# 9.1 Équation différentielle et primitives

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

## 9.1.1 Équation différentielle

De nombreux phénomènes de physique peuvent être modélisé par une relation entre une fonction $g$ et sa dérivée $g'$.

### Définition

Une **équation différentielle** est une équation pour laquelle l'inconnue recherchée n'est pas une valeur mais une fonction et pour laquelle l'égalité proposée fait intervenir la dérivée de cette fonction.
Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables qui vérifient l'égalité.

### Savoir-Faire 9.35

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

1. Soit l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour tout réel $x$. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4$, pour tout réel $x$. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = 6x + 1$, pour tout réel $x$. Déterminer les réels $a$ et $b$ de telle sorte que la fonction $f$ définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.

**Exercice 9.1**

1. Soit l'équation différentielle $y' = 6x^2 + 8x$, pour tout réel $x$. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $x^2y' + (x-1)y = 2x^2 - x$, pour tout réel $x$. Déterminer les réels $a$ et $b$ de telle sorte que la fonction $f$ définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = \frac{-1}{x^2}$, pour tout réel $x \neq 0$. Montrer que la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est une solution de cette équation.

## 9.1.2 Primitives

### Définition

Soit $f$ une fonction définie sur $I$. On dit que $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ lorsque $F$ est dérivable sur $I$ et que $F' = f$.
Autrement dit, toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$ est une **primitive** de $f$ sur $I$.

## Vocabulaire

$y' = f$ signifie que, pour tout $x \in I$, $y'(x) = f(x)$

## Propriété

- Toute fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur cet intervalle.
- Soit $f$ une fonction continue. Deux primitives de $f$ différent d'une constante.

## (Exigible)

MONTRER QUE DEUX PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION CONTINUE $f$ DIFFÈRENT D'UNE CONSTANTE

Soit $f$ une fonction continue. Soit $F$ et $G$ deux primitives de la fonction $f$. Monter que $F$ et $G$ diffèrent d'une constante.

## Savoir-Faire 9.36

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION EST PRIMITIVE D'UNE AUTRE FONCTION

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de $f$, puis en déduire toutes les primitives de $f$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5ln(x-2)$ est une primitive de $f$, puis en déduire toutes la primitive de $f$ qui s'annule en 3.

### Exercice 9.2

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ et $g(x) = -ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $g$ est une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

### Exercice 9.3

Soient $F$ et $f$ deux fonctions définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+5$. Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.

### Exercice 9.4

Soient $F$ et $f$ deux fonctions définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $F(x) = x - ln(x+1)$. Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]-1;+\infty[$.

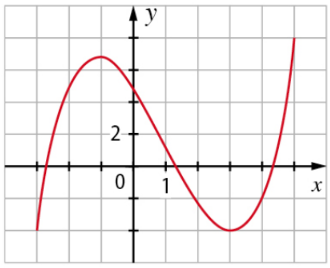
**Exercice 9.5**

Soit $F$ la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par $F(x)=(x-2)\sqrt{2-x}$.

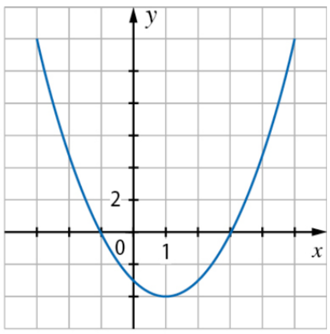
1. Calculer $F'(x)$
2. En déduire une primitive sur $]-\infty;2[$ de la fonction $f$ définie sur $]-\infty;2[$ par $f(x)=\sqrt{2-x}$

**Exercice 9.6**

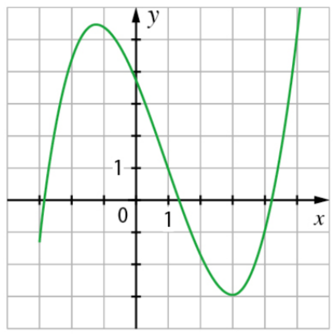
Soit $f$ une fonction définie sur $[-3;5]$. La courbe ci-contre représente une primitive $F$ de $f$.




Parmi les deux courbes ci-dessous, laquelle représente la fonction $f$ ? Justifier !



