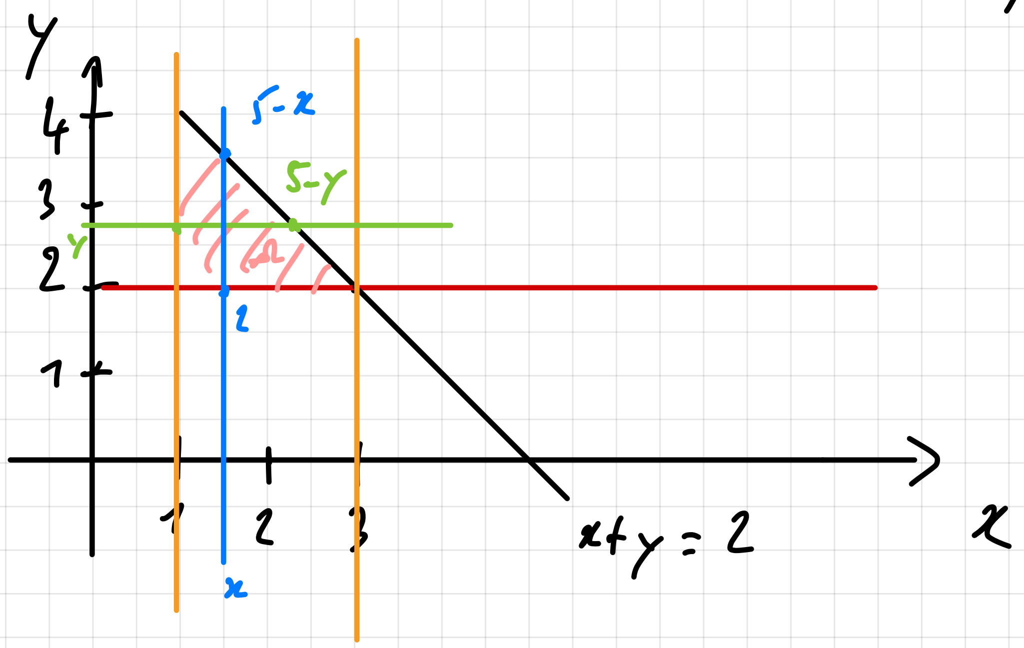
Ex 1 : Calculer

$$I = \int_\Omega \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} \quad \left(= \iint_\Omega \frac{1}{(x+y)^3}\,dx\,dy \right)$$

où $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5 \}$



f est continue sur $\bar{\Omega}$ bornée, donc f est majorée sur Ω, l'intégrale est bien définie

Plus précisément $\int_\Omega |f|\,dx\,dy \leq M\,\mu(\Omega)$

aire = mesure de Ω

$\Rightarrow f$ intégrable

$\Rightarrow$ Théorème de Fubini (cf. chap 4 - Intégration produit)

nous dit que par définition :

$$\int_\Omega f \, dx\, dy = \int_{?}\left(\int_{?} f\, dx\right) dy = \int_{!}\left(\int_{?} f\, dy\right) dx$$

1 2

1 $\displaystyle \int_2^4 \left(\int_1^{5-y} f(x,y)\, dx\right) dy$

$$= \int_2^4 \underbrace{\left(\int_1^{5-y} \frac{dx}{(x+y)^3}\right)}_{\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\right]_1^{5-y}} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(1+y)^2}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{25} y + \frac{1}{1+y} \right]_2^4$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{6}{75} + \frac{15}{75} - \frac{25}{75} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{75} \right)$$

$$= \frac{2}{75}$$

② $$I = \int_1^3 \left(\underbrace{\int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3}}_{\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+y)^2} \right]_2^{5-x}} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^3 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(2+x)^2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{25}x + \frac{1}{2+x}\right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{6}{75} + \frac{15}{75} - \frac{25}{75}\right)$$

