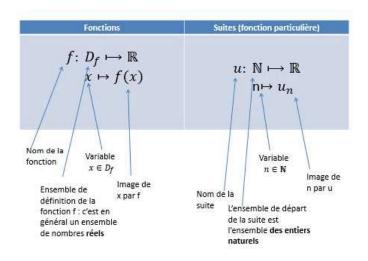
# 7.1

# Définition et modes de génération

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

## 7.1.1 Analogie avec une fonction classique



#### 7.1.2 Définition

### **Définition**

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Une <u>suite numérique</u> est une fonction définie pour tout entier  $n \ge n_0$  et à valeurs réelles. Pour chaque  $n \ge n_0$ , on associe le nombre réel noté  $u_n$ .

La suite est notée u ou  $(u_n)$ .

## Remarque

- $u_n$  est un réel; on dit que c'est le **terme** de la suite  $(u_n)$  de rang n.
- $(u_n)$  est la suite.

### Remarque

C'est la faute classiques des lycéens débutants : La lettre n est à la fois utilisée comme indice des termes de la suite et comme valeur dans les formules.

Voici un exemple pour mieux comprendre : en rouge le n en indice et en vert le n utilisée comme "valeurs" :

 $u_{n+1} = n \times u_n + 11n$  Ainsi, si on remplace n par 51, on obtient  $u_{52} = 51 \times u_{51} + 11 \times 51$ .

# 7.1.3 Modes de générations d'une suite

#### Par une formule explicite

Ici, le terme de la suite  $u_n$  est défini directement en fonction de n, et uniquement en fonction de n.

 $lue{}$  On dit que  $(u_n)$  est définie par une formule explicite.

### Exemple

la suite  $u_n$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2 - 1$  est une suite explicite.

# Savoir-Faire 7.31

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

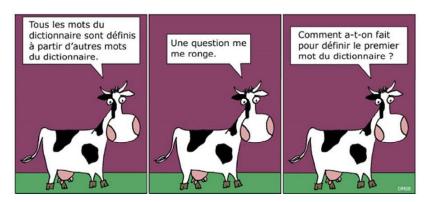
- On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2 1$ .
- On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \ge 6$  par  $v_n = \frac{1}{n-5}$ .
- On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout  $n \ge 1$  par  $w_n = \sqrt{n-1}$ .
- On considère la suite  $(z_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $z_n = 2^n$ .

### Remarque

Comment reconnaître une suite explicite? Dans le cas d'une suite explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'entier souhaité.

#### Par une formule récurrente

Ici, le terme  $u_n$  de la suite se définit par rapport au(x) terme(s) précédent(s).  $\square$  On parle de suite récurrente.



### Exemple

La suite  $w_n$  définie par  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$  est une suite définie par récurrence.

# Savoir-Faire 7.32

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

- Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + 2$ .
- Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 1$  et  $v_1 = 1$  et pour tout  $n \ge 2$ ,  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ .
- Soit la suite  $(w_n)$  définie par  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$ .
- Soit la suite  $(z_n)$  définie par  $z_0 = 1$  et  $z_{n+1} = 2 \times z_n + n$ .

### Remarque

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne peut <u>pas</u> calculer <u>directement</u> n'importe quel terme : pour calculer  $u_{100}$ , on a besoin de  $u_{99}$  par exemple... et ainsi de suite jusqu'au premier terme.

#### Par un algorithme

Ici, c'est un algorithme qui va être à l'origine de la construction de la suite.

### Exemple

Voici un premier programme en Python :

```
def suite1(n):
return -2*n**2-2*n+7
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente? Quelle est cette suite?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Et voici un second programme, toujours en Python :

```
def suite1(n):
a = 5
for i in range(n):
    a = 2 * a + 5
return a
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente? Quelle est cette suite?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

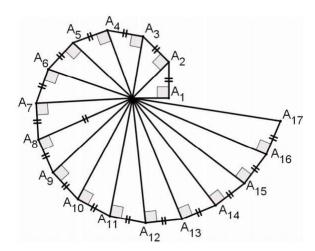
# Savoir-Faire 7.33

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE (RÉCURRENTE OU EXPLICITE) EN UTILISANT PYTHON

Utiliser les exemples faits en classe pour s'entraîner à programmer en Python des suites explicites et récurrentes (avec boucle for et/ou while).

Bien évidemment, s'entraîner davantage avec les suites récurrentes, plus difficiles à programmer.

### Par une situation géométrique



On part d'un triangle rectangle en  $A_1$   $OA_1A_2$  tel que  $OA_1 = A_1A_2 = 1$ . On pose  $u_1 = A_1A_2$ . Pour tout n > 1, en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle  $OA_nA_{n+1}$  comme suit : il est rectangle en  $A_n$ , et  $A_{n+1} = 1$ .

Pour n > 0, on pose  $u_n = A_n A_{n+1}$ 

- Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
- Conjecturer la formule explicite de cette suite.

# ♡Défi!

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \begin{cases} 3 \times u_n & \text{si n est pair} \\ u_n - 2 & \text{si n est impair} \end{cases}$$

- 1. Calculer les 6 premiers termes (ce n'est pas ça le défi!)
- 2. Calculer la somme des 43 premiers termes!  $(u_0 \text{ compris})$

#### 7.1.4 Calculer les termes d'une suite avec la calculatrice

- Il faut d'abord passer en mode **suite** : Mode puis choisir **suite** ou **séquence**. Ensuite, il faut quitter avec 2nde puis quitter.
- Appuyer ensuite sur la touche f(x)
- Pour les suites explicites :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre ensuite l'expression de la suite en fonction de n: pour afficher n, il suffit de taper sur la touche  $X, T, \theta, n$ .

