5.3 Opération sur les limites

Remarque

⚠ Les propriétés suivantes donnent la limite en a de la somme, du produit ou du quotient de f et g, a pouvant désigner un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

5.3.1 Somme

Propriété

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exercice 5.12

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\dfrac{1}{x}$

5.3.2 Produit

Propriété

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $f\times g$ a pour limite	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 5.13

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x}$

5.3.3 Quotient

Propriété

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Si f a pour limite	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0
Alors $\frac{f}{g}$ tend vers	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 5.14

Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

Propriété

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exercice 5.15

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 45x^2 + 4x - 5$

Savoir-Faire 5.2

Savoir calculer une limite de fonction dans des cas simples

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$
3. g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 5)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. h est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $h(x) = x^2 + 4x - 11$. Déterminer les limites à droite et à gauche de h en 1.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} + 2x + 3$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(2 - x)$
7. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - 3)(2 - \dfrac{1}{x})$
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 7x + 1$
9. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

Savoir-Faire 5.3

Savoir calculer une limite de fonction en levant une FI

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2 + x\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 + 1}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{-x+4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \dfrac{3x}{-x+4}$

Exercice 5.16

Déterminer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = -x^5 + 10x^4 + x^2 + x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 2}$

Exercice 5.17

Déterminer les limites en a des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-4} + \sqrt{x}$, avec $a = 4$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$, avec $a = 1$
3. $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+4}$, avec $a = -4$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, avec $a = -1$
5. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x} - 2}$, avec $a = 4$

Exercice 5.18

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{-x^3 + x - 1}{2x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{x^7 - 5x^4 + x^2 + 2x - 3}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 2}$

5.3.4 Composée de deux fonctions

Rappels

Définition

Soit g est une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
On appelle **fonction composée de f par g** ou la composée de f suivie de g :

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

Remarque

- On note $g \circ f$ (on lit "g rond f") la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- L'écriture $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ n'a de sens que si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- De manière générale, $f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 5.19

On considère les fonctions $f(x) = x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Donner l'ensemble de définition de $f \circ g$
2. Donner l'ensemble de définition de $g \circ f$

Limites de composée

Propriété Théorème de composition des limites

a,b et l représente ici des réels ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t \to b} g(t) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$

Savoir-Faire 5.4

Savoir calculer une limite de fonction par composition
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2-3x}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2-3x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-3x)^4$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-3x)^4$

Exercice 5.20

1. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$par $u(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Déterminer la limite éventuelle de u en $+\infty$.
2. On considère la fonction v définie sur $]14; +\infty[$ par $v(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-5}-3}$. Déterminer la limite éventuelle de v en 14.

Démonstration 6 :

⚠ *les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.*

Démontrer que la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ est égale à 0.

Cette démonstration utilise le résultat de la démonstration 5

1. En remarquant que $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, déterminer la limite de la fonction exponentielle quand x tend vers $-\infty$.

Exercice 5.21

Écrire f comme composée de deux fonctions, puis calculer les limites de f, en $-\infty$ et en $+\infty$:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. $f(x) = e^{1-0.5x}$
3. $f(x) = (5 - x)^3$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x^4 + x + 1)^4}$

Exercice 5.22

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x-2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 + x + e^{-x}}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+x+1}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}$

Exercice 5.23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(e^{1-0.5x} - 1\right)^2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote que l'on précisera.
2. a) Calculer $f'(x)$
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote d que l'on précisera.
   c) Avec la calculatrice, tracer C_f et d et conjecturer la position relative de C_f et d.
   d) Démontrer cette conjecture
2. a) Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.25

Soit f la fonction définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f, et on admet que la fonction f est dérivable sur $x \in]-3; +\infty[$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-3; +\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3; +\infty[$.