Td 9 - Convolution

Exo 1.

1.1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, mq $f * g$ est bien définie, que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 . \|g\|_\infty .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, mq

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot g(y)\, dy$$ bien défini.

Mq $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) \cdot g(y)|\, dy < \infty$ ($\forall x \in \mathbb{R} \ldots$) auquel cas $f * g(x)$ sera bien défini. On,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) \cdot g(y)|\, dy \underset{\uparrow\ |g| \leq \|g\|_\infty \text{ p.p.}}{\leq} \|g\|_\infty \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dy}_{\|f\|_1 \ (\text{poser } z := x-y \ldots)} \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty < \infty.$$

Rappels : - $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ ssi $(\exists\, C \geq 0)(\mu \text{ pp } x \in X)$:

$$|g(x)| \leq C$$

- $\|g\|_\infty := \operatorname{Inf}\{ C \geq 0 \mid |g| \leq C \ \mu \text{ pp} \}$

- **Lemme** : $g \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow |g| \leq \|g\|_\infty \ \mu$ pp.

$L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{R}$ "$= \mu$ pp"

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

$\Rightarrow f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

1.2. Soient f et $g \in L^2(\mathbb{R})$, mq $f * g$ bien défini, que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$, et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

Mq, $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) \cdot g(y)| \, dy < \infty$. On, si $x \in \mathbb{R}$,

soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) \cdot g(y)| \, dy \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-y)|^2 + |g(y)|^2 \right) dy$$

$|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right) < \infty$$

poser $z := x - y \ldots$

Donc $f*g$ bien défini en <u>tout</u> $x \in \mathbb{R}$ et bornée puisque, si $x \in \mathbb{R}$,

$$|f*g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\,g(y)|\,dy \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)$$

$\Longrightarrow f*g \in L^\infty(\mathbb{R})$ (et $\|f*g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)$)

De plus, on peut en fait appliquer Hölder (cf. $p = q = 2 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

à $k(y) := f(x-y)$ (à x fixé) $\in L^2(\mathbb{R})$ (cf. $\int_{\mathbb{R}} |k|^2\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f|^2\,dy$)

et à $g \in L^2(\mathbb{R})$;

donc $k \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\| k \cdot g \|_1 = \int_{\mathbb{R}} | \overbrace{k(\underset{\text{fixé}}{x}-y)}^{f(x-y)} \cdot g(y) | \, dy \leq \overbrace{\| k \|_2}^{=\|f\|_2} \cdot \| g \|_2 \quad \left(\leq \frac{\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow |f * g(x)| \leq \overbrace{\|f\|_2 \cdot \|g\|_2}^{} \leftarrow \text{indép. de } x$$

$$\Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

<u>Rq.</u> : i) mq $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f * g$ déf. et $\in L^\infty$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

ii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{n}$, $f \in L^p$, $g \in L^q \Rightarrow f * g \in L^n$ et $\|f * g\|_n \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

(cf. $p = q = n = 1$ aussi...)

Exo 2.

2.1. $f = \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$; déterminer $f * f$.

Rq : $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \overset{\text{exo 1}}{\Longrightarrow} f * f \in \underset{L^1 * L^1}{L^1(\mathbb{R})} \cap \underset{L^1 * L^\infty}{L^\infty(\mathbb{R})}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x-y) \cdot \underbrace{\chi_{[0,1]}(y)}\, dy$$

