

9.3

Équations différentielles

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

9.3.1 Équation différentielle $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réel.

-Exigible au bac-

Soit a un réel. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay$.

1. Partie directe : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax}$ avec C un réel. Montrer que f est bien solution de (E) .
2. Réciproque. Soit f une solution de (E) . Montrons que f est nécessairement de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec C un réel.

Savoir-Faire 9.39

SAVOIR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' = ay$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -4y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(2) = 1$

Exercice 9.17

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 2y$.
2. Représenter sur votre calculatrice les courbes de ces fonctions solutions, en prenant pour C les valeurs 1,2,-1 et -2. on remarquera que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à ces courbes (on peut choisir $x_{\min} = -2$, $x_{\max}=1$, $y_{\min} = -3$ et $y_{\max} = 3$)

Exercice 9.18

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 5y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 4$

Exercice 9.19

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 6y = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 1$

Exercice 9.20

Déterminer l'ensemble des solutions de chacune de ces équations différentielles :

$$1. \quad y' = -2y$$

$$2. \quad -y' + 0.1y = 0$$

$$3. \quad 3y' - 2y = 0$$

$$4. \quad y' + \ln(2)y = 0$$

9.3.2 Équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 9.21

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-b}{a}e^{ax}$ est une solution de (E) .

Propriété (admise)

Soient a et b sont des réels avec $a \neq 0$.

L'ensemble des solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 la solution particulière constante de (E) .

Vocabulaire

On dit que $y' = ay$ est l'**équation homogène** de $y' = ay + b$

Savoir-Faire 9.40

SAVOIR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' = ay + b$

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 2$.

1. Déterminer la solution particulière constante de (E) .
2. En déduire les solutions de (E) .

Exercice 9.22

1. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 3$.

- a) Déterminer la solution particulière constante de (E) .
- b) En déduire les solutions de (E) .

2. Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 4y = 8$.

- a) Déterminer la solution particulière constante de (E) .
- b) En déduire les solutions de (E) .

3. Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + 6y = 1$.

- a) Déterminer la solution particulière constante de (E) .
- b) En déduire les solutions de (E) .
- c) En déduire la solution de (E) qui vérifie $f(2) = 0$.

9.3.3 Équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété (admise)

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I .

L'ensemble des solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 la solution particulière constante de (E) .

Savoir-Faire 9.41

SAVOIR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' = ay + f$

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = y + x - 3$.

1. Déterminer les réels m et p telle que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E) .
2. En déduire les solutions de (E) .

Exercice 9.23

1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

- a) Montrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E) .
- b) En déduire toutes les solutions de (E) .

2. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x$.

- a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E) .
- b) En déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice 9.24

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 4y = 3xe^{2x}$. On note aussi (E') l'équation différentielle $y' + 4y = 0$

1. Résoudre l'équation (E') .
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de (E) .
3. En déduire la solution générale de (E) .

Exercice 9.25

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution particulière de (E) .
2. En déduire la solution générale de (E) .
3. En déduire la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine, dans une repère donné.

