Les équations de droites

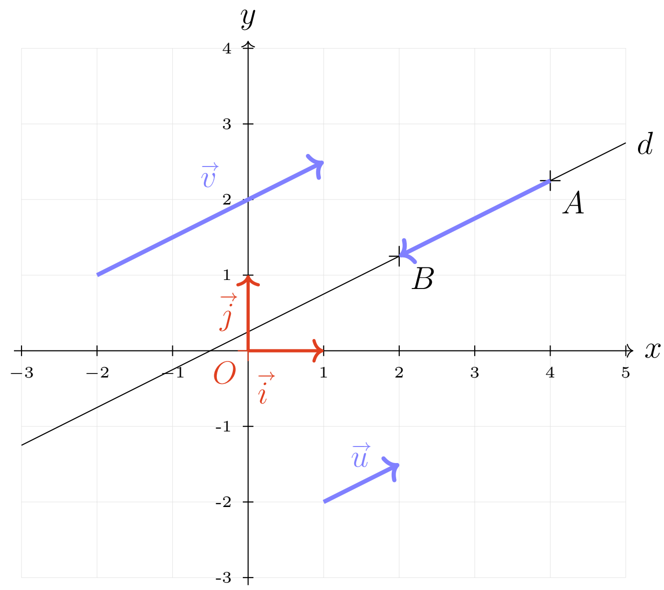
0.1 Les équations de droite

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

0.1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit d une droite du plan, muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle **vecteur directeur** tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite d.

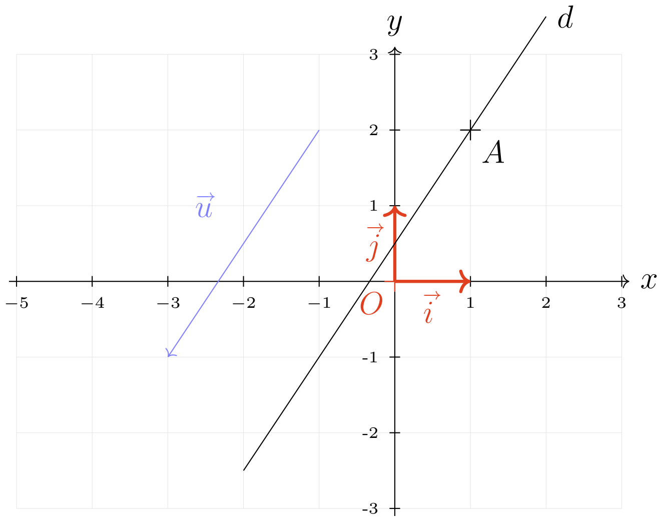


Remarque

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires entre eux.
- A et B étant deux points distincts, tout vecteur directeur est non nul.

Exemple

Dans un repère du plan, tracer la droite d passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;-3)$.



Savoir-Faire 0.1

Savoir lire un vecteur directeur sur une droite donnée

0.1.2 Équation cartésienne de droite

Propriété

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, toute droite d a une équation du type $ax+by+c=0$.

Démonstration 0.1

Soit d une droite définie par un point $A(x_A;y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{pmatrix}$.

Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
M\in d &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\ et\ \vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{pmatrix}\ sont\ colinéaires\\
&\iff det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0\\
&\iff \begin{vmatrix}x-x_A & x_{\vec{u}}\\ y-y_A & y_{\vec{u}}\end{vmatrix}=0\\
&\iff (x-x_A)\times y_{\vec{u}}-x_{\vec{u}}\times(y-y_A)=0\\
&\iff x\times\underbrace{y_{\vec{u}}}_{a}+y\times\underbrace{(-x_{\vec{u}})}_{b}+\underbrace{-x_A\times y_{\vec{u}}-y_A\times(-x_{\vec{u}})}_{c}=0\\
&\iff ax+by+c=0\ ,\ avec\ a,\ b\ et\ c\ trois\ réels.
\end{aligned}$$

Remarque : Les nombres a et b ne peuvent pas être nuls en même temps, car sinon, on aurait $x_{\vec{u}}=y_{\vec{u}}=0$, ce qui signifierait que $\vec{u}=\vec{0}$; ce qui est impossible, car $\vec{u}$ est une vecteur directeur, donc non nul. On note cela $(a,b)\neq(0,0)$.

