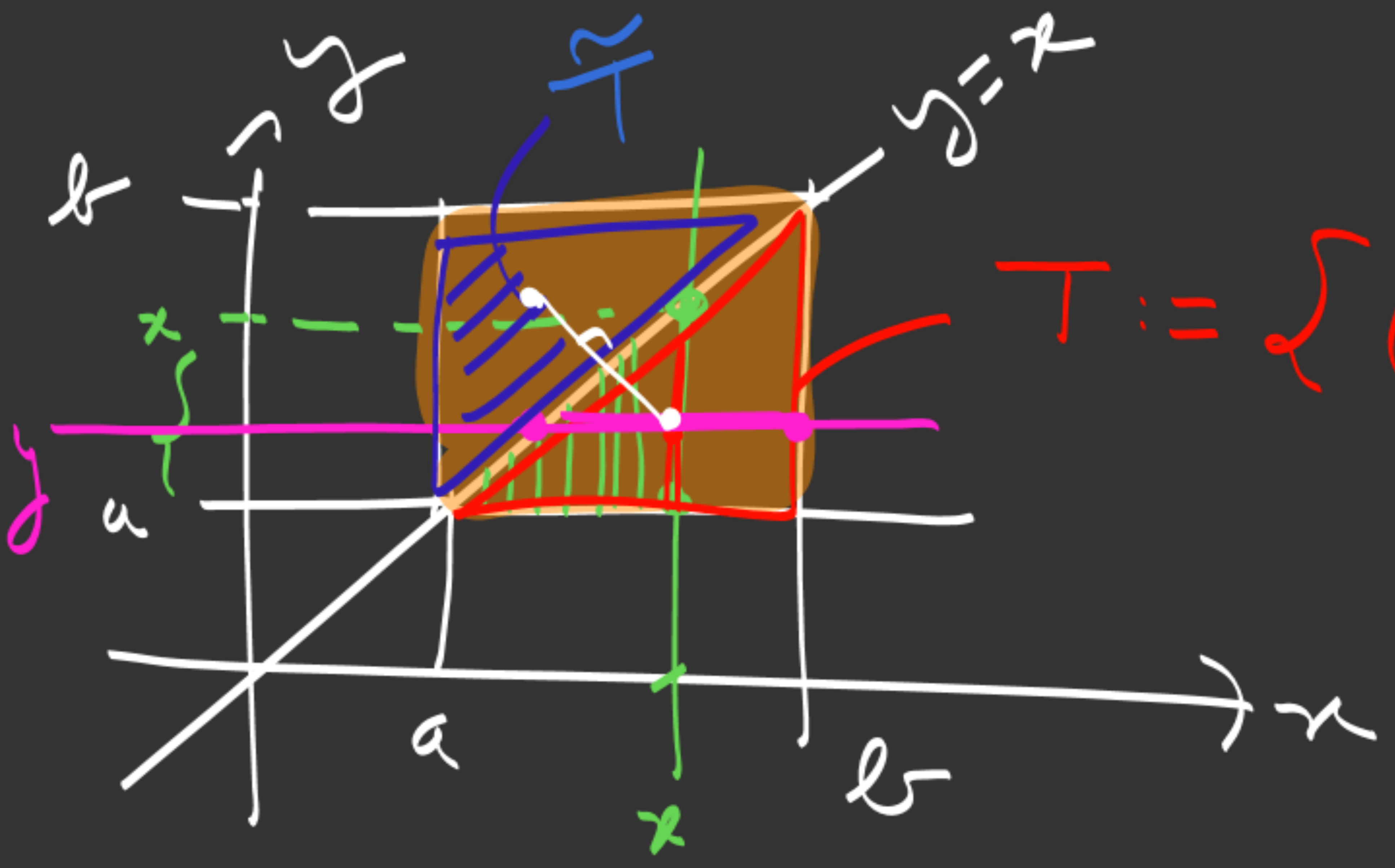
Td 7 - Fubini

Exo 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f \in L^1([a,b]^2)$.

