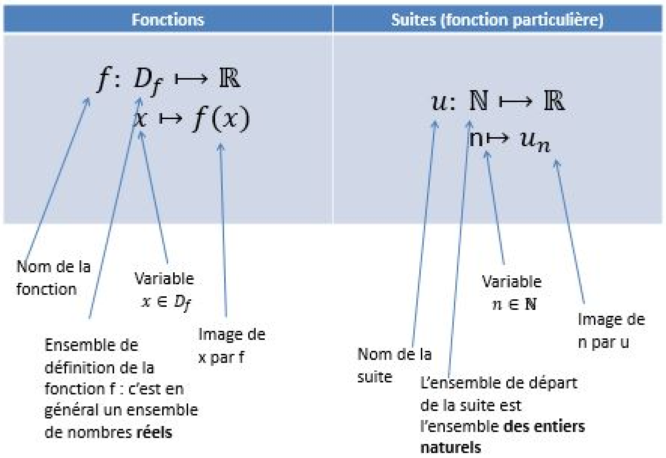
Chapitre 6 : Les suites

Table des matières

Les suites numériques

1 Définition et modes de génération

1.1 Analogie avec une fonction classique



1.2 Définition

Définition 6.1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une suite numérique est une fonction définie pour tout entier $n \geq n_0$ et à valeurs réelles.
Pour chaque $n \geq n_0$, on associe le nombre réel noté u_n.
La suite est notée u ou (u_n).

Remarque

- u_n est un réel ; on dit que c'est le terme de la suite (u_n) de rang n.
- (u_n) est la suite.

Remarque

C'est la faute classiques des lycéens débutants : La lettre n est à la fois utilisée comme indice des termes de la suite et comme valeur dans les formules.
Voici un exemple pour mieux comprendre : en rouge le n en indice et en vert le n utilisée comme "valeurs" :
$u_{n+1} = n \times u_n + 11n$ Ainsi, si on remplace n par 51, on obtient $u_{52} = 51 \times u_{51} + 11 \times 51$.

1.3 Modes de générations d'une suite

1.3.1 Par une formule explicite

Ici, le terme de la suite u_n est défini directement en fonction de n, et uniquement en fonction de n.

Exemple

la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$ est une suite explicite.

Savoir-Faire 6.1

Savoir calculer les premiers termes

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

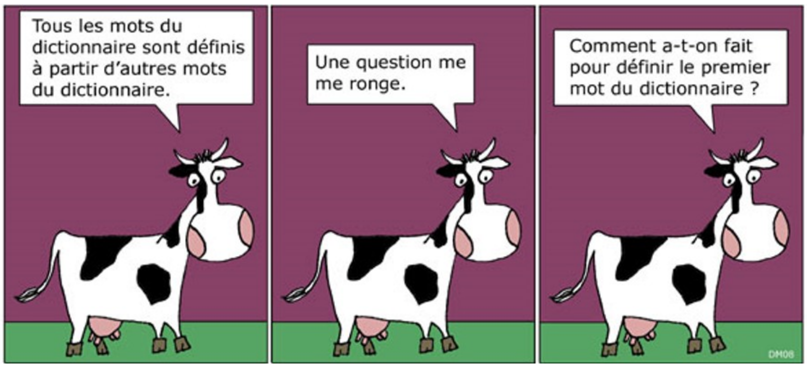
- On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 6$ par $v_n = \frac{1}{n-5}$.
- On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $w_n = \sqrt{n-1}$.
- On considère la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = 2^n$.

Remarque

Comment reconnaître une suite explicite ? Dans le cas d'une suite explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'entier souhaité.

1.3.2 Par une formule récurrente

Ici, le terme u_n de la suite se définit par rapport au(x) terme(s) précédent(s).



Exemple

La suite w_n définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$ est une suite définie par récurrence.

Savoir-Faire 6.2

Savoir calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
- Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$.
- Soit la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = 2 \times z_n + n$.

Remarque

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme : pour calculer u_{100}, on a besoin de u_{99} par exemple... et ainsi de suite jusqu'au premier terme.

1.3.3 Par un algorithme

Ici, c'est un algorithme qui va être à l'origine de la construction de la suite.

