14.2 Échantillon d'une loi de probabilité

14.2.1 Définition

Définition Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble Ω. Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

Définition

- La variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par $S_n = X_1+X_2+...+X_n$.
- La variable aléatoire moyenne est la variable aléatoire définie par $M_n = \frac{1}{n}S_n$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe 1 si le paquet de chips est conforme, 0 sinon.
On constate que 90% des paquets sont conformes.
On a donc $E(X) = 0.9$ et $V(X) = 0.09$ On choisit au hasard 2 paquets de chips et on effectue pour chacun d'entre eux le test de conformité. On admet qu'étant donné le grand nombre de paquet de chips produit, ce choix de 2 paquets peut être assimilé à un tirage avec remise.
(X_1, X_2) forme un échantillon de taille 2 de variable aléatoire X.
On appelle $S_2 = X_1 + X_2$ la variable aléatoire somme de l'échantillon (X_1, X_2) On appelle $M_2 = \dfrac{S_2}{2}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon (X_1, X_2)

14.2.2 Espérance,variance et écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

Exemple

On reprend l'exemple précédent.
On peut montrer que la loi de probabilité de (X_1, X_2) est

valeurs de (X_1, X_2)	$(0;0)$	$(0;1)$	$(1;0)$	$(1;1)$
probabilité	0.01	0.09	0.09	0.81

On en déduit donc que :

valeurs de M_2	0	$\frac{1}{2}$	1
probabilité	0.01	0.18	0.81

L'espérance de M_2 est donc $E(M_2) = 0.01 \times 0 + 0.18 \times \frac{1}{2} + 0.81 \times (1-0.9)^2 = 0.9 = E(X)$.
☛ On comprend intuitivement que l'espérance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon $(X-1, X_2)$ est égale à l'espérance de la variable aléatoire X associée à cet échantillon.
La variance est quant à elle égale à

$$V(M_2) = 0.01 \times (0-0.9)^2 + 0.18 \times (0.5-0.9)^2 + 0.81 \times (1-0.9)^2 = 0.045 = \frac{0.09}{2} = \frac{V(X)}{2}$$

☛ Ainsi la variance de la variable aléatoire moyenne est plus faible que la variance de la variable d'origine. Intuitivement, pour un échantillon de taille 2, le nombre de situations pouvant donner des valeurs proches de l'espérance est plus important que sans échantillon.

Propriété

Soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Propriété

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Remarque

$V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$ montrer que la variance diminue quand la taille de l'échantillon augmente. Elle qualifie la fluctuation d'échantillonnage. Plus la taille de l'échantillon est grand, plus l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance est proche de 0.
Ainsi, les valeurs prises par la moyenne deviennent de plus en plus probables dans un voisinage de l'espérance.

14.2.3 Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. On a alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$

3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration 23- - Exigible - -

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. Montrer que $E(X) = np$ et que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Savoir-Faire 14.71

SAVOIR UTILISER LA PROPRIÉTÉ PRÉCÉDENTE

Une étude faite dans un restaurant montre que 85 % des clients consomment un dessert. On interroge dix clients du restaurant. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients commandant un dessert parmi ceux interrogés.

1. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire X.
2. Calculer la variance et l'écart type (arrondi au millième) de la variable aléatoire X.

Méthode :

- Avant d'appliquer les résultats obtenus dans la propriété, il est tout d'abord essentiel de bien justifier que la variable aléatoire étudiée suit une loi binomiale :
  - **Répétition** d'une expérience ayant **deux** issues (succès et échec)
  - Expériences **identiques**
  - Expériences **indépendantes**
  - X **compte le nombre de succès**
- C'est seulement après avoir justifié que X suit une loi binomiale que nous pouvons utiliser les égalités de la propriété.

Savoir-Faire 14.72

SAVOIR UTILISER LA SOMME ET LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON DE TAILLE n

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en charge par le standardiste.

La variable aléatoire T associe à tout client son temps d'attente. On sait que $E(T) = 18$ et $\sigma(T) = 7$. On estime que la probabilité qu'un client attende plus de 20 secondes est égale à 0.4.

1. Au cours de la même semaine, un même client passe 5 appels indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours des 5 appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Dans le but de diminuer l'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen pour cet échantillon. Déterminer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.