

5.4

Limites et comparaison

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

5.4.1 Théorèmes de comparaison

Propriété Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A; +\infty[$, avec A désignant un réel ou $-\infty$.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a .

Propriété Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A; +\infty[$, avec A désignant un réel ou $-\infty$. Soit l un réel.

- Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont même limite l en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a .



Savoir-Faire 5.5

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ AVEC LES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \cos(x)$

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
- a) Calculer la limite de f en $+\infty$
b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$



Exercice 5.26

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 3\cos(2x))$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x))$$

Exercice 5.27

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 2\sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

5.4.2 Croissances comparées

Propriété (Propriété de croissance comparée)

Soit n un entier naturel non nul. On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démonstration 7 :

 les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

1. On commence pour $n = 1$:

- a) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Montrer que la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$
- b) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
- c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$

2. Pour $n \geq 2$

- a) Montrer que $\forall x \neq 0$, $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\left(\frac{x}{n}\right)}}{\frac{x}{n}} \right)^n$.
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$



Savoir-Faire 5.6

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ AVEC LA CROISSANCE COMPARÉE

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$$

Exercice 5.28

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2x - x^3e^x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x}\right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$$



Savoir-Faire 5.7

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.29

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 3 + \frac{xe}{e^x}$
b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$
b) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.30

On considère une population de lapins. Cette population de lapins, exprimées en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{3e^{0.5t}}{e^{0.5t} + 2}$, où t représente le temps écoulé en années depuis 2015.



1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat
2. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$
3. Montrer que pour tout réel t dans $[0; +\infty[$, on a $f'(t) = \frac{3e^{0.5t}}{(e^{0.5t} + 2)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
5. Compléter le code suivant afin que la fonction `lapin()` renvoie l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 lapins.

```
from math import *
def lapin():
    t = 0
    p = 1
    while .....:
        t = t + 1
        p = .....
    return .....
```