

9.2

Recherche de primitives

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

9.2.1 Primitives de fonctions usuelles

On rappelle ici les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les dérivées :

Propriété (rappel sur les dérivées de fonctions usuelles)

Fonction usuelle	Fonction dérivée	Fonction usuelle	Primitive
$f(x) = mx + p, \mathbb{R}$	$f'(x) = m, \mathbb{R}$	$f(x) = m, \mathbb{R}$	$F(x) = mx, \mathbb{R}$
$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x, \mathbb{R}$	$f(x) = x, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \mathbb{R}$
$f(x) = x^3, \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2, \mathbb{R}$	$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3, \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}, \mathbb{R}$	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x},]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x},]0; +\infty[$
$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$F(x) = e^x, \mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x),]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x},]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x},]0; +\infty[$	$F(x) = \ln(x),]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x), \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x), \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x), \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x), \mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x), \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x), \mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x),$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan(x)$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété rappel de la dérivée d'une somme et de λu

Dérivation	Primitive	
	Fonction	Primitive
$(u+v)' = u' + v'$	$u' + v'$	$u + v$
$(\lambda u)' = \lambda u'$	$\lambda u'$	λu

Savoir-Faire 9.3

SAVOIR CALCULER UNE PRIMITIVE EN UTILISANT LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x + 9$.
- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

4. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}$.

Exercice 9.8

1. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$.
2. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$.
3. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^3$.
4. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 - x$.
5. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^4 - 7x + \sqrt{2}$.

Exercice 9.9

1. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 10 - 3e^x + x$.
2. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.
3. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x + 1)^2$.
4. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Exercice 9.10

1. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$.
3. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{2x}$.
4. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{7}{x^3}$.
5. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+5}{x^2}$.
6. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$.
7. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4 - x\sqrt{x}}{x^2}$.

9.2.2 Primitives avec les formules de composées

Propriété (rappels sur dérivées de fonctions composées)

Dérivation	Primitive	
	<i>Fonction</i>	<i>Primitive</i>
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$	$\frac{u'}{u^3}$	$\frac{-1}{2u^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$	$u'u^n, n \geq 1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$	$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$(e^u)' = u' \times e^u$	$u' \times e^u$	e^u
$(\ln(u))' \text{ avec } u > 0 = \frac{u'}{u} \text{ avec } u > 0$	$\frac{u'}{u} \text{ avec } u > 0$	$\ln(u) \text{ avec } u > 0$
$(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

💡 Savoir-Faire 9.4

SAVOIR CALCULER UNE PRIMITIVE EN UTILISANT LES FORMULES DE DÉRIVATION
Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 6x(x^2 - 1)^3, I = \mathbb{R}^+$

3. $f(x) = e^{2x+1}, I = \mathbb{R}^+$

2. $f(x) = \frac{5}{2x+3}, I = \mathbb{R}^+$

4. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+4}}, I = \mathbb{R}^+$

❤️ Méthode :

On cherche à réécrire l'expression $f(x)$ sous une des formes bleues suivantes :

1. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

b) Pour $n = 3$: $\left(\frac{1}{u^3}\right)' = -\frac{3u'}{u^4}$

2. $(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$, avec en particulier :

c) Pour $n = 4$: $\left(\frac{1}{u^4}\right)' = -\frac{4u'}{u^5}$

a) Pour $n = 2$: $(u^2)' = 2u'u$

4. $(e^u)' = u' \times e^u$

b) Pour $n = 3$: $(u^3)' = 3u'u^2$

5. $(\ln(u))' \text{ avec } u > 0 = \frac{u'}{u} \text{ avec } u > 0$

c) Pour $n = 4$: $(u^4)' = 4u'u^3$

6. $(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$

3. $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$, avec en particulier :

7. $(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$

a) Pour $n = 2$: $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{2u'}{u^3}$

8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 9.11

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^2, I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{-x+3}, I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 7}}, I = \mathbb{R}$

Exercice 9.12

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 3e^{3x+4}, I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = xe^{x^2-3}, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^2e^{-3}, I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}, I = \mathbb{R}$

Exercice 9.13

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 5e^{4-x}, I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5}, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^x(e^x + 4)^3, I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = (2x - 1)^4, I = \mathbb{R}$

Exercice 9.14

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}, I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x - 1}{(x^2 - 2x + 4)^2}, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{1}{e^x}, I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x + 1)}, I = \mathbb{R}$

Exercice 9.15

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2, I = \mathbb{R}^{*+}$
2. $f(x) = \frac{2}{(3x - 1)^2} + \frac{1}{3x - 1}, I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, I = \mathbb{R}^{*}$
4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, I =]1; +\infty[$

Exercice 9.16

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de $] -1; +\infty[$, $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.