14.2 Échantillon d'une loi de probabilité

Maths Spé terminale - JB Duthoit

14.2.1 Définition

Définition Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble Ω. Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

Définition

- La variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par $S_n = X_1+X_2+...+X_n$.
- La variable aléatoire moyenne est la variable aléatoire définie par $M_n = \frac{1}{n}S_n$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe 1 si le paquet de chips est conforme, 0 sinon.
On constate que 90% des paquets sont conformes.
On a donc $E(X) = 0.9$ et $V(X) = 0.09$.
On choisit au hasard 2 paquets de chips et on effectue pour chacun d'entre eux le test de conformité. On admet qu'étant donné le grand nombre de paquet de chips produit, ce choix de 2 paquets peut être assimilé à un tirage avec remise.
(X_1, X_2) forme un échantillon de taille 2 de variable aléatoire X.
On appelle $S_2 = X_1 + X_2$ la variable aléatoire somme de l'échantillon (X_1, X_2) On appelle $M_2 = \dfrac{S_2}{2}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon (X_1, X_2)

14.2.2 Espérance,variance et écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

Exemple

On reprend l'exemple précédent.
On peut montrer que la loi de probabilité de (X_1, X_2) est

valeurs de (X_1, X_2)	$(0;0)$	$(0;1)$	$(1;0)$	$(1;1)$
probabilité	0.01	0.09	0.09	0.81

On en déduit donc que :

valeurs de M_2	0	$\frac{1}{2}$	1
probabilité	0.01	0.18	0.81

L'espérance de M_2 est donc $E(M_2) = 0.01 \times 0 + 0.18 \times \frac{1}{2} + 0.81 \times (1-0.9)^2 = 0.9 = E(X)$.
☛ On comprend intuitivement que l'espérance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon (X_1, X_2) est égale à l'espérance de la variable aléatoire X associée à cet échantillon.

La variance est quant à elle égale à

$$V(M_2) = 0.01 \times (0-0.9)^2 + 0.18 \times (0.5-0.9)^2 + 0.81 \times (1-0.9)^2 = 0.045 = \frac{0.09}{2} = \frac{V(X)}{2}$$

☛ Ainsi la variance de la variable aléatoire moyenne est plus faible que la variance de la variable d'origine. Intuitivement, pour un échantillon de taille 2, le nombre de situations pouvant donner des valeurs proches de l'espérance est plus important que sans échantillon.

Propriété

Soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Propriété

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Remarque

$V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$ montre que la variance diminue quand la taille de l'échantillon augmente. Elle qualifie la fluctuation d'échantillonnage. Plus la taille de l'échantillon est grand, plus l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance est proche de 0.
Ainsi, les valeurs prises par la moyenne deviennent de plus en plus probables dans un voisinage de l'espérance.

Savoir-Faire 14.5

Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant chacun 1 €. Parmi ces billets, 0,2 % sont des billets gagnants à 100 €, 1 % à 50 €, 2 % à 10 € et les autres sont perdants.

Manon, qui est la première à choisir ses billets, en prend 3 au hasard. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un ticket, S la variable aléatoire donnant le gain algébrique total de Manon, et M la variable aléatoire donnant le gain moyen par billet.

1. Donner un argument permettant de considérer que les 3 billets de Manon sont le résultat d'un tirage avec remise.
2. Sous cette condition, donner la loi de X et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. En déduire le gain que pourrait espérer en moyenne Manon en tirant 3 billets, ainsi que l'écart-type de S et de M.