

# 5.1

## Limites de fonctions en $+\infty$ ou en $-\infty$

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT



### 5.1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle du type  $[x_0; +\infty]$ .

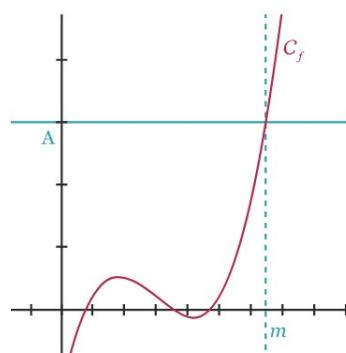
Dire qu'une **fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$**  signifie que tout intervalle ouvert  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour tous les nombres  $x$  "suffisamment grands" (c'est-à-dire pour tous les  $x$  d'un certain intervalle  $]m; +\infty[$ ).

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Interprétation graphique :

Quel que soit le nombre  $M$ , on peut trouver un nombre  $A$  tel que pour tout  $x > A$ ,  $f(x) > M$ .

La courbe de  $f$  restreinte à  $]A; +\infty[$  est dans la partie colorée ci-dessous (la courbe est située au-dessus de la droite d'équation  $y = M$  sur l'intervalle  $]A; +\infty[$ )



$M$  qui est appelé le **seuil**, peut être aussi grand que l'on veut. Il s'agit de la valeur à dépasser.

## Remarque

On définit de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

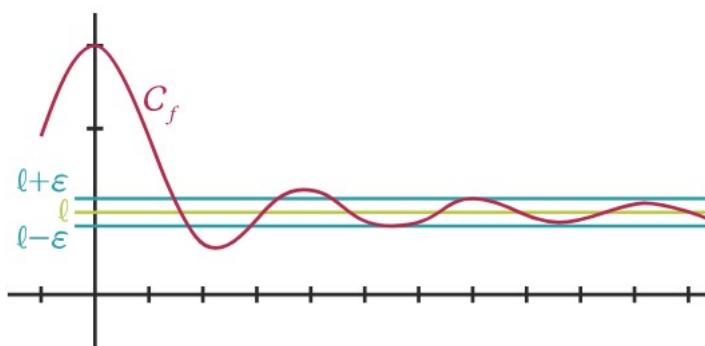
### 5.1.2 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle du type  $[x_0; +\infty[$  et  $l$  un nombre réel.

Dire que la **limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $l$**  signifie que  $f(x)$  reste dans un intervalle  $]l - \epsilon; l + \epsilon[$  (intervalle ouvert contenant  $l$ ) où  $\epsilon$  est un réel positif, dès que  $x$  est "suffisamment grand".

On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$



#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle du type  $[-\infty; x_0[$  et  $l$  un nombre réel.

Dire que la limite de  $f$  en  $-\infty$  est  $l$  signifie que  $f(x)$  reste dans un intervalle  $]l - \epsilon; l + \epsilon[$  (intervalle ouvert contenant  $l$ ) où  $\epsilon$  est un réel positif, dès que  $x$  est "suffisamment petit".

On note :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

#### Définition

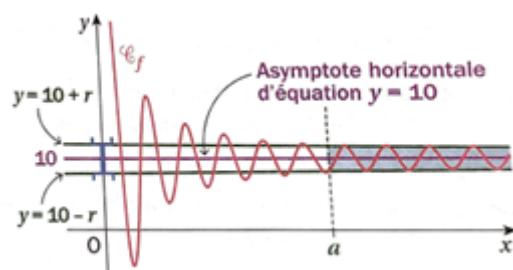
Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , on dit que la droite d'équation  $y = l$  est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

#### Exemple

$f$  est une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$ .

Pour tout nombre réel  $r > 0$ , on peut trouver un nombre réel  $a$  tel que si  $x > a$  alors  $f(x) \in ]10 - r; 10 + r[$ .

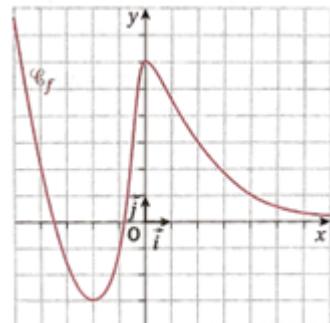
(On peut choisir  $r > 0$  aussi petit que l'on veut,  $f(x)$  sera toujours contenu dans l'intervalle pour  $x$  assez grand).



### Exercice 5.1

$f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et représentée par la courbe ci-contre.

- Conjecturer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ .
- En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) horizontale(s) à la courbe de  $f$ , si elle(s) existe(nt).
- Dresser le tableau de variations de  $f$  et faire figurer les limites conjecturées.



### Exercice 5.2

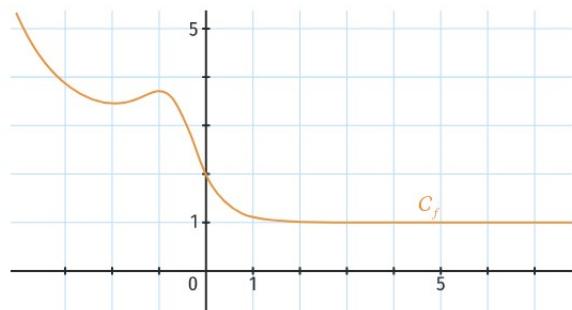
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3x^2 - 10}{1 + 2x^2}$ .

- Avec la calculatrice, conjecturer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$  ?

### Exercice 5.3

On donne la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

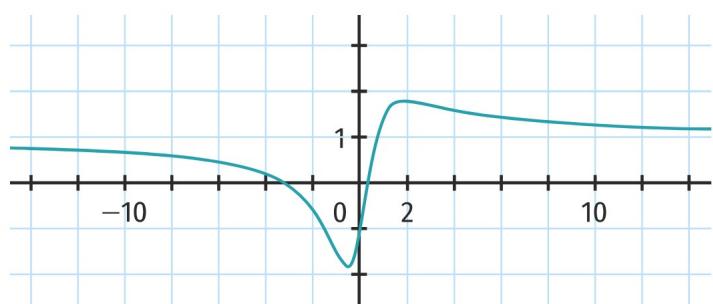
- Conjecturer le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que les éventuelles limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



### Exercice 5.4

On donne la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Conjecturer le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que les éventuelles limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



### Exercice 5.5

On considère le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g(x)$	1	0	10	5

Déterminer à l'aide du tableau une équation des éventuelles asymptotes de la courbe représentative de la fonction  $g$ .

### 5.1.3 Limites de quelques fonctions de référence

#### Propriété

1.  $f(x) = x^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est impair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

2.  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

3.  $f(x) = e^x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

#### Remarque

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

