Td 3 - Mesures, tribus

<u>Exo 1</u>. Soit E un ensemble $\neq \emptyset$. $\{A\} =: \mathcal{A}$

1.1. Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$; déterminer $\mathcal{B}(\overline{\{A\}})$.

Comme $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \supset \overbrace{\{\emptyset, A, {}^cA, E\}}^{=: \mathcal{C}}$ car $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ tribu $(\supset \mathcal{A})$.
Réciproquement, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$; donc, si $\mathcal{C}$ est une tribu, on aura nécessairement $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ (qui est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$).

Or, on a :

i) $\emptyset \in \mathcal{C}$

ii) il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par complémentaire
(cf. ${}^c\emptyset = E \in \mathcal{C}$, ${}^cA \in \mathcal{C}$, ${}^c({}^cA) = A \in \mathcal{C}$, ${}^cE = \emptyset \in \mathcal{C}$)

iii) comme la famille $\mathcal{C}$ contient un nombre fini de parties, il suffit de montrer la stabilité par réunion de 2, 3, 4 éléments ; on a :

* réunion à 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset \cup A = A \in \mathcal{C} \\ \vdots \\ {}^cA \cup E = E \in \mathcal{C} \end{array}\right\} C_4^2 \text{ possibilités}$$

* réunion à 3 ($C_4^3 = 4$ possibilités):

TD 3 (fin)

Exo 4 : Soit $(X, \mathcal{B})$ espace mesurable $(X \neq \emptyset)$; soit $a \in X$, on définit :

$$\delta_a : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \longmapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

"Dirac en a"

Mq δ_a définit une mesure sur $\mathcal{B}$.

i) $\delta_a(\emptyset) = 0$ cf. $a \notin \emptyset$!

ii) Soit $(A_n)_n$ une suite de parties mesurables 2 à 2 disjointes (ie $n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$), mq

$$\delta_a\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\delta_a(A_n)}_{\geqslant 0}$$

$$\Big(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \delta_a(A_n)\Big)$$

Or, $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \exists!\, i \in \mathbb{N},\ a \in A_i$

car $\forall j \neq i, j \in \mathbb{N}, A_j \cap A_i = \emptyset$

$\delta_a(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = 1$ si $a \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$; i) supposons $a \in \bigcup_n A_n$, ie $\exists !\, i \in \mathbb{N}$
0 sinon tq $a \in A_i$;

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta_a(A_m) = \sum_{m=0}^{i-1} \delta_a(A_m) + \delta_a(A_i) + \sum_{j=i+1}^{\infty} \delta_a(A_j)$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1$$

ii) $a \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ a \notin A_m$

donc $\sum_{m=0}^{\infty} \delta_a(A_m) = 0 = \delta_a(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m)$

Rq: mesure de Dirac très importante : $\delta_0(\mathbb{R}) = 1$ ∮ $\mathbb{R} \ni 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\delta_0 = f(0) \quad (\text{∮ MI2}).$$

Exo 5. Sur $X = \mathbb{N}$ on prend $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (tribu discrète)

et on pose $\mu_d : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$A \longmapsto \mu_d(A) := \text{card } A$$

Mq μ_d est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

i) $\mu_d(\emptyset) = \text{card } \emptyset = 0$

ii) Soient $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ une suite de parties 2 à 2 disjointes,

$$\mu_d\left(\bigcup_n A_n\right) = \text{card}\left(\bigcup_n A_n\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \text{card}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_d(A_n).$$

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ partition de $\bigcup_n A_n$

Rq. : ce fait élémentaire permet d'interpréter les séries comme des intégrales :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u_n \geq 0$;

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} u_n}_{\in \overline{\mathbb{R}}_+} = \int_{\mathbb{N}} u(n)\, d\mu_d(n) = \int_{\mathbb{N}} u\, d\mu_d$$

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

cf. $\int_{\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} \overbrace{u(n)}^{u_n} . \chi_{\{n\}}\, d\mu_d = \sum_{n=0}^{N} u_n . \overbrace{\mu_d(\{n\})}^{1} = \sum_{n=0}^{N} u_n$

$-\ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$; alors,

$$\int_{\mathbb{N}} |u| \, d\mu_d < \infty \Rightarrow u = (u_n)_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} u \, d\mu_d \text{ bien définie } \left(= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)$$

<u>Conséquences</u> : i) $\ell^1(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$

$= \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ (cf. Mi2)

Fubini !

