## MAM3 # Mathématiques de l'ingénieur.e 1 # 2024-25

# TD 10 - Équation de la chaleur

## Exo 1

Soit

$$G_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

et soit $\widehat{G}_\sigma$ sa transformée de Fourier.

### 1.1

Montrer que $\widehat{G}_\sigma$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

### 1.2

En déduire que $\widehat{G}$_$\sigma$ est solution une équation différentielle linéaire et la résoudre en s'appuyant sur le problème de Cauchy de condition initiale $\widehat{G}_\sigma(0)$ (que l'on calculera).

## Exo 2

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)\ \mathrm{d}s$$

avec $g \in L^1(\mathbf{R})$. On définit alors et on note $f' := g$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\widehat{f}(\xi).$$

## Exo 3

On considère une fonction qui à tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbf{R}$, associe $u(t, x) \in \mathbf{R}$. On suppose que pour $t \geq 0$, $u(t, \cdot), \partial_x u(t, \cdot), \partial_{xx} u(t, \cdot)$ sont toutes dans $L^1(\mathbf{R})$ (au sens de l'exercice 2). On cherche à décrire un tel $u$ vérifiant l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), \quad (t, x) \in ]0, +\infty[\times \mathbf{R},$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

### 3.1

Pour tout $t > 0$ fixé, exprimer $\widehat{\partial_{xx} u(t, \cdot)}$ en fonction de $\widehat{u(t, \cdot)}$.

### 3.2

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$ satisfait une équation différentielle linéaire. En déduire la valeur de $\widehat{u}(t, \xi)$ en fonction de $\widehat{u}_0(\xi)$.

### 3.3

En déduire $u(t, x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. (Indication : on rappelle la formule $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \hat{g}$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.)