

MOMENTO LINEAL, ENERGIA CINETICA Y SU CONSERVACION

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2010

Índice general

1. Momento lineal, energía cinética y su conservación	1
1.1. Introducción	1
1.2. Sistemas de referencia	1
1.3. Concepto de partícula	3
1.4. Vector posición (\mathbf{r})	3
1.5. Vector desplazamiento ($\Delta\mathbf{r}$)	4
1.6. Vector velocidad (\mathbf{v})	5
1.6.1. Vector velocidad media ($\bar{\mathbf{v}}$)	5
1.6.2. Vector velocidad instantánea (\mathbf{v})	6
1.6.3. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	10
1.7. Momento lineal o cantidad de movimiento (\mathbf{p})	11
1.7.1. Conservación del momento lineal en una dimensión	12
1.8. Movimiento en un plano	14
1.8.1. Vector posición en dos dimensiones (\mathbf{r})	14
1.8.2. Vector desplazamiento en dos dimensiones ($\Delta\mathbf{r}$)	15
1.8.3. Vector velocidad en dos dimensiones (\mathbf{v})	16
1.8.4. Vector velocidad media en dos dimensiones ($\bar{\mathbf{v}}$)	16
1.8.5. Vector velocidad instantánea en dos dimensiones (\mathbf{v})	18
1.9. Momento lineal o cantidad de movimiento en dos dimensiones (\mathbf{p})	19
1.9.1. Conservación del momento lineal en dos dimensiones	20
1.9.2. Concepto de impulso (\mathbf{I})	21
1.10. Concepto de energía cinética E_k	22
1.11. Colisiones	23
1.12. ENUNCIADOS	26

Momento lineal, energía cinética y su conservación

Competencias

En esta unidad se busca que el estudiante

- Infiera el concepto de partícula.
- Identifique y defina las cantidades físicas relacionadas con la definición del vector momento lineal.
- Distinga entre un sistema aislado y un sistema no aislado.
- Analice situaciones físicas en las que se conserva el momento lineal.
- Defina y analice el concepto del escalar energía cinética, relacionándolo con el concepto del vector momento lineal.
- Defina el concepto de colisión.
- Distinga entre choque y colisión.
- Analice diferentes tipos de colisiones.

CONCEPTOS BASICOS DE LA UNIDAD

En esta unidad, se definirán los siguientes conceptos: Sistema de referencia, partícula, vector posición (\mathbf{r}), vector desplazamiento ($\Delta\mathbf{r}$), vector velocidad (\mathbf{v}), masa (m), vector momento lineal (\mathbf{p}), sistema y sistema aislado, energía cinética (E_k).

1.1. Introducción

El concepto de momento lineal o cantidad de movimiento, es de gran importancia en la física, ya que se presentan muchas situaciones reales en las que el momento lineal total de un sistema se conserva, tanto a nivel microscópico como a nivel macroscópico. Esto da lugar al **principio de conservación del momento lineal**, que por ser una regla que no tiene excepción, se aplica en diferentes áreas de la física.

1.2. Sistemas de referencia

La frase *traer el cuerpo A que se encuentra a una distancia de 2 m*, es una frase incompleta, ya que como se ilustra en la figura 1.1, puede haber muchos cuerpos con una separación de 2 m. Esto lleva a la pregunta: ¿2 m a partir de qué o respecto a quién? Lo anterior muestra la necesidad de especificar un punto u observador de referencia respecto al cual se miden los 2 m. Por ello es más correcto decir: "Traer el cuerpo A que se encuentra a una distancia de 2 m respecto al observador B".

La frase anterior, aunque es menos ambigua, tampoco está completa ya que hay un conjunto muy grande de puntos ubicados a una distancia de 2 m respecto al observador B. Al unir este conjunto de puntos se obtiene una esfera de radio 2 m (espacio tridimensional), y una circunferencia de radio 2 m (espacio bidimensional)

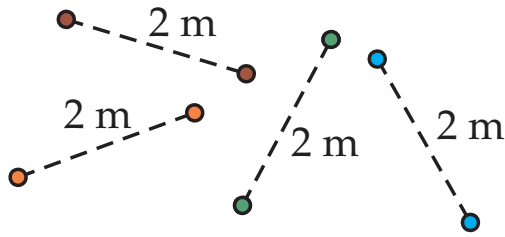


Figura 1.1: Cuerpos separados entre sí por una distancia de 2 m.

como se muestra en la figura 1.2 para el caso de dos dimensiones.

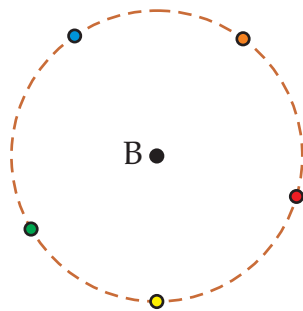


Figura 1.2: Cuerpos a una distancia de 2 m respecto a B.

Para definir con toda claridad la posición del cuerpo, se puede hacer la afirmación: *Traer el cuerpo A que se encuentra a una distancia de 2 m respecto a un observador B, de tal manera que la recta que une a B con A coincide con el eje x , tomado horizontalmente.* Esto equivale a decir que se ha adicionado un sistema de coordenadas unidimensional al observador B, como se muestra en la figura 1.3, donde lo que realmente se ha definido es un sistema de referencia, que consiste en un observador al que se le ha asignado o ligado un sistema de coordenadas en una dimensión.

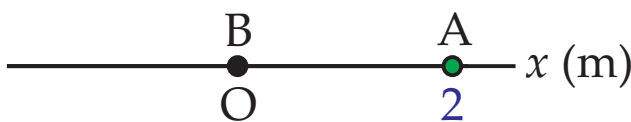


Figura 1.3: Posición de A respecto a B.

Por lo anterior, se puede concluir que para conocer con certeza la posición de un cuerpo es indispensable definir un punto de referen-

cia, esto es, un sistema de referencia, ya que de lo contrario no tendría sentido la ubicación del cuerpo en consideración. Como se indica más adelante, para dar una descripción completa del movimiento de un cuerpo, se debe disponer de un cronómetro o reloj con el fin de poder conocer los instantes de tiempo en los que ocupa las diferentes posiciones sobre el eje x .

Lo discutido anteriormente sólo es válido para el observador B, ya que si se cambia de observador, o lo que es equivalente, de sistema de referencia, necesariamente la posición del cuerpo sería completamente diferente.

De esta forma, el movimiento de un cuerpo puede definirse como un cambio continuo de su posición respecto a otro cuerpo, es decir, el movimiento de un cuerpo dado sólo puede expresarse en función de un sistema de referencia. Además, el movimiento del cuerpo A, respecto al cuerpo B, puede ser muy diferente al movimiento del cuerpo A respecto a otro cuerpo C.

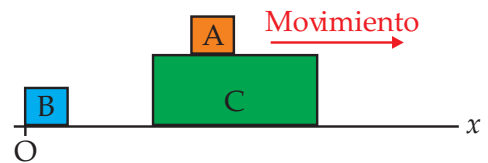


Figura 1.4: A y C se mueven respecto a B.

Suponga que un auto y su conductor, en reposo entre sí, se mueven sobre una pista recta hacia la derecha. Esta situación real, se modelará de tal forma que en la figura 1.4, el conductor es el cuerpo A, el auto el cuerpo C y un poste fijo al lado de la vía es el cuerpo B.

Los cuerpos A y C en reposo uno respecto al otro, se encuentran en movimiento hacia la derecha respecto al cuerpo B, como en la figura 1.4. Pero una situación diferente se presenta cuando se toma un sistema de referencia con origen en el cuerpo C, como se indica en la figura 1.5.

En este caso, el cuerpo A está en reposo respecto al cuerpo C y el cuerpo B en movimiento hacia la izquierda respecto al cuerpo C.

De acuerdo con lo anterior, cuando se quiere analizar el estado de reposo o de movimiento

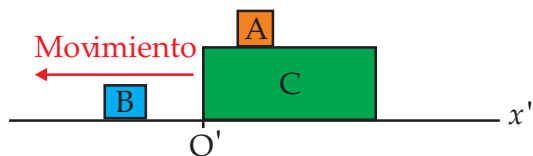


Figura 1.5: *B se mueve respecto a C, A no se mueve respecto a C.*

de un cuerpo, es necesario definir con toda claridad cuál es el sistema de referencia a utilizar, ya que como en la situación de la figura 1.4, el movimiento de A y C es hacia la derecha respecto al cuerpo B, mientras que para la situación de la figura 1.5, A está en reposo y B en movimiento hacia la izquierda respecto al cuerpo C.

Para obtener información completa sobre la forma como cambia la posición de un cuerpo respecto a otro, es necesario medir tiempos, o sea, que el observador debe disponer de un reloj o cronómetro, además del sistema de coordenadas.

De la situación anterior también se puede concluir que reposo y movimiento son conceptos relativos, ya que ambos dependen del sistema de referencia en consideración. Si un cuerpo está en movimiento respecto a algunos sistemas de referencia, simultáneamente puede estar en reposo respecto a otros sistemas de referencia, esto es, el movimiento es relativo.

En lo que sigue, se supone que se tiene un sistema de referencia unidimensional bien definido. Los sistemas de referencia que se emplearán en adelante, se supone que están en reposo respecto a la tierra. Estos sistemas reciben el nombre de *sistemas de referencia inerciales*. Posteriormente, se define de forma más concisa este tipo de sistemas de referencia, donde también se incluyen otros sistemas de referencia, que aunque estén en movimiento respecto a la tierra, cumplen la condición de ser inerciales.

Necesariamente, cuando un cuerpo se mueve en línea recta respecto a la tierra, bien sea sobre ella o a una altura determinada dentro de la atmósfera terrestre, estará sometido a los efectos del aire. Esta situación se percibe cuando se viaja rectilíneamente en un auto con las ventanillas abiertas o cuando se deja caer verticalmente

una hoja de papel. En ambos casos los cuerpos tienen un movimiento respecto al sistema de referencia aire.

Por ahora, no se consideran los efectos del aire sobre el movimiento de los cuerpos. El análisis de esta situación se hace más adelante.

1.3. Concepto de partícula

Para ilustrar el concepto de partícula se considera la siguiente situación: Un bloque desliza o se traslada sobre una superficie horizontal sin cambiar su orientación ni su forma geométrica, es decir, se mueve como un todo de una posición a otra. En este caso, como se indica en la figura 1.6, los puntos A y B, pertenecientes al bloque, se mueven la misma distancia d .

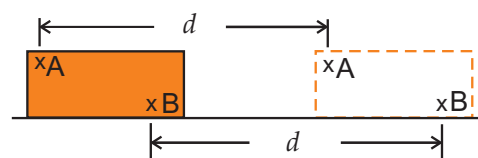


Figura 1.6: *Traslación pura de un cuerpo.*

Aunque sólo se han considerado los puntos A y B, es cierto que todos los puntos del bloque se mueven la misma distancia d .

Esto permite analizar el movimiento de solo un punto del bloque, ya que el comportamiento de él es idéntico al comportamiento de todos los demás puntos. Cuando es posible hacer la simplificación anterior, se dice que el cuerpo se ha reducido al *modelo de una partícula*. Posteriormente, se dará una definición más precisa de este concepto.

En esta unidad se considera sólo el movimiento de traslación de los cuerpos a lo largo de una línea recta; por ello el movimiento de los cuerpos se describe mediante el modelo de partícula.

1.4. Vector posición (\mathbf{r})

Para el caso de una dimensión, un cuerpo tratado bajo el modelo de partícula, se mueve a

lo largo de un camino recto, también conocido como trayectoria rectilínea. La posición de la partícula, en un instante determinado y respecto al origen del sistema de referencia mostrado en la figura 1.7, está dada por el vector posición \mathbf{r} trazado desde el origen del sistema de referencia hasta la posición donde se encuentre la partícula.

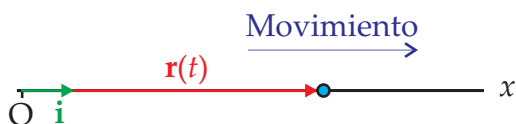


Figura 1.7: Vector posición \mathbf{r} de la partícula.

En este caso el vector posición se expresa en la forma $\mathbf{r} = x \mathbf{i}$, donde su magnitud está dada por

$$r = x \quad (1.1)$$

La forma de la expresión dada por la ecuación (1.1) es válida en el caso de un sistema de referencia unidimensional.

En la figura 1.7 se observa que el vector posición \mathbf{r} varía con el tiempo en magnitud, mientras la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria rectilínea.

Ejemplo 1.1.

El vector posición de una partícula que se mueve sobre el eje x , está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50$ s la partícula pasa por el punto A. Determine la posición de la partícula en dicho instante.

Solución

Reemplazando $t_A = 2.50$ s en la expresión dada, se encuentra que el vector posición, cuando la partícula pasa por el punto A, está dado por

$$\mathbf{r}_A = (-0.50 \text{ m})\mathbf{i}.$$

Como en una dimensión el vector posición se expresa en la forma $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, al comparar con la igualdad anterior se tiene que

$$x_A = -0.50 \text{ m},$$

es la coordenada de la partícula cuando pasa por el punto A.

El siguiente diagrama es una representación gráfica del resultado obtenido.