$$= \frac{2}{75}$$

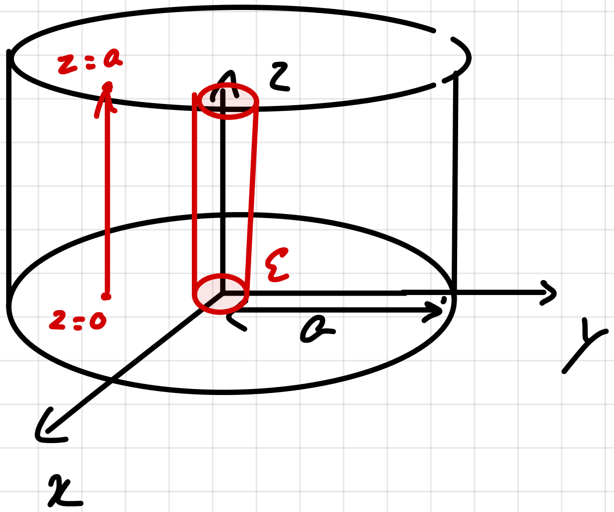
Ex 2:

Calculer

$$I = \int_\Omega \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ impropre, cf $x=y=0$

où $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < a^2,\ 0 < z < a \}$

$a > 0$ fixé



Soit $\varepsilon > 0$, la fonction est $\mathcal{C}^0$ sur $\bar{\Omega}_\varepsilon$ (compact) donc comme $\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) < \infty$

avec $\Omega_\varepsilon = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < a^2$
$0 < z < a \}$
$a > 0$ fixé

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f| \, dx\,dy\,dz \leq M \mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) < \infty$$

f est intégrable donc Fubini s'applique

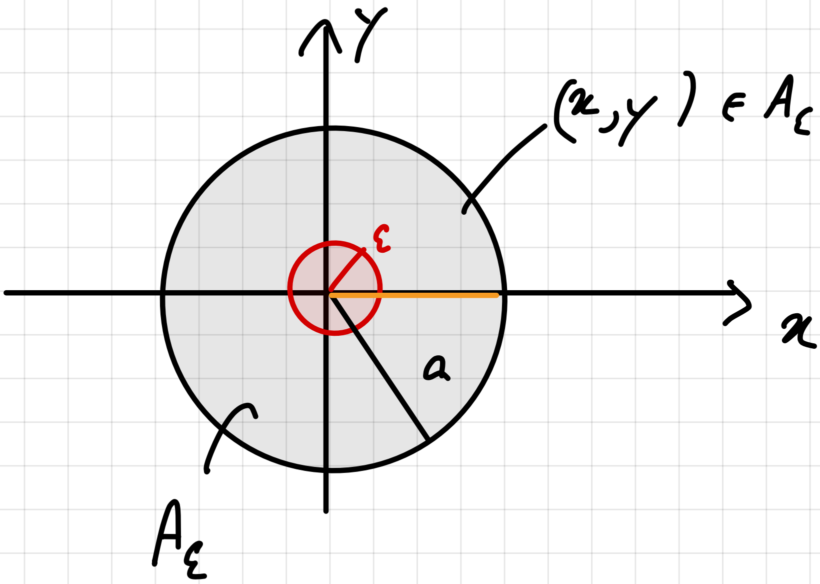
Intégrons d'abord sur z, puis x, y

(et vérifions que la lim qd $\varepsilon \to 0$ existe

$$\Rightarrow \quad I = \int_{A_\varepsilon} \left(\int_0^a \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx\,dy$$

où $\quad A_\varepsilon = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 < x^2+y^2 < a^2$

$$I = \int_{A_\varepsilon} \underbrace{\left[\frac{\frac{z^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]_0^a}_{\frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}} dx\,dy$$



$(x,y) \in A_\varepsilon \iff \begin{cases} \varepsilon < r < a \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

On passe en polaires ; on considère

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \mapsto \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \end{bmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

