5.3 Cosinus et sinus d'un réel

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

5.3.1 Définition

Soit x un réel. L'objectif est de déterminer le **cosinus** et le **sinus** de ce nombre réel. Après enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, le nombre x se retrouve en un point M.

Définition

On considère un nombre x ayant pour point image M sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus de** x, noté $cos(x)$, est l'abscisse de M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- Le **sinus de** x, noté $sin(x)$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5.3.2 Propriétés

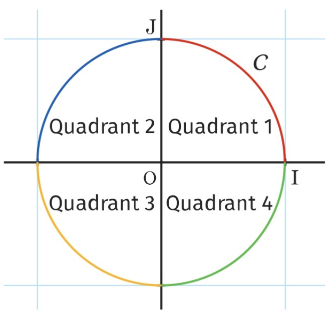
Propriété

Pour tout nombre réel x,

- $-1 \leq cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq sin(x) \leq 1$
- $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

Exercice 5.61

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. M est le point image sur le cercle d'un nombre réel x.



Compléter le tableau suivant :

M est dans le quadrant	1	2	3	4
Signe de $cos(x)$				
Signe de $sin(x)$				

Savoir-Faire 5.33

SAVOIR CALCULER UN COSINUS CONNAISSANT UN SINUS ET INVERSEMENT

Exemple :

1. Soit x un réel appartenant à $[\frac{\pi}{2};\pi]$ avec sin(x)=0.4. Calculer $cos(x)$
2. On sait que $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Calculer $sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 5.62

On donne $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
2. En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5.63

Soit x une réel dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

On sait aussi que $cos(x)=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

Calculer $sin(x)$

Exercice 5.64

Soit x une réel dans $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

On sait aussi que $sin(x)=-0.36$

Calculer $cos(x)$

Exercice 5.65

Pour tout x avec $cos(x)\neq 0$, on considère $tan(x)$ défini par $tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$.

Montrer que

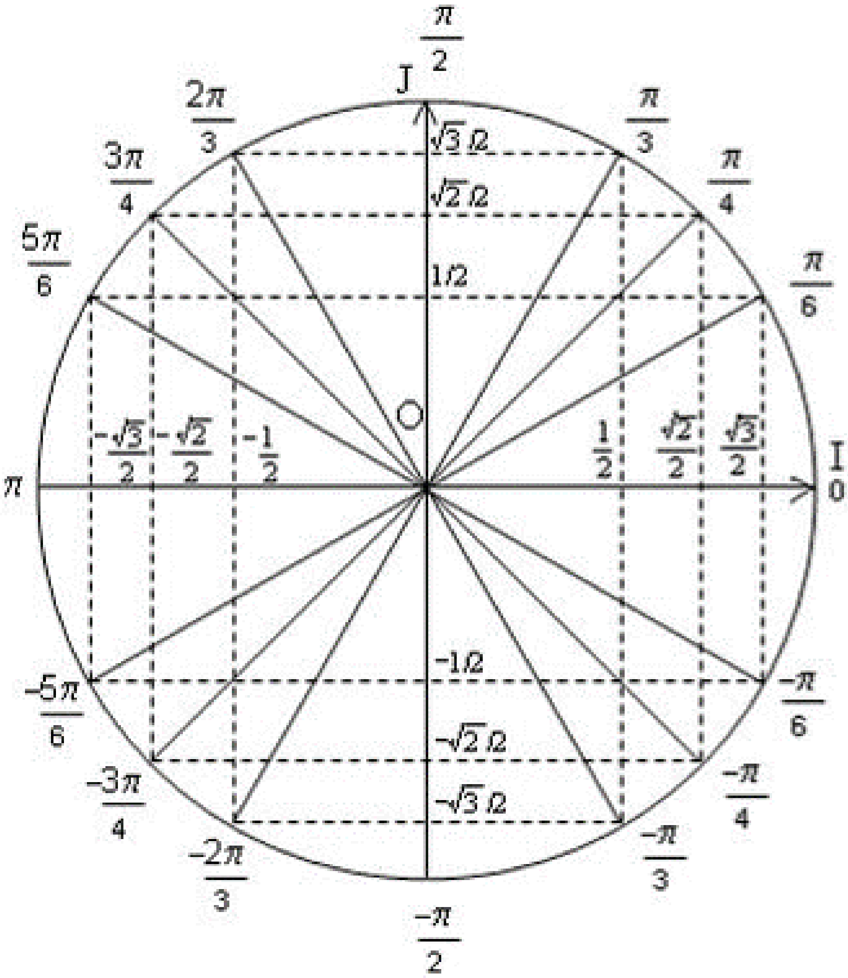
$$1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$$

Exercice 5.66

Démontrer que pour tout réel x, on a :

1. $(cos(x)+sin(x))^2+(cos(x)-sin(x))^2=2$
2. $(cos(x)+sin(x))^2-(cos(x)-sin(x))^2=4cos(x)sin(x)$

