MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

Exam CC no. 2

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (6 points)

1.1

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cos((x+1)/n) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, soit $f_n(x) = |x| \cos((x+1)/n) e^{-x^2}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x| e^{-x^2} =: f(x)$.

Par ailleurs $|f_n| \leq f$ sur $\mathbf{R}$. Comme

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{\infty} = 1,$$

on a $f \in L^1(\mathbf{R})$ (où on a employé la parité de f). Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

1.2

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{n\mathrm{d}x}{n+x^2}, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on note $f_n(x) = \frac{n}{n+x^2}\chi_{[0,n]}$. Comme $\frac{x^2}{n} \geq \frac{x^2}{n+1}$ on en déduit que

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}} \leq \frac{1}{1+\frac{x^2}{n+1}}.$$

Puis de $\chi_{[0,n]} \leq \chi_{[0,n+1]}$ on déduit que $f_n \leq f_{n+1}$ sur $\mathbf{R}_+$. Enfin, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ donc par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n\mathrm{d}x}{n+x^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}x = \infty.$$

1.3

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_e^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x^2\ln^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Pour tout $x \in [e,\infty[$, on note $f_n(x) = \frac{n\sin(x/n)}{x^2\ln^2 x}$. On remarque en premier lieu que pour to $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/n)}{x/n} = 1$ et $\frac{\sin(x/n)}{x/n} \leq 1$.

Donc pour tout $x \in [e,\infty[$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x\ln^2(x)} =: f(x)$ et $|f_n(x)| \leq f(x)$. Par ailleurs, $f \in L^1([e,\infty[)$, par exemple car c'est une intégrale de Bertrand convergente (ou se prouve par le calcul ci-dessous).

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_e^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int_e^\infty f(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^\infty = 1$$

Exercice 2 (5 points)

2.1

Montrer que la fonction

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie pour $t \in \mathbf{R}$.

Réponse. Pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in [0,\infty[$, on note $f(t,x) = \frac{\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ fixé, $f(t,x) \leq e^{-x} =: g(x)$. Or $g \in L^1(\mathbf{R}_+)$ donc $f(t,\cdot) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ pour tout t et $F(t)$ est bien définie.

2.2

Montrer que la fonction F est deux fois dérivable, et donner les expressions de F' et F''.

Réponse. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x > 0$, $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = -\frac{x\sin(tx)e^{-x}}{1+x^2}$ et $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq xe^{-x}$. Par croissance comparée, $x \mapsto xe^{-x}$ est encore de classe $L^1(\mathbf{R}_+)$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $F(t)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée

$$F'(t) = -\int_0^\infty \frac{x\sin(tx)e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le même argument s'applique pour F''. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = -\frac{x^2\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}$ et $\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x)\right| \leq x^2e^{-x}$. Par croissance comparée, $x \mapsto x^2e^{-x}$ est de classe $L^1(\mathbf{R}_+)$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $F'(t)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée

$$F''(t) = -\int_0^\infty \frac{x^2\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2.3

En déduire que F vérifie l'équation différentielle

$$F''(t) - F(t) = G(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

avec G une fonction dont on donnera une expression explicite.

Réponse. On additionne simplement les deux intégrales obtenues:

$$F''(t) - F(t) = -\int_0^\infty \frac{(1+x^2)\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \cos(tx)e^{-x}\,\mathrm{d}x = Re\left(\left[-\frac{e^{itx-x}}{it-1}\right]_0^\infty\right) = Re\left(\frac{1}{it-\right.$$

Exercice 3 (4 points)

3.1

Soient $f \in L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mathscr{B}, \mu)$, avec $1/p + 1/q = 1/r$ et p, q, r dans $[1, \infty[$. Montrer que fg appartient à $L^r(X, \mathscr{B}, \mu)$ et que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

[**Indication** : noter que $1/(p/r) + 1/(q/r) = 1$, et que f^r est dans $L^{p/r}$.]

Réponse. Par hypothèse, f^r est dans $L^{p/r}$ et g^r est dans $L^{q/r}$ (noter que p/r et q/r sont nécessairement supérieurs ou égaux à 1): comme $1/(p/r) + 1/(q/r) = 1$, on peut appliquer Hölder pour conclure que $f^r g^r$ est dans L^1 et que

$$\|f^r g^r\|_1 \leq \|f^r\|_{p/r} \|g^r\|_{q/r}$$

et donc que (prendre la puissance $1/r$ des deux membres)

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

3.2

Soient $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathscr{B}, \mu)$, ..., $f_n \in L^{p_n}(X, \mathscr{B}, \mu)$, avec $1/p_1 + \cdots + 1/p_n = 1/r$ et $p_1, \ldots, p_n$, r dans $[1, \infty[$. Montrer que $f_1 \cdots f_n$ appartient à $L^r(X, \mathscr{B}, \mu)$ et que

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Réponse. La relation est vraie pour $n = 2$ d'après la question précédente. Supposons qu'elle est vraie au rang $n \geq 2$, et montrons, pour conclure par récurrence, qu'elle est alors vraie au rang $n+1$. Soient $f_1, \ldots, f_{n+1}$ vérifiant les hypothèses indiquées pour $p_1, \ldots, p_{n+1}$ des réels dont la somme des inverses vaut $1/r$. Soit s tel quel $1/s$ vaut $1/p_1 + \cdots 1/p_n$; par hypothèse de récurrence, $f_1 \cdots f_n$ appartient à L^s, et la question précédente appliquée à ce produit et à f_{n+1} donne le résultat voulu puisque $1/s + 1/p_{n+1} = 1/r$.

Exercice 4 (5 points)

4.1

Soient $\beta > \alpha > 0$. Monter que l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \, \mathrm{d}x$$

est bien définie.

Réponse. L'intégrande est continu donc mesurable, et positif puisque $\alpha < \beta$: l'intégrale est donc bien définie.

4.2

Montrer que

$$I := \int_0^\infty (\int_\alpha^\beta e^{-tx} \, \mathrm{d}t) \, \mathrm{d}x.$$

Réponse. Pour tout x positif,

$$\int_\alpha^\beta e^{-tx} \, \mathrm{d}t = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}.$$

4.3

En déduire I.

Réponse. La fonction $(t, x) \mapsto e^{-tx}$ est mesurable et positive, donc Tonelli implique que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty (\int_\alpha^\beta e^{-tx} \, \mathrm{d}t) \, \mathrm{d}x, \\ &= \int_\alpha^\beta (\int_0^\infty e^{-tx} \, \mathrm{d}x) \, \mathrm{d}t, \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t, \\ &= \ln \beta - \ln \alpha. \end{aligned}$$