TD 5.

Exo 1. 1.1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$,
$(t, x) \longmapsto e^{-tx}$

donc, à $t > 0$ fixé, $x \longmapsto e^{-tx}$ est $\mathcal{C}^0$ donc mesurable et :

$$\int_0^\infty \underbrace{|e^{-tx}|}_{\geq 0} dx = \int_0^\infty e^{-tx} dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-tx} dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left[\frac{e^{-tx}}{-t}\right]_0^A$$

$$= \frac{1}{t} < \infty : e^{-tx} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

1.2. i) On a vu que $I(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$ si $t > 0$;
donc I est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $I'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $I''(t) = \frac{2}{t^3}$,

$$I'''(t) = -\frac{6}{t^4} \dots$$

Récurrence : $I^{(n)}(t) = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{t^{n+1}}$.

ii) On peut aussi calculer I et ses dérivées comme suit : soit $t > 0$,

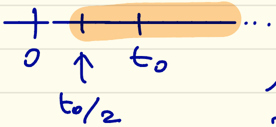
$$I(t) = \underbrace{\int_0^\infty f(t,x)\,dx}_{\text{intégrale paramétrée}} \qquad \left(f(t,x) = e^{-tx}\right)$$

On, on dispose de résultat permettant de garantir que I est dérivable et que

$$I'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty f(t,x)\,dx = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)}_{\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)}\,dx \quad \left.\right\} \text{Commutation } \frac{d}{dt} \text{ et } \int$$

Soit $t_0 > 0$; f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ donc $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-x \cdot e^{-tx}\right| \leq \overbrace{x \cdot e^{-\frac{t_0}{2} \cdot x}}^{\in L^1(\mathbb{R}_+)} \text{ si } t \in \underbrace{\left[\frac{t_0}{2}, \infty\right[}_{\text{voisinage de } t_0} :$$



la fonction $x \mapsto x \cdot e^{-\frac{t_0}{2} \cdot x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et est indépendante de t ;

donc le th. ci-après s'applique :

Th. (dérivation "sous le signe somme" / dérivation d'une intégrale paramétrée) :

soit $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x) \longmapsto f(t, x)$ et soit

$$F(t) := \int_X f(t, x)\, d\mu(x)$$

(on suppose que, $\forall t$, $x \longmapsto f(t, x)$ est mesurable et dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) ;
soit $t_0 \in \mathbb{R}$, si f est dérivable par rapport à t et s'il existe $\eta > 0$ et $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tq :

$$(\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta])(\forall x \in X) : \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$$

alors F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt} \int_X f(t, x)\, d\mu(x) \Big|_{t = t_0}$$
$$= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, d\mu(x).$$

Ici, $X = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$, $\mu = \mu_L$ $(= dx)$,
$\eta = t_0/2$, $g(x) = x \cdot e^{-\frac{t_0}{2} \cdot x}$. Donc :

$$I'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-t \cdot x})\, dx$$
$$= \int_0^\infty (-x \cdot e^{-tx})\, dx.$$

Récurrence immédiate : le même théorème s'applique n fois et

$$I^{(n)}(t) = \int_0^\infty (-x)^n \cdot e^{-t \cdot x}\, dx.$$

1.3. D'après ce qui précède, $(\forall n \geq 0)(\forall t > 0)$:

$$I^{(n)}(t) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{t^{n+1}}$$

$$= \int_0^\infty (-1)^n \cdot x^n \cdot e^{-t \cdot x}\, dx$$

$$\underset{t = 1 > 0}{\Rightarrow} \quad n! = \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\, dx.$$

On a mq $\Gamma(n) = (n-1)!$ où la fonction Γ d'Euler est :

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x}\, dx.$$

Gamma function

From Wikipedia, the free encyclopedia

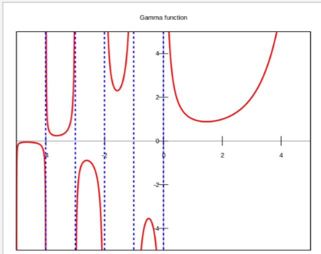
For the gamma function of ordinals, see Veblen function. For the gamma distribution in statistics, see Gamma distribution. For the function used in video and image color representations, see Gamma correction.

In mathematics, the **gamma function** (represented by Γ, the capital letter gamma from the Greek alphabet) is one commonly used extension of the factorial function to complex numbers. The gamma function is defined for all complex numbers except the non-positive integers. For any positive integer n,

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

Derived by Daniel Bernoulli, for complex numbers with a positive real part the gamma function is defined via a convergent improper integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx, \qquad \Re(z) > 0\,.$$



The gamma function along part of the real axis