Figure 1: PNS

### MAM3

## Commande optimale

## 2024-25

# Exam CC no. 1

**Durée 2H00. Documents autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.**

## Exercice 1 (7 points)

On considère le problème à temps final $t_f > 0$ fixé

$$\int_0^{t_f} (x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

pour la dynamique

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - u_1(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où $x(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}^2$, où $x(0) = x_0$ est fixé, et où la condition terminale est

$$x_1(t_f) + x_2(t_f) = 1.$$

### 1.1

Donner le hamiltonien du problème, en fonction de l'état $x$, du contrôle $u$, de l'adjoint $p$ et du scalaire $p^0$.

### 1.2

Supposer, par l'absurde que $p^0 = 0$, et montrer qu'alors $p$ doit être identiquement nul. Conclure.

### 1.3

On pose $p^0 = -1/2$ pour la suite. Déterminer le système adjoint.

### 1.4

Écrire les conditions de transversalité.

### 1.5

Déterminer le contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint à l'aide de la condition de maximisation.

### 1.6

Injecter ce contrôle dans le hamiltonien pour déterminer le hamiltonien maximisé (fonction de l'état et de l'état adjoint seulement) et compléter le code ci-dessous.

```julia
# Hamiltonian
function h(t, x, p)
    r = 0.0 # **** TO BE UPDATED ****
    return r
end

f = Flow(Hamiltonian(h))

# Shooting function
function shoot(p0)
    xf, pf = f(t0, x0, p0, tf)
    s = zeros(2) # **** TO BE UPDATED ****
    return s
end
```

## Exercice 2 (10 points)

On considère le problème de navigation en temps minimal

$$\dot{x}(t) = w + \cos\theta(t), \quad \dot{y}(t) = \sin\theta(t), \quad \dot{\theta}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où le vecteur position $(x(t), y(t))$ appartient à $\mathbf{R}^2$, l'argument de la vitesse $\theta(t)$ à $\mathbf{R}$, et où $w \in \mathbf{R}$ est une constante fixée. On ajoute la contrainte $|u(t)| \leq 1$ ainsi que des conditions aux limites

$$(x(0), y(0), \theta(0)) = (x_0, y_0, \theta_0), \quad (x(t_f), y(t_f), \theta(t_f)) = (x_f, y_f, \theta_f).$$

**2.1**

Montrer que si $|w| \geq 1$, le problème n'admet pas nécessairement de solution.

**2.2**

On suppose désormais $w \in [0, 1[$, et on note $p = (p_x, p_y, p_\theta)$ l'état adjoint. Écrire le hamiltonien du problème en fonction de l'état, du contrôle, de $p$ et de $p^0$.

**2.3**

Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint et montrer que $p_x$ et $p_y$ sont constants.

**2.4**

Appliquer la condition de maximisation pour déterminer les contrôles optimaux.

**2.5**

En déduire que, le long d'une extrémale optimale, on a

$$0 = p^0 + p_x w + p_x \cos\theta(t) + p_y \sin\theta(t) + |p_\theta(t)|, \quad t \in [0, t_f].$$

**2.6**

On suppose désormais $(p_x, p_y) \neq (0, 0)$ et on pose $(p_x, p_y) = (\cos\psi, \sin\psi)$. Montrer que

$$|p_\theta(t)| - \gamma = -\cos(\theta(t) - \psi), \quad \dot{p}_\theta(t) = \sin(\theta(t) - \psi),$$

où $\gamma$ est une constante que l'on précisera.

**2.7**

En déduire que $(p_\theta(t), \dot{p}_\theta(t))$ appartient à un ensemble que l'on dessinera pour $\gamma > 1$.

**2.8**

Dans le cas $\gamma > 1$, montrer que le contrôle est constant, égal à $\pm 1$.

**2.9**

Dans le cas où le contrôle est constant égal à $+1$, donner l'expression de $x(t)$, $y(t)$ et $\theta(t)$.

## Exercice 3 (3 points)

On considère la portion de code suivant, extrait de l'application d'une méthode directe au problème de navigation :

```
# Objective
@objective(sys, Min, tau[1]+tau[2]+tau[3])

# Constraints
@constraints(sys, begin
    x[1, 1] == x0
    y[1, 1] == y0
    th[1, 1] == th0
    x[2, 1] == x[1, P]
    y[2, 1] == y[1, P]
    th[2, 1] == th[1, P]
    x[3, 1] == x[2, P]
    y[3, 1] == y[2, P]
    th[3, 1] == th[2, P]
    x[3, P] == xf
    y[3, P] == yf
    th[3, P] == thf
    end)

# Dynamics: Crank-Nicolson scheme
for j in 1 : P-1
    @NLconstraints(sys, begin
    # x' = w + cos(theta)
    x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt * ( w + cos(th[1, j]) + w + cos(th[1, j+1]) )
    x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt * ( w + cos(th[2, j]) + w + cos(th[2, j+1]) )
    x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt * ( w + cos(th[3, j]) + w + cos(th[3, j+1]) )
    # y' = sin(theta)
    y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt * ( sin(th[1, j]) + sin(th[1, j+1]) )
    y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt * ( sin(th[2, j]) + sin(th[2, j+1]) )
    y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt * ( sin(th[3, j]) + sin(th[3, j+1]) )
    # theta' = u
    th[1, j+1] == th[1, j] + tau[1]*Dt * u[1]
    th[2, j+1] == th[2, j] + tau[2]*Dt * u[2]
    th[3, j+1] == th[3, j] + tau[3]*Dt * u[3]
    end)
end
```

### 3.1

Indiquer la portion de code traduisant les conditions de jonction entre le premier et le deuxième arc.

### 3.2

Comment modifier ce code si le courant est dirigé non pas selon $(Ox)$ mais selon $(Oy)$ ?

### 3.3

Comment modifier ce code si on passe d'une solution comptant 3 arcs à une solution à 2 arcs ?