**Polytech Nice Sophia – MAM3 / MI1** **2020/2021**

**FEUILLE DE T.D. 5**

**Les notations sont celles du cours**

**Exercice 1.**

1. Montrer que la fonction $x \rightarrow e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $t > 0$.
2. Vérifier que $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ est indéfiniment dérivable :
 (i) En calculant $I$ puis ses dérivées successives.
 (ii) En itérant l'application du *théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre* .
3. Déduire de ce qui précède que : $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$

**Exercice 2.**

Etudier l'appartenance des fonctions suivantes à $L^1(\mathbb{R})$, puis à $L^2(\mathbb{R})$ :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & pour\ \ t \neq 0 \\ 1 & pour\ t = 0 \end{cases} \quad ; \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\chi_{]0,+\infty[}(t) \quad ; \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad ; \quad w(t) = e^{-t^2}$$

**Exercice 3.**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$$

1. Montrer que $f \in L^1(]0,1])$.
2. Montrer que $f \notin L^p(]\mathbf{0},\mathbf{1}])$**,** pour $1 < p < +\infty$.
3. Montrer que $f \in L^p([\mathbf{1},+\infty[)$, pour $1 \leq p < +\infty$.