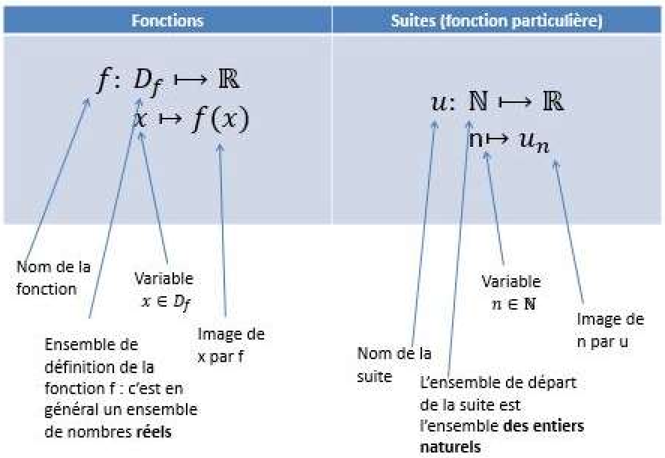
7.1 Définition et modes de génération

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

7.1.1 Analogie avec une fonction classique



7.1.2 Définition

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une **suite numérique** est une fonction définie pour tout entier $n \geq n_0$ et à valeurs réelles.
Pour chaque $n \geq n_0$, on associe le nombre réel noté u_n.
La suite est notée u ou (u_n).

Remarque

- u_n est un réel ; on dit que c'est le **terme** de la suite (u_n) de rang n.
- (u_n) est la suite.

Remarque

C'est la faute classiques des lycéens débutants : La lettre n est à la fois utilisée comme indice des termes de la suite et comme valeur dans les formules.
Voici un exemple pour mieux comprendre : en rouge le n en indice et en vert le n utilisée comme "valeurs" :
$u_{n+1} = n \times u_n + 11n$ Ainsi, si on remplace n par 51, on obtient $u_{52} = 51 \times u_{51} + 11 \times 51$.

7.1.3 Modes de générations d'une suite

Par une formule explicite

Ici, le terme de la suite u_n est défini directement en fonction de n, et uniquement en fonction de n.
☛ On dit que (u_n) est définie par une **formule explicite**.

Exemple

la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$ est une suite explicite.

Savoir-Faire 7.31

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

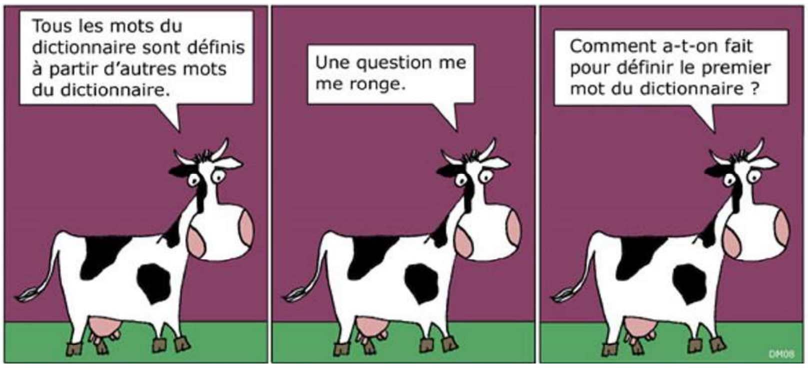
- On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 6$ par $v_n = \frac{1}{n-5}$.
- On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $w_n = \sqrt{n-1}$.
- On considère la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = 2^n$.

Remarque

Comment reconnaître une suite explicite ? Dans le cas d'une suite explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'entier souhaité.

Par une formule récurrente

Ici, le terme u_n de la suite se définit par rapport au(x) terme(s) précédent(s).
☞ On parle de **suite récurrente**.



Exemple

La suite w_n définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$ est une suite définie par récurrence.

Savoir-Faire 7.32

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

Histoire

Les suites numériques sont présentes dans de nombreux domaines relevant de la modélisation. Parmi ces suites, l'une des plus connues est la suite de Fibonacci définie dans cet exemple.
Historiquement, elle proviendrait du mathématicien italien Fibonacci qui aurait souhaité étudier l'évolution d'une population de lapins. Aujourd'hui, cette suite apparaît dans la réalisation de nombreuses oeuvres d'art.

- Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$.
- Soit la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = 2 \times z_n + n$.

Remarque

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme : pour calculer u_{100}, on a besoin de u_{99} par exemple... et ainsi de suite jusqu'au premier terme.

Par un algorithme

Ici, c'est un algorithme qui va être à l'origine de la construction de la suite.