$$= \int_{[0,1]} \chi_{[0,1]}(x-y)\, dy$$

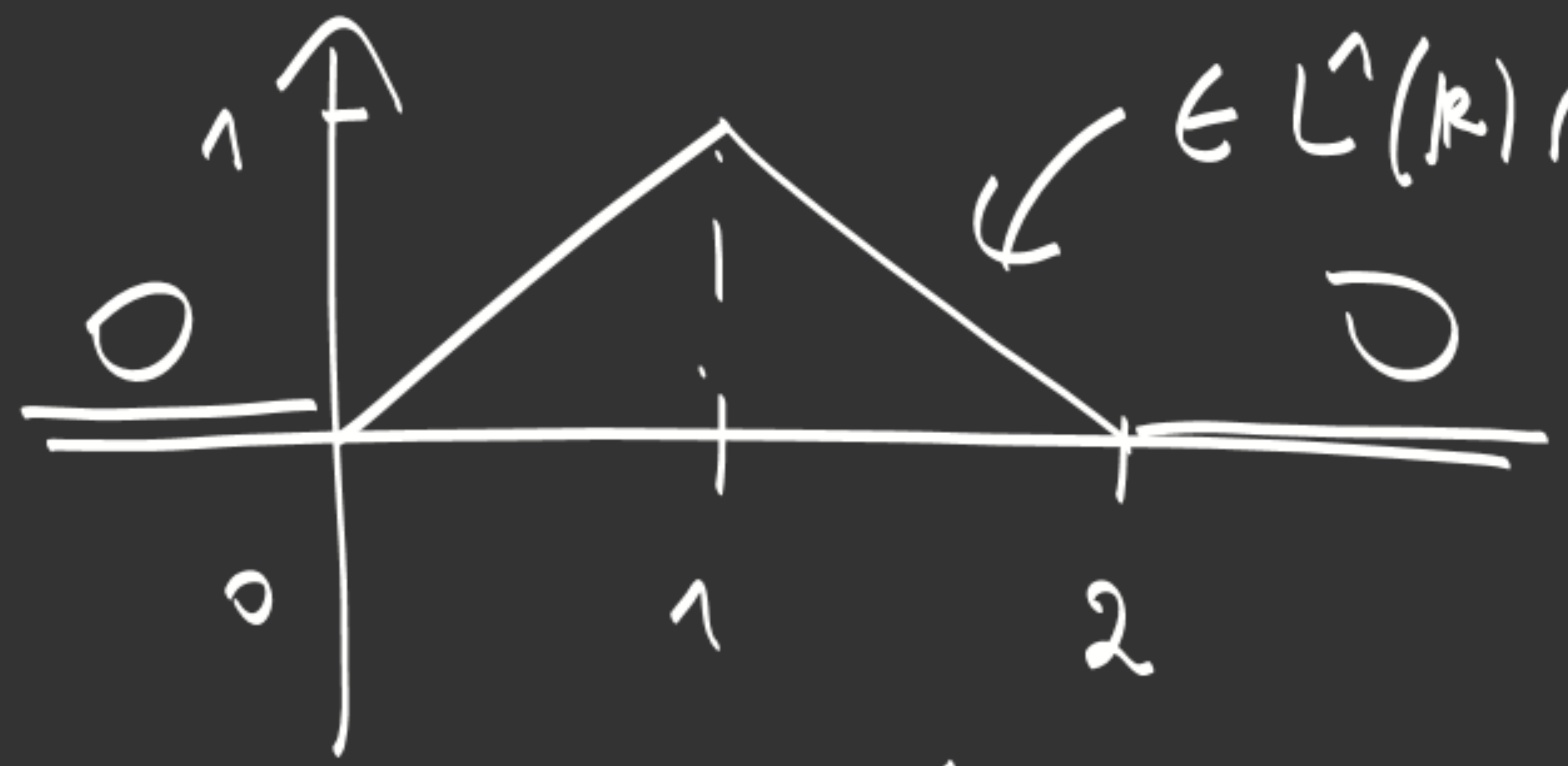
$$= \int_{[x-1,x]} \chi_{[0,1]}(z)\cdot |\underbrace{\cancel{\varphi'(z)}}_{=-1}|\, dz$$

