6.1 Convexité d'une fonction

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Des maths dans la vraie vie !

Les notions de convexité et concavité vous sont déjà connues dans le cadre de la vie quotidienne. Les miroirs déformants dans les foires sont une illustration ludique de ces notions. Les lentilles optiques (loupes, lunettes ...) que nous utilisons en sont une application importante.

Nous allons voir dans ce chapitre l'application de ces notions dans le monde des fonctions. Cela a une utilité très importante dans le domaine de l'optimisation. Savoir si l'évolution d'un phénomène est convexe ou concave nous donne des informations très utiles pour mieux le connaître et prendre les bonnes décisions.

La notion d'inflexion que nous étudierons est également très commune. Une illustration anecdotique est son utilisation dans le domaine politique pour minimiser l'importance de la hausse du nombre de chômeurs.

Des idées pour le GO !

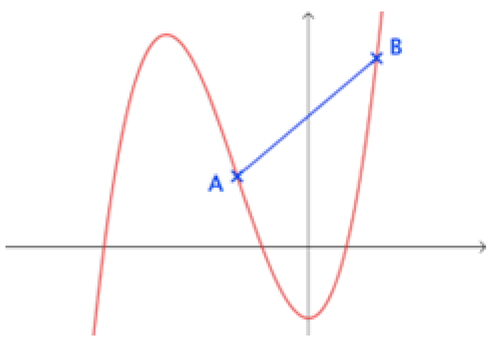
Un thème : La convexité en économie

- La courbe d'indifférence
- Le taux marginal de substitution (TMS)
- La théorie du consommateur (https://www.youtube.com/watch?v=V4uV4dMkcEw)

6.1.1 Définition avec des cordes

Définition

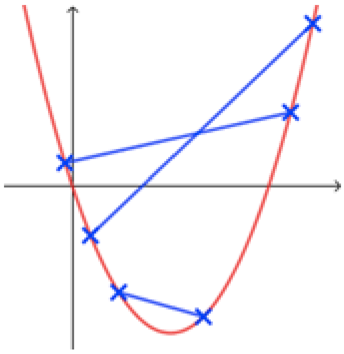
Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe



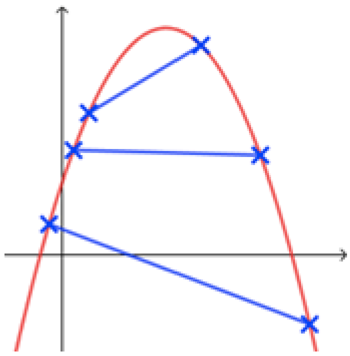
Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **convexe** sur I, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction f est **concave** sur I, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe



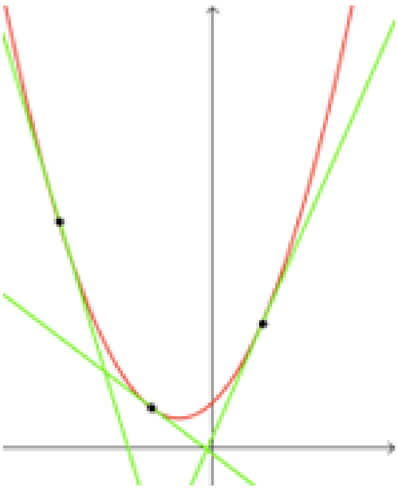
Fonction concave

6.1.2 Définition avec des tangentes

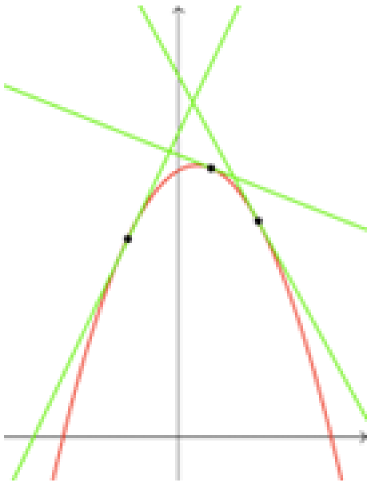
Définition

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **convexe** sur I, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

