3.2 Opérations sur les vecteurs

Maths 2nde 7 - JB Duthoit

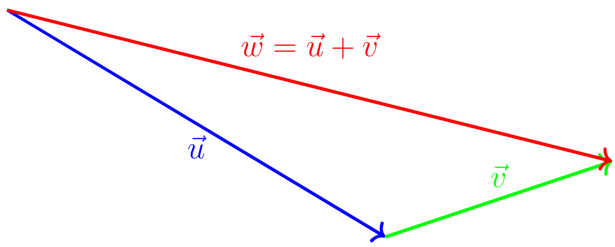
3.2.1 Somme de deux vecteurs

Définition

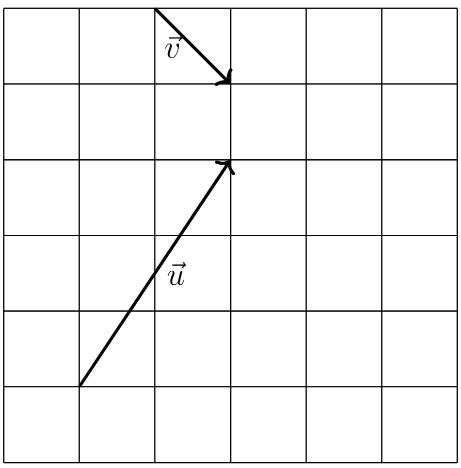
Définition

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$.

On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

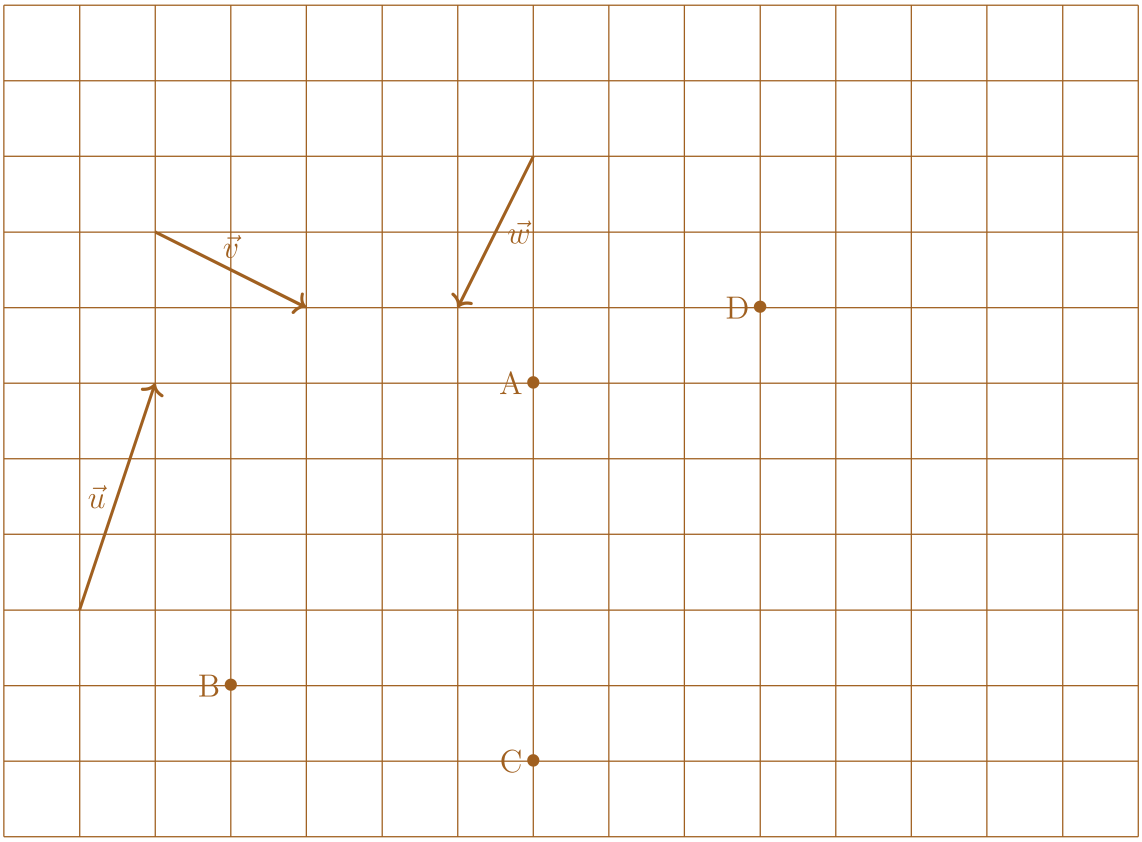


Exemple



Savoir-Faire 3.21

Savoir représenter la somme de deux vecteurs



1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w}$
4. Placer le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
5. Placer le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \vec{v} + \vec{w}$

