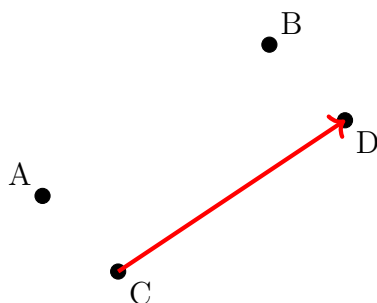


Chapitre 3: Les vecteurs

1 Définition d'un vecteur

1.1 Translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Sur la figure ci-contre, on considère D, l'image de C dans la translation qui transforme A en B.



La flèche rouge indique :

- La direction
- Le sens
- La longueur

du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition 3.1

| La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** \overrightarrow{AB}

Remarque

La longueur d'un vecteur est appelé **norme** du vecteur.

1.2 Egalité de deux vecteurs

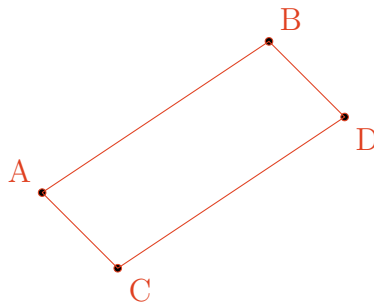
Définition 3.2

| Soient A,B,C et D quatre points du plan.

| Dire que \overrightarrow{AB} est égal à \overrightarrow{CD} signifie que les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme.

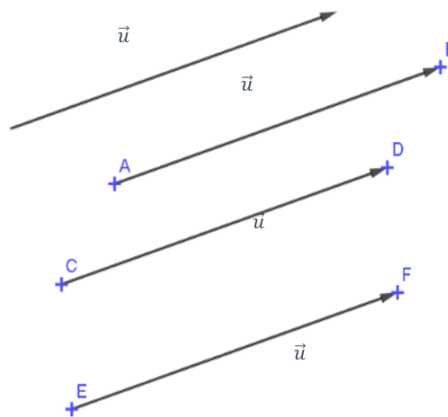
Propriété 3.1

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

**1.3 Notation**

Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur \overrightarrow{AB} .

Par exemple, sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Ce vecteur peut être noté \vec{u} .
 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ sont des **représentants de \vec{u}**

**1.4 Le vecteur nul****Définition 3.3**

| On appelle vecteur nul, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues

Par exemple, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Remarque

