

10.1

Intégrale d'une fonction continue et positive

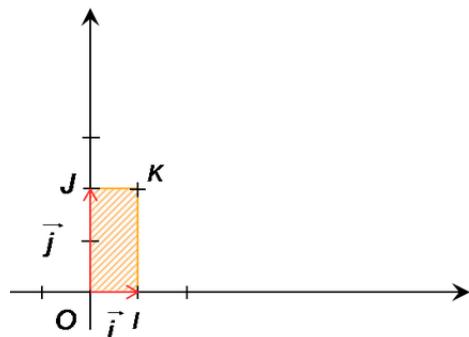
MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

10.1.1 Définitions

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'**unité d'aire**, que l'on note parfois **u.a.** est l'aire du rectangle $OIJK$, comme illustré sur la figure ci-contre.

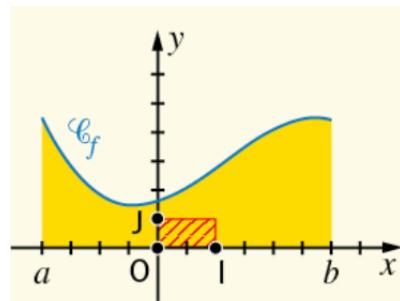


Définition

a et Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, et soit C_f sa courbe représentative.

On appelle **intégrale de a à b de f** l'aire (exprimée en u.a.) de la surface délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$.



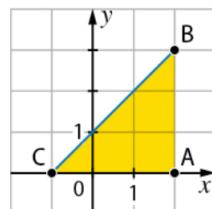
Vocabulaire

Les réels a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.

Exercice 10.1

On considère la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = x + 1$. Cette fonction est continue et positive, et sa courbe représentative est le segment $[BC]$ sur la figure ci-contre.

Déterminer $\int_{-1}^2 (x + 1)dx$

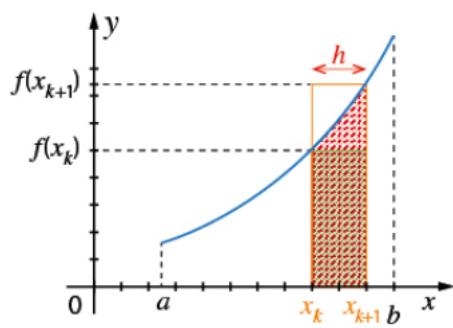


10.1.2 La méthode des rectangles

Pour déterminer un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue, monotone et positive sur $[a; b]$, on peut partager $[a; b]$ en n intervalle d'amplitude $h = \frac{b - a}{n}$.

Sur chacun de ces intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, l'aire sous C_f est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- L'un de largeur h et de hauteur $f(x_k)$
- L'un de largeur h et de hauteur $f(x_{k+1})$



L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ peut donc être encadrée par la somme des n rectangles "sous C_f " d'une part, et la somme des n rectangles qui "contiennent C_f " d'autre part.

On peut alors construire un algorithme qui permet d'encadrer une aire. L'algorithme ci-dessous fonctionne pour une fonction croissante. Il faudrait l'adapter légèrement pour une fonction décroissante.

```

1  $x \leftarrow a$ 
2  $u \leftarrow 0$ 
3  $v \leftarrow 0$ 
4  $h \leftarrow (b - a)/n$ 
5 POUR  $k$  allant de 1 à  $n$  FAIRE
6    $u \leftarrow u + h * f(x)$ 
7    $x \leftarrow x + h$ 
8    $v \leftarrow v + h * f(x)$ 

```

Histoire



GW Leibniz (1646-1716)

C'est le mathématicien allemand **Leibniz** qui a le premier employé la notation \int . Ce symbole illustre le fait qu'une intégrale peut être approchée par une somme d'aires de rectangles notée

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

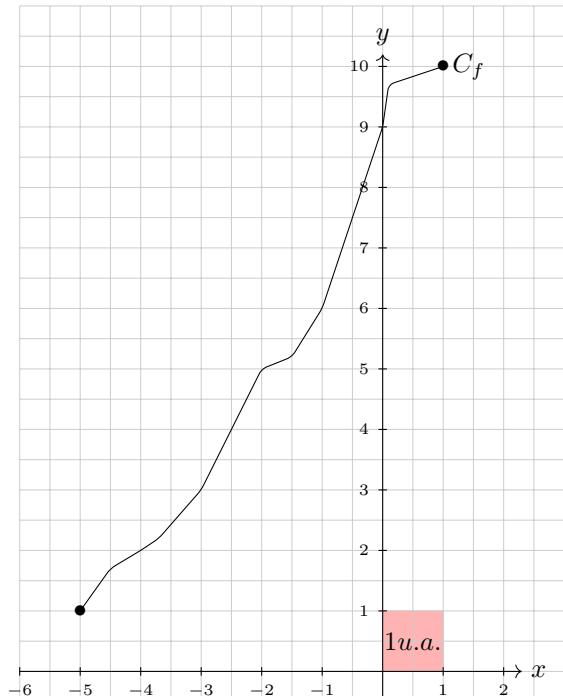
$f(x)dx$ correspond en fait à l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx .

Exercice 10.2

On considère la courbe C_f suivante, courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 1]$, où l'unité d'aire est l'aire du rectangle rouge :

1. On veut ici comprendre la méthode des rectangles. En utilisant deux couleurs différentes, tracer les rectangles qui permettront l'encadrement, puis donner un encadrement de $\int_{-5}^1 f(x)dx$.
2. Afin de comprendre l'algorithme précédent, le faire tourner "à la main" avec cet exemple, en complétant le tableau suivant. On décide ici de prendre $n = 6$, et on peut donc facilement calculer que $h = 1$.

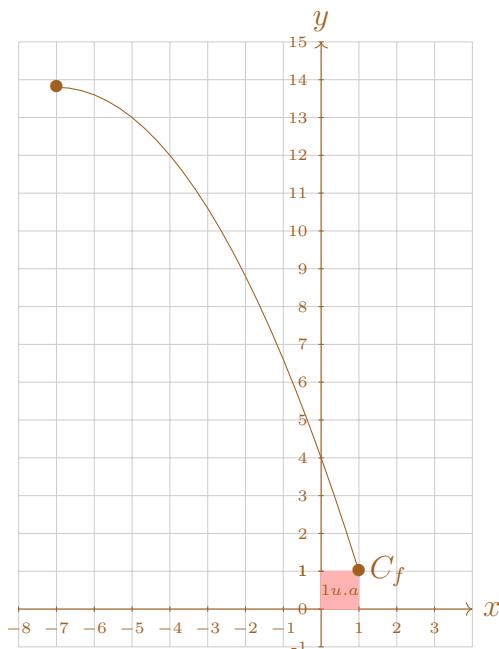
Étape	0	1	2	3	4	5	6
u	0						
x	-5						
v	0						



Savoir-Faire 10.42

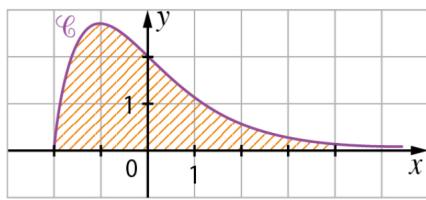
SAVOIR ESTIMER GRAPHIQUEMENT UNE INTÉGRALE

On considère une fonction f dont la courbe représentative C_f est représentée ci-dessous. Déterminer un encadrement de $\int_{-7}^1 f(x)dx$ en comptant les carrés de 1 u.a.



Exercice 10.3

Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par la courbe C représentée ci dessous :



1. Donner le signe de f sur $[-2; 4]$
2. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale notée I .
3. Encadrer $\int_0^1 f(x)dx$ par deux nombres entiers.
4. Encadrer I par deux nombres entiers.

Savoir-Faire 10.43

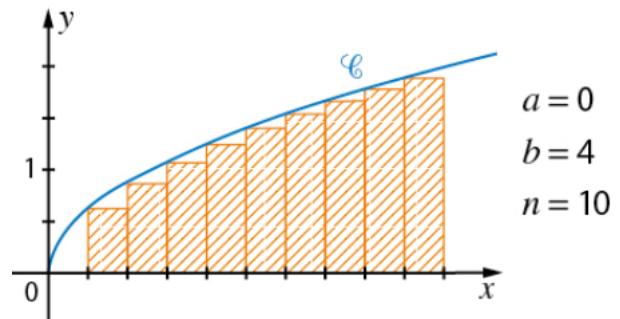
SAVOIR UTILISER LA MÉTHODE DES RECTANGLES

On reprend la fonction étudiée dans l'exercice précédent, et on admet que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Créer un programme python qui permet de donner un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$, en utilisant la méthode des rectangles et en prenant $n = 100$

Exercice 10.4

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et soit C sa courbe représentative ci-contre. On considère la surface S délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$, où a et b sont des réels positifs, avec $a < b$.



1. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface S à l'aide d'une intégrale notée I .
2. On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude h . On note u_n la somme des aires des rectangles contenus dans C .
 - a) Exprimer h en fonction de a , b et n .
 - b) Écrire une fonction python `rectangle(a,b,n)` qui renvoie une valeur approchée de S , en unités d'aire.
 - c) Quelle approximation (arrondir à 0.01 près) donne `rectangle(0,4,50)` ?