Ex 1 : Etudier la nature (CV ou DV) des intégrales (et les calculs quand CV)

a. $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt$

la limite de $\underbrace{\int_0^A e^{-t}\, dt}$

$t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0; A]$
bien défini (au sens de Riemann)

quand $A \to \infty$ existe-t-elle ?

Soit $A \geq 0$

$$\int_0^A e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$$

$$= 1 - e^{-A} \underset{A \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est CV (i.e la limite qd $A \to \infty$ existe)

EF $\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = 1$

2. $I_2 = \int_0^1 \ln t \, dt$ $\neq$ du cas $\int_a^b f(t)\,dt$

avec $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ car ln pas définie en 0

$\ln t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

La limite de $\underbrace{\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt}_{\substack{\text{bien définie} \\ \ln \in \mathcal{C}^1([\varepsilon,1])}}$ $(\varepsilon > 0)$

quand $\varepsilon \to 0^+$, existe-t-elle ?

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \, dt$$

$$= -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ (croissance comparée)

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = -1$$

Rq : ex d'intégrale impropre DV :

$$\int_0^\infty \cos t \, dt \quad : \text{ n'existe pas}$$

$$\int_0^A \cos t \, dt = [\sin t]_0^A = \sin A$$: pas de lim quand $A \to \infty$

3. $$I_3 = \int_2^\infty \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\int_2^A \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(|\ln t|)]_2^A$$

$$= \ln(|\ln A|) - \ln(|\ln 2|)$$

$$\lim_{A \to \infty} \ln(|\ln A|) = \infty$$ DV (limite existe mais n'est pas finie)

Rq : 1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dt}{t\ln t} = \infty \in \bar{\mathbb{R}}$

2. <u>intégrale de Bertrand :</u>

- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha < 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

  (α et $\beta > 0$)

- $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha > 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Ex 2 : Discuter le caractère CV des intégrales ci-dessous :

1. $J_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$

Il s'agit de vérifier que la quantité

$$\int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$ a une limite quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to \infty$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} + \int_1^A \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$

d'une part, $\frac{(1+t^2)\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \underset{t \to 0}{\underset{>}{\to}} 1$

$\boxed{\text{(i.e. } (1+t^2)\sqrt{t} \sim \sqrt{t} \text{ quand } t \to 0_+ \text{)}}$

$\Rightarrow \exists\, \eta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta]$,

$$\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)\sqrt{t}} \leq 2$$

$\Rightarrow (\forall t \in]0, \eta]) : \quad \dfrac{1}{\sqrt{t}} \geq \dfrac{1}{2(1+t^2)\sqrt{t}} > 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)dt} \leq \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \text{CV}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}} \quad \text{CV}$$

aussi quand $\varepsilon \to 0_+$

(donc $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}}$ aussi)

d'autre part, $\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \underset{t \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$

Riemann

$\Rightarrow$ CV

2. $J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Existence de la limite qd $A \to \infty$ de

$$\int_{-A}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \underset{f \text{ paire}}{=} 2\int_{0}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

On a, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t}$

donc critère Riemann $\Rightarrow$ DV

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \infty \right)$$

3. $J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt$

$$\exists \lim_{A\to\infty} \underbrace{\int_{-A}^{A} e^{-t^2} dt}$$

$$2\int_0^A e^{-t^2}\,dt \quad (\text{pair})$$

on, $e^{-t^2} t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists B \geq 0,\ \forall t \geq B$

$$0 \leq e^{-t^2} t^2 \leq 1$$

donc $(\forall t \geq B > 0)$: $e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow$ pour tout $A \geq B$,

$$\int_B^A e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_B^A \frac{1}{t^2}\,dt}$$

CV qd $A \to \infty$
(critère de Riemann)

$\Rightarrow \int_B^A e^{-t^2}\,dt$ CV aussi qd $A \to \infty$

donc $\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} e^{-t^2}\, dt$ existe (et est finie) :

CV

Ex 3 : Soit

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

"sinus cardinal"

fonction $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$)

$\Downarrow$

continue en 0, pas de caractère impropre en 0

$\Rightarrow \exists \lim A \to \infty$ de $\int_{-A}^{A} \frac{\sin t}{t}\, dt$

$$= 2 \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\int_0^A = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

or,

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_1^A \frac{1}{t} \sin t \, dt$$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

$$= \underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

de plus: $\displaystyle \int_1^A \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt$ CV

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt \quad \text{CV aussi}$$

dans la limite de $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$ qd $A \to \infty$ existe

donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est bien CV

2. Montrer de même que

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt \quad \text{CV}$$

En effet, on peut refaire le même calcul (ipp)

$$\int_1^A \frac{\cos 2t}{t}\, dt = \underbrace{\left[\frac{1}{t} \frac{\sin(2t)}{2} \right]_1^A}_{\underbrace{\frac{\sin 2A}{2A} - \frac{\sin 2}{2}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} -\frac{\sin 2}{2}}} - \underbrace{\int_1^A \left(-\frac{1}{t^2}\right) \frac{\sin 2t}{2}\, dt}_{\underbrace{\int_1^A \frac{\sin 2t}{2t^2}\, dt}_{(*)}}$$

et (*) possède une limite (qd $A \to \infty$)

puisque $$\int_1^A \underbrace{\left| \frac{\sin 2t}{2t^2} \right|}_{\geq 0} dt$$

critère de Riemann

$$\leq \int_1^A \frac{dt}{2t^2} \underset{\uparrow}{<} \infty \quad CV$$

(si $\int_1^\infty \left| \frac{\sin 2t}{2t^2} \right| dt$ CV, $\int_1^\infty \frac{\sin 2t}{2t^2} dt$ CV aussi)

3. Montrons finalement que, par contre,

$$\int_{-\infty}^\infty \underbrace{\left| \frac{\sin t}{t} \right|}_{\geq 0} dt \quad DV \ (= \infty)$$

$$\int_{-A}^A \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parité}}}{=} 2 \int_0^A \frac{|\sin t|}{t} dt$$

On, $|\sin t| \in [0,1]$

$$\Rightarrow |\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt$$

Mais, $$\int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt = \underbrace{\int_1^A \frac{dt}{2t}}_{\underset{A\to\infty}{\longrightarrow}\infty \text{ Riemann}} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos 2t}{2t}\,dt}_{\text{lim existe et est finie}}$$

$$\underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} 2\int_0^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ CV alors que}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$$

$\Rightarrow$ intégrale " semi - CV "