



Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

Exam CC no. 1

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (4 points)

Montrer que l'intégrale impropre ci-dessous est convergente et déterminer sa valeur :

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

Exercice 2 (4 points)

Calculer

$$\int_D \frac{x \, dx \, dy}{y + x^2}$$

où $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$.

Exercice 3 (6 points)

On considère la famille de parties de $[0, 3]$ suivante :

$$\mathcal{A} := \{[0, 1], [0, 2]\}.$$

3.1

Montrer que les tribus engendrées sur $[0, 3]$ par \mathcal{A} et

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{[0, 1],]1, 2]\}$$

sont égales.

3.2

Donner, sans le justifier, le cardinal de la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ engendrée sur $[0, 3]$ par \mathcal{A} .

3.3

Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable, et soit $f : X \rightarrow [0, 3]$ telle que $f^{-1}([0, 1])$ et $f^{-1}([0, 2])$ appartiennent tous deux à \mathcal{B} . Que peut-on dire de f ?

Exercice 4 (6 points)

4.1

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cos(x/n) e^{-x^2} dx, \quad n \geq 1.$$

4.2

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{e^{-x} \sin x dx}{1 + \sin^2(x/n)}, \quad n \geq 1.$$

4.3

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{n \, dx}{n(1 + \cos^2 x) + 1}, \quad n \geq 1.$$