Exemple

Voici un premier programme en Python :

```
def suite1(n):
    return -2*n**2-2*n+7
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Et voici un second programme, toujours en Python :

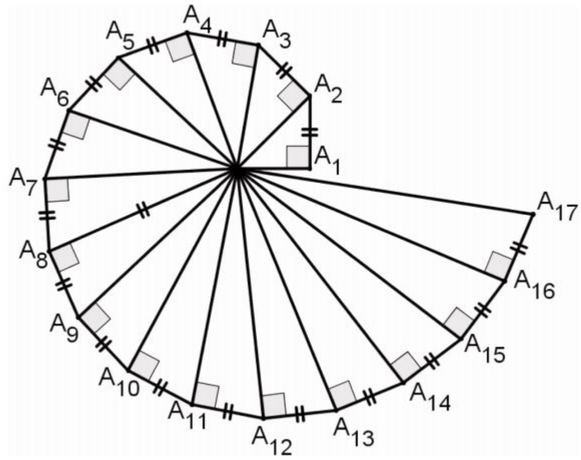
```
def suite1(n):
    a = 5
    for i in range(n):
        a = 2 * a + 5
    return a
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Savoir-Faire 6.3

Savoir calculer les premiers termes d'une suite (récurrente ou explicite) en utilisant Python ☞ Utiliser les exemples faits en classe pour s'entraîner à programmer en Python des suites explicites et récurrentes (avec boucle for et/ou while). Bien évidemment, s'entraîner davantage avec les suites récurrentes, plus difficiles à programmer.

1.3.4 Par une situation géométrique



On part d'un triangle rectangle en A_1 OA_1A_2 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On pose $u_1 = A_1A_2$. Pour tout $n > 1$, en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle OA_nA_{n+1} comme suit : il est rectangle en A_n, et $A_{n+1} = 1$.

Pour $n > 0$, on pose $u_n = A_nA_{n+1}$

- Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
- Conjecturer la formule explicite de cette suite.

♡**Défi !**

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \begin{cases} 3 \times u_n & \text{si n est pair} \\ u_n - 2 & \text{si n est impair} \end{cases} \end{cases}$$

1. Calculer les 6 premiers termes (ce n'est pas ça le défi !)
2. Calculer la somme des 43 premiers termes ! (u_0 compris)

1.4 Calculer les termes d'une suite avec la calculatrice

- Il faut d'abord passer en mode **suite** : $\boxed{Mode}$ puis choisir **suite** ou **séquence**. Ensuite, il faut quitter avec $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{quitter}$.
- Appuyer ensuite sur la touche $\boxed{f(x)}$.
- Pour les suites explicites :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre ensuite l'expression de la suite en fonction de n : pour afficher n, il suffit de taper sur la touche $\boxed{X, T, \theta, n}$.

- Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.(Il faudra peut être régler la table pour ne faire apparaître que les valeurs positives de n.
- Exemple avec $u_n = 2n+1$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,$\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{X,T,\theta,n}$,$\boxed{+}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2nde}$ et $\boxed{table}$.

- Pour les suites récurrentes :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre **u(nMin)** la valeur de la suite pour **nMin**
  - Il reste ensuite à donner l'expression de la suite. Attention sur TI, il faudra rentrer u_n en fonction de u_{n-1} (et non pas u_{n+1} en fonction de u_n !) Le terme u_{n-1} se trouve en appuyant sur $\boxed{2nde}$ puis sur $\boxed{7}$, puis $\boxed{(}$, $\boxed{X,T,\theta,n}$, puis $\boxed{-}$, puis $\boxed{1}$ et on ferme la parenthèse avec $\boxed{)}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.
  - Exemple avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+3$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,**u(nMin)=1**, $\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{2nde}$,$\boxed{7}$, $\boxed{(}$,$\boxed{X,T,\theta,n}$,$\boxed{-}$,$\boxed{1}$, $\boxed{)}$, $\boxed{+}$, $\boxed{3}$. puis $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.

Savoir-Faire 6.4

Savoir utiliser la calculatrice pour calculer des termes (suites récurrentes et explicites)

✎Je m'entraîne seul(e)

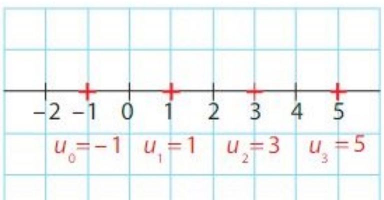
Utiliser les exemples déjà étudiés pour les vérifier à la calculatrice.

1.5 Représentation graphique de suites

1.5.1 Sur une droite graduée

C'est tout simple : on trace une droite graduée, et on place dessus les valeurs de u_0, u_1, u_2...