En particulier, φ va de $]0, a[\times]0, 2\pi[$ dans A_ε (et bijection sur "$A_\varepsilon \setminus [\varepsilon, a]$" et φ et φ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$: φ "C^1-difféomorphisme")

alors

$$\int_{A_\varepsilon \setminus \cancel{[\varepsilon, a]}} g(x,y)\, dx\, dy = \int_{\underbrace{\mathbb{R}_+^*}_{r} \times \underbrace{]0,2\pi[}_{\theta}} g\big(\overbrace{\varphi(r,\theta)}^{(x(r,\theta),\, y(r,\theta))}\big)\, |\det \varphi'(r,\theta)|\, dr\, d\theta$$

ne change pas la mesure de l'intégrale (cf : mesure de $[\varepsilon, a]$ dans $\mathbb{R}^2$ est nulle) ic: :

$$* \; g \circ \varphi(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} \, r$$

$$= \frac{a^2}{2r}$$

$$* \; \varphi'(r,\theta) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \det \varphi'(r,\theta) \right| = |r| = r \quad (> \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow \int_{A_\varepsilon} \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\,dy = \int_{]\varepsilon, a[\times]0, 2\pi[} \frac{a^2}{2\cancel{r}} \cancel{r} \, dr\,d\theta$$

$$= \int_\varepsilon^a \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\, d\theta}_{\pi a^2} \right) dr$$

$$= \pi a^2 (a - \varepsilon)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \pi a^3$$

Ex 3 :

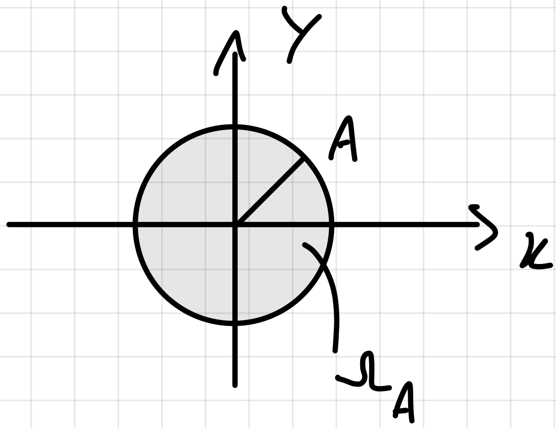
Calculer

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

(ici $a > 0$ fixé)

Intégrale impropre, fixons $A > 0$ et calculons

$$\int_{\Omega_A} e^{-a(x^2+y^2)}\, dx\, dy \Bigg)$$ $\exists$ lim qd $A \to \infty$?



$$\Omega_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < A^2\}$$

On pose en polaires

$$\varphi : \underset{\substack{\uparrow \\ ]0,A[\times]0,2\pi[}}{(r,\theta)} \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

Alors

$$\int_{\Omega_A} \overbrace{e^{-a(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})}}^{f(x,y)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{]0,A[\times]0,2\pi[} \overbrace{f(\varphi(r,\theta))}^{e^{-ar^2}}\ \overbrace{|\det \varphi'(r,\theta)|}^{r}\, dr\, d\theta$$

$\left(\to \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \right)$

$$= \int_0^A \left(\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}\, d\theta \right) r\, dr$$

$$= \int_0^A 2\pi\, e^{-ar^2}\, r\, dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^A$$

$$= -\frac{\pi}{a}\left[e^{-aA^2} - 1 \right]$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aA^2} \right)$$

$$\xrightarrow[A \to \infty]{} \frac{\pi}{a}$$

En particulier, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \overset{a=1}{=} \pi$

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{-(x^2+y^2)} \right| dx\,dy = \pi < \infty$

Fubini s'applique :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{e^{-x^2} e^{-y^2}} dx \Big) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \Big)}_{J} dy$$

$$= J \times \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$$

$$= J^2$$

$\Rightarrow \quad J = \sqrt{\pi} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

Ex 4 :