Ejercicio 1.1.

El vector posición de una partícula que se mueve sobre el x , está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i}$ donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50$ s la partícula pasa por el punto A. Determine la posición de la partícula en dicho instante. Muestre en un diagrama el resultado obtenido.

1.5. Vector desplazamiento ($\Delta \mathbf{r}$)

Como se indica en la figura 1.8, se considera una partícula que en el instante t_A pasa por el punto A, definido por el vector posición \mathbf{r}_A . Si en un cierto tiempo posterior t_B ($t_B > t_A$) la partícula pasa por el punto B, definido mediante el vector posición \mathbf{r}_B , el *vector desplazamiento*, que describe el cambio de posición de la partícula conforme se mueve de A a B, es dado por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (x_B - x_A)\mathbf{i}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

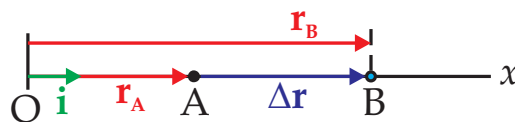


Figura 1.8: Vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ entre A y B.

Ejemplo 1.2.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i}$ se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

Solución

Al reemplazar $t_A = 2.50$ s y $t_B = 4.00$ s en la expresión dada, se encuentra que los vectores posición de la partícula, en componentes rectangulares, respectivamente

están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= (-0.50 \text{ m})\mathbf{i}, \\ \mathbf{r}_B &= (1.00 \text{ m})\mathbf{i}. \end{aligned}$$

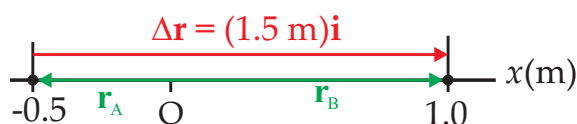
Ahora, utilizando la ecuación (1.2), para este caso se tiene que el vector desplazamiento, entre A y B, en componentes rectangulares está dado por

$$\Delta \mathbf{r} = (1.50 \text{ m})\mathbf{i}.$$

Por consiguiente, la magnitud del vector desplazamiento está dada por

$$\Delta r = 1.5 \text{ m},$$

En el diagrama siguiente se muestra, el vector desplazamiento.



Ejercicio 1.2.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50 \text{ s}$. Si en el tiempo $t_B = 4.00 \text{ s}$ pasa por el punto B, calcule el vector desplazamiento de la partícula entre A y B.

1.6. Vector velocidad (v)

Cuando la posición de una partícula respecto a un observador, cambia al transcurrir el tiempo, se dice que la partícula ha adquirido una velocidad respecto a dicho observador. En general, la velocidad de una partícula se define como la rapidez con la cual cambia el vector posición de un cuerpo al transcurrir el tiempo.

1.6.1. Vector velocidad media ($\bar{\mathbf{v}}$)

De acuerdo con la figura 1.9, se considera una partícula que en el instante t_A pasa por el punto A, determinado por el vector posición \mathbf{r}_A . Si en un tiempo posterior t_B ($t_B > t_A$) la partícula pasa por el punto B, determinado por el vector

posición \mathbf{r}_B , la *velocidad media* de la partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_B - t_A$, se define como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo correspondiente, es decir

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &\equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{t_B - t_A} \\ &= \frac{(x_B - x_A)\mathbf{i}}{t_B - t_A} \\ &= \bar{v}_x \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

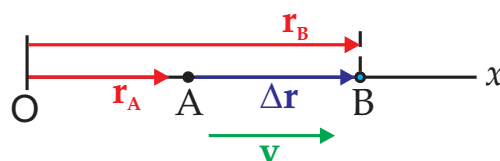


Figura 1.9: Vector velocidad media entre A y B.

Dimensiones y unidades del vector velocidad media

De acuerdo con la ecuación (1.3), las dimensiones del vector velocidad media y en general de la velocidad, son LT^{-1} . Por consiguiente, las unidades son m s^{-1} en el sistema SI, cm s^{-1} en el sistema gaussiano, m s^{-1} en el sistema Inglés; y en general, cualquier unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo, tal como km h^{-1} .

La definición (1.3) muestra que la velocidad media, $\bar{\mathbf{v}}$, es un vector ya que se obtiene al dividir el vector $\Delta \mathbf{r}$ entre el escalar Δt , por lo tanto, la velocidad media incluye tanto magnitud como dirección. Donde su magnitud está dada por $|\Delta \mathbf{r} / \Delta t|$ y su dirección por la del vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$. Esta cantidad es una velocidad media, ya que la expresión no dice cómo fue el movimiento entre A y B. El movimiento pudo haber sido continuo o variable.

La siguiente es una situación en la que el vector velocidad media es nulo. En la figura 1.10, un auto parte del punto A y pasando por el punto B regresa al punto A, luego de un tiempo Δt . En este caso, la velocidad media es cero ya que el desplazamiento de la partícula es cero, aunque la distancia recorrida es diferente de cero.

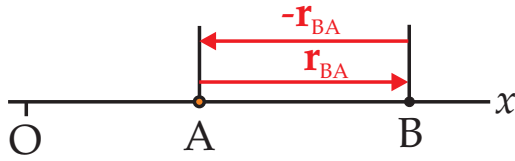


Figura 1.10: Vector desplazamiento nulo.

Ejemplo 1.3.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, determine la magnitud y dirección de la velocidad media entre A y B.

Solución

Obteniendo el vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ y sabiendo que $\Delta t = 1.5$ s, mediante la ecuación (1.3), se encuentra que la velocidad media en componentes rectangulares está dada por

$$\bar{\mathbf{v}} = (1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i}.$$

Para este caso se encuentra que la magnitud del vector velocidad media es

$$\bar{v} = 1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Se observa que el vector desplazamiento y el vector velocidad media son paralelos, como se esperaba.

Ejercicio 1.3.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i}$, con \mathbf{r} en m y t en s, se encuentra en el punto A en el instante t_A . Si en el tiempo t_B pasa por el punto B, demuestre que la velocidad media cuando la partícula pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = (1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i}$.

Ejercicio 1.4.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, calcule el vector desplazamiento entre A y B.

Ejemplo 1.4.

La velocidad media cuando una partícula

pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = -(t_B + t_A)\mathbf{i}$. Obtenga la magnitud de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.1.

Solución

En la tabla 1.1 se muestran los valores obtenidos para la magnitud (\bar{v}) del vector velocidad media, en diferentes intervalos de tiempo (Δt) con $t_B = 3.0$ s.

Tabla 1.1

$t_A(\text{s})$	$t_B(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$\bar{v}(\text{m/s})$
2.980000	3.0	0.020000	5.980000
2.990000	3.0	0.010000	5.990000
2.995000	3.0	0.005000	5.995000
2.998000	3.0	0.002000	5.998000
2.999000	3.0	0.001000	5.999000
2.999500	3.0	0.000500	5.999500
2.999800	3.0	0.000200	5.999800
2.999900	3.0	0.000100	5.999900
2.999990	3.0	0.000010	5.999990
2.999995	3.0	0.000005	5.999995

Pregunta

¿Qué puede concluir al observar los valores de las dos últimas columnas de la tabla 1.1?

Ejercicio 1.5.

Para una partícula, el vector posición en función del tiempo está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. a) Si la partícula pasa por el punto A en el instante t_A y por el punto B en el instante t_B , halle el vector velocidad media. b) Obtenga la magnitud de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.1.

1.6.2. Vector velocidad instantánea (\mathbf{v})

Es la velocidad de una partícula en un instante dado cualquiera. O también, *la velocidad respecto a determinado sistema de referencia, que en el caso de*

una dimensión puede variar sólo en magnitud, mientras el sentido de movimiento no cambie.

Para el movimiento de una partícula, representado en la figura 1.11, ¿cómo se puede determinar su velocidad en el punto A?

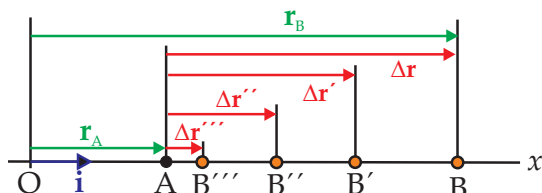


Figura 1.11: Vector velocidad instantánea.

Al considerar las posiciones intermedias de la partícula en t_2, t_2', t_2'', t_2''' , determinadas por los vectores posición $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'', \mathbf{r}_2'''$, se observa que los vectores desplazamiento $\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}', \Delta \mathbf{r}'', \Delta \mathbf{r}'''$, cambian en magnitud.

Igualmente, los intervalos de tiempo correspondientes $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta t' = t_2' - t_1, \Delta t'' = t_2'' - t_1, \Delta t''' = t_2''' - t_1$, cada vez se hacen más pequeños.

Si se continúa este proceso haciendo que B se aproxime al punto A, el vector desplazamiento se hace cada vez más pequeño hasta que tiende a un valor límite. Este valor límite de $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ se conoce como *velocidad instantánea* en el punto A, o sea, la velocidad de la partícula en el instante de tiempo t_A .

Si $\Delta \mathbf{r}$ es el desplazamiento en un pequeño intervalo de tiempo Δt , a partir de un tiempo t_0 , la velocidad en un tiempo posterior t , es el valor al que tiende $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ cuando tanto $\Delta \mathbf{r}$ como Δt , tienden a cero, es decir,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) no es más que la definición de derivada, esto es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.5)$$

De la ecuación (1.5), se concluye que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria seguida por la partícula, ya que el desplazamiento $d\mathbf{r}$ es paralelo a ella. La magnitud de

la velocidad se llama rapidez y es igual a

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|. \quad (1.6)$$

Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt} \mathbf{i} \\ &= v_x \mathbf{i} \\ &= v\mathbf{i}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición del vector velocidad instantánea, se tiene que sus dimensiones y unidades son las mismas del vector velocidad media.

En adelante, siempre que se hable de velocidad, se hace referencia a la velocidad instantánea.

Como, en este caso, la trayectoria rectilínea de la partícula coincide con el eje de coordenadas x , la velocidad es un vector cuya magnitud está dada por la ecuación (1.6) y cuya dirección coincide con la del movimiento. Así, la velocidad \mathbf{v} estará dirigida en el sentido del vector unitario \mathbf{i} si $dx/dt > 0$ y en el sentido opuesto de \mathbf{i} si $dx/dt < 0$. O sea, el signo de dx/dt indica el sentido de movimiento, como se muestra en la figura 1.12.

En síntesis, de acuerdo con lo anterior, se tiene que el signo de la velocidad está dado por el sistema de referencia empleado.

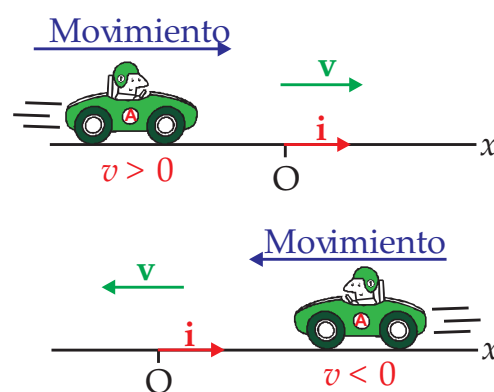


Figura 1.12: El signo de v indica el sentido de movimiento.

Partiendo de la definición del vector velocidad, es posible conocer el vector posición de

una partícula si se conoce la forma como varía el vector velocidad con el tiempo.

Mediante la ecuación (1.5) y sabiendo que en el instante t_0 la partícula se encuentra en la posición \mathbf{r}_0 , se encuentra que la posición en el instante t está dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt. \quad (1.7)$$

Mientras no se conozca la forma como varía el vector velocidad ($\mathbf{v}(t)$) con el tiempo, no es posible resolver la integral de la ecuación (1.7).

Para movimiento a lo largo del eje x , esto es en una dimensión, la expresión dada por la ecuación (1.7) adquiere la forma

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt, \quad (1.8)$$

que como se sabe, es posible resolver la integral si se conoce la forma funcional de $v(t)$.

Un caso particular se presenta cuando el vector velocidad permanece constante en magnitud y dirección. Cuando ello ocurre, las ecuaciones (1.7) y (1.8), respectivamente, se transforman en

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0), \quad (1.9)$$

$$x = x_0 + v(t - t_0), \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) corresponden a un movimiento conocido como movimiento rectilíneo uniforme, ya que al no cambiar la dirección de la velocidad, la trayectoria es rectilínea y al no cambiar la magnitud de la velocidad su rapidez es constante.

Ejemplo 1.5.

El vector posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x , está dado por $\mathbf{r}(t) = -(t^2 - 15)\mathbf{i}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula $t = 3$ s.

Solución

Empleando la ecuación (1.5) se tiene que la velocidad en cualquier instante de tiempo t está dada por

$$\mathbf{v} = -2t\mathbf{i}.$$

Reemplazando $t = 3$ s en la expresión para \mathbf{v} , se tiene que el vector velocidad está dado por

$$\mathbf{v} = -(6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i}.$$

Pregunta

Compare este resultado con los valores de la velocidad media mostrados en la tabla 1.1 del ejemplo 1.4. ¿Qué puede concluir?

Ejercicio 1.6.

