Chapitre 1 : Le second degré (partie 1)

Approche

Un fermier possède un terrain carré. Il désire poser une clôture à 1€le mètre linéaire et souhaite également amender son terrain avec un engrais qui lui revient à 1€le mètre carré.
☞ Quel est la taille du terrain sachant qu'il dépense 140 € ?

1 Fonction polynôme du second degré

1.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1.1

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec a non nul.

Vocabulaire

- Les réels a, b et c sont appelés coefficients de la fonction f.
- Une fonction polynôme du second degré est aussi appelé fonction *trinôme du second degré*.
- Les solutions (si elles existent) de $ax^2+bx+c = 0$ sont appelées **racines** de ax^2+bx+c

Remarque

Une équation de parabole est donc du type $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec a non nul.

Exemples

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x - \sqrt{7}$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 1$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.

Savoir-Faire 1.1

Savoir déterminer si une fonction est une fonction trinôme du second degré

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)(x+3)$ est-elle une fonction du second degré ?

Exercices

exercice 12 page 50

1.2 La forme canonique

Vocabulaire

$f(x) = 2(x+1)(x-3)$ est une écriture sous forme factorisée de la fonction f.

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ est une écriture sous forme développée de la fonction f.

On cherche à déterminer une autre forme d'écriture, où la variable x n'apparaîtrait qu'une seule fois. . .

Propriété 1.1 (admise)

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$,avec a non nul, on peut trouver des réels α et β, tels que pour tout réel x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.
On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Remarque

Ce n'est pas une formule à connaître par cœur, il faut savoir déterminer la forme canonique sans la formule

Exercices

20 page 51
79 page 53

Savoir-Faire 1.2

Savoir déterminer la forme canonique d'une expression du second degré.

- $x^2 + 4x - 1$
- $2x^2 - 4x + 6$
- $-x^2 + 2x + 5$
- $f(x) = 25x^2 - 150x + 209$
- $3x^2 - x + 1$

Exercices
48, 49, 50 page 52

2 Variation de la fonction trinôme

Propriété 1.2 (admise)

La fonction trinôme f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet les variations suivantes, suivant les valeurs de a :

- si $a > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$	

- si $a < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$	

Savoir-Faire 1.3

Savoir étudier les variations d'une fonction trinôme du second degré

Exercices
28 page 50
100 page 55
114, 115 page 56

Exercice Python

- On considère la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
  Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer les valeurs de a, b et c, et qui fournit ensuite la nature de l'extremum, la valeur de α et celle de β , comme le montre l'image suivante : ***

```
Entrer la valeur de a : 5
Entrer la valeur de b : 6
Entrer la valeur de b : 10
minimum
-0.6
8.2
```

- Écrire cet algorithme sous la forme d'une fonction *extrem* ; cette fonction a pour paramètres a,b et c et retourne un triplet (nature de l'extremum, valeur de alpha, valeur de béta)***

```
>>> extrem(-1,2,1)
('maximum', 1.0, 2.0)
```

Exercices
120, 121, 122 page 56

3 Courbe représentative

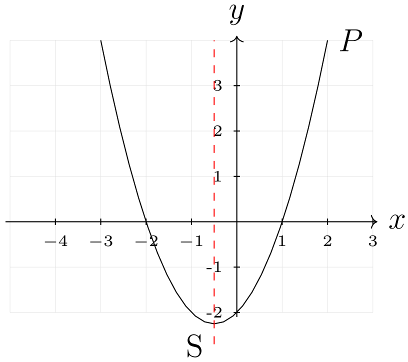
Vocabulaire

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée *une parabole*.

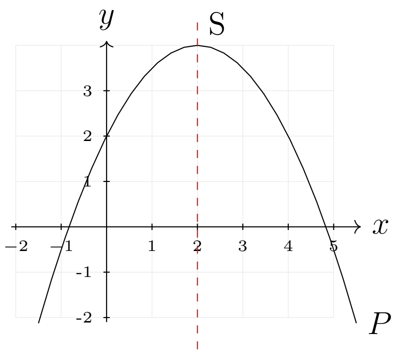
Propriété 1.3 (admise)

La courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$.

Si $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut, avec la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie :



Si $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas, avec la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie :



Savoir-Faire 1.4

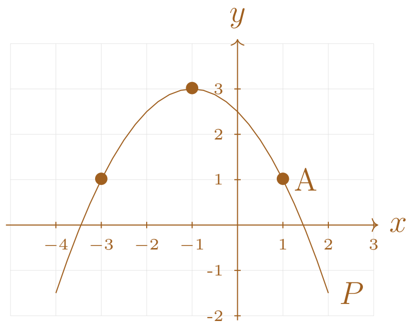
Savoir déterminer le sommet d'une parabole.
Énoncé : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$.
Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.

Exercices
98, 99 page 54
113 page 56

Savoir-Faire 1.5

Savoir déterminer graphiquement une équation de parabole.

Énoncé : Déterminer graphiquement l'équation de la parabole ci-contre.



Méthode :

- On lit les coordonnées du sommet S... On trouve donc α et β,car $S(\alpha;\beta)$.
- On utilise un autre point pour déterminer a.

Exercices
105 page 55
106, 107, 108 page 55

Savoir-Faire 1.6

Savoir choisir quelle forme (développée, factorisée, canonique) utiliser pour résoudre un problème

- Quelle forme est la plus pertinente pour démontrer qu'une fonction est une fonction trinôme ?
- Quelle forme est la plus pertinente pour donner le tableau de variations d'une fonction trinôme ?
- Quelle forme est la plus pertinente pour donner les coordonnées du sommet ?
- Quelle forme est la plus adaptée pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré ?

4 Résoudre des équations et des inéquations lorsque le polynôme est sous forme factorisée

Savoir-Faire 1.7

SAVOIR RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN UTILISANT LES MÉTHODES VUES EN SECONDE

Résoudre :

- $(x-1)(x+5)=0$
- $x^2+4x=0$
- $x^2+2x+1=0$
- $x^2+9=6x$
- $(2x+1)^2=(x-3)^2$
- $x^2-36=0$

Exercices
13 page 50
62, 63, 64 page 53

Savoir-Faire 1.8

SAVOIR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN UTILISANT LES MÉTHODES VUES EN SECONDE

Résoudre :

- $(x-1)(x+5)\leq 0$
- $x^2+4x>0$
- $x^2+2x+1\geq 0$
- $x^2+9<6x$
- $(2x+1)^2\leq(x-3)^2$
- $x^2-36>0$

Exercices
41, 42 page 52

Exercices
43 page 52