15.5 Applications du produit scalaire

15.5.1 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, si les réels a,b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration 25- -

Savoir-Faire 15.83

Savoir déterminer une équation cartésienne d'un plans connaissant un vecteur normal et un point

Soit $A(-1;2;5)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-3;1;4)$ un vecteur.

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3;8;7)$. Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 15.22

Soit $A(1;9;3)$ et $B(-2;-7;-5)$ deux point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 15.23

Soit $A(4;5;8)$, $B(1;3;-12)$ et $C(0;0;8)$ trois point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

Savoir-Faire 15.84

Savoir reconnaître un plan donné par une équation cartésienne

Soit $A(1;0;3)$, $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$ trois points de l'espace et soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z+1=0$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le plan (ABC) est le plan $\mathcal{P}$
3. En déduire un vecteur normal à (ABC).

Exercice 15.24
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x + 2y + 6z - 4 = 0$.

Exercice 15.25
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $y = 2x - 6$.

Exercice 15.26
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $z = 0$.

Savoir-Faire 15.85

Savoir déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit d la droite passant par $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1; 4)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d

Exercice 15.27
Soit d la droite passant par $A(2; 2; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6; -1; 2)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(11; -18; 2)$ sur la droite d

Exercice 15.28
Soit d la droite passant par $K(1; -1; 10)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4; -5)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $R(0; 6; -5)$ sur la droite d

Exercice 15.29
Soit d la droite passant par $A(2; 3; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4; -8; -4)$.

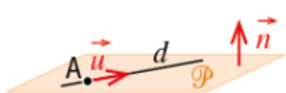
1. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $C(0; -5; 13)$ sur la droite d
2. Déterminer CH, AB et l'aire du triangle ABC.
3. Le point H est-il le projeté orthogonal de $R(-13; 1; -12)$ sur la droite d ?

15.5.2 Intersection de droites et de plans

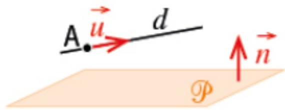
Propriété

On considère un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

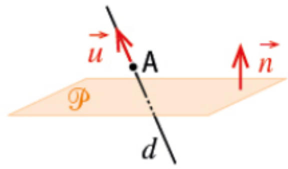
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors :
  - Si $A \in \mathcal{P}$ alors $d \subset \mathcal{P}$ (d est incluse dans $\mathcal{P}$).



- Si $A \notin \mathcal{P}$ alors d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.



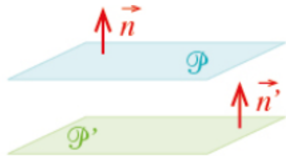
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.



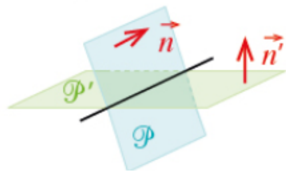
Propriété

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles



- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite.



Savoir-Faire 15.86

SAVOIR DÉTERMINER LES COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont sécantes en un point A
2. Déterminer les coordonnées de A

Exercice 15.30

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 3y - 2z + 3 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 7 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont sécantes en un point A
2. Déterminer les coordonnées de A

Exercice 15.31

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 5y + 3z - 7 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 9 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont strictement parallèles.

Exercice 15.32

Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x - y)^2 = z^2$.