Démonstration 9

MONTRER QUE SI f'' EST POSITIVE SUR I ALORS LA COURBE REPRÉSENTATIVE DE C_f EST AU-DESSUS DE CHACUNE DE SES TANGENTES

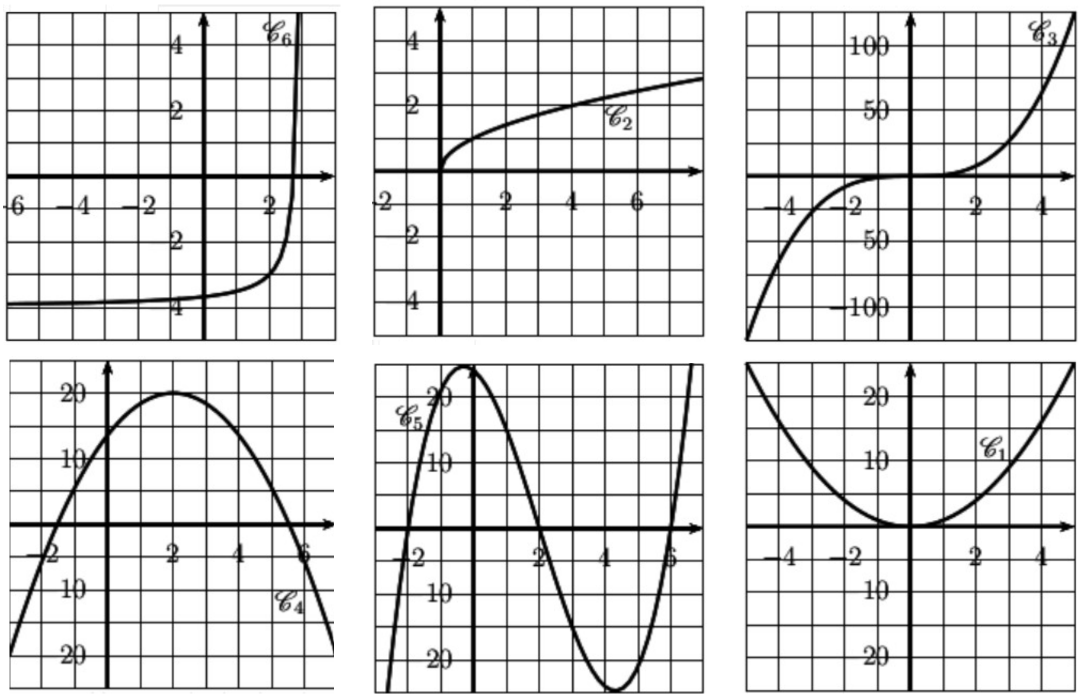
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, avec $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.
Soit $a \in I$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en a
2. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. Calculer $g'(x)$.
3. Donner le tableau de variations de g
4. conclure

Savoir-Faire 6.21

SAVOIR RECONNAÎTRE GRAPHIQUEMENT LA CONVEXITÉ OU CONCAVITÉ DE FONCTIONS

Six fonctions f_1 à f_6 sont représentées graphiquement ci-dessous par les courbes C_1 à C_6. Classer ces fonctions en fonction de leur type de convexité sur l'intervalle sur lequel elle est représentée.



6.1.3 Propriétés

Approche

On considère trois fonctions, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ et $h(x) = \sqrt{x}$. Pour chacune des fonctions, dire si la dérivée est croissante ou décroissante. Comparer avec leur convexité ou concavité.

Propriété

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I alors :

- Concavité :
  - f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I
  - f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I
- Convexité :
  - f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I
  - f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I

Savoir-Faire 6.22

Savoir étudier la convexité d'une fonction

1. Étudier la convexité de la fonction inverse.
2. Étudier la convexité de la fonction définie sur $]-2;+\infty$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

