13.2 Loi binomiale

Maths Spé terminale - JB Duthoit

13.2.1 Schéma de Bernoulli

Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, identiques et indépendantes.

Propriété

L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et p est $\{S; \bar{S}\}^n$.

Exercice 13.2
On lance trois fois de suite le même dé, où le succès S est l'obtention d'un 6.

1. Représenter l'expérience aléatoire par un arbre pondéré
2. Donner l'ensemble des issues possibles.

13.2.2 Loi binomiale

Définition

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**, et elle est noté $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Démonstration 22- -Exigible- -

Remarque

Sur la calculatrice Numworks, se rendre sur l'onglet `Probabilités`, puis :

- Choisir `Binomiale`
- Rentrer la valeur de `n` et `p`, puis `suivant`
- Choisir le symbole qui correspond à $P(X=k)$, puis renseigner la valeur de `k`

Savoir-Faire 13.64

SAVOIR MODÉLISER UNE SITUATION PAR UNE LOI BINOMIALE

On considère un jeu de 32 cartes. On tire deux cartes de ce jeux, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de carreaux obtenus. Dans chacune des situations suivantes, dire si X suit une loi binomiale, et préciser éventuellement ces paramètres.

1. On tire deux cartes l'une après l'autre, sans remettre la première.
2. On tire une carte l'une après l'autre, en remettant la première dans le jeu.

Exercice 13.3

On lance 5 fois de suite un dé bien équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui, à chaque série de 5 lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparaît.
X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser les paramètres.

Exercice 13.4

La ville de Las-Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour, et on estime que 95% des touristes viennent à Las-Vegas pour jouer au casino. On interroge au hasard 10 touristes différents dans la rue. On note X la variable aléatoire égale au nombre de touristes affirmant être venu à Las-Végas pour jouer au casino. Montrer pourquoi X peut-être considéré comme une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

Savoir-Faire 13.65

SAVOIR CALCULER UNE PROBABILITÉ DANS LE CAS D'UNE VARIABLE BINOMIALE

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{4}\right)$. Déterminer la valeur exacte $P(X = 1)$ puis $P(X \leq 2)$
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$.
   a) Déterminer la valeur exacte $P(X = 7)$ puis une valeur approchée à 0.001 près.
   b) Calculer la valeur exacte de $P(X \leq 9)$

Savoir-Faire 13.66

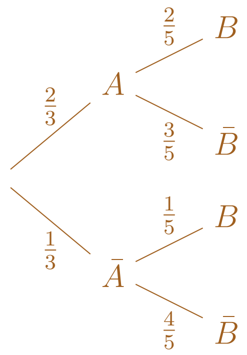
SAVOIR RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE SEUIL, DE COMPARAISON ET D'OPTIMISATION

On lance n fois la même pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire, qui à chaque série de n lancers, associe le nombre de "Pile" obtenus. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois "Pile" dépasse 0.999.

Savoir-Faire 13.67

SAVOIR CALCULER UNE PROBABILITÉ EN UTILISANT L'INDÉPENDANCE OU LES PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Pour un test d'entrée dans une école, les candidats doivent passer deux tests qui se soldent chacun par un succès ou un échec.
On considère l'événement A :"réussir au premier test", et l'événement B :"réussir au second test".
On considère l'arbre ci-dessous, qui représente cette situation.



1. Donner $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Déterminer $P_B(A)$, et interpréter ce résultat.
4. on ajoute un troisième test, et on considère C :"réussir au troisième test". On sait aussi que $P(C) = 0.2$. Que vaut $P(A \cap C)$ ensachant que A et C sont indépendants ?

Exercice 13.5

Dans un jeu vidéo, la probabilité de réussir le lancement d'un sort spécial est 0.7.

1. Le sort est lancé 4 fois de suite, et on suppose que la réussite ou non d'un sort n'a pas d'influence sur les autres.
   a) Calculer la probabilité qu'aucun des sorts ne soient réussi
   b) Calculer la probabilité qu'au moins 1 sort soit réussi
2. On lance le sort n fois de suite, et on note X la variable aléatoire qui, aux n lancement de sorts, associe le nombre de lancements de sorts réussis.
   a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n
   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité qu'au moins un sort soit lancé avec succès dépasse 0.999

Exercice 13.6

On s'intéresse au jeu de Loto, qui consiste à tirer 5 boules parmi 49 boules numérotées de 1 à 49. On s'intéresse ici à la probabilité de gagner le gros lot :-)

1. On joue au jeu du Loto, quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?
2. On décide de jouer de façon systématique jouer 3 fois par semaines pendant n semaine(s), et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on gagne le gros lot.
   a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n
   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité de gagner le gros lot dépasse 0.9.