

ESPACES DE FONCTIONS INTEGRABLES

1. RAPPELS DE TOPOLOGIE

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie ou pas ; $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.1 NORMES

DEFINITION

On appelle **norme** sur un espace vectoriel E toute application notée $\|\cdot\|_E$ de E vers \mathbb{R}^+ possédant les propriétés suivantes :

- (i) **Positivité** (stricte) : $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$ et $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- (ii) **Homogénéité** : $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y \in E, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$

Le couple $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé **espace vectoriel normé**.

1.2 CONVERGENCE DE SUITES DANS UN E.V.N

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

DEFINITION

Une suite $(u_n)_n$ de vecteurs de E est dite convergente (vers $l \in E$) **ssi**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N_0, \|u_n - l\|_E \leq \varepsilon$$

Dans la suite, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé et A est un sous-espace vectoriel de E .

1.3 INTERIEUR d'un sous-espace vectoriel

DEFINITION et PROPRIETES

- Le vecteur $a \in E$ est dit **intérieur à A** , lorsque A contient une boule de centre a ;
- L'ensemble des vecteurs de E intérieurs à A est appelé « **intérieur de A** » noté $\overset{\circ}{A}$ ou **$\text{int}(A)$** ;
- $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert de E contenu dans A ;
- Ainsi : A est **ouvert ssi** $\overset{\circ}{A} = A$

1.4 ADHERENCE d'un sous-espace vectoriel

DEFINITION et PROPRIETES

- Le vecteur $a \in E$ est dit **adhérent à A** , s'il est la limite d'une suite de vecteurs de A ;
- L'ensemble des vecteurs de E adhérents à A est appelé « **adhérence de A** » noté \bar{A} ou **$adh(A)$** ;
- \bar{A} est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de E contenant A ;
- Ainsi : A est **fermé ssi** $\bar{A} = A$

1.5 PARTIES BORNEES

DEFINITION

Une partie A de E est dite bornée si : $\exists M > 0$ t.q. $\|x\|_E \leq M, \forall x \in A$.

1.6 DENSITE

DEFINITION

On dit que A est **dense dans E** lorsque $\bar{A} = E$

C'est-à-dire, tout vecteur de E est la limite d'une suite de vecteurs de A ; c'est-à-dire encore : tout vecteur de E peut être approché (d'aussi près que l'on veut) par une suite de vecteurs de A .

Espace séparable :

DEFINITION

Un e.v.n est dit **séparable** s'il contient une partie **dense finie** ou **dénombrable**.

EXEMPLE :

\mathbb{R} est séparable car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et \mathbb{Q} est dénombrable.

1.7 FRONTIERE

DEFINITION

On appelle **frontière de A** l'ensemble des vecteurs de \bar{A} qui n'appartiennent pas à $\overset{\circ}{A}$.

On le note : ∂A

Et donc $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

REMARQUE :

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

1.8 SUITES DE CAUCHY

DEFINITION

La suite $(u_n)_n$ est dite **suite de Cauchy** si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, p \geq N_0, \|u_n - u_p\|_E \leq \varepsilon$$

PROPOSITION

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

REMARQUE

La réciproque est fausse : il existe des suites de Cauchy non convergentes.

On peut par exemple considérer un nombre irrationnel (mettons $l = \sqrt{2}$). Il existe une suite $(u_n)_n$ de \mathbb{Q} convergeant vers l , c'est donc une suite de Cauchy de \mathbb{R} , mais aussi de \mathbb{Q} . Si la suite avait une limite dans \mathbb{Q} , cette limite serait l . Impossible.

1.9 E.V.N COMPLETS - E.V.N COMPACTS

DEFINITION

Un **espace vectoriel normé complet** (ou encore **espace de BANACH**) est un espace vectoriel dans lequel **toute suite de Cauchy est convergente**.

PROPOSITION (Critère de Cauchy)

Dans un espace vectoriel normé *complet*, une **suite est convergente ssi elle est une suite de Cauchy**.

EXEMPLES

- \mathbb{R}^p est complet pour $p \in \mathbb{N}^*$
- \mathbb{R}, \mathbb{C} sont complets

PROPOSITION

Tout produit d'espaces vectoriels complets est un espace vectoriel complet.