Exercice 6.1

Voici le tableau de variations de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $[-8;7]$:

x	-8		2		4		7
$f'(x)$	2	↗	5	↘	0	↗	1

1. En déduire le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Tracer l'allure de la courbe C_f.

6.1.4 Point d'inflexion

Définition

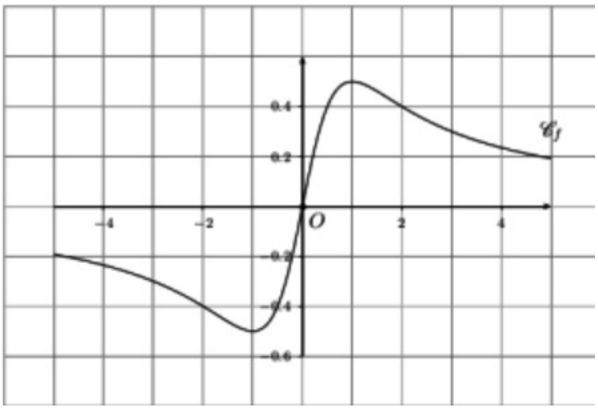
A est un **point d'inflexion** de la courbe représentative C_f d'une fonction f si la courbe C_f traverse sa tangente en A.

Conséquence

Lorsque f change de convexité, la courbe représentative de f traverse sa tangente et admet un point d'inflexion.

Exercice 6.2

La fonction f est donnée par sa courbe représentative dessinée ci-contre. Combien y a t-il de points d'inflexion ?

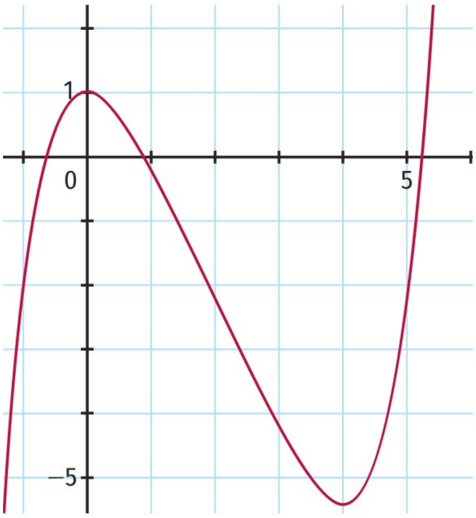


Propriété

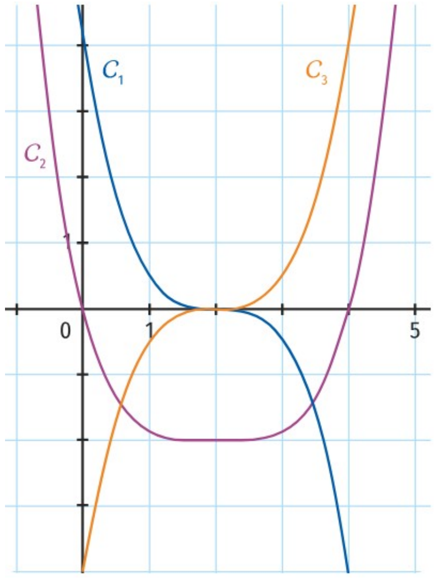
Si f est une fonction deux fois dérivable, lorsque sa dérivée seconde f'' change de signe, la courbe représentative de f admet un point d'inflexion.

Exercice 6.3

Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Parmi les trois courbes suivantes, déterminer celle qui représente la fonction dérivée seconde f'' de f.



Savoir-Faire 6.23

Savoir prouver l'existence d'un point d'inflexion

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0.5x + 1$.
   a) Établir la convexité de la fonction f.
   b) Déterminer les abscisses des points d'inflexion de la courbe représentative de f.
2. Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10000 par mois.
   Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites (donc C est définie sur l'intervalle $[0; 10]$) s'exprime par :
   $$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$
   .
   a) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction C. En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
   b) Démontrer ces résultats.
   c) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

Exercice 6.4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Établir la convexité de la fonction f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de C_f.

Exercice 6.5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de C_f.

Savoir-Faire 6.24

Savoir montrer des égalités avec la convexité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1.
3. En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

Exercice 6.6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, et on note C_f la courbe représentative de f

1. Montrer que f est convexe
2. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 0.
3. En déduire que quel que soit le réel x, $e^x \geq x + 1$

Exercice 6.7

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et on note C_f la courbe représentative de f

1. Étudier la convexité de f
2. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 0.
3. En déduire que quel que soit le réel $x \in [0; +\infty[$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + 0.5x$

Exercice 6.8

En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tous réels a et b,

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Exercice 6.9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$, et on note C_f la courbe représentative de f

1. Étudier la convexité de f
2. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 1.
3. En déduire que quel que soit le réel x, $x^6 + 3x^2 + 6 \geq 12x - 2$