Polytech Nice Sophia - 2019/2020

DS1 – MAM3 - MI1

25/10/19 - Durée 1h30

Les notations sont celles du cours. Calculatrices et documents non autorisés.

<u>Question de Cours</u>. (4 points)

Enoncer clairement (hypothèses, conclusions) le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

<u>Exercice 1</u>. (5 points)

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite : $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \; dx$.

Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

(Les théorèmes utilisés devront être clairement rappelés, les hypothèses soigneusement vérifiées et les conclusions mises en évidence.)

<u>Exercice 2.</u> (7 points)

Soit I un intervalle réel.

1. Montrer que, si les fonctions f et g appartiennent à $L^2(I)$ alors, le produit $fg \in L^1(I)$.
2. Montrer qu'on a alors :

$$\left(\int_I |f(t)g(t)|dt\right)^2 \leq \left(\int_I |f(t)|^2 \, dt\right)\left(\int_I |g(t)|^2 \, dt\right)$$

3. En déduire que si I est borné alors on a l'inclusion $L^2(I) \subset L^1(I)$.
4. Donner deux fonctions f et g (***différentes de la fonction*** $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}}$) définies sur un intervalle réel I (à préciser) telles que $f \in L^1(I)$ et $g \in L^1(I)$ mais le produit $fg \notin L^1(I)$. Démontrer toutes vos assertions.
5. Montrer que la fonction f définie ci-dessous appartient à $L^p([\mathbf{1}, +\infty[)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}$$

<u>Exercice 3</u>. (4 points)

Soit $t > 0$.

Montrer que la fonction $x \to \left(\frac{\sin x}{x}\right) e^{-tx}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Question de Cours :

Thm de convergence dominée de Lebesgue

Soit $(E; S_E; \mu)$ un espace mesuré

Hypothèses :

(i) $(f_n)_n$ suite de ftions mesurables sur E telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \; ; \text{ pp } x \in E$$

(ii) Il existe g une ftion intégrable positive sur E telle que :

$$|f_n(x)| \le g(x), \; \forall n = 1, 2, \dots \; ; \text{ pp } x \in E$$

Conclusions :

(i) f est intégrable sur E

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$

Ex (1) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) dx$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue cité dans la question de cours, dans le cadre :
$E = \mathbb{R}$; $S_E = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Vérification des hypothèses :

- On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu$: mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R})$
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n[}(x) \cos(x) \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

(i) $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables comme produit d'une fonction mesurable $\chi_{[0,n[}$ par une fonction continue $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n[}(x) \cos(x) = e^{-x} \cos(x) \chi_{[0,+\infty[}(x) \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Vérifions l'hypothèse (ii)

$$|f_n(x)| = \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n[}(x) \cos(x)\right| \le e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x)$$

On prend alors :

$$g(x) = e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x) \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque elle est absolument convergente sur $\mathbb{R}$).

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites. On a alors les conclusions :

(i) $f(x) = e^{-x} \cos(x) . \chi_{[0,+\infty[}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;

(ii)
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n[}(x) \cos(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \cos(x) \chi_{[0,+\infty[}(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx$$

$$= \dots\dots = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ex② : I est un intervalle réel

① $f, g \in L^2(I) \Rightarrow fg \in L^1(I)$

$\forall t \in I : (|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$

$\Rightarrow |f(t)|^2 + |g(t)|^2 - 2|f(t)||g(t)| \geq 0 ; \forall t \in I$

$\Rightarrow |f(t)||g(t)| \leq \frac{1}{2}|f(t)|^2 + \frac{1}{2}|g(t)|^2 ; \forall t \in I$

$$\Rightarrow \int_I |f(t)g(t)|dt \leq \frac{1}{2}\underbrace{\int_I |f(t)|^2 dt}_{< \infty \text{ car } f \in L^2(I)} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_I |g(t)|^2 dt}_{< \infty \text{ car } g \in L^2(I)}$$

$\Rightarrow fg \in L^1(I)$. ■

(Autre Méthode : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in I$:

$\int_I (x|f(t)| + |g(t)|)^2 dt \geq 0$)

② $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in I ; \forall f, g \in L^2(I)$

Considérons : $F(x,t) = (x|f(t)| + |g(t)|)^2$

Alors

$\int_I F(x,t)dt < \infty ; \forall x \in \mathbb{R}$ car $f, g \in L^2(I)$

on peut utiliser ①.

