

11.1

Découvrir les principes de dénombrement

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

11.1.1 Ensemble fini, cardinal et principe additif

Définition

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle **éléments**.

On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$.

Remarque

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$ et il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a; a\} = \{a\}$.

Exemple

$E = \{a; b; c; d\}$ est un ensemble à 4 éléments. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et \mathbb{R} ont une infinité d'éléments.

Remarque

- La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (ou bien aux deux ensembles)
- L'intersection $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B

Définition

Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E . On le note $card(E)$.

En particulier $card(\emptyset) = 0$

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{pomme; poire; cerise; abricot; kiwi\}$ alors $card(E) = 5$.

Définition

Deux ensembles E et F sont **disjoints** lorsque $E \cap F = \emptyset$

Propriété - principe additif -

Soit p un nombre entier naturel avec $p > 1$.

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles disjoints deux à deux alors :

$$card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + \dots + card(E_p)$$

|

Exemple

On considère les ensembles $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{x; y; z\}$.
 $A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) = 4 + 3 = 7$.

11.1.2 Couple, triplet et k-uplet**Définition**

Soit k un nombre entier naturel avec $k > 1$.

On appelle **couple**, **triplet**, **k-uplet** une collection ordonnée respectivement de deux objets, trois objets, de k objets

Exemple

- $(4; 5)$, $(m; k)$ et $(11; a)$ sont des couples (ou 2-uplets)
- $(7; \beta; n; 4; 5; \pi)$ est un 6-uplet

Remarque

- Les coordonnées d'un point dans un repère du plan sont des 2-uplets de nombres réels
- Un k-uplet s'appelle aussi une k-liste

11.1.3 Produit cartésien et principe multiplicatif**Définition**

Soit E, F, G trois ensembles.

- Le **produit cartésien** de E par F est l'ensemble des couples $(a; b)$ où $a \in E$ et $b \in F$.
 Il est noté $E \times F$ (se lit "E croix F")
- Le **produit cartésien** $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E, b \in F$ et $c \in G$.
- Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ de p ensembles est l'ensemble des p-uplets $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_p \in E_p$.

Remarque

| Notation : $E \times E$ est noté E^2 et $E \times E \times E$ est noté E^3

Exercice 11.1

On considère les ensembles $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Déterminer les ensembles $E \cup F$, $E \cap F$, $E \times F$, E^2 , puis donner 2 éléments de E^5 .

Remarque

- Dans les couples, triplets ou k-uplets, l'ordre compte : si $E \neq F$ alors $E \times F \neq F \times E$
- Un produit cartésien peut être représenté par un arbre, appelé aussi arbre de choix. Un élément du produit cartésien correspond alors à un chemin sur cet arbre.

Propriété - principe multiplicatif -

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis alors

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$$

Remarque

\triangleleft Le signe \times dans $\text{card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F alors que celui dans $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$ symbolise la multiplication de deux entiers.

Exemple

Si on considère les ensembles $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors

$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F) = 3 \times 2 = 6$ et $\text{card}(E \times E) = 3 \times 3 = 9$.

De même : $\text{card}(E^5) = 3^5 = 243$: c'est le nombre de 5-uplets d'éléments de E

Propriété

Le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments est n^k .

(Si $\text{card}(E) = n$ alors n^k est le nombre de k-uplets d'éléments de E)

Savoir-Faire 11.51

UTILISER LES PRINCIPES ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS

1. Soient deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ et de $E \times F$, puis décrire $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Un restaurant propose un menu "plat+dessert". Un client choisit cette formule et doit choisir un plat parmi les 3 viandes et les 2 poissons proposés, puis un dessert parmi les 4 desserts proposés. Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire le menu.

Exercice 11.2

Pour aller de Marseille à Paris, Jean souhaite faire une étape à Lyon. Entre Marseille et Lyon, Jean a le choix entre deux itinéraires qui utilisent l'autoroute, et trois autres qui n'utilisent pas l'autoroute. Ensuite, entre Lyon et Paris, il a le choix entre deux itinéraires.

Combien de parcours différents Jean peut-il emprunter pour aller de Marseille à Paris en passant par Lyon ?

Savoir-Faire 11.52

UTILISER LES K-UPLETS POUR DÉNOMBRER

- Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 10 chiffres commençant par 06 ?
- Un mot de passe est composé de 7 lettres minuscules, suivies de 2 chiffres. Combien de mots de passe sont-ils possibles ?

Exercice 11.3

- On lance sept fois une pièce de 1 € pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles
- Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à l'aide des lettres A, E, I, O et U ?
- Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9 puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Exercice 11.4

- Au cours d'une soirée entre célibataires, il y a 6 femmes et 5 hommes. Combien y a-t-il de couples mixtes (1 homme et 1 femme) possibles ?
- Jeanne va dans un refuge de la SPA et décide d'adopter un furet, et en plus, un chien ou un chat. La SPA possède 4 chiens, 5 chats et 3 furets. Quel est le nombre de choix possibles pour Jeanne ?

Exercice 11.5

On s'intéresse aux familles composées de 6 enfants. On note, dans l'ordre des naissances, le sexe des enfants, avec le codage F pour fille et G pour garçon. Par exemple, on note (F,G,G,G,G,G) quand l'ainée est une fille et les 5 autres enfants des garçons. On appelle cela une "fratrie".

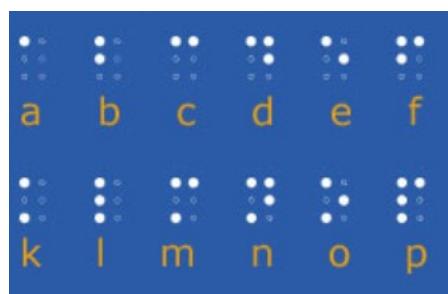
Déterminer :

- Le nombre total de fratries
- Le nombre total de fratrie dont l'ainé est un garçon
- Le nombre total de fratrie dont le 2ème, le 4ème et le 5ème enfant sont des filles.

Exercice 11.6

L'écriture braille est constituée de symboles composés d'un assemblage de 6 points. On a deux possibilités pour chaque point : un petit point ou bien un gros point, tous les deux en relief, comme le montre l'image ci-contre.

- Combien de symboles différents y a-t-il dans cette écriture ?
- Si une personne arrive à déchiffrer les 3 points de la première colonne, mais pas les 3 autres, combien de possibilités lui restent-il pour déchiffrer le symbole ?



11.1.4 Nombre de parties d'un ensemble

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de sous-ensembles (ou le nombre de parties) de E est égal à 2^n

Exemple

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer toutes les parties de E .

↗ Exigible