Exercice 1

Determiner les limites suivantes (quand $n \to \infty$)

1 **a** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,dx$ On pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1+nx}{(1+x)^n}$$

> **Rappel**
>
> $f : (E, \mathscr{E}) \to (F, \mathscr{F})$ où $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des tribus ($=\sigma$-algebres) sur E et F respectivement, est mesurable si :
>
> $$(\forall B \in \mathscr{F}) : f^{-1}(B) \in \mathscr{E} = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

exemple : $f : (E, \mathscr{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}))$ est mesurable (i.e. $(\mathscr{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable)

Tribu borelienne

ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$

si $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) : f^{-1}(B) \in \mathscr{E}$

$\Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) : f^{-1}(B) \in \mathscr{E}$

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$; si f est continue $(\Rightarrow (\forall B \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$

alors $(\forall B \in \underbrace{\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}})}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

I e : Une fct continue est "borélienne" ie mesurable pour tribus boreliennes (au depart et à l'arrivée)

$[0 \quad 1]$ $\mathcal{O}_{[0,1]} = \{ \mathcal{O} \cap [0,1] \mid \mathcal{O} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \}$

"Continue $\Rightarrow$ mesurable"

$[0, 1/2[\, = \,]-1 ; \tfrac{1}{2}[\cap [0,1]$

Ici $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, donc mesurable pour $\mathcal{B}_{[0,1]} (= \mathcal{B}(\mathcal{O}_{[0,1]}))$ sur $[0,1]$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est $(\mathcal{B}_{[0,1]}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable

De plus $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx$ (est bien definie car mesurable et positive

Mq $\lim_n \int f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx$ ⊛

Motivation $\lim_n f_n(x)$ est très facilement intégrable

On dit $(f_n)_n$ CVS (= CV simplement) vers f si :

$\forall x \in [0,1]\ (f_n(x))_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Or, soit $x \in [0,1]$, $\dfrac{1+nx}{(1+x)^n} \overset{\text{si } x=0}{=} \dfrac{1}{1} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ si $x=0$

sinon $x>0$ $\quad 0 \leqslant \dfrac{1+nx}{(1+x)^n} = (1+nx)\, e^{-n \overbrace{\ln(1+x)}^{>0}}$ $(\text{ex }x>0)$

$$= \underbrace{e^{-n\ln(1+x)}}_{\to 0} + x\,(\underbrace{n e^{-n\ln(1+x)}}_{\to 0})$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CV} f$ avec $f(x) = 1$ si $x=0$

$= 0$ sinon

i.e f_n CVS p.p. vers la fct nulle

(L'ensemble des x où ce n'est pas vrai est $\{0\}$ et $\mu_L(\{0\}) = 0$)

Donc $\int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

Montrons donc que ⊛ est vraie par CV dominée Or $\forall x \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1+nx}{(1+x)^n} \leqslant \frac{(1+x)^n}{(1+x)^n} = 1 \in L^1([0;1])$$

indep de n

$\left(\text{cf } \int_0^1 |1|\,dx = 1 < \infty\right)$ $\quad$ cf $(1+x)^n = 1^n + n1^{n-1}x + \cdots$

Donc CV dominée $\Rightarrow \lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx = 0$

b $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{nx}\,dx = \int_{]0,1]} \sin\frac{1}{nx}\,dx$ $\leftarrow f_n(x)$

$f_n :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin\dfrac{1}{nx}$ continue donc <u>mesurable</u>

$$\int_0^1 \underbrace{\left|\sin\frac{1}{nx}\right|}_{\leq 1} dx \leq 1 < \infty \quad f_n \in \mathcal{L}^1(]0,1]) \quad \forall n \geq 1$$

$\int_0^1 \sin\frac{1}{nx}\,dx$ bien définie $\forall n \geq 1$

$\mathcal{D}_r$ soit $x \in]0,1]$

$\sin\frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \lim_n f_n\,dx = 0 \quad \mathcal{D}_n$ a $\forall x \in]0,1]$ $\forall n \geq 1$

$\left|\sin\frac{1}{nx}\right| \leq 1 \in \mathcal{L}^1(]0,1])$ (cf $\int_0^1 1 < \infty$)

CV dominée $\Longrightarrow \lim_n \int_0^1 f_n\,dx = \int_0^1 \lim_n f_n\,dx = 0$

2 $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$f_n :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-xn}/\sqrt{x}$$ continue, donc mesurable

et l'intégrale est bien définie car $f_n > 0$.

$\mathcal{D}_n$, Soit $x > 0$ $\quad \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i.e $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_n f_n\,dx = 0$ De plus $\forall x \in]0,\infty[$ $\forall n \geq 1$

$\left|\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$

(cf $x^{3/2} \cdot e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$ pour x assez grand)

CV dominée $\Longrightarrow \lim_n \int_0^\infty f_n\,dx = \int_0^\infty \lim_n f_n\,dx = 0$