El vector posición de una partícula que se mueve sobre el eje x , está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i}$ donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula en el instante $t = 3$ s. Compare el resultado con lo obtenido en el ejercicio 1.4.

Ejemplo 1.6.

Si la velocidad de una partícula está dada por $\mathbf{v} = -2t\mathbf{i}$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t , sabiendo que partió de una posición en la cual $\mathbf{r}_0 = (15 \text{ m})\mathbf{i}$ en $t_0 = 0$.

Solución

Reemplazando los vectores \mathbf{r}_0 y \mathbf{v} en la ecuación (1.8), se encuentra que al integrar, evaluar y simplificar, el vector posición de partícula está dado por

$$\mathbf{r} = -(t^2 - 15)\mathbf{i},$$

De este resultado, se puede concluir que si se conoce el vector posición de una partícula, en función del tiempo, es posible conocer el vector velocidad y si se conoce el vector velocidad, en función del tiempo, se puede conocer el vector posición de la partícula (recuerde que la integración es la operación inversa de la derivación).

Ejercicio 1.7.

Si la velocidad de una partícula está dada por $\mathbf{v} = -3t^2\mathbf{i}$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t , sabiendo que partió de una posición en la cual en $\mathbf{r}_0 = -(1.00 \text{ m})\mathbf{i}$ en $t_0 = 0$.

Hasta este momento se han definido, para el caso de movimiento rectilíneo, las cantidades cinemáticas vector posición y vector velocidad que permiten describir el movimiento de cuerpos tratados bajo el modelo de partícula y que se mueven en línea recta. El movimiento rectilíneo es el movimiento más simple que puede adquirir un cuerpo.

Aunque en el análisis anterior se hizo coincidir la trayectoria rectilínea con el eje x , esta también puede hacerse coincidir con el eje y . Igualmente, la trayectoria y por ende el eje coordenado puede ser horizontal o tener cualquier orientación es decir, la trayectoria en línea recta, puede ser vertical, horizontal u oblicua, como la mostrada en la figura 1.13.

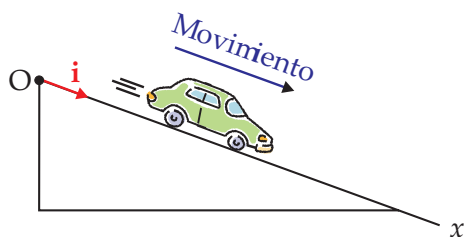


Figura 1.13: Movimiento rectilíneo de una partícula.

Aunque el desplazamiento, por definición es una cantidad vectorial, se ha considerado la situación en la cual sólo una componente del desplazamiento es diferente de cero, al hacer coincidir el eje de coordenadas con la trayectoria rectilínea descrita por la partícula.

En la figura 1.13, el eje x coincide con la trayectoria descrita por una partícula, por lo que su vector posición y su vector velocidad están dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = v\mathbf{i}.$$

Ahora, la coincidencia entre el eje x y la trayectoria rectilínea de la partícula, define la dirección del movimiento, por lo que es posible escribir las cantidades anteriores en la forma

$$r = x, \quad v = \frac{dx}{dt}. \quad (1.11)$$

O sea, las definiciones y conceptos considerados anteriormente son válidos, ecuaciones (1.1)

a (1.9), siempre y cuando se tenga presente que solo aparece una componente en cada uno de los vectores, esto es, cuando la trayectoria coincide con el eje utilizado.

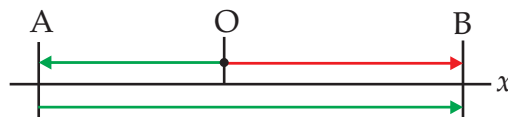


Figura 1.14: Desplazamiento y distancia recorrida.

Es preciso tener presente que no se debe confundir *desplazamiento* con *distancia recorrida*, como se ilustra en la figura 1.14, donde una partícula va del origen de coordenadas O al punto A y luego regresa, pasando por O, hasta llegar al punto B.

Así, en este caso, el vector desplazamiento de la partícula tiene una magnitud dada por $\Delta x = \overline{OB}$, apuntando hacia la derecha; esto corresponde al vector que va del punto O al punto B, mientras que la distancia recorrida es $d = 2\overline{OA} + \overline{OB}$.

Ejercicio 1.8.

Una partícula, cuya ecuación cinemática de posición está dada por $x(t) = 3t^3 - 4t^2 - t + 5$, donde x se da en m y t en s, se mueve paralelamente al eje x . a) Determine la velocidad de la partícula en función del tiempo. b) Calcule la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 2.5$ s. c) ¿Cuáles son las dimensiones de los coeficientes numéricos, en cada uno de los términos de las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad?

Ejercicio 1.9.

Determine, en función del tiempo, la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x , sabiendo que su ecuación cinemática de velocidad está dada por $v = 9t^2 - 8t - 1$, con $x_0 = 5$ m en $t_0 = 0$. Compare su resultado con la expresión para $x(t)$ dada en el ejercicio 1.8.

1.6.3. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

En esta sección se analiza con mayor detalle el caso de un movimiento con velocidad constante, es decir, $v = \text{Constante}$. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando la aguja del velocímetro de un auto no cambia de posición mientras el auto está en movimiento por una vía recta. De este modo, la ecuación (1.10),

$$x = x_0 + v(t - t_0), \quad (1.12)$$

es la *ecuación cinemática de posición* para este movimiento, denominado *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU).

En muchos casos, es posible tomar $t_0 = 0$.

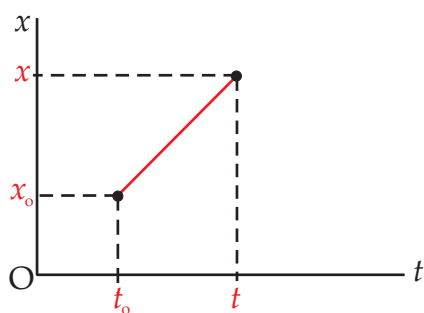


Figura 1.15: Gráfica de la posición en función del tiempo para un MRU.

De acuerdo con la geometría analítica, la ecuación (1.12) corresponde a la ecuación de una línea recta, donde su pendiente es la magnitud de la velocidad del movimiento.

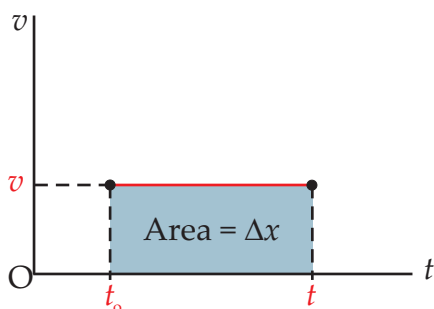


Figura 1.16: Gráfica de la velocidad en función del tiempo para un MRU.

En las figuras 1.15 y 1.16 se muestran las gráficas de posición y velocidad en función del tiem-

po, para el caso de una partícula con movimiento rectilíneo uniforme.

En la figura 1.15 se tiene que la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo está dada por

$$\text{Pendiente} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = v. \quad (1.13)$$

Al comparar las ecuaciones (1.12) y (1.13) se encuentra que realmente la pendiente de la recta corresponde a la velocidad de una partícula con movimiento rectilíneo uniforme.

Ejercicio 1.10.

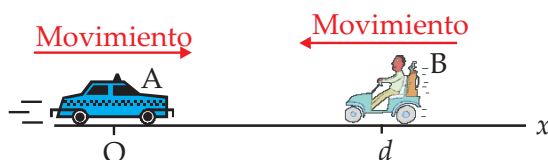
Utilizando la figura 1.16, demuestre que para el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, el área sombreada es igual al desplazamiento Δx de una partícula que tiene movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo 1.7.

Un auto A y una moto B se mueven con velocidades v_A y v_B , sobre una pista recta, en carriles paralelos y con sentidos opuestos. Inicialmente, los móviles están separados una distancia d . a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición para cada móvil. c) Determine el tiempo que demoran los móviles en pasar uno frente al otro. d) Halle el valor de la cantidad obtenida en el numeral anterior, si $v_A = 216 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $v_B = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ y $d = 50 \text{ m}$

Solución

a) Diagrama ilustrativo de la situación planteada, en el cual se muestra el sistema de referencia a emplear.



b) De acuerdo con el enunciado, las cantidades d , v_A y v_B son dadas y los móviles se mueven con velocidades

constantes, por lo que cada uno tiene movimiento rectilíneo uniforme. Así, las ecuaciones cinemáticas de posición tienen la forma general dada por la ecuación (1.12), con $t_0 = 0$, $x_{0A} = 0$ y $x_{0B} = d$.

Respecto al sistema de referencia mostrado en el diagrama y con origen en O, las ecuaciones cinemáticas de posición para el auto A y para la moto B, respectivamente, adquieren la forma

$$x_A = v_A t. \quad (1)$$

$$x_B = d - v_B t. \quad (2)$$

c) Cuando un vehículo pasa frente al otro la posición es la misma, por lo que las ecuaciones (1) y (2) son iguales, teniendo en cuenta que a partir de la situación inicial, el tiempo que demoran los móviles en encontrarse es el mismo.

Por lo tanto, luego de igualar las ecuaciones (1) y (2), y simplificar, se encuentra que el tiempo que demoran en encontrarse está dado por

$$t = \frac{d}{v_A + v_B}. \quad (3)$$

d) Al reemplazar en la ecuación (3) los valores $v_A = 216 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \equiv 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_B = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ y $d = 50 \text{ m}$, se tiene

$$\begin{aligned} t &= \frac{50 \text{ m}}{60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ &= 0.5 \text{ s}, \end{aligned}$$

que es el tiempo que los móviles demoran en pasar uno frente al otro.

Ejercicio 1.11.

Dos autos A y B se mueven con velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B ($v_A > v_B$), sobre una pista recta, en carriles paralelos y en el mismo sentido. Inicialmente, los autos están separados una distancia d . a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee la ecuación cinemática de posición para cada auto. c) Determine el tiempo que demoran los autos en pasar uno frente al otro. d) Halle el valor de la cantidad obtenida

en el numeral anterior, si $v_A = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_B = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ y $d = 50 \text{ m}$, e) ¿Qué se puede afirmar respecto al tiempo, cuando las velocidades de los autos son iguales?

1.7. Momento lineal o cantidad de movimiento (p)

En esta sección se analiza la expresión matemática que relaciona los conceptos de masa y velocidad con el concepto de momento lineal o cantidad de movimiento, en el caso de una dimensión. Por ello, es necesario hacer referencia a las cantidades dinámicas *masa* y *momento lineal* que son el punto de partida de la mayoría de los conceptos que se tratarán en adelante.

La física dispone de una cantidad escalar que es característica o propia de cada cuerpo y la cual permite conectar la cinemática de una partícula con la dinámica de una partícula; esta propiedad de los cuerpos es su *masa*. En lo que sigue, no se hace una definición operacional de la masa, sino que en su lugar se emplea el concepto intuitivo que de ella se tiene, esto es, lo que marca una balanza cuando un cuerpo se coloca sobre ella.

La masa de un cuerpo, que se representa mediante los símbolos M o m , es una cantidad fundamental cuya dimensión es M . De acuerdo con esta dimensión, las unidades respectivas son: el kilogramo (kg) en el sistema de unidades SI, y el gramo (g) en el sistema gaussiano de unidades. En el sistema inglés la unidad de masa es el slug, que se definirá más adelante.

La equivalencia entre estas unidades está dada por la identidad: $1 \text{ kg} \equiv 10^3 \text{ g}$.

La primera cantidad dinámica a definir, es el *momento lineal* o *cantidad de movimiento*, que es de gran importancia en la física ya que permite obtener más información que la velocidad.

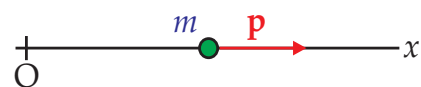


Figura 1.17: Momento lineal de una partícula.

Cuando una partícula de masa m , posee una velocidad \mathbf{v} respecto a determinado observador, se dice que su vector momento lineal está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &\equiv m\mathbf{v} \\ &= m\mathbf{v}\mathbf{i},\end{aligned}\quad (1.14)$$

De acuerdo con la definición dada por la ecuación (1.14), se tiene que el momento lineal es una cantidad vectorial que apunta en la misma dirección del vector velocidad, como se ilustra en la figura 1.17.

Además, como la velocidad depende del sistema de referencia, entonces el momento lineal también depende del sistema de referencia. Igualmente, como la velocidad es paralela a la trayectoria descrita por la partícula, el momento lineal también es paralelo a la trayectoria que la partícula describe.

Dimensiones y unidades del vector momento lineal

De acuerdo con la definición de momento lineal, se tiene que sus dimensiones son iguales a la dimensión de masa por la dimensión de velocidad, es decir $[\mathbf{p}] = [m][\mathbf{v}] = \text{MLT}^{-1}$. Por lo tanto, las unidades en los respectivos sistemas están dadas por: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ en el sistema SI de unidades, $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ en el sistema gaussiano de unidades y $\text{lb} \cdot \text{s}$ en el sistema inglés de unidades.

En el ejemplo 1.8, se muestra que el momento lineal permite obtener mayor información que la velocidad.

Ejemplo 1.8.

