

FEUILLE DE T.D. 4

Exercice 1.

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin \frac{1}{nx} dx$$

2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx = 0$

3. Soit $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Exercice 2.

Soit à calculer la limite :

$$L_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx.$$

1. Pour $\alpha = 1/2$, calculer, par le théorème de convergence dominée la valeur de L_α .
2. On se propose à présent de déterminer L_α en utilisant le résultat de convergence monotone. On pose alors :

$$h_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}$$

En calculant la quantité $\ln \left(\frac{h_{n+1}}{h_n}\right)$, montrer qu'il s'agit d'une suite monotone.
Conclure.