Chapitre 2 LES ESPACES L^p

1. RAPPELS DE TOPOLOGIE

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie ou pas ; $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.1 NORMES

DEFINITION

On appelle **norme** sur un espace vectoriel E toute application notée $\|.\|_E$ de E vers $\mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes :

(i) **Positivité** (stricte) : $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0 \ et \ \|x\|_E = 0 \iff x = 0_E$
(ii) **Homogénéité** : $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$
(iii) **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y \in E, \ \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$

Le couple $(E, \|.\|_E)$ est appelé ***espace vectoriel normé***.

1.2 CONVERGENCE DE SUITES DANS UN E.V.N

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé.

DEFINITION

Une suite $(u_n)_n$ de vecteurs de E est dite convergente (vers $l \in E$) ***ssi***

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ t.q \ \forall n \geq N_0, \ \|u_n - l\|_E \leq \varepsilon$$

Dans la suite, $(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel normé et A est un sous-espace vectoriel de E.

1.3 INTERIEUR d'un sous-espace vectoriel

DEFINITION et PROPRIETES

- Le vecteur $a \in E$ est dit ***intérieur à A***, lorsque A contient une boule de centre a ;
- L'ensemble des vecteurs de E intérieurs à A est appelé « ***intérieur de A*** » noté $\dot{\boldsymbol{A}}$ ou $\boldsymbol{int}(\boldsymbol{A})$;
- $\dot{\boldsymbol{A}}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert de E contenu dans A **;**
- Ainsi : A est ***ouvert ssi*** $\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$

1.4 ADHERENCE d'un sous-espace vectoriel

DEFINITION et PROPRIETES

- Le vecteur $a \in E$ est dit ***adhérent à A***, s'il est la limite d'une suite de vecteurs de A ;
- L'ensemble des vecteurs de E adhérents à A est appelé « ***adhérence de A*** » noté $\overline{\boldsymbol{A}}$ ou $\boldsymbol{adh}(\boldsymbol{A})$;
- $\overline{\boldsymbol{A}}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de E contenant A **;**
- Ainsi : A est ***fermé ssi*** $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$

1.5 PARTIES BORNEES

DEFINITION

Une partie A de E est dite bornée si : $\exists M > 0 \;\; t.q. \;\; \|x\|_E \leq M, \;\; \forall x \in A$.

1.6 DENSITE

DEFINITION

On dit que ***A est dense dans E*** lorsque $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}$

C'est-à-dire, tout vecteur de E est la limite d'une suite de vecteurs de A ; c'est-à-dire encore : tout vecteur de E peut être approché (d'aussi près que l'on veut) par une suite de vecteurs de A.

Espace séparable :

DEFINITION

Un e.v.n est dit **séparable** s'il contient une partie **dense** *finie* ou *dénombrable*.

EXEMPLE :

$\mathbb{R}$ est séparable car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

1.7 FRONTIERE

DEFINITION

On appelle ***frontière de A*** l'ensemble des vecteurs de $\overline{A}$ qui *n'appartiennent pas* à $\dot{A}$.

On le note : ∂A

Et donc $\partial A = \overline{A} \setminus \dot{A}$

REMARQUE :

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$

1.8 SUITES DE CAUCHY

DEFINITION

La suite $(u_n)_n$ est dite ***suite de Cauchy*** si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ t.q \ \ \forall n, p \geq N_0, \ \left\| u_n - u_p \right\|_E \leq \varepsilon$$

PROPOSITION

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

REMARQUE

La réciproque est fausse : il existe des suites de Cauchy non convergentes.

On peut par exemple considérer un nombre irrationnel (mettons $l = \sqrt{2}$). Il existe une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{Q}$ convergeant vers l, c'est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, mais aussi de $\mathbb{Q}$. Si la suite avait une limite dans $\mathbb{Q}$, cette limite serait l. Impossible.

1.9 E.V.N COMPLETS - E .V.N COMPACTS

DEFINITION

Un **espace vectoriel normé complet** (ou encore ***espace de BANACH***) est un espace vectoriel dans lequel **toute suite de Cauchy est convergente**.

PROPOSITION (Critère de Cauchy)

Dans un espace vectoriel normé *complet*, une **suite est convergente *ssi* elle est une suite de Cauchy**.

EXEMPLES

- $\mathbb{R}^p$ est complet pour $p \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont complets

PROPOSITION

Tout produit d'espaces vectoriels complets est un espace vectoriel complet.

