Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

TD 5 - Intégrales à paramètre

Exercice 1

1.1

Soit

$$I(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx} \, \mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

Montrer qu'on définit ainsi une fonction que l'on déterminera.

1.2

Vérifier que cette fonction est dérivable à tout ordre sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer ses dérivées successives.

1.3

Appliquer itérativement le résultat de dérivabilité d'une intégrale à paramètre pour déterminer ces mêmes dérivées par une autre méthode.

1.4

Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \,\mathrm{d}x = n!, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Exercice 2

Soit

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} \,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbf{R}.$$

2.1

Montrer que l'on définit bien ainsi une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

2.2

Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

2.3

En déduire une nouvelle expression de F.

Exercice 3

Soit

$$F(t) := \int_0^\infty \cos(tx) e^{-x^2} \,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbf{R}.$$

3.1

Montrer que l'on définit bien ainsi une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

3.2

Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

3.3

Montrer que F satisfait l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{t}{2} y(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

et en déduire une nouvelle expression de F.