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{|u_{n,m}|}_{\geq 0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|$; si cette qté est $< \infty$, on a aussi (encore Fubini !)

$$\sum_n \sum_m u_{n,m} = \sum_m \sum_n u_{n,m} =: \sum_{n,m} u_{n,m} .$$

Td 4 - Convergence

Exo 1.

1.1. Déterminer si elles <u>existent</u> les limites suivantes :

- $$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx}_{}$$

on intègre $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un compact : bien défini. (<u>NB</u>. Directement : bien défini comme $\int$ d'une fonction mes. ≥ 0).

Cette suite de fonctions (positives) n'a pas de raison d'être croissante, essayons plutôt la CV dominée; le cas échéant, on aura (sous réserve que cette limite simple existe...)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\mu_L = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_L$$

On, $(\forall x \in [0,1])$

$$|f_n(x)| = \frac{1+nx}{(1+x)^n} = \frac{1+nx}{1+nx+\underbrace{\cdots}_{\geq 0}} \leq 1, \text{ et } g \equiv 1 \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu_L)$$

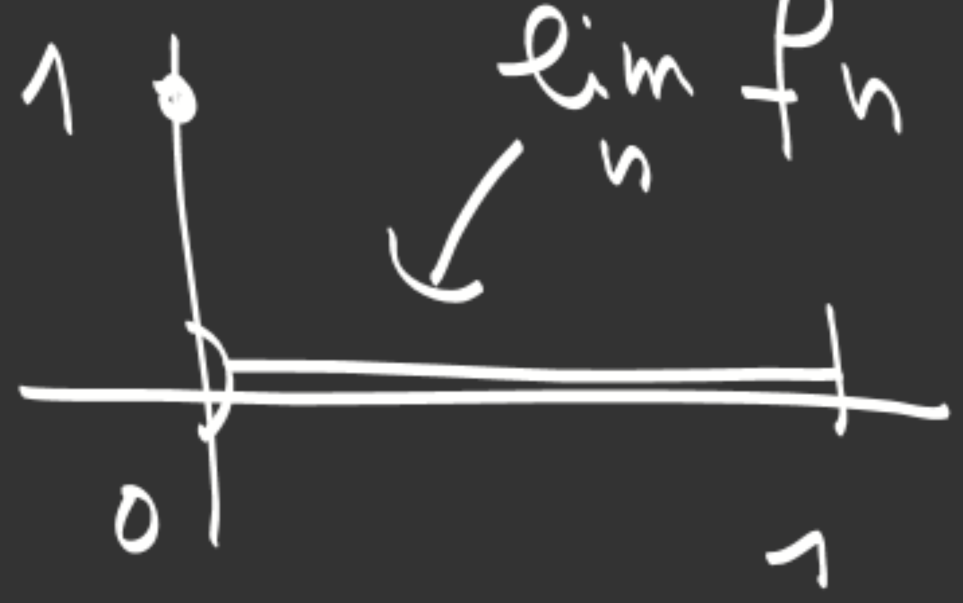
$$\left(\text{cf. } \int_0^1 1 . dx = 1 < \infty \, ! \right)$$

De plus, soit $x=0$ et $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,

soit $x \in]0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}$

$$= (1+\underbrace{nx}_{>0})\cdot e^{-\overbrace{n\ln(\underbrace{1+x}_{>1})}^{>0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc f_n CVS (CV simplement) μ_L pp vers la fonction identiquement nulle :



(cf. $\mu_L(\{x\in[0,1] \mid \lim_n f_n(x) \neq 0\})$
$= \mu_L(\{0\}) = 0$)

Finalement, CV dominée

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^1 \overbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}^{= 0\ \mu_L\ p.p.}\,dx = 0.$$

- $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \overbrace{\sin\frac{1}{nx}}^{\cancel{\geq 0}}\,dx \quad (n\geq 1)$$

On peut poser $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{nx} & \text{si } x\neq 0 \\ 15\ldots & \text{si } x=0 \text{ (peu importe!)}\end{cases}$$

Comme $\int_0^1 \underbrace{\left|\sin\frac{1}{nx}\right|}_{\geq 0} dx \leq \int_0^1 1.dx = 1$

$< \infty$: intégrable.

