

4. Rappelons que la projection orthogonale de  $Y$  sur  $\mathfrak{I}(X)$ , notée  $\hat{Y}$  ou encore  $P_X Y$  est unique. Par définition, nous avons  $P_X Y \perp (Y - \hat{Y})$ .

Par construction  $\hat{Y}_{\text{ridge}} = X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  appartient à  $\mathfrak{I}(X)$ . Selon l'énoncé  $\hat{Y}_{\text{ridge}} \neq P_X Y$  donc  $(Y - \hat{Y})$  est différent de  $Y - \hat{Y}_{\text{ridge}}$  et ils ne sont pas colinéaires. En conclusion,  $\hat{Y}$  n'est pas orthogonal à  $(Y - \hat{Y}_{\text{ridge}})$ .

5. Il faut pouvoir démontrer l'indépendance de  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}$  et  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$ . Pour le théorème 3.1, on montre l'indépendance entre  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}$  en considérant les 2 vecteurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\varepsilon} = (Y - \hat{Y})$ . Comme nous pouvons écrire  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'P_X Y$ ,  $\hat{\beta}$  est donc une fonction fixe (dépendante uniquement des  $X$ ) de  $P_X Y$ . De plus,  $\hat{\varepsilon} = P_{X^\perp} Y$  est orthogonal à  $P_X Y$ . Ces 2 vecteurs suivent des lois normales et sont donc indépendants. Il en résulte que  $\hat{\beta}$  et  $Y - \hat{Y}$  sont indépendants et de même pour  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}$ .

Ici,  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}$  est une fonction de  $Y - \hat{Y}_{\text{ridge}}$ . Le vecteur  $\hat{\beta}_{\text{ridge}} = (X'X + \tilde{\kappa}I_p)^{-1}X'Y = (X'X + \tilde{\kappa}I_p)^{-1}X'P_X Y$  est une fonction fixe ( $\tilde{\kappa}$  est considéré comme fixé) de  $P_X Y$ . Par contre,  $P_X Y$  n'est pas orthogonal à  $(Y - \hat{Y}_{\text{ridge}})$ , comme nous l'avons montré, nous ne pouvons donc montrer l'indépendance de  $\hat{\beta}_{\text{ridge}}$  et  $\hat{\sigma}_{\text{ridge}}$ .

Une autre idée serait d'utiliser  $\hat{\sigma}$  mais en général si l'on utilise la régression ridge c'est que l'on se doute que  $\hat{Y}$  n'est pas un bon estimateur de  $X\beta$  et donc *a priori*  $\hat{\sigma}$  qui est une fonction de  $Y - \hat{Y}$  risque de ne pas être un bon estimateur de  $\sigma$ . L'estimateur  $\hat{\sigma}$  peut même être nul, ce qui pratiquement peut arriver quand  $p > n$ .

6. L'idée repose sur le bootstrap.

**Nécessite :**  $\tilde{\kappa}$  fixé,  $\alpha$  fixé,  $B$  choisi.

**Objet :** IC, au niveau  $\alpha$ , coordonnée par coordonnée de  $\beta$ .

Estimer  $\beta_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$ .

En déduire  $\hat{\varepsilon}_{\text{ridge}} = Y - X\hat{\beta}_{\text{ridge}}$ .

**Pour**  $k = 1$  à  $B$  faire :

tirer avec remise  $n$  résidus estimés parmi les  $n$  coordonnées de  $\hat{\varepsilon}_{\text{ridge}}$  ;

notons ces résidus (réunis dans 1 vecteur)  $\hat{\varepsilon}_{\text{ridge}}^{(k)}$  ;

construire 1 échantillon  $Y^{(k)} = X\beta_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa}) + \hat{\varepsilon}_{\text{ridge}}^{(k)}$  ;

$\tilde{\kappa}^{(k)} \leftarrow \tilde{\kappa}$  ;

estimer le vecteur de paramètre  $\beta_{\text{ridge}}^{(k)}(\tilde{\kappa}^{(k)}) = (X'X + \tilde{\kappa}^{(k)}I_p)^{-1}X'Y^{(k)}$  ;

**Fin pour.**

**Pour**  $j = 1$  à  $p$  faire :

calculer les quantiles empiriques de niveau  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$  pour la coordonnée  $j$ , sur tous les vecteurs  $\{\beta_{\text{ridge}}^{(k)}(\tilde{\kappa})\}$  ;

**Fin pour.**

7. L'algorithme est presque le même. Cependant comme  $\tilde{\kappa}$  n'est pas fixé, pour estimer  $\beta_{\text{ridge}}(\tilde{\kappa})$  il faut déterminer  $\tilde{\kappa}$  par une méthode choisie. Ensuite, à chaque estimation de  $\beta_{\text{ridge}}^{(k)}(\tilde{\kappa}^{(k)})$ , il est nécessaire au préalable de déterminer  $\tilde{\kappa}^{(k)}$  par la même méthode que celle utilisée pour déterminer  $\tilde{\kappa}$ .

**Exercice 8.10 (théorème 8.2)**

Elle s'effectue par récurrence. Nous allons ajouter à cette propriété un résultat intermédiaire qui constituera la première partie de la propriété :

$$X^{(j)} = X \prod_{i=1}^{j-1} (I - w^{(i)}(t^{(i)'} t^{(i)})^{-1} t^{(i)'} X).$$

La seconde partie sera bien sûr de vérifier que  $\tilde{w}^{(j)}$  s'écrit bien sous la forme annoncée.

La propriété pour  $j = 1$  : la première partie n'a pas de sens et, concernant  $\tilde{w}^{(j)}$ , par construction  $X = X^{(1)}$  et donc  $\tilde{w}^{(1)} = w^{(1)}$ .

La propriété pour  $j = 2$  est-elle vraie ?

Nous savons que par définition  $X^{(2)} = P_{t^{(1)\perp}} X^{(1)}$  et  $X^{(1)} = X$  donc

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= P_{t^{(1)\perp}} X^{(1)} = X - P_{t^{(1)}} X = X - t^{(1)}(t^{(1)'} t^{(1)})^{-1} t^{(1)'} X \\ &= X(I - w^{(1)}(t^{(1)'} t^{(1)})^{-1} t^{(1)'} X), \end{aligned}$$

car  $t^{(1)} = Xw^{(1)}$ . Ceci démontre la première partie de la propriété.