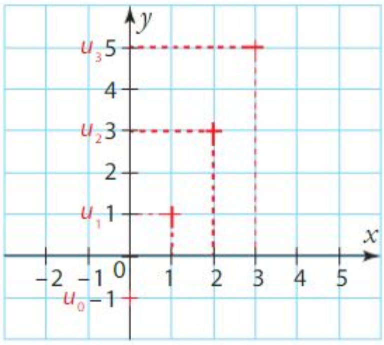
Suite (u_n) définie par $u_n = 2n-1$



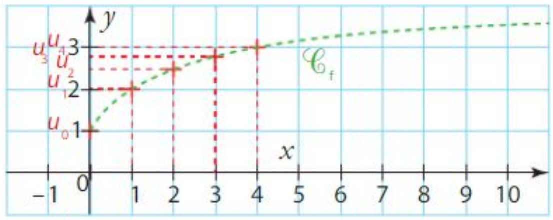
1.5.2 Dans un repère

C'est tout simple aussi : on trace place les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$...

Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



Suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$

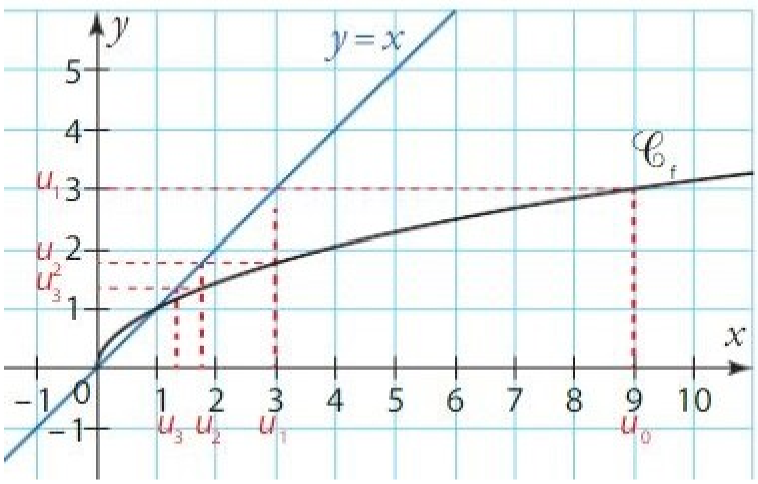


1.5.3 Cas des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Bien sûr, on peut représenter cette suite en utilisant l'un des deux procédés précédents. Mais dans le cas d'une suite récurrente, il y a une méthode qui se base sur la courbe représentative de la fonction f.
Attention, cette méthode fonctionne uniquement avec les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'idée est de construire les termes à l'aide de la courbe C_f et la droite d'équation $y = x$.

- On commence par placer u_0 sur l'axe des abscisses
- On construit u_1 sur l'axe des ordonnées en utilisant le courbe C_f et le fait que $u_1 = f(u_0)$.
- On construit u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$.
- On a donc u_1 sur l'axe des abscisses, et on peut réitérer le procédé pour u_2, u_3...autant de fois que nécessaire.

Suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



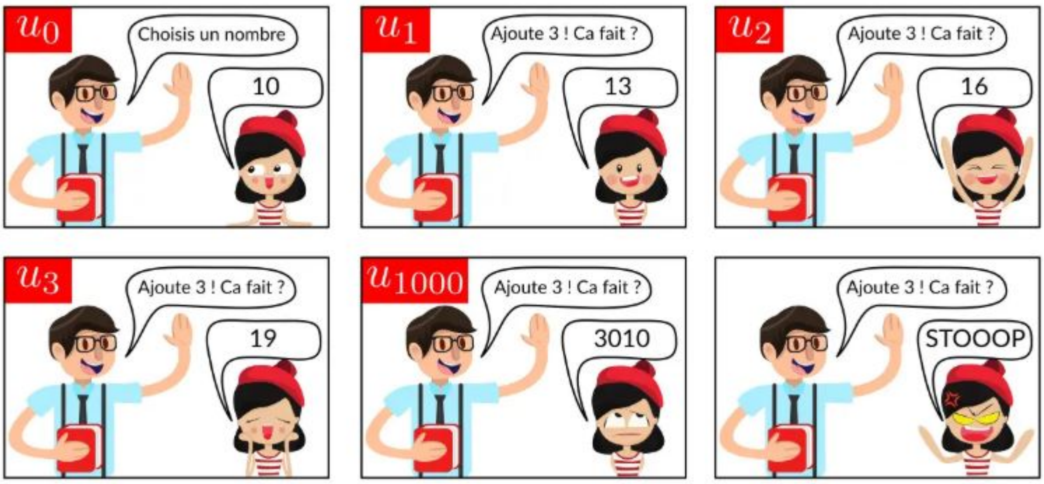
Savoir-Faire 6.5
Savoir représenter une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples
Soit u_n une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et soit (v_n) une suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$.
Déterminer la fonction f et g telles que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. Représenter ensuite ces deux suites (deux graphiques différents) en utilisant la méthode précédente. Pour vérification, on pourra faire les calculs à la main des premiers termes (ou avec la calculatrice) et s'assurer que les valeurs trouvées graphiquement soient en cohérence avec les valeurs calculées.