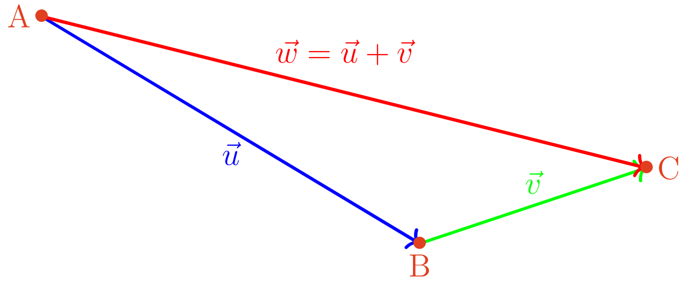
Relation de Chasles

Propriété (admise)

Relation de Chasles

Pour tous points A,B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Savoir-Faire 3.22

Savoir Utiliser la relation de Chasles

1. Compléter :

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{\quad\ }$

   b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{\ \ G} = \overrightarrow{\quad\ }$

   c) $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{\quad\ } = \overrightarrow{FB}$

   d) $\overrightarrow{\ \ R} + \overrightarrow{\ \ T} = \overrightarrow{B\ \ }$

   e) $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{\ \ I} = \overrightarrow{RI}$

   f) $\overrightarrow{K\ \ } + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$

2. Simplifier :

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

   b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA}$

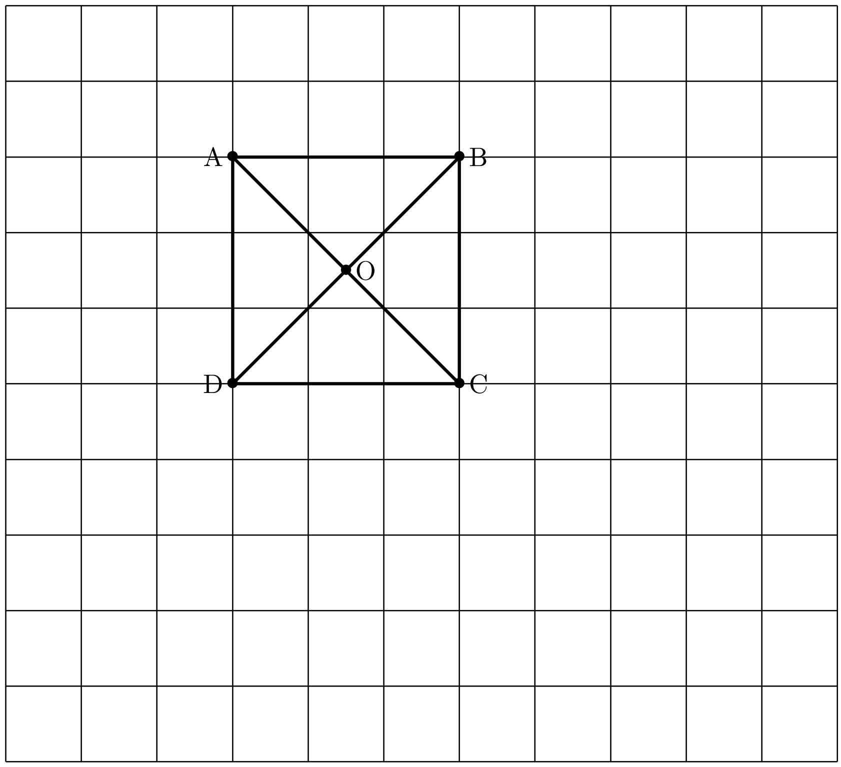
   c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{GD}$

