Cd 10 - Equation de la chaleur

On cherche $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ tq

EDP
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Modélise l'évolution de la température dans un barreau métallique (infini : pas de CL)
$\leadsto$ EDP 1, 2 (MAM4)

<u>Exo 1</u>. Soient $\sigma > 0$ et

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

On note $\hat{G_\sigma}$ sa TF.

1.1. Mq $\hat{G_\sigma}$ est dérivable.

$$\hat{G_\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

: clairement, l'intégrande est dérivable partiellement en ξ,

i) $$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-2i\pi\xi x} \cdot G_\sigma(x) \right) = (-2i\pi x)\, e^{-2i\pi\xi x} \cdot G_\sigma(x)$$

et ii) $$\left| (-2i\pi x) \cdot \underbrace{\cancel{e^{-2i\pi\xi x}}}_{1} \cdot G_\sigma(x) \right| = 2\pi \left| x \underbrace{G_\sigma(x)}_{e^{-x^2/2\sigma^2}} \right| \underbrace{}_{\in L^1(\mathbb{R})}$$

: $\widehat{G_\sigma}$ dérivable (en tout ξ), et

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\text{ie } \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{--} \cdot G_\sigma \, dx \right. \\ &= \left. \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{--} \cdot G_\sigma \right) dx \right) \end{aligned} \right.$$

$$\widehat{G_\sigma}'(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(-2i\pi) \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot \underbrace{x\, e^{-x^2/2\sigma^2}}_{\simeq u'} dx$$

$\longrightarrow$ ipp

1.2. Mq $\hat{G}_\sigma$ vérifie une EDO, et en déduire $\hat{G}_\sigma$.

$$\hat{G}_\sigma'(\xi) = \frac{-2i\pi}{\cancel{\sigma}\cancel{\sqrt{2\pi}}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-2i\pi\xi x}}_{v} \cdot \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{u'} dx}_{} \quad (\xi \text{ fixé})$$

$$\underbrace{\cancel{\left[-\sigma^2 e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot e^{-2i\pi\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}}}_{0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (-2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} \cdot \sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}_{-2i\pi\xi\sigma^2 \cdot \hat{G}(\sigma) \cdot \cancel{\sigma}\cancel{\sqrt{2\pi}}}$$

$$= -4\pi^2\sigma^2\xi \cdot \hat{G}_\sigma(\xi).$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. EDO + Mi2) assure l'existence et l'unicité de solution maximale pour l'EDO :

$$\begin{cases} y'(\xi) = -4\pi^2\sigma^2\xi \cdot y(\xi) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(et, comme l'équation est linéaire, cette sol. est globale, ie définie sur tout $\mathbb{R}$). On sait que soit $y_0 = 0$ (et $y \equiv 0$), soit $y_0 \neq 0$ et $(\forall \xi \in \mathbb{R}) : y(\xi) \neq 0$ (cf. unicité). Dans le second cas, on a :

$$\frac{y'(\xi)}{y(\xi)} = -4\pi^2\sigma^2\xi \quad (\text{"séparation des variables"})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\xi} \frac{y'(s)}{y(s)}\,ds = \int_0^{\xi} (-4\pi^2\sigma^2 s)\,ds$$

$$\Rightarrow \ln|y(s)|\Big]_0^{\xi} = -2\pi^2\sigma^2\xi^2$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y(\xi)}{y(0)}\right| = -2\pi^2\sigma^2\xi^2 \Rightarrow y(\xi) = e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}\cdot y_0,\ \xi\in\mathbb{R}$$

$y(0) = y_0$

$\widehat{G_\sigma}(\xi) = y(\xi)$

sol. globale

si $y(\xi)$ de signe constant (soit >0, soit <0)

(inclut $y_0 = 0$)

?

<u>Rappel</u> : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy}_{\int_0^{2\pi}\big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr}_{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty}\big)d\theta = \pi} \Big)^{1/2} = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \hat{G}_\sigma(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overbrace{\frac{x^2}{2\sigma^2}}^{\geq 0}}\,dx \quad (= \|G_\sigma\|_1)$$

$$\underset{\substack{y=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \\ x=\varphi(y)=\sqrt{2}\sigma y \\ \varphi'(y)=\sqrt{2}\sigma}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \underbrace{|\varphi'(y)|}_{\sqrt{2}\sigma}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \;\boxed{= 1}$$

(densité de proba, loi Gaussienne)
↪ cf. PS

D'où $\hat{G}_\sigma(\xi) = e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$.

