Ex 1

Etudier la nature et donner la val (quand elle existe) des int suivante

$I_1 : \int_0^{\infty} e^{-r}\,dr =$

Est-ce que $\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-r}\,dr$ existe ?

$= \lim_{A\to\infty} [-e^{-r}]_0^A = \lim (1-e^{-A}) = 1$

$I_2 : \int_0^1 \ln(r) = \lim_{B\to 0} \int_B^1 \ln(r) = \lim_{B\to 0} [r\ln r - r]_B^1 = \lim_{B\to 0} (-1 - B\ln(B))$ or $(\lim_{B\to 0} B\ln(B)) = 0$ par C.C.

$= -1$ ✓

Autre $r^{1/2}\ln(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $\forall r \leq \varepsilon$ $r^{1/2}\ln(r) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(r) \leq \frac{1}{r^{1/2}}$

$\Rightarrow \int_0^1 |\ln(r)|dr \leq \underbrace{\int_\varepsilon^1 |\ln(r)|dr}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{dr}{r^{1/2}}}_{<\infty \text{ par Riemann}}$ $\quad (r^{-1/2})' = -\frac{1}{2} r^{-3/2}$

$= -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon$

L'intégrale est absolument CV donc CV : $\int_0^1 \ln(r)dr$ CV

$I_3 : \int_2^{\infty} \frac{1}{r}\ln(r)\,dr \overset{\substack{u=\ln(r)\\ du=\frac{1}{r}dr}}{=} \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u} = [\ln(|u|)]_{\ln(2)}^{\infty} = \infty$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{r^\alpha \ln(r)^\beta}\,dr = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^\beta e^{u(\alpha-1)}}$

$\frac{1}{u^\beta e^{(\alpha-1)u}} \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \alpha=1, & \begin{cases} \beta>1, \text{ CV} \\ \beta=1, \ln(u) \text{ DV} \\ \beta<1, \text{ DV} \end{cases} \\ \alpha>1, & \begin{cases} \beta>1 & \frac{1}{u^{-2} e^{(\alpha-1)u}} \to 0 \text{ donc CV} \\ \beta=1 & \frac{1}{u} \frac{1}{e^{(\alpha-1)u}} \\ \beta<1 & \end{cases} \Big| \text{CV car } o(\frac{1}{u^2}) \\ \alpha<1, & \frac{e^{(1-\alpha)u}}{u^\beta} \Big| \text{DV } \forall\beta \end{cases}$

Ex 2 :

$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}} < \infty$ int par Riemann en 0 et ∞

$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}$

En 0, $\frac{1}{(1+r^2)\sqrt{r}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{r}}$ CV (car $\int_0^1 |\frac{1}{(1+r^2)\sqrt{r}}|dr \leq \int_0^1 |\frac{1}{\sqrt{r}}|dr < \infty$

En ∞, $\frac{1}{(1+r^2)\sqrt{r}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{r^{5/2}}$ CV

$J_2 : \int_{\mathbb{R}} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = 2\int_0^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}$ en ∞, $\left|\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right| = \left|\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}}\right)\right| \geq \frac{1}{2r}$ DV donc DV

ou $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{|r|}$

J_3 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} dr = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$

En ∞ $r^2 e^{-r^2} \underset{|r|\to\infty}{\to} 0$ donc $\exists A>0, \forall r \geq A, r^2 e^{-r^2} \leq 1$ d'où $e^{-r^2} \leq \frac{1}{r^2}$

En 0, $e^{-r^2} = 1$

<u>Ex 3</u> : $\int_{\mathbb{R}} |f(r)| dr = \infty$ mais $\exists \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(r) dr$

3.1 $K = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(r)}{r} dr \overset{\text{Parité}}{=} 2\int_0^{A} \frac{\sin(r)}{r} dr = 2\left[-\frac{\cos r}{r}\right]_0^{A} - 2\int_0^{\infty} \frac{\cos r}{r^2} dr =$

$u' = \sin$ $u = -\cos$
$v = \frac{1}{r}$ $v' = -\frac{1}{r^2}$

$\frac{\sin(r)}{r}$ si $r \neq 0$
1 si $r = 0$

Pour cela qu'on étudie enfin sur $[1;\infty[$

$\hookrightarrow$ De plus $\int_1^{A} \frac{\sin(r)}{r} = \left[-\frac{\cos r}{r}\right]_1^{A} - \int_1^{A} \frac{\cos r}{r^2} dr$