1.1. Mq les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\, dx \right) dy =: I.$$

(avec $(x,y) \in [a,b]^2$)



$$T := \{ (x,y) \in [a,b]^2 \,/\, y \leq x \}$$

Comme $\displaystyle\int_T |f| \, dx\,dy \leq \int_{[a,b]^2} |f| \, dx\,dy < \infty$,

Fubini s'applique et

$$\int_T f(x,y) \, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x f(x,y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y) \, dx \right) dy \quad (= I)$$

1.2. On suppose que $f(y,x) = f(x,y)$, $(x,y) \in [a,b]^2$.

Mq $I = \frac{1}{2}\int_{[a,b]^2} f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{d\mu_L \otimes d\mu_L}$

On a $\int_{[a,b]^2} f\,dx\,dy = \overbrace{\int_T f\,dx\,dy}^{I} + \overbrace{\int_{\tilde{T}} f\,dx\,dy}^{=I\,?}$ et $\overbrace{\mu_L \otimes \mu_L}^{\mu_L^2}(T \cap \tilde{T}) = 0$

où $\tilde{T} := \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid x \leq y\}$, cf. $[a,b]^2 = T \cup \tilde{T}$

Considérons le changement de variables $\varphi : T \longrightarrow \tilde{T}$, $(w,z) \longmapsto (z,w)$;

on a :

$$\int_{\tilde T} f(x,y)\,dx\,dy = \int_T f\Big(\overbrace{\underbrace{\varphi(w,z)}_{z,w}}^{(x,y)\,=(z,w)\in\tilde T}\Big)\cdot\left|\det\varphi'(w,z)\right|\,dw\,dz \qquad (w,z)\in T$$

$$\varphi : (x,y) = \varphi(w,z) = (z,w) = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(w,z) \\ \varphi_2(w,z) \end{bmatrix}$$

ie $x = z$ et $y = w$

$$= \int_T f(z,w)\cdot\left|\cancel{-1}\right|\,dw\,dz$$

$$\overset{f \text{ sym.}}{=} \int_T f(w,z)\,dw\,dz = I.$$

avec

$$\varphi'(w,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix}(w,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\varphi'(w,z) = -1$$

Exo 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dérivable tq

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues.

3.1. Soient $a \leq b$, $c \leq d$ quatre réels, calculer

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, dy \right) dx$$

f. Mi2

Rappel : f dérivable $\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dérivable par rapport à y

(sa dérivée partielle est $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable par rapport à x (et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$)

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy = \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right]_{x=a}^{x=b} dy$$

$$= \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \right] dy$$

$$= \Big[f(b,y) \Big]_{y=c}^{y=d} - \Big[f(a,y) \Big]_{y=c}^{y=d} = \underline{f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)}.$$

De même $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy \right) dx = f(b,d) - f(b,c)$
$- f(a,d) + f(a,c)$.

Au préalable, on a existence de chacune de ces deux intégrales puisque :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right| dx\, dy \leq \underbrace{\overbrace{\max_{[a,b]\times[c,d]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|}^{<\infty,\ f.\ \text{fonction continue sur compact}} \cdot (b-a)(d-c)}_{<\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L^1([a,b]\times[c,d])$$ et que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dy \right) dx$$

en particulier cette intégrale est bien définie

De même avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, également supposée continue.

3.2. En déduire que

on applique Fubini à cette partie

$$\int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx \right) dy = 0$$

C'est clair puisque

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\right) dy$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy\right) dx \overset{3.1}{=} \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\right) dy$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$ par ex. avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0$ (idem si <0...)

Par continuité, $\exists a \overset{<}{,} b, c \overset{<}{,} d \in \mathbb{R}$ tq,

$$(w,z) \in [a,b] \times [c,d] \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)(w,z) > 0$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]\times[c,d]} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx\, dy > 0.$$

<u>Rq.</u> : Th. de Schwarz : f <u>deux fois</u> dérivable $\Rightarrow$ les dérivées partielles existent et les dérivées partielles croisées sont égales.

Exo 2

calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2-1}$

$\geq 0 \Rightarrow$ l'intégrale est bien définie
et "Fubini ≥ 0" / Tonelli s'applique

?

