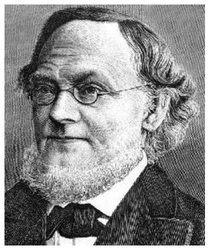
11.1 Premières expressions du produit scalaire

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Histoire

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique.
Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809 ; 1877).
Il fut baptisé produit scalaire par William Hamilton en 1853.

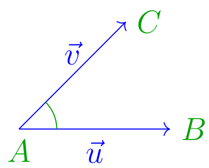


11.1.1 Définition

Définition

Le **produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$** est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

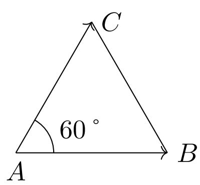


Remarque

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut donc choisir des vecteurs de même origine.

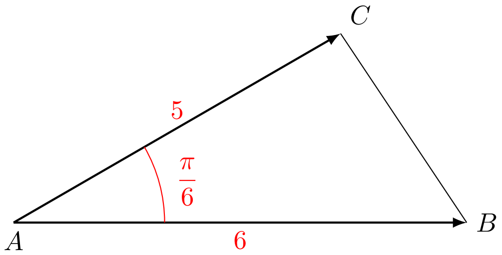
Exercice 11.64

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en sachant que $AB = AC = BC = 1$.



Exercice 11.65

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en utilisant les données de la figure suivante :



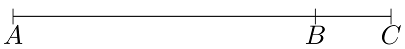
11.1.2 Cas particulier de vecteurs colinéaires

Propriété

- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

Exercice 11.66

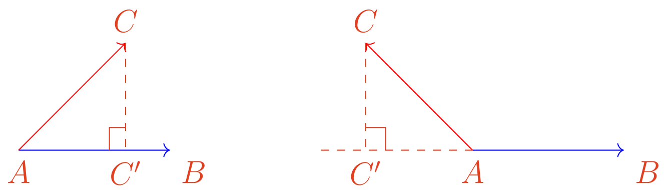
Soient A,B et C trois points alignés tels que $B \in [AC]$ et $AB = 4$ et $BC = 1$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.



11.1.3 Expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal

Propriété

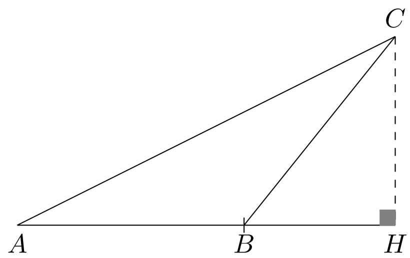
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on considère le point C' projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$



Angle $\widehat{BAC}$ aïgu — Angle $\widehat{BAC}$ obtu

Exercice 11.67

Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait également que AH=5, AB=3 et B appartient au segment $[AH]$.

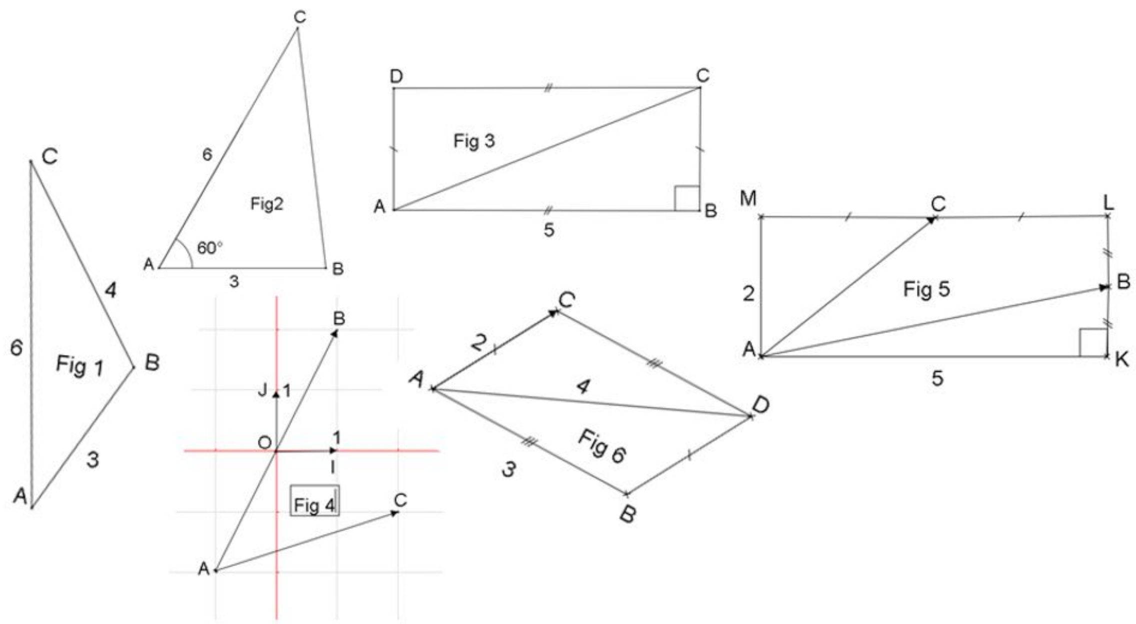


☛ Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Savoir-Faire 11.58

Savoir choisir la forme adaptée pour calculer un produit scalaire

Quand cela est possible, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacune des situations ci-dessous.

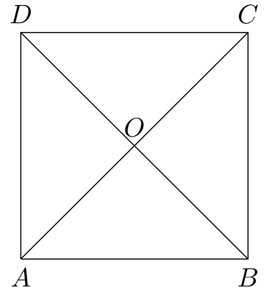


☞ Pas d'inquiétude ! Il sera possible de calculer tous ces produits scalaires...un peu de patience !

Exercice 11.68

On considère le carré $ABCD$ de coté a.
On note O le point d'intersection de ses diagonales.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$



Savoir-Faire 11.59

Savoir utiliser le produit scalaire pour calculer un angle ou une distance

ABC est le triangle ci-dessous avec AB=3 et AC=4.
H est le pied de la hauteur issue de C, et AH=2.5

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. En déduire la mesure de α, mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.