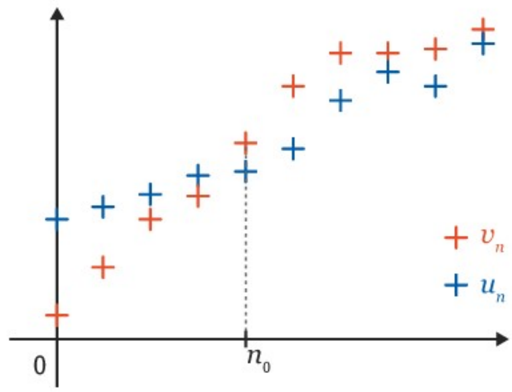
2.3 Limites et comparaison

2.3.1 Théorème de comparaison

Propriété

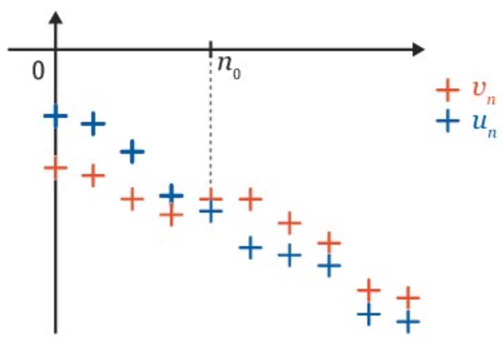
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.



Démonstration 2- Démonstration au programme -
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0. On suppose aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Démonstration 3- Démonstration au programme -
Savoir démontrer la propriété relative à la suite géométrique q^n :

1. Étude des cas évidents : $q = 0$ ou $q = 1$
2. Montrer que si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. Montrer que si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Démonstration au programme

Si $q \leq -1$, (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice 2.10

1. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier n, $u_n \geq n^2 + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2. Soit (v_n) une suite telle que, pour tout entier n, $v_n \leq -3n - 4$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
3. Soit (w_n) une suite telle que, pour tout entier n, $-1 + 2n \leq w_n \leq 1 + 2n$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

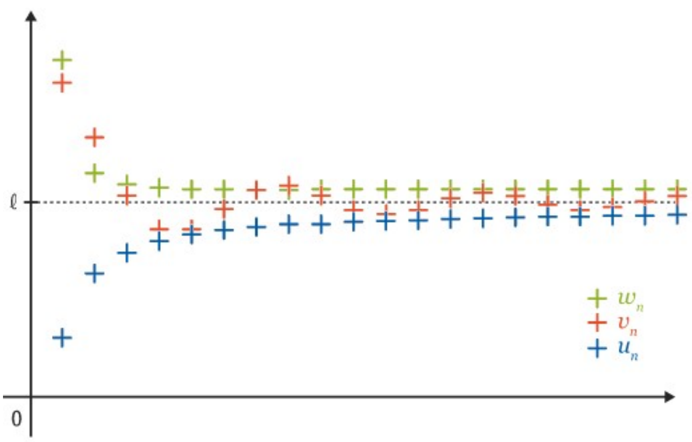
Exercice 2.11

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\sqrt{n^3+1} \geq n\sqrt{n}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^3+1}$

2.3.2 Théorème des gendarmes

Propriété (admise) Théorème des gendarmes

Soient (u_n),(v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$
Autrement dit, si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel l, alors (v_n) converge aussi vers l.



Remarque

⚠ Le plus souvent, on utiliseras des encadrements classiques, comme :

- $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
- $-1 \leq sin(n) \leq 1$
- $-1 \leq cos(n) \leq 1$

Démonstration 4- Démonstration au programme -

Savoir démontrer la propriété relative à la suite géométrique q^n :

1. Étude des cas évidents : $q = 0$ ou $q = 1$
2. Montrer que si $q > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Montrer que si $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Démonstration au programme

Si $q \leq -1$, (u_n) n'admet pas de limite.

Savoir-Faire 2.3

DÉTERMINER UNE LIMITE DE SUITE EN UTILISANT LE THÉORÈME DE COMPARAISON OU BIEN LE THÉORÈME DES GENDARMES

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (n^2 - (-1)^n)$
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4 + (-1)^n}{n^2}$
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} - cos(n)}$

Exercice 2.12

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 0.59^n(5 + (-1)^n)$.
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2.13

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ dans les cas suivants :

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{sin(n)}{n^3}$.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{n + sin(n)}{n}$.
3. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.