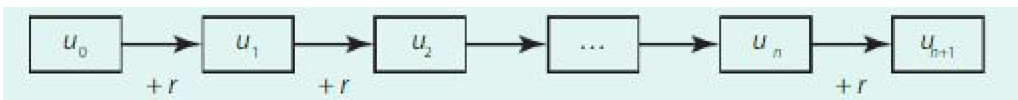
2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

une suite arithmétique, c'est exactement ça !



Définition 6.2
Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemple
- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n+1 = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u0 = -2$.

- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$ est la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Savoir-Faire 6.6

Savoir montrer qu'une suite est une suite arithmétique Dans chaque cas, dire si la suite est une suite arithmétique, et préciser éventuellement sa raison :

- Soit (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n_i n\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 5$
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 3$.
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2$

2.2 Propriétés

Propriété 6.1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Savoir-Faire 6.7

Savoir utiliser les formules explicites des suites arithmétiques Exemple :

- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3. Déterminer u_{1000}.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_7 = 10$ et de raison 5. Déterminer u_{1000}.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_u = 11$ et $u_{15} = 23$. Déterminer u_0 et r.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_7 = 23$ et $u_{25} = 50$. Déterminer u_0 et r.

✎Je m'entraîne seul(e)

Choisir deux nombres r et u_0. Calculer deux termes distincts en considérant que la suite est arithmétique (par exemple u_{117} et u_{215}). A partir de u_{117} et u_{215}, retrouver r et u_0.

2.3 Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Carl Gauss

Nous sommes dans les années 1780, en ce qui est aujourd'hui l'Allemagne. M. Büttner est instituteur. Ses élèves étant ce jour-là quelque peu dissipé, il leur demande d'additionner les nombres de 1 à 100, espérant bien obtenir un peu de calme.
Seulement voilà, à peine quelques instants plus tard, alors que tous devraient être en train de plancher pour encore un moment sur le problème, l'un deux (Carl Gauss) prétend avoir le résultat : 5050…

Propriété 6.2

Soit (u_n) une suite arithmétique.
$Somme\ des\ termes\ cons\acute{e}ctifs = \frac{nb\ de\ termes \times (1er\ terme\ +\ dernier\ terme)}{2}$

Savoir-Faire 6.8

Savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique
Exemple : Calculer la somme des nombres impairs inférieurs à 100.

✎Je m'entraîne seul(e)

Voici quelques exercices corrigés

- On considère une suite arithmétique telle que $u_7 = -9$ et $u_{25} = -45$.Calculer la somme $S = u_7 + ... + u_{25}$.Rép : -513
- On considère une suite arithmétique telle que $u_8 = -19$ et $S = u_8 + ... + u_{32} = -1075$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : r= -2.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = -17$ et $S = u_3 + ... + u_{32} = -2250$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : r= -4.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_6 = 19$ et $u_{29} = 111$.Calculer la somme $S = u_6 + ... + u_{29}$.Rép : 1560.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_5 = -10$ et $u_{20} = -40$.Calculer la somme $S = u_5 + ... + u_{20}$.Rép : -400.
- Déterminer l'entier n tel que $16 + 17 + ... + n = 5875$. Rép : 109.
- Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique. $S = -76 - 81 + ... - 251$. Rép : -5886

3 Suite géométrique

3.1 Approche

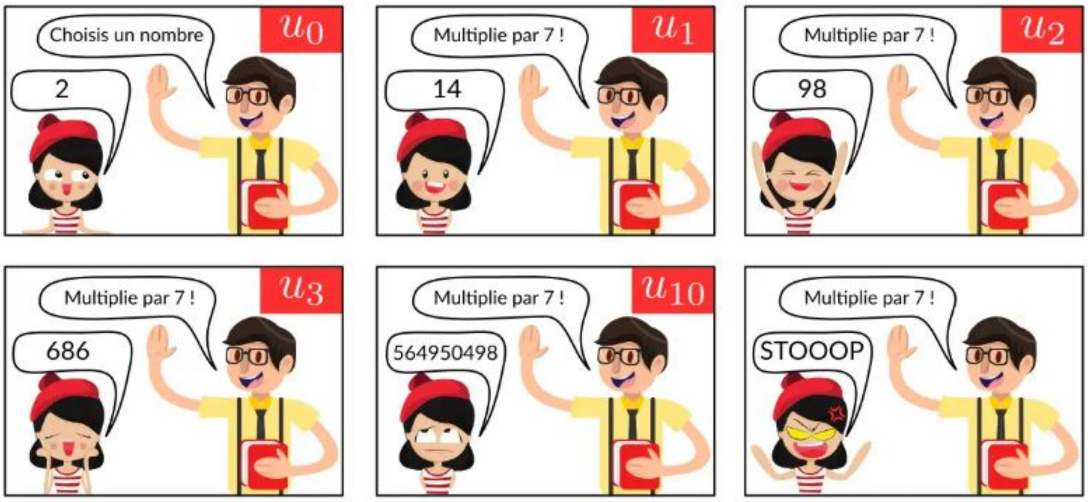
Pliages d'une feuille de papier...