5.3.3 Cosinus et sinus d'angles remarquables



Cercle trigo et valeurs remarquables de sinus et cosinus

Savoir-Faire 5.34

SAVOIR CALCULER LE COSINUS OU LE SINUS D'UN RÉEL

Déterminer le cosinus et le sinus (on appelle cela les **lignes trigonométriques**) de :

1. $\frac{217\pi}{2}$
2. $\frac{-212\pi}{3}$
3. 12345π
4. $\frac{133\pi}{6}$

Exercice 5.67

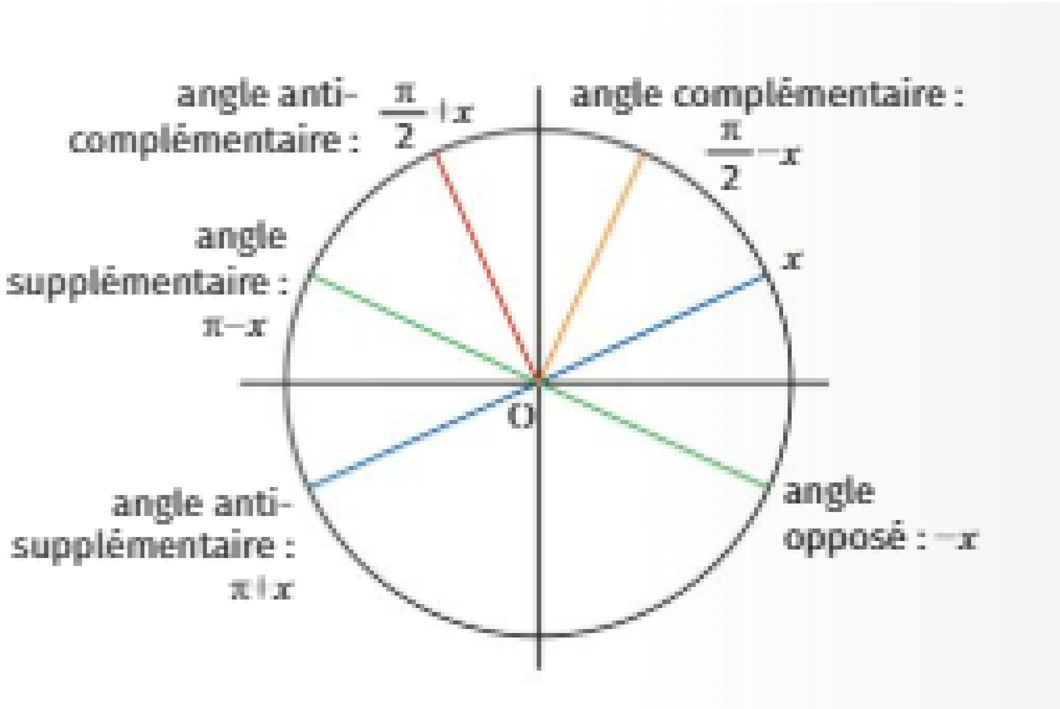
Sans calculatrice (ou seulement pour vérifier), calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.

1. $cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$
2. $cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - sin\left(2\pi\right) + cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

3. $cos\left(-2018\pi\right) - cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

5.3.4 Cosinus et sinus d'angles associés



cosinus et sinus d'angles associés

Propriété (Admis, configuration du rectangle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

1. $cos\left(-x\right) = cos\left(x\right)$
2. $sin\left(-x\right) = -sin\left(x\right)$
3. $cos\left(\pi - x\right) = -cos\left(x\right)$
4. $sin\left(\pi - x\right) = sin\left(x\right)$
5. $cos\left(\pi + x\right) = -cos\left(x\right)$
6. $sin\left(\pi + x\right) = -sin\left(x\right)$

Propriété (Admis, configuration des angles complémentaires)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

1. $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\left(x\right)$
2. $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(x\right)$

3. $cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -sin\left(x\right)$
4. $sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = cos\left(x\right)$

Savoir-Faire 5.35

SAVOIR DÉTERMINER, PAR LECTURE DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE, LES COSINUS ET SINUS DES ANGLES ASSOCIÉS À x

Exercice 5.68

Exprimer les nombres suivants en fonction de $cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$:

1. $cos\left(\frac{-\pi}{7}\right)$
2. $sin\left(\frac{-\pi}{7}\right)$
3. $cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$
4. $sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
5. $cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
6. $cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$
7. $sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)$
8. $cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)$
9. $sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$

Exercice 5.69

Exprimer $cos\left(\frac{-76\pi}{5}\right)$ en fonction de $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 5.70

On considère que $sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
2. En déduire :
   a) $cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
   b) $cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
   c) $sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
   d) $sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
   e) $cos\left(\frac{11\pi}{10}\right)$

Exercice 5.71

Pour tout x avec $cos(x) \neq 0$, on considère $tan(x)$ défini par $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$.
Montrer que

$$tan(\pi + x) = tan(x)$$

5.3.5 Lien avec le cosinus et sinus d'un triangle rectangle

5.3.6 Et avec la calculatrice ?

- $arccos(a)$ renvoie l'angle compris entre 0 et π et dont le cosinus vaut a.
- $arcsin(a)$ renvoie l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et dont le sinus vaut a.