MAM3

Mathématiques de l’ingénieur.e 1

2024-25

Exam CC no. 3

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (7 points)

1.1

Soit $A > 0$, montrer que

$$I_A := \int_0^A \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{x}$$

est bien définie.

1.2

Montrer que

$$I_A = \int_0^A \sin x \left(\int_0^\infty e^{-tx} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

1.3

Montrer qu'on peut appliquer le théorème de Fubini pour calculer I_A.

1.4

En déduire que

$$I_A = C + \mathrm{Im} \int_0^\infty \frac{e^{A(i-t)}}{i-t} \, \mathrm{d}t$$

où C est une constante que l'on précisera.

1.5

Montrer que

$$\left| \int_0^\infty \frac{e^{A(i-t)}}{i-t} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{A}$$

et en déduire que I_A possède une limite que l'on précisera quand A tend vers l'infini.

Exercice 2 (5 points)

2.1

Soit $f_n(x) := (-1)^n e^{-2^n x}$, $x \geq 0$, $n \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^\infty |f_n(x)| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

2.2

En déduire que l'intégrale ci-dessous est bien définie :

$$\int_0^\infty \sum_{n\geq 0} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

2.3

Déterminer la valeur de cette intégrale.

Exercice 3 (5 points)

3.1

Montrer que le produit de convolution des deux fonctions caractéristiques $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}$ est bien défini, puis le calculer.

3.2

Soit $a > 0$, déterminer la transformée de Fourier de $\chi_{[0,a]}$.

3.3

Déterminer la transformée de Fourier de $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}$.

Exercice 4 (4 points)

4.1

Soient m et σ deux réels, $\sigma > 0$, et soit

$$I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} \, \mathrm{d}x.$$

Effectuer le changement de variable $x = \varphi(y) := \sigma y + m$ dans cette intégrale, puis en déduire sa valeur.

[**Indication** : on pourra retrouver cette valeur à l'aide du théorème de Fubini.]

4.2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

On pose $Y = \varphi^{-1}(X)$, donner l'espérance de Y.