$\Uparrow$ $z = x - y$ (x fixé)

ie $y = \varphi(z) = x - z$

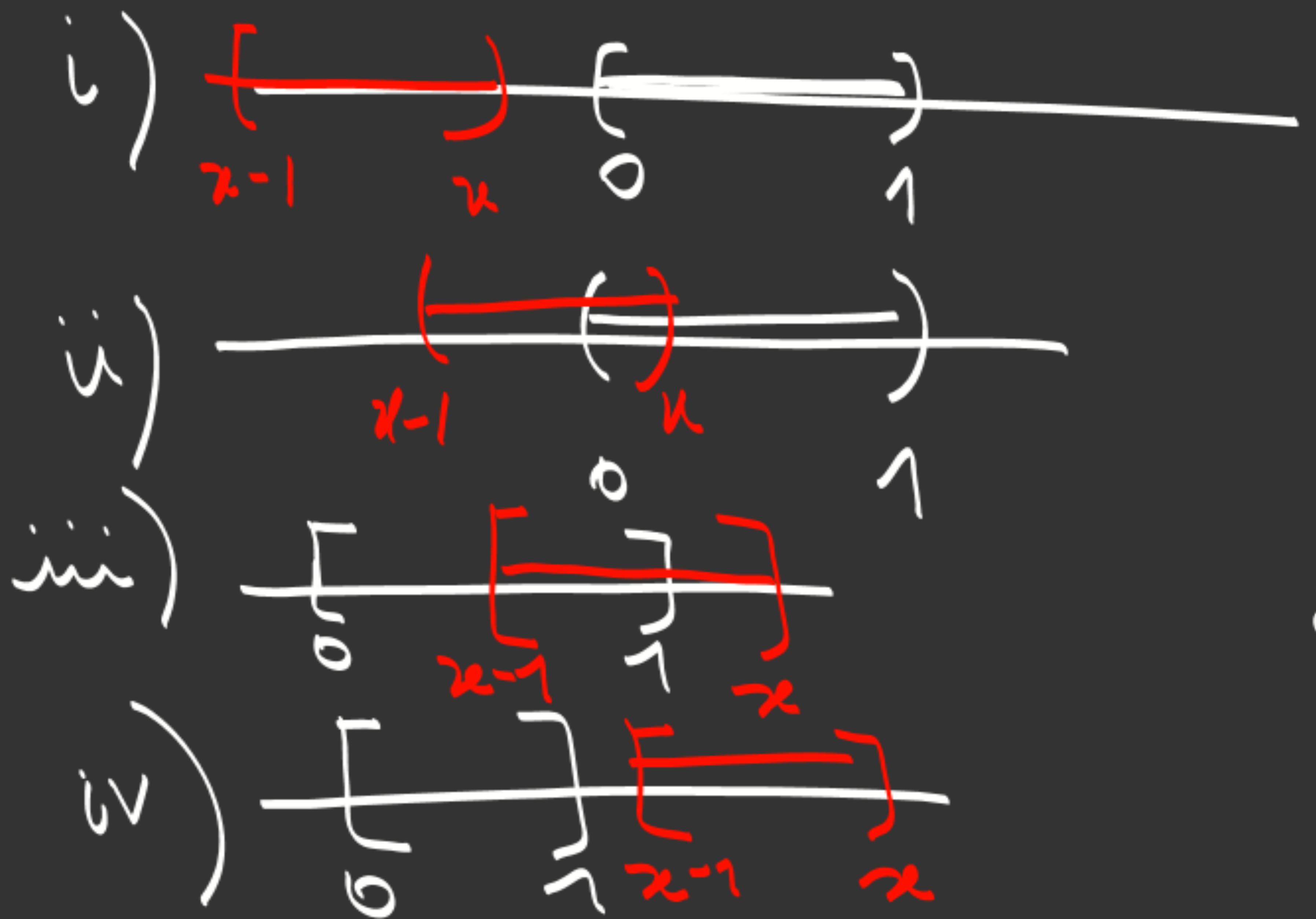
$\varphi'(z) = -1$, $z \in [x-1, x]$

$f * f \ (\in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$



$\in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

{ Exo : $f * f * f$



si $x < 0$, $f * f(x) = 0$

si $0 \leq x \leq 1$, $f * f(x) = \int_0^x 1 \cdot dy = x$

si $1 \leq x \leq 2$, $f * f(x) = \int_{x-1}^1 1\, dy = 1 - (x-1) = 2 - x$

si $x > 2$, $f * f(x) = 0$

$a > 0$

2.2. $\underset{L^1(\mathbb{R})}{\chi_{[-a,a]}} * \underset{L^\infty(\mathbb{R})}{\cos}$: bien défini (cf. ex 01) et $\in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\chi_{[-a,a]} * \cos = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,a]}(y) . \cos(x-y)\, dy$$

$$= \int_{-a}^{a} \cos(x-y)\, dy = \Big[-\sin(x-y)\Big]_{y=-a}^{y=a}$$

$$= \sin(x+a) - \sin(x-a).$$

Rq : $\underset{L^1}{\chi_{(-a,a)}} * \underbrace{e^{ix}}_{\in L^\infty} = e^{ix} * \chi_{(-a,a)} = \int_{-a}^{a} e^{i(x-y)}\, dy = \Big[\frac{-1}{i} e^{i(x-y)}\Big]_{-a}^{a}$

$$= i\left(e^{i(x-a)} - e^{i(x+a)}\right)$$

$$= i e^{ix}(-2i\sin a)$$

$$= \underbrace{2\sin a . e^{ix}}_{\in L^\infty} \Rightarrow \begin{cases} \chi_{[-a,a]} * \cos = \mathrm{Re}(2\sin a . e^{ix}) = 2\sin a . \cos x, \\ \text{—''—} \ \sin = \mathrm{Im}(\text{—''—}) = 2\sin a . \sin x . \end{cases}$$

2.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $H := \underbrace{\chi_{\mathbb{R}_+}}_{\in L^\infty}$ (fonction de Heaviside)

$H' = \delta$

$$f * H(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) . H(y)\,dy = \int_0^\infty f(x-y)\,dy \overset{z = x-y}{=} \int_{-\infty}^x f(z)\,|-1|\,dz$$ cf. Mi 2

Rq : $\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy =: F(x)$: la primitive de f tq
