Td 8 - Transformée de Fourier

Exo 1.

1.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, mq $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}}(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ (p.p.)

$$\hat{\bar{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\, \bar{f}(x)\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(-\xi)x} f(x)\, dx}$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(-\xi)x} f(x)\,dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$$

(cf. $f(x) = Re(f(x)) + i\,Im(f(x))$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f\,dx := \int_{\mathbb{R}} Re(f)\,dx + i \int_{\mathbb{R}} Im(f)\,dx\ )$$

1.2. Supposons f réelle ($f(x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$) et paire.

Mq $\hat{f}$ est aussi réelle et paire et que

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi\xi x)\cdot f(x)\,dx\ .\quad \text{Soit } \xi \in \mathbb{R},$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\cdot \overbrace{f(x)}^{\in \mathbb{R}}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_-} \_\_\_ + \int_{\mathbb{R}_+} \_\_\_\_\_\_$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(y) = -y \\ \varphi'(y) = -1 \\ |\det \varphi'(y)| = |-1| = 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ y=-x}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2i\pi\xi(-y)}\cdot f(-y)\cdot \overbrace{|\underset{1}{\cancel{\det\varphi'}}(y)|\cdot dy}^{dx} + \int_{\mathbb{R}_+} \_\_\_\_\_\_$$

(i.e. $x = \varphi(y)$, φ bij. $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$, $\varphi(y) = -y\ (=x)$)

$$= \int_{\mathbb{R}_+} e^{2i\pi\xi y} \overbrace{f(-y)}^{= f(y),\ \text{cf. } f \text{ paire}} dy + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \big(\underbrace{e^{2i\pi\xi x} + e^{-2i\pi\xi x}}_{2\cos(2\pi\xi x)}\big) \cdot f(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty \cos(2\pi\xi x) \cdot f(x)\, dx$$, valeur qui de plus est réelle si f est réelle.

Rq. : cette expression est valable dès que f est paire.

(*)

1.3. Montrer de même que si f est impaire on a

$$\hat{f}(\xi) = -2i \int_0^{\infty} \sin(2\pi\xi x) \cdot f(x)\, dx$$

(ce qui implique que $\hat{f}$ est aussi impaire, et que si f réelle alors $\hat{f}$ est imaginaire pure).

(*) On a $\hat{f}(-\xi) = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi(\cancel{-}\xi)x) \cdot f(x)\, dx = \hat{f}(\xi)$: parité.

f est impaire.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot f(x)\,dx$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}_-} \underline{\qquad}\right) + \int_{\mathbb{R}_+} \underline{\qquad}$$

$y = -x$ $\quad \| $

$$\overset{x}{f(\varphi(y))}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2i\pi\xi(-y)} f(-y) \cdot |\det \overset{1}{\cancel{\varphi'(y)}}|\,dy = -\int_{\mathbb{R}_+} e^{2i\pi\xi y} f(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(-e^{2i\pi\xi y} + e^{-2i\pi\xi y}\right) f(y)\, dy$$

$$= -2i \int_{\mathbb{R}_+} \sin(2\pi\xi y)\, f(y)\, dy.$$

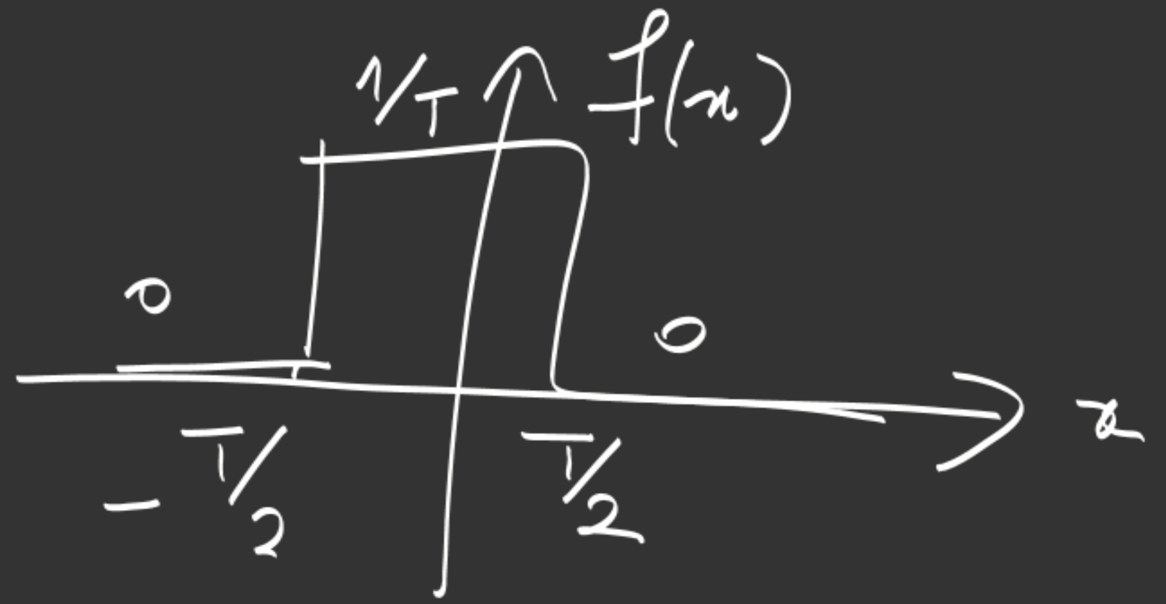
<u>Rq.</u> : redémontrer le 1.2 et le 1.3 à l'aide du 1.1 (cf. f réelle $\Leftrightarrow f = \bar{f}$ ...)

