Td 7 - Fubini

Exo 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f \in L^1([a,b]^2)$.

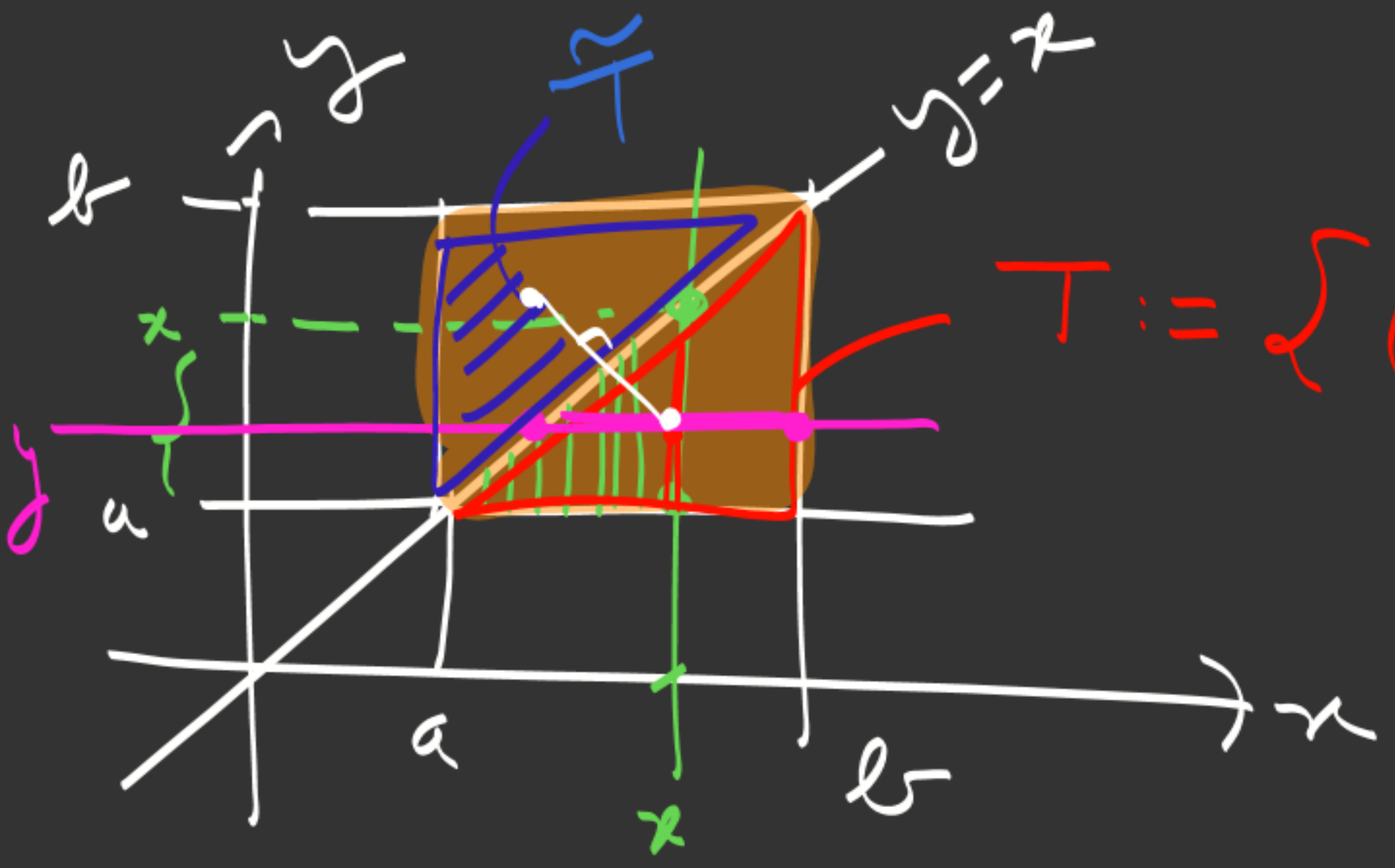
1.1. Mq les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\, dx \right) dy =: I.$$

(avec $(x,y) \in [a,b]^2$)