Exemple

Voici un premier programme en Python :

```python
def suite1(n):
    return -2*n**2-2*n+7
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Et voici un second programme, toujours en Python :

```python
def suite1(n):
        a = 5
        for i in range(n):
                a = 2 * a + 5
        return a
```

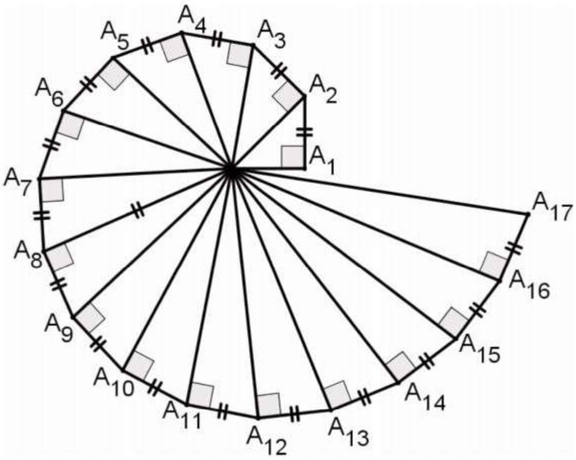
- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Savoir-Faire 7.33

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE (RÉCURRENTE OU EXPLICITE) EN UTILISANT PYTHON

☞ Utiliser les exemples faits en classe pour s'entraîner à programmer en Python des suites explicites et récurrentes (avec boucle for et/ou while).
Bien évidemment, s'entraîner davantage avec les suites récurrentes, plus difficiles à programmer.

Par une situation géométrique



On part d'un triangle rectangle en A_1 OA_1A_2 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On pose $u_1 = A_1A_2$. Pour tout $n > 1$, en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle OA_nA_{n+1} comme suit : il est rectangle en A_n, et $A_{n+1} = 1$.

Pour $n > 0$, on pose $u_n = A_nA_{n+1}$

- Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
- Conjecturer la formule explicite de cette suite.

♡Défi !

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \begin{cases} 3 \times u_n & \text{si n est pair} \\ u_n - 2 & \text{si n est impair} \end{cases} \end{cases}$$

1. Calculer les 6 premiers termes (ce n'est pas ça le défi !)
2. Calculer la somme des 43 premiers termes ! (u_0 compris)

7.1.4 Calculer les termes d'une suite avec la calculatrice

- Il faut d'abord passer en mode **suite** : $\boxed{Mode}$ puis choisir **suite** ou **séquence**. Ensuite, il faut quitter avec $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{quitter}$.

- Appuyer ensuite sur la touche $\boxed{f(x)}$.

- Pour les suites explicites :

  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre ensuite l'expression de la suite en fonction de n : pour afficher n, il suffit de taper sur la touche $\boxed{X,T,\theta,n}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.(Il faudra peut être régler la table pour ne faire apparaître que les valeurs positives de n.
  - Exemple avec $u_n = 2n+1$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,$\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{X,T,\theta,n}$,$\boxed{+}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2nde}$ et $\boxed{table}$.

- Pour les suites récurrentes :

  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre **u(nMin)** la valeur de la suite pour **nMin**
  - Il reste ensuite à donner l'expression de la suite. Attention sur TI, il faudra rentrer u_n en fonction de u_{n-1} (et non pas u_{n+1} en fonction de u_n !) Le terme u_{n-1} se trouve en appuyant sur $\boxed{2nde}$ puis sur $\boxed{7}$, puis $\boxed{(}$, $\boxed{X,T,\theta,n}$, puis $\boxed{-}$, puis $\boxed{1}$ et on ferme la parenthèse avec $\boxed{)}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.
  - Exemple avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+3$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,**u(nMin)=1**, $\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{2nde}$,$\boxed{7}$, $\boxed{(}$,$\boxed{X,T,\theta,n}$,$\boxed{-}$,$\boxed{1}$, $\boxed{)}$, $\boxed{+}$, $\boxed{3}$. puis $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.

Savoir-Faire 7.34