El camión de masa M y el auto de masa m de la figura 1.18 ($M > m$), se mueven con igual velocidad \mathbf{v} respecto al sistema de referencia mostrado. ¿Cuál es más difícil llevar al estado de reposo?

Solución

La experiencia muestra que el camión, con mayor momento lineal, es más difícil de llevar al estado de reposo. Lo anterior indica que aunque cinemáticamente no existe diferencia alguna entre el estado de los dos autos, velocidades iguales, dinámicamente se presenta una diferencia como

consecuencia de la diferencia en sus momentos lineales.

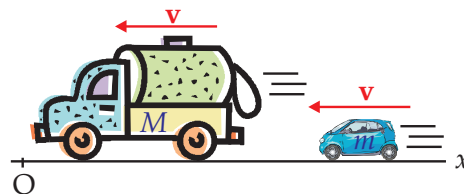


Figura 1.18: Cuerpos con igual velocidad y diferente momento lineal.

1.7.1. Conservación del momento lineal en una dimensión

Aunque solo se consideran dos casos particulares, el principio de conservación del momento lineal tiene validez general, sin importar el número de partículas que intervengan en un sistema. Este principio es de gran utilidad en la física, tanto desde el punto de vista teórico como experimental. En los dos casos que se consideran a continuación, se recurre a los resultados que muestra el experimento, cuando este se lleva a cabo.

1. Como primer experimento se considera la situación en la que a una partícula, de masa m y en movimiento rectilíneo, se le impide interactuar con cualquier otra, como se ilustra en la figura 1.19. Al no interactuar la partícula con ninguna otra, el resultado que se obtiene es que su estado de movimiento no es alterado, esto es, su velocidad permanecerá constante, o lo que es igual, su momento lineal debe permanecer constante. Lo anterior se puede expresar matemáticamente en la forma

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\mathbf{v}\mathbf{i} = \text{Constante} \quad \text{o sea} \quad \Delta\mathbf{p} = 0$$

2. En el segundo experimento, como se indica en la figura 1.20, se aíslan, del resto del universo, dos partículas con masas constantes m_1 y m_2 . Decir que se aíslan del resto del universo, equivale a afirmar que sólo se permiten sus interacciones mutuas. A un sistema como este se le llama *sistema aislado*.

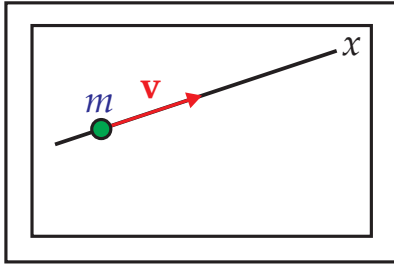


Figura 1.19: Conservación del momento lineal de una partícula aislada.

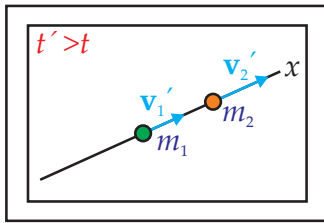
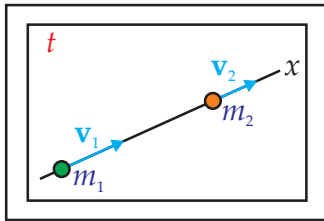


Figura 1.20: Momento lineal de dos partículas aisladas.

Cuando a las partículas se les permite interactuar entre sí, se encuentra que sus momentos lineales individuales pueden cambiar al transcurrir el tiempo. Por otro lado, el momento lineal total del sistema formado por las dos partículas, en cualquier instante, está dado por la suma de los momentos lineales de las partículas. De acuerdo con lo anterior, en el instante t el momento lineal del sistema aislado, está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \\ &= m_1 v_1 \mathbf{i} + m_2 v_2 \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

y en el instante posterior t' por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \\ &= m_1 v'_1 \mathbf{i} + m_2 v'_2 \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cuando se realiza este experimento, se encuentra que independientemente de los valores de t y t' , el momento lineal total del sistema permanece constante, o sea,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}' \\ P \mathbf{i} &= P' \mathbf{i} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Para el caso unidimensional, se puede enunciar el principio de conservación del momento lineal, en la forma: *El momento lineal total del sistema aislado formado por las dos partículas, permanece constante.*

Para la situación de interés, se tiene que el momento lineal ganado (o perdido) por una partícula, es perdido (o ganado) por la otra partícula; así, al reemplazar las ecuaciones (1.15) y (1.16) en la ecuación (1.17) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ &= \text{Constante} \\ p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{i} &= p'_1 \mathbf{i} + p'_2 \mathbf{i} \\ &= \text{Constante}, \end{aligned}$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_1 &= -\Delta \mathbf{p}_2 \\ \Delta p_1 \mathbf{i} &= -\Delta p_2 \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

de donde, el momento lineal que gana una partícula es igual al momento lineal que pierde la otra.

Como consecuencia de este resultado, de validez general, el cambio en el momento lineal de una partícula se debe a su interacción con la otra partícula. En conclusión, *toda interacción entre dos partículas genera cambios en sus momentos lineales individuales.*

A diario se presentan situaciones en las que se manifiesta la conservación del momento lineal. Por ejemplo, cuando un rifle en reposo respecto a la tierra es disparado, se observa que el rifle retrocede. Este retroceso es una consecuencia del principio de conservación del momento lineal, ya que en este caso, el momento lineal total del sistema inmediatamente antes del disparo e inmediatamente después del disparo, debe ser nulo.

1.8. Movimiento en un plano

Las cantidades físicas vector posición (\mathbf{r}), vector desplazamiento ($\Delta\mathbf{r}$), vector velocidad (\mathbf{v}) y vector momento lineal (\mathbf{p}), se han definido para el caso de una dimensión. En lo que sigue, se analizan situaciones en las que los cuerpos se mueven sobre un plano y no sólo en línea recta. Por consiguiente, los vectores anteriores tendrán dos componentes rectangulares, lo cual significa que en este caso los sistemas de referencia deben ser bidimensionales.

1.8.1. Vector posición en dos dimensiones (\mathbf{r})

Para el caso de dos dimensiones, un cuerpo tratado bajo el modelo de partícula, se mueve a lo largo de un camino, también conocido como trayectoria. La posición de la partícula, en un instante determinado y respecto al sistema de referencia mostrado en la figura 1.21, está dada por el vector posición \mathbf{r} trazado desde el origen del sistema de referencia hasta la posición donde se encuentre la partícula.

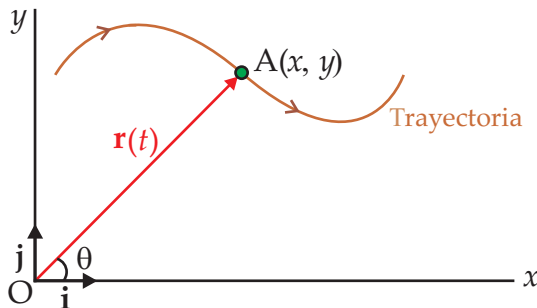


Figura 1.21: Vector posición \mathbf{r} de la partícula.

Si el vector posición en componentes rectangulares está dado por $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, se tiene que su magnitud y dirección están dadas, respectivamente, por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (1.19)$$

La forma de las expresiones dadas por la ecuación (1.19) son válidas, en general, para obtener la magnitud y dirección de cualquier vector, si se conocen sus componentes rectangulares.

En la figura 1.21 se observa que el vector posición \mathbf{r} varía con el tiempo tanto en magnitud como en dirección, mientras la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria.

Ejemplo 1.9.

El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy , está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50$ s la partícula pasa por el punto A. Determine: a) Las coordenadas de la partícula en el punto A. b) La magnitud y dirección del vector posición en dicho instante.

Solución

a) Reemplazando $t_A = 2.50$ s en la expresión dada, se encuentra que el vector posición en componentes rectangulares, cuando la partícula pasa por el punto A, está dado por

$$\mathbf{r}_A = (-0.50 \text{ m})\mathbf{i} + (8.75 \text{ m})\mathbf{j}.$$

Como en el plano el vector posición en general se expresa en la forma $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, al comparar con la igualdad anterior se tiene que

$$x_A = -0.50 \text{ m} \quad \text{y} \quad y_A = 8.75 \text{ m},$$

que son las coordenadas de la partícula cuando pasa por el punto A.

b) Utilizando las ecuaciones (1.19), se encuentra que la magnitud y dirección del vector posición están dadas por

$$r_A = 8.76 \text{ m} \quad \text{y} \quad \theta_A = 86.73^\circ.$$

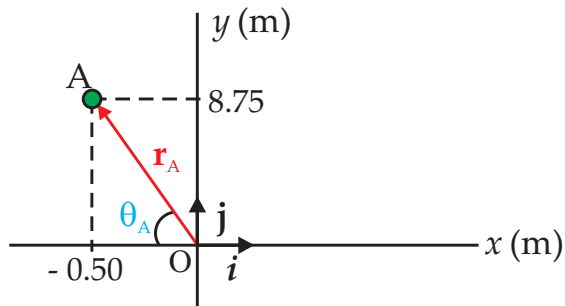
Así, el vector posición se puede expresar en la forma

$$\mathbf{r}_A = 8.76 \text{ m} \angle 86.73^\circ$$

El siguiente diagrama es una representación gráfica de los resultados obtenidos.

Ejercicio 1.12.

El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy , está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$ donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. a) Encuentre la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula.



De acuerdo con su resultado, ¿qué trayectoria describe la partícula? b) Halle el instante en que la partícula pasa por el eje x y el instante en que pasa por el eje y . c) Obtenga el vector posición de la partícula en el instante $t = 0$.

Ejercicio 1.13.

El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy , está dado por $\mathbf{r}t = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$ donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50$ s la partícula pasa por el punto A. Determine: a) Las coordenadas de la partícula en el punto A. b) La magnitud y dirección del vector posición en dicho instante.

1.8.2. Vector desplazamiento en dos dimensiones ($\Delta\mathbf{r}$)

Para el caso de movimiento en dos dimensiones, como lo muestra la figura 1.22, se considera una partícula que en el instante t_A pasa por el punto A, definido por el vector posición \mathbf{r}_A . Si en un cierto tiempo posterior t_B ($t_B > t_A$) la partícula pasa por el punto B, definido mediante el vector posición \mathbf{r}_B , el *vector desplazamiento*, que describe el cambio de posición de la partícula conforme se mueve de A a B, es dado por

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j}. \quad (1.20)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$ se

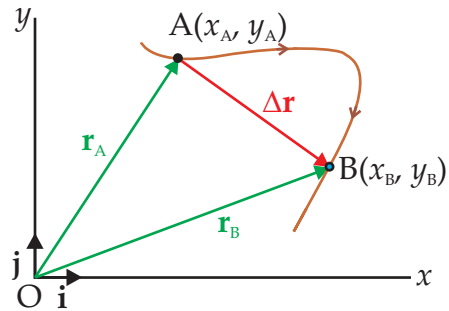


Figura 1.22: Vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ entre A y B.

encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

Solución

Al reemplazar $t_A = 2.50$ s y $t_B = 4.00$ s en la expresión dada, se encuentra que los vectores posición de la partícula, en componentes rectangulares, respectivamente están dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_A &= (-0.50\text{ m})\mathbf{i} + (8.75\text{ m})\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_B &= (1.00\text{ m})\mathbf{i} - (1.00\text{ m})\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la ecuación (1.20), para este caso se tiene que el vector desplazamiento, entre A y B, en componentes rectangulares está dado por

$$\Delta\mathbf{r} = (1.50\text{ m})\mathbf{i} - (9.75\text{ m})\mathbf{j}.$$

Por último, utilizando las ecuaciones (1.19), se encuentra que la magnitud y dirección del vector desplazamiento están dadas por

$$\Delta r = 9.86\text{ m} \quad \text{y} \quad \beta = 81.25^\circ,$$

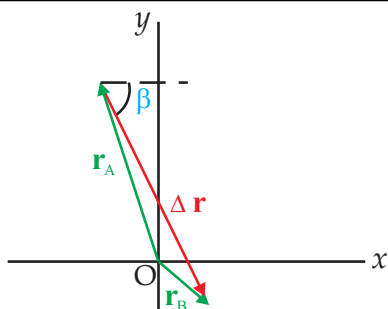
Es decir

$$\mathbf{r}_A = 9.86\text{ m} \searrow 81.25^\circ$$

En el diagrama siguiente se muestra, tanto el vector desplazamiento como el ángulo que forma con la horizontal.

Ejercicio 1.14.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en



el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

1.8.3. Vector velocidad en dos dimensiones (v)

Cuando la posición de una partícula cambia con respecto al tiempo, se dice que la partícula ha adquirido una velocidad. En general, la velocidad de una partícula se define como la rapidez con la cual cambia la posición al transcurrir el tiempo.

