UNIVERSITE COTE D'AZUR

POLYTECH NICE SOPHIA

MAM3

ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021

MI1

Notes de Cours

R. BWEMBA

REVISIONS 1 :

INTEGRALES GENERALISEES / INTEGRALES IMPROPRES

Nous rappelons ici, les résultats importants (vus en Peip2 ou en Prépa) et quelques démonstrations instructives.

Nous notons $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Dans certains cas, cet intervalle peut être non borné, on a alors $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$.

Dans la théorie de Riemann, si la fonction f est non bornée sur I et/ou l'intervalle I est non borné, ouvert ou semi-ouvert, on appelle intégrale impropre ou généralisée l'expression :

$$\int_I f(t)dt$$

1. NOTION DE FONCTION LOCALEMENT INTEGRABLE

DEFINITION 1 :

Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite **localement intégrable sur I** si elle est *intégrable* (au sens de Riemann) sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ **fermé** et **borné** inclus dans I.

EXEMPLE 1

- Toute fonction continue ou monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur I.
- Sur $I = [1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x}$ est localement intégrable sur I, car continue sur tout intervalle de la forme $[1, b]$; $1 < b$.

DEFINITION 2 :

Soit f une fonction localement intégrable sur $I = [a, b[$ (resp. sur $J =]a, b]$).

L'intégrale impropre $\int_a^b f$ est **convergente** si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$) a une **limite finie L** lorsque $x \to b^-$ (resp. $x \to a^+$).

Dans ce cas, on dit que le réel L est la valeur de cette intégrale impropre et on note : $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = L$, (resp. $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = L$).

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$) est **divergente** en b (resp. en a).

DEFINITION 3 :

Lorsque l'intégrale impropre $\int_I f$ est convergente, on dit que la fonction f est **intégrable** sur l'intervalle I.

REMARQUE 1 :
La définition 3.2 précédente nous donne un moyen d'étudier la **nature** (c'est-à-dire *convergence* ou *divergence*) d'une intégrale impropre. Elle nous permet aussi d'en calculer la valeur lorsqu'elle est convergente.

EXEMPLE 2 :
Soit à étudier l'intégrale

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

Posons

$$f(t) = e^{-t}$$

La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. L'intégrale K est une intégrale impropre car l'intervalle d'intégration est infini. Etudier l'intégrale K signifie dire sa **nature**, c'est-à-dire si elle est **convergente** ou **divergente**.
Pour ce genre d'étude, on commence par identifier les problèmes : ici un seul problème au niveau de la borne $+\infty$ de l'intervalle d'intégration.
Ensuite, on pose, pour tout réel $X \in [0, +\infty[$:

$$F(X) = \int_0^{X} e^{-t}\, dt$$

La fonction F ainsi définie est l'intégrale d'une fonction définie et **continue** sur un intervalle réel **fermé** et **borné**. C'est donc une intégrale de Riemann que l'on peut calculer par primitivation.
On trouve :

$$F(X) = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=X} = 1 - e^{-X}$$

On conclut enfin, en utilisant la définition de l'intégrale généralisée :

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^{X} e^{-t}\, dt = \lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} (1 - e^{-X}) = 1.$$

L'intégrale K est donc **convergente** et sa **valeur** est 1 :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$$

Nous utiliserons ce résultat plus tard pour l'étude de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Par la méthode précédente, c'est-à-dire par l'utilisation de la définition de l'intégrale impropre, on peut étudier la nature des intégrales suivantes (cf TD1) :

- $I_1 = \int_0^1 \ln x \, dx$; $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
- $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$; $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, suivant les valeurs du paramètre réel α.

PROPOSITION 1 : (Cas de problème aux 2 bornes)

Soit f une fonction localement intégrable définie sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, les réels a, b pouvant être $\pm\infty$ et soit $c \in]a, b[$.
Alors on a :

$$\int_a^b f(t)\, dt \quad \text{converge si} \quad \begin{cases} \int_a^{\boldsymbol{c}} f(t)\, dt \; converge \\ \int_{\boldsymbol{c}}^b f(t)\, dt \; converge \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^{\boldsymbol{c}} f(t)\, dt + \int_{\boldsymbol{c}}^b f(t)\, dt$$

REMARQUE 2 :

- La relation de CHASLES est donc vérifiée pour les intégrales impropres ;
- La valeur de l'intégrale est indépendante du point c choisi dans l'intervalle $]a, b[$.

<u>EXEMPLE 3 :</u>

Etudions la nature de l'intégrale généralisée

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

La fonction

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

est localement intégrable sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ car continue.