DEFINITION

Un espace vectoriel normé E est dit **compact** si **:** de toute suite de vecteurs de E, on peut extraire une sous-suite convergente, dans E (c'est la propriété de Bolzano-Weierstrass).

En d'autres termes, toute suite de E possède au moins une valeur d'adhérence.

PROPOSITION

Tout espace vectoriel normé *compact* est borné.

Dans toute la suite du chapitre, $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ est un espace mesuré.

2. PREMIERES DEFINITIONS

DEFINITION 2.1

Soit un réel p tel que : $0 < p < \infty$.

On appelle et on note $\boldsymbol{L^p(\mu)}$ l'ensemble des fonctions f mesurables et définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de puissance $pème$ intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_E |f|^p d\mu < \infty$$

Ainsi :

- $\boldsymbol{L^1(\mu)}$: $\int_E |f| \ d\mu < \infty$
- $\boldsymbol{L^2(\mu)}$: $\int_E |f|^2 d\mu < \infty$
- ….

DEFINITION 2.2

On appelle et on note $\boldsymbol{L^\infty(\mu)}$ l'ensemble des fonctions f mesurables et définies sur E, bornées presque partout dans E.

REMARQUE 2.1

Si μ est la mesure de Lebesgue et $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, alors on notera $\boldsymbol{L^p(\mathbb{R}^n)}$ au lieu de $L^p(\mu)$ ou tout simplement $\boldsymbol{L^p}$**.**

DEFINITION 2.3

Soient les réels p et q tels que : $1 < p, q < \infty$.

Si $p + q = pq$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$, on dit que les réels p et q forment un couple d'**exposants conjugués**.

REMARQUE 2.2

- Cas particulier : $p = q = 2$
- Quand $p \to 1$ alors $q \to \infty$: on conviendra donc de dire que $\mathbf{1}$ et ∞ sont des **exposants conjugués**.

EXEMPLES

- $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$; $f \in L^2(\mathbb{R})$; $f \notin L^1(\mathbb{R})$

- $g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} & t > 0 \end{cases}$; $g \in L^1(\mathbb{R})$; $g \notin L^2(\mathbb{R})$

- $w(t) = e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$; $w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3. NORMES DANS L^p

Soit $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ un espace mesuré.

PROPOSITION 3.1

- Pour $1 \leq p < \infty$, l'application : $f \mapsto \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme dans $\boldsymbol{L^p(\mu)}$ appelée **norme L^p** de f.

  On note : $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_{\boldsymbol{E}} |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}} \, \boldsymbol{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}}$

- De même, l'application : $f \mapsto \inf \{c \geq 0, |f(x)| < c \;\; p.p \text{ dans } E\}$ est une norme dans $\boldsymbol{L^\infty(\mu)}$ appelée **norme L^∞** de f.
  On note : $\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \inf \{c \geq 0, |f(x)| < c \;\; p.p \text{ dans } E\}$

PROPOSITION 3.2 (Inégalité de Hölder)

Soient p et q des exposants *conjugués*, avec $1 \leq p \leq \infty$.

Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors

(i) $fg \in L^1(\mu)$
(ii) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$

PROPOSITION 3.3 (Inégalité de Minkowsky)

Supposons $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p(\mu)$ alors

(i) $f + g \in L^p(\mu)$
(ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

THEOREME 3.1

$\left(L^p(\mu), \|.\|_p\right)$ est un **espace vectoriel normé complet** pour $1 \leq p \leq \infty$

REMARQUE 3.1

- $L^p(\mu)$ est un e.v.n mais ATTENTION ses éléments (ses vecteurs) ne sont pas des fonctions, mais des classes d'équivalence de fonctions (pour simplifier le langage, on dira espace de fonctions) ; $f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \text{p.p}$
- C'est un fait particulièrement important que $L^p(\mu)$ soit complet (ce n'était pas le cas avec l'intégrale de Riemann), c'est-à-dire toute suite de Cauchy de $L^p(\mu)$ converge vers un élément de $L^p(\mu)$:

On introduit à présent, une nouvelle notion de convergence : la convergence en norme p.

DEFINITION 3.1 (Convergence en norme p)

Une suite $(f_n)_n$ ***converge*** vers f en ***norme p*** si

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

DEFINITION 3.1 (Convergence p.p.)