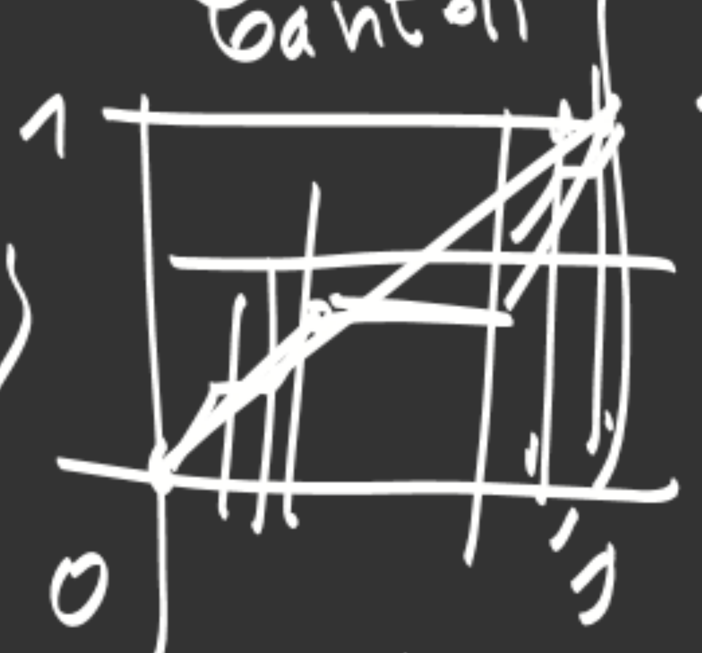
<u>Exo 2</u>. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$ tq

ie $g = f'$ (pp)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)\,dy$$ (= la primitive de g qui tend vers 0 en $-\infty$) ;

mq $\widehat{f'}(\xi) = (+2i\pi\xi)\hat{f}(\xi)$ (ipp).

Cantor



$f' = 0$

$f \neq \int f'$

Exo 3. Soit u, assez régulière, tq

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \; t>0, \; x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

3.1. Supposons $\underset{(t,\cdot)}{u}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (comme fonctions de x à $t>0$ fixé);

alors :
$$\begin{cases} \widehat{\dfrac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) - \widehat{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,\xi) = 0, \; \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

- $$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{e^{-2i\pi\xi x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}^{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2i\pi\xi x} \cdot u(t,x)\right)} dx$$

sous hypothèse de domination de $\frac{\partial u}{\partial t}$...

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot u(t,x)\, dx$$

$$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi)$$

- $$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,\xi) = \widehat{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(t,\xi) \overset{\text{exo 2}}{=} (-2i\pi\xi)^2\, \hat{u}(t,\xi)$$

3.2.

Fixons maintenant ξ ; on a une EDO (en t) sur $\hat{u}(\cdot,\xi)$:

fixé

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2 \cdot \hat{u}(t,\xi)\ ,\ t>0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{u}(\cdot,\xi)$ sol. de l'EDO $\begin{cases} y'(t) = \overbrace{-4\pi^2\xi^2}^{\text{cte (indép. } t)} \cdot y(t),\ t>0 \\ y(0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$ $(*)$

Or, $(*)$ possède une unique solution : $y(t) = e^{-4\pi^2\xi^2 t} \cdot \hat{u}_0(\xi)$

$$\Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t} \cdot \hat{u}_0(\xi) = \widehat{?_t} \cdot \hat{u}_0(\xi) = \widehat{?_t * u_0}(\xi)$$

3.3. Déterminer σ_t (qui dépend de t) tq

$$\hat{u}(t,\xi) = \widehat{G_{\sigma_t}} \cdot \hat{u}_0(\xi)$$

de sorte que $u(t,x) = G_{\sigma_t} * u_0(x)$.

On a d'après exo 1 :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+^*,\ \hat{G}_\sigma(\xi) = e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$$

Noyau de la chaleur

il faut choisir σ tq : $-4\cancel{\pi^2}\,\cancel{\xi^2}\,t = -2\cancel{\pi^2}\,\sigma^2\,\cancel{\xi^2}$

d'où $\sigma = \sqrt{2t}$ $(t>0)$

donc

$$G_{\sigma_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(x)\,dx$$

$u_0(t)$

$t \to 0^+$