On a
$$\int_a^b \left(\int_a^x |f(x,y)| \, dy \right) dx$$
$$\leq \int_a^b \left(\int_a^b |f(x,y)| \, dy \right) dx$$
$$= \int_{[a,b]\times[a,b]} \underbrace{|f(x,y)|}_{\geq 0 \text{ (Tonelli, ie "Fubini } \geq 0\text{")}} \, dx \, dy < \infty \quad \text{(par hypothèse)}$$

Donc, Fubini s'applique
et justifie l'existence de l'intégrale ci-dessous :



$$T := \{ (x,y) \in [a,b]^2 \,/\, y \leq x \}$$

Comme $\displaystyle\int_T |f| \,dx\,dy \leq \int_{[a,b]^2} |f| \,dx\,dy < \infty$,

Fubini s'applique et

$$\int_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\,dx \right) dy \quad (= I)$$

1.2. On suppose que $f(y,x) = f(x,y)$, $(x,y) \in [a,b]^2$.

Mq $I = \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{d\mu_L \otimes d\mu_L}$

On a $\int_{[a,b]^2} f\,dx\,dy = \overbrace{\int_T f\,dx\,dy}^{I} + \overbrace{\int_{\tilde{T}} f\,dx\,dy}^{=I\,?}$ et $\overbrace{\mu_L \otimes \mu_L}^{\mu_L^2}(T \cap \tilde{T}) = 0$

où $\tilde{T} := \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid x \leq y\}$, cf. $[a,b]^2 = T \cup \tilde{T}$

Considérons le changement de variables $\varphi : T \longrightarrow \tilde{T}$;
$(w,z) \longmapsto (z,w)$

on a : $\displaystyle\int_{\tilde T} f(x,y)\,dx\,dy = \int_T f\Big(\overbrace{\underbrace{\varphi((w,z))}_{z,w}}^{(x,y)\,=(z,w)\in\tilde T}\Big)\cdot|\det\varphi'(w,z)|\,dw\,dz$ $\in \tilde T$

$f.\ (x,y) = \varphi(w,z) = (z,w) = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(w,z) \\ \varphi_2(w,z) \end{bmatrix}$

ie $x = z$ et $y = w$

$$= \int_T f(z,w)\cdot|\cancel{-1}|\,dw\,dz$$

avec $\varphi'(w,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix}(w,z)$ $\quad f$ sym. $\rightarrow$ $= \displaystyle\int_T f(w,z)\,dw\,dz = I.$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\varphi'(w,z) = -1$

<u>Exo 3</u>. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dérivable tq

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues.

3.1. Soient $a \leq b$, $c \leq d$ quatre réels, calculer

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, dy \right) dx$$

<u>Rappel</u> : f dérivable $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et $\frac{\partial f}{\partial x}$ dérivable par rapport à y

f. Mi 2

(sa dérivée partielle est $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable par rapport à x (et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$)

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx \right) dy = \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right]_{x=a}^{x=b} dy$$

$$= \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \right] dy$$

$$= \left[f(b,y) \right]_{y=c}^{y=d} - \left[f(a,y) \right]_{y=c}^{y=d} = \underline{f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)}.$$

De même $\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right) dx = f(b,d) - f(b,c)$
$- f(a,d) + f(a,c).$

Au préalable, on a existence de chacune de ces deux intégrales puisque :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right| dx\, dy \leq \underbrace{\overbrace{\max_{[a,b]\times[c,d]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|}^{< \infty,\ f.\ \text{fonction continue sur compact}} \cdot (b-a)(d-c)}_{< \infty}$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L^1([a,b]\times[c,d])$ et que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx \right) dy$$

en particulier cette intégrale est bien définie

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dy \right) dx$$

De même avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, également supposée continue.

3.2. En déduire que

$$\int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx \right) dy = 0$$

on applique Fubini à cette partie

C'est clair puisque

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\right) dy$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy\right) dx \overset{3.1}{=} \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\right) dy$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$ par ex. avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0$ (idem si < 0...)

Par continuité, $\exists a \overset{<}{,} b, c \overset{<}{,} d \in \mathbb{R}$ tq,

$$(w, z) \in [a,b] \times [c,d] \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)(w, z) > 0$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b] \times [c,d]} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx\,dy > 0.$$

<u>Rq.</u> : Th. de Schwarz : f <u>deux fois</u> dérivable $\Rightarrow$ les dérivées partielles existent et les dérivées partielles croisées sont égales.

Exo 2

calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2-1}$