1.8.4. Vector velocidad media en dos dimensiones (\bar{v})

Para el caso de movimiento en el plano y de acuerdo con la figura 1.23, se considera una partícula que en el instante t_A pasa por el punto A, determinado por el vector posición \mathbf{r}_A . Si en un tiempo posterior t_B ($t_B > t_A$) la partícula pasa por el punto B, determinado por el vector posición \mathbf{r}_B , la *velocidad media* durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_B - t_A$, se define como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo correspondiente, es decir

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &\equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{t_B - t_A} \\ &= \frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j}}{t_B - t_A} \\ &= \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_y\mathbf{j}.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Dimensiones y unidades del vector velocidad media

De acuerdo con la ecuación (1.21), las dimensiones del vector velocidad media y en general

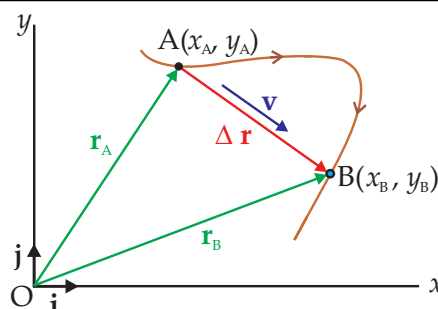


Figura 1.23: Vector velocidad media entre A y B.

de la velocidad, son LT^{-1} . Por consiguiente, las unidades son $m s^{-1}$ en el sistema SI, $cm s^{-1}$ en el sistema gaussiano, $p \cdot s^{-1}$ en el sistema Inglés; y en general, cualquier unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo, tal como $km h^{-1}$.

La definición (1.21) muestra que la velocidad media, $\bar{\mathbf{v}}$, es un vector ya que se obtiene al dividir el vector $\Delta \mathbf{r}$ entre el escalar Δt , por lo tanto, la velocidad media incluye tanto magnitud como dirección. Donde su magnitud está dada por $|\Delta \mathbf{r}|/\Delta t$ y su dirección por la del vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$. Esta cantidad es una velocidad media, ya que la expresión no dice cómo fue el movimiento entre A y B. La trayectoria pudo haber sido curva o recta, el movimiento pudo haber sido continuo o variable.

La siguiente es una situación en la que el vector velocidad media es nulo. La figura 1.24, muestra la trayectoria de un auto que parte del punto A y pasando por el punto B regresa al punto A, luego de un tiempo Δt . En este caso, la velocidad media es cero ya que el desplazamiento de la partícula es cero, aunque la distancia recorrida es diferente de cero.

Ejemplo 1.11.

Una partícula de masa $m = 500$ g y cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50$ s. Si en el tiempo $t_B = 4.00$ s pasa por el punto B, determine la magnitud y dirección de la velocidad media entre A y B.

Solución

Obteniendo el vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$

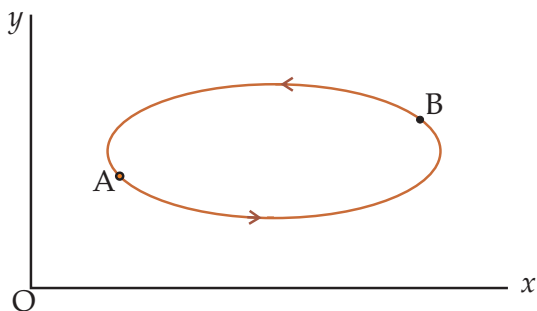


Figura 1.24: Vector desplazamiento nulo.

y sabiendo que $\Delta t = 1.5 \text{ s}$, utilizando la ecuación (1.3), se encuentra que la velocidad media en componentes rectangulares está dada por

$$\bar{\mathbf{v}} = (1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i} - (6.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}. \quad (1)$$

Mediante las ecuaciones (1.19) y para este caso, se encuentra que la magnitud y dirección del vector velocidad media, están dadas por

$$\bar{v} = 6.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{y} \quad \beta = 81.25^\circ$$

o sea que es la misma dirección del vector

$$\bar{\mathbf{v}} = 6.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \searrow 81.25^\circ$$

desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$, como se esperaba.

Ejercicio 1.15.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en el instante t_A . Si en el tiempo t_B pasa por el punto B, demuestre que la velocidad media cuando la partícula pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{i} - (t_B + t_A)\mathbf{j}$.

Ejercicio 1.16.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50 \text{ s}$. Si en el tiempo $t_B = 4.00 \text{ s}$ pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B y del vector velocidad media en dicho intervalo.

Ejemplo 1.12.

La velocidad media cuando una partícula

pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{i} - (t_B + t_A)\mathbf{j}$. Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.2.

Solución

En la tabla 1.2 se muestran los valores obtenidos para la magnitud (\bar{v}) y la dirección (θ) del vector velocidad media, en diferentes intervalos de tiempo (Δt) con $t_B = 3.0 \text{ s}$.

Tabla 1.2

$t_A(\text{s})$	$t_B(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$\bar{v}(\text{m/s})$	$\theta(^{\circ})$
2.980000	3.0	0.020000	6.060000	80.50000
2.990000	3.0	0.010000	6.070000	80.52000
2.995000	3.0	0.005000	6.078000	80.53000
2.998000	3.0	0.002000	6.081000	80.53400
2.999000	3.0	0.001000	6.082000	80.53600
2.999500	3.0	0.000500	6.082300	80.53690
2.999800	3.0	0.000200	6.082600	80.53740
2.999900	3.0	0.000100	6.082700	80.53750
2.999990	3.0	0.000010	6.082750	80.53766
2.999995	3.0	0.000005	6.082758	80.53767

Pregunta

¿Qué puede concluir al observar los valores de las tres últimas columnas de la tabla 1.2

Ejercicio 1.17.

Para una partícula, el vector posición en función del tiempo está dado por $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. a) Si la partícula pasa por el punto A en el instante t_A y por el punto B en el instante t_B , halle el vector velocidad media en sus componentes rectangulares. b) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.2.

1.8.5. Vector velocidad instantánea en dos dimensiones (\mathbf{v})

Es la velocidad de una partícula en un instante dado cualquiera. O también, *la velocidad, respecto a determinado sistema de referencia, que puede variar bien sea porque cambia sólo su magnitud ó sólo su dirección ó simultáneamente cambian tanto su magnitud como su dirección.*

Para el movimiento de una partícula, representado en la figura 1.25, ¿cómo se puede determinar su velocidad en el punto A?

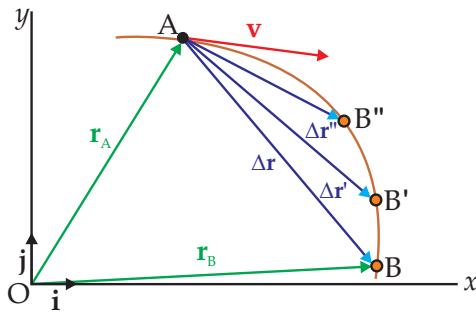


Figura 1.25: Vector velocidad instantánea.

Al considerar las posiciones intermedias de la partícula en t_2' , t_2'' , t_2''' , determinadas por los vectores posición \mathbf{r}_2' , \mathbf{r}_2'' , \mathbf{r}_2''' , se observa que los vectores desplazamiento $\Delta\mathbf{r}'$, $\Delta\mathbf{r}''$, $\Delta\mathbf{r}'''$, cambian tanto en magnitud como en dirección, o sea que la velocidad media varía tanto en magnitud como en dirección al tener en cuenta los puntos entre A y B.

Igualmente, los intervalos de tiempo correspondientes $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t' = t_2' - t_1'$, $\Delta t'' = t_2'' - t_1''$, $\Delta t''' = t_2''' - t_1'''$, cada vez se hacen más pequeños.

Si se continúa este proceso haciendo que B se aproxime al punto A, el vector desplazamiento se hace cada vez más pequeño hasta que tiende a un valor y a una dirección límite, que corresponde a la de la tangente a la trayectoria de la partícula en el punto A. Este valor límite de $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ se conoce como *velocidad instantánea* en el punto A, o sea, la velocidad de la partícula en el instante de tiempo t_A .

Si $\Delta\mathbf{r}$ es el desplazamiento en un pequeño intervalo de tiempo Δt , a partir de un tiempo t_0 , la velocidad en un tiempo posterior t , es el valor

al que tiende $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ cuando tanto $\Delta\mathbf{r}$ como Δt , tienden a cero, es decir,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

La ecuación (1.22) no es más que la definición de derivada, esto es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.23)$$

De la ecuación (1.23), se concluye que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria seguida por la partícula. La magnitud de la velocidad se llama rapidez y es igual a

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|.$$

Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, se tiene que en componentes rectangulares

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Si en la figura 1.26, se conocen las componentes rectangulares, se tiene que su magnitud y dirección están dadas por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}.$$

De acuerdo con la definición del vector velocidad instantánea, se tiene que sus dimensiones y unidades son las mismas del vector velocidad media.

En adelante, siempre que se hable de velocidad, se hace referencia a la velocidad instantánea.

Partiendo de la definición del vector velocidad, es posible conocer el vector posición de una partícula si se conoce la forma como varía el vector velocidad con el tiempo.

Teniendo en cuenta que en el instante de tiempo t_0 la partícula se encuentra en la posición \mathbf{r}_0 , mediante la ecuación (1.23) se encuentra que la posición de la partícula en el instante t está dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt. \quad (1.24)$$

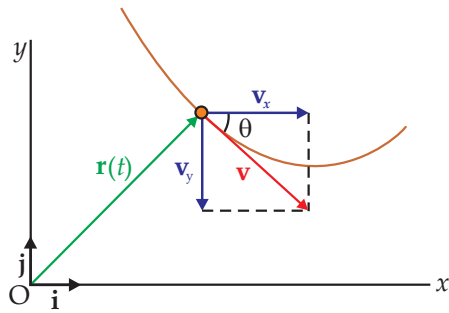


Figura 1.26: Componentes rectangulares del vector velocidad.

Mientras no se conozca la forma como varía el vector velocidad ($\mathbf{v}(t)$) con el tiempo, no es posible resolver la integral de la ecuación (1.24).

Ejemplo 1.13.

El vector posición de una partícula de masa 800 g que se mueve en el plano xy , está dado por $\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula, magnitud y dirección, en el instante $t = 3$ s.

Solución

a) Empleando la ecuación (1.23) se tiene que la velocidad en cualquier instante de tiempo t está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j}.$$

Reemplazando $t = 3$ s en la expresión para \mathbf{v} , se tiene que el vector velocidad en componentes rectangulares está dado por

$$\mathbf{v} = (1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i} - (6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}. \quad (1)$$

Así que su magnitud y dirección están dadas respectivamente por

$$v = 6.083 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{y} \quad \theta = 80.54^\circ,$$

es decir

$$\mathbf{v} = 6.083 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \angle 80.54^\circ$$

Ejercicio 1.18.

El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy , está dado por $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$ donde \mathbf{r} está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula, magnitud y dirección, en el instante $t = 3$ s. Compare el resultado con lo obtenido en el ejercicio 1.12.

1.9. Momento lineal o cantidad de movimiento en dos dimensiones (p)

En esta sección, de nuevo se hace referencia a las cantidades dinámicas *masa* y *momento lineal* que son el punto de partida de la mayoría de los conceptos que se tratarán en adelante.

Como ya se sabe, la física dispone de una cantidad escalar que es característica o propia de cada cuerpo como es su *masa*. Recuerde que no se hace una definición operacional de la masa, sino que en su lugar se emplea el concepto intuitivo que de ella se tiene, esto es, lo que marca una balanza cuando un cuerpo se coloca sobre ella.

Igualmente, tenga presente que la masa de un cuerpo es una cantidad fundamental cuya dimensión es M y que de acuerdo con esta dimensión, las unidades respectivas son: el kilogramo (kg) en el sistema de unidades SI, y el gramo (g) en el sistema gaussiano de unidades.

En el caso de dos dimensiones, la primera cantidad dinámica a definir, es el vector *momento lineal* o vector *cantidad de movimiento*, de gran importancia en la física pues permite obtener más información que el vector velocidad.

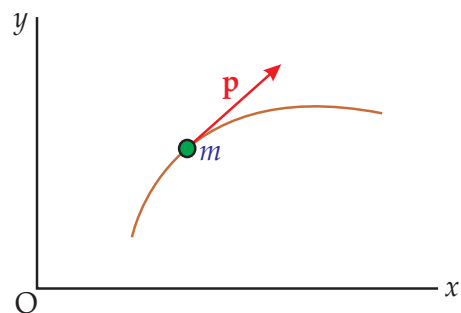


Figura 1.27: Momento lineal de una partícula.

Una partícula de masa m y que posee una velocidad \mathbf{v} respecto a determinado observador, tiene un momento lineal dado por

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}. \quad (1.25)$$

De acuerdo con la definición dada por la ecuación (1.25), se tiene que el momento lineal

es una cantidad vectorial que apunta en la misma dirección del vector velocidad, como se ilustra en la figura 1.27.

Además, como la velocidad depende del sistema de referencia, entonces el momento lineal también depende del sistema de referencia. Igualmente, como la velocidad es tangente a la trayectoria descrita por la partícula, el momento lineal también es tangente a la trayectoria que la partícula describe.

Dimensiones y unidades del vector momento lineal

De acuerdo con la definición de momento lineal, se tiene que sus dimensiones son iguales a la dimensión de masa por la dimensión de velocidad, es decir $[p] = [m][v] = MLT^{-1}$. Por lo tanto, las unidades en los respectivos sistemas están dadas por: $kg\,ms^{-1}$ en el sistema SI de unidades, $g\,cm\,s^{-1}$ en el sistema gaussiano de unidades y $lb\,s$ en el sistema inglés de unidades.