<u>Exo 2.</u>

2.1. Calculer la TF de $f = \frac{1}{T} \chi_{[-T/2,\, T/2]} \in L^1(\mathbb{R})$. $T > 0$

Comme f est paire et réelle, 1.2 $\Rightarrow \hat{f}$ réelle, paire et

$$\hat f(\xi) = 2\int_0^\infty \cos(2\pi\xi x)\, f(x)\,dx$$



$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos(2\pi\xi x)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{T}\left[\frac{\sin(2\pi\xi x)}{\cancel{2}\pi\xi}\right]_0^{T/2} \quad \text{si } \xi\neq 0 \qquad \left(= \frac{T}{T} = 1 \text{ si } \xi=0\right)$$

$$= \frac{\sin(\pi\xi T)}{\pi\xi T}$$

$$= \operatorname{sinc}(\pi\xi T)$$ (inclut le cas $\xi=0$, cf. $\operatorname{sinc}(y) := \begin{cases} (\sin y)/y & \text{si } y\neq 0 \\ 1 & \text{si } y=0 \end{cases}$)

2.2. TF de $f = e^{-ax}\chi_{[0,\infty[}$, $a > 0$

$\left(a > 0 \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}),\ f.\ \int_0^\infty \underbrace{e^{-ax}}_{\geq 0} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}\Big]_0^\infty = \frac{1}{a} < \infty \right)$

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{\overbrace{-2i\pi\xi x - ax}^{-x(2i\pi\xi + a)}} dx$$

$\left(a > 0 \Rightarrow 2i\pi\xi + a \neq 0 \right)$

$$= \frac{1}{-(2i\pi\xi + a)} e^{-x(2i\pi\xi + a)}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i\pi\xi + a} = \frac{a - 2i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

2.3. TF de $f = e^{-a|x|}$, $a > 0$

$(a > 0 \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}))$

$$\hat{f}(\xi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cf. } f \text{ paire}}}{=} 2 \int_0^\infty \cos(-2\pi \xi x) \cdot e^{-a\overbrace{|x|}^{x}} dx$$

$$= 2 \, \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{-2i\pi\xi x} \cdot e^{-ax} \, dx \right)$$

$$\underset{\text{cf. } 2.2}{=} 2 \, \mathrm{Re}\left(\frac{a - 2i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}.$$

Exo 3.

3.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $g(x) := f(\overbrace{ax+b}^{\text{similitude}})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Mq $\hat{g}(\xi) = \dfrac{e^{2i\pi \frac{b}{a}\xi}}{|a|} \hat{f}(\xi/a)$.

On a $g \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \cdot f(\overbrace{ax+b}^{y})\, dx \qquad \text{ie } x = \frac{y-b}{a} \quad (a \neq 0, \text{bijection}) =: \varphi(y), \ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)} \cdot f(y) \cdot |\det \varphi'(y)| \cdot dy$$

$$= \frac{e^{2i\pi \frac{b}{a}\xi}}{|a|} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi \frac{\xi}{a} y} \cdot f(y)\,dy}_{\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)}$$

Rq. : de même,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi \frac{y-b}{a}} \cdot f(y) \cdot \frac{dy}{a} = \left(-\frac{1}{a}\right) \int^{\infty} e^{--} \cdot f(y)\,dy$$

