Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

TD 7 - Fubini

Exercice 1

Soient a et b deux réels, $a < b$. Soit $f \in \mathscr{L}^1([a,b]^2)$.

1.1

Montrer que les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =: I.$$

1.2

On suppose de plus que, presque pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on a $f(y,x) = f(x,y)$. Montrer que

$$I = \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} f(x,y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 2

Calculer de deux façons différentes

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{x^2-1}.$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dérivable et possédant des dérivées partielles croisées $\partial^2 f/\partial x \partial y$ et $\partial^2 f/\partial y \partial x$ continues.

3.1

Soient $a \leq b$ et $c \leq d$, calculer

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

3.2

À l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$\int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x(x,y)} \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0.$$

Conclure.

Exercice 4

4.1

Soit $f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ une suite d'applications mesurables définies sur $(X, \mathscr{B}, \mu)$, espace mesuré σ-fini, telle que

$$\int_X \sum_n |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Montrer qu'on a

$$\int_X \sum_n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.2

Déterminer, si elle existe, la valeur de

$$\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-n^2 x}\,\mathrm{d}x.$$