Propriété (admise)

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.
L'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient $ax+by+c=0$ est une droite.

Remarque

Cette propriété est la propriété réciproque de la propriété précédente.

Définition

La relation $ax+by+c=0$ est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Remarque

Une même droite d admet une infinité d'équations cartésiennes.

Savoir-Faire 0.2

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par un point et un vecteur directeur.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(-5;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-3)$
- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par deux points distincts.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $B(2;3)$ et $C(4;-1)$.

Propriété

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.
le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Exemple

On considère la droite (AB) dont une équation cartésienne est $5x+4y-1=0$.
Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}(-4;5)$

Savoir-Faire 0.3

Savoir tracer une droite dont on connait une équation cartésienne

0.2 Équation réduite de droite

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Dans cette partie, on considère la droite d dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$, où $(a;b)\neq(0;0)$.

0.2.1 Équation réduite du type x=k

Supposons ici que $b=0$. On a donc :

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff ax+b\times 0+c=0\\ &\iff ax+c=0\\ &\iff x=\frac{-c}{a}\\ &\iff x=k \quad avec \;\; k\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il est donc évident que la droite d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées :

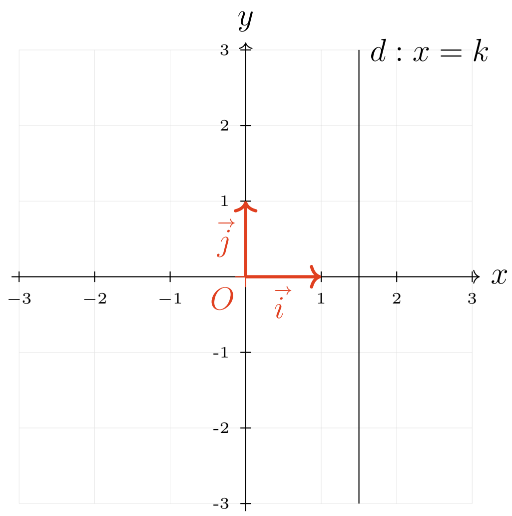


Figure 1 – Cas où $k=1.5$

Propriété

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0,0)$.
Si $b=0$ alors la droite d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition

Si d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation $x=k$, où $k\in\mathbb{R}$ est appelée **équation réduite** de la droite d.

0.2.2 Équation réduite de la forme y=mx+p

Définition

Supposons ici que $b \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff by=-ax-c \\ &\iff y=\frac{-ax-c}{b} \quad car \quad b\neq 0 \\ &\iff y=\frac{-a}{b}\times x+\frac{-c}{b} \\ &\iff y=mx+p \quad avec \quad m\in\mathbb{R} \quad et \quad p\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

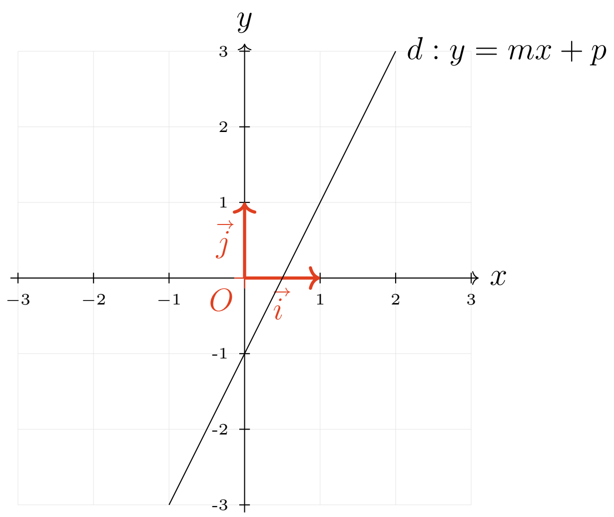


FIGURE 2 – Cas où $m = 2$ et $p = -1$

Propriété

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0, 0)$.
Si $b \neq 0$ alors la droite d est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition

Si d est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation $y = mx + p$, où $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ est appelée **équation réduite** de la droite d.

