

## 5.3

# Opération sur les limites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### Remarque

⚠️ Les propriétés suivantes donnent la limite en  $a$  de la somme, du produit ou du quotient de  $f$  et  $g$ ,  $a$  pouvant désigner un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

#### 5.3.1 Somme

### Propriété

Si $f$ a pour limite	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g$ a pour limite	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

### Exercice 5.12

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x}$

#### 5.3.2 Produit

### Propriété

Si $f$ a pour limite	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si $g$ a pour limite	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

### Exercice 5.13

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$

#### 5.3.3 Quotient

### Propriété

Si $f$ a pour limite	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si $g$ a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Si $f$ a pour limite	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
Si $g$ a pour limite	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0
Alors $\frac{f}{g}$ tend vers	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

### Exercice 5.14

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2}$

### Propriété

En  $+\infty$  et en  $-\infty$ , une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

### Exercice 5.15

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 45x^2 + 4x - 5$

## Savoir-Faire 5.15

### SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE DE FONCTION DANS DES CAS SIMPLES

1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - x$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$
3.  $g$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2(\frac{1}{\sqrt{x}} + 5)$ . Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
4.  $h$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $h(x) = x^2 + 3x + x - 11$ . Déterminer les limites à droite et à gauche de  $h$  en 1.
5.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} + 2x + 3$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2 - x)$
7.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3)(2 - \frac{1}{x})$
8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 7x + 1$
9.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$



## Savoir-Faire 5.16

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE DE FONCTION EN LEVANT UNE FI

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2+x\sqrt{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{-x+4} \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{3x}{-x+4}$$

### Exercice 5.16

Déterminer les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

$$2. f(x) = -x^5 + 10x^4 + x^2 + x$$

$$4. f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

### Exercice 5.17

Déterminer les limites en  $a$  des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{1}{x-4} + \sqrt{x}, \text{ avec } a = 4$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \text{ avec } a = -1$$

$$2. f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}, \text{ avec } a = 1$$

$$5. f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-2}, \text{ avec } a = 4$$

$$3. f(x) = \frac{5x+2}{x+4}, \text{ avec } a = -4$$

### Exercice 5.18

Déterminer les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x + 1$$

$$3. f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x^7 - 5x^4 + x^2 + 2x - 3}$$

$$2. f(x) = \frac{-x^3 + x - 1}{2x + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 2}$$

### 5.3.4 Composée

#### Définition

Soit  $g$  est une fonction définie sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in J$ .

On appelle **fonction composée de  $f$  par  $g$**  ou la composée de  $f$  suivie de  $g$  :

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

## Remarque

- On note  $g \circ f$  (on lit "g rond f") la fonction définie par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- L'écriture  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  n'a de sens que si  $x \in D_f$  et  $f(x) \in D_g$ .
- De manière générale,  $f \circ g \neq g \circ f$

### Exercice 5.19

On considère les fonctions  $f(x) = x - 1$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f \circ g$
2. Donner l'ensemble de définition de  $g \circ f$

## Propriété Théorème de composition des limites

$a, b$  et  $l$  représente ici des réels ou bien  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$

### Exercice 5.20

1. On considère la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ . Déterminer la limite éventuelle de  $u$  en  $+\infty$ .
2. On considère la fonction  $v$  définie sur  $]14; +\infty[$  par  $v(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-5}-3}$ . Déterminer la limite éventuelle de  $v$  en 14.

## Savoir-Faire 5.17

### SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE DE FONCTION PAR COMPOSITION

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-3x)^4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x)^4$$

### Exercice 5.21

Écrire  $f$  comme composée de deux fonctions, puis calculer les limites de  $f$ , en  $-\infty$  et en  $+\infty$  :

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$3. f(x) = (5-x)^3$$

$$2. f(x) = e^{1-0.5x}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{(x^4 + x + 1)^4}$$

### Exercice 5.22

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{e^x}$$



## Savoir-Faire 5.18

### SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-2x}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer  $f'(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.23

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3 + xe^{1-x}$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 3 + \frac{xe}{e^x}$   
b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.24

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (e^{1-0.5x} - 1)^2$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) En déduire que la courbe  $C_f$  admet une asymptote que l'on précisera.
2. a) Calculer  $f'(x)$   
b) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$   
c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.25

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) En déduire que la courbe  $C_f$  admet une asymptote  $d$  que l'on précisera.  
c) Avec la calculatrice, tracer  $C_f$  et  $d$  et conjecturer la position relative de  $C_f$  et  $d$ .  
d) Démontrer cette conjecture
2. a) Calculer  $f'(x)$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.26**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3; +\infty[$  par  $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$ .  
On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in [-3; +\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-3; +\infty[$ .