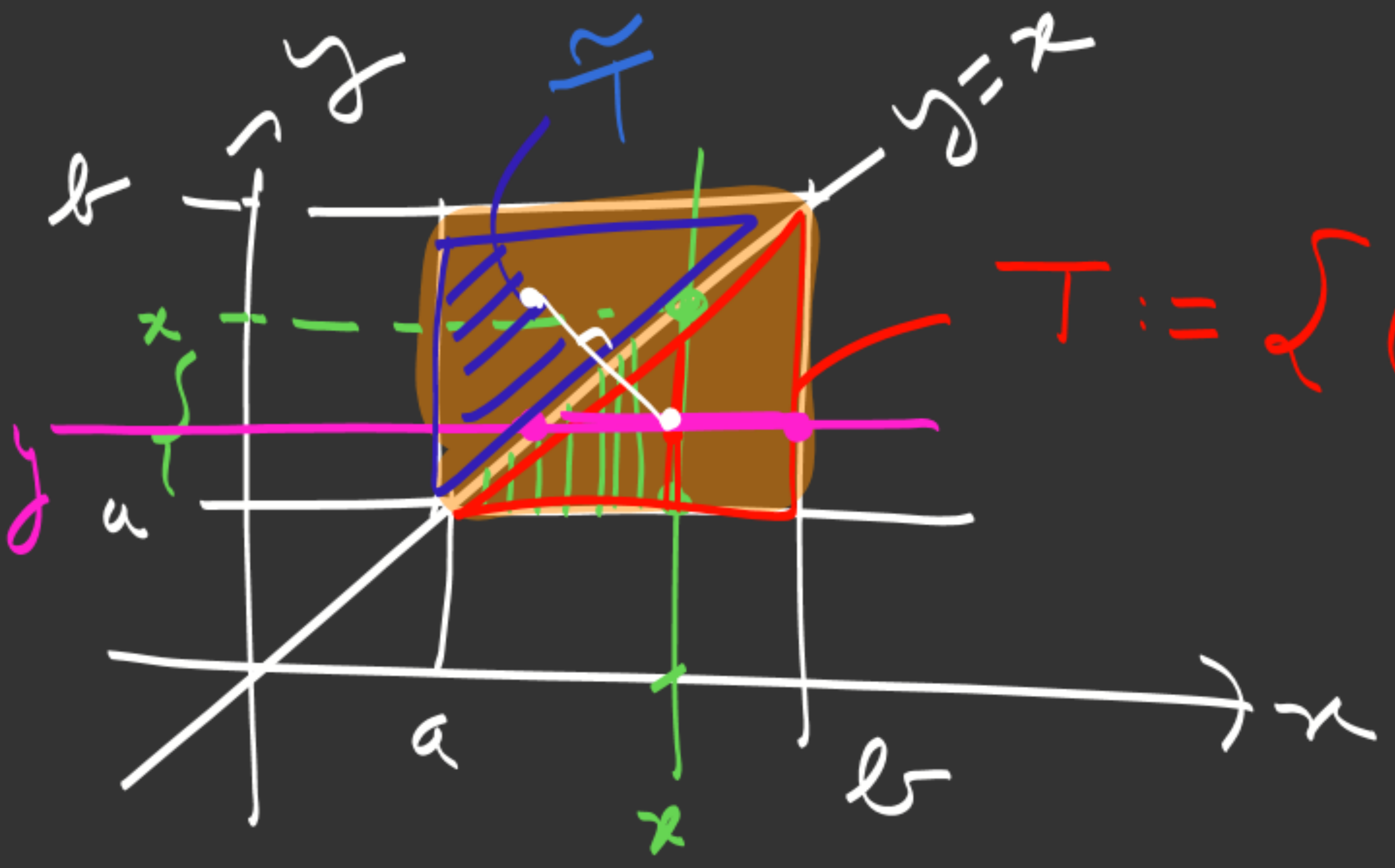
# Td 7 - Fubini

**Exo 1.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f \in L^1([a,b]^2)$.

1.1. Mq les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left( \int_a^x f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_y^b f(x,y)\,dx \right) dy =: I.$$

