5.2 Limite finie ou infinie en un réel

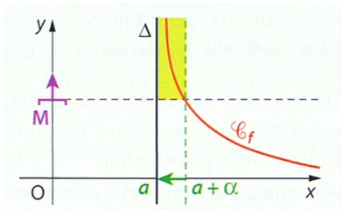
Maths Spé terminale - JB Duthoit

5.2.1 Limite infinie en un réel a

Définition

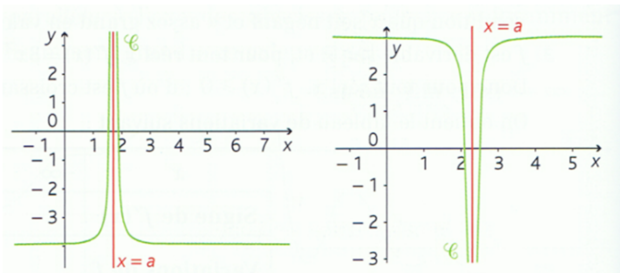
Soit f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit le nombre a qui est une borne de I.
Dire que la **limite de f en a est $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]M;+\infty[$ contient toute les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proches de a.
Autrement dit, dire que la limite de f en a est $+\infty$ signifie que pour tout nombre M , il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tous les nombres de $x \in I$, si $|x-a| < \alpha$, alors $f(x) > M$.
On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



Définition

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, on dit alors que la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f.



Remarque

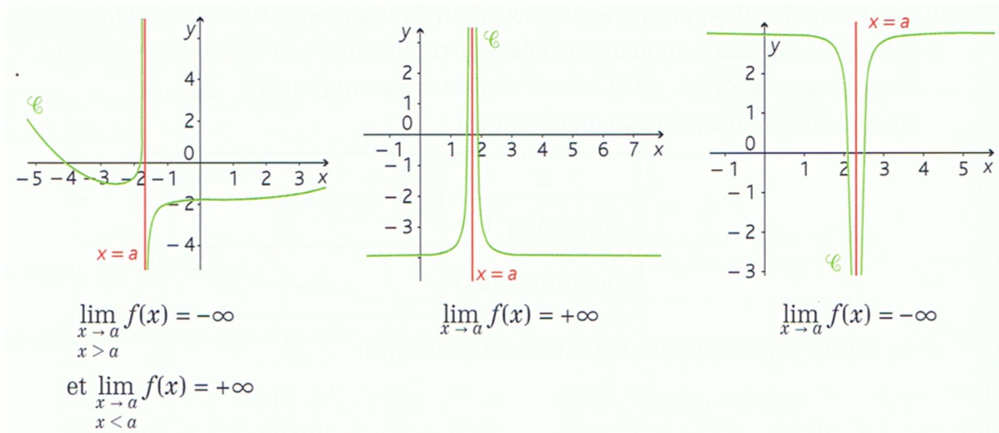
Dire que f a une limite infinie en a signifie que f possède en a, une limite à gauche et une limite à droite (infinies) et que ces limites sont égales.
On a alors :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Par exemple, la fonction définie pour tout x réel non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} = -\infty$

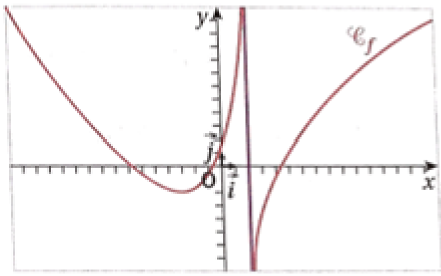
Remarque

Pour une fonction f définie pour tout x réel différent de a, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f si l'une au moins des limites $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ existe et est infinie.



Exercice 5.6

f est une fonction définie sur un intervalle réel, et représentée ci-contre par sa courbe.



1. Conjecturer la limite de la fonction f en 2.
2. En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) verticales(s) à la courbe de f, si elle(s) existe(nt).
3. Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites conjecturées.

Exercice 5.7

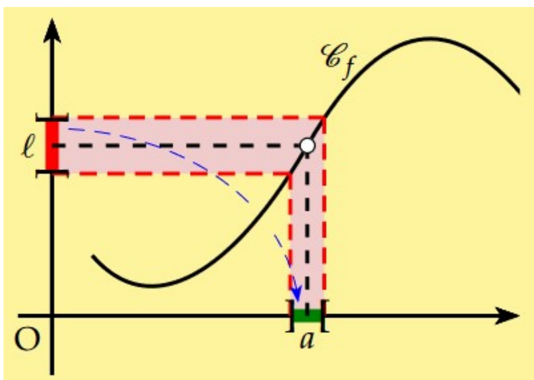
g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 5\}$ par $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4x-5}$.

1. A l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer la limite de g en 5
2. En supposant cette conjecture exacte, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de g ?

5.2.2 Limite finie en un réel a

Définition

Si f est une fonction définie sur une intervalle I contenant un nombre réel a alors on dit que f admet pour limite l en $x = a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.



Propriété (admise)

Soit a un réel.

- Si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si P est un polynôme, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) définie en a, $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} cos(x) = cos(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} sin(x) = sin(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$

Exercice 5.8

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -2} x^3$
2. $\lim\limits_{x \to 0} e^x$
3. $\lim\limits_{x \to 12} \sqrt{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{x+4}$
5. $\lim\limits_{x \to -2} x^3 + 2x^2 + 3x - 5$
6. $\lim\limits_{x \to -5} e^x$

Exercice 5.9

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

1. Donner les limites de f en $-\infty$,$+\infty$ et en -1.
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

Exercice 5.10

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

1. Donner les limites de f en $-\infty$,$+\infty$ et en 2.
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

Exercice 5.11

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f
. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Au maximum, combien d'asymptotes horizontales C_f peut-elle admettre ? Et d'asymptotes verticales ?

2. Trouver deux exemples permettant d'illustrer les réponses à la question précédente.

Savoir-Faire 5.1

Savoir interpréter graphiquement des limites

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit C_f sa courbe représentative. Le tableau de variation de f est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

   a) Lire dans le tableau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) En déduire l'existence d'asymptote(s) à la courbe C_f.

2. Soit f une fonction définie sur $]-1;3[\cup]3;7]$ telle que :

   - f est décroissante sur $]-1;3[$ et sur $]3;7]$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=+\infty$ et $f(7)=1$.

   On nomme C_f la courbe représentative de f.

   a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

   b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ? Préciser.

   c) Tracer dans un repère une allure de la courbe C_f et ses asymptotes.