$= \underbrace{-\frac{\cos(A)}{A}}_{\to 0} - \int_1^{A} \frac{\cos(r)}{r^2} dr$ or $\left|\frac{\cos(r)}{r^2}\right| \leq \frac{1}{r^2} < \infty$ donc $\int_1^{A} \frac{\cos(r)}{r^2} dr < \infty$ Ainsi $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(r)}{r} dr < \infty$

donc $\int_1^{A} \left|\frac{\cos(r)}{r^2}\right| dr < \infty$

3.2 Mq $\int_1^{\infty} \frac{\cos(2r)}{r} dr$ est CV (?) dem 3.1 donc CV mais que sur $[1;\infty[$.

$= \left[\frac{1}{2r} \times \sin 2r\right]_1^{A} + \int_1^{A} \frac{\sin(2r)}{2r^2} dr = -\frac{\sin 2}{r} + \underbrace{\int_1^{A} \frac{\sin(2r)}{2r^2} dr}$ $\leftarrow$ lim finie

$\int_1^{A} \left|\frac{\sin(2r)}{2r^2}\right| dr \leq \int_1^{A} \frac{dr}{2r^2} < \infty$

3.3

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(r)}{r}\right| dr \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|r|} dr = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{r} dr = 2[\ln(r)]_0^{\infty}$ DV sert à rien car DV et majore

$\Rightarrow$ Mq $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin(r)}{r}\right| dr = \infty$ or $\begin{cases} 0 \leq \sin^2(r) \leq \sin(r) \leq 1 \\ \sin^2(r) = \frac{1-\cos(2r)}{2} \end{cases}$

$\geq \int_1^{\infty} \left|\frac{\sin^2 r}{r}\right| dr = \int_1^{\infty} \left|\frac{1-\cos(2r)}{2r}\right| dr = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1-\cos(2r)}{r} dr$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{r}}_{DV} - \int_1^{\infty} \frac{\cos(2r)}{r}\right)$

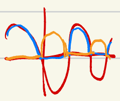
$u = \frac{1}{r}$ $u' = -\frac{1}{r^2}$
$v' = \cos(2r)$ $v = \frac{1}{2}\sin(2r)$

(Voir 3.2 $\to$ CV)

Ainsi CV + DV = DV.

Donc $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin^2 r}{r}\right| dr$ DV donc $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin(r)}{r}\right| dr$ dv

$f = f_+ + f_-$ où $f_+ = \max(f, 0)$
$f_- = \max(-f, 0)$
$= -\min(f, 0)$



Ex 1 : Etudier la nature (CV ou DV) des intégrales (et les calculs quand CV)

a. $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt$

la limite de $\underbrace{\int_0^A e^{-t}\, dt}$

$t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0; A]$

bien défini (au sens de Riemann)

quand $A \to \infty$ existe-t-elle ?

Soit $A \geq 0$

$$\int_0^A e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$$

$$= 1 - e^{-A} \underset{A \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est CV (i.e la limite qd $A \to \infty$ existe)

et $\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = 1$

2. $I_2 = \int_0^1 \ln t \, dt$ ≠ du cas $\int_a^b f(t)\,dt$

avec $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ car ln pas définie en 0

$\ln t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

la limite de $\underbrace{\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt}_{\text{bien définie}}$ $(\varepsilon > 0)$

$\ln \in \mathcal{C}^1([\varepsilon, 1])$

quand $\varepsilon \to 0^+$, existe-t-elle ?

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \, dt$$

$$= -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ (croissance comparée)

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln t \, dt = -1$$

Rq : ex d'intégrale impropre DV :

$$\int_0^{\infty} \cos t \, dt \quad : \text{ n'existe pas}$$

$$\int_0^{A} \cos t \, dt = [\sin t]_0^A = \sin A$$: pas de lim quand $A \to \infty$

3. $$I_3 = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\int_2^{A} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(|\ln t|)\right]_2^A$$

$$= \ln(|\ln A|) - \ln(|\ln 2|)$$

$$\lim_{A \to \infty} \ln(|\ln A|) = \infty$$ DV (limite existe mais n'est pas finie)

Rq : 1. $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t\ln t} = \infty \in \bar{\mathbb{R}}$

2. <u>intégrale de Bertrand :</u>

- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha < 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

  (α et $\beta > 0$)

- $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha > 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Ex 2 : Discuter le caractère CV des intégrales ci-dessous :

