7.1 Continuité d'une fonction

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Des maths dans la vraie vie !

Voici un extrait de la grille du barème progressif de l'impôt sur les revenus 2022 :

Tranches de revenus	Taux d'imposition de la tranche de revenu
Jusqu'à **10 777 €**	**0 %**
De **10 778 €** à **27 478 €**	**11 %**
De **27 479 €** à **78 570 €**	**30 %**
De **78 571 €** à **168 994 €**	**41 %**
Plus de **168 994 €**	**45 %**

Voici également un exemple de calcul pour une personne célibataire :

Pour un célibataire Modifier

Pour un **célibataire** (foyer d'une seule part) dont le revenu net imposable est de **30 000 €**, sans aucune réduction ni déduction.

Son quotient familial est de **30 000 €**.

Pour le calcul de son impôt :

- Jusqu'à **10 777 €** : **0 %**
- De **10 778 €** à **27 478 €** : **(27 478 € - 10 777 €)** x **11 %** = **16 701 €** x **11 %** = **1 837,11 €**
- De **27 479 €** à **30 000 €** : **(30 000 € - 27 478 €)** x **30 %** = **2 522 €** x **30 %** = **756,60 €**

Son impôt brut est de : **0 € + 1 837,11 € + 756,60 € = 2 593,71 €**.

Le taux marginal d'imposition (TMI) de ce contribuable est de **30 %**, car son quotient familial le situe dans cette tranche. Mais tous ses revenus ne sont pas imposés à **30 %**.

Dans toute cette activité, on considérera le revenu d'un célibataire.

1. Calculer l'impôt dû pour une personne gagnant 10700 euros
2. Calculer l'impôt dû pour une personne gagnant 10800 euros
3. Une personne célibataire dont le revenu est 27400 euros vous tient cette conversation : "Heureusement que je n'ai pas fait d'heures supplémentaires, car alors j'aurai changé de tranche et mon taux d'imposition aurait presque triplé. J'aurai perdu de l'argent dans l'opération."
☛ Que lui répondez-vous ?
4. Donner l'allure de la courbe de la fonction f qui donne le montant de l'imposition en fonction du salaire annuel.

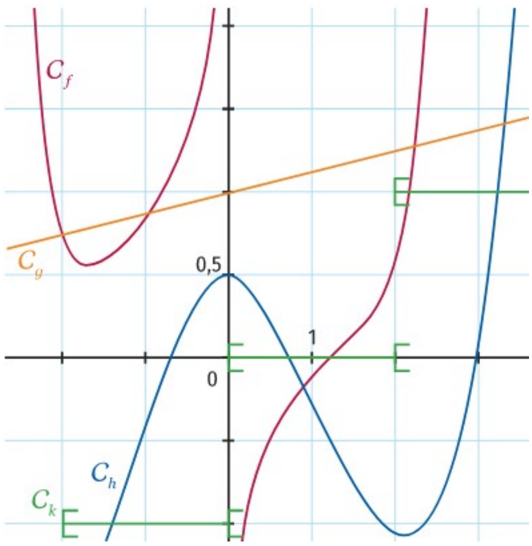
7.1.1 Définition intuitive de la continuité

Définition - Définition intuitive

Une fonction est **continue** sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Exercice 7.1

Les fonctions représentées ci-contre semblent-elle être continues ?

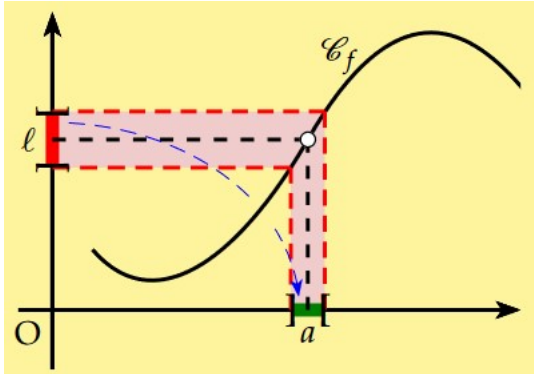


7.1.2 Définition plus formelle

Avant de commencer, on rappelle la définition d'une limite finie d'une fonction en un réel :