SAVOIR UTILISER LA CALCULATRICE POUR CALCULER DES TERMES (SUITES RÉCURRENTES ET EXPLICITES)

✎Je m'entraîne seul(e)

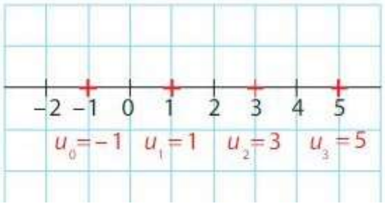
Utiliser les exemples déjà étudiés pour les vérifier à la calculatrice.

7.1.5 Représentation graphique de suites

Sur une droite graduée

C'est tout simple : on trace une droite graduée, et on place dessus les valeurs de u_0, u_1, u_2...

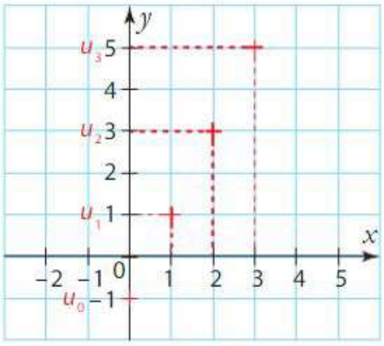
Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



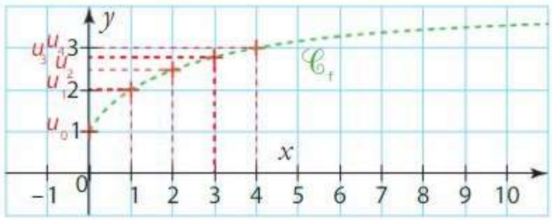
Dans un repère

C'est tout simple aussi : on trace place les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$...

Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



Suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$

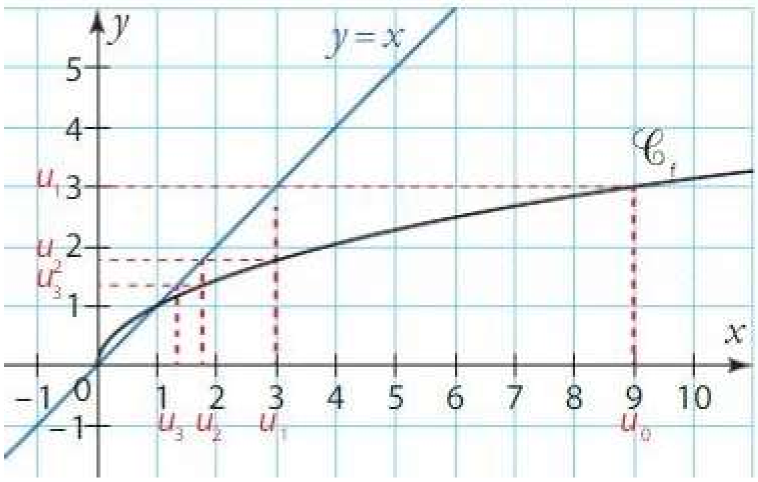


Cas des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Bien sûr, on peut représenter cette suite en utilisant l'un des deux procédés précédents. Mais dans le cas d'une suite récurrente, il y a une méthode qui se base sur la courbe représentative de la fonction f.
Attention, cette méthode fonctionne uniquement avec les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'idée est de construire les termes à l'aide de la courbe C_f et la droite d'équation $y = x$.

- On commence par placer u_0 sur l'axe des abscisses
- On construit u_1 sur l'axe des ordonnées en utilisant le courbe C_f et le fait que $u_1 = f(u_0)$.
- On construit u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$.
- On a donc u_1 sur l'axe des abscisses, et on peut réitérer le procédé pour u_2, u_3...autant de fois que nécessaire.

Suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



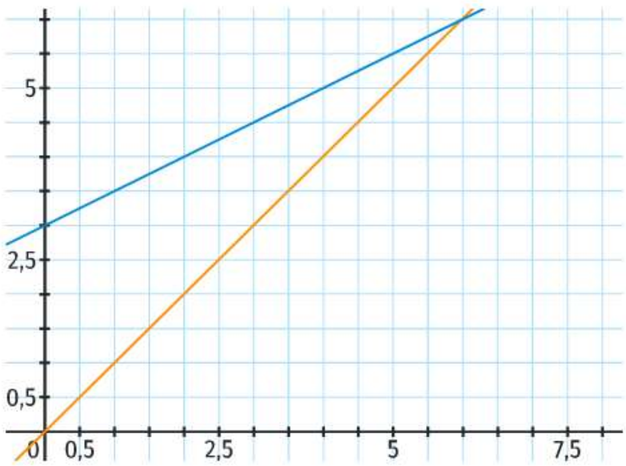
Savoir-Faire 7.35

Savoir représenter une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit u_n une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et soit (v_n) une suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$.
Déterminer la fonction f et g telles que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. Représenter ensuite ces deux suites (deux graphiques différents) en utilisant la méthode précédente. Pour vérification, on pourra faire les calculs à la main des premiers termes (ou avec la calculatrice) et s'assurer que les valeurs trouvées graphiquement soient en cohérence avec les valeurs calculées.

Exercice 7.23

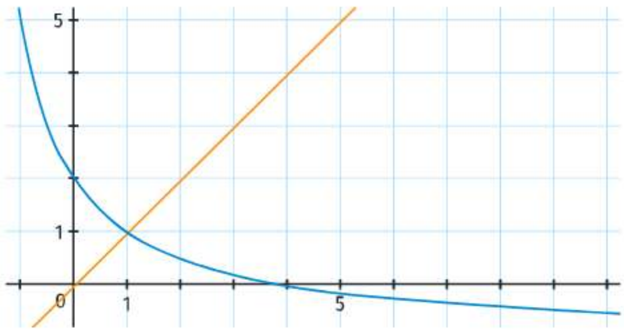
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 3$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 7.24

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x+2} - 1$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 7.25

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -0.5u_n + 7$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n)
2. a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(un)$.
   b) Construire dans un repère la droite d'équation $y = x$ ainsi que la courbe C_f (qui est ici représentée par une droite).
   c) Représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   ☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 7.26

Question ouverte :

Un nouvel employé se voit proposer deux contrats différents, nommés A et B.

Le contrat A lui offre un salaire de 1500 €par mois avec une augmentation de 50 €par an. Le contrat B lui offre un salaire de 1300 €par mois avec une augmentation de 5 % par an.

Quel contrat doit-il choisir sur le long terme ? Justifier.