Td 3 - Mesures, tribus

Exo 1. Soit E un ensemble $\neq \emptyset$. $\{A\} =: \mathcal{A}$

1.1. Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$; déterminer $\mathcal{B}(\overbrace{\{A\}})$.

Comme $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \supset \{\overbrace{\emptyset, A, {}^cA, E}^{=: \mathcal{C}}\}$ car $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ tribu $(\supset \mathcal{A})$.
Réciproquement, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$; donc, si $\mathcal{C}$ est une tribu, on aura nécessairement $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ (qui est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$).

Or, on a :

i) $\phi \in \mathcal{C}$

ii) il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par complémentaire
($f.\ {}^c\phi = E \in \mathcal{C},\ {}^cA \in \mathcal{C},\ {}^c({}^cA) = A \in \mathcal{C},\ {}^cE = \phi \in \mathcal{C}$)

iii) comme la famille $\mathcal{C}$ contient un nombre fini de parties, il suffit de montrer la stabilité par réunion de 2, 3, 4 éléments ; on a :

* réunion à 2 : $\left.\begin{array}{l} \phi \cup A = A \in \mathcal{C} \\ \vdots \\ {}^cA \cup E = E \in \mathcal{C} \end{array}\right) C_4^2$ possibilités

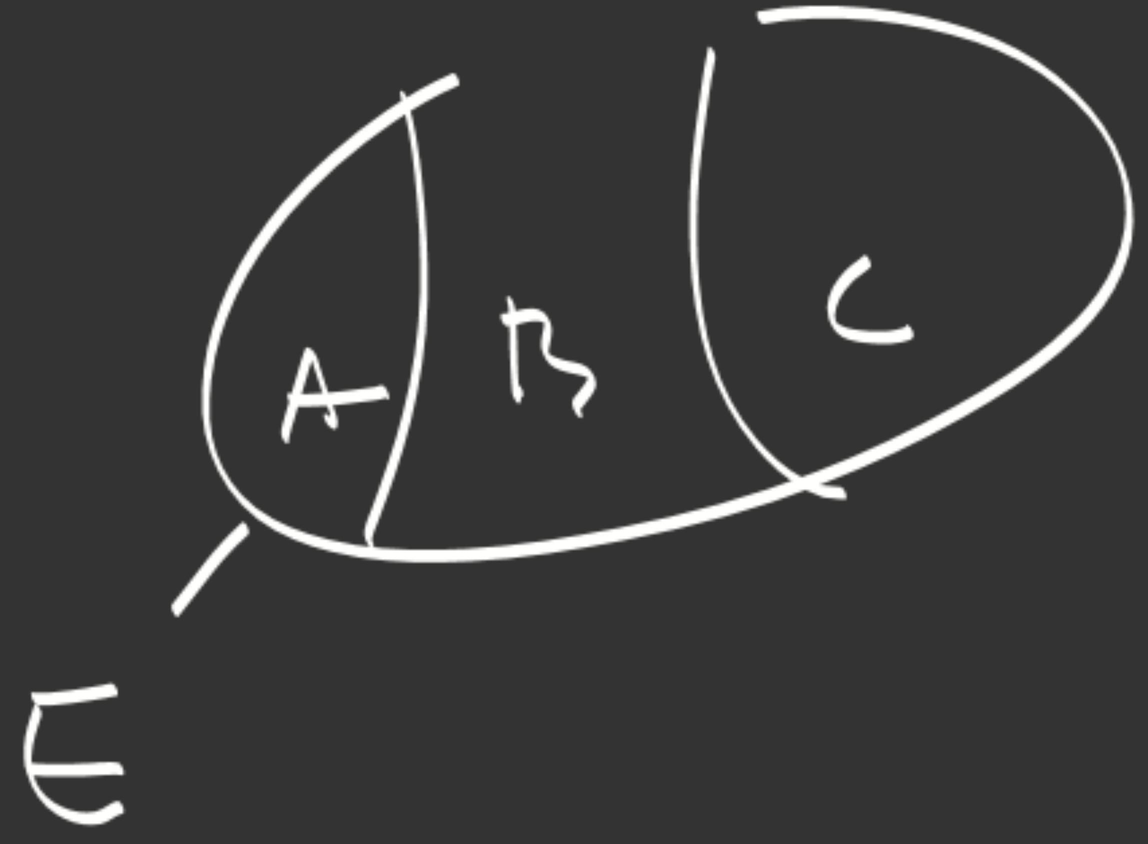
* réunion à 3 ($C_4^3 = 4$ possibilités) : soit on prend E, et la réunion vaut $E \in \mathcal{C}$, soit on ne prend pas E et on a $\emptyset \cup A \cup {}^cA = E \in \mathcal{C}$

* réunion à 4 : ça donne (encore) $E \in \mathcal{C}$.

1.2. Soit $\mathcal{F} := \{A, B, C\}$ une partition de E, déterminer $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. On a : $E = A \cup B \cup C$ avec A, B et C 2 à 2 disjointes :

$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$

Nécessairement, $\mathcal{B}(\mathcal{F}) \supset \overbrace{\{\emptyset, A, B, C, {}^cA, {}^cB, {}^cC, E\}}^{=: \mathcal{C} \supset \mathcal{F}}$



i) $\emptyset \in \mathcal{C}$

ii) $\mathcal{C}$ stable par complémentaire

iii)
$$\left.\begin{aligned}
&A \cup B = {}^cC \in \mathcal{C} \\
&B \cup C = {}^cA \in \mathcal{C} \\
&A \cup C = {}^cB \in \mathcal{C} \\
&A \cup {}^cA = E \in \mathcal{C} \\
&A \cup {}^cB = A \cup C = {}^cB \in \mathcal{C} \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \text{réunion à 2 éléments}$$

De même pour les réunions à 3 éléments :

$$A \cup B \cup C = E \in \mathcal{C}$$

$$A \cup B \cup {}^cC = A \cup B = {}^cC \in \mathcal{C}$$

...

