



Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

TD 9 - Convolution

Exercice 1

1.1

Soient $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbf{R})$, montrer que $f * g$ est bien définie, que $f * g$ appartient à $L^\infty(\mathbf{R})$ et que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

1.2

Soient $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $g \in L^2(\mathbf{R})$, montrer que $f * g$ est bien définie, que $f * g$ appartient à $L^\infty(\mathbf{R})$ et que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Exercice 2

Montrer que les produits de convolution ci-dessous sont bien définis et les calculer :

2.1

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$$

2.2

$$\chi_{[-a,a]} * \cos, \quad \chi_{[-a,a]} * \sin \quad (a > 0)$$

2.3

$$f * H$$

pour $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $H := \chi_{\mathbf{R}_+}$

Exercice 3

3.1

Soient f et g dans $L^1(\mathbf{R})$, montrer que

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

3.2

Déterminer la transformée de Fourier de $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$.