Remarque

Pour une même droite d, il existe une et une seule équation réduite.

Définition

- Le nombre m est appelé **coefficient directeur** de la droite d.
- Le nombre$p$ est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite d.

Interprétation graphique du coefficient directeur

Propriété (admise)

Si d est une droite d'équation réduite $y = mx + p$, alors un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1; m)$.

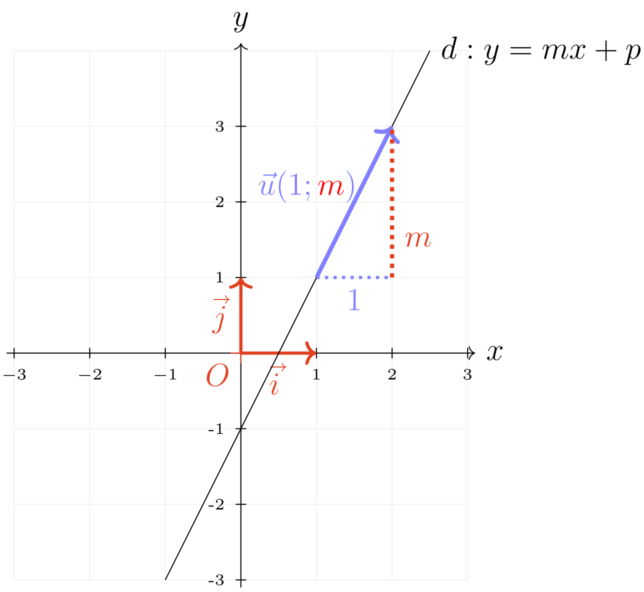


FIGURE 3 – Cas où $m = 2$ et $p = -1$: visualisation du coefficient directeur

Remarque

Si la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées, elle n'admet pas de coefficient directeur.

Savoir-Faire 0.4

Savoir lire un coefficient directeur (ou pente) sur une droite

Savoir-Faire 0.5

Savoir passer d'une équation cartésienne à une équation réduite, et inversement

Savoir-Faire 0.6

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point de la droite et son coefficient directeur

Propriété

Propriété (admise)

Le coefficient directeur de la droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Savoir-Faire 0.7

Savoir déterminer directement une équation réduite de droite, connaissant deux points distincts de cette droite

0.3 Position relative de deux droites

Dans le plan, deux droites sont sécantes ou parallèles (strictement parallèles ou confondues). Dans la suite, on mettra en place des méthodes afin de déterminer la position relative de deux droites du plan.