En particulier, on a bien domination puisque

$(\forall x \in]0,1]) : |f_n(x)| = \left|\sin \frac{1}{nx}\right| \leq 1$ (prendre à nouveau $g \equiv 1 \in \mathcal{L}^1([0,1])$)

$(\forall x \in [0,1]) : g(x) = 1$

$(\Rightarrow |f_n| \leq g \equiv 1$ μ_L-p.p. sur $[0,1])$

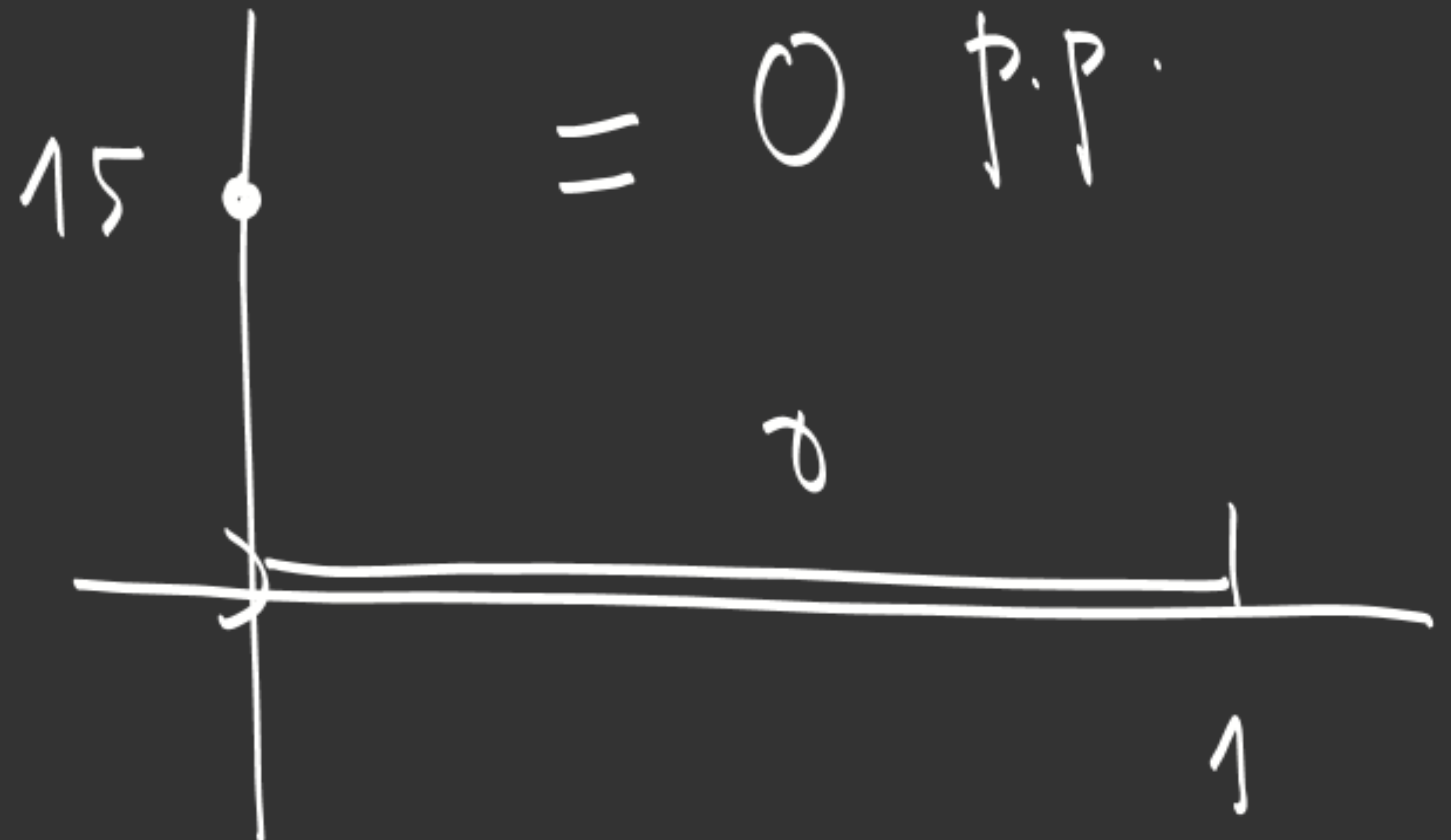
De plus, $f_n(0) = 15 \xrightarrow[n\to\infty]{} 15$;

si $x \in]0,1]$, $f_n(x) = \sin \frac{1}{nx}$ $(n \geq 1)$

On a : $\frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc : $\sin\left(\frac{1}{nx}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin(0) = 0$.