Ejemplo 1.14.

Si el momento lineal de una partícula de masa 600 g, está dado por $p = 0.6i - 1.2tj$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t , sabiendo que partió de una posición en la cual $r_0 = -(3.0\,m)i + (15\,m)j$ en $t_0 = 0$.

Solución

Partiendo de la definición del vector momento lineal, se encuentra que en componentes rectangulares el vector velocidad está dado por

$$v = i - 2tj \quad (1)$$

. Al reemplazar los vectores r_0 y v en la ecuación (1.24), se encuentra que al integrar, evaluar y simplificar, el vector posición de partícula está dado por

$$r = (t - 3)i - (t^2 - 15)j,$$

que es el mismo vector posición considerado en el ejemplo 1.1. De este resultado, se puede concluir que si se conoce el vector posición de una partícula, en función del tiempo, es posible conocer el vector momento lineal y si se conoce el vector momento lineal, en función del tiempo, se puede conocer el vector posición de

la partícula (recuerde que la integración es la operación inversa de la derivación).

Ejercicio 1.19.

Si el momento lineal de una partícula con masa 400g está dado por $p = 1.6ti - 1.2t^2j$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t , sabiendo que partió de una posición en la cual en $r_0 = -(1.00\,m)i - (2.00\,m)j$ en $t_0 = 0$. Compare su resultado con el vector posición dado en el ejercicio 1.17.

1.9.1. Conservación del momento lineal en dos dimensiones

Como se indicó antes, aunque solo se consideran dos casos particulares, el principio de conservación del momento lineal tiene validez general, sin importar el número de partículas que intervienen en un sistema. Este principio es de gran utilidad en la física, tanto desde un punto de vista teórico como experimental. En los dos casos que se consideran a continuación, se recurre a los resultados que muestra el experimento, cuando este se lleva a cabo.

1. En el primer experimento se considera la situación en la que a una partícula, de masa m y con movimiento en el plano, se le impide interactuar con cualquier otra, como se ilustra en la figura 1.28. Al no interactuar la partícula con ninguna otra, el resultado que se obtiene es que su estado de movimiento no es alterado, esto es, su velocidad permanecerá constante, o lo que es igual, su momento lineal debe permanecer constante. Lo anterior se puede expresar matemáticamente en la forma

$$p = mv = \text{Constante} \quad \text{o sea} \quad \Delta p = 0$$

2. En el segundo experimento, como se indica en la figura 1.29, se aíslan, del resto del universo, dos partículas con masas constantes m_1 y m_2 y que se mueven en un plano. Decir que se aíslan del resto del universo, equivale a afirmar que sólo se permiten sus interacciones mutuas. A un sistema como este se le llama *sistema aislado*.

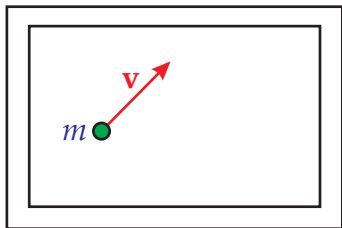


Figura 1.28: Conservación del momento lineal de una partícula aislada.

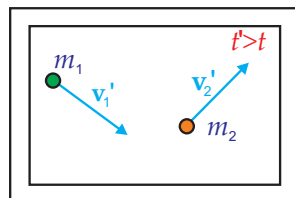
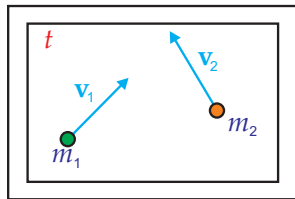


Figura 1.29: Momento lineal de dos partículas aisladas.

Una vez que se le permite a las partículas interactuar entre sí, se encuentra que sus momentos lineales individuales cambian al transcurrir el tiempo. Adicionalmente, el momento lineal total del sistema formado por las dos partículas, en cualquier instante, está dado por la suma de los momentos lineales de las partículas. De acuerdo con lo anterior, en el instante t el momento lineal del sistema aislado, está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \end{aligned} \quad (1.26)$$

y en el instante posterior t' por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \\ &= m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'. \end{aligned} \quad (1.27)$$

El experimento muestra, que independientemente de los valores de t y t' , el momento lineal total del sistema permanece constante, o sea,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' \quad (1.28)$$

Como la ecuación (1.28) es válida independientemente del número de partículas que conforman el sistema, se enuncia el principio de conservación del momento lineal, en la forma: *El momento lineal total de un sistema aislado de partículas, permanece constante.*

De este modo, el momento lineal ganado (perdido) por una partícula, es perdido (ganado) por el resto del sistema.

Para la situación que interesa en este momento, se tiene que el momento lineal ganado (o perdido) por una de las partículas, es perdido (o ganado) por la otra partícula. Así, al reemplazar las ecuaciones (1.26) y (1.27) en la ecuación (1.28) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \\ &= \text{Constante}, \end{aligned}$$

o lo que es igual

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2, \quad (1.29)$$

de donde, el momento lineal que gana una partícula es igual al momento lineal que pierde la otra.

El resultado anterior tiene validez general y permite afirmar que el momento lineal de una partícula cambia cuando interactúa con otra u otras partículas. En conclusión, *toda interacción entre partículas genera cambios en sus momentos lineales individuales.*

A menudo ocurren situaciones en las que se manifiesta claramente la conservación del momento lineal en dos dimensiones. Un ejemplo, claro de conservación del momento lineal en dos dimensiones, se presenta cuando una moto choca contra un camión. Es evidente que el camión prácticamente no cambia su trayectoria, en cambio la moto generalmente termina en un lugar relativamente alejado de donde ocurrió el choque.

1.9.2. Concepto de impulso (I)

El impulso es una cantidad física que se define en función del momento lineal, en la forma

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \\ &\equiv \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde la ecuación (1.30) la define como el cambio en el vector momento lineal. De acuerdo con esta definición, las dimensiones y unidades de impulso son las mismas de momento lineal. De este modo, por definición, el impulso no depende explícitamente de la masa m ni de la velocidad inicial v_0 de la partícula, ya que sólo importa el cambio en el momento lineal la partícula.

El impulso es una cantidad física que adquiere importancia cuando se presenta un gran cambio en el momento lineal de una partícula pero durante un pequeño intervalo de tiempo. Por ejemplo, cuando el bate le da a una pelota de béisbol o cuando se le pega con el palo a una pelota de golf.

1.10. Concepto de energía cinética

E_k

Otra cantidad física de importancia en la física es la energía cinética de una partícula. Esta cantidad es un escalar, que se puede expresar en función de la magnitud del vector velocidad o de la magnitud del vector momento lineal.

Como se vio anteriormente, el momento lineal de una partícula en movimiento cambia con el tiempo mientras esta interactúa con otra partícula. Se supone que el momento lineal de la partícula sufre un cambio $d\mathbf{p}$ durante un intervalo de tiempo dt en el cual la partícula se ha desplazado un $d\mathbf{r}$.

Derivando respecto al tiempo, a ambos lados de la ecuación (1.25), se tiene

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.31)$$

Multiplicando escalarmente, a ambos lados de la ecuación (1.31), por el desplazamiento $d\mathbf{r}$, es posible obtener la igualdad

$$\frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \quad (1.32)$$

Como se muestra en la figura 1.30, se considera que la partícula se mueve desde una posición A donde la rapidez es v_A y la magnitud del momento lineal p_A , hasta una posición B donde la

rapidez es v_B y la magnitud de su momento lineal p_B . Mediante la ecuación (1.32) y luego de integrar y evaluar, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) &= \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

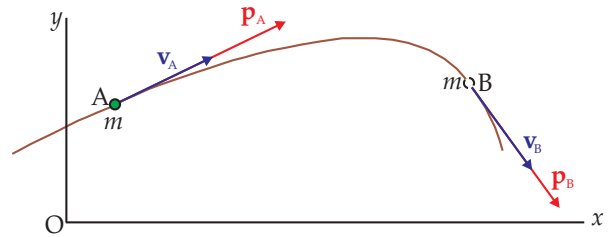


Figura 1.30: Movimiento de m entre A y B

La ecuación (1.33) muestra que el cambio en la cantidad $\Delta\left(\frac{p^2}{2m}\right)$ es igual al cambio en la cantidad $\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, mostrando con ello que ambas expresiones se refieren a la misma cantidad física conocida como *energía cinética*, es decir, la energía cinética se define matemáticamente por

$$E_k \equiv \frac{p^2}{2m} \equiv \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.34)$$

Como lo muestra la ecuación (1.34) la energía cinética es una cantidad escalar ya que depende bien sea de la magnitud del vector momento lineal o de la rapidez de la partícula, es decir, es independiente de la dirección en que se mueve la partícula. O sea, la definición de energía cinética no tiene en cuenta el hecho que el sistema de referencia sea unidimensional o bidimensional.

Como la energía cinética es una cantidad física que depende, bien sea de la magnitud de la velocidad ó de la magnitud del momento lineal, entonces depende del sistema de referencia ya que la velocidad, igual que el momento lineal, depende de él. Por otro lado, al ser la energía cinética una función de la rapidez o de la magnitud del momento lineal, es una energía que se le asocia a los cuerpos como consecuencia de su movimiento. Un cuerpo en reposo respecto a determinado observador, no tiene energía

cinética respecto al sistema de referencia asociado, aunque puede ser diferente de cero respecto a otros observadores, es decir, la energía cinética es una cantidad relativa.

En el caso particular de un movimiento rectilíneo uniforme, esto es, cuando una partícula se mueve con velocidad constante, el cambio en la energía cinética es nulo, es decir, $\Delta E_k = 0$, lo que indica que la energía cinética permanece constante durante su movimiento. Esta situación se ilustra en la figura 1.31

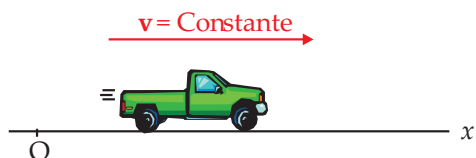


Figura 1.31: Cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme.

Dimensiones y unidades de energía cinética

De acuerdo con las ecuaciones (1.33) y (1.34), las dimensiones de energía cinética son ML^2T^{-2} por lo que su unidad en el sistema internacional de unidades es el $kg\ m^2\ s^{-2}$, unidad conocida como Joule, en el sistema gaussiano de unidades es el $g\ cm^2\ s^{-2}$ unidad conocida como ergio y en el sistema inglés de unidades lb p. Es decir

$$1\ kg\ m^2\ s^{-2} \equiv 1\ J(\text{Joule})$$

$$1\ g\ cm^2\ s^{-2} \equiv 1\ (\text{ergio})$$

En mecánica cuántica y particularmente física nuclear, se encuentra que las unidades definidas anteriormente para trabajo y energía son muy grandes, por ello, a nivel microscópico se utiliza otra unidad más pequeña de energía llamada electronvoltio (eV) y cuya relación con la unidad SI es

$$1\ eV \equiv 1.602 \times 10^{-19}\ J.$$

Un múltiplo de esta unidad bastante utilizado es el MeV, cuya relación es $1\ MeV \equiv 10^6\ eV$.

1.11. Colisiones

Se habla de una colisión, cuando ocurre una interacción entre dos o más partículas, en un intervalo corto de tiempo, en una región limitada del

espacio y donde las fuerzas entre los cuerpos interactuantes son muy intensas, al compararlas con la otras fuerzas actuantes sobre los cuerpos.

En toda colisión, la interacción entre las partículas altera su movimiento, ya que generalmente se presenta un intercambio de momento lineal y de energía. Lo anterior, no significa necesariamente que las partículas hayan estado en contacto físico. En general, se quiere indicar que ha ocurrido una interacción cuando las partículas estaban próximas como se muestra en la región encerrada de la figura 1.32 para el caso de dos partículas. Cuando se presenta contacto físico entre las partículas, se acostumbra denominar la colisión como un *choque*, esto ocurre por ejemplo entre dos bolas de billar o entre dos autos.

En muchos casos, los cuerpos antes de un choque son diferentes a los cuerpos después del choque. En una reacción química, por ejemplo, el átomo A choca con la molécula BC, apareciendo luego del choque la molécula AB y el átomo C, esto es $A + BC \leftrightarrow AB + C$. En el caso de un disparo, antes de la colisión se tiene un cuerpo formado por el arma y el proyectil y luego del disparo se tienen dos cuerpos, el arma y el proyectil. En el enganche de vagones de un tren, antes del choque se tienen dos cuerpos, cada uno de los vagones, y luego del choque se tiene un cuerpo formado por los dos vagones enganchados.

Se dice que ocurre una *dispersión*, cuando en un choque o colisión los cuerpos iniciales son los mismos cuerpos finales.

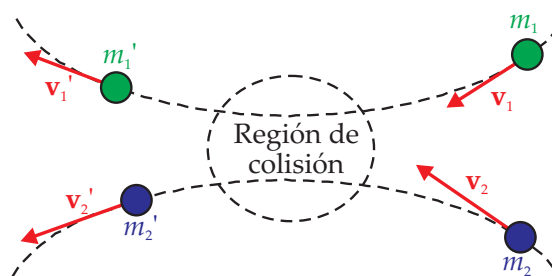


Figura 1.32: Colisión entre dos partículas.

