Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

TD 1 - Intégrales généralisées

Exercice 1

Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes et en donner la valeur dans le cas où elles sont convergentes :

$$I_1 := \int_0^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad I_2 := \int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t, \quad I_3 := \int_2^{\infty} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$J_1 := \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t, \quad J_2 := \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, \mathrm{d}t, \quad J_3 := \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 3

On considère l'intégrale généralisée

$$K := \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

3.1

Montrer que K est une intégrale convergente.

3.2

Montrer également la convergence de

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

3.3

En déduire que l'intégrale ci-dessous est divergente, et conclure :

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t.$$

Indication. Vérifier que, pour tout t, $0 \leq \sin^2 t = (1-\cos 2t)/2 \leq |\sin t|$.