Donc $(f_n(\omega))$ CVS 0 presque partout.



$\Rightarrow \lim_n \int_0^1 f_n \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$ par CV dominée.

- $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^{n} e^{-x}(n+x)\,dx}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}(n+x)\cdot \chi_{[0,n]}(x)\,dx$$

$\leftarrow$ ens. fixe

≥ 0 : bien défini

On pose

$$f_n(x) := e^{-x}(n+x)\cdot \chi_{[0,n]}(x),\quad n \geq 0,\ x \geq 0$$

La suite $(f_n)_n$ est $\nearrow$: soit $n \geq 0$, soit $x \geq 0$,

$$0 \leq f_n(x) = e^{-x} \cdot \underbrace{(n+x)}_{\leq (n+1+x)} \cdot \underbrace{\chi_{[0,n]}(x)}_{\leq \chi_{[0,n+1]}(x)} \leq f_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow$ le th. de CV monotone s'applique. Par monotonie, la limite simple existe (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) : soit $x \geq 0$,

$$e^{-x} \underbrace{(n+x)}_{\to \infty} \cdot \overbrace{\chi_{[0,n]}(x)}^{\to 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \cdot 1 = \infty, \text{ cf.}$$

La limite simple des f_n est donc $f \equiv \infty : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x \mapsto \infty \end{array}$.

Et, par cv monotone, fonction étagée !

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_L = \int_0^\infty \overbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}^{f\equiv\infty} = \infty . \underbrace{\mu_L}(\mathbb{R}_+) = \infty .$$

Rq : directement, $\displaystyle\int_0^n e^{-x}(n+\underset{\geq 0}{\underline{x}})\,dx \geq \int_0^n n e^{-x} = n\left[-e^{-x}\right]_0^n$
$= n(1-e^{-n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^n e^{-x}(n+x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty .$

NB. $\displaystyle\int_0^n \frac{e^{-x}(n+x)}{1+\cos^2 x}\,dx \; (\ldots)$

1.2. Mq $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}}_{\underbrace{f_n(x) := \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}},\ n\geq 0,\ x>0}_{\geq 0 \Rightarrow \text{intégrale bien définie}}}\,dx = 0$

(ce qu'on veut en $x=0$!)

La suite étant ≥ 0 mais $\searrow$, pas possible d'utiliser la CV monotone.

Sauf pour $n=0$ (cf. $f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)=\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+},\mu_L)$

puisque $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^A$)), les f_n sont intégrables (grâce au terme en e^{-nx}, $n \geq 1$:

$$x \cdot e^{-nx} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$ car $n \geq 1$, donc $\exists A > 0$ tq

$$x \geq A \Rightarrow |x \cdot e^{-nx}| \leq 1$$
$$\Rightarrow e^{-nx} \leq \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

critère de Riemann

donc $$\int_0^\infty \left|\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right| dx \leq \overbrace{\int_0^A \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}}^{<\infty} + \overbrace{\int_A^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}}^{<\infty} \;)$$

Soit $n \geq 1$, soit $x > 0$,

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

si $x \geq 1$

dépend de n

dominations correctes mais inutiles

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+) \quad n \geq 1,\ x > 0$$

indép./uniforme en n

De plus, soit $x > 0$,

$$\underset{x \text{ fixé}}{f_n(x)} = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (\text{f. } x \neq 0)$$

$\Longrightarrow (f_n)_n$ CVS μ_L p.p. vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$:

donc, par CV dominée,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_L = \int_0^\infty \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n}_{= 0 \ \mu_L \text{ pp}} \, d\mu_L = 0 .$$

Exo 2

2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer si elle existe, la limite

$$L_\alpha := \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \, dx, \quad n \geqslant 1$$

Montrer tout d'abord que $L_{1/2}$ existe et donner sa valeur.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^{n} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,n] \Rightarrow \int \text{ bien définie}} dx, \quad n \geqslant 1$