L'idée est d'évaluer l'épaisseur obtenue après avoir plié une feuille de papier plusieurs fois en deux. L'épaisseur du papier à lettres est de 0,1 mm.

Quelle est l'épaisseur obtenue après 3 pliages ?
Et après 10,23 pliages ?

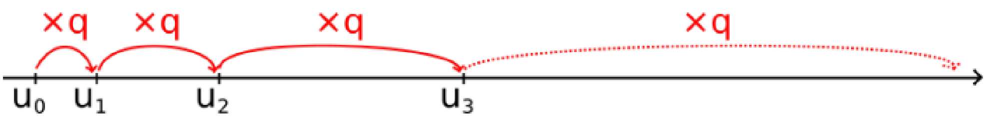
3.2 Définition

une suite géométrique, c'est exactement ça !



Définition 6.3

On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$, où q est un réel.
q est appelé raison de la suite géométrique (u_n).



Exemple

- 2 ;4 ;8 ;16 est une suite géométrique de raison 2.
- 3 ;-6,18 est une suite géométrique de raison -3

Savoir-Faire 6.9

Savoir démontrer qu'une suite est une suite géométrique ou non.
Exemple : Les suites suivantes sont-elles des suites géométriques ?

- Soit le suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$
- Soit le suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 1$.
- Soit le suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2$
- Soit le suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$

3.3 Formules explicites

Démonstration 6.1

Calcul du terme général d'une suite géométrique.
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Montrer que $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété 6.3

- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.
- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Généralisation
  Soit p un entier naturel.
  Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Savoir-Faire 6.10

Savoir utiliser les formules explicites avec les suites géométriques.
Exemple :

- Soit u la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$. Calculer u_7. Rép : 8748
- Soit v la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_6 = 512$. Calculer u_9. Rép : 64.
- Soit (u_n) la suite géométrique définie par $q = 5$ et $u_0 = 10$. Exprimer u_n en fonction de n.

✎Je m'entraîne seul(e)

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, telle que $u_4 = 48$ et $u_7 = 384$. Calculer u_0 et q. (Réponse :$u_0 = 6$ et $q = 2$)
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, telle que $u_4 = 324$ et $u_7 = -8748$. Calculer u_0 et q.(Réponse :$u_0 = 4$ et $q = -3$)
- Soit (u_n) la suite géométrique la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, telle que $u_2 = 0.5$ et $u_5 = 0.0625$. Calculer u_0 et q.(Réponse :$u_0 = 2$ et $q = 0.5$)
- Soit (u_n) la suite géométrique la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q, telle que $u_5 = 2048$ et $u_7 = 32768$. Calculer u_1 et q, en sachant que $q < 0$.(Réponse :$u_1 = 8$ et $q = -4$)
- Soit (u_n) la suite géométrique la suite géométrique la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q, telle que $u_5 = -32$ et $u_9 = -512$. Calculer u_1 et q, en sachant que $q > 0$.(Réponse :$u_1 = -2$ et $q = 2$)

3.4 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Démonstration 6.2

Démonstration : calcul de $1 + q + q^2 + ... + q^n$:

Propriété 6.4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $q \neq 1$.

$$Somme\ des\ termes\ consécutifs = (1er\ terme) \times \frac{1-q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$$

SG et somme des termes

Savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Exemples :

- Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$
- Calculer $S' = 1 + 3 + 9 + \ldots + 2187$

✎Je m'entraîne seul(e)

Voici quelques exercices corrigés

- On considère la suite géométrique de raison -2 telle que $u_7 = -256$. Calculer $S = u_7 + ... + u_{14}$.Rép : 21760
- On considère la suite géométrique de raison 1 telle que $u_2 = -4$. Calculer $S = u_2 + ... + u_9$.Rép : -32
- On considère une suite géométrique de raison 3 telle que $u_2 = -72$. Calculer $S = u_2 + ... + u_{11}$.Rép : -2125728
- Calculer la somme S telle que $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{13}$. Rép : 2391484
- Calculer $S = 7 + 14 + 28 + \ldots + 114688$. Rép : 229369

♡Défi !