1. $J_1 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$

Il s'agit de vérifier que la quantité

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$ a une limite quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to \infty$

$$= \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} + \int_{1}^{A} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$

d'une part, $\frac{(1+t^2)\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \underset{\substack{t \to 0 \\ >}}{\longrightarrow} 1$

(i.e. $(1+t^2)\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ quand $t \to 0_+$)

$\Rightarrow \exists\, \eta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta]$,

$$\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)\sqrt{t}} \leq 2$$

$\Rightarrow \left(\forall t \in]0, \eta]\right) : \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{2(1+t^2)\sqrt{t}} > 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)dt} \leq \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} CV}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}} \quad CV$$

aussi quand $\varepsilon \to 0_+$

(donc $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}}$ aussi)

d'autre part, $\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$

Riemann

$\Rightarrow$ CV

2. $J_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Existence de la limite qd $A \to \infty$ de

$$\int_{-A}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \underset{f \text{ paire}}{=} 2\int_{0}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

On a, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{t \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$

donc critère Riemann $\Rightarrow$ DV

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \infty \right)$$

3. $J_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt$

$$\exists \lim_{A \to \infty} \underbrace{\int_{-A}^{A} e^{-t^2} dt}$$

$$2\int_0^A e^{-t^2}\,dt \quad (\text{pair})$$

on, $e^{-t^2}t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists B \geq 0,\ \forall t \geq B$

$$0 \leq e^{-t^2}t^2 \leq 1$$

donc $(\forall t \geq B > 0)$: $e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$

$\Rightarrow$ pour tout $A \geq B$,

$$\int_B^A e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_B^A \frac{1}{t^2}\,dt}_{\substack{\text{CV qd } A\to\infty \\ \text{(critère de Riemann)}}}$$

$\Rightarrow \int_B^A e^{-t^2}\,dt$ CV aussi qd $A \to \infty$

donc $\lim\limits_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-t^2}\,dt$ existe (et est finie) : CV

Ex 3 : Soit

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

"sinus cardinal"

fonction $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$)

$\Downarrow$

continue en 0, pas de caractère impropre en 0

$\Rightarrow \exists \lim A \to \infty$ de $\int_{-A}^{A} \frac{\sin t}{t}\,dt$

$$= 2 \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\int_0^A = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

or,

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_1^A \frac{1}{t} \sin t\, dt$$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

$$= -\underbrace{\frac{\cos A}{A}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} 0} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

de plus: $\int_1^A \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt$ CV

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt \quad \text{CV aussi}$$

dans la limite de $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$ qd $A \to \infty$ existe

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est bien CV

2. Montrer de même que

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt \quad \text{CV}$$

En effet, on peut refaire le même calcul (ipp)

$$\int_1^A \frac{\cos 2t}{t}\, dt = \underbrace{\left[\frac{1}{t} \, \frac{\sin(2t)}{2} \right]_1^A}_{\underbrace{\frac{\sin 2A}{2A} - \frac{\sin 2}{2}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} -\frac{\sin 2}{2}}} - \underbrace{\int_1^A \left(-\frac{1}{t^2}\right) \frac{\sin 2t}{2}\, dt}_{\underbrace{\int_1^A \frac{\sin 2t}{2t^2}\, dt}_{(*)}}$$

et (*) possède une limite (qd $A \to \infty$)

puisque $\displaystyle\int_1^A \underbrace{\left|\frac{\sin 2t}{2t^2}\right|}_{\geq 0} dt$

$$\leq \int_1^A \frac{dt}{2t^2} \underset{\downarrow}{<} \infty \quad CV$$

critère de Riemann

$\left(\text{si } \displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin 2t}{2t^2}\right| dt \ CV, \int_1^\infty \frac{\sin 2t}{2t^2} dt \ CV \text{ aussi}\right)$

3. Montrons finalement que, par contre,

$$\int_{-\infty}^\infty \underbrace{\left|\frac{\sin t}{t}\right|}_{\geq 0} dt \quad DV \ (= \infty)$$

$$\int_{-A}^A \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \underset{\text{parité}}{=} 2 \int_0^A \frac{|\sin t|}{t} dt$$

On, $|\sin t| \in [0,1]$

$$\Rightarrow |\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt$$

Mais, $\displaystyle\int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt = \underbrace{\int_1^A \frac{dt}{2t}}_{\underset{A\to\infty}{\longrightarrow}\infty \text{ Riemann}} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos 2t}{2t}\,dt}_{\text{lim existe et est finie}}$

$$\underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} 2\int_0^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \infty$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ CV alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$$

$\Rightarrow$ intégrale "semi - CV"