Définition - Rappel

Si f est une fonction définie sur une intervalle I contenant un nombre réel a alors on dit que f admet pour limite l en $x = a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

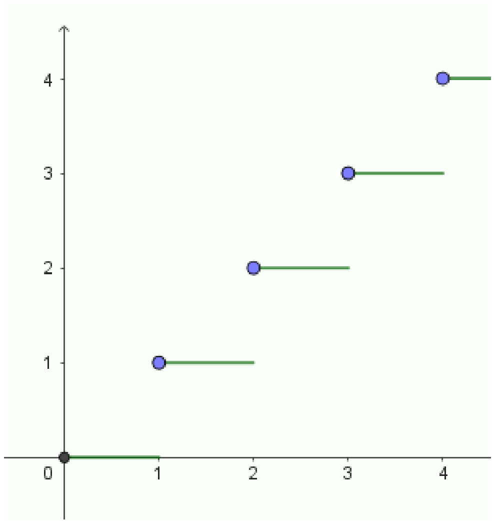


Définition - Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. On dit que la **fonction f est continue en a** si la fonction f admet une limite finie en a.
Autrement dit, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple

On considère la courbe représentative d'une fonction f, représentée ci-contre.



1. La fonction semble-t-elle admettre une limite en 2,5 ? Semble-t-elle continue en 2,5 ?
2. La fonction semble-t-elle admettre une limite en 2 ? Semble-t-elle continue en 2 ?

Définition Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f **est continue sur** I si pour tout réel $a \in I$, f est continue en a.

Propriété

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

7.1.3 Fonctions de référence

Propriété

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné :

$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
x^n	$\mathbb{R}$
Polynôme	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$

7.1.4 Propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

- $f+g$, $f\times g$, f^n avec $n\in\mathbb{N}$ et e^f sont continues sur I.
- si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I
- si g est positive, alors $\sqrt{g}$ est continue sur I.

Exercice 7.2

Justifier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x\sqrt{x}}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Savoir-Faire 7.1

Savoir étudier la continuité d'une fonction

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

   Méthode :
   Pour étudier la continuité d'une fonction définie avec des fonctions de référence, on utilise la continuité des fonctions de référence et le propriétés sur les opérations

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 4 & \text{si } x=2 \\ -x+6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

   a) La fonction f est-elle continue sur $]-\infty;2[$?
   b) La fonction f est-elle continue sur $]2;+\infty[$?
   c) La fonction f est-elle continue en 2 ?
   d) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Méthode :

Pour étudier la continuité en a d'une fonction f :

1. On calcul la limite de f en a pour $x < a$ (si a n'est pas la borne inférieure de l'ensemble de définition de f)
2. On calcul la limite de f en a pour $x > a$ (si a n'est pas la borne supérieure de l'ensemble de définition de f)
3. On calcule $f(a)$.
4. Si toutes les valeurs calculées précédemment sont égale, alors f est continue en a.

Exercice 7.3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Étudier la continuité de f sur $]-\infty; -1]$, sur $]-1; +\infty[$ et en -1. Que peut-on conclure quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.4

La fonction "partie entière" est la fonction notée $x \mapsto E(x)$ qui, à tout réel x associe le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

1. Déterminer $E(2.5)$, $E(-2.4)$, $E(0.85)$, $E(1.9999)$, $E(-1)$
2. Tracer la fonction "partie entière" dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, pour x compris environ entre -3.5 et 3.5.
3. Que peut-on conjecturer quant à la continuité de la fonction "partie entière" ?

Exercice 7.5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -2x + 13 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

Étudier la continuité de f sur $]-\infty; 3[$, sur $[3; 5[$, $[5; +\infty[$, en 3 et en 5. Que peut-on conclure quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?