Td 5 - Intégrales à paramètre

Exo 1 : Soit $I(t) := \int_0^\infty \underbrace{e^{-tx}}_{\geq 0} dx$, $t > 0$

1.1. $t > 0 \Rightarrow \underset{\mathbb{R}_+}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto e^{-tx}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, \mu_L)$

$I(t)$ est donc bien défini (et $\in \mathbb{R}$) qd $t > 0$.

NB : $t = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \underset{\geq 0}{1} . dx = 1 . \mu_L([0, \infty[) = 1 . \infty = \infty$. $\Bigg\}$ $I : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ bien définie.

De plus, $I(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx$
$\uparrow$
$t>0$

$$= \left[\frac{e^{-tx}}{-t}\right]_0^\infty \quad \left(= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-tx}\,dx \ldots\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{t}$$

$$I'(t) = \frac{-1}{t^2} \ ; \ I''(t) = \frac{2}{t^3} \ ; \ I^{(3)} = \frac{-6}{t^4}$$

Mq, par récurrence, $I^{(n)}(t) = \dfrac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$

$$I(r) = \frac{1}{r}$$

La propriété est vraie au rang $n=0$

Mq : $I^{(n+1)}(r) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{r^{(n+2)}}$

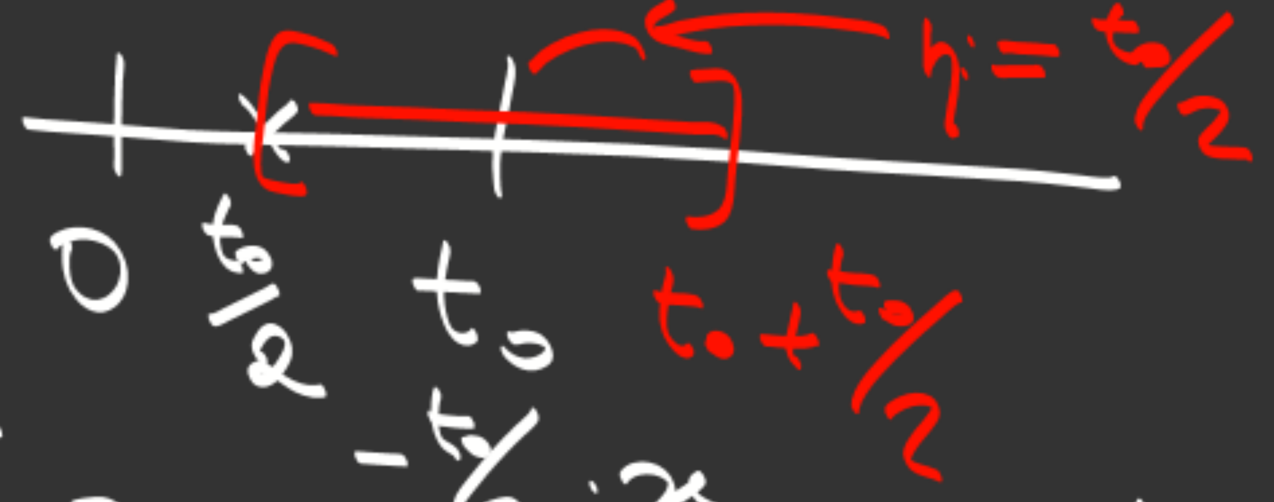
sous l'hypothèse que $I^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n (n!)}{r^{n+1}}$. Or, sous cette hypothèse,

$$I^{(n+1)} = I^{(n)'}$$

$$= (-1)^n n! \times \left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)' = (-1)^n . n! \times \frac{-(n+1)}{r^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{r^{n+2}}$$

1.3. Par ailleurs, $I(t) = \int_0^\infty f(t,x)\,dx$ avec $f(t,x) := e^{-tx}$, fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

L'intégrande étant mesurable et dérivable partiellement en t (cf. $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = e^{-tx}\cdot(-x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$), de sorte qu'il suffit de dominer localement cette dérivée :
soit $t_0>0$,



$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-x\, e^{-tx}\right| \le \underbrace{x\cdot e^{-\frac{t_0}{2}\cdot x}}_{\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)}$$

qd $t\in\overbrace{\left[t_0/2\,,\,3t_0/2\right]}^{[t_0-\eta,\,t_0+\eta]}$ et $x\geq 0$

Le th. de dérivabilité s'applique donc I dérivable en t_0

et $$I'(t_0) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty f(t,x)\,dx\Big|_{t=t_0} = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dx = \int_0^\infty (-x)\cdot e^{-t_0 x}\,dx$$

