Correction : 7.8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 2x - 2$.

- **Étude de la variation**
  f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 20x^4 + 2$.
  Pour tout réel x, $x^4 \geq 0$, donc $20x^4 \geq 0$. En ajoutant 2, on obtient $f'(x) \geq 2 \leq 0$. La dérivée étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, f **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

- **Existence et unicité de la solution** α
  Nous cherchons à montrer que l'équation $f(x) = 8$ possède une unique solution α.

  - **Continuité :** f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
  - **Monotonie :** f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  - **Limites :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
  - $8 \in]-\infty; +\infty[$

  D'après le **corolaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

- **Méthode du balayage**
  En testant des valeurs successives :

  - $f(1) = 4(1)^5 + 2(1) - 2 = 4 < 8$
  - $f(2) = 4(2)^5 + 2(2) - 2 = 130 > 8$

  Donc $1 < \alpha < 2$. En affinant le pas à $0,1$ à la calculatrice, on trouve :

  - $f(1,1) < 8$
  - $f(1,2) > 8$

  Donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$. En affinant le pas à $0,01$ à la calculatrice, on trouve :

  - $f(1,18) < 8$
  - $f(1,19) > 8$

  On en déduit l'encadrement : $\mathbf{1{,}18} < \alpha < \mathbf{1{,}19}$.

- **Algorithme de dichotomie**

  Voici ci-contre le programme Python permettant de déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

```python
def f(x):
    return 4*x**5 + 2*x -
  2

def solution(seuil):
    a = 1.0
    b = 2.0
    while b - a > seuil:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b

print(solution(0.01))
```

  L'exécution du programme donne les bornes $[1,18; 1,19]$, ce qui correspond à la précision demandée.