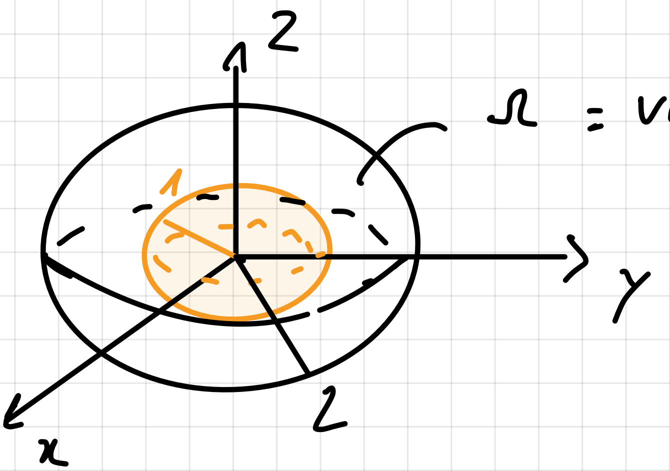
Calculer

$$I = \int_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$

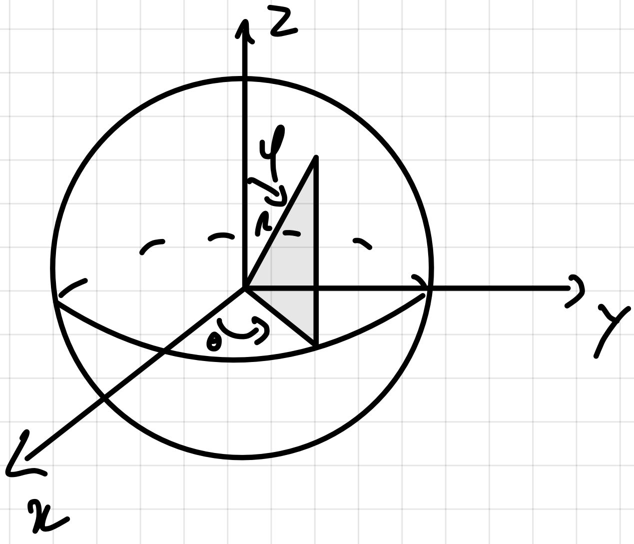
On intègre une fonction f continue sur $\bar{\Omega}$, donc bornée et $\mu_L(\Omega) < \infty$

$$\int_{\Omega} |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz < \infty$$



Ω = volume entre les 2 sphères

On passe en coordonnées sphériques



$x = r \sin\varphi \cos\theta$ $\quad r > 0$

$y = r \sin\varphi \sin\theta$ $\quad \theta \in]0, 2\pi[$

$z = r \cos\varphi$ $\quad \varphi \in]0, \pi[$

$$\Phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

À des morceaux de mesure (= volume ...) nulle près, Φ met en bijection

($\mathcal{C}^1$ -difféo.) $\left\{ (r, \theta, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 < r < 2 \\ \theta \in \,]0, 2\pi[\\ \varphi \in \,]0, \pi[\end{array} \right\}$

avec Ω

Donc

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_{]1,2[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} f(\Phi(r, \theta, \varphi)) \, |\det \Phi'(r, \theta, \varphi)| \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

On

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \begin{array}{c} \overset{3}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \end{array} \updownarrow 3$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\varphi \cos\theta & -r \sin\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r \sin\varphi \cos\theta & r \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \Phi'(r,\theta,\varphi) = +\cos\varphi\,(-r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta - r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta)$$

$$- r\sin\varphi\,(r\sin^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta)$$

$$= -r^2\sin\varphi\,(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1})$$

$$= -r^2\sin\varphi$$

$$\Rightarrow I = \int_{]1,2[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} \frac{1}{r}\,|-r^2\sin\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\Big(\underbrace{\int_1^2 r\sin\varphi\,dr}_{\left[\frac{r^2}{2}\sin\varphi\right]_1^2 = \frac{3}{2}\sin\varphi}\Big)d\varphi\Big)d\theta}_{\left[-\frac{3}{2}\cos\varphi\right]_0^{\pi} = -\frac{3}{2}(-1-1)}$$

$$= 3$$

$= 6\pi$