Ce résultat est vrai pour $t_0 > 0$ quelconque de sorte qu'on obtient :

$$(\forall t > 0) : I'(t) = \int_0^\infty (-x) e^{-tx} \, dx .$$

En appliquant itérativement le même raisonnement, on voit que

$$I^{(n)}(t) = \int_0^\infty (-x)^n e^{-tx} \, dx , \quad t > 0 .$$

1.4. On en déduit que

$$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\, dx = (-1)^n \overbrace{\int_0^\infty (-x)^n e^{-1 \cdot x}\, dx}^{I^{(n)}(t=1)}$$

$$= (-1)^n \cdot I^{(n)}(1)$$

$$\underset{1.2}{\uparrow}{=} \cancel{(-1)^n} \cdot \left. \frac{\cancel{(-1)^n} \cdot n!}{\cancel{t}^{n+1}} \right|_{t=1}$$

$$= n!$$

Exo 2.

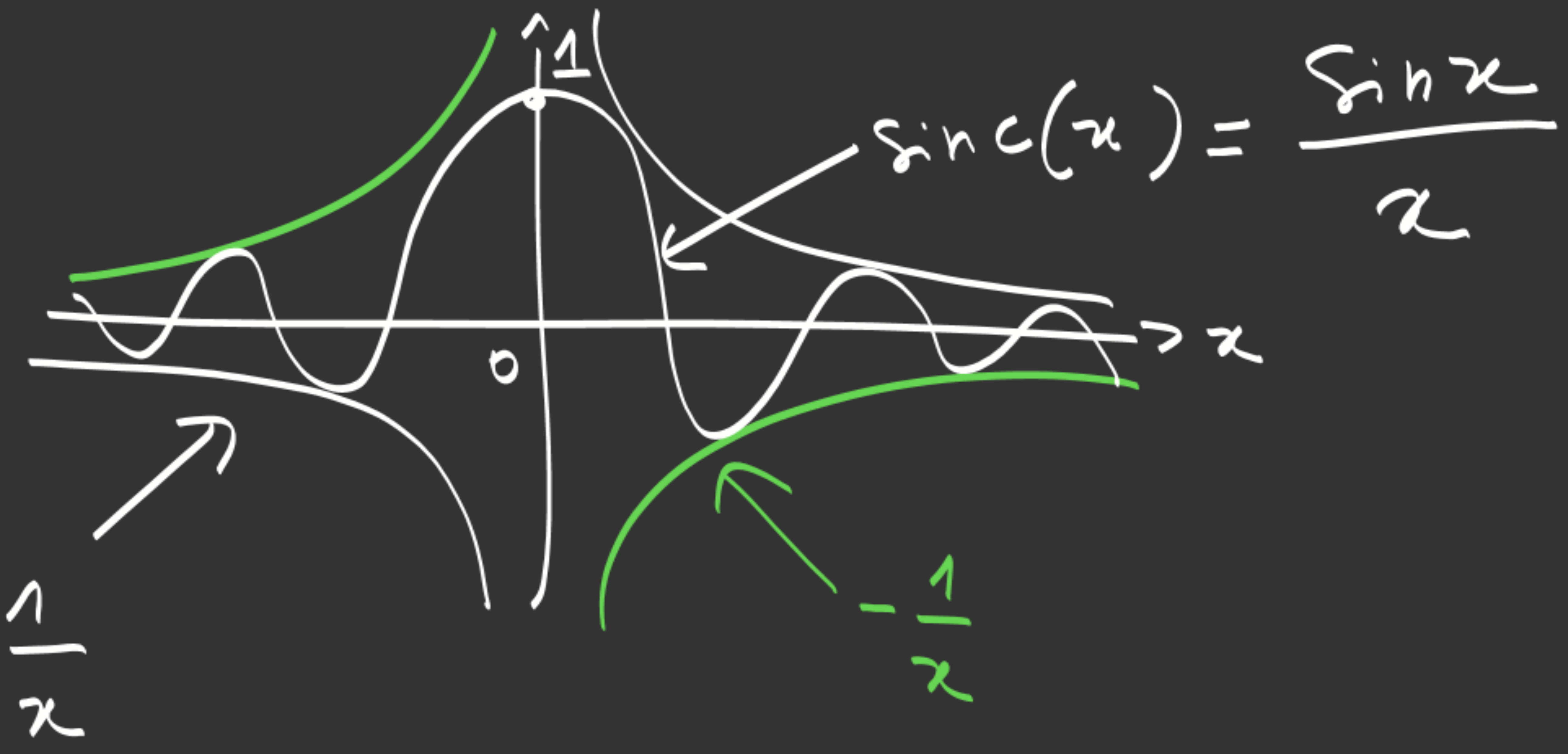
2.1. Soit $F(t) := \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x} dx$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, en général le signe de l'intégrande n'est pas constant, vérifions donc que l'application est intégrable. On,

si $t \neq 0$ (sinon trivial : $t=0 \Rightarrow \int_0^\infty |0| = 0 < \infty$!)