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)}\right)dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)}\right)dx$$

Calculons

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+y} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2 y} \right)}_{?} dy$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2y} \overset{\uparrow}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left[\arctan(z) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$z = x\sqrt{y}$ (à $y > 0$ fixé)

$dz = \sqrt{y}\, dx$

$\Rightarrow$ on est ramené à calculer $\displaystyle \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}$ ($< \infty$, f. Riemann)

$$\underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \frac{2\cancel{x}\, du}{\cancel{x}(1+u^2)} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \text{, d'où la valeur}$$

$u = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2u} \cdot dy$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\, dy}{(1+y)(1+x^2 y)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

De plus, cette valeur est aussi égale à

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2 y)} \right) dx$$

fraction rationnelle en y (à x fixé) avec pôles simples p.p. $x \in \mathbb{R}_+$ (cf. pôle double uniquement en $x=1$)

À x fixé $\neq 0$, $\neq 1$, il existe (D.E.S = Décomposition en Éléments Simples) A et B tq

$$\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1+x^2y} = \frac{A + Ax^2y + B + By}{(1+y)(1+x^2y)}$$

$\sim \frac{1}{x^2y^2}$ qd $y \to \infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ Ax^2+B=0 \end{cases} \text{ cf. } x^2 \neq 1 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \quad A(1-x^2)=1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow B = 1 - \frac{1}{1-x^2} = -\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^C \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{1-x^2}\int_0^C \frac{dy}{1+y} - \frac{x^2}{1-x^2}\int_0^C \frac{dy}{1+x^2y}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\ln(1+C) - \frac{\cancel{x^2}}{1-x^2} \times \frac{1}{\cancel{x^2}} \ln(1+x^2C)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+C}{1+x^2C}\right) \xrightarrow[C \to \infty]{} \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2\ln x}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exo 4. Soit $f_n : (X, \mathcal{B}, \mu) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ définissant une suite d'applications mesurables tq

σ-fini (*)

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty}.$$

Mq
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

(*) $\exists (X_n)_n \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ tq $X = \bigcup_n X_n$, $\mu(X_n) < \infty$

ex : i) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu_L)$, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

ii) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d = \text{card})$: $\mathbb{N} = \bigcup_n \{n\}$

On a

$$f_n(x) = \text{“}f(n,x)\text{”}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X \overbrace{|f_n|}^{\geq 0} \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_X \underbrace{|f_n(x)|}_{\geq 0} \, d\mu(x) \right) d\mu_d(n)$$

Rq. $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$;

$$\int_{\mathbb{N}} \underbrace{x(n)}_{x_n} \cdot d\mu_d(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \underbrace{\mu_d(\{n\})}_{1}$$

$$(x_n)_n : \mathbb{N} \longrightarrow E, \quad n \longmapsto x_n = x(n)$$

$$(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \int_X \left(\overbrace{\int_{\mathbb{N}} |f_n(x)| \, d\mu_d(n)}^{\sum_n |f_n(x)|} \right) d\mu(x)$$

$$= \int_{X \times \mathbb{N}} |f_n(x)| \, d\mu \otimes d\mu_d < \infty$$

En particulier :

i) p.p. $x \in X$, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ (ie intégrabilité p.p. x : $\int_{\mathbb{N}} |f_n(x)| \, d\mu_d(n) < \infty$)

$\Rightarrow$ p.p. $x \in X$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument CV, donc CV dans $(\mathbb{R}, |.|)$ complet (cf. MI2) : $\exists \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ (p.p. x)

ii) $f : \begin{array}{l} X \times \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (x,n) \longmapsto f_n(x) \end{array} \in L^1(X \times \mathbb{N})$, donc Fubini s'applique et

$$\int_{X\times\mathbb{N}} f_n(x)\, d\mu(x)\otimes d\mu_d(n)$$

$$\boxed{\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

cf. Thi 2

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(x)\, d\mu_d(n)\right) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_X f_n(x)\, d\mu(x)\right) d\mu_d(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_X f_n(x)\, d\mu(x)$$

4.2. <u>Déterminer</u>, si elle existe, la valeur de

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} e^{-n^2 x}\, dx$$

$$\left\| \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}e^{-n^2x}\right| dx < \infty \,?\right.$$

On a $\displaystyle\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left| \overbrace{\cancel{(-1)}^{n+1} e^{-n^2 x}}^{\geq 0} \right| dx$

Tonelli $\displaystyle = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n^2 x}\, dx$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{e^{-n^2 x}}{-n^2} \right]_0^\infty$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Donc 4.1 $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty (-1)^{n+1} e^{-n^2 x}\, dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} e^{-n^2 x}\, dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 x}\, dx}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \frac{1}{n^2}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{+1}{(2n+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\pi^2/6} + \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}}^{\pi^2/24}}_{\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}} \right) = \frac{-\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$\pi^2/24$