Ensuite, puisque  $t^{(2)} = X^{(2)}w^{(2)} = X\tilde{w}^{(2)}$ , en remplaçant  $X^{(2)}$  par  $X(I - w^{(1)}(t^{(1)'} t^{(1)})^{-1} t^{(1)'} X)$  nous avons démontré la propriété pour le rang  $j = 2$ .

Supposons la propriété vraie au rang  $(j-1)$ . Nous avons par définition :  $X^{(j)} = P_{t^{(j-1)\perp}} X^{(j-1)}$  donc  $X^{(j)} = X^{(j-1)} - P_{t^{(j-1)}} X^{(j-1)}$ . Or par construction les  $\{t^{(k)}\}_{k=1}^j$  sont toutes orthogonales donc  $P_{t^{(j-1)}} X^{(j-1)} = P_{t^{(j-1)}} X$ . Nous avons, grâce à la propriété vraie pour le rang  $(j-1)$ , que

$$\begin{aligned} X^{(j)} &= X^{(j-1)} - t^{(j-1)}(t^{(j-1)'} t^{(j-1)})^{-1} t^{(j-1)'} X \\ &= X^{(j-1)} - X^{(j-1)} w^{(j-1)}(t^{(j-1)'} t^{(j-1)})^{-1} t^{(j-1)'} X \\ &= X \prod_{i=1}^{j-2} (I - w^{(i)}(t^{(i)'} t^{(i)})^{-1} t^{(i)'} X)(I - w^{(j-1)}(t^{(j-1)'} t^{(j-1)})^{-1} t^{(j-1)'} X) \end{aligned}$$

démontrant la première partie de la proposition. Ensuite, puisque  $t^{(j)} = X^{(j)}w^{(j)} = X\tilde{w}^{(j)}$ , en remplaçant  $X^{(j)}$  par  $X \prod_{i=1}^{j-1} (I - w^{(i)}(t^{(i)'} t^{(i)})^{-1} t^{(i)'} X)$ , nous avons démontré la propriété pour le rang  $j$ .

# Annexe B

## Rappels

### B.1 Rappels d'algèbre

Nous ne considérons ici que des matrices réelles. Nous notons  $A$  une matrice et  $A'$  sa transposée.

#### Quelques définitions

Une matrice  $A$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = BA = I$ . On note  $B = A^{-1}$ .

La matrice carrée  $A$  est dite *symétrique* si  $A' = A$ ,

*singulière* si  $\det(A) = 0$ ,

*inversible* si  $\det(A) \neq 0$ ,

*idempotente* si  $AA = A$ ,

*orthogonale* si  $A'A = AA' = I$ ,

*définie positive* si  $x'Ax > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ,

*semi-définie positive* si  $x'Ax \geq 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

Le polynôme caractéristique est  $\det(A - \lambda I)$ . Les valeurs propres sont les solutions de  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  est une solution non nulle de  $Ax = \lambda x$ .

#### Quelques propriétés

##### Les matrices $n \times p$

- $(A + B)' = A' + B'$  et  $(AB)' = B'A'$  ;
- Le rang d'une matrice  $A_{n \times p}$  est la plus petite des dimensions des 2 sous-espaces engendrés par les lignes et par les colonnes de  $A$  ;
- $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min(n, p)$  ;

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$  ;
- $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$  ;
- $\text{rang}(BAC) = \text{rang}(A)$  si  $B$  et  $C$  sont inversibles ;
- $\text{rang}(AA') = \text{rang}(A'A) = \text{rang}(A)$  ;
- Pour  $p \leq n$ , si  $A$  est de rang  $p$ , alors  $A'A$  est inversible.

### Les matrices carrées $n \times n$

Soit  $A$  et  $B$  des matrices carrées de taille  $n \times n$  de terme courant  $a_{ij}$  pour  $i$  et  $j$  variant de 1 à  $n$  :

- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  ;
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  et  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$  ;
- $\text{tr}(AA') = \text{tr}(A'A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$  ;
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  ;
- Si  $\det(A) \neq 0$ , la matrice est inversible, d'inverse notée  $A^{-1}$ , avec  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ,  $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ ,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  et  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$  ;
- La trace et le déterminant ne dépendent pas des bases choisies.

### Les matrices symétriques

Soit  $A$  une matrice carrée symétrique de taille  $n \times n$  :

- les valeurs propres de  $A$  sont réelles ;
- les vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux ;
- si une valeur propre  $\lambda$  est de multiplicité  $k$ , il existe  $k$  vecteurs propres orthogonaux qui lui sont associés ;
- la concaténation de l'ensemble des vecteurs propres orthonormés forme une matrice orthogonale  $P$ . Comme  $P' = P^{-1}$ , la diagonalisation de  $A$  s'écrit simplement  $P'AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ;
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$  ;
- $\text{rang}(A) = \text{nombre de valeurs propres non nulles}$  ;
- les valeurs propres de  $A^2$  sont les carrés des valeurs propres de  $A$  et ces 2 matrices ont les mêmes vecteurs propres ;
- les valeurs propres de  $A^{-1}$  (si cette matrice existe) sont les inverses des valeurs propres de  $A$  et ces 2 matrices ont les mêmes vecteurs propres.

### Les matrices semi-définies positives

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  :

- la matrice  $A$  est semi-définie positive (SDP) si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x'Ax \geq 0$  ;
- la matrice  $A$  est définie positive (DP) si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x'Ax > 0$  ;

- les valeurs propres d'une matrice SDP sont toutes positives ou nulles (et réciproquement) ;
- si  $A$  est SDP et inversible,  $A$  est forcément définie positive ;
- toute matrice  $A$  de la forme  $A = B'B$  est SDP. En effet,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x'Ax = x'B'Bx = (Bx)'Bx = \|Bx\|^2 \geq 0$  ;
- toute matrice de projecteur orthogonal est SDP. En effet, les valeurs propres sont d'un projecteur valent 0 ou 1 ;
- si  $B$  est SDP, alors  $A'BA$  est SDP ;
- si  $A$  est DP,  $B$  SDP alors  $A^{-1} - (A + B)^{-1}$  est SDP.

