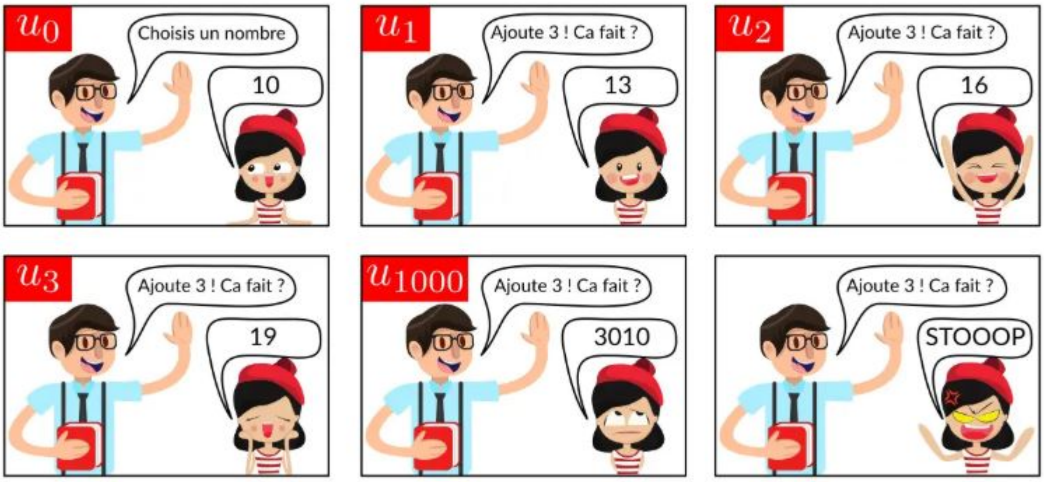
8.1 Suites arithmétiques

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

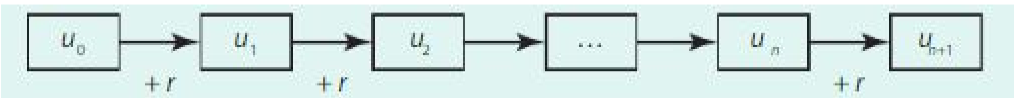
8.1.1 Définition

une suite arithmétique, c'est exactement ça !



Définition

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r, appelé **raison** de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemple

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$ est la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Savoir-Faire 8.42

Savoir montrer qu'une suite est une suite arithmétique

Dans chaque cas, dire si la suite est une suite arithmétique, et préciser éventuellement sa raison :

- Soit (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 5$
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 3$.
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$

- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2$

8.1.2 Propriétés

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Savoir-Faire 8.43

SAVOIR UTILISER LES FORMULES EXPLICITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES

Exemple :

- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3. Déterminer u_{1000}.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_7 = 10$ et de raison 5. Déterminer u_{1000}.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_{11} = 11$ et $u_{15} = 23$. Déterminer u_0 et r.
- Soit (u_n) est une suite arithmétique avec $u_7 = 23$ et $u_{25} = 50$. Déterminer u_0 et r.

✎Je m'entraîne seul(e)

Choisir deux nombres r et u_0. Calculer deux termes distincts en considérant que la suite est arithmétique (par exemple u_{117} et u_{215}). A partir de u_{117} et u_{215}, retrouver r et u_0.

8.1.3 Variations des suites arithmétiques

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante.
- si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration 8.6

Démonstration évidente en utilisant la méthode de la différence, car $u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple

- $r = 3$ et $u_0 = 2$:

- $r = -2$ et $u_0 = 5$:

8.1.4 Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Histoire

Carl Gauss

Nous sommes dans les années 1780, en ce qui est aujourd'hui l'Allemagne. M. Büttner est instituteur. Ses élèves étant ce jour-là quelque peu dissipé, il leur demande d'additionner les nombres de 1 à 100, espérant bien obtenir un peu de calme.
Seulement voilà, à peine quelques instants plus tard, alors que tous devraient être en train de plancher pour encore un moment sur le problème, l'un deux (Carl Gauss) prétend avoir le résultat : 5050...

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique.
$Somme\ des\ termes\ cons\acute{e}ctifs = \frac{nb\ de\ termes \times (1er\ terme\ +\ dernier\ terme)}{2}$

Savoir-Faire 8.44

Savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Calculer S dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_0 = 5$ et $r = 7$. On pose $S = u_0+u_1+u_2+...+u_{10}$
2. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_5 = 5$ et $r = 3$. On pose $S = u_5+u_6+u_7+...+u_{50}$
3. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_5 = 5$ et $u_{15} = 35$. On pose $S = u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_{17}$
4. Calculer $S = 1 + 3 + 5 + ... + 101$
5. Calculer $S = 3 + 8 + ... + 278$

✎Je m'entraîne seul(e)

Voici quelques exercices corrigés

- On considère une suite arithmétique telle que $u_7 = -9$ et $u_{25} = -45$.Calculer la somme $S = u_7 + ... + u_{25}$.Rép : -513
- On considère une suite arithmétique telle que $u_8 = -19$ et $S = u_8 + ... + u_{32} = -1075$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : r= -2.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = -17$ et $S = u_3 + ... + u_{32} = -2250$. Déterminer la raison r de cette suite. Rép : r= -4.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_6 = 19$ et $u_{29} = 111$.Calculer la somme $S = u_6 + ... + u_{29}$.Rép : 1560.
- On considère une suite arithmétique telle que $u_5 = -10$ et $u_{20} = -40$.Calculer la somme $S = u_5 + ... + u_{20}$.Rép : -400.
- Déterminer l'entier n tel que $16 + 17 + ... + n = 5875$. Rép : 109.
- Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique. $S = -76 - 81 + ... - 251$. Rép : -5886