14.1 Opération sur les variables aléatoires

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ et soit Soit Y une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega' = \{e'_1; e'_2; ...; e'_n\}$

- Soir $a \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire $Z = aX$ est la variable aléatoire qui à chaque issue e_i de Ω associe le réel $a \times x_i$, avec $P(Z = ax_i) = P(X = x_i)$.
- La variable aléatoire $S = X + Y$ est la variable aléatoire qui à chaque issue e_i et e_j de $\Omega \times \Omega'$ associe le réel $x_i + y_j$, avec $P(S = s_k)$ égale à la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i$ et $Y = y_i)$ telle que $x_i + y_j = s_k$.

Remarque

On définit de même la somme de n variables aléatoires...

Exercice 14.3
Une usine fabrique des machines.
Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant ce mois. Une étude statistique donne la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.04	0.08	0.12	0.28	0.25	0.17	0.06

La vente d'une machine rapporte 8000 euros. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z qui associe, pour un mois au hasard, au nombre de machines vendues, le résultat en euros de l'usine.

Exercice 14.4
Une urne contient trois jetons rouges marqués "0" et deux jetons bleus marqués "1". On tire au hasard et sans remise deux jetons de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré. Soit Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de X, puis de Y, puis la loi de probabilité de la variable aléatoire S définie par $S = X + Y$.

Propriété

Deux variables aléatoires sont indépendantes si, quelles que soient les valeurs de x_i et y_j, $P(X = x_i \texttt{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

14.1.1 Propriétés sur les variables aléatoires

Propriété

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire. Alors on a :
  - $E(aX) = aE(X)$ (linéarité de l'espérance)
  - $V(aX) = a^2V(X)$
  - $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$
- Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors on a :
  - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (linéarité de l'espérance)
  - Uniquement si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Savoir-Faire 14.68

Savoir créer la loi de probabilité de la multiplication d'une VA par un nombre réel, et en déduire son espérance et son écart-type

On reprend les données de l'exercice 14. 2

Une usine fabrique des machines.

Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant ce mois. Une étude statistique donne la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.04	0.08	0.12	0.28	0.25	0.17	0.06

1. Calculer $E(X)$.
2. La vente d'une machine rapporte 8000 euros. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z qui associe, pour un mois au hasard, le résultat en euros de l'usine.
3. Calculer $E(Z)$ et interpréter ce résultat.

Savoir-Faire 14.69

Savoir créer la loi de probabilité d'une somme de deux VA, et en déduire son espérance et son écart-type

On reprend les données de l'exercice 14. 3

Une urne contient trois jetons rouges marqués "0" et deux jetons bleus marqués "1". On tire au hasard et sans remise deux jetons de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré. Soit Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, puis de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S définie par $S = X + Y$.
4. Calculer $E(S)$.

Exercice 14.5

On lance deux dés équilibrés A et B, à six faces.
Soit X la variable aléatoire égale à chaque lancer du dé A :

- La valeur du dé A s'il est inférieur à 4
- 0 sinon

Soit Y la variable aléatoire égale à chaque lancer du dé B :

- 0 si le dé B est un multiple de 3
- 1 si le dé B tombe sur "5"
- 2 sinon

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$

Exercice 14.6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X et Y suivent les lois de Bernoulli de paramètres respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.
On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1. Calculer $P(Z = 1)$
2. Déterminer la loi de probabilité de Z
3. Calculer $P_{z=1}(X = 1)$ et $P_{X=1}(Z = 2)$.

Savoir-Faire 14.70

Savoir décomposer une variable aléatoire en une somme ou différence de variables aléatoires plus "simples"

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculer $E(X)$.

Méthode :

- Lorsque l'énoncé fait état d'une variable aléatoire X correspondant à une somme, à une différence ou à un produit par un réel, il est souvent préférable de décomposer cette variable aléatoire en variables aléatoires " plus simples ".
- On commence donc par écrire cette variable aléatoire en somme ou différence de variables aléatoires X_1 et X_2, plus faciles à étudier.
- On étudie la loi de probabilité de chacune de ces variables aléatoires.
- On en déduit alors $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
- On conclut grâce à la linéarité de l'espérance