## Propriétés sur les inverses

- Soit  $M$  une matrice symétrique inversible de taille  $p \times p$  et  $u$  et  $v$  deux vecteurs de taille  $p$ . Nous supposerons que  $u'M^{-1}v \neq -1$ , alors nous avons l'inverse suivante :

$$(M + uv')^{-1} = M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + u'M^{-1}v}. \quad (\text{B.1})$$

- Soit  $M$  une matrice inversible telle que

$$M = \left( \begin{array}{c|c} T & U \\ V & W \end{array} \right)$$

avec  $T$  inversible, alors  $Q = W - VT^{-1}U$  est inversible et l'inverse de  $M$  est

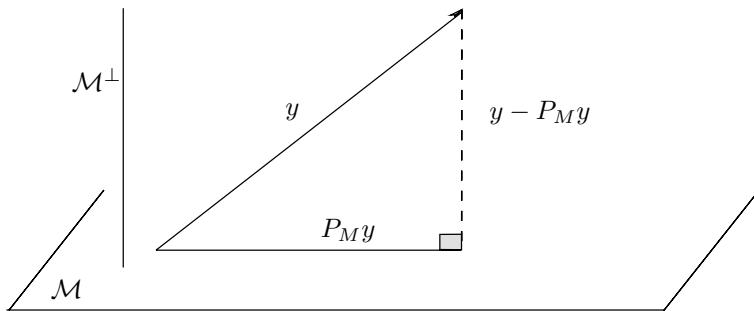
$$M^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} T^{-1} + T^{-1}UQ^{-1}VT^{-1} & -T^{-1}UQ^{-1} \\ \hline -Q^{-1}VT^{-1} & Q^{-1} \end{array} \right). \quad (\text{B.2})$$

## Propriétés sur les projections

### Généralités

Une matrice carrée idempotente et symétrique est une matrice de projection orthogonale sur un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ , noté  $\mathcal{M}$  :

- $P_M$  est un projecteur orthogonal, si le produit scalaire  $\langle P_My, y - P_My \rangle = 0$  pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  ;
- les valeurs propres d'une matrice idempotente ne peuvent être égales qu'à 0 ou 1 ;
- le rang d'une matrice idempotente est égal à sa trace ;
- $\text{tr}(P_M)$  est égal à la dimension de  $\mathcal{M}$  ;
- la matrice  $I - P_M$  est la matrice de projection orthogonale sur  $\mathcal{M}^\perp$ .



**Fig. B.1.** Représentation graphique d'un projecteur orthogonal sur  $\mathcal{M}$ .

### Exemple de $P_X$

Soit  $X = [X_1, \dots, X_p]$  la matrice  $(n, p)$ , de rang  $p$ , des  $p$  variables explicatives du modèle linéaire. Soit le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{I}(X)$  engendré par ces  $p$  vecteurs linéairement indépendants et  $P$  la matrice de projection orthogonale sur  $\mathfrak{I}(X)$ . Le vecteur  $y - Py$  doit être orthogonal à tout vecteur de  $\mathfrak{I}(X)$  or tous les vecteurs de  $\mathfrak{I}(X)$  sont de la forme  $Xu$ ; en particulier il existe un vecteur  $b$  tel que  $Py = Xb$ .

Il faut donc que  $\langle Xu, y - Py \rangle = 0$  pour tout vecteur  $u$ . En développant, nous obtenons  $X'y = X'Py = X'Xb$ .  $X'X$  est inversible donc  $b = (X'X)^{-1}X'y$  et donc  $P = X(X'X)^{-1}X'$ .

### Trace et éléments courants

Soit  $P_X$  de terme courant  $h_{ij}$  la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par les colonnes de  $X$ , nous avons alors :

1.  $\text{tr}(P_X) = \sum h_{ii} = p$ ;
2.  $\text{tr}(P_X) = \text{tr}(P_X P_X)$  c'est-à-dire  $\sum_i \sum_j h_{ij}^2 = p$ ;
3.  $0 \leq h_{ii} \leq 1$  pour tout  $i$ ;
4.  $-0.5 \leq h_{ij} \leq 0.5$  pour tout  $j$  différent de  $i$ ;
5. si  $h_{ii} = 1$ , alors  $h_{ij} = 0$  pour tout  $j$  différent de  $i$ ;
6. si  $h_{ii} = 0$ , alors  $h_{ij} = 0$  pour tout  $j$  différent de  $i$ .

La trace d'un projecteur vaut la dimension de l'espace sur lequel s'effectue la projection, donc  $\text{tr}(P_X) = p$ . Le second point découle de la propriété  $P^2 = P$ . Les matrices  $P_X$  et  $P_X P_X$  sont égales, nous savons que  $(P_X)_{ii}$  vaut  $(P_X P_X)_{ii}$ .

Cela s'écrit

$$\begin{aligned} h_{ii} &= \sum_{k=1}^n h_{ik} h_{ki} \\ &= h_{ii}^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^n h_{ik}^2 \\ h_{ii}(1 - h_{ii}) &= \sum_{k=1, k \neq i}^n h_{ik}^2. \end{aligned}$$

La dernière quantité de droite de l'égalité est positive et donc le troisième point est démontré. En nous servant de cette écriture, les deux derniers points sont aussi démontrés.

Nous pouvons écrire

$$h_{ii}(1 - h_{ii}) = h_{ij}^2 + \sum_{k=1, k \neq i, j}^n h_{ik}^2.$$

La quantité de gauche est maximum lorsque  $h_{ii} = 0.5$  et vaut alors 0.25. Le quatrième point est démontré.

## Dérivation matricielle

Soit  $f$  une fonction réelle différentiable de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . Le gradient de  $f$  est par définition

$$\nabla(f) = \text{grad}(f) = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p} \right]'$$

et le hessien de  $f$  est la matrice carrée de dimension  $p \times p$ , souvent notée  $\nabla^2 f$  ou  $H(f)$ , de terme général  $H(f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$ .

Si  $f(u) = a'u$  où  $a$  est un vecteur de taille  $p$ , alors  $\nabla(f) = a'$  et  $H(f) = 0$ .

Si  $f(u) = u'Au$ , alors  $\nabla(f) = (A + A')u$  et  $H(f) = A + A'$ .

## B.2 Rappels de probabilités

### B.2.1 Généralités

$Y$  vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  est par définition un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes  $y_1, \dots, y_n$  sont des variables aléatoires réelles.

L'espérance du vecteur aléatoire  $Y$ ,  $\mathbb{E}(Y) = (\mathbb{E}(y_1), \dots, \mathbb{E}(y_n))'$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

La matrice de variance-covariance de  $Y$  a pour terme général  $\text{Cov}(y_i, y_j)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y) = \Sigma_Y &= \mathbb{E} [(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))'] \\ &= \mathbb{E}(YY') - \mathbb{E}(Y)(\mathbb{E}(Y))', \end{aligned}$$

c'est une matrice de taille  $n \times n$ .

