

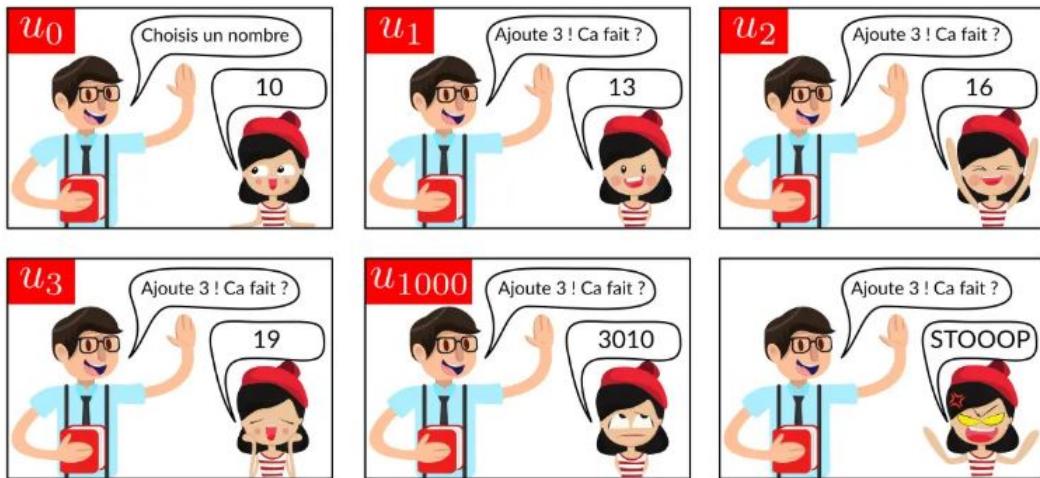
8.1

Suites arithmétiques

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

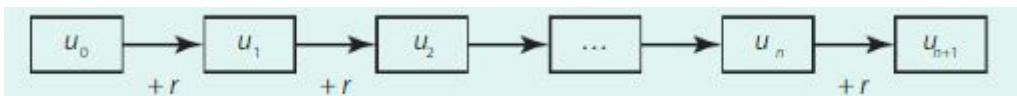
8.1.1 Définition

une suite arithmétique, c'est exactement ça !



Définition

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemple

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$ est la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Savoir-Faire 8.42

SAVOIR MONTRER QU'UNE SUITE EST UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Dans chaque cas, dire si la suite est une suite arithmétique, et préciser éventuellement sa raison :

- Soit (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 5$
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 3$.
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$

- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2$

8.1.2 Propriétés

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Savoir-Faire 8.43

SAVOIR UTILISER LES FORMULES EXPLICITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES

Exemple :

- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3. Déterminer u_{1000} .
- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_7 = 10$ et de raison 5. Déterminer u_{1000} .
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_{11} = 11$ et $u_{15} = 23$. Déterminer u_0 et r .
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_7 = 23$ et $u_{25} = 50$. Déterminer u_0 et r .

Je m'entraîne seul(e)

Choisir deux nombres r et u_0 . Calculer deux termes distincts en considérant que la suite est arithmétique (par exemple u_{117} et u_{215}). A partir de u_{117} et u_{215} , retrouver r et u_0 .

8.1.3 Variations des suites arithmétiques

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante.
- si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration 8.6

§ Démonstration évidente en utilisant la méthode de la différence, car $u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple

- $r = 3$ et $u_0 = 2$:
- $r = -2$ et $u_0 = 5$:

8.1.4 Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique**Histoire**

Carl Gauss



Nous sommes dans les années 1780, en ce qui est aujourd’hui l’Allemagne. M. Büttner est instituteur. Ses élèves étant ce jour-là quelque peu dissipé, il leur demande d’additionner les nombres de 1 à 100, espérant bien obtenir un peu de calme. Seulement voilà, à peine quelques instants plus tard, alors que tous devraient être en train de plancher pour encore un moment sur le problème, l’un deux (Carl Gauss) prétend avoir le résultat : 5050...

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique.

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \frac{\text{nb de termes} \times (\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Savoir-Faire 8.44

SAVOIR CALCULER LA SOMME DES TERMES CONSÉCUTIFS D’UNE SUITE ARITHMÉTIQUE
Exemple : Calculer la somme des nombres impairs inférieurs à 100.

 **Je m'entraîne seul(e)**

Voici quelques exercices corrigés

- On considère une suite arithmétique telle que $u_7 = -9$ et $u_{25} = -45$. Calculer la somme $S = u_7 + \dots + u_{25}$. Rép : -513
- On considère une suite arithmétique telle que $u_8 = -19$ et $S = u_8 + \dots + u_{32} = -1075$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : $r = -2$.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = -17$ et $S = u_3 + \dots + u_{32} = -2250$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : $r = -4$.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_6 = 19$ et $u_{29} = 111$. Calculer la somme $S = u_6 + \dots + u_{29}$. Rép : 1560.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_5 = -10$ et $u_{20} = -40$. Calculer la somme $S = u_5 + \dots + u_{20}$. Rép : -400.
- Déterminer l'entier n tel que $16 + 17 + \dots + n = 5875$. Rép : 109.
- Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique. $S = -76 - 81 + \dots - 251$. Rép : -5886