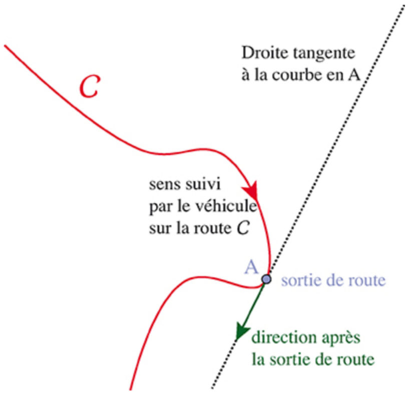
3.2 Tangente à une courbe

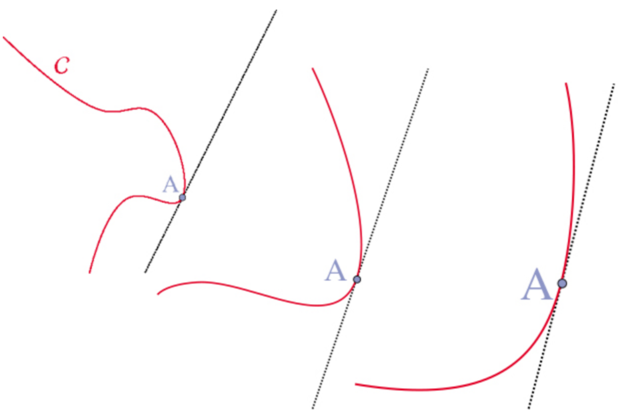
Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Les maths faciles !

Soit une courbe C quelconque et « suffisamment régulière » , ainsi qu'un point A sur cette courbe.
La tangente à C en A est la droite qui épouse « le mieux » la forme de la courbe au voisinage du point A.
Si l'on imagine que C est la forme d'une route suivie par une voiture, alors la direction de la tangente est celle que suivra cette voiture si, au point A, une grosse plaque de glace la fait subitement patiner et qu'elle ne peut plus contrôler sa direction.



Pour visualiser la tangente, on peut faire des zooms de plus en plus resserré autour de A.
Si C est assez régulière, en zoomant « de plus en plus », on s'aperçoit qu'au voisinage immédiat de A, la courbe se confond pratiquement avec une ligne droite.



☛ À mesure que l'on zoome sur le point A, le morceau de courbe autour de A se confond de plus en plus avec la droite tangente en A

3.2.1 Définition d'une tangente

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$
On suppose de plus que la fonction f est dérivable en a.
La **tangente à la courbe C_f en a** est la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Savoir-Faire 3.24

SAVOIR CONSTRUIRE DES TANGENTES À UNE COURBE

Savoir-Faire 3.25

SAVOIR DÉTERMINER GRAPHIQUEMENT UN NOMBRE DÉRIVÉ ☛ SF en ligne !

3.2.2 Equation d'une tangente à une courbe

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $a \in D_f$. On suppose que f est dérivable en a.
Une équation de la tangente à C_f en a est :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Savoir-Faire 3.26

SAVOIR DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE TANGENTE À UNE COURBE
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Déterminer les équations des tangentes T_2, T_{-2} et T_1.

Exercice 3.34

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Donner une équation de la tangente à C_f en 4, notée T_4.

3.3 Nombre dérivé de fonctions usuelles

Démonstration 3.2

Soit a un nombre réel.
Montrer que la fonction carré est dérivable en a. Donner son nombre dérivé.

Démonstration 3.3

Soit a un nombre réel non nul.
Montrer que la fonction inverse est dérivable en a. Donner son nombre dérivé.

Démonstration 3.4

Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Propriété

Fonction usuelle	Ensemble de définition	$a \in$...	nombre dérivé
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 2a$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 3a^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$a \in \mathbb{R}^*$	$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$
$f(x) = x^4$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 4a^3$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$a \in]0; +\infty[$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

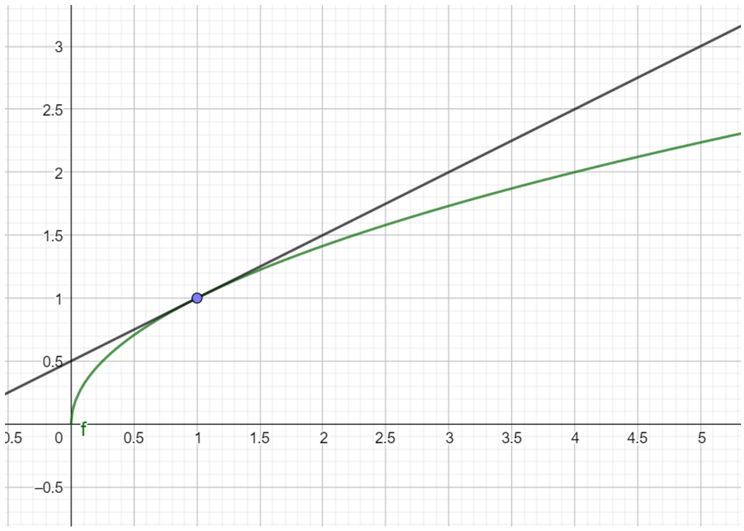
Exercice 3.35

Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = x^3$.
Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Rappeler $f'(a)$ et en déduire $f'(-1)$.
2. Tracer la tangente à C_f en -1, notée T_{-1}.
3. Existe-t-il une autre tangente à C_f parallèle à T_{-1} ? Si oui, la tracer ensuite.
4. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 12x + 1$?.
5. Existe-t-il une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 3.36

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On considère la courbe représentative de f, notée C_f et tracée en vert. On considère également la tangente à C_f en 1, tracée en noir.



1. Lire le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Retrouver ce résultat par le calcul
3. Donner une équation de T_1, tangente à C_f en 1.
4. La courbe C_f admet-elle une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 5$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre la courbe et la tangente.