Considérons une matrice fixée (déterministe)  $A$  de taille  $n \times n$  et  $b$  un vecteur fixé de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $Y$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$ , nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(AY + b) &= A\mathbb{E}(Y) + b \\ \mathbf{V}(AY + b) &= \mathbf{V}(AY) = A\mathbf{V}(Y)A'. \end{aligned}$$

Si  $Y$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  de matrice de variance-covariance  $\Sigma_Y$ , alors pour la norme euclidienne

$$\mathbb{E}(\|Y - \mathbb{E}(Y)\|^2) = \text{tr}(\Sigma_Y).$$

Nous avons les égalités utiles suivantes :

$$\text{tr}(\mathbb{E}(YY')) = \mathbb{E}(\text{tr}(YY')) = \mathbb{E}(\text{tr}(Y'Y)) = \text{tr}(\Sigma_Y) + \mathbb{E}(Y)'\mathbb{E}(Y).$$

### B.2.2 Vecteurs aléatoires gaussiens

Un vecteur aléatoire  $Y$  est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussienne. Ce vecteur admet alors une espérance  $\mu$  et une matrice de variance-covariance  $\Sigma_Y$ . On dit que  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_Y)$ .

Un vecteur gaussien  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  d'espérance  $\mu$  et de une matrice de variance-covariance  $\Sigma_Y$  inversible admet pour densité la fonction

$$f(y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{|\det(\Sigma)|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu)'\Sigma^{-1}(y - \mu)\right], \quad \text{où } y = (y_1, \dots, y_n).$$

Les composantes d'un vecteur gaussien  $Y = (y_1, \dots, y_n)'$  sont indépendantes si et seulement si  $\Sigma_Y$  est diagonale.

Soit  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_Y)$ , alors  $(Y - \mu)'\Sigma^{-1}(Y - \mu) \sim \chi_n^2$ .

#### Théorème B.1 (Cochran)

*Soit  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ ,  $\mathcal{M}$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$  et  $P_M$  la matrice de projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathcal{M}$ . Nous avons les propriétés suivantes :*

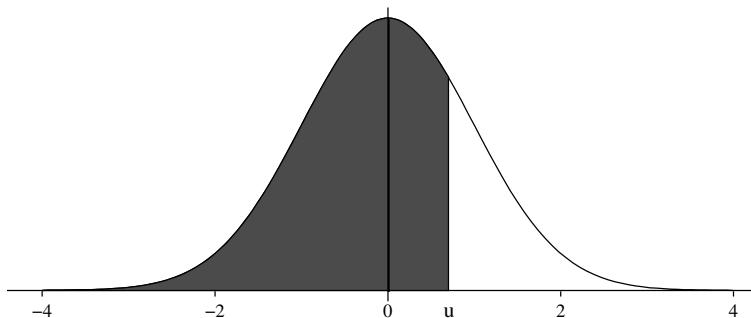
(i)  $P_M Y \sim \mathcal{N}(P_M \mu, \sigma^2 P_M)$ ;

(ii) les vecteurs  $P_M Y$  et  $y - P_M Y$  sont indépendants;

(iii)  $\|P_M Y - P_M \mu\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_p^2$ .

## B.3 Tables des lois usuelles

### B.3.1 Loi normale $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$



Valeurs de  $\Pr(X \leq u)$  en fonction de  $u$ .

$u$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995

### B.3.2 Loi de Student $X \sim T_\nu$

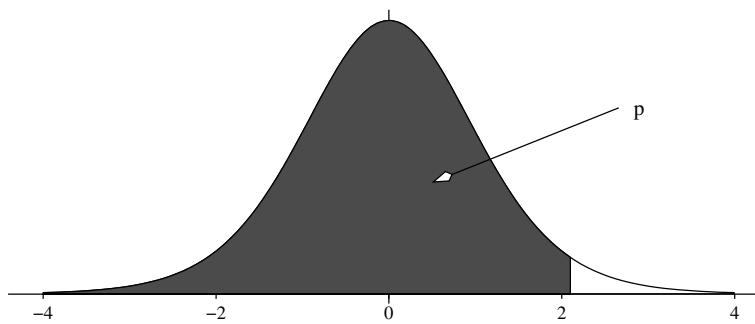


Table des fractiles  $t_\nu(p)$  pour une loi de  $T$   $p = \Pr\{X \leq t_\nu(p)\}$

$\nu \setminus p$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.000	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	0.000	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328	31.600
3	0.000	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	0.000	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	0.000	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	0.000	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.660
30	0.000	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
200	0.000	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
$\infty$	0.000	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290

### B.3.3 Loi du Khi-deux à $\nu$ ddl $X \sim \chi_{\nu}^2$

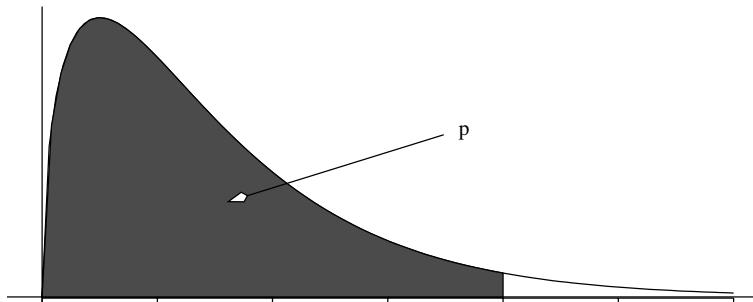


Table des fractiles  $c_{\nu}(p)$  pour une loi du  $\chi_{\nu}^2$  :  $p = \Pr\{X \leq c_{\nu}(p)\}$

$\nu \setminus p$	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	0.599	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	0.857	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.698
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.619
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051
27	9.803	11.808	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335	58.301
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702
40	17.917	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	39.036	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.42	104.21	112.32
80	46.520	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	54.156	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30	137.21
100	61.918	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449