Nous sommes en présence de deux problèmes, aux deux bornes de l'intervalle d'intégration. Scindons-les, afin de les étudier **séparément**, par exemple, considérons les deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

et

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Ce sont des intégrales impropres (une des deux bornes est infinie) que nous étudierons tour à tour.

Etude de $\boldsymbol{I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt}$

On pose, pour tout réel $X \in [0, +\infty[$:

$$F_1(X) = \int_0^X \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

La fonction F_1 ainsi définie est l'intégrale d'une fonction définie et **continue** sur un intervalle réel **fermé** et **borné**. C'est donc une intégrale de Riemann que l'on peut calculer par primitivation.
On trouve :

$$F_1(X) = [\operatorname{atan} t]_{t=0}^{t=X} = \operatorname{atan} X - 0$$

On conclut enfin, en utilisant la définition de l'intégrale généralisée :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{X\to+\infty} F_1(X) = \lim_{X\to+\infty} \operatorname{atan} X = \frac{\pi}{2}$$

<u>Conclusion partielle 1 :</u>
L'intégrale généralisée I_1 est convergente et sa valeur est $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

Etude de $\boldsymbol{I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt}$

Un calcul analogue au cas précédent donne pour tout réel $X \in]-\infty, 0]$:

$$F_2(X) = \int_X^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{atan} X$$

Puis,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{X\to-\infty} \int_X^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{X\to-\infty} F_2(X) = \lim_{X\to-\infty} (-\operatorname{atan} X) = \frac{\pi}{2}$$

<u>Conclusion partielle 2 :</u>

L'intégrale généralisée I_2 est convergente et sa valeur est $I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

<u>Conclusion :</u>

Les intégrales impropres I_1 et I_2 sont convergentes. L'intégrale $I = I_1 + I_2$ est donc **convergente** comme somme d'intégrales convergentes. De plus, sa **valeur** est :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2. INTEGRALES DE REFERENCE

On dispose d'un certain nombre de fonctions dont on connaît la nature des intégrales généralisées, et qui servent à déterminer la nature de nombreuses intégrales impropres. Les intégrales de ces fonctions sont dites de référence.

PROPOSITION 2 : (Intégrales de référence de Riemann)

Soit α ∈ ℝ et soit $a > 0$:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad converge \quad ssi \quad \alpha > 1$$

$$\int_{0}^{a} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad converge \quad ssi \quad \alpha < 1$$

Démonstration :

Etudions d'abord l'intégrale impropre $I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

Pour cela, posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et considérons un réel $X > a$.

$$F(X) = \int_{a}^{X} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \ln X - \ln a & si \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{X^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & si \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

On a alors :

- 1er cas : $\boldsymbol{\alpha = 1}$; $\lim_{X\to\infty} F(X) = +\infty$ et donc I_1 est **divergente**.
- 2ème cas : $\alpha \neq 1$; la limite qui nous intéresse dépend du signe de $-\alpha + 1$. En effet
  Si $-\alpha + 1 > 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\alpha} < 1$ alors $\lim_{X\to\infty} F(X) = +\infty$; et I_1 est **divergente**.
  Si $-\alpha + 1 < 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\alpha} > 1$ alors $\lim_{X\to\infty} F(X) = \frac{-a^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$; et I_1 est **convergente**.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ est donc convergente ssi $\boldsymbol{\alpha} > 1$.

On démontre, par la même méthode que l'intégrale impropre $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ est convergente ssi $\alpha < 1$.

REMARQUE 3 :

L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ est toujours divergente.

3. CAS DES FONCTIONS CONTINUES A VALEURS POSITIVES :

On dispose de critères d'***intégrabilité*** pour les fonctions de signe constant dans l'intervalle d'étude tout entier ou alors dans un voisinage de la borne où l'on veut étudier la nature de l'intégrale généralisée.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux fonctions définies, continues dans un intervalle réel I et à valeurs positives, les résultats pour les fonctions à valeurs négatives s'en déduisent moyennant les changements adéquats.

PROPOSITION 3 :

Soient deux fonctions f,g définies, continues, positives et intégrables sur un intervalle réel I (non vide). On a les propriétés suivantes :

- Pour tout intervalle $J \subset I$, la fonction f est intégrable sur J et $\int_J f(x)dx \leq \int_I f(x)dx$
- Pour tous réels positifs μ, λ, la fonction $\mu f + \lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I \big(\mu f(x) + \lambda g(x)\big)dx = \mu \int_I f(x)dx + \lambda \int_I g(x)dx$
- Si $\int_I f(x)dx = 0$ alors $f \equiv 0$ sur I.