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (cf. TD 10).

Exo 3.

3.1. Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, mq $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot f*g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,dy \right) dx$$

Si $h(x,y) := e^{-2i\pi\xi x} \cdot f(x-y)\, g(y) \in \underline{\underline{L^1(\mathbb{R}^2)}}$,

on pourra utiliser Fubini pour écrire

$$\widehat{f*g}(\xi) \underset{\text{Fubini}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi (x-y)+y} \cdot f(x-y)\, g(y)\, dx \right) dy$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi y} \cdot g(y)}_{} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi(x-y)} \cdot f(x-y)\, dx \right) dy$$

$z := x-y \in \mathbb{R}$

indép. y

$$= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi z} \cdot f(z) \cdot \cancel{1}\, dz = \hat{f}(\xi)$$

Montrons donc que $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big| \overbrace{\underbrace{\cancel{e^{-2i\pi\xi x}}}_{1} \cdot f(x-y)\cdot g(y)}^{\geq 0} \Big| \overbrace{dx\, dy}^{\text{"} dx \otimes dy \text{"}}$$

$$\left| e^{i\theta} \cdot z \right| = \underbrace{\cancel{|e^{i\theta}|}}_{1} \cdot |z| \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\underbrace{x-y}_{z := x-y \in \mathbb{R}})| \, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z)| \, dz \right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| \, dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z)| \, dz \right)$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty .$$

3.2. Calculer $\widehat{\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}}$

$$= \left(\widehat{\chi_{[0,1]}}\right)^3 \quad (\text{f. Th } 8).$$