Écrire une fonction Python nommée *defi2* qui :

- a pour paramètres 4 nombres :
  - q (réel, qui correspond à la raison de la SG)
  - u_0 (réel, premier terme)
  - p1 (entier)
  - p2 (entier, strictement supérieur à p1)
- renvoie la somme u_p1+...+u_p2, en considérant que la suite est une suite géométrique.

Pour tester la fonction, on vérifiera par exemple que l'appel de defi2(3,1,0,13) renvoie 2391484.

Savoir-Faire 6.12

SAVOIR UTILISER LES SUITES GÉOMÉTRIQUES POUR ÉTUDIER LES ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES À TAUX CONSTANT

Rappels de la classe de seconde :

Lien entre pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur :

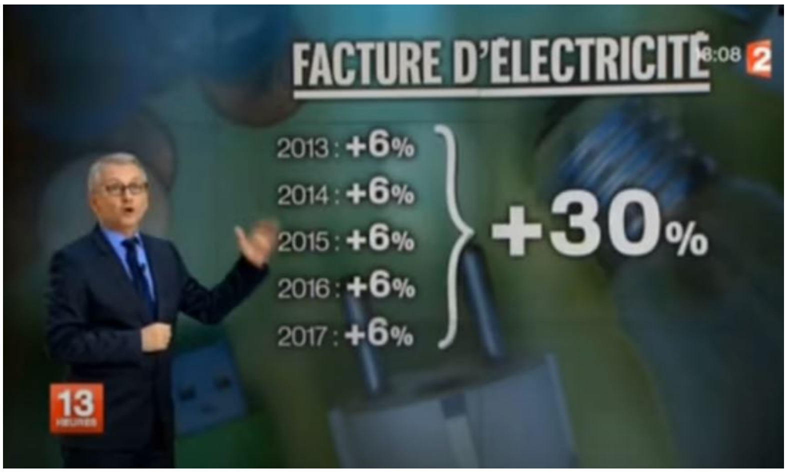
- Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$
- Diminuer une valeur de t % revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$
- $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés les coefficients multiplicateurs.

EXEMPLE 1 :
On place une somme de 5000 euros sur un compte rémunéré à 3 % par an (intérêts composés).

- Quelle est la somme au bout de 1 an ?
- au bout de 10 ans ?
- Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle doublée ? triplée ?

EXEMPLE 2 :
Corriger ce présentateur télé !

Erreur dans le JT de France 2



Cliquez ici pour voir la vidéo du JT de France 2..

4 Variations d'une suite

4.1 Étude d'un exemple

Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = (n-3)^2$.

4.2 Définitions

Définition 6.4

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Dire qu'une suite (u_n) est croissante pour $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Dire qu'une suite (u_n) est décroissante pour $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.

4.3 Méthodes pour démontrer les variations d'une suite

4.3.1 Méthode de la différence

- On calcule $u_{n+1} - u_n$.
- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est décroissante à partir de ce rang.

4.3.2 Méthode du quotient

⚠ Cette méthode ne fonctionne que si tous les termes de la suite sont strictement positifs.

- On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

4.3.3 Méthode en utilisant les variations de f pour une suite du type $u_n = f(n)$

On utilise pour cela la propriété suivante :

Variation de fonction et de suite

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

- si f est une fonction croissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est croissante pour $n \geq k$.
- si f est une fonction décroissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante pour $n \geq k$.

La méthode consiste donc à :

- Étudier les variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Trouver un intervalle du type $[k; +\infty[$ (avec $k \in \mathbb{N}$) où la fonction f est monotone.
- Conclure, en utilisant la propriété précédente, quant aux variations de la suite (u_n) .

Savoir-Faire 6.13

SAVOIR DÉMONTRER LES VARIATIONS D'UNE SUITE.

1. Méthode 1 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $(n+2)^2$.
2. Méthode 2 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5}{2^n}$.
3. Méthode 3 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $n^2 - 3n + 1$.

✎Je m'entraîne seul(e)

Étudier les variations des suites (u_n) définie par :

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Rép : $u_)$ est strictement croissante pour $n \geq 1$.
2. $u_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
3. $u_n = n^3 - n^2 + n$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
4. $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$ Rép : (u_n) est strictement croissante.