- Pour afficher les termes, il suffit de faire 2nde puis table. (Il faudra peut être régler la table pour ne faire apparaître que les valeurs positives de n.
- Exemple avec  $u_n = 2n + 1$ : f(x), nMin=0, 2,  $\times$ ,  $X, T, \theta, n$ , +, 1, 2nde et table.

#### • Pour les suites récurrentes :

- On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
- On entre **u(nMin)** la valeur de la suite pour **nMin**
- Il reste ensuite à donner l'expression de la suite. Attention sur TI, il faudra rentrer  $u_n$  en fonction de  $u_{n-1}$  ( et non pas  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ !) Le terme  $u_{n-1}$  se trouve en appuyant sur 2nde puis sur 7, puis  $\sqrt{X,T,\theta,n}$ , puis  $\sqrt{y}$ , puis  $\sqrt{y}$  et on ferme la parenthèse avec  $\sqrt{y}$ .
- Pour afficher les termes, il suffit de faire 2nde puis table
- Exemple avec  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ : f(x), nMin=0, u(nMin)=1, 2,  $\times$ , 2nde, 7, (,  $X, T, \theta, n$ , -, 1, ), +, 3. puis 2nde puis table.

# Savoir-Faire 7.34

SAVOIR UTILISER LA CALCULATRICE POUR CALCULER DES TERMES (SUITES RÉCURRENTES ET EXPLICITES)

Substitution servication servication

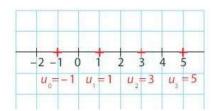
Utiliser les exemples déjà étudiés pour les vérifier à la calculatrice.

# 7.1.5 Représentation graphique de suites

#### Sur une droite graduée

C'est tout simple : on trace une droite graduée, et on place dessus les valeurs de  $u_0,\,u_1,\,u_2...$ 

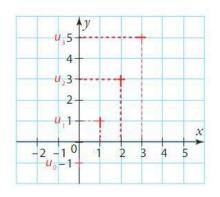
Suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n - 1$ 



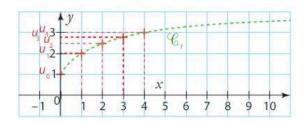
### Dans un repère

C'est tout simple aussi : on trace place les points de coordonnées  $(0, u_0), (1, u_1), (2, u_2)...$ 

Suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n - 1$ 



Suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$ 



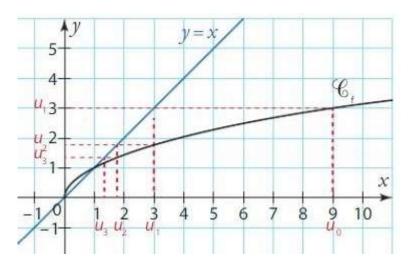
### Cas des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Bien sûr, on peut représenter cette suite en utilisant l'un des deux procédés précédents. Mais dans le cas d'une suite récurrente, il y a une méthode qui se base sur la courbe représentative de la fonction f.

Attention, cette méthode fonctionne uniquement avec les suites récurrentes du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . L'idée est de construire les termes à l'aide de la courbe  $C_f$  et la droite d'équation y = x.

- On commence par placer  $u_0$  sur l'axe des abscisses
- On construit  $u_1$  sur l'axe des ordonnées en utilisant le courbe  $C_f$  et le fait que  $u_1 = f(u_0)$ .
- On construit  $u_1$  sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation y = x.
- On a donc  $u_1$  sur l'axe des abscisses, et on peut réitérer le procédé pour  $u_2$ ,  $u_3$ ...autant de fois que nécessaire.

Suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ 



## Savoir-Faire 7.35

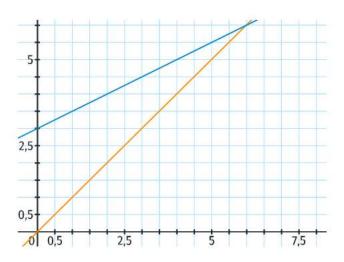
Savoir représenter une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ 

Soit  $u_n$  une suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$  et soit  $(v_n)$  une suite définie

par  $v_0 = \frac{1}{2}$  et  $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$ . Déterminer la fonction f et g telles que  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $v_{n+1} = g(v_n)$ . Représenter ensuite ces deux suites (deux graphiques différents) en utilisant la méthode précédente. Pour vérification, on pourra faire les calculs à la main des premiers termes (ou avec la calculatrice) et s'assurer que les valeurs trouvées graphiquement soient en cohérence avec les valeurs calculées.

#### Exercice 7.23

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par f(x) = 0.5x + 3.

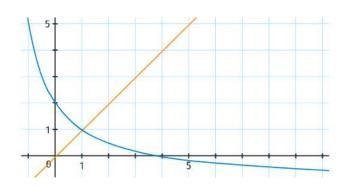


Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses.

Bien laisser les traits de construction!

#### Exercice 7.24

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec la fonction f définie sur  $]-2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{6}{x+2} - 1$ .



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses.  $\bullet$  Bien laisser les traits de construction!