### B.3.4 Loi de Fisher à $\nu_1, \nu_2$ ddl $X \sim \mathcal{F}_{(\nu_1, \nu_2)}$

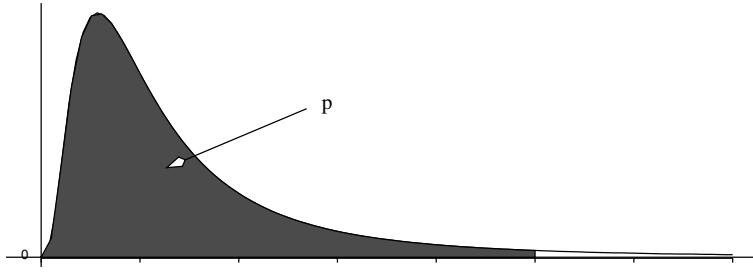


Table des fractiles  $f_{(\nu_1, \nu_2)}$  pour une loi  $\mathcal{F}_{(\nu_1, \nu_2)}$  :  $0.95 = \Pr\{X \leq f_{(\nu_1, \nu_2)}(p)\}$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	80	100
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	251	252	252	253	253
2	18.5	19	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.7	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6	5.96	5.86	5.8	5.75	5.72	5.7	5.69	5.67	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.5	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.3	3.29	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.8	2.79	2.77	2.76
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.7	2.66	2.64	2.62	2.6	2.59
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.4	2.38	2.36	2.35
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.3	2.27	2.26
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.2	2.19
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.4	2.33	2.25	2.2	2.18	2.16	2.14	2.12
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.1	2.08	2.06	2.03	2.02
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2	1.98	1.96	1.94
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.2	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.1	2.01	1.96	1.94	1.92	1.89	1.88
22	4.3	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.4	2.34	2.3	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.89	1.86	1.85
23	4.28	3.42	3.03	2.8	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82
24	4.26	3.4	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.3	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.8
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.6	2.49	2.4	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87	1.84	1.82	1.8	1.78
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.07	1.99	1.9	1.85	1.82	1.8	1.78	1.76
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.2	2.06	1.97	1.88	1.84	1.81	1.79	1.76	1.74
28	4.2	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.74	1.73
29	4.18	3.33	2.93	2.7	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.03	1.94	1.85	1.81	1.77	1.75	1.73	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.7
32	4.15	3.29	2.9	2.67	2.51	2.4	2.31	2.24	2.19	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.71	1.69	1.67
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	1.97	1.89	1.8	1.75	1.71	1.69	1.66	1.65
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.67	1.64	1.62
38	4.1	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.65	1.62	1.61
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	1.91	1.83	1.73	1.68	1.65	1.62	1.59	1.57
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.1	2.05	1.9	1.81	1.72	1.67	1.63	1.61	1.58	1.56
46	4.05	3.2	2.81	2.57	2.42	2.3	2.22	2.15	2.09	2.04	1.89	1.8	1.71	1.65	1.62	1.6	1.57	1.55
48	4.04	3.19	2.8	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.88	1.79	1.7	1.64	1.61	1.59	1.56	1.54
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.4	2.29	2.2	2.13	2.07	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.6	1.58	1.54	1.52
60	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.1	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.53	1.5	1.48
70	3.98	3.13	2.74	2.5	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.5	1.47	1.45
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2	1.95	1.79	1.7	1.6	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43
90	3.95	3.1	2.71	2.47	2.32	2.2	2.11	2.04	1.99	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41
100	3.94	3.09	2.7	2.46	2.31	2.19	2.1	2.03	1.97	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.9	1.85	1.69	1.59	1.48	1.42	1.38	1.35	1.3	1.28
$\infty$	3.84	3	2.6	2.37	2.21	2.1	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24

# Bibliographie

- Akaike H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Dans *Second international symposium on information theory*, réd. B.N. Petrov & B.F. Csaki, pp. 267–281. Academiai Kiado, Budapest.
- Antoniadis A., Berruyer J. & Carmona R. (1992). *Régression non linéaire et applications*. Economica.
- Birkes D. & Dodge Y. (1993). *Alternative Methods of Regression*. Wiley.
- Bozdogan H. (1987). Model selection and Akaike's information criterion (aic) : the general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, **52**, 345–370.
- Brown P.J., Fearn T. & Vannucci M. (2001). Bayesian wavelet regression on curves with application to a spectroscopic calibration problem. *Journal of the American Statistical Association*, **96**(398–408).
- Cleveland W.S. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 829–836.
- Cook R.D. (1977). Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics*, **19**, 15–18.
- De Jong S. (1995). Pls shrinks. *Journal of chemometrics*, **9**, 323–326.
- Dodge Y. & Rousson V. (2004). *Analyse de régression appliquée*. Dunod.
- Droesbeke J.J., Fine J. & Saporta G. (1997). *Plans d'expériences : Applications à l'entreprise*. Technip.
- Efron B. & Morris C.N. (1973). Stein's estimation rule and its competitors - an empirical bayes approach. *Journal of the American Statistical Association*, **68**, 117–130.
- Efron B. & Tibshirani R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.
- Golub G.H. & Van Loan C.F. (1996). *Matrix computations*. John Hopkins university press, 3 ed.

- Hannan E.J. & Quinn B.G. (1979). The determination of order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society, ser. B*, **41**, 190–195.
- Hastie T., Tibshirani R. & Friedman J. (2001). *The elements of statistical learning - data mining, inference and prediction*. Springer, New-York.
- Hoaglin D.C. & Welsch R.E. (1978). The hat matrix in regression and anova. *The American Statistician*, **32**, 17–22.
- Hoerl A.E. & Kennard R.W. (1970). Ridge regression : Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, **12**, 55–67.
- Hoerl A.E., Kennard R.W. & Baldwin K.F. (1975). Ridge regression : some simulations. *Communications in Statistics*, **4**, 105–123.
- Hoerl A.E., Kennard R.W. & Baldwin K.F. (1976). Ridge regression : iterative estimation of the biased parameters. *Communications in Statistics ser. A*, **5**, 77–88.
- Huber P. (1981). *Robust Statistics*. J. Wiley & Sons, New-York.
- Lehmann E.L. (1959). *Testing statistical hypotheses*. John Wiley, New-York.
- Lehmann E.L. & Casella G. (1998). *Theory of point estimation*. Springer, New-York.
- Lejeune M. (2004). *Statistique. La théorie et ses applications*. Springer, Paris.
- Mallows C.L. (1973). Some comments on  $C_p$ . *Technometrics*, **15**, 661–675.
- Mallows C.L. (1986). Augmented partial residuals. *Technometrics*, **28**, 313–319.
- Mc Donald G.C. & Galarneau D.I. (1975). A monte carlo evaluation of some ridge-type estimators. *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 407–416.
- Miller A. (2002). *Subset selection in regression*. Chapman & Hall/CRC, London, 2 ed.
- Miller R.E. (2000). *Optimization, foundations and applications*. John Wiley, New-York.
- Montgomery D.C., Peck E.A. & Vining G.G. (2001). *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley, New-York, 3 ed.
- Osborne M.R., Presnell B. & Turlach B. (2000a). A new approach to variable selection in least square problems. *IMA journal of numerical analysis*, **20**, 389–404.