$\left(-\frac{1}{a}\right) = 1/|a|$

$y = ax + b$

$dy = a\,dx$

si $a < 0$, $\varphi(\infty) = -\infty$

$\varphi(-\infty) = \infty$

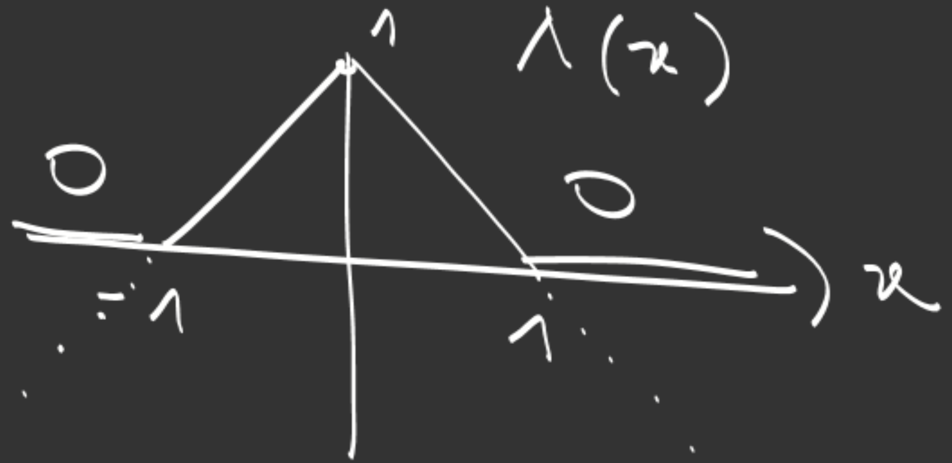
$\varphi(y) = \frac{y-b}{a}$

$$= \frac{1}{|a|} e^{+2i\pi \frac{b}{a}\xi} \cdot \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

__Rappel__ : $x = \varphi(y)$, φ $\mathcal{C}^1$ difféo. (ie φ bij. tq φ et φ^{-1} $\mathcal{C}^1$)
$\varphi : Y \longrightarrow X$, alors :

$$\int_X f(x)\, dx = \int_Y f(\varphi(y)) \cdot |\det \varphi'(y)|\, dy.$$

3.2. TF de



$\Lambda(x) = (1-|x|) \cdot \chi_{[-1,1]}$

$\left(\Lambda \in L^1(\mathbb{R}),\ f.\ \int_{\mathbb{R}} |\Lambda|\, dx = 1 < \infty\right)$

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^1 \underbrace{\cos(2\pi\xi x)}_{v'} \underbrace{(1-\overset{x}{\overbrace{|x|}})}_{u} \, dx$$

$\underline{\underline{\text{ones}}}$ $u = 1-x$ $\quad v' = \cos(2\pi\xi x)$

$u' = -1$ $\quad v = \dfrac{\sin(2\pi\xi x)}{2\pi\xi}$

$\underline{\underline{\text{donc}}}$ $$\hat{f}(\xi) = 2\left(\cancel{\left[\frac{1-x}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)\right]_0^1} - \int_0^1 -\frac{\sin(2\pi\xi x)}{2\pi\xi}\,dx\right)$$

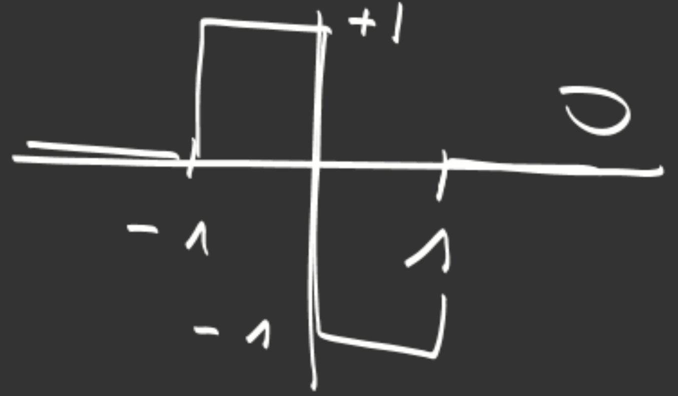
$$= \left[-2\frac{\cos(2\pi\xi x)}{(2\pi\xi)^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{-2\cos(2\pi\xi) + 2}{(2\pi\xi)^2} = \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2} = \frac{\cancel{2}\sin^2(\pi\xi)}{\cancel{2}\pi^2\xi^2} = \operatorname{sinc}^2(\pi\xi)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} g(y)\,dy$$

<u>Rq</u> : $\Lambda(x) = \underbrace{\Lambda(0)}_{1} + \int_0^x g(y)\,dy \quad (g = \Lambda' \text{ p.p.})$

avec g :



, $g \in L^1(\mathbb{R})$

et TF de g connu car CL de deux créneaux translatés (avec $T=1$) : se calcule avec 2.1 + 3.1.

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{\Lambda'}(\xi) = (2i\pi\xi)\cdot\hat{\Lambda}(\xi) \underset{\xi\neq 0}{\Longrightarrow} \hat{\Lambda}(\xi) = \frac{1}{2i\pi\xi}\,\hat{g}(\xi)$$