

8.2

Suite géométrique

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

8.2.1 Approche

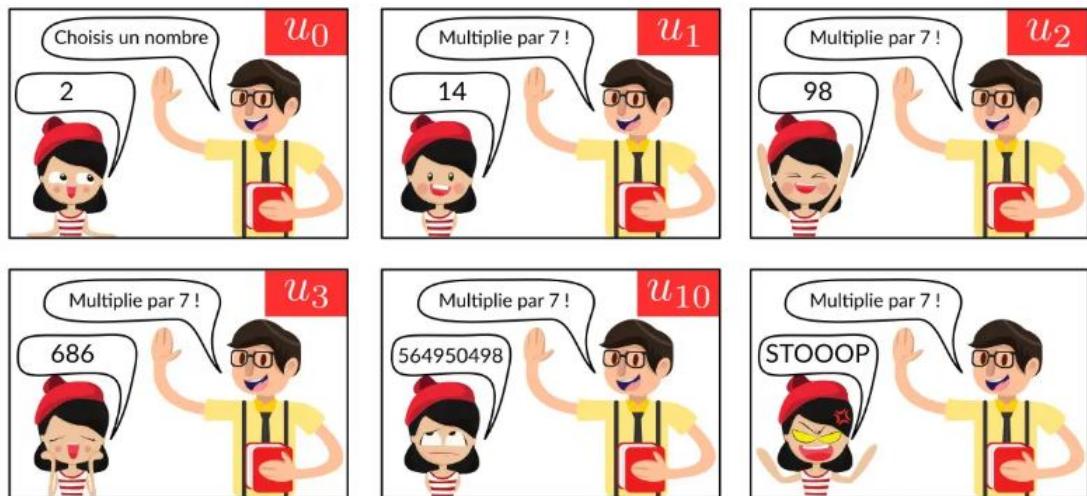
Pliages d'une feuille de papier...

L'idée est d'évaluer l'épaisseur obtenue après avoir plié une feuille de papier plusieurs fois en deux. L'épaisseur du papier à lettres est de 0,1 mm.

Quelle est l'épaisseur obtenue après 3 pliages ?
Et après 10,23 pliages ?

8.2.2 Définition

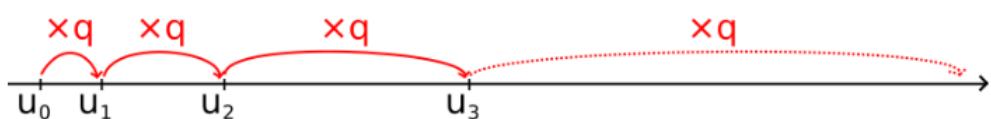
une suite géométrique, c'est exactement ça !



Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$, où q est un réel.

q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .



Exemple

- 2;4;8;16 est une suite géométrique de raison 2.
- 2;-6,18 est une suite géométrique de raison -3

**Savoir-Faire 8.45**

SAVOIR DÉMONTRER QU'UNE SUITE EST UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE OU NON.

Exemple : Les suites suivantes sont-elles des suites géométriques ?

- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 1$.
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2$
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2 \times 5^n$
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5}{3^n}$

8.2.3 Formules explicites**Démonstration 8.7**

Calcul du terme général d'une suite géométrique.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Montrer que $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété

- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.
- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Généralisation
Soit p un entier naturel.
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

**Savoir-Faire 8.46**

SAVOIR UTILISER LES FORMULES EXPLICITES AVEC LES SUITES GÉOMÉTRIQUES.

Exemple :

- Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$. Calculer u_7 . Rép : 8748
- Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $u_6 = 512$. Calculer u_9 . Rép : 64.

- Soit (u_n) la suite géométrique définie par $q = 5$ et $u_0 = 10$. Exprimer u_n en fonction de n .
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $u_4 = 48$ et $u_7 = 384$. Calculer u_0 et q .