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x} \right| dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^\infty \left| t \cdot \left(\frac{\sin tx}{tx} \right) \cdot e^{-x} \right| dx \leq |t| \int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)} dx < \infty$$

$|\cdot| \leq 1$, cf. page suivante



On définit bien $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.2. Mq F est dérivable et calculer sa dérivée. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$;

on pose $F(t) = \int_0^{\infty} f(t,x)\,dx$ avec $f(t,x) := \frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x}$, $x > 0$, $t \in \mathbb{R}$

peu importe
$x = 0$, if. $\mu_L(\{0\}) = 0 \ldots$

En particulier, $x \mapsto \frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x}$ $(x>0)$ mesurable,

$t \mapsto \frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x}$ $(x>0)$ dérivable

et $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\cos tx}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot e^{-x}$ $(x>0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Or,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\cos(tx) \cdot e^{-x}\right| \leq \overbrace{e^{-x}}^{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)}, \ x>0,$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$ (donc pour $t \in [t_0-1, t_0+1]$...)

Donc F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int_0^\infty \cos(t_0 \cdot x) \cdot e^{-x}\,dx, \ t_0 \in \mathbb{R}.$$

2.3. On en déduit que, si $t \in \mathbb{R}$,

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{Re}\big(e^{itx} \cdot \underset{\in \mathbb{R}}{e^{-x}}\big)\, dx$$

$\alpha \in \mathbb{C}^*$

$$\int_a^b e^{\alpha t}\, dt = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right]_a^b$$

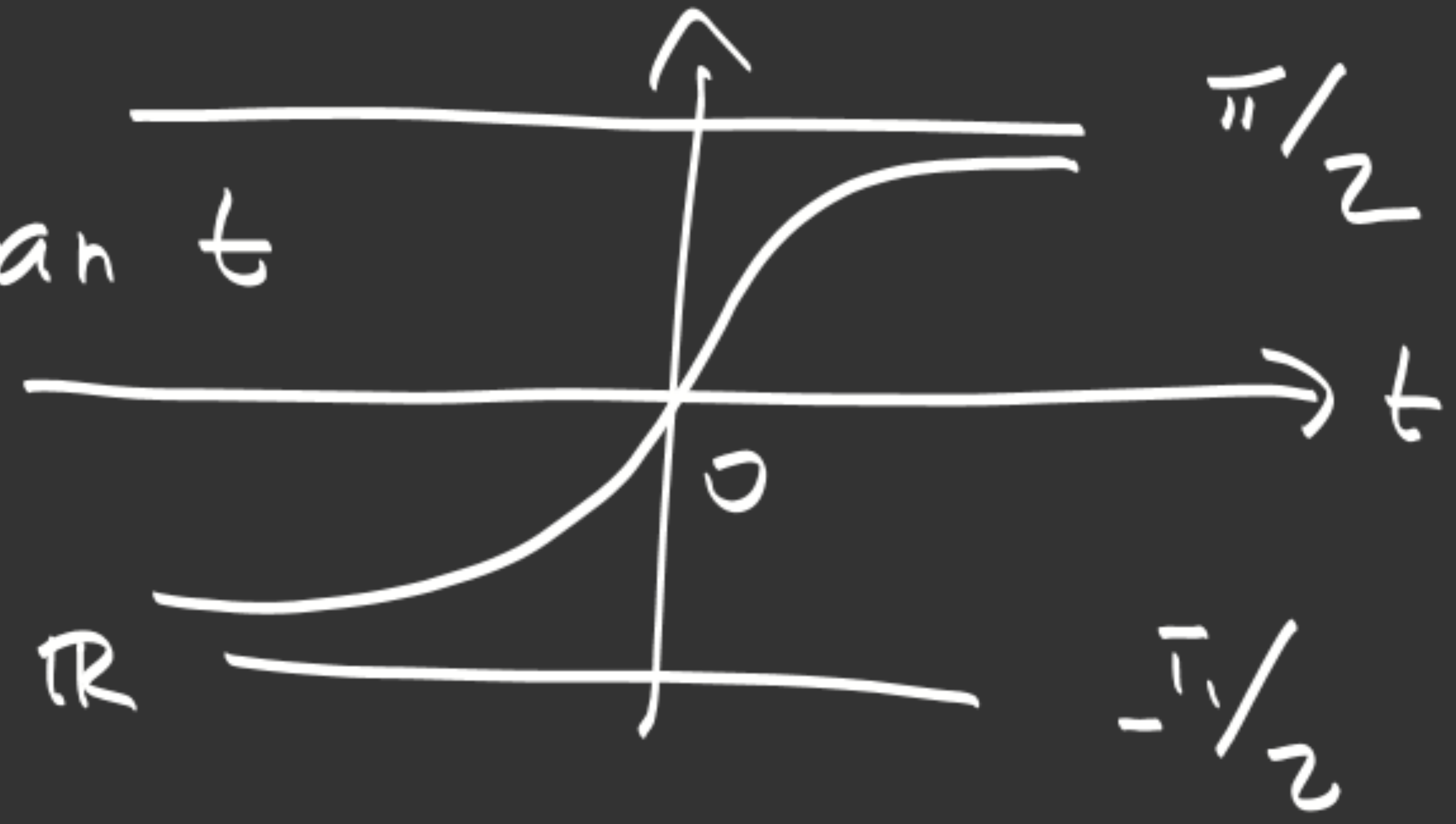
$$= \mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{\overbrace{(it-1)}^{\neq 0} x}\, dx$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{it-1} e^{(it-1)x}\right]_0^{\infty}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(0 - \frac{1}{it-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-1}{it-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-(it+1)}{-t^2-1}\right) = \frac{1}{t^2+1}$$

