



Figure 1: PNS

**MAM3**

**Mathématiques de l'ingénieur.e 1**

**2024-25**

**TD 7 - Fubini**

**Exercice 1**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ . Soit  $f \in \mathcal{L}^1([a, b]^2)$ .

**1.1**

Montrer que les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left( \int_a^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_y^b f(x, y) \, dx \right) dy =: I.$$

**1.2**

On suppose de plus que, presque pour tout  $(x, y) \in [a, b]^2$ , on a  $f(y, x) = f(x, y)$ .  
Montrer que

$$I = \frac{1}{2} \int_{[a, b]^2} f(x, y) \, dx dy.$$

**Exercice 2**

Calculer de deux façons différentes

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)}$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2 - 1}.$$

### Exercice 3

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable et possédant des dérivées partielles croisées  $\partial^2 f / \partial x \partial y$  et  $\partial^2 f / \partial y \partial x$  continues.

#### 3.1

Soient  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , calculer

$$\int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \, dy \right) dx.$$

#### 3.2

À l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$\int_c^d \left( \int_a^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right) dx \right) dy = 0.$$

Conclure.

### Exercice 4

#### 4.1

Soit  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  une suite d'applications mesurables définies sur  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , espace mesuré  $\sigma$ -fini, telle que

$$\int_X \sum_n |f_n(x)| \, dx < \infty.$$

Montrer qu'on a

$$\int_X \sum_n f_n(x) \, dx = \sum_n \int_X f_n(x) \, dx.$$

## 4.2

Déterminer, si elle existe, la valeur de

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 x} \, dx.$$