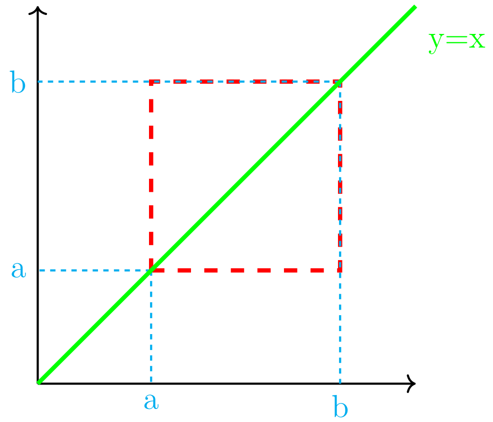
7.3 Application à l'étude de suites

Maths Spé terminale - JB Duthoit

7.3.1 Qu'est ce qu'un point fixe ?



- $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \in [a;b]$ (⚠ ce qui signifie que la courbe ne peut pas sortir du cadre rouge)
- f est continue sur $[a;b]$

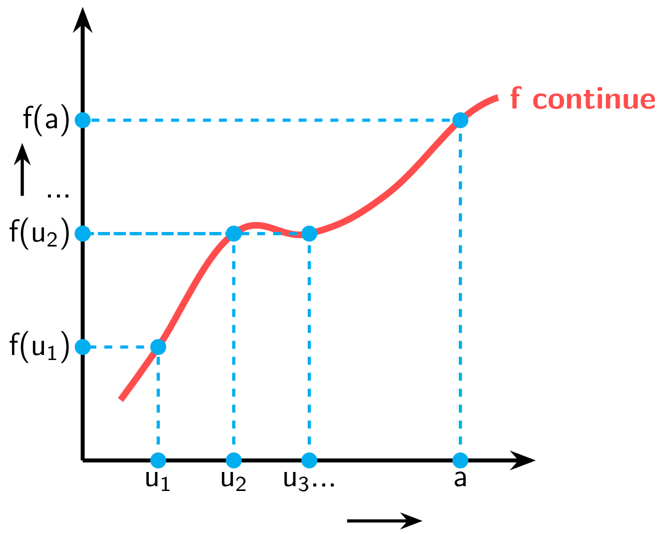
Est-il possible que la courbe représentative de f ne coupe pas la droite verte d'équation $y = x$?

Il existe dans ces conditions au moins un réel c tel que $f(c) = c$. On parle alors de **point fixe**.

7.3.2 Propriété

Propriété

Soit une fonction f continue sur un intervalle I.
Soit une suite (u_n) une suite d'élément de I qui converge vers $a \in I$.
Alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.
Autrement dit,
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.



7.3.3 Propriété du point fixe

Propriété - Théorème du point fixe -

Soit une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si la fonction f est définie et continue sur un intervalle I

- Et si $\forall x \in I$, $f(x) \in I$
- et si la suite (u_n) est convergente vers un réel l avec $l \in I$,

Alors la limite l de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

Savoir-Faire 7.5

SAVOIR ÉTUDIER UNE SUITE DÉFINIE PAR $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.65u_n + 1.8$.

1. Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par $f(x) = 0,65x+1,8$.
   a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0,65x + 1,8$ et $y = x$.
   b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
   c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question précédente.

Méthode :

Pour utiliser le théorème du point fixe, plusieurs conditions doivent être réalisées :

- La suite (u_n) doit converger vers un réel $l \in I$
- La suite (u_n) doit être définie par un premier terme $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
- La fonction f doit être continue sur un intervalle I avec $\forall x \in I$, $f(x) \in I$

Exercice 7.11

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0,1$ et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(1-x)$.
On admet que (u_n) est croissante et convergente vers l. Déterminer l.

Exercice 7.12

Soit f la fonction définie sur $[-6; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante et majorée par 3
2. Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 7.13

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{5} \end{array}\right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de f

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.14

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{u_n+1}{e^{u_n}} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près, en utilisant une méthode par balayage.
5. Montrer, par récurrence sur n, que (u_n) est croissante et majorée par α.
6. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.15