0.3.1 Avec des équations réduites

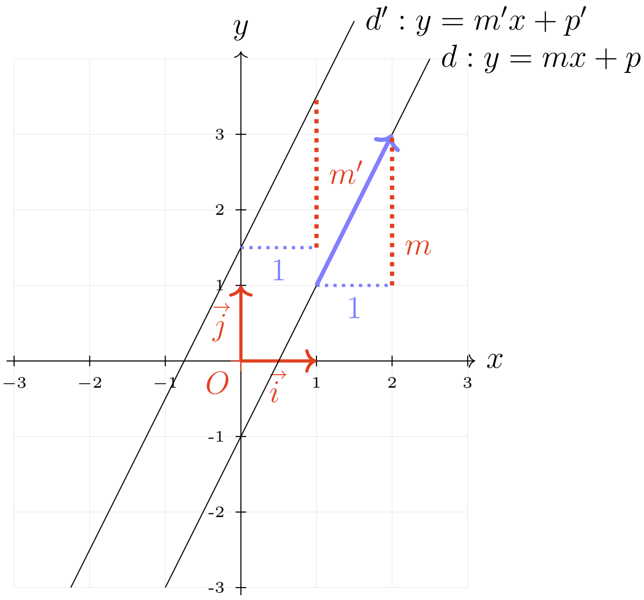


Figure 4 – Droites parallèles et équations réduites

Propriété

Deux droites d et d' sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.
En particulier, si d a pour équation $y = mx + p$ et d' a pour équation $y = m'x + p'$,
$d \parallel d' \iff m = m'$.

0.3.2 Avec des équations cartésiennes

Remarque

A partir des équations cartésiennes, on peut toujours déterminer les équations réduites, et utiliser le point précédent pour conclure.

Et sans passer par les équations réduites, est-ce possible ?

Soient d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. On sait qu'un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-b;a)$ et qu'un vecteur directeur de d' est $\vec{v}(-b';a')$

$$\begin{aligned} d \parallel d' &\iff \vec{u} \ \ et \ \ \vec{v} \ \ colinéaires \\ &\iff det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Propriété

Soient d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
$d \parallel d' \iff \vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$ colinéaires.

0.4 Point d'intersection de deux droites sécantes

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Si les deux droites d et d' sont sécantes, elles admettent un unique point d'intersection I
Ce point d'intersection étant sur la droite d et sur la droite d', les coordonnées de I vérifient une équation de la droite d et une équation de la droite d'.

Déterminer un point d'intersection de deux droites sécantes revient donc à résoudre un système de deux équations linéaires, à deux inconnues.

Définition

Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est un système qui peut s'écrire sous la forme :
$\begin{cases} ax+by+c & =0 \\ a'x+b'y+c' & =0 \end{cases}$, où a,b,c,a',b' et c' sont des réels.

Savoir-Faire 0.8

Comment vérifier qu'un couple est solution du système ? On considère les droites d et d' d'équations réduites respectives $2x+y-1=0$ et$x-2y+3=0$. On a vu précédemment que les droites d et d' n'étaient pas parallèles. Démontrer que le point $I(1;2)$ est bien le point d'intersection des droites d et d'.

Savoir-Faire 0.9

Comment résoudre algébriquement un système ? (méthode par substitution)

Résoudre, en utilisant la méthode par substitution, le système suivant : (S) : $\begin{cases} 3x-2y & =-1 \\ x+3y & =7 \end{cases}$

Savoir-Faire 0.10

Comment résoudre algébriquement un système ? (méthode par combinaison)

Résoudre, en utilisant la méthode par combinaison, le système suivant : (S) : $\begin{cases} -4x-9y & =7 \\ 4x+8y & =-8 \end{cases}$

Exercice 0.1

Spécial Seconde 7

On considère le tableau suivant :

1 A	2 B	3 C	4 D	5 E	6 F	7 G	8 H	9 I	10 J	11 K	12 L	13 M
14 N	15 O	16 P	17 Q	18 R	19 S	20 T	21 U	22 V	23 W	24 X	25 Y	26 Z

Voici maintenant un message à décoder :

`abcdefedgedheiggecjd`

en sachant que :

1. (a,b) est solution de $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-29 & = & 0 \\ -x-y+37 & = & 0 \end{array}\right.$
2. (c,d) est solution de $\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+36 & = & 0 \\ -2x-8y+194 & = & 0 \end{array}\right.$
3. (e,f) est solution de $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y+30 & = & 0 \\ 5x-y-5 & = & 0 \end{array}\right.$
4. (g,h) est solution de $\left\{\begin{array}{rcl} y-13 & = & 0 \\ 3x-10y+94 & = & 0 \end{array}\right.$
5. (i,j) est solution de $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+9 & = & 0 \\ 2x+3y-72 & = & 0 \end{array}\right.$