11.3 Autres expressions du produits scalaire

11.3.1 Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(1; 4)$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

Conséquence 11.65

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et si $\vec{u}(x; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

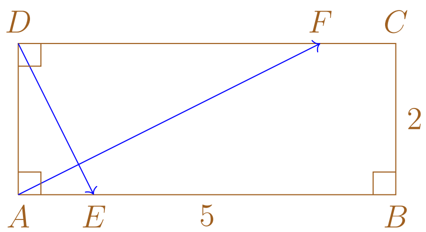
Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(5; 7)$ et $\vec{v}(-5; 4)$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

Savoir-Faire 11.62

Savoir démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs - Méthode 2 , avec des coordonnées

ABCD est le rectangle ci-dessous avec AB=5 et BC=2.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.
Monter que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



11.3.2 Expression du produit scalaire à partir des normes

Démonstration 11.14

On souhaite déterminer une expression de $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des normes.
Pour cela, on peut développer $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, et ensuite isoler $\vec{u}.\vec{v}$ pour en déduire les formules recherchées.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$