?? ⚠ Extrait de l'exercice 4 du bac du 17 juin 2025
Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée *posidonie*, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.
   On admet que h est croissante sur $[0\ ;\ 20]$.
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
   b) En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
   c) Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
   a) Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
   b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while ..................... :
        n = ..............
        u = ..............
    return n
```

8.1 Définition de la fonction logarithme népérien

Maths Spé terminale - JB Duthoit

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, quel que soit le réel k strictement positif, l'équation $e^x = k$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de k l'unique solution de l'équation $e^x = k$. Ce nombre est noté $ln(k)$.

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe le nombre $ln(x)$.

Conséquence

Ainsi, $y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$.
Ainsi, notamment :

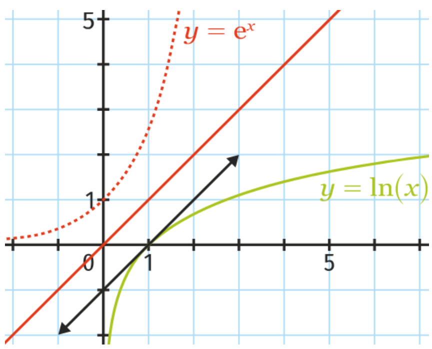
- $ln(1) = ...$ car $e^0 = 1$
- $ln(e) = ...$ car $e^1 = e$

Remarque

⚠ Python utilise la notation **log** pour le logarithme népérien.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$



Propriété

La fonction f définie par $f(x) = ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 8.1
Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Propriété

1. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ln(e^x) = x$.
3. $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{ln(x)} = x$.
4. $\forall a \in]0;+\infty[$, $\forall b \in]0;+\infty[$, $a = b \Leftrightarrow ln(a) = ln(b)$
5. $\forall a \in]0;+\infty[$, $\forall b \in]0;+\infty[$, $a < b \Leftrightarrow ln(a) < ln(b)$

Démonstration 9(Exigible) :

⚠ *les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.*

CALCUL DE LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN
Soit f la fonction logarithme népérien.
On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on note f' sa dérivée.
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = x$, et en déduire $g'(x)$.
2. En utilisant $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, donner une autre expression de $g'(x)$.
3. Conclure

Savoir-Faire 8.1

SAVOIR RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS OU INÉQUATION AVEC DES LOGARITHMES
Déterminer les conditions d'existence des équations suivantes, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. Un premier exemple corrigé, avec $ln(2x+3) = ln(x)$

Solution possible :

$$\begin{aligned} ln(x) \text{ et } ln(2x+3) \text{ existent si et ssi } & x > 0 \text{ et } 2x+3 > 0 \\ \text{si et ssi } & x > 0 \text{ et } x > \frac{-3}{2} \\ \text{si et ssi } & x > 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} ln(x) = ln(2x+3) & \Leftrightarrow x = 2x+3 \\ & \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Comme $-3 \notin]0;+\infty[$, l'équation n'admet pas de solution et $S = \emptyset$

2. $2ln(x)+1=7$
3. $3e^x+3=9$
4. $5ln(x)<10$
5. $5-2ln(x)\geq 1$
6. $e^{x-3}>5$

Exercice 8.2
Déterminer les conditions d'existence des équations, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(5x+1)=ln(x)$
2. $2ln(x)+2=5$
3. $3e^{2x+3}=e$
4. $4-2e^{x-4}>0$

Exercice 8.3
On considère les équations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette équation, et la résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(x^2-49)=0$
2. $ln(2x^2-7x+6)=ln(10)$
3. $e^{\frac{x}{x+2}}=3$
4. $ln(e^{2x}+1)=1$

Exercice 8.4
On considère les inéquations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette inéquation, et la résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(x-3)>1$
2. $e^{2-x}\leq 3$
3. $ln(4x^2-x)\leq ln(3x)$
4. $e^{x^2-1}\leq -1$
5. $e^{x^2-1}>2$

Exercice 8.5
On considère les équations ou inéquations suivantes. Résoudre chacune d'elles dans $\mathbb{R}$ en posant un changement de variable :

1. $(ln(x))^2+2ln(x)=3$ en posant $X=ln(x)$
2. $5e^{4x}-13e^{2x}-6=0$ en posant $X=e^{2x}$
3. $(ln(x))^2-2ln(x)=15$
4. $e^{2x}-2e^x-15<0$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $\forall x\in I$, $u(x)>0$.

La fonction f définie sur I par $f(x)=ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Autrement dit, $(ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$.

Savoir-Faire 8.2

Savoir étudier une fonction avec logarithmes

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{ln(x)}{x}$
2. Soit f la fonction définie par $f(x)=ln\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.6

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - ln(x)$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = ln\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.7

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;11]$ par $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 15ln(x)$
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x - 1)$.

Exercice 8.8

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty]$ par $g(x) = x - 1 + ln(x)$
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty]$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x} \times ln(x)$.
   a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire les variations de f

Exercice 8.9

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (ln(x))^3 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer l'équation réduite de T_1, tangente à C_f en 1.
3. Étudier la position relative de C_f et de T_1.