10.4 Applications du calcul intégral

Maths Spé terminale - JB Duthoit

10.4.1 Calculs d'aires

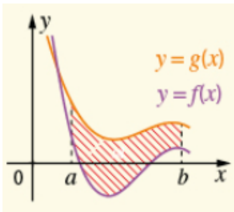
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On considère ici la surface S délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si $f \geq 0$: d'après ce qui précède, $S = \int_a^b f(x)dx$
- Si $f \leq 0$: la fonction $-f$ est alors positive. Deux surfaces symétrique par rapport une même droite ont même aire. Donc $S = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Si f change de signe, ont décompose alors la fonction f sur des intervalles sur lesquels la fonction f est soit positive, soit négative. On utilise alors les deux points précédents.

Propriété Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, avec $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
L'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et donnée par

$$\int_a^b (f(x) - g(x))$$

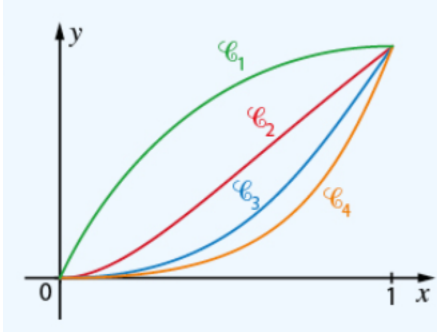


Savoir-Faire 10.48

Savoir étudier une suite d'intégrale

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
On note fn les fonctions définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.
On a tracé ci-contre les courbes pour n prenant les valeurs 1,2,3 et 4.

1. Conjecturer le sens de variations de (I_n).
2. Démontrer cette conjecture
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.



Savoir-Faire 10.49

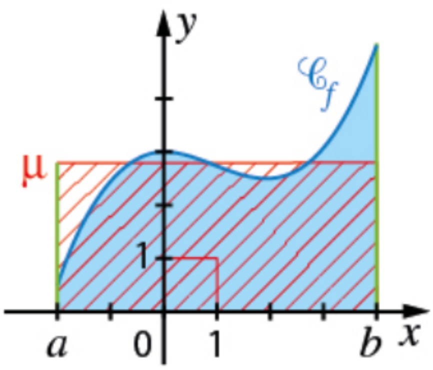
Savoir calculer l'aire entre deux courbes
Soit f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

1. Étudier la position relative de C_f et C_g sur $[0;1]$
2. Calculer, en u.a., la surface délimitée par les deux courbes C_f et C_g, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

10.4.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.On appelle **valeur moyenne de f sur** $[a;b]$ le réel μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.



Remarque

De façon évidente, on a $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx$, ce qui signifie que l'aire hachurée du rectangle (de hauteur μ et de largeur $b-a$ est égale à l'aire bleue sous la courbe C_f.

Savoir-Faire 10.50

Savoir calculer et interpréter une moyenne