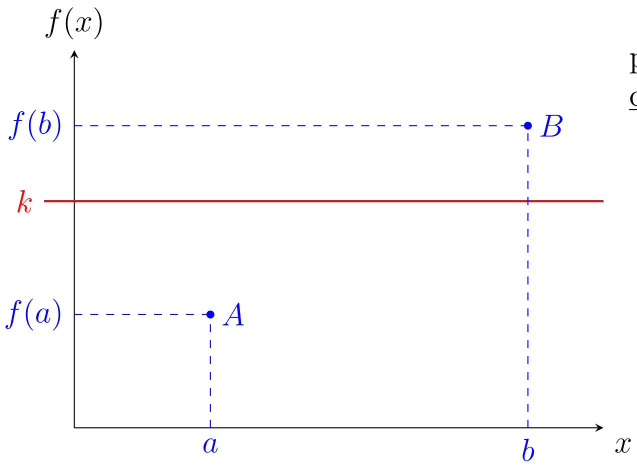
7.2 Théorème des valeurs intermédiaires

7.2.1 Principe



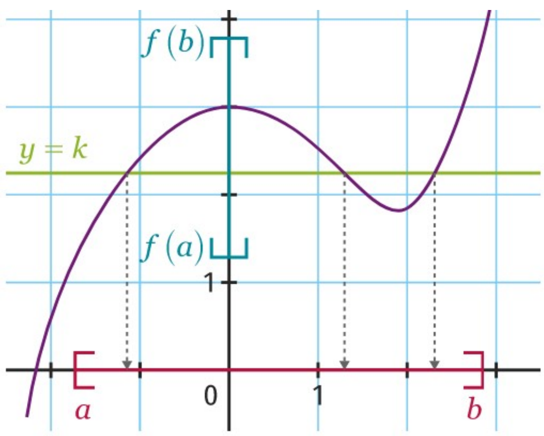
On désire relier le point A au point B par une courbe représentative d'une fonction <u>continue</u>.

1. Est-ce possible de ne pas passer par la droite rouge $y = k$?
2. Peut-on y passer plusieurs fois ?
3. Q uelle condition ajouter à la fonction f pour que la courbe de la fonction f passe une et une seule fois par la droite rouge ?

7.2.2 Définition

Propriété - Théorème des valeurs intermédiaires

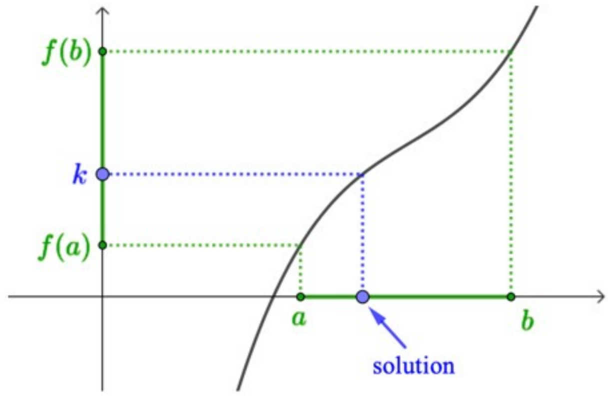
Si f est continue sur $[a;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.
Autrement dit, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f dans $[a;b]$.



7.2.3 Cas des fonctions monotones

Propriété - Corolaire

Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a;b]$.



Remarque

On peut aussi étendre ce corollaire aux intervalles ouverts en utilisant les limites.

Savoir-Faire 7.2

Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$

Méthode :

Pour prouver que $f(x) = k$ admet au mois une solution sur un intervalle

- Vérifier que la fonction est continue sur l'intervalle considéré
- Calculer $f(a)$ et $f(b)$ si l'intervalle considéré est de la forme $[a;b]$, ou bien les limites aux bornes de l'intervalle considéré.
- Vérifier que k est bien compris dans l'intervalle formé avec les deux calculs précédents
- Conclure avec le théorème des valeurs intermédiaire qu'il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle considéré.

2. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

Méthode :

Pour prouver que $f(x) = k$ admet une unique solution sur un intervalle

- Vérifier que la fonction est continue sur l'intervalle considéré
- Vérifier que la fonction est monotone sur l'intervalle considéré
- Calculer $f(a)$ et $f(b)$ si l'intervalle considéré est de la forme $[a; b]$, ou bien les limites aux bornes de l'intervalle considéré.
- Vérifier que k est bien compris dans l'intervalle formé avec les deux calculs précédents
- Conclure avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire qu'il existe une solution unique à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle considéré.

Exercice 7.6

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2; 2]$
2. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$

7.2.4 Méthode d'encadrement

Il existe deux méthodes pour déterminer un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = k$:

- La méthode par "balayage"
- La méthode par "dichotomie". Le principe est ici de diviser par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ et on détermine si α se trouve dans $[a; m]$ ou bien $[m; b]$.

Savoir-Faire 7.3

SAVOIR DONNER UN ENCADREMENT DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
On a démontré précédemment que l'équation $f(x) = 0$ admettait une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$. Notons α cette solution.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.0001 par "balayage" avec la calculatrice.

Savoir-Faire 7.4

SAVOIR CONSTRUIRE UN ALGORITHME DE DICHOTOMIE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de α en utilisant la méthode de la dichotomie.

2. Cliquez ici pour afficher l'activité Géogébra. Dans cette activité, vous verrez la courbe de la fonction f sur $[-1;1]$. Vous pouvez cliquer sur "suivant" afin de visualiser les différentes étapes. Vous pouvez ainsi compléter le tableau suivant qui permet de trouver une solution de α à 10^{-1} près.

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
a	-1					
b	1					
$b-a>10^{-1}$	Vrai					
m	0					
$f(a)\times f(m)<0$	Faux					

3. L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-n} près, avec $n \in \mathbb{N}$

```
TANT QUE b − a > 10^(−n) FAIRE
    m ← (a + b)/2
    SI f(a) × f(m) < 0 ALORS
        b ← m
    SINON
        a ← m
```

Vérifier que cet algorithme correspond bien au principe de la dichotomie décrit dans l'activité Géogébra.

4. Coder cet algorithme en langage python. Saisir et exécuter le programme avec $n=4$ et interpréter le résultat renvoyé.

Exercice 7.8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^5+2x-2$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x)=8$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode de dichotomie (programme python sur la calculatrice).

Exercice 7.9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{4x+7}+x^3-10$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.

Exercice 7.10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.