   d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

   e) $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{GH}$

Exercice 3.10

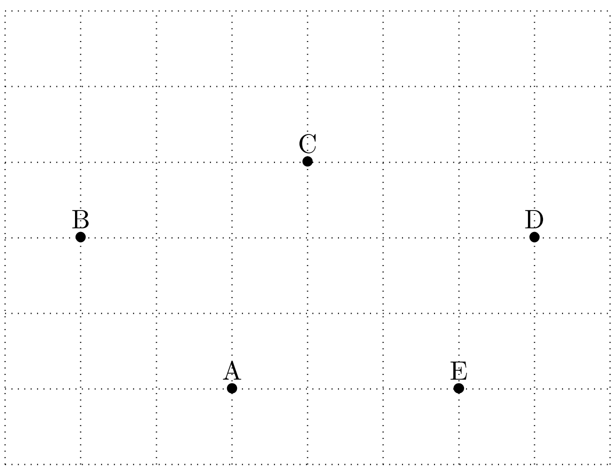
Soient $ABCD$ un carré de centre O.



Placer les points

1. E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$
2. F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
3. G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
4. H tel que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HB}$
5. I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AD}$
6. J tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OB}$
7. K tel que $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 3.11
Reproduire la figure ci-dessous :



1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$, puis un représenant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$. (utilser des couleurs). Que constate-t-on ?

2. Le démontrer à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 3.12
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

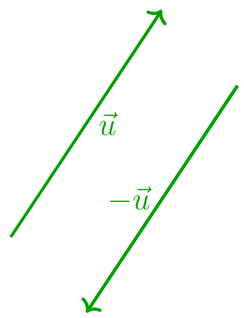
Exercice 3.13
Soit RST un triangle.

1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$
2. Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$. Penser à la relation de Chasles !

3.2.2 Opposé d'un vecteur

Définition
L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ du plan est le vecteur noté -$\vec{u}$, qui a :

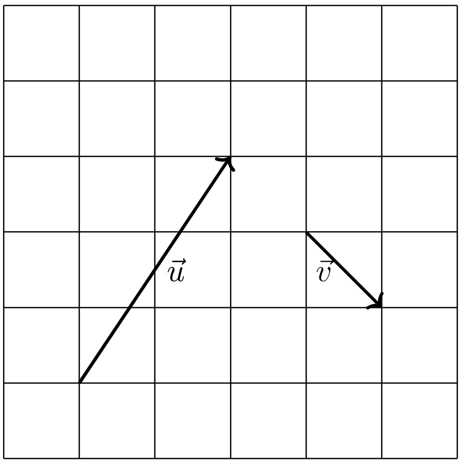
- même direction que $\vec{u}$.
- même norme que $\vec{u}$.
- le sens opposé à celui de $\vec{u}$.



Soustraction de deux vecteurs

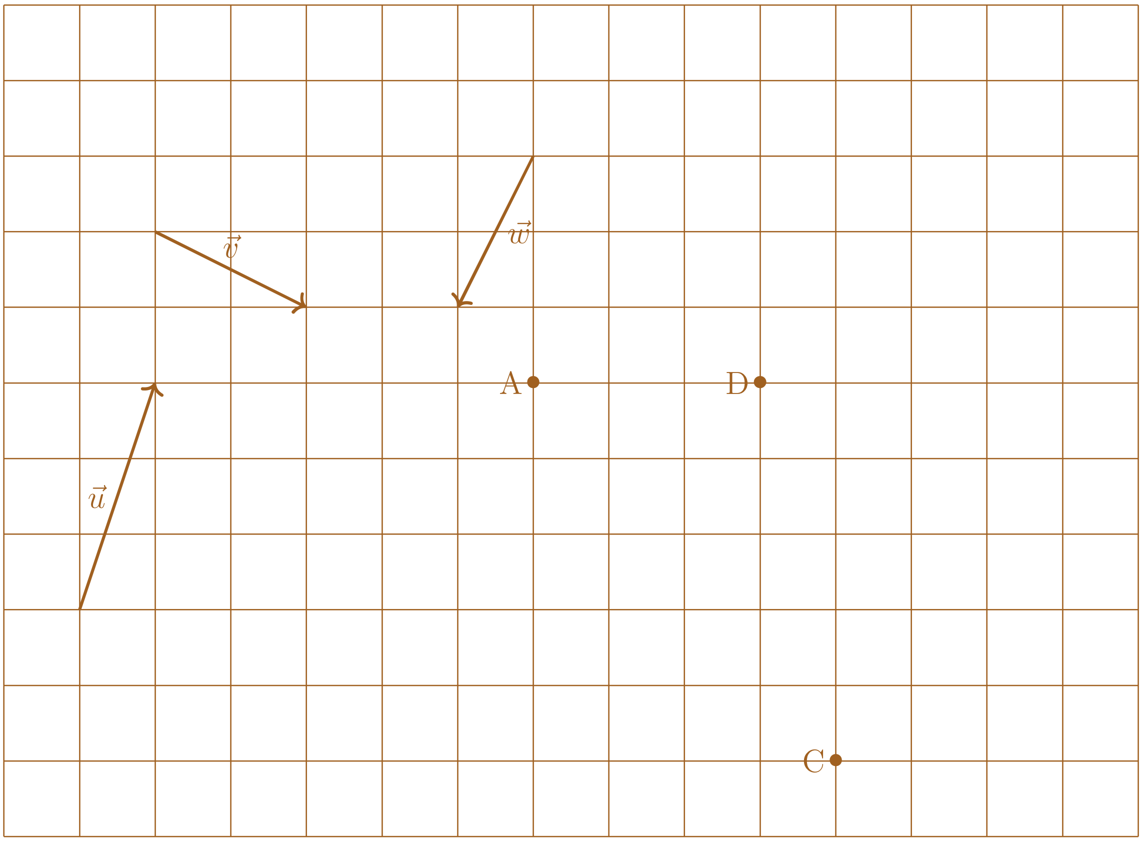
Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit la soustraction de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, notée $\vec{u}$ -$\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{u} + (\text{-}\vec{v}\ )$.