$= \displaystyle\int_0^\infty f_n \, d\mu_L$, $f_n(x) := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \cdot \chi_{[0,n]}$, $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Assurons nous de la $\underline{CVS}$: soit $x \geq 0$,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$$

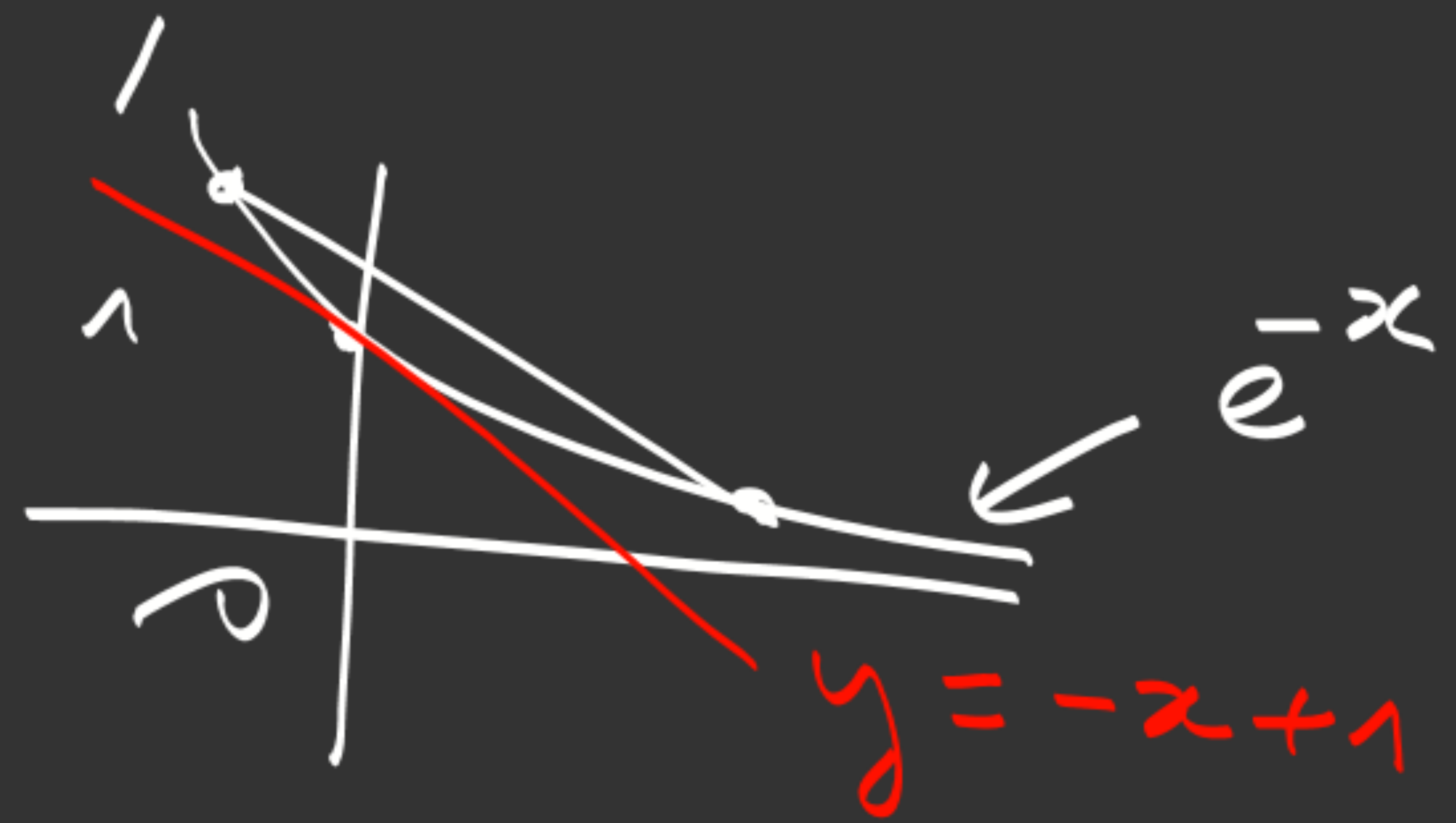
et, soit $x=0$ auquel cas $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$!

