10.1 Définition de la fonction exponentielle

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Histoire

C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) utilisa pour la première fois la notation e . La première apparition de la lettre « e » pour désigner la base du logarithme népérien date de 1728, dans un manuscrit d'Euler qui le définit comme le nombre dont le logarithme est l'unité et qui se sert des tables de Vlacq pour l'évaluer à 2,7182817.

Euler

Histoire

La forme prise par un fil pesant flexible entre deux point fixe est appelée une "chaînette". C'est une courbe de fonction qui fait intervenir la fonction exponentielle !

câble EDF, fils de soie tissés par une araignée...

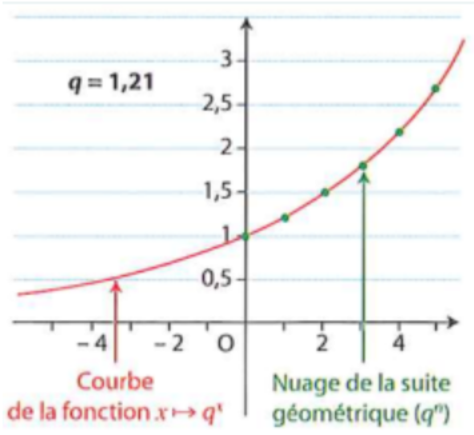
10.1.1 Définition

Approche

Approche

Les fonctions exponentielles de base q viennent prolonger les suites géométriques de raison q en des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Soit q un nombre strictement positif donné. La suite de terme général $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison q.

La fonction exponentielle de base q est le "prolongement" de cette suite géométrique à l'ensemble des réels. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$ avec $q > 0$.



On cherche à résoudre une équation différentielle, c'est à dire une équation qui met en relation une fonction avec sa dérivée.
On va s'intéresser ici à la (il y en a qu'une seule) fonction (elle existe) telle que :

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(x)$
- $f(0) = 1$

Définition

Propriété

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(0) = 1$
- $f' = f$

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $exp(0) = 1$
- $exp'(x) = exp(x)$

10.1.2 Propriété

Propriété

Pour tout réel x, on a $exp(-x) \times exp(x) = 1$

Exemple

- $exp(5) =$
- $exp(-8) ==$

Conséquence 10.51

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) \neq 0$

10.1.3 Propriétés algébriques

Propriété

Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif n, on a :

- $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$
- $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$
- $exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$
- $exp(nx) = (exp(x))^n$

Exemple

- $exp(-5) =$
- $exp(8) = exp(5+3) =$
- $exp(4) = exp(6-2) =$
- $exp(40) = exp(4 \times 10) =$

Savoir-Faire 10.55

Savoir manipuler les propriétés algébriques

1. Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes :

   a) $A = exp(4x) \times exp(-2x+1)$

   b) $B = \dfrac{(exp(x+1))^2}{exp(3x-4)}$

2. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\frac{1-exp(-x)}{1+exp(-x)}=\frac{exp(x)-1}{exp(x)+1}$$

Exercice 10.52
Démontrer les égalités suivantes :

1. $(exp(x)+1)(exp(x)-1)=exp(2x)-1$
2. $\dfrac{exp(x)-exp(-x)}{exp(x)+exp(-x)}=\dfrac{1-exp(-2x)}{1+exp(-2x)}$

10.1.4 Une nouvelle notation

Les propriétés algébriques vues précédemment (10.1.3) nous permettent de constater que les formules sont analogues aux règles de calcul sur les puissances.
On introduit donc une nouvelle notation : $exp(x)=e^x$

Le nombre e

Avec la nouvelle notation, on a donc $exp(1)=e^1=e$.

Définition
L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.

Les propriétés algébriques

Propriété
Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif n, on a :

- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^x\times e^y$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=(e^x)^n$

Exercice 10.53
Exprimer en fonction de e^5 les nombres suivants :

1. $e^3\times e^2$
2. e^{-5}
3. e^{15}
4. e^{-10}

Exercice 10.54
Développer :

1. $(e^x-2)^2$
2. $(e^x+1)^2$
3. $(e^x-3)(e^x+3)$

Exercice 10.55
Factoriser :

1. $10e^x-5xe^x$
2. $2xe^{-x}+3e^{-x}$
3. $9e^{2x}-6e^x+1$
4. $e^{2x}-16$
5. $e^{6x}-25$

Exercice 10.56

Démontrer les égalités suivantes :

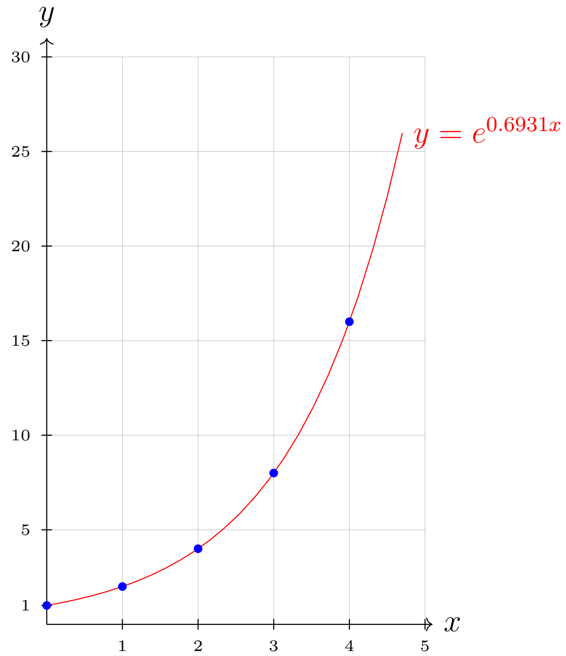
1. $(e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$
2. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
3. $e^{x^2+1}e^{x-1} = e^{x^2+x}$
4. $e^{1-x} \times e^{3x-2} = \frac{1}{e}e^{2x}$
5. $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 2$

Lien avec les suites géométriques

Approche

Imaginons une quantité qui vaut 1 initialement et qui double chaque heure.
On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ ...
La suite (u_n) est géométrique, par construction.

- Donner la formule explicite de la suite (u_n).
- Déterminer à tâtons, et le plus précisément possible la valeur approchée de a tel que $e^a = 2$



Il est donc maintenant possible d'avoir une estimation de la quantité au bout de 2.5 heures, ce qui n'était pas possible avec les suites !
Ce passage du "discret" au "continu" grâce à la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines variés, comme le calcul d'intérêts, la dilution d'une solution, la décroissance radioactive...etc...

Propriété

Pour tout réel a, la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique.

Exemple

la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{2n}$ est une suite géométrique.

$u_0 =$ | $u_2 =$
$u_1 =$ | $u_3 =$

Démonstration 10.9

Soit a un réel. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{an}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.