Exemple



Savoir-Faire 3.23

SAVOIR REPRÉSENTER LA DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{v} - \vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{u} - \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \vec{u} - \vec{w}$

3.2.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et k un réel.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$

Sinon :

- Direction : $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont la même direction.
- Sens :
  - si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont le même sens
  - si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont des sens contraires
- Longueur : La longueur du vecteur $k \times \vec{u}$ est égale à la longueur du vecteur $\vec{u}$ multipliée par $|k|$.

Propriété (admise)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous réels k et k',on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

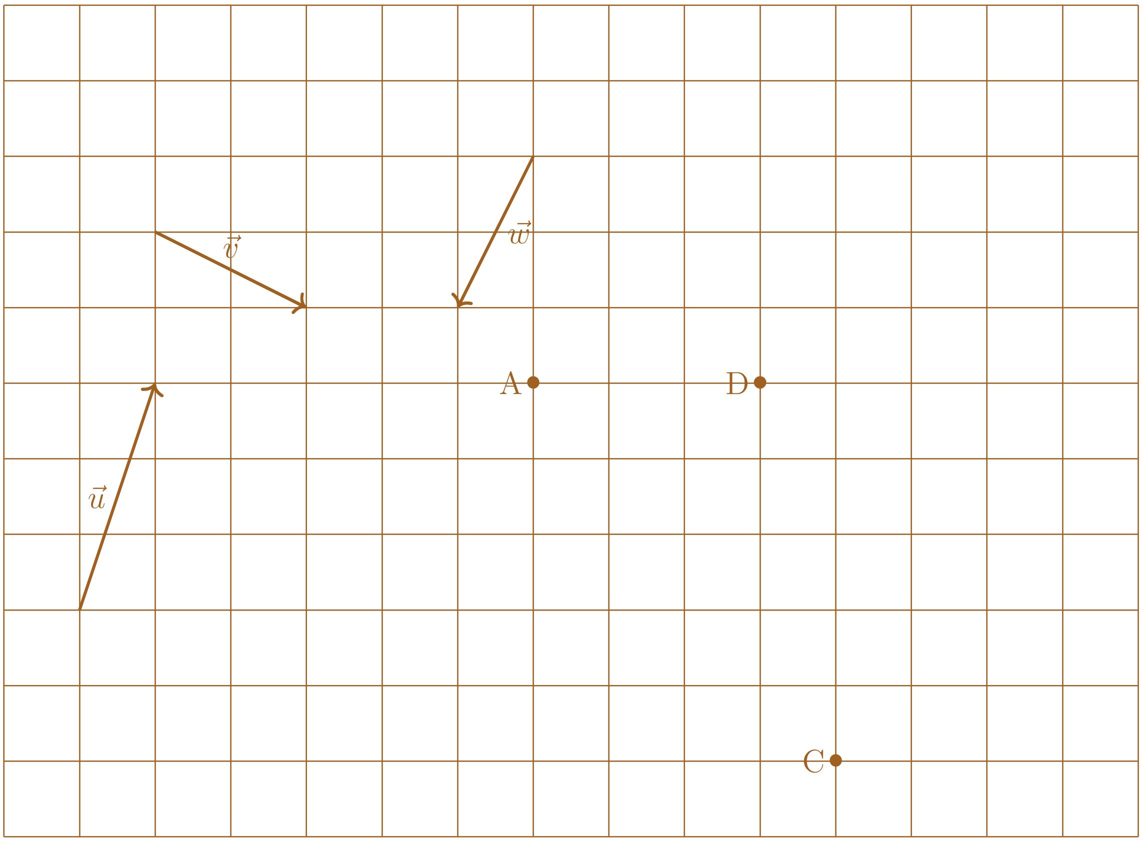
Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