Como un resultado del experimento y sabiendo que en un choque se tiene un sistema aislado, puesto que únicamente actúan fuerzas internas

que afectan el estado de cada cuerpo, se puede afirmar, *el momento lineal total de un sistema es igual antes y después de una colisión*. Matemáticamente y para el caso de dos partículas se tiene

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (1.35)$$

donde \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 son los momentos lineales de cada una de las partículas antes de la colisión, \mathbf{p}'_1 y \mathbf{p}'_2 los momentos lineales de cada una de las partículas después de la colisión.

Comúnmente, la ecuación (1.35) se escribe en la forma

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m'_1 \mathbf{v}'_1 + m'_2 \mathbf{v}'_2,$$

siendo m_1, m_2 las masas de las partículas antes de la colisión y m'_1, m'_2 las masas después de la colisión.

En general, uno de los objetivos al analizar una colisión es poder relacionar las velocidades de las partículas antes y después que esta ocurra. Para el caso de una colisión en dos dimensiones y entre dos partículas, si se conocen las velocidades antes de la colisión se tienen cuatro incógnitas, correspondientes a las componentes de las velocidades de cada partícula en las dos dimensiones; pero como la conservación del momento lineal sólo proporciona dos ecuaciones, una en cada dirección, es necesario obtener más información y para ello se recurre a la conservación de la energía.

Como en una colisión el sistema de cuerpos interactuantes conforman un sistema aislado, significa que no intervienen fuerzas externas al sistema. Por ello, la energía mecánica macroscópica del sistema se conserva y en este caso solo aparece en forma de energía cinética.

Para considerar la conservación de la energía, se define el *factor de colisión* Q en la forma

$$Q \equiv E'_k - E_k,$$

donde E_k y E'_k son, respectivamente, las energías cinéticas totales del sistema antes y después de la colisión.

Para el caso de dos partículas que colisionan, el factor de colisión adquiere la forma

$$Q = \left(\frac{1}{2} m'_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m'_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right). \quad (1.36)$$

Dependiendo del valor en el factor de colisión, puede ocurrir

- i) Que la colisión sea *elástica*, esto se presenta cuando $Q = 0$, por lo que en este caso no hay cambio en la energía cinética del sistema, o sea, $E'_k = E_k$. De acuerdo con lo anterior, *en toda colisión elástica se conserva tanto la energía cinética total del sistema, como el momento lineal total del sistema*.
- ii) Que la colisión sea *inelástica*, ello se presenta cuando $Q \neq 0$ y en esta situación, la energía cinética aumenta si $Q > 0$ o disminuye si $Q < 0$. En el primer caso, las partículas al colisionar desprenden parte de su energía interna y en el segundo absorben parte de la energía mecánica intercambiada en la colisión. En este caso es válido afirmar *en una colisión inelástica no se conserva la energía cinética total del sistema, pero sí se conserva el momento lineal total del sistema*.

De las dos definiciones anteriores se concluye que *en toda colisión se conserva el momento lineal total del sistema*.

Si después del choque sólo aparece una partícula, se dice que se tiene una *colisión completamente inelástica* o *plástica*. Debe quedar claro que toda colisión completamente inelástica es una colisión inelástica, pero una colisión inelástica no tiene que ser una colisión completamente inelástica.

El *parámetro de impacto* b , es una cantidad que permite saber si una colisión ocurre en una o dos dimensiones. Este parámetro está dado por la distancia de separación b entre la línea de movimiento de la partícula incidente y la línea paralela que pasa por la otra partícula, como se muestra en la figura 1.33.

De este modo, el parámetro de impacto es la distancia por la cual una colisión deja de ser frontal. Una colisión frontal, o en una dimensión, corresponde a $b = 0$ y valores mayores que cero para b , indican que la colisión es oblicua, o en dos dimensiones.

Ejemplo 1.14.

Como se muestra en la figura, un auto de

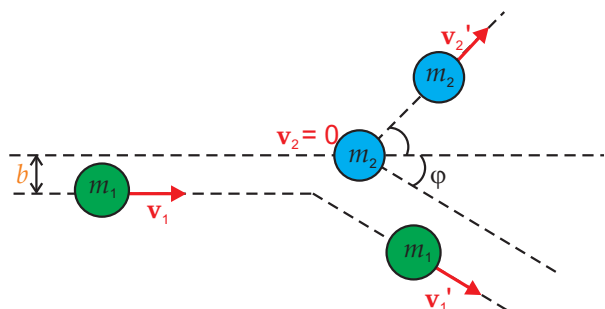


Figura 1.33: Parámetro de impacto.

masa m_1 y que se mueve con velocidad v_1 hacia la derecha, choca frontalmente con otro auto de masa m_2 que se encuentra en reposo sobre la misma vía. Analice la colisión de los autos si esta es a) completamente inelástica, b) elástica. c) Sabiendo que $m_1 = 300 \text{ g}$, $m_2 = 700 \text{ g}$ y $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, halle los valores de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores.



Solución

Como en toda colisión, el momento lineal total del sistema formado por los dos autos se conserva en el choque. De este modo, la ecuación (1.35) adquiere la forma

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \quad (1)$$

donde se ha tomado como positivo el sentido inicial de movimiento para el auto de masa m_1 .

Por otro lado, por la conservación de la energía, la ecuación (1.36) para el factor de colisión, se transforma en

$$Q = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) - \frac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (2)$$

a) Cuando la colisión es completamente inelástica, después del choque aparece sólo una partícula de masa $m_1 + m_2$ con velocidad $v_1' = v_2' = V$.

Así, mediante la ecuación (1) se encuentra que la velocidad final del sistema tiene la forma

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (3)$$

Por consiguiente, independientemente de la relación entre las masas m_1 y m_2 , después de la colisión plástica, la velocidad del sistema es menor y apunta en el mismo sentido que la velocidad con la cual incide el auto de masa m_1 .

Igualmente, para el factor de colisión, la ecuación (2) permite llegar a

$$Q = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2. \quad (4)$$

En esta colisión los autos se deforman, o sea que parte de la energía cinética del sistema se transforma en energía interna ya que $Q < 0$, sin tener en cuenta cual auto tiene masa mayor. En síntesis la colisión es inelástica.

b) Si la colisión es elástica, la energía cinética total del sistema se conserva en el choque, por lo que el factor de colisión es nulo y las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir, respectivamente, en la forma

$$m_1 (v_1' - v_1) = -m_2 v_2', \quad (5)$$

$$m_1 (v_1' - v_1)(v_1' + v_1) = -m_2 v_2'^2. \quad (6)$$

Dividiendo las ecuaciones (5) y (6) se obtiene

$$v_1' + v_1 = v_2'. \quad (7)$$

Finalmente, por medio de las ecuaciones (5) y (7) y luego de simplificar, se encuentra que las velocidades de los autos después del choque están dadas por

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (8)$$

En esta colisión, la velocidad del bloque m_2 tiene el mismo sentido que la velocidad de incidencia de m_1 . En cambio, el sentido de movimiento de m_1 después de la colisión, depende de la relación entre las masas de los bloques, esto es, si $m_1 > m_2$ el bloque de masa m_1 se mueve en el mismo sentido que m_2 ; si $m_1 < m_2$ el bloque de masa m_1 rebota en el choque moviéndose en sentido opuesto a m_2 , y si $m_1 = m_2$ el bloque de masa m_1 queda en reposo después de la colisión.

c) Reemplazando valores, con $m_1 = 0.3 \text{ kg}$, $m_2 = 0.7 \text{ kg}$, se tiene

- Para la colisión completamente inelástica, por las ecuaciones (3) y (4), se encuentra

$$\begin{aligned} V &= 3.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ Q &= -10.5 \text{ J}. \end{aligned}$$

- Para la colisión elástica, la ecuación (8) lleva a los valores

$$\begin{aligned} v'_1 &= -4.0 \text{ ms}^{-1}, \\ v'_2 &= 6.0 \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

El signo menos en la velocidad de m_1 , significa que este bloque rebota en el choque por cumplirse la relación $m_1 < m_2$.

Ejercicio 1.20.

Como se muestra en la figura, un auto de masa m_1 y con velocidad \mathbf{v}_1 hacia la derecha, choca frontalmente con un segundo auto de masa m_2 que inicialmente se mueve hacia la izquierda con velocidad $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$. Analice la colisión de los autos si esta es a) completamente inelástica, b) elástica. c) Sabiendo que $m_1 = 300 \text{ g}$, $m_2 = 700 \text{ g}$ y $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, halle los valores de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores.



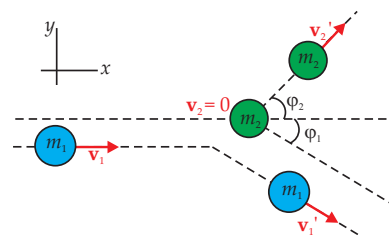
Ejemplo 1.15.

El cuerpo de la figura de masa m_1 y velocidad \mathbf{v}_1 , tiene una colisión oblicua con el cuerpo de masa m_2 inicialmente en reposo. a) Determine la magnitud de la velocidad de los bloques inmediatamente después del choque, si las masas después de la colisión se mueven en las direcciones mostradas. b) Resolver para $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 0.3 \text{ kg}$, $v_1 = 15.0 \text{ ms}^{-1}$, $\varphi_1 = 30^\circ$ y $\varphi_2 = 40^\circ$. ¿Es la colisión elástica o inelástica?

Solución

a) Como el momento lineal total de las dos partículas se conserva en la colisión, la ecuación (1.35) adquiere la forma

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2.$$



Descomponiendo las velocidades en sus componentes rectangulares, se obtiene para las direcciones x y y , respectivamente, las expresiones

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \varphi_1 + m_2 v'_2 \cos \varphi_2, \quad (1)$$

$$0 = -m_1 v'_1 \sin \varphi_1 + m_2 v'_2 \sin \varphi_2. \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} v_1, \\ v'_2 &= \frac{m_1 \sin \varphi_1}{m_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} v_1. \end{aligned}$$

De estos resultados se tiene que para valores fijos de φ_1 y φ_2 , la velocidad de m_1 después del choque es independiente de la masa de los cuerpos, mientras que para m_2 la velocidad sí depende de la relación entre las masas de los cuerpos.

b) Reemplazando valores se encuentra que la magnitud de las velocidades son

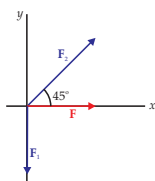
$$\begin{aligned} v'_1 &= 10.3 \text{ ms}^{-1}, \\ v'_2 &= 5.3 \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

Al calcular el factor de colisión, se encuentra que la colisión es inelástica ya que $Q = -7.7 \text{ J}$. De este modo, parte de la energía mecánica se transforma en energía interna de las partículas.

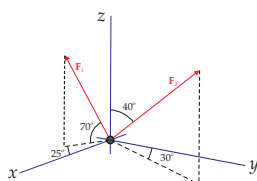
1.12. ENUNCIADOS

1. La fuerza neta \mathbf{F} que actúa sobre una partícula, debido a las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 aplicadas simultáneamente sobre ella, está dirigida horizontalmente hacia la derecha, como se muestra en la figura. La magnitud de la fuerza \mathbf{F}_1 es 10 N . a) Utilizando la figura, muestre gráficamente que los tres vectores han sido trazados correctamente. b)

Determine las magnitudes de los vectores fuerza \mathbf{F} y \mathbf{F}_1 . Resolverlo por dos métodos diferentes.



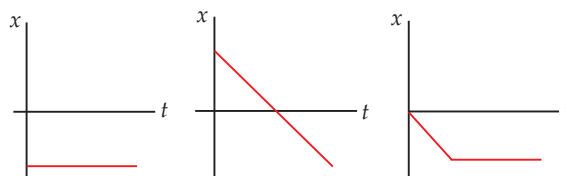
2. Sobre la partícula de la figura, actúan las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , con magnitudes respectivas de 800 N y 500 N. Encuentre a) las componentes rectangulares de las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , b) los ángulos que cada fuerza forma con cada uno de los ejes de coordenadas, c) el ángulo entre las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 y d) la magnitud y dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula debido a las dos fuerzas aplicadas.



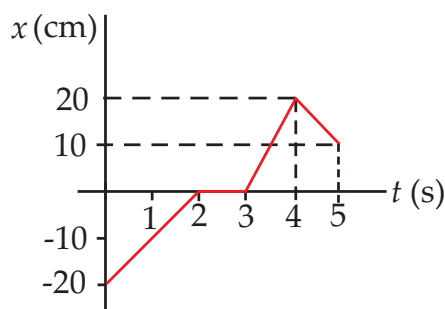
3. Un auto que se mueve en línea recta hacia la izquierda, pasa por las ciudades consecutivas A, B y C, regresando luego a la ciudad B. En un diagrama que incluya el sistema de referencia, muestre el vector desplazamiento del auto y expréselo matemáticamente en función de su respectiva componente.
4. Un auto está 16 m al Este de la señal de PARE en el instante de tiempo t_i , y 37 m al Oeste de la señal al tiempo t_f . Si la señal es el origen de coordenadas y el eje x apunta hacia el este. Determine: (a) x_i , (b) x_f , (c) r_i , (d) r_f y (e) Δr .
5. Un ciclista se movió en línea recta durante cierto intervalo de tiempo y de tal forma que el vector desplazamiento es paralelo al vector unitario \mathbf{i} . ¿De lo anterior es posible concluir que el ciclista sólo se desplazó en

el mismo sentido del vector unitario \mathbf{i} ? Explique.