Posons alors :

$P(x) = \int_I F(x,t)dt ; \forall x \in \mathbb{R}$

F étant positive, P est positive comme intégrale d'une fonction positive.

$P(x) \geq 0 \iff \int_I F(x,t)\,dt \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\iff x^2 \int_I |f(t)|^2 dt + 2x \int_I |f(t)|\cdot|g(t)|dt + \int_I |g(t)|^2 dt \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

C'est l'expression d'un trinôme du 2nd degré positif : son discriminant est donc négatif :

$$\Delta = 4\left(\int_I |f(t)|\cdot|g(t)|dt\right)^2 - 4\left(\int_I |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_I |g(t)|^2 dt\right) \leq 0$$

D'où l'inégalité demandée.

③ I étant borné : posons $g = \chi_I \in L^2(I)$

et appliquons ② avec $f \in L^2(I)$:

$$\left(\int_I |f(t)\chi_I(t)|dt\right)^2 = \left(\int_I |f(t)|dt\right)^2$$

et

$$\int_I |g(t)|^2 dt = \int_I |\chi_I(t)|^2 dt = \text{mesure}(I) < \infty,$$ car I borné

D'où :

$$\left(\int_I |f(t)|dt\right)^2 \leq \left(\int_I |f(t)|^2 dt\right) \times \text{mesure}(I)$$

$< +\infty$ car $f \in L^2(I)$

$\Rightarrow f \in L^1(I)$.

Conclusion : Si I est borné, inclus dans $\mathbb{R}$:

$L^2(I) \subset L^1(I)$

④ $I =]0, +\infty[$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} ; \forall t \in I ; f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} ; f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{5/2}}$

$g(t) = \frac{1}{t^{3/4}(1+t^{2+3/4})} ; \forall t \in I ; g(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{3/4}} ; g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{7/4}}$

$f(t)g(t) = \frac{1}{t^{5/4}(1+t^2)(1+t^{11/4})} ; fg \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{5/4}}$

$\Rightarrow fg \notin L^1(I)$ alors que $f, g \in L^4(I)$

Ex② (suite) :

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$;

$f \in L^p([1,+\infty[)$, $1 \leq p \leq +\infty$

- Un seul problème en $+\infty$
- On a : pour $1 < X < \infty$:

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|^p dx = \lim_{X \to +\infty} \underbrace{\int_1^X \frac{dx}{x^p(1+\ln x)^{2p}}}_{I(X)}$$

Calcul de $I(X)$: changement de variable

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -u^2 dx$

D'où : $I(X) = -\int_1^{1/X} \frac{u^p du}{u^2(1-\ln u)^{2p}}$

Quand X tend vers $+\infty$, le problème revient à l'étude de la nature de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{du}{u^{2-p}(1-\ln u)^{2p}}$

Or $\frac{1}{u^{2-p}(1-\ln u)^{2p}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^{2-p}(\ln u)^{2p}}$

Par le critère des fonctions équivalentes positives ;

$\int_0^{\cancel{1}} \frac{du}{u^{2-p}(1-\ln u)^{2p}}$ est de même nature

que $\int_0^{1/2} \frac{du}{u^{2-p}(\ln u)^{2p}}$.

Or cette dernière est une intégrale de Bertrand convergente car

- $\alpha = 2-p < 1$ pour $p > 1$
- $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ pour $p = 1$

Conclusion :

$\int_1^{+\infty} |f(x)|^p dx$ est convergente pour $1 \leq p \leq +\infty$.

$f \in L^p([1,+\infty[)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Ex 3 :

$t>0\ ;\ x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right) e^{-tx} \in L^1(]0,+\infty[)$

- Etude en 0 :

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} = 1\ ;\ \forall t>0$

La fonction est prolongeable par continuité en 0.
Elle est donc intégrable en 0.

- Etude en $+\infty$:

$\left|\frac{\sin x}{x} e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$ pour $x>1$; $t>0$

or $\int_1^{+\infty} e^{-tx} dx$ est absolument convergente.

Par comparaison $x \mapsto \frac{\sin x}{x} e^{-tx}$ est absolument convergente et donc intégrable en $+\infty$.

Conclusion :
$x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right) e^{-tx} \in L^1(]0,+\infty[)$