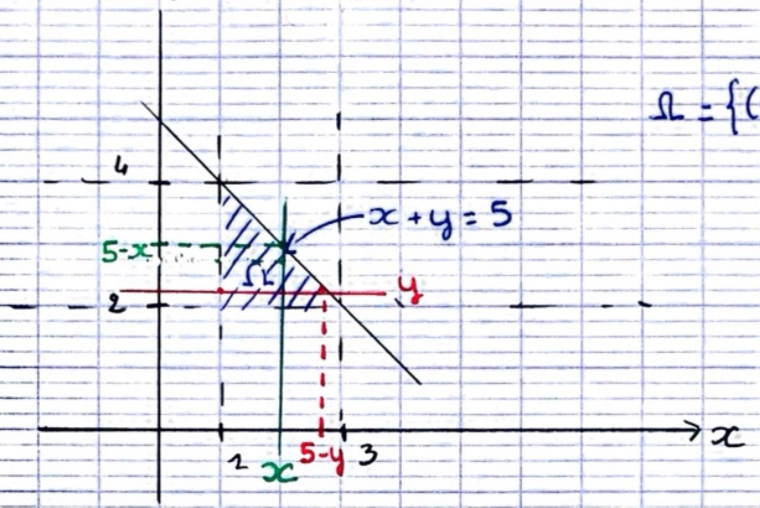
TD 2 : Révisions

Exo 1 :

Soit Ω l'ensemble ci-dessous.



$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{cases} 1 < x < 3 \\ 2 < y \\ x + y < 5 \end{cases} \right\}$$

" $\displaystyle\int_\Omega \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ " : bien défini (peut être $= \infty$)

car $\dfrac{1}{(x+y)^3} \geq 0$ si $(x,y) \in \Omega$

Par def. de l'intégrale double

$$\int_\Omega \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} := \int_2^4 \left(\int_1^{5-y} \frac{dx}{(x+y)^3} \right) dy$$

th. de Tonelli

$$= \int_1^3 \left(\int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \right) dx$$

Calculons par exemple,

$$\int_2^4 \left(\int_1^{5-y} \frac{dx}{(x+y)^3} \right) dy = \int_2^4 \underbrace{\left[-\frac{1}{2} (x+y)^{-2} \right]_1^{5-y}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{25}\right)} dy$$

$$= \underbrace{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25}}_{-1/25} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_2^4 \frac{dy}{(1+y)^2}}_{\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+y}\right]_2^4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}$$

$$= -\frac{1}{25} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}\underbrace{\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)}_{2/15}$$

$$= \frac{2}{75} > 0$$