Pour les cas de réunion à 4 (sans prendre $\emptyset$ ou E) on obtient toujours $E \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est donc une tribu, et contient $\mathcal{F}$: $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Donc $\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}$.

<u>Rq.</u> : si on prend une partition $A_1, \dots, A_n$ de E, on obtient plus généralement une tribu à 2^n éléments :

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) \supset \{ \emptyset, \overbrace{\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}}^{C_n^1 = n}, \overbrace{\underbrace{A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, \dots, A_{n-1} \cup A_n}}^{C_n^2}, \dots$$

$C_n^0 = 1$

$=$

réunion à 0 éléments de $\mathcal{F} := \{A_1, \dots, A_n\}$

réunion à 1 élément

réunion à 2 éléments

par construction, $\mathcal{C} \ni \emptyset$, est stable par réunion, et stable par complémentaire

$$\dots, \overbrace{\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}, \dots, A_2 \cup \dots \cup A_n}_{\text{réunion à } n-1 \text{ éléments}}}^{C_n^{n-1} = n}, \overbrace{\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n}_{=E}}^{C_n^n = 1} \} = \mathcal{C}$$

la réunion à n éléments

(cf. ${}^c(A_1 \cup A_2) = A_3 \cup \dots \cup A_n$)

car $\mathcal{F}$ partition

Et on a $\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathcal{F}) = 2^n$ $\left(= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\right)$.

1.3. Sur $\mathbb{R}$, quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{A} := \{ [0,1[, [1,2],]2,3] \}$?

On a :

$$\underbrace{]-\infty,0[\cup]3,\infty[}_{\in \mathcal{B}(\mathcal{A})} = {}^c\Big(\underbrace{[0,1[\cup [1,2] \cup]2,3]}_{[0,3]} \Big)$$

Clairement $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\Big(\underbrace{\mathcal{A} \cup \{]-\infty,0[\cup]3,\infty[\}}_{\text{partition de } \mathbb{R} \text{ à 4 éléments}} \Big)$

$\Longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$ compte les 2^4 parties décrites au 1.2.

Exo 2. Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable ; soit $A \subset X$, et soit

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \chi_A(x) = 1 \text{ si } x \in A$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

indicatrice (ou fonction caractéristique) de A

Mq χ_A est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mesurable ssi $A \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ / $A = \chi_A^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé (= complémentaire d'un ouvert)} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}) \in \mathcal{B}$

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons $A \in \mathcal{B}$, et mq

$$(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) : \chi_A^{-1}(B) \in \mathcal{B}$$

$$\left(=: \{x \in X \mid \chi_A(x) \in B\}\right)$$

On :

- soit ni 0 ni 1 n'appartiennent à B : $\chi_A^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}$
- soit 0 et $1 \in B$: $\chi_A^{-1}(B) = X \in \mathcal{B}$
- soit $0 \in B$ et $1 \notin B$: $\chi_A^{-1}(B) = {}^c A \in \mathcal{B}$
- soit $0 \notin B$ et $1 \in B$: $\chi_A^{-1}(B) = A \in \mathcal{B}$

car $\mathcal{B}$ tribu

. $\square$

__Exo 3.__ Soit $f : X \longrightarrow Y$, soit $\mathcal{B}_X$ tribu sur X, et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$; mq

f $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}(\mathcal{A}))$-mesurable

$\Longleftrightarrow (\forall B \in \mathcal{A}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X$

$\Longrightarrow /$ évident (f. $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$)

$\Longleftarrow /$ mq $\mathcal{C} := \{ B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X \}$ est une tribu

i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}_X$ (car $\mathcal{B}_X$ tribu)

ii) Soit $B \in \mathcal{C}$, mq $f^{-1}({}^{c}B) \in \mathcal{B}_X$

<u>Or</u>: $f^{-1}({}^{c}B) = {}^{c}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}_X}) \in \mathcal{B}_X$

iii) Soient $B_1, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{E}$, mq $B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \dots = \overbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n}^{\{y \in Y \mid (\exists n \in \mathbb{N}) : y \in B_n\}} \in \mathcal{C}$

ie mq $f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{B}_X$

<u>Or</u>: $f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(B_n)}_{\in \mathcal{B}_X} \in \mathcal{B}_X$ car tribu

Donc $\mathcal{C}$ est une tribu ; par hypothèse, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ (qui est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$). $\square$

Rq. : i) $\overset{-1}{f}({}^cB) = \{x \in X \mid \overbrace{f(x) \in {}^cB}^{f(x) \notin B}\}$

$${}^c\overset{-1}{f}(B) = \{x \in X \mid f(x) \notin B\}$$

ii) $\overset{-1}{f}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \{x \in X \mid f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i\}$

$$= \{x \in X \mid (\exists i \in I) : f(x) \in B_i\} = \bigcup_{i \in I} \overbrace{\{x \in X \mid f(x) \in B_i\}}^{\overset{-1}{f}(B_i)}$$

iii) $f(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A) : y = f(x)\}$