Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

Exam CC no. 2

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (6 points)

1.1

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cos((x+1)/n) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

1.2

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{n \mathrm{d}x}{n+x^2}, \quad n \geq 1.$$

1.3

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_e^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x^2\ln^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Exercice 2 (5 points)

2.1

Montrer que la fonction

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie pour $t \in \mathbf{R}$.

2.2

Montrer que la fonction F est deux fois dérivable, et donner les expressions de F' et F''.

2.3

En déduire que F vérifie l'équation différentielle

$$F''(t) - F(t) = G(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

avec G une fonction dont on donnera une expression explicite.

Exercice 3 (4 points)

3.1

Soient $f \in L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mathscr{B}, \mu)$, avec $1/p + 1/q = 1/r$ et p, q, r dans $]0, \infty[$, $r \geq 1$. Montrer que fg appartient à $L^r(X, \mathscr{B}, \mu)$ et que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

[Indication : noter que $1/(p/r) + 1/(q/r) = 1$, et que f^r est dans $L^{p/r}$.]

3.2

Soient $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathscr{B}, \mu)$, …, $f_n \in L^{p_n}(X, \mathscr{B}, \mu)$, avec $1/p_1 + \cdots + 1/p_n = 1/r$ et $p_1, \ldots, p_n$, r dans $]0, \infty[$, $r \geq 1$. Montrer que $f_1 \cdots f_n$ appartient à $L^r(X, \mathscr{B}, \mu)$ et que

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Exercice 4 (5 points)

4.1

Soient $\beta > \alpha > 0$. Monter que l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \, \mathrm{d}x$$

est bien définie.

4.2

Montrer que

$$I := \int_0^\infty \Big(\int_\alpha^\beta e^{-tx} \, \mathrm{d}t\Big) \, \mathrm{d}x.$$

4.3

En déduire I.