THEOREME 1 :

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4 :

Soient deux fonctions f,g définies, continues, positives sur un intervalle réel I. Supposons que :

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad \forall x \in I$$

On a :

- Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$
- Si f n'est pas intégrable sur I alors g n'est pas intégrable sur I.

EXEMPLE 4 : utilisation du critère de comparaison des fonctions positives.

Etudier la nature de l'intégrale généralisée : $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

La fonction $f(t) = e^{-t^2}$ est continue, positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Utilisons le critère de comparaison des fonctions positives. Considérons la fonction $g(t) = e^{-t}$. Rappelons que nous avons démontré, exemple 3.2, que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente, il en va évidemment de même de $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

Pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$

donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

On a alors : $0 \leq f(t) \leq g(t)$, $\forall t \geq 1$.

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ par le critère de comparaison des fonctions positives.

Conclusion : $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est une intégrale convergente.

EXEMPLE 5 : utilisation du critère de comparaison des fonctions positives.

Soit à étudier la nature de l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln t}\, dt$ par le critère de comparaison de fonctions positives.

La fonction $f(t) = \sqrt{-\ln t}$ est définie, continue et positive sur l'intervalle $]0,1]$. Le problème à étudier est donc uniquement en $t = 0$.

Sachant que

$$\lim_{t \to 0^+} t \, ln \, t = 0$$

$$\lim_{t \to 0^+} (-t \, ln \, t) = \lim_{t \to 0^+} t(-\ln t) = 0$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t(-\ln t)} = \lim_{t \to 0^+} (\sqrt{t}\sqrt{-ln \, t}) = 0$$

En d'autres termes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < t < \varepsilon$:

$$\sqrt{t}\sqrt{-ln \, t} \leq 1$$

C'est-à-dire

$$0 \leq \sqrt{-ln \, t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \ , \ \ 0 < t < \varepsilon$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de référence de Riemann au voisinage de 0, convergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Par le critère de comparaison de fonctions positives, l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln t}\, dt$ est aussi convergente.

PROPOSITION 5 : (Critère des fonctions équivalentes positives)

Soient deux fonctions f, g définies, continues, positives sur un intervalle réel $I = [a, b[$, $b\ fini\ ou\ pas$. Supposons, de plus, que :

$$f \sim g \quad au\ voisinage\ de\ b$$

On a :

$$\int_a^b f(x)dx \quad est\ convergente \quad \boldsymbol{ssi} \quad \int_a^b g(x)dx \quad est\ convergente$$

En d'autres termes,

$\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

APPLICATIONS :

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$A_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}} dx$; $B_1 = \int_0^1 \frac{e^{sinx}}{\sqrt{x}} dx$; $C_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)} dx$;

$D_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$; $E_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln x}\ dx$.

4. AUTRES INTEGRALES DE REFERENCE : LES INTEGRALES DE BERTRAND

On appelle intégrales de BERTRAND les intégrales des fonctions du type :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sur les intervalles de la forme $]0, a], [b, +\infty[\ ; \ \ 0 < a < 1\ ,\ \ b > 1.$

PROPOSITION 6 :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\, dt \ \ converge \ \ ssi \ \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\, dt \ \ converge \ \ ssi \ \begin{cases} \alpha < 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

REMARQUE 4 :

Tout comme avec les intégrales de référence de Riemann, les résultats sur les intégrales de Bertrand peuvent être utilisés sans revenir sur leur démonstration.

Démonstration :

Considérons l'intégrale impropre

$$I_1 = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\, dt$$

La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est définie, continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$. L'intégrale I_1est impropre car l'intervalle d'intégration est infini. Nous avons donc un seul problème à étudier en $+\infty$.

Comme lors de l'étude de l'intégrale de référence de Riemann, étudions le problème en fonction de la position du réel α par rapport à 1.

<u>1er cas : α=1.</u>

Revenons à la définition de l'intégrale impropre et posons pour tout réel X > 2 :

$$I_1 = \lim_{X \to +\infty} \int_{2}^{X} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\, dt = \lim_{X \to +\infty} F(X)$$

Commençons par le sous-cas β=1.

1er sous-cas : β=1 (α=1).

$$F(X) = \int_2^X \frac{1}{t \ln t} dt$$

La fonction

$$f(t) = \frac{1}{t \ln t}$$

est définie, continue sur l'intervalle réel fermé, borné $[2, X]$. Elle y est donc intégrable au sens de Riemann. Calculons-la par une technique classique de calcul d'intégrales, par exemple par un changement de variable.