Je m'entraîne seul(e)

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $u_4 = 324$ et $u_7 = -8748$. Calculer u_0 et q . (Réponse : $u_0 = 4$ et $q = -3$)
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $u_2 = 0.5$ et $u_5 = 0.0625$. Calculer u_0 et q . (Réponse : $u_0 = 2$ et $q = 0.5$)
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q , telle que $u_5 = 2048$ et $u_7 = 32768$. Calculer u_1 et q , en sachant que $q < 0$. (Réponse : $u_1 = 8$ et $q = -4$)
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q , telle que $u_5 = -32$ et $u_9 = -512$. Calculer u_1 et q , en sachant que $q > 0$. (Réponse : $u_1 = -2$ et $q = 2$)

8.2.4 Variations des suites géométriques

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q = 0$ ou $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante (au pire à partir du second terme).
- si $q > 1$ alors :
 - si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
 - si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $0 < q < 1$ alors :
 - si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemple

- $q = 3$ et $u_0 = 2$:
- $q = 3$ et $u_0 = -2$:
- $q = 0.5$ et $u_0 = 2$:
- $q = 0.5$ et $u_0 = -2$:

- $q = -3$ et $u_0 = 1$:

8.2.5 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Démonstration 8.8

⚡ Démonstration : calcul de $1 + q + q^2 + \dots + q^n$:

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , avec $q \neq 1$.

$$\text{Somme des termes consécutifs} = (\text{1er terme}) \times \frac{1-q^{nb \text{ de termes}}}{1-q}$$

SG et somme des termes

SAVOIR CALCULER LA SOMME DES TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE
EXEMPLES :

- Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 256$
- Calculer $S' = 1 + 3 + 9 + \dots + 2187$

Je m'entraîne seul(e)

Voici quelques exercices corrigés

- On considère la suite géométrique (u_n) de raison -2 telle que $u_7 = -256$. Calculer $S = u_7 + \dots + u_{14}$. Rép : 21760
- On considère la suite géométrique (u_n) de raison 1 telle que $u_2 = -4$. Calculer $S = u_2 + \dots + u_9$. Rép : -32
- On considère une suite géométrique (u_n) de raison 3 telle que $u_2 = -72$. Calculer $S = u_2 + \dots + u_{11}$. Rép : -2125728
- Calculer la somme S telle que $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$. Rép : 2391484
- Calculer $S = 7 + 14 + 28 + \dots + 114688$. Rép : 229369

Défi !

Écrire une fonction Python nommée *defi2* qui :

- a pour paramètres 4 nombres :
 - q (réel, qui correspond à la raison de la SG)
 - u_0 (réel, premier terme)
 - $p1$ (entier)
 - $p2$ (entier, strictement supérieur à $p1$)

- renvoie la somme $u_p1 + \dots + u_p2$, en considérant que la suite est une suite géométrique.

Pour tester la fonction, on vérifiera par exemple que l'appel de `defi2(3,1,0,13)` renvoie 2391484.

Savoir-Faire 8.48

SAVOIR UTILISER LES SUITES GÉOMÉTRIQUES POUR ÉTUDIER LES ÉVOLUTIONS SUCCESSIONS À TAUX CONSTANT

Rappels de la classe de seconde :

Lien entre pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur :

- Augmenter une valeur de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$
- Diminuer une valeur de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$
- $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés les coefficients multiplicateurs.

EXEMPLE 1 :

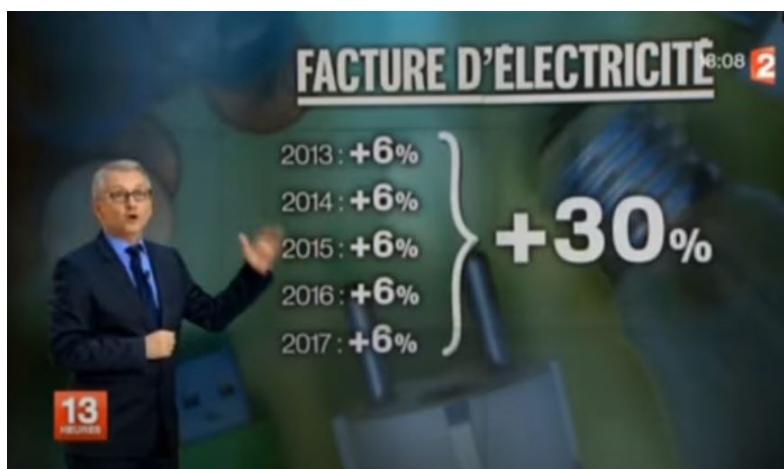
On place une somme de 5000 euros sur un compte rémunéré à 3 % par an (intérêts composés).

- Quelle est la somme au bout de 1 an ?
- au bout de 10 ans ?
- Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle doublée ? triplée ?

EXEMPLE 2 :

Corriger ce présentateur télé !

Erreurs dans le JT de France 2



Cliquez ici pour voir la vidéo du JT de France 2..