Une suite $(f_n)_n$ ***converge p.p*** vers f si

$$\mu\left(\left\{x \in E \ \ t.q \ \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$$

CONV. UNIFORME ⇒ CONV. SIMPLE (Conv. ponctuelle) ⇒ CONV . P.P.

(CU⇒CS⇒CPP)

REMARQUE 3.2

En toute généralité, il n'y a <u>pas de lien</u> entre la convergence $p.p$ et la convergence en norme p. On sait par exemple que la convergence en norme p entraine la convergence $p.p$ d'une sous-suite.

4. APPROXIMATION PAR LES FONCTIONS CONTINUES

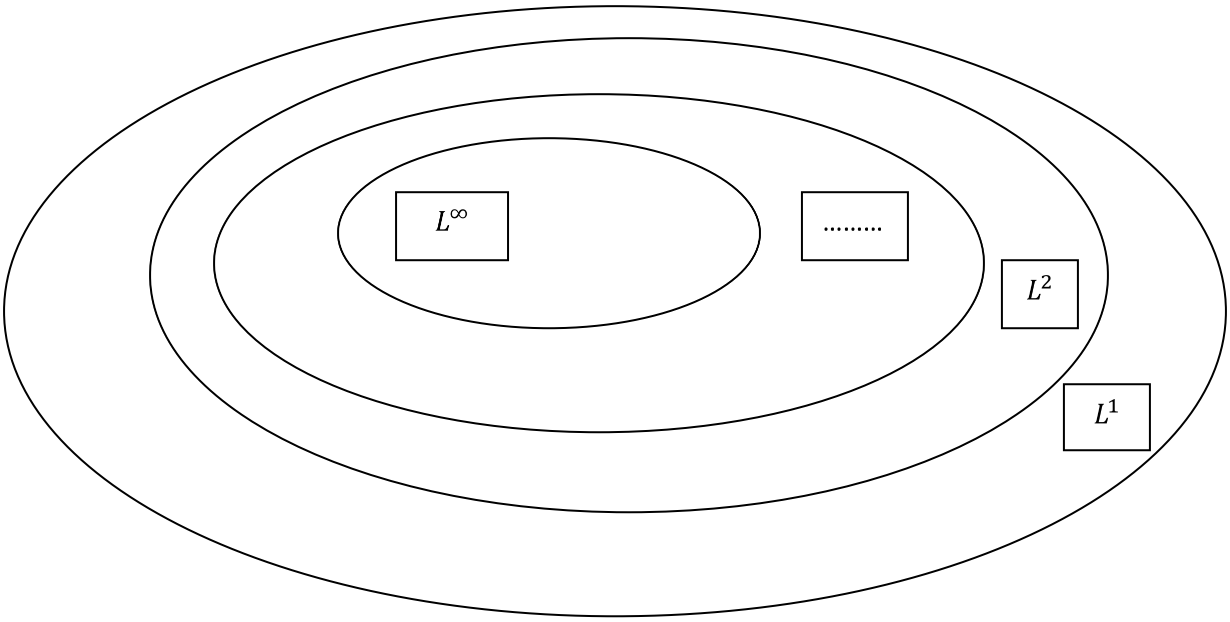
4.1 RELATIONS D'INCLUSION

PROPOSITION 4.1

> Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de mesure finie, c'est-à-dire $\mu(I) < \infty$;
>
> Soit p, q tels que $1 \leq p \leq q \leq \infty$
>
> Alors $L^q(I) \subset L^p(I)$.

REMARQUE 4.1

On a donc, si $\mu(I) < \infty$: $L^\infty(I) \subset \cdots \subset L^2(I) \subset L^1(I)$



4.2 DENSITE

Rappels : On dit que A *est dense dans* E lorsque $\bar{A} = E$.

THEOREME 4.1

> Notons $\boldsymbol{S}$ l'ensemble des **fonctions en escalier** (notées $\boldsymbol{s}$), **mesurables**, à valeurs complexes, définies sur E et telles que : $\mu(\{x \in E,\ \boldsymbol{s}(x) \neq 0\}) < \infty$,
>
> Alors $\boldsymbol{S}$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < \infty$.

DEFINITION 4.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C})$ une fonction **continue**. On appelle ***support de f***, l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$.

Notons $\boldsymbol{C_c(I)}$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et à support borné.

THEOREME 4.2

L'espace $\boldsymbol{C_c(I)}$ **est dense dans** $L^p(I)$ pour $1 \leq p < \infty$.

REMARQUE 4.2

Le théorème est faux pour $p = \infty$.