- Osborne M.R., Presnell B. & Turlach B. (2000b). On the lasso and its dual. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **9**, 319–337.
- Rousseeuw P.J. & Leroy A.M. (1987). *Robust regression and outlier detection*. John Wiley, New-York.
- Scheffé H. (1959). *The Analysis of Variance*. Wiley.
- Schwarz G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of statistics*, **6**, 461–464.
- Spjøtvoll E. (1972). Multiple comparison of regression function. *Annals of Mathematical Statistics*, **43**, 1076–1088.
- Tenenhaus M. (1998). *La régression PLS : théorie et pratique*. Technip.
- Tibshirani R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Association ser. B*, **58**, 267–288.
- Upton G.J.G. & Fingleton B. (1985). *Spatial analysis by example*, vol. 1. John Wiley, New-York, 2 ed.
- Velleman P.F. & Welsh R.E. (1981). Efficient computing of regression diagnostics. *The American Statistician*, **35**, 234–242.
- Yuan M. & Lin Y. (2005). Efficient empirical bayes variable selection and estimation in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1215–1225.

# Index

- Aberrant, 84
- Affine, 8
- AIC, 162
- Aitken, voir Estimateur
- Ajustement, 94
- Ajustement individuel, 84
- Aléatoire
  - bruit, 9, 34
  - estimateur, 11
- Alternée, voir Choix de variables pas à pas
- Analyse de la covariance, 105
- Analyse de la variance
  - à 1 facteur, 116
  - à 2 facteurs, 127
  - tableau, 121, 135
- ANOVA, voir Analyse de la variance
- Apprentissage-validation, 153
- Autocorrélation des résidus
  - choix des résidus, 82
  - Régression avec, 188
  - régession avec, 187
  - vérification graphique, 86
  - vérification par test, 86
- Autorégressif
  - d'ordre 1, AR(1), 187
  - simultané SAR, 188
- Backward*, voir Choix de variables descendant
- Biais
  - équilibre biais-variance, 144–148
  - d'un estimateur, 12
  - de sélection, 150
  - estimateur des MC, 12, 41
  - estimateur du MV, 32, 54
- estimateur ridge, 200
- BIC, 162
- Biscuits
  - introduction, 205
  - lasso, 211
  - PCR, 221
  - PLS, 230
  - ridge, 206
- Bootstrap, 71
- Bruit
  - définition, voir Aléatoire, bruit
  - estimation, voir Résidus, définition et/ou choix
- Centrage-réduction
  - coefficients, 277
  - définition, 202
  - utilité, 202
- Centre de gravité du nuage, 11
- Choix de composantes
  - PLS, 226
  - principales, 218
- Choix de variables
  - AIC, 162
  - algorithmes, 165
  - apprentissage-validation, 153
  - ascendant (*forward*), 166
  - BIC, 162
  - C<sub>p</sub> de Mallows, 159
  - descendant (*backward*), 167
  - exhaustif, 165
  - généralités, 155
  - pas à pas (*stepwise*), 167
  - R<sup>2</sup>, 156
  - R<sup>2</sup> ajusté, 158
  - test, 155

- validation croisée, 154
- vraisemblance, 162
- Classe de fonctions, 7, 34
- Classe de fonctions linéaires, 9
- Coût, voir Fonction de coût
- Codage, 104
- Coefficient de détermination, voir  $R^2$
- Coefficient de détermination ajusté, voir  $R^2$  ajusté
- Colinéarité des variables explicatives, 197
- Composantes
  - PLS, 224
  - principales, 214
- Confiance
  - ellipse, voir ellipse de confiance
  - hyperbole, 20, 21, 24
  - intervalle, voir Intervalle de confiance
  - intervalle par bootstrap, voir Intervalle de confiance
  - région, voir Région de confiance
- Contraintes
  - identifiantes, 118, 120, 130
  - norme, 172
  - norme  $l^1$ , 209
  - norme  $l^2$ , 199
  - norme minimum, 140
  - sur les coordonnées, 52
- Contrastes, 139
- Convergence, 76
  - en loi, 78
  - estimateur, 77
- Cook, 91
- Covariance des erreurs
  - exemples, 187, 188
  - généralités, 186
  - vérification graphique, 86
- $C_p$  de Mallows, 159
- Critères d'information
  - équivalences, 163
  - AIC, 162
  - BIC, 162
  - généraux, 163
- Décentrée (loi), 63, 75
- Décomposition en valeurs singulières, 234
- Dépendantes (variables), voir Variables explicatives
- Degré de liberté, 45, 62
- DFFITS, 94
- Distance
  - de Cook, 91, 92
  - Welsh-Kuh, 93
- DModX, 229
- Ecart-type, voir Variance résiduelle
- Echantillon
  - apprentissage, 153
  - observations, 9, 11
  - validation, 153
- Echelle de mesure, 202
- Ellipse de confiance, 20, 26, 57
  - GNU-R, 58
- Emboîtés (modèles), 61, 155, 163
- EQM
  - définition, 148
  - estimateur à rétrécissement, 235
  - estimateur MC, 171
  - estimateur ridge, 201, 234
  - modèle de régression, 149–151, 159
- EQMP, 151
- Equations normales, 10
- Erreur
  - définition, voir Aléatoire, bruit
  - estimation, voir Résidus, définition et/ou choix
- Erreur de prévision, 15, 44, 153
- Erreur quadratique moyenne, voir EQM
- Erreur quadratique moyenne de prévision, 151
- Espace
  - des observations, 15
  - des résidus, 39, 42
  - des solutions, 38
  - des variables, 16, 38
- Estimable, voir Unicité
- Estimateur

