3.5 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Un point $M(x; y; z)$ appartient à d si et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Définition

Soit x_0,y_0,z_0,a,b, et c des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Le système d'équations $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$ définit une **représentation paramétrique** de la droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Un tel système est aussi appelé **système d'équations paramétriques** de d.

Savoir-Faire 3.9

Savoir déterminer une représentation paramétrique de droite
Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(3; 3; 3)$ et $B(2; 6; 4)$.
Déterminer deux représentations paramétriques de la droite (AB).

Exercice 3.24
Dans chacun des cas suivants, déterminer <u>une</u> représentation paramétrique de la droite (AB) :

1. $A(3; -1; 0)$ et $B(5; 2; -3)$
2. $A(1; 2; -2)$ et $B(6; -4; 3)$

Exercice 3.25
Déterminer <u>une</u> représentation paramétrique de la droite d passant par $A(5; 2; -1)$ et parallèle à la droite (BC), avec $B(4; -3; 1)$ et $C(0; 5; 7)$.

Savoir-Faire 3.10

Savoir reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique

On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x=5-t \\ y=1-3t \\ z=1+t \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$

Déterminer un point de la droite, ainsi qu'un de ses vecteurs directeurs

Exercice 3.26

On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x=-5+t \\ y=8-7t \\ z=1+2t \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$

1. Le point $A(-4;1;3)$ appartient-il à la droite d ? et le point $B(1,1,2)$?
2. Donner les coordonnées d'un autre point de d, ainsi que celles d'un vecteur directeur de d.
3. d est-elle parallèle à d' de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=1-2k \\ y=3-14k \\ z=5+4k \end{array}\right.$, avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 3.27

On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=6-2t \\ z=4t \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$

1. Le point $A(3;0;4)$ appartient-il à la droite d ?
2. Donner les coordonnées d'un autre point de d, ainsi que celles d'un vecteur directeur de d.
3. Soient $B(3;-3;13)$ et $C(3;5;-3)$. Les droites d et (BC) sont-elles parallèles ?

Savoir-Faire 3.11

Savoir déterminer l'intersection d'une droite avec un plan de base

Soient $A(3;-2;4)$ et $B(5;2;0)$ deux point de l'espace dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$.

☛ Cliquer ici ici pour visualiser la figure construite à l'aide de Geogebra !

Exercice 3.28

La droite d passant par $A(2;5;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4;0)$ est-elle parallèle au plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$?

Exercice 3.29

Soit d la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=4-2k \\ y=1+k \\ z=-9+3k \end{array}\right.$, avec $k \in \mathbb{R}$

Déterminer les coordonnées de E, F et G, points d'intersection respectifs de d avec

1. le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. le plan $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$.

3. le plan $\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$.

Savoir-Faire 3.12

Savoir étudier la position relative de deux droites de l'espace On considère les droites d_1 et d_2 dont on donne pour chacune une représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x = -6t+4 \\ y = -8t-1 \\ z = 6t-22 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3t'+1 \\ y = 4t' \\ z = -3t'+3 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles coplanaires ?
3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles confondues ?

Exercice 3.30

On considère les droites Δ_1 et Δ_2 dont on donne pour chacune une représentation paramétrique :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3t-6 \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = -3t'+3 \\ y = 2t'-3 \\ z = t'+2 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Justifier que le point $A(-3;1;4)$ appartient à chacune de ces deux droites.
2. Que peut-on en déduire quant à la position relative de Δ_1 et Δ_2 ?
3. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles confondues ?

Savoir-Faire 3.13

Savoir déterminer l'intersection de deux droites de l'espace

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 1-3k \\ y = 1+k \\ z = 2-5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3.31

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 8-t \\ y = -6-2t \\ z = 15+t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = -2+4k \\ y = 6-6k \\ z = 1+2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

Exercice 3.32

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 20 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3.33

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = -2 + k' \\ y = 2 - k' \\ z = 1 + 4k' \end{cases}, \text{ avec } k' \in \mathbb{R}$$

Les droites d et d' sont-elles coplanaires ? sont-elles sécantes ?

Exercice 3.34

Dans chacun des cas, déterminer la position relative de d et de d' :

1. $d : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = 2t' + 2 \\ z = -t' - 3 \end{cases}, \text{ avec } t' \in \mathbb{R}$

2. $d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x = 3t' \\ y = -2t' + 1 \\ z = t' + 1 \end{cases}, \text{ avec } t' \in \mathbb{R}$

Exercice 3.35

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1; 2; -3)$, $B(2; 4; 1)$ et $C(-1; 3; 2)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan
2. Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (ABC). Montrer qu'il existe deux réel t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $M \in (ABC)$ si et seulement si $\begin{cases} x = t - 2t' + 1 \\ y = 2t + t' + 2 \\ z = 4t + 5t' - 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.
4. Le point $E(1; 4; -7)$ appartient-il au plan (ABC) ?
5. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = -3k + 4 \\ z = 9k - 7 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   La droite d est-elle parallèle au plan (ABC) ?

Savoir-Faire 3.14

SAVOIR DÉTERMINER LA COPLANARITÉ DE QUATRE POINTS

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soient les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que $\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires et en déduire que A, B, C et D le sont aussi.

Méthode :

Pour montrer que 3 vecteurs $\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires :

- On commence par étudier la colinéarité de deux vecteurs (par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$).
- Ensuite, deux possibilités :
  - Si $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, alors les 3 vecteurs $\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires et l'exercice est terminé
  - Sinon, il suffit de montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$

Exercice 3.36

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, et on considère les points $A(-2;-14;-24)$, $B(-2;8;4)$, $C(-1;3;-7)$ et $D(-3;2;1)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3.37

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, et on considère les points $A(1;0;1)$, $B(3;14;9)$, $C(12;5;0)$ et $D(-2;3;4)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3.38

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, et on considère les points $A(-3;0;1)$, $B(4;2;3)$, $C(-5;2;-3)$ et $D(3;0;5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Exercice 3.39

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, et on considère les points $A(2;3;4)$, $B(3;0;4)$, $C(5;6;7)$ et $D(8;7;13)$.
Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?