- $5\vec{u} + 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} - 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} + 5\vec{v} =$
- $5 \times (3\vec{v}) =$

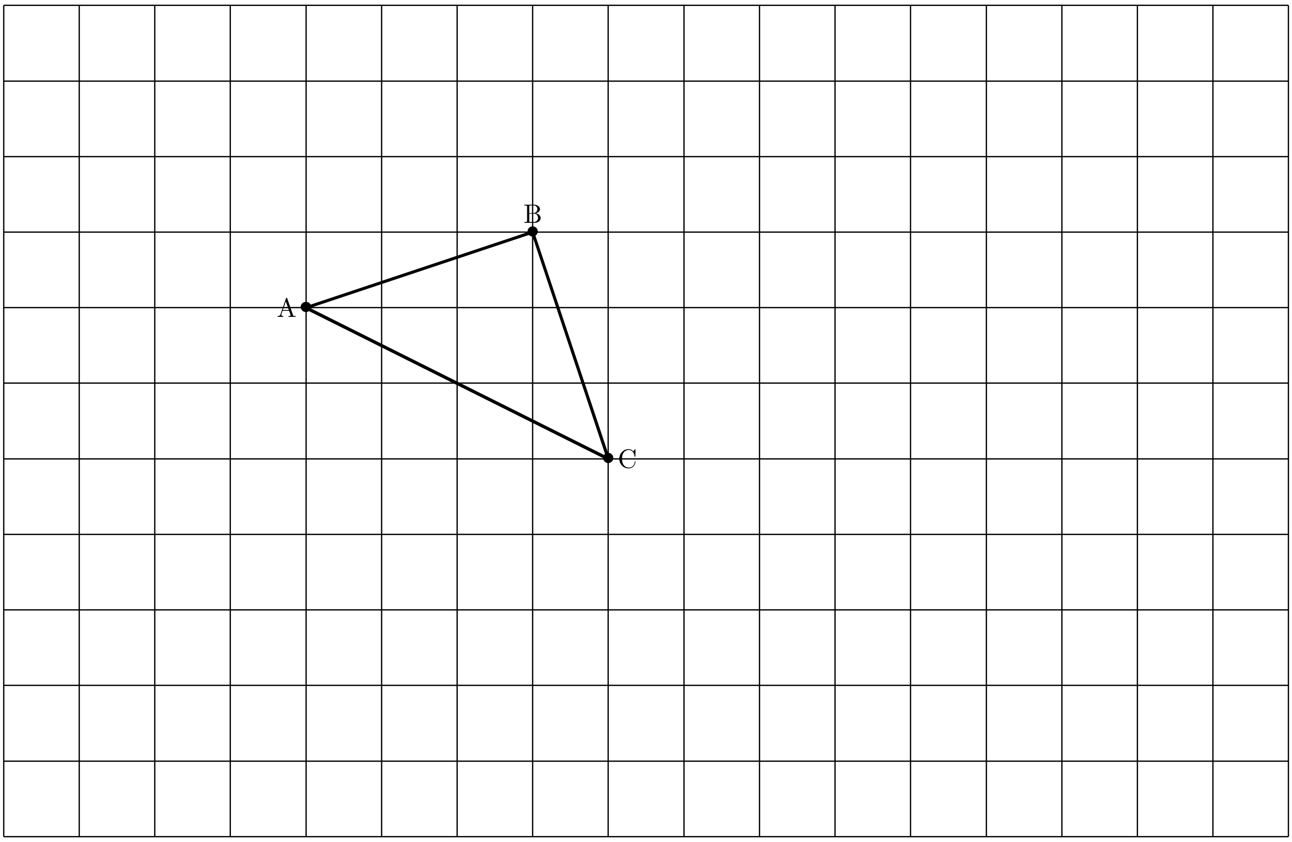
Savoir-Faire 3.24

Savoir placer un point défini par des égalités vectorielles



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = -2\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = 2\vec{w} + \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