Soit $x>0$ —— " —— $n\ln\Big(\underbrace{1-\frac{x}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) \sim n\cdot\left(-\frac{x}{n}\right) = -x$

$$\Rightarrow e^{\underbrace{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}$$

Donc $\underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}_{\to e^{-x}} e^{x/2} \cdot \underbrace{\chi_{[0,n]}(x)}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x} \cdot e^{x/2} \cdot 1 = e^{-x/2}$: CVS (partout) vers $f(x) := e^{-x/2}$.

Domination : soit $x \in \mathbb{R}$



$$1 - x \leq e^{-x}$$

(cf. $(e^{-x})' = -e^{-x}$
$= -1$ en $x=0$)

par convexité de e^{-x}

(cf. $(e^{-x})'' = +e^{-x} \geq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-x}$ convexe, donc son graphe est toujours au dessus de ses tangentes)

$\Rightarrow (\forall x \in [0,n])$: $0 \leq 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n}$, $n \geq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(e^{-x/n}\right)^n = e^{-x}$

Donc, pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| = \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{+x/2} \cdot \chi_{[0,n]}(x)}_{=0 \text{ si } x>n\ldots} \leq e^{-x} \cdot e^{x/2} = e^{-x/2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

Conclusion : CV dominée $\Longrightarrow$ $L_{1/2}$ existe et vaut

$$\int_0^\infty \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{e^{-x/2}} \, d\mu_L = \int_0^\infty e^{-x/2} \, dx$$

$$= \left[-2e^{-x/2}\right]_0^\infty = 2.$$

2.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \cdot \chi_{[0,n]}(x)$.

En étudiant $g_n(x) := \ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, $x \in [0, n[$.

Il suffit de mq $g_n \geq 0$ sur $[0, n[$ pour mq $f_n \nearrow$ (car alors $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \geqslant 1$ sur $[0,n[$). Or, $g_n(0) = 0$ (cf. $f_n(0) = 1$), de sorte qu'il suffit de mq $g_n'(x) \geq 0$ sur $]0, n[$ pour conclure.

On a

$$g_n(x) = \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}}\right)$$

$$= (n+1)\cdot\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right).$$

donc $g'(x) = \cancel{(n+1)}\dfrac{-1/\cancel{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}} - \cancel{n}\left(\dfrac{-\frac{1}{\cancel{n}}}{1-\frac{x}{n}}\right).$

$$= \frac{-(n+1)}{n+1-x} + \frac{n}{n-x}$$

$$= \frac{-(n+1)(n-x) + n(n+1-x)}{(n+1-x)(n-x)}$$

$$= \frac{x + n(\cancel{-1} + \cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{x}) + n^2(-1+1)}{(n+1-x)(n-x)}$$

$$= \frac{x}{(n+1-x)(n-x)} \geq 0 \text{ si. } x \in [0, n[\text{. Donc } (f_n)_n \nearrow$$

et ≥ 0 : la CV monotone s'applique.

En particulier, par monotonie on est certain que les f_n CV simplement ($\xrightarrow[n\to\infty]{} \sup_n f_n$). On a, si $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}_{e^{-x}} e^{\alpha x} \cdot \underbrace{\chi_{[0,n]}}_{\to 1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{(\alpha-1)x} =: f(x)$$

Par CV monotone, on a

$$L_\alpha = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x}\,dx = \lim_{A\to\infty} \underbrace{\int_0^A e^{(\alpha-1)x}\,dx}_{= \frac{1}{\alpha-1}\left[e^{(\alpha-1)x}\right]_0^A \text{ si } \alpha \neq 1,\ A \text{ si } \alpha = 1} \quad (*)$$

$= \infty$ si $\alpha - 1 > 0$ ie $\alpha > 1$

∞ si $\alpha = 1$

$\dfrac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha - 1 < 0$ ie si $\alpha < 1$

$L_\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$,

$= \infty$ si $\alpha \geq 1$.

$$(*) \lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{(\alpha-1)x} dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \underbrace{e^{(\alpha-1)x} \cdot \chi_{[0,n]}(x)}_{h_n(x) \geq 0,\ (h_n)_n \nearrow} dx$$

CV monotone, cette lim vaut

$$\int_0^\infty \lim_{n \to \infty} e^{(\alpha-1)x} \cdot \chi_{[0,n]}(x)\, dx = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx.$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx \, , \; n \geqslant 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \in \mathbb{R}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to$$

$$\infty - \infty$$