cf. $\left|e^{(it-1)x}\right| = \left|e^{itx} \cdot e^{-x}\right| = \cancel{\left|e^{itx}\right|} \cdot \left|e^{-x}\right| \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Donc $F'(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$



donc $F(t) = \arctan(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Or $F(0) = \arctan(0) + C$

$= 0 + C$ donc $C = F(0) = \displaystyle\int_0^\infty \overbrace{\frac{\sin tx}{x} \cdot e^{-x}}^{0} \, dx \Big|_{t=0}$

$= 0$

$\Rightarrow F(t) = \arctan(t).$

Exo 3. Soit $F(t) := \int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-x^2} dx, \ t \in \mathbb{R}$.

3.1. Clairement,

$$|\cos(tx) \cdot e^{-x^2}| \leq e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |\cos(tx) \cdot e^{-x^2}| \leq \infty \Rightarrow x \mapsto \cos(tx) \cdot e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+).$$

On définit bien ainsi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.2. Mq F est dérivable. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; clairement,

$x \longmapsto \cos(tx).e^{-x^2}$ mesurable (à $t \in \mathbb{R}$ fixé)

$t \longmapsto \cos(tx).e^{-x^2}$ dérivable (à $x \geq 0$ fixé)

et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -x \sin(tx).e^{-x^2}$ (avec $f(t,x) = \cos(tx).e^{-x^2}$)

De plus,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|x \sin(tx).e^{-x^2}\right| \leq x.e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+),\ x \geq 0,$$

et quel que soit $t \in \mathbb{R}$ (donc $\forall t \in [t_0-1, t_0+1]$!)

Donc F dérivable en t_0, arbitraire, et

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dx$$

$$= -\int_0^\infty \sin(t_0 x) .\, x\, e^{-x^2}\,dx.$$

3.3. En déduire que F vérifie l'EDO

$$y'(t) + \frac{t}{2} \cdot y(t) = 0.$$

On a $F'(t) = -\int_0^\infty \underbrace{\sin(tx)}_{u} .\, \underbrace{x e^{-x^2}}_{v'}\,dx$

$$= \underbrace{\cancel{\left[+\frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(tx) \right]_0^{\infty}}}_{0} + \int_0^{\infty} -\frac{t}{2} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx$$

$$u = \sin(tx)$$
$$u' = t\cos(tx)$$
$$v' = x e^{-x^2}$$
$$v = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$= -\frac{t}{2} F(t)$$

donc F est solution de $y'(t) + \frac{t}{2} \cdot y(t) = 0$

on sait que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)$ cf. TD 1

$$\Rightarrow \quad y(t) = A e^{-\frac{t^2}{4}}$$

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$