

## 3.4

### Bases et repères du plan

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

#### 3.4.1 Base et repère du plan

##### Définition

- On appelle **base du plan** tout triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de vecteurs non coplanaires.
- On appelle **repère de l'espace** tout quadruplet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est un point de l'espace et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base du plan.

##### Remarque

Dit autrement, trois vecteurs constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement indépendants.

##### Remarque

Le repère de l'espace  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormal si  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ,  $\vec{i} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{j} \perp \vec{k}$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$



### Savoir-Faire 3.7

#### SAVOIR MONTRER QUE DES VECTEURS FORMENT UNE BASE DE L'ESPACE

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace.

#### Exercice 3.15

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  forment une base du plan.
2. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace.

#### Exercice 3.16

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace.

### Exercice 3.17

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne forment pas une base de l'espace.

### 3.4.2 Coordonnées d'un vecteur de l'espace

#### Propriété

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace.

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un triplet  $(x; y; z)$  de réels et un seul, tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

#### Définition

Les réels  $x, y, z$  sont les  **coordonnées (ou composantes) du vecteur  $\vec{u}$**  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On notera  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ou bien  $\vec{u}(x; y; z)$ .

#### Propriété

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et soit  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace dans une base du plan.

- $\vec{u} = \vec{v}$  équivaut à  $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

- Si  $\alpha$  est un réel, alors le vecteur  $\alpha\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

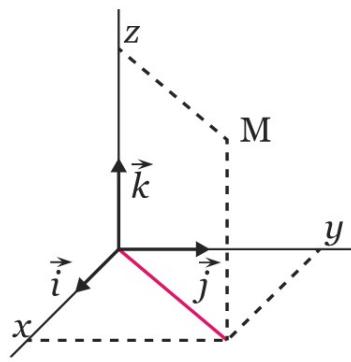
### 3.4.3 Coordonnées d'un point de l'espace

#### Propriété

Un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace étant donné, pour tout point  $M$  de l'espace, il existe un unique triplet  $(x; y; z)$  de réels tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

## Définition

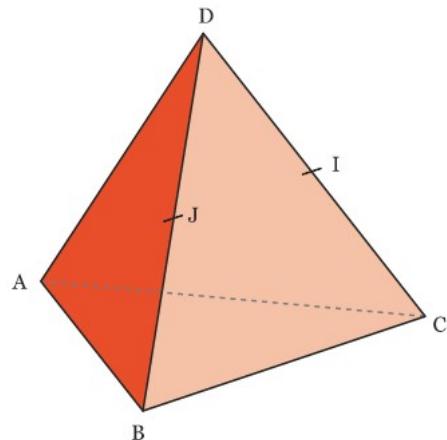
Les réels  $x, y, z$  sont les  **coordonnées de  $M$**  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
 $x$  est l'**abscisse** de  $M$ ,  $y$  est l'**ordonnée** de  $M$  et  $z$  est la **cote** de  $M$ .



### Savoir-Faire 3.8

SAVOIR LIRE LES COORDONNÉES DANS L'ESPACE

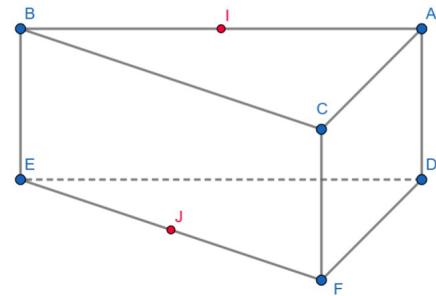
Soit  $ABCD$  un tétraèdre.  
 On note  $I$  le milieu de  $[CD]$  et  $J$  celui de  $[BD]$ .



1. L'espace est rapporté au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ 
  - a) Lire les coordonnées de tous les points de la figure.
  - b) Lire les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BD}$ .
  
2. L'espace est rapporté au repère  $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ 
  - a) Lire les coordonnées de tous les points de la figure.
  - b) Lire les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BD}$  et du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

### Exercice 3.18

$ABCDEF$  est un prisme à base triangulaire.  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le milieu de  $[EF]$



1. Décomposer le vecteur  $\vec{AI}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC})$
2. Décomposer le vecteur  $\vec{AB}$  dans la base  $(\vec{AI}, \vec{BC})$
3. Décomposer le vecteur  $\vec{AJ}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$
4. Décomposer le vecteur  $\vec{DI}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$
5. Lire les coordonnées de tous les points dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

### 3.4.4 Opérations sur les coordonnées

#### Propriété

On considère deux points de l'espace  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ .

Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

### Exercice 3.19

Soient  $A(1; -7; 4)$  et  $B(21; 11; 1)$  deux points de l'espace rapporté à un repère. Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$

#### Propriété

On considère deux points de l'espace  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ .

Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ .

### Exercice 3.20

Soient  $A(1; -7; 4)$  et  $B(21; 11; 1)$  deux points de l'espace rapporté à un repère. Calculer les coordonnées du milieu  $I$  du segment  $[AB]$

### Exercice 3.21

$A(-2; 8; 9)$ ,  $B(-4; 4; 5)$ ,  $C(0; 4; -3)$ ,  $D(-8; 6; 7)$  et  $E(1; -2; 3)$  sont des points de l'espace muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On note  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[DC]$ .

1. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont-ils alignés ?
2. Calculer les coordonnées des points  $I$  et  $J$
3. Calculer les coordonnées du point  $L$  tel que  $\vec{BL} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

4. Montrer que les points  $I$ ,  $J$ ,  $L$  et  $E$  sont coplanaires