Pour cela, posons :

$$u = \ln t \quad ; \quad du = \frac{dt}{t}$$

Les bornes deviennent :

$$t = 2 \ \Rightarrow u = \ln 2$$

$$t = X \Rightarrow u = \ln X$$

Et l'intégrale s'écrit :

$$F(X) = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u} = [\ln u]_{u=\ln 2}^{u=\ln X} = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$$

On en déduit :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt = \lim_{X \to +\infty} F(X) = \lim_{X \to +\infty} \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) = +\infty$$

Conclusion du sous-cas α=β=1 :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt \quad est \quad divergente.$$

2ème sous-cas : β≠1 (α=1).

$$F(X) = \int_2^X \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta} dt$$

On utilise le même changement de variable que dans le sous-cas précédent pour calculer l'intégrale de Riemann ci-dessus. On obtient :

$$F(X) = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u^\beta}$$

Comme nous nous intéressons à la nature de l'intégrale, il est inutile de continuer les calculs. Par contre, on peut remarquer que le problème revient à l'étude de la nature de l'intégrale :

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$$

Cette intégrale est de même nature que

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$$

qui est une intégrale de référence de Riemann, convergente si et seulement si $\beta > 1$.

<u>Conclusion du sous-cas α=1, β≠1 :</u>

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^{\beta}}\,dt \quad est\ convergente \quad ssi \quad \beta > 1.$$

<u>2ème cas : α > 1.</u>

Montrons, par le critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\,dt$$

est convergente, indépendamment de la valeur du réel β.

L'idée est de montrer qu'il existe un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$0 < \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq \frac{1}{t^{\delta}}$$

où $\delta > 1$. Ceci nous permettra, par le critère de comparaison des fonctions positives, de déduire la convergence de l'intégrale de départ à partir de celle de l'intégrale de Riemann $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}}\,dt$, puisque $\delta > 1$.

Soit alors un réel δ tel que :

$$\boldsymbol{\alpha} > \delta > 1$$

on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\delta}(\ln t)^{\beta}} = 0$$

car $\alpha - \delta > 0$.

Il existe donc un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$0 < \frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq 1$$

Et

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq \frac{1}{t^{\delta}}$$

Or,

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}} dt$$

est une intégrale de référence de Riemann convergente ($\delta > 1$). On en conclut, par le critère de comparaison des fonctions positives, que l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est convergente pour $\alpha > 1$.

<u>3ème cas : α < 1.</u>

Montrons, par le critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est divergente, indépendamment de la valeur du réel β.

L'idée est de montrer qu'il existe un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \geq \frac{1}{t^{\delta}}$$

où δ < 1. Ceci nous permettra, par le critère de comparaison des fonctions positives, de déduire la divergence de l'intégrale de départ à partir de celle de l'intégrale de Riemann $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}} dt$, puisque $\delta < 1$.

Soit alors un réel δ tel que :

$$\boldsymbol{\alpha} < \delta < 1$$

On a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\delta}(\ln t)^{\beta}} = +\infty$$

car $\alpha - \delta < 0$.

Il existe donc un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$\frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \geq 1$$

Et

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \geq \frac{1}{t^{\delta}}$$

Or,

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}} dt$$

est une intégrale de référence de Riemann divergente ($\delta < 1$). On en conclut, par le critère de comparaison des fonctions positives, que l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est divergente pour $\alpha < 1$.

CONCLUSION :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt \ \ converge \ \ ssi \ \ \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

<u>En exo, Etude de l'intégrale :</u>

$$I_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$$

5. CAS DES FONCTIONS DE SIGNE QUELCONQUE :

Nous avons vu, pour l'étude de la nature des intégrales impropres, les techniques suivantes :

- *La définition ; inconvénient : calcul de l'intégrale de Riemann suivi d'un calcul de limite ;*
- *Les critères de fonctions « positives » (en réalité, il suffit que les fonctions soient de signe constant dans l'intervalle d'étude ou au voisinage de la borne qui présente un problème) ;*
- *Cas des fonctions de signe non constant : on peut considérer la valeur absolue de la fonction et se ramener ainsi au cas précédent, mais alors, a-t-on une <u>équivalence</u> entre la nature de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction et l'intégrale de la fonction ? La réponse est NON !*

INTEGRALES ABSOLUMENT CONVERGENTES :

DEFINITION 5 :

Soit f une fonction définie, localement intégrable sur un intervalle réel $[a, b[$ (b fini ou pas) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente (ou encore converge absolument) lorsque $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente.