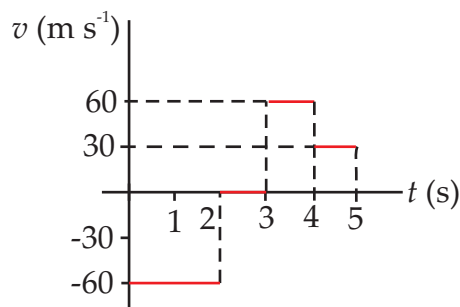
6. Las gráficas de la figura muestran la variación de la posición x en función del tiempo t , para un atleta que se mueve en línea recta. Describa el movimiento del atleta y llévelo a cabo con la punta de su lápiz.



7. La gráfica de la figura muestra la forma como cambia la posición de una hormiga en función del tiempo, cuando se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. (a) Trace el vector desplazamiento en la gráfica y expréselo matemáticamente. (b) Obtenga la gráfica de la forma como varía la velocidad de la hormiga en función del tiempo. (c) Utilizando la gráfica anterior, encuentre la magnitud del desplazamiento durante el movimiento y compare su resultado con el hallado en el numeral (a).



8. En la gráfica se indica el cambio de la rapidez v en función del tiempo (t), para un auto que se mueve sobre una autopista recta. Obtenga la gráfica de la posición en función del tiempo para el auto, suponiendo que pasó por el origen en $t = 0$.
9. La ecuación cinemática de posición, para una bicicleta que se mueve sobre el eje x , está dada por la expresión $x(t) = -14t + 74$

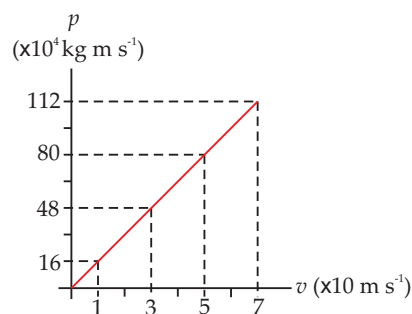


, donde x se da en m y t en s. (a) ¿Cuál es la posición inicial de la bicicleta? (b) ¿Cuál es el momento lineal de la bicicleta, en función del tiempo, si esta tiene una masa de 10.5 kg? De acuerdo con el resultado, ¿qué movimiento tiene la bicicleta? ¿Por qué? (c) Haga un diagrama que ilustre la situación, teniendo en cuenta las respuestas de los numerales anteriores. (d) Haga una gráfica de la posición de la bicicleta en función del tiempo, desde $t = 0$ s a $t = 6$ s. (e) Haga una gráfica de la velocidad de la bicicleta en función del tiempo, desde $t = 0$ s a $t = 6$ s.

10. Un auto A se mueve hacia la derecha por una pista recta y con una rapidez $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. El conductor del auto A observa otro auto B que se encuentra 50 m delante de él sobre un carril paralelo. Suponga que el auto B se mueve en el mismo sentido que el auto A con una velocidad de magnitud $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. (a) Halle la posición en la cual un auto pasa frente al otro. (b) Encuentre el momento lineal de cada auto si cada uno tiene una masa de 10^3 kg . Resuelva la misma situación para el caso en el cual un auto se mueve hacia el otro.
11. ¿Será posible encontrar una situación física, de un cuerpo en movimiento, en la que el momento lineal no sea paralelo a la velocidad? Explique.
12. Un niño tira un juguete para que su perro, de masa 8 kg, lo recoja. El perro emprende la carrera en busca del juguete, que se encuentra a 9 m de distancia, y lo trae de vuelta. El viaje le toma 4.3 s. (a) ¿Cuál es

el desplazamiento del perro? (b) ¿Cuál es la distancia total que recorrió el perro? (c) ¿Cuál es el momento lineal medio del perro?

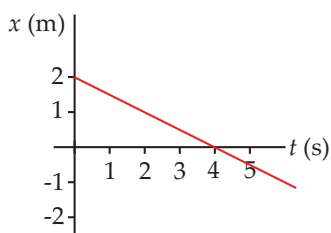
13. La magnitud del momento lineal de un auto con movimiento rectilíneo, varía con la magnitud de la velocidad en la forma mostrada en la figura. ¿Cuál es el significado físico de la pendiente de la recta? Halle el valor numérico correspondiente.



14. Un camión y su carga, con una masa de $2 \times 10^4 \text{ kg}$, se mueve en línea recta con una rapidez de $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. ¿Con qué rapidez tendrá que correr usted para adquirir la misma magnitud de la cantidad de movimiento del camión? Utilice su propia masa. Exprese su resultado en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ y en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
15. Una bala de 30 g tiene una velocidad horizontal de magnitud $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. ¿Con qué rapidez tendrá que correr usted para alcanzar la magnitud de la cantidad de movimiento de la bala? Utilice su propia masa. Exprese su resultado en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ y en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
16. La partícula α es un núcleo de helio con una masa de $6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$, la cual es emitida en una desintegración radiactiva del ${}^{238}_{92}\text{U}$. Una partícula α tiene una rapidez de $1.4 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Esta es una rapidez pequeña comparada con la de la luz ($3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). (a) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula α ? (b) ¿Cuál es la magnitud velocidad de una masa de 1 g con la misma magnitud de la cantidad de

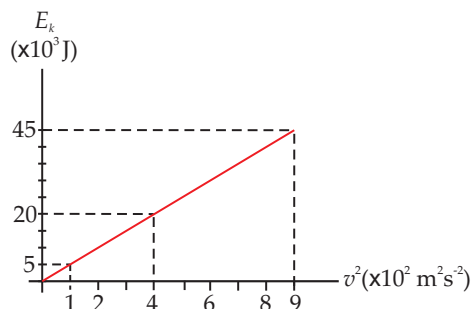
movimiento de la partícula α ? (c) ¿Cuánto tiempo demora la masa de 1 g en recorrer 1 m con esta rapidez? Expresé su resultado en años.

17. ¿Con qué rapidez debe correr usted para alcanzar la misma magnitud de la cantidad de movimiento que un auto de 10^3 kg de masa que se desplaza a $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
18. La figura muestra la forma como varía la posición x de una partícula en función del tiempo t , mientras esta se mueve en línea recta. La masa de la partícula es 400 g . (a) ¿El momento lineal de la partícula es cero en algún instante? Explique. (b) ¿Es constante el momento lineal de la partícula? Explique. (c) ¿Cuál es el momento lineal de la partícula en el instante $t = 0 \text{ s}$ (d) ¿Cuál es su momento lineal en el instante $t = 3 \text{ s}$ (e) ¿En qué instante la partícula pasa por el origen? ¿Cuál es su momento lineal en ese instante?

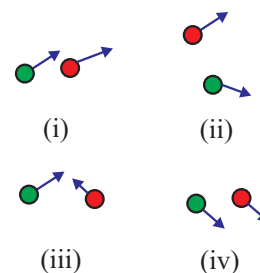


19. Un auto de masa $1.2 \times 10^3 \text{ kg}$ se desplaza con una velocidad horizontal de magnitud $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en dirección Suroeste. El sistema de coordenadas se toma de tal forma que el eje x apunta hacia el Este y el eje y hacia el Norte. (a) ¿Cuál es el momento lineal del auto? (b) ¿Cuáles son las componentes rectangulares de la cantidad de movimiento?
20. Una granada explota en dos fragmentos de igual masa. Si un fragmento sale disparado en la dirección oeste, ¿en qué dirección se mueve el otro fragmento? ¿Por qué?
21. Un auto de 10^3 kg que se desplaza hacia la izquierda sobre una pista recta, choca contra un camión estacionado de $4 \times 10^3 \text{ kg}$. Inmediatamente después de la colisión, el auto queda en reposo, mientras que el camión se desplaza con una rapidez de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Halle la velocidad del auto inmediatamente antes de la colisión. (b) En el choque, ¿se conserva el momento lineal del auto? Explique.
22. Una bola de masa 4 kg y velocidad $1.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, choca frontalmente con otra bola de masa 5 kg moviéndose a $0.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en el mismo sentido. Si la velocidad de la bola de 4 kg después del choque es $0.54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, encuentre el cambio en el momento lineal de cada bola. ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?
23. Repita la situación anterior, suponiendo que la bola de 5 kg se mueve en sentido opuesto antes del choque y con una velocidad de $1.13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ luego del choque.
24. En los dos enunciados anteriores, suponga que las bolas quedan pegadas en el choque. (a) Encuentre la velocidad de las bolas inmediatamente después del choque. (b) Halle el cambio en el momento lineal de cada bola en el choque. ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?
25. Un bloque se lanza sobre una superficie horizontal, de tal manera que este mueve en línea recta. ¿Se conserva el momento lineal del bloque? Explique.
26. Un ciclista y su bicicleta, de masa 10^3 kg , se mueven en el plano xy de tal manera que las ecuaciones cinemáticas de posición están dadas por $x = -30t - 6$ y $y = 60t - 9$, donde x, y se dan en m y t en s. (a) Obtenga la ecuación de la trayectoria seguida por el sistema ciclista-bicicleta. (b) Expresé el vector momento lineal del sistema en sus componentes rectangulares, cuando $t = 15 \text{ s}$. Halle la magnitud y dirección del momento lineal del sistema en $t = 15 \text{ s}$. (c) Encuentre la energía cinética del sistema en $t = 15 \text{ s}$.
27. La energía cinética de un auto varía con el cuadrado de su rapidez en la forma mostrada en la figura. ¿Cuál es el significado físico

de la pendiente de la recta? Halle el valor numérico de la masa del auto.



28. La velocidad de un bloque de 2 kg es $\mathbf{v}_1 = (3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en el instante $t = 3 \text{ s}$. Posteriormente, cuando $t = 6 \text{ s}$, la velocidad es $\mathbf{v}_2 = (8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Halle el cambio en la velocidad del bloque. (b) Calcule el cambio en el momento lineal del bloque. (c) Encuentre el cambio en la energía cinética del bloque.
29. Dos deslizadores de masas m_1 y m_2 se mueven, respectivamente, con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 sobre un riel de aire y en sentidos opuestos. Los deslizadores chocan elásticamente. (a) Halle la velocidad de los deslizadores después del choque. (b) Analice el resultado en siguientes casos particulares: (i) $m_1 = m_2$, (ii) $m_2 = 2m_1$, (iii) $v_2 = 0$ y $m_1 = m_2$, (iv) $v_2 = 0$ y $m_2 = 2m_1$. En cada caso, ilustre gráficamente la situación luego del choque. Para cada una de las situaciones consideradas en el numeral (b), halle (c) el cambio en el momento lineal de cada deslizador y (d) el cambio en la energía cinética de cada deslizador.
30. Dos autos de igual masa m se mueven sobre el mismo carril y en el mismo sentido, con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Luego del choque los autos quedan pegados. (a) ¿Bajo qué condición chocan los autos? Explique. (b) Halle la velocidad de los autos inmediatamente después del choque. (c) Determine si la colisión es elástica o inelástica.
31. Una bola de billar que se mueve horizontalmente hacia la derecha, choca con otra bola que se encuentra en reposo. Luego de la colisión, ¿cuál situación de las mostradas es la correcta? Explique su respuesta.
32. Un auto de masa m se mueve en el sentido Norte-Sur con una velocidad de magnitud $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, mientras que otro auto de masa $2m$ se mueve en el sentido Oeste-Este con una velocidad de magnitud $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Los dos autos chocan en el cruce entre las dos avenidas sobre las cuales se mueven, de tal forma que quedan enganchados moviéndose en una dirección que forma un ángulo de 34° con la horizontal. (a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, tanto inmediatamente antes como inmediatamente después del choque. (b) Obtenga, en componentes rectangulares, la velocidad de los autos inmediatamente después del choque. (c) Encuentre el factor de colisión. ¿Parte de esta energía cómo aparece luego de la colisión? (d) ¿Qué nombre recibe esta colisión? Explique.
33. Una bola de billar de masa m_1 se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad \mathbf{v}_1 , cuando choca elásticamente con otra bola de masa m_2 , inicialmente en reposo. Luego de la colisión, las velocidades de las bolas forman entre sí un ángulo de 90° . (a) Haga un diagrama ilustrativo donde se muestre la situación tanto inmediatamente antes como inmediatamente después del choque. (b) Encuentre la relación entre las masas de las bolas de billar.
34. Con el fin de probar la resistencia de los materiales que conforman su estruc-



tura, a dos autos de igual masa se les permite chocar, desplazándose en sentidos opuestos con movimiento rectilíneo uniforme. Suponga que los autos quedan enganchados en el choque y que adquieren velocidades constantes de 60 ms^{-1} y 80 ms^{-1} cuando la separación entre ellos es 100 m. (a) Halle la posición donde chocan los autos. (b) Encuentre la velocidad de los autos inmediatamente después del choque. (c) Si luego del choque los autos se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, determine su posición a los 5 s de este haber ocurrido.