

Les notations sont celles du cours. Calculatrices et documents non autorisés.

Question de Cours. (4 points)

Enoncer clairement (hypothèses, conclusions) le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 1. (5 points)

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite : $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(Les théorèmes utilisés devront être clairement rappelés, les hypothèses soigneusement vérifiées et les conclusions mises en évidence.)

Exercice 2. (7 points)

Soit I un intervalle réel.

1. Montrer que, si les fonctions f et g appartiennent à $L^2(I)$ alors, le produit $fg \in L^1(I)$.
2. Montrer qu'on a alors :

$$\left(\int_I |f(t)g(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_I |g(t)|^2 dt \right)$$

3. En déduire que si I est borné alors on a l'inclusion $L^2(I) \subset L^1(I)$.
4. Donner deux fonctions f et g (**différentes de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$**) définies sur un intervalle réel I (à préciser) telles que $f \in L^1(I)$ et $g \in L^1(I)$ mais le produit $fg \notin L^1(I)$. Démontrer toutes vos assertions.
5. Montrer que la fonction f définie ci-dessous appartient à $L^p([1, +\infty[)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}$$

Exercice 3. (4 points)

Soit $t > 0$.

Montrer que la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right) e^{-tx}$ est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^{*+} .

Question de Cours:Thm de convergence dominée de LebesgueSoit $(E; \mathcal{S}_E; \mu)$ un espace mesureHypothèses:(i) $(f_n)_n$ suite de fctns mesurables sur E

telle que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) ; \text{ pp } x \in E$$

(ii) Il existe g une fctn intégrable positive sur E telle que:

$$|f_n(x)| \leq g(x), \forall n=1,2,\dots; \text{ pp } x \in E$$

Conclusions:(i) f est intégrable sur E

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Ex 1: $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \cos x dx$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue cité dans la question de cours, dans le cadre:

 $E = \mathbb{R}; \mathcal{S}_E = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .Vérification des hypothèses:On considère l'espace mesure $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \chi_{[0,n]}(x) \cos(x); \forall x \in \mathbb{R}$$

(i) $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurablesles comme produit d'une fonction mesurable $\chi_{[0,n]}$ par une fonctioncontinue $(1 - \frac{x}{n})^n \cos(x)$ sur \mathbb{R}

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x}{n})^n \chi_{[0,n]}(x) \cos(x)$$

$$= e^{-x} \cos(x) \chi_{[0,+\infty[}(x); \forall x \in \mathbb{R}$$

Vérifions l'hypothèse (ii)

$$|f_n(x)| = (1 - \frac{x}{n})^n \chi_{[0,n]}(x) |\cos(x)| \leq e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x)$$

On prend alors:

$$g(x) = e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x); \forall x \in \mathbb{R}$$

la fonction g est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} (puisque elle est absolument convergente sur \mathbb{R}).

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites.

On a alors les conclusions:

(i) $f(x) = e^{-x} \cos(x) \chi_{[0,+\infty[}(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} :

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \cos(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} (1 - \frac{x}{n})^n \cos(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \cos(x) \chi_{[0,+\infty[}(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx$$

$$= \dots = \left[\frac{1}{2} \right]$$

1