Figure 1: PNS

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2024-25

Exam CC no. 1

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (4 points)

Montrer que l'intégrale impropre ci-dessous est convergente et déterminer sa valeur :

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 2 (4 points)

Calculer

$$\int_D \frac{x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y + x^2}$$

où $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 3\}$.

Exercice 3 (6 points)

On considère la famille de parties de $[0,3]$ suivante :

$$\mathscr{A} := \{[0,1],[0,2]\}.$$

3.1

Montrer que les tribus engendrées sur $[0,3]$ par $\mathscr{A}$ et

$$\tilde{\mathscr{A}} := \{[0,1],]1,2]\}$$

sont égales.

Réponse. Comme $]1,2] = [0,2] \cap \complement[0,1] \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$, on a $\tilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{B}(\mathscr{A})$, donc $\mathscr{B}(\tilde{\mathscr{A}}) \subset \mathscr{B}(\mathscr{A})$. Réciproquement, $[0,2] = [0,1] \cup]1,2] \in \mathscr{B}(\tilde{\mathscr{A}})$, donc $\mathscr{B}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}(\tilde{\mathscr{A}})$.

3.2

Donner, sans le justifier, le cardinal de la tribu $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ engendrée sur $[0,3]$ par $\mathscr{A}$.

Réponse. Le cardinal est $2^3 = 8$. (D'après ce qui précède, la tribu est engendrée par la partition $\{[0,1],]1,2],]2,3]\}$ de $[0,3]$.)

3.3

Soit $(X,\mathscr{B})$ un espace mesurable, et soit $f : X \to [0,3]$ telle que $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}([0,2])$ appartiennent tous deux à $\mathscr{B}$. Que peut-on dire de f ?

Réponse. Par hypothèse, les images réciproques de parties de $\mathscr{A}$ sont mesurables, donc l'application est mesurable de $(X,\mathscr{B})$ dans $[0,3]$ muni de la tribu engendrée par $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (6 points)

4.1

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cos(x/n)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Ayant posé

$$f_n(x) := x\cos(x/n)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 1,$$

on voit que chaque $f_n(x)$ tend vers xe^{-x^2} (convergence simple) quand n tend vers l'infini et que

$$|f_n(x)| \leq |x|e^{-x^2}$$

dont le second membre est une application intégrable. Par CV dominée, la limite vaut donc (intégrande impair)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

4.2

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2(x/n)}, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Ayant posé

$$f_n(x) := \frac{e^{-x}\sin x\,\chi_{|[0,n]}(x)}{1+\sin^2(x/n)}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 1,$$

on voit que chaque $f_n(x)$ tend vers $e^{-x}\sin x$ (convergence simple) quand n tend vers l'infini et que

$$|f_n(x)| \leq e^{-x}$$

dont le second membre est une application intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par CV dominée, la limite vaut donc

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot$$

4.3

Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite

$$\int_0^n \frac{n\,\mathrm{d}x}{n(1+\cos^2 x)+1}, \quad n \geq 1.$$

Réponse. Ayant posé

$$f_n(x) := \frac{1}{1+\cos^2 x + 1/n}\chi_{|[0,n]}(x), \quad x \geq 0, \quad n \geq 1,$$

on voit que cette suite de fonctions mesurables et positives est croissante, et que chaque $f_n(x)$ tend vers $1/(1+\cos^2 x)$ quand n tend vers l'infini. Par CV monotone, la limite est donc $+\infty$ puisque

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \geq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2} = \infty.$$