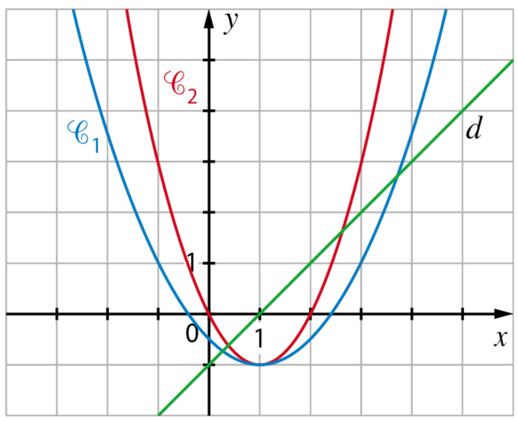

courbe 1




courbe 2

**Exercice 9.7**

Soit $f$ une fonction dont La courbe représentative est la droite $d$.
On considère également les courbes $C_1$ et $C_2$ représentatives de fonctions $g$ et $h$. Laquelle des fonction, parmi $g$ et $h$, est une primitive de $f$ ?




### 9.1.3 Primitives de fonctions usuelles

On rappelle ici les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les dérivées :

## Propriété (rappel sur les dérivées de fonctions usuelles)

| Fonction usuelle | Fonction dérivée | Fonction usuelle | Primitive |
|---|---|---|---|
| $f(x) = mx + p, \mathbb{R}$ | $f'(x) = m, \mathbb{R}$ | $f(x) = m, \mathbb{R}$ | $F(x) = mx, \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2, \mathbb{R}$ | $f'(x) = 2x, \mathbb{R}$ | $f(x) = x, \mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{1}{2}x^2, \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^3, \mathbb{R}$ | $f'(x) = 3x^2, \mathbb{R}$ | $f(x) = x^2, \mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{1}{3}x^3, \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}, \mathbb{R}$ | $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$ | $f(x) = \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$ | $F(x) = -\frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \mathbb{R}^*$ | $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$ | $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}, \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}, [0; +\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [0; +\infty[$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, [0; +\infty[$ | $F(x) = 2\sqrt{x}, [0; +\infty[$ |
| $f(x) = e^x, \mathbb{R}$ | $f'(x) = e^x, \mathbb{R}$ | $f(x) = e^x, \mathbb{R}$ | $F(x) = e^x, \mathbb{R}$ |
| $f(x) = ln(x), [0; +\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{x}, [0; +\infty[$ | $f(x) = \frac{1}{x}, [0; +\infty[$ | $F(x) = ln(x), [0; +\infty[$ |
| $f(x) = cos(x), \mathbb{R}$ | $f'(x) = -sin(x), \mathbb{R}$ | $f(x) = sin(x), \mathbb{R}$ | $F(x) = -cos(x), \mathbb{R}$ |
| $f(x) = sin(x), \mathbb{R}$ | $f'(x) = cos(x), \mathbb{R}$ | $f(x) = cos(x), \mathbb{R}$ | $F(x) = sin(x), \mathbb{R}$ |
| $f(x) = tan(x),$ <br> $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ | $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)},$ <br> $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ | $f(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ <br> $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ | $F(x) = tan(x)$ <br> $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ |

**Propriété (rappels sur les opérations de dérivées)**

| Dérivation | Primitive | |
|---|---|---|
| | *Fonction* | *Primitive* |
| $(u+v)' = u' + v'$ | $u' + v'$ | $u+v$ |
| $(\lambda u)' = \lambda u'$ | $\lambda u'$ | $\lambda u$ |
| $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ | | |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | | |
| $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ | $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u}$ |
| $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$ | $\frac{u'}{u^3}$ | $\frac{-1}{2u^2}$ |
| $(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$ | $u'u^n, n \geq 2$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}, n \geq 2$ |
| $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$ | $\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}, n \geq 2$ |
| $(e^u)' = u' \times e^u$ | $u' \times e^u$ | $e^u$ |
| $(ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$ | $\frac{u'}{u}$ | $ln\|u\|$ |
| $(cos(u))' = -u' \times sin(u)$ | $u'sin(u)$ | $-cos(u)$ |
| $(sin(u))' = u' \times cos(u)$ | $u'cos(u)$ | $sin(u)$ |
| $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ |