Polytech Nice Sophia – MAM3 / MI1 **2020/2021**

FEUILLE DE T.D. 1 (Révisions)

Exercice 1.

1. Après avoir clairement identifié où se trouve le problème, étudier la nature des intégrales suivantes et en donner la valeur dans le cas où elles sont convergentes :

$$I_1 = \int_0^1 \ln x \, dx \quad ; \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

2. Etudier la convergence de :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$$

Exercice 2.

Soit à étudier la nature de l'intégrale : $K = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$

Première Partie :

1. Montrer, par un prolongement par continuité que la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est *localement intégrable* sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que K est une intégrale convergente.
3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
4. Vérifier que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq sin^2 t = \frac{1 - cos\, 2t}{2} \leq |sin\, t|$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
6. Conclure.

Deuxième Partie :

On considère à présent la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} \sin t}{\mathrm{t}} dt$$

7. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
8. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée F'.
9. En admettant la continuité de F en 0, déterminer la valeur de K.