DEFINITION

Un espace vectoriel normé E est dit **compact** si : de toute suite de vecteurs de E , on peut extraire une sous-suite convergente, dans E (c'est la propriété de Bolzano-Weierstrass).

En d'autres termes, toute suite de E possède au moins une valeur d'adhérence.

PROPOSITION

Tout espace vectoriel normé *compact* est borné.

Dans toute la suite du chapitre, (E, \mathcal{S}_E, μ) est un espace mesuré.

2. PREMIERES DEFINITIONS

DEFINITION 2.1

Soit un réel p tel que : $0 < p < \infty$.

On appelle et on note $L^p(\mu)$ l'ensemble des fonctions f mesurables et définies sur E , à valeurs dans \mathbb{C} et de puissance p ème intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_E |f|^p d\mu < \infty$$

Ainsi :

- $L^1(\mu) : \int_E |f| d\mu < \infty$
- $L^2(\mu) : \int_E |f|^2 d\mu < \infty$
-

DEFINITION 2.2

On appelle et on note $L^\infty(\mu)$ l'ensemble des fonctions f mesurables et définies sur E , bornées presque partout dans E .

REMARQUE 2.1

Si μ est la mesure de Lebesgue et $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), alors on notera $L^p(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $L^p(\mu)$ ou tout simplement L^p .

DEFINITION 2.3

Soient les réels p et q tels que : $1 < p, q < \infty$.

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on dit que les réels p et q forment un couple d'**exposants conjugués**.

REMARQUE 2.2

- Cas particulier : $p = q = 2$
- Quand $p \rightarrow 1$ alors $q \rightarrow \infty$: on conviendra donc de dire que **1** et ∞ sont des **exposants conjugués**.

EXEMPLES

$$- f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} ; f \in L^2(\mathbb{R}) ; f \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$- g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} & t > 0 \end{cases} ; g \in L^1(\mathbb{R}) ; g \notin L^2(\mathbb{R})$$

$$- w(t) = e^{-t^2} \text{ sur } \mathbb{R} ; w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

3. NORMES DANS L^p

Soit (E, \mathcal{S}_E, μ) un espace mesuré.

PROPOSITION 3.1

- Pour $1 \leq p < \infty$, l'application : $f \mapsto \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme dans $L^p(\mu)$ appelée **norme L^p** de f .

$$\text{On note : } \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

- De même, l'application : $f \mapsto \inf \{c \geq 0, |f(x)| < c \text{ p.p. dans } E\}$ est une norme dans $L^\infty(\mu)$ appelée **norme L^∞** de f .

$$\text{On note : } \|f\|_\infty = \inf \{c \geq 0, |f(x)| < c \text{ p.p. dans } E\}$$

PROPOSITION 3.2 (Inégalité de Hölder)

Soient p et q des exposants *conjugués*, avec $1 \leq p \leq \infty$.

Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors

- (i) $fg \in L^1(\mu)$
- (ii) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

PROPOSITION 3.3 (Inégalité de Minkowsky)

Supposons $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p(\mu)$ alors

- (i) $f + g \in L^p(\mu)$
- (ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

THEOREME 3.1

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un **espace vectoriel normé complet** pour $1 \leq p \leq \infty$

REMARQUE 3.1

- $L^p(\mu)$ est un e.v.n mais ATTENTION ses éléments (ses vecteurs) ne sont pas des fonctions, mais des classes d'équivalence de fonctions (pour simplifier le langage, on dira espace de fonctions) ; $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ p.p
- C'est un fait particulièrement important que $L^p(\mu)$ soit complet (ce n'était pas le cas avec l'intégrale de Riemann), c'est-à-dire toute suite de Cauchy de $L^p(\mu)$ converge vers un élément de $L^p(\mu)$:

On introduit à présent, une nouvelle notion de convergence : la convergence en norme p .

DEFINITION 3.1 (Convergence en norme p)

Une suite $(f_n)_n$ **converge** vers f en **norme p** si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

DEFINITION 3.1 (Convergence p.p.)

Une suite $(f_n)_n$ **converge p.p** vers f si

$$\mu\left(\left\{x \in E \text{ t. q. } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$$

CONV. UNIFORME \Rightarrow CONV. SIMPLE (Conv. ponctuelle) \Rightarrow CONV. P.P.