(avec $(x,y) \in [a,b]^2$)




$T := \{ (x,y) \in [a,b]^2 \,/\, y \leq x \}$

Comme $\int_T |f| \, dx\, dy \leq \int_{[a,b]^2} |f| \, dx\, dy < \infty$,

Fubini s'applique et

$$\int_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_a^x f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left( \int_y^b f(x,y)\,dx \right) dy \quad (= I)$$

1.2. On suppose que $f(y,x) = f(x,y)$, $(x,y) \in [a,b]^2$.

Mq $I = \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{d\mu_L \otimes d\mu_L}$

On a $\int_{[a,b]^2} f\,dx\,dy = \overbrace{\int_T f\,dx\,dy}^{I} + \overbrace{\int_{\tilde{T}} f\,dx\,dy}^{= I\,?}$ et $\overbrace{\mu_L \otimes \mu_L}^{\mu_L^2}(T \cap \tilde{T}) = 0$

où $\tilde{T} := \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid x \leq y\}$, cf. $[a,b]^2 = T \cup \tilde{T}$

Considérons le changement de variables $\varphi : T \longrightarrow \tilde{T}$ ;
$(w,z) \longmapsto (z,w)$

on a :

$$\int_{\tilde{T}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_T f(\overbrace{\underbrace{\varphi(w,z)}_{z,w}}^{(x,y)=(z,w)\in\tilde{T}}) \cdot |\det \varphi'(w,z)|\,dw\,dz \quad \in T$$

$\varphi$ : $(x,y)=\varphi(w,z)=(z,w)=\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi_1(w,z) \\ \varphi_2(w,z) \end{bmatrix}$

ie $x=z$ et $y=w$

$$= \int_T f(z,w)\cdot|\cancel{-1}|\,dw\,dz$$

avec $\varphi'(w,z)=\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix}(w,z)$

$$\overset{f \text{ sym.}}{=} \int_T f(w,z)\,dw\,dz = I.$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \varphi'(w,z) = -1$

<u>Exo 3</u>. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dérivable tq

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues.

3.1. Soient $a \leq b$, $c \leq d$ quatre réels, calculer

$$\int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, dy \right) dx$$

f. Mi 2

<u>Rappel</u> : $f$ dérivable $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et $\frac{\partial f}{\partial x}$ dérivable par rapport à $y$

(sa dérivée partielle est $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable par rapport à $x$ (et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$)

$$\int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy = \int_c^d \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right]_{x=a}^{x=b} dy$$

$$= \int_c^d \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \right] dy$$

$$= \left[ f(b,y) \right]_{y=c}^{y=d} - \left[ f(a,y) \right]_{y=c}^{y=d} = \underline{f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)}.$$

De même $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,dy\right)dx = f(b,d)-f(b,c)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -f(a,d)+f(a,c).$

Au préalable, on a existence de chacune de ces deux intégrales puisque :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right| dx\,dy \leq \underbrace{\overbrace{\max_{[a,b]\times[c,d]}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|}^{<\infty,\ f.\ \text{fonction continue sur compact}}\cdot(b-a)(d-c)}_{<\infty}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\in L^1([a,b]\times[c,d])$ et que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx \right) dy$$

en particulier cette intégrale est bien définie

$$= \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dy \right) dx$$

De même avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, également supposée continue.

3.2. En déduire que

on applique Fubini à cette partie

$$\int_c^d \left( \int_a^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx \right) dy = 0$$

C'est clair puisque

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\right) dy \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy\right) dx \overset{3.1}{=} \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\right) dy$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$ par ex. avec $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0$$ (idem si $<0$...)

Par continuité, $\exists a < b, c < d \in \mathbb{R}$ tq,

$$(w,z) \in [a,b] \times [c,d] \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)(w,z) > 0$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]\times[c,d]} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx\, dy > 0.$$

<u>Rq.</u> : Th. de Schwarz : $f$ <u>deux fois</u> dérivable $\Rightarrow$ les dérivées partielles existent et les dérivées partielles croisées sont égales.

Exo 2

calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x \; dx}{x^2-1}$