Exercice 3.14



1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

Savoir-Faire 3.25

Savoir utiliser les règles de calcul sur les vecteurs afin d'exprimer un vecteur en fonction d'un autre

1. Placer trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
2. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

Exercice 3.15

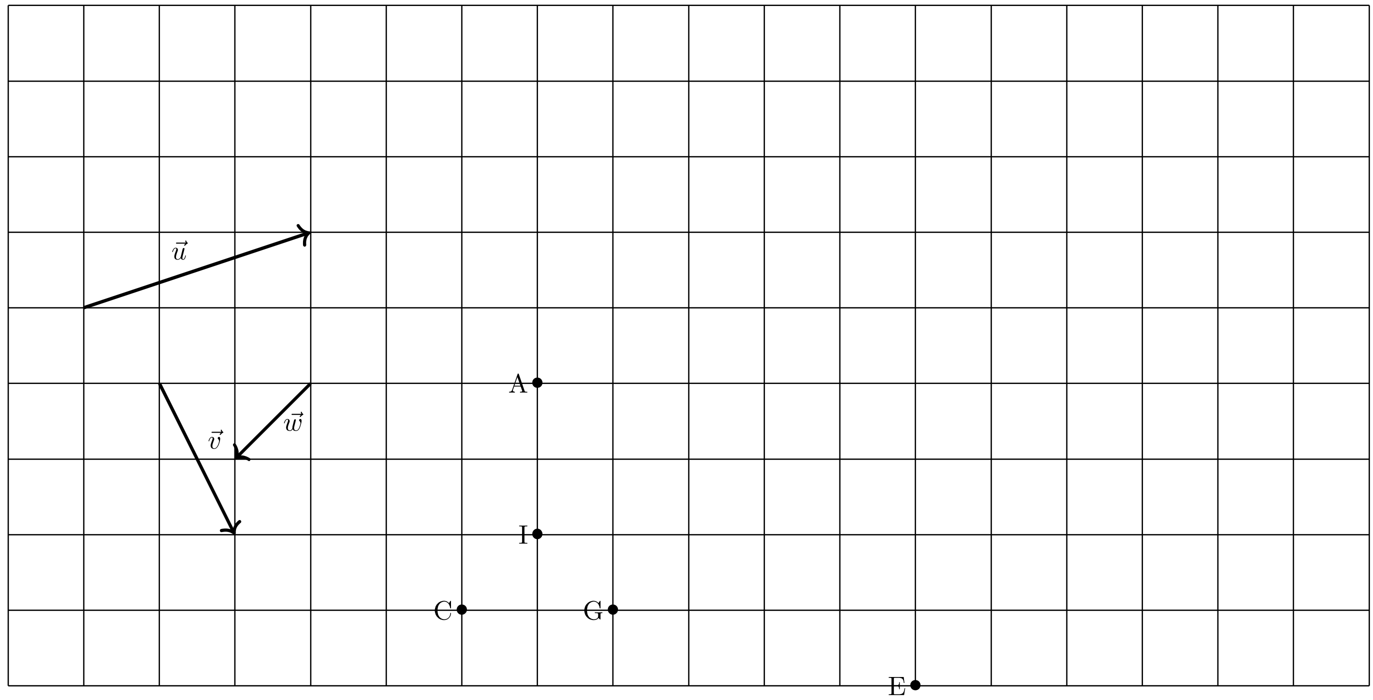
Soit ABC un triangle.
Construire les points I, J et K tels que :

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

Exercice 3.16

Construire les points H,B,J,D et F vérifiant les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{GH} = 3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$
2. $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
3. $\overrightarrow{IJ} = -\frac{5}{2}\vec{v}$
4. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{u}$
5. $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



Exercice 3.17

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH}$
2. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$
4. $\vec{u} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$
5. $\vec{u} = \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{FC}$
6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
7. $\vec{u} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MQ}$