- à noyau, 193  
 $\hat{\beta}$ , voir Estimateur des MC  
d'Aitken, 184  
de James-Stein, 171, 199  
de variance minimale, 12, 13,  
    42  
des moindres carrés, voir Estimateur des MC  
des moindres carrés contraints,  
    76  
du max. de vrais., voir Estimateur, MV  
MC, 38, 119  
    loi, 54–55  
    variance, 13, 43  
MCG, 184  
MV, 31, 53  
polynômes locaux, 195  
sans biais, 12, 14, 43  
 $\sigma^2$   
    loi, 54–55  
Eucalyptus  
    ANCOVA, 103, 105, 114  
    introduction, 3  
    régression multiple, 48  
    régression simple, 26  
    tests, 66  
Exogènes (variables), voir Variables explicatives  
Fenêtre, 193  
Fictives, voir Variables fictives  
Fonction de coût, 3, 5, 6, 34  
    absolu, 6  
    quadratique, 6  
Fonction de perte, 3, 5  
Fonction fixe d'une variable  
    cas général, 37  
    exemple de l'eucalyptus, 48  
*Forward*, voir Choix de variables ascendante  
Géométrie  
    espace des variables, 38  
    modèle de régression, 35  
modèle de régression avec interaction, 36  
modèle de régression avec interaction et carré, 37  
régression, 38  
régression ridge, 199  
Gauss-Markov, 13, 42, 181  
GCV, voir Validation croisée généralisée  
Hétéroscédasticité  
    définition, 179  
    détection, 85  
Homoscédasticité, 12, 41, 85, 179  
Hypothèses  
    gaussiennes, 18, 53  
 $\mathcal{H}_1$   
        définition, 11, 35  
        non vérifiée, 197–231  
        vérification, 197  
 $\mathcal{H}_2$   
        définition, 12, 41  
        non vérifiée, 179–191  
        vérification, 85–89  
 $\mathcal{H}_3$   
        définition, 18, 53  
        non vérifiée, 71–74  
        vérification, 85–89  
maximum de vraisemblance (MV),  
    18, 53  
moindres carrés (MC), 53  
Identifiabilité, 118  
    contraintes, voir Contraintes identifiantes  
    introduction, 118  
Individus, 15  
    aberrants, 84  
    influentes, 7, 84  
    nombre, 35, 76, 153–155, 197  
Inertie, 227  
Influent, 84  
Interaction  
    ANCOVA, 105  
    ANOVA, 127

- généralités, 35–37
- variable qualitative et constante, 107
- variable quantitative et qualitative, 107
- variables qualitatives, 129
- Intervalle de confiance, 57
  - $\beta$ , 19, 56
  - bootstrap, 73, 238
  - comparaison, 73
  - droite de régression, 20
  - GNU-R, 25, 58
  - prévision, 20, 59
  - $\sigma^2$ , 19, 56
- Inverse
  - estimateur des MC, 38
  - généralisé de Moore-Penrose, 140
  - problème d', 118, 197
- James-Stein, voir Estimateur
- Lasso, 209–213
- Levier, 90
- Linéaire, voir Classe de fonctions linéaires
- Lisseur, 86
- MAE, 204, 219, 228
- Matrice
  - de projection, 39, 89
  - du plan d'expérience, 35
- Maximum de vraisemblance (MV),
  - voir Estimateur, MV
- Modèle de régression
  - emboîtés, voir Emboîtés
  - linéaire multiple, 34
  - linéaire simple, 9
  - sur variables centrées-réduites, 202, 210, 217, 223
- Moindres carrés
  - généralisés, 180
  - ordinaires (MC), voir Estimateur des MC
  - pondérés, 180
- Moore-Penrose, voir Inverse généralisé
- MSEP, 153, 208, 212, 221, 231
- MV, voir Estimateur du MV
- Nombre effectif de paramètres, voir Paramètres, nombre effectif
- Non linéaire
  - fonction fixe, 37, 48
  - modèle, 192
  - recherche de fonction fixe, 97, 100
- Normales, voir Equations normales
- Normalité
  - asymptotique, 78
- Noyau
  - application linéaire
  - définition, 118
  - théorème du rang, 140
  - unicité MC, 118, 140
  - estimateur, 193
- Observations, voir Individus
- Orthogonales
  - variables explicatives, 41, 170
- Ozone
  - ANCOVA, 109
  - ANOVA
    - 1 facteur, 122
    - 2 facteurs, 127, 136
  - bootstrap, 72
  - choix de variables, 168
  - introduction, 1
  - régression locale, 191
  - régression multiple, 46
  - régression simple, 21
  - tests, 65
  - validation du modèle, 97
- Pénalisation, 162
- Paramètres, 9
  - IC, voir Intervalle de confiance
  - nombre, 9, 34
  - nombre effectif
  - lasso, 211

- ridge, 203  
PCR, 213–223  
Plan d’expérience  
équilibré, 128, 130  
complet, 128  
incomplet, 128  
matrice du plan, 35  
PLS  
PLS1, 223–231  
PLS2, 226  
Poids, voir Régression pondérée  
Point levier, 90  
Polynômes  
locaux, voir Estimateur  
régression, voir Régression polynomiale  
Population, 84, 90, 106, 229  
Prévision  
erreur, 15, 44, voir EQMP  
intervalle, 20, 59  
ponctuelle, 14, 44, 59  
variance de l’erreur, 15  
PRESS, 204, 207, 219, 227, 228  
Profil, 132  
Projection, 16  
Projection orthogonale, 39, 62  
  
Q-Q plot, 85, 98  
Qualité  
ajustement  
graphique, 23, 28, 47, 49  
individuel, 84  
numérique, 3, 5, 16, 47, 144,  
158  
par variable, 94  
PLS, 228, 230  
estimateur, 17, voir aussi EQM  
modèle, 204, 219, 228  
prévision, 24, 29, 144, 153–155  
  
 $R^2$ , 16, 17, 45, 156  
 $R^2$  ajusté, 45, 158  
 $R_a^2$ , voir  $R^2$  ajusté  
Région de confiance, 19, 56, 58  
  
multivariée (ellipsoïde), 19  
univariée (intervalle), 19  
Régression  
simple, 9  
lasso, 209–213  
locale, 191–194  
modèle, 9  
multiple, 34  
PLS, 223–231  
polynomiale, 36  
pondérée, 182  
ridge, 172, 198–205  
sur composantes principales, 213–  
223  
Résidus, 181  
choix, 83  
définition, 14, 42  
normalisés, 43, 82  
partiels, 96  
partiels augmentés, 96  
représentations graphiques, 84–  
89, 96–97  
exemples, 97–101  
standardisés, 82  
standardisés par validation croisée (VC), 82  
studentisés, 43, voir Résidus standardisés par VC  
théoriques, 82  
Rétrécissement (*shrinkage*)  
estimateur, 235  
James Stein, 171  
ridge, 199, 208, 222, 231  
Ridge, 198–205  
*Ridge regression*, voir Régression ridge  
Robuste, 7, 89, 91–94  
  