(CU \Rightarrow CS \Rightarrow CPP)

REMARQUE 3.2

En toute généralité, il n'y a pas de lien entre la convergence $p.p$ et la convergence en norme p . On sait par exemple que la convergence en norme p entraîne la convergence $p.p$ d'une sous-suite.

4. APPROXIMATION PAR LES FONCTIONS CONTINUES

4.1 RELATIONS D'INCLUSION

PROPOSITION 4.1

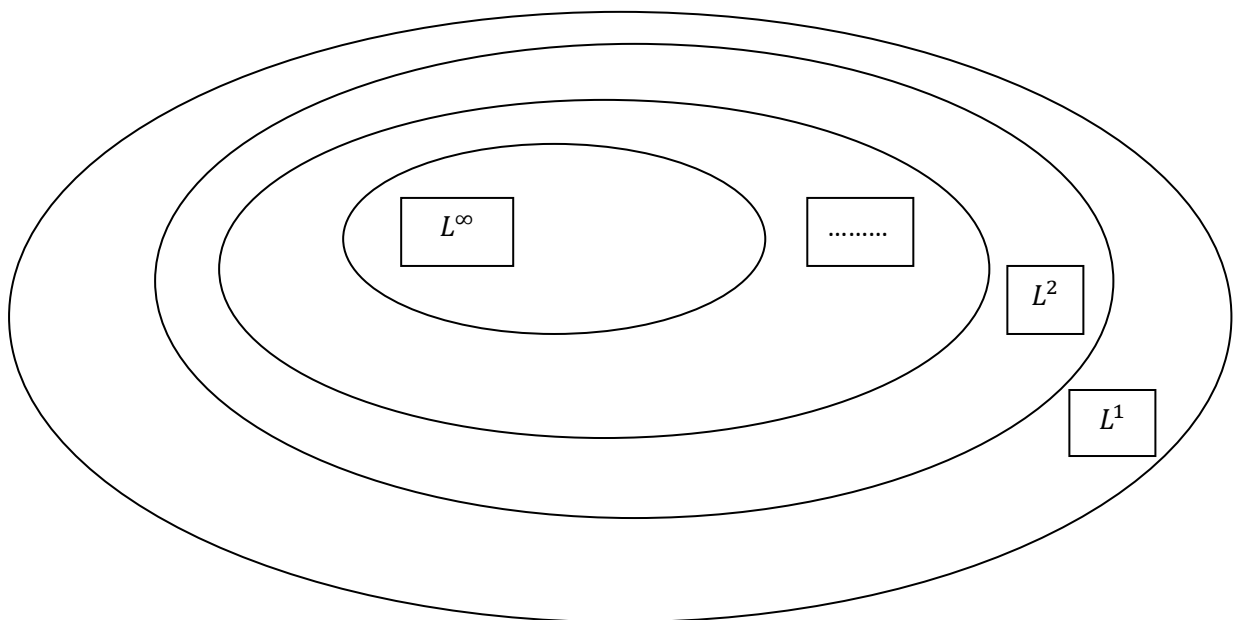
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de mesure finie, c'est-à-dire $\mu(I) < \infty$;

Soit p, q tels que $1 \leq p \leq q \leq \infty$

Alors $L^q(I) \subset L^p(I)$.

REMARQUE 4.1

On a donc, si $\mu(I) < \infty$: $L^\infty(I) \subset \dots \subset L^2(I) \subset L^1(I)$



4.2 DENSITE

Rappels : On dit que A est dense dans E lorsque $\bar{A} = E$.

THEOREME 4.1

Notons \mathcal{S} l'ensemble des **fonctions en escalier** (notées s), **mesurables**, à valeurs complexes, définies sur E et telles que : $\mu(\{x \in E, s(x) \neq 0\}) < \infty$,

Alors \mathcal{S} est dense dans $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < \infty$.

DEFINITION 4.1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) une fonction **continue**. On appelle **support de f** , l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$.

Notons $\mathcal{C}_c(I)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et à support borné.

THEOREME 4.2

L'espace $\mathcal{C}_c(I)$ est dense dans $L^p(I)$ pour $1 \leq p < \infty$.

REMARQUE 4.2

Le théorème est faux pour $p = \infty$.