REMARQUE 5 :
Cette définition ramène l'étude de la nature de l'intégrale impropre d'une fonction de signe quelconque à celle d'une fonction à valeurs positives.
Nous avons alors le résultat important suivant :

THEOREME 2 :

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

REMARQUE 6 :
Le théorème 5.1 ci-dessus, signifie en d'autres termes :

$$\boldsymbol{ABSOLUMENT\ CONVERGENTE \Rightarrow CONVERGENTE}$$

Attention, la réciproque est FAUSSE. C'est-à-dire, si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est divergente, on ne peut rien en conclure sur la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$.

EXEMPLE 6 :

Les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes, elles sont donc convergentes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Donnons à présent un contre-exemple, c'est-à-dire, une intégrale impropre convergente, mais non absolument convergente (cf TD1):

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

On parle alors d'intégrale semi-convergente.

INTEGRALES SEMI-CONVERGENTES :

DEFINITION 6 :

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente lorsqu'elle est convergente mais non-absolument convergente.

C'est-à-dire :

$$\int_a^b f(t)\,dt \ \ est\ convergente \quad \text{et} \quad \int_a^b |f(t)|\,dt\ est\ divergente$$

Donnons à présent l'énoncé d'un résultat important de convergence : le théorème d'Abel.

THEOREME 3 :

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle réel $[a, +\infty[$.
Si :

- f est positive, décroissante sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Il existe une réel $M > 0$ tel que $\forall\, X \geq a$, $\left|\int_a^X g(x)\,dx\right| \leq M$.

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est convergente.

EXEMPLE 7 :

L'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$ est semi-convergente.

REVISIONS 2 :

INTEGRALE DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Nous rappelons ici, les résultats importants (vus en Prépa) qu'il faut connaître et savoir utiliser.

NOTATIONS :

I, J : intervalles de $\mathbb{R}$; $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$f: I \times J \to K$ fonction telle que : $(x,t) \mapsto f(x,t)$;

$F: I \to K$ fonction telle que : $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$

EXEMPLE :

Soit la fonction

$$f: I \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

telle que : pour tout $(x,t) \in I \times [0,1]$

$$f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$

et soit la fonction $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

Il s'agit d'étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de la fonction F.

Pour cela on distinguera deux cas de figure :

1$^{\text{er}}$ cas : l'intervalle d'intégration J est un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$;

2$^{\text{ème}}$ cas : l'intervalle d'intégration J est un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert, infini).

1. INTERVALLE D'INTEGRATION FERME ET BORNE DE $\mathbb{R}$:

LEMME 1 :

Soit $f: I \times [a,b] \to K$ une application continue. Alors, $\forall x \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x,t) - f(y,t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a,b]$$

PROPOSITION 1 : (continuité)

Soit $f: I \times [a,b] \to K$ une application **continue**. Alors, l'application :

$$F: x \in I \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est continue sur I.

DEMONSTRATION :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est continue en x_0 ; c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta_0 \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon$$

Or

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^b f(x,t)dt - \int_a^b f(x_0,t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \leq \int_a^b \varepsilon dt$$

Par continuité de f, et tenant compte du LEMME 1 en prenant $\eta_0 = \eta$.

D'où

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon|b-a|$$

Le réel ε étant arbitraire, il peut être choisi aussi petit que l'on veut, on en déduit la continuité de F en x_0.

PROPOSITION 2 : (dérivabilité)

Soit $f: I \times [a, b] \rightarrow K$ une application **continue**.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [a, b]$

Alors, la fonction :

$$F: x \in I \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est de classe $C^1(I)$;

De plus :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad ; \quad \forall x \in I$$

2. INTERVALLE D'INTEGRATION QUELCONQUE :

PROPOSITION 3 : (continuité)

Soit J un intervalle réel <u>quelconque</u> ;

Soit $f: I \times J \rightarrow K$ une application **continue** ;

S'il existe une fonction g continue, positive, intégrable sur J et telle que :

$$|f(x,t)| \leq g(t) \quad ; \quad \forall (x,t) \in I \times J$$

Alors :

$$F: x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$$

est continue sur I et

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \int_J \lim_{x \to x_0} f(x,t)dt$$

PROPOSITION 4 : (dérivabilité)

Soit J un intervalle réel <u>quelconque</u> ;

Soit $f : I \times J \to K$ une application **continue** ;

S'il existe une fonction g continue, positive, intégrable sur J et telle que :

$$|f(x,t)| \leq g(t) \ ; \quad \forall (x,t) \in I \times J$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue sur $I \times J$ et telle qu'il existe une fonction h continue, positive, intégrable sur J vérifiant :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq h(t) \ ; \quad \forall (x,t) \in I \times J$$

Alors, la fonction :

$$F : x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$$

est de classe $C^1(I)$;

De plus :

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad ; \quad \forall x \in I$$