Sélection de modèles, voir Choix de variables  
SAR, voir Autorégressif simultané  
*Shrinkage*, voir Rétrécissement  
Somme des carrés  
expliquée, 17, 44  
résiduelle, 17, 43, 44, 251  
totale, 17, 44

- Somme des valeurs absolues résiduelles,  
voir Fonction de coût absolu ou MAE
- Statistique exhaustive, 252
- Strate, 127
- Student
  - équivalence avec test  $F$ , 64, 71
  - test nullité  $\beta_j$ , 64
- Tableau d'analyse de la variance, 121, 135
- Test, 60, 108, 120
  - entre modèles emboîtés, 61, 63, 155, 163
  - $F = T^2$ , 64, 71
  - Fisher global, 64
  - hypothèse linéaire, 63
  - hypothèse linéaire quelconque, 74
  - rapport de vraisemblance, 71
  - robustesse, 122
- Théorème du rang, 140
- Transformation d'une variable, voir Fonction fixe d'une variable
- Unicité
  - $\hat{\beta}$ , 118, 124
  - contraste, 141
- Valeurs
  - ajustées, 11
  - définition, 39
  - EQM, voir EQM
  - variabilité, 20, 42, 59, 68, 144, 148
- prévues
  - définition, 11, 44
  - EQMP, voir EQMP
  - variabilité, 20, 44, 68, 144
- Validation croisée, 154
  - généralisée, 205
- Variables
  - à expliquer, 1
  - aléatoires, 9, 34
  - choix de, voir Choix de variables explicatives, 1, 9, 34
  - fictives (*dummy*), 104
  - nombre de, 35, 145, 197
- Variables dépendantes, voir Variables explicatives
- Variables exogènes, voir Variables explicatives
- Variance
  - analyse, voir Analyse de la variance
  - $\hat{\beta}$ , 13, 43
  - décomposition, 127
  - inter, 127
  - intra, 127
  - résiduelle
    - définition, 13
    - estimateur, 43
    - estimation, 14, 82, 93
    - IC, 56, 59
- Vraisemblance
  - estimateur, 18
  - hypothèses, 18
  - pénalisation, 162
- Welsh-Kuh, 94

# Notations

$\beta$	Vecteur de $\mathbb{R}^p$ de coordonnées $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ , page 34
$\hat{\beta}_{(i)}$	Estimateur de $\beta$ dans le modèle linéaire privé de l'observation $i$ , page 83
$\beta_{\bar{j}}$	Vecteur $\beta$ privé de sa $j^e$ coordonnée, page 95
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariance entre $X$ et $Y$ , i.e. $\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))'\}$ , page 12
$c_{n-p}(1 - \alpha)$	Fractile de niveau $(1 - \alpha)$ d'une loi de $\chi^2$ à $(n - p)$ ddl, page 19
ddl	Degré de liberté, page 19
$\mathbb{E}(X)$	Espérance de $X$ , page 12
$\mathcal{F}_{p,n-p}$	Loi de Fisher à $p$ ddl au numérateur et $(n - p)$ degrés de liberté au dénominateur, page 19
$f_{(p,n-p)}(1 - \alpha)$	Fractile de niveau $(1 - \alpha)$ d'une loi de Fisher à $(p, n - p)$ ddl, page 19
$\mathcal{H}_2$	$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}\sigma^2$ , page 41
$I_n$ ou $I$	Matrice identité d'ordre $n$ ou d'ordre dicté par le contexte, page 41
i.i.d.	Indépendants et identiquement distribués, page 53
$\Im(X)$	Image de $X$ (matrice $n \times p$ ) sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $p$ colonnes de $X$ : $\Im(X) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha \in \mathbb{R}^p, z = X\alpha\}$ , page 38
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$	Loi normale d'espérance nulle et de variance $\sigma^2$ , page 18
$P_X$	Matrice de projection orthogonale sur $\Im(X)$ , page 39
$\Pr(Y \leq y)$	Probabilité que $Y$ soit inférieur ou égal à $y$ , page 177
$R^2$	Coefficient de détermination, page 17
SCE	Somme des carrés expliquée par le modèle, page 17
SCR	Somme des carrés résiduelle, page 17
SCT	Somme des carrés totale, page 17
$\hat{\sigma}_{(i)}$	Estimateur de $\sigma$ dans le modèle linéaire privé de l'observation $i$ , page 82

- $\mathcal{T}_{n-p}$  Loi de Student à  $(n - p)$  degrés de liberté, page 19
- $t_{n-p}(1 - \alpha/2)$  Fractile de niveau  $(1 - \alpha/2)$  d'une loi  $\mathcal{T}_{n-p}$ , page 19
- VC Validation croisée, page 82
- $X$   $X = (X_1 | X_2 | \dots | X_p)$  matrice du plan d'expérience, page 35
- $x'_i$   $i^{\text{e}}$  ligne de  $X$ , page 35
- $|\xi|$  Cardinal de  $\xi$  un sous-ensemble d'indice de  $\{1, 2, \dots, p\}$ , page 145
- $X_j$   $j^{\text{e}}$  colonne de  $X$ , page 35
- $X_{\bar{j}}$  Matrice  $X$  privée de sa  $j^{\text{e}}$  colonne, page 95
- $\hat{y}_i$  Ajustement de l'individu  $i$ , page 14
- $\hat{y}_i^p$  Prévision de l'individu  $i$ , page 14
- $\hat{y}_\xi^p$  Prévision de l'individu  $x^*$  dans le modèle ayant  $\xi$  variables explicatives, page 152
- $\hat{Y}_\xi^p$  Prévision des  $n^*$  individus de la matrice  $X^*$  dans le modèle à  $\xi$  variables, page 152
- $\hat{y}(x_\xi)$  Ajustement de l'individu  $i$  dans le modèle ayant  $\xi$  variables explicatives, page 149
- $\hat{Y}(X_\xi)$  Ajustement des  $n$  individus de la matrice  $X$  dans le modèle à  $\xi$  variables, page 150

---

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD

B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL

Dépôt légal : décembre 2006 - N° d'imprimeur : 609112

*Imprimé en France*