4.4 Variations des suites arithmétiques et suites géométriques

4.4.1 Suites arithmétiques

Propriété 6.6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante.
- si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration 6.3

Démonstration évidente en utilisant la méthode de la différence, car $u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple

- $r = 3$ et $u_0 = 2$:
- $r = -2$ et $u_0 = 5$:

4.4.2 Suites géométriques

Propriété 6.7

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q = 0$ ou $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante (au pire à partir du second terme).
- si $q > 1$ alors :
  - si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
  - si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $0 < q < 1$ alors :
  - si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
  - si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemple

- $q = 3$ et $u_0 = 2$:
- $q = 3$ et $u_0 = -2$:
- $q = 0.5$ et $u_0 = 2$:
- $q = 0.5$ et $u_0 = -2$:
- $q = -3$ et $u_0 = 1$:

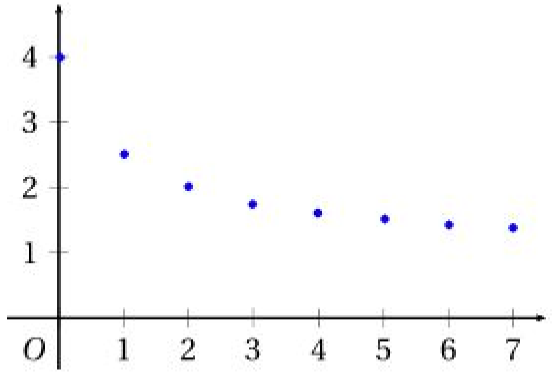
5 Notion de limite de suite

5.1 Suite convergente

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$. Que devient u_n si n prend des "grandes" valeurs ?
On observe que les termes de la suite (u_n) semblent se rapprocher de 1, et donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
On peut d'ailleurs renforcer ce sentiment de façon numérique, en utilisant la calculatrice par exemple, afin de représenter la suite (u_n) .

Représentation de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$



Définition 6.5

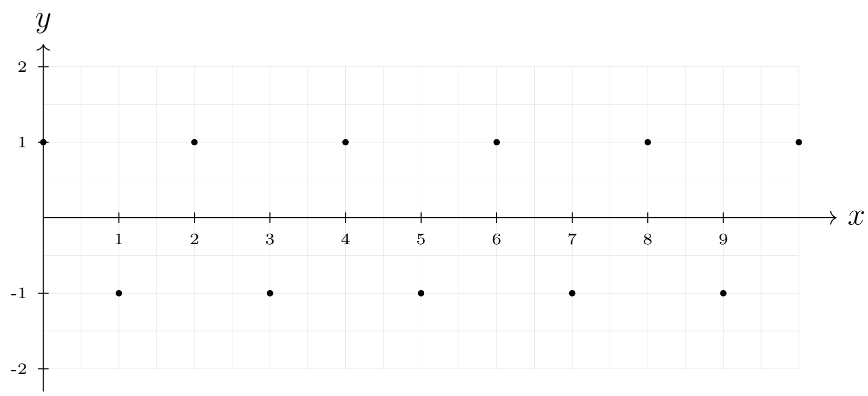
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de l dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

5.2 Suite divergente

Définition 6.6

Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.



Définition 6.7

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition 6.8

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi petits [a] que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

a. petits ne signifie pas proche de zéro, mais négatifs et grands en valeur absolue !

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

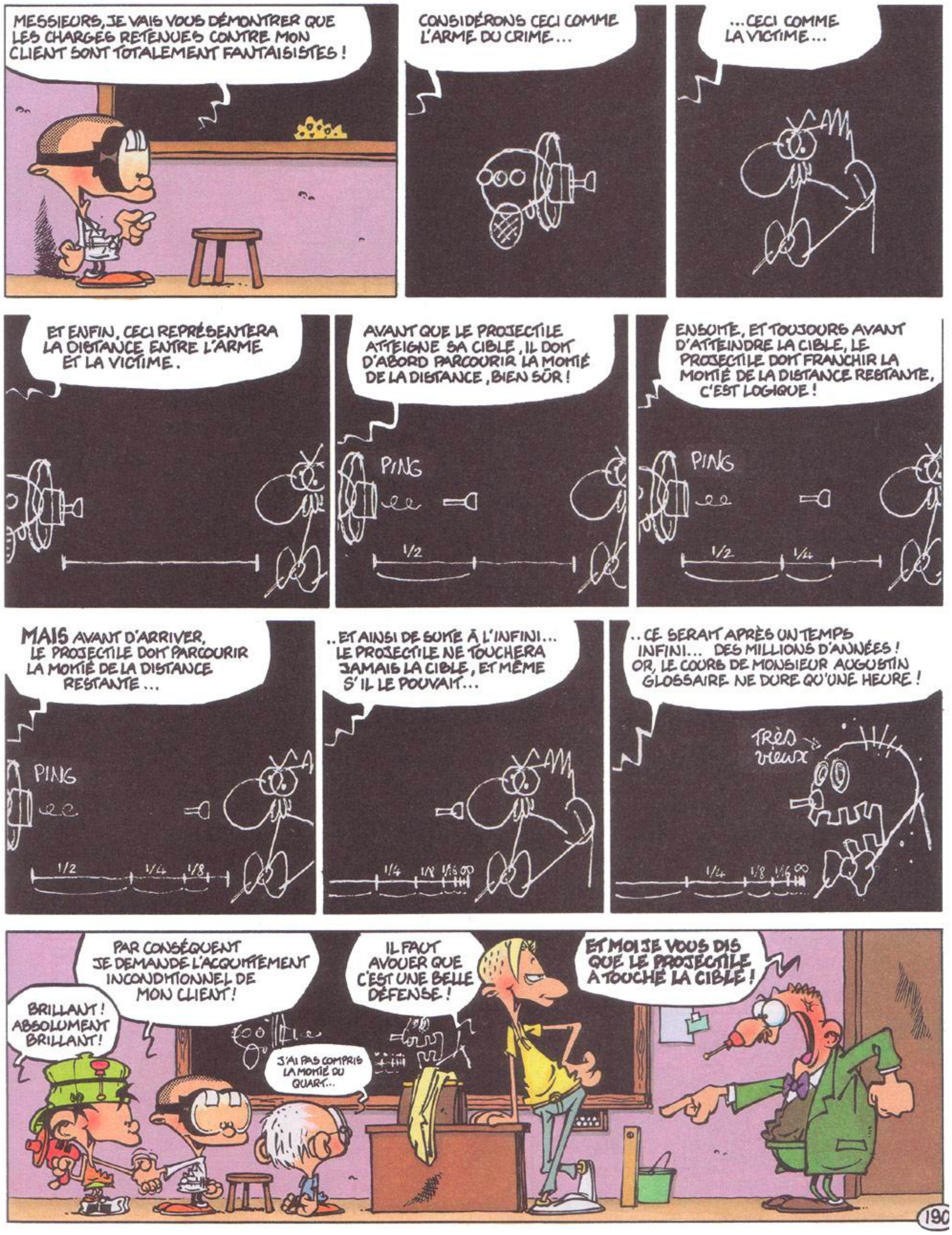
Savoir-Faire 6.14

Savoir conjecturer une limite de suite

Conjecturer, en utilisant la calculatrice, les limites des suites suivantes :

- (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.
- (u_n) la suite définie par $u_n = -n^3$.
- (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{1+n}$.

Paradoxe de Zénon



On supposera dans la suite que le projectile est lancé avec suffisamment de force pour qu'il puisse atteindre sa cible, et que la direction est correcte aussi ; le raisonnement précédent (BD) tient toujours ! ! Il est basé sur le fait que la distance entre le projectile et le prof ne sera jamais nulle.

Et pourtant, en toute logique, le projectile a dû atteindre sa cible, car :

- Observons la tête du prof !

- On l'a dit, le projectile est lancé avec assez de force, et l'élève est supposé adroit pour ne pas rater la tête du prof !

Alors, que se passe-t-il ?
On prendra dans la suite $d = 1$
L'idée est donc de considérer la somme infinie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

Le paradoxe vient de cette idée intuitive -fausse- : "Puisque il faut ajouter une infinité de longueurs, alors la distance ne sera jamais réalisée entièrement ".

Ici, on ajoute une infinité de longueurs qui deviennent infiniment proches de zéro. La question est de savoir si cette somme infinie va (un jour) être égale (exactement) à d (distance initiale)

Supposons pour cela la suite (Il fallait s'y attendre !) $u_)$ tel que u_n représente la longueur parcourue par le projectile à la n-ième étape.
On a donc $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$...etc...

On peut ainsi considérer la somme S_n définie par $S_n = u_1 + u_2 + u_3... + u_n$

1. Exprimer S_n en fonction de n
2. Étudier la limite de (S_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. La suite (S_n) est-elle convergente ? divergente ?

On vient de démontrer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 1$! (et c'est bien un "=", pas une valeur approchée ! ! !)

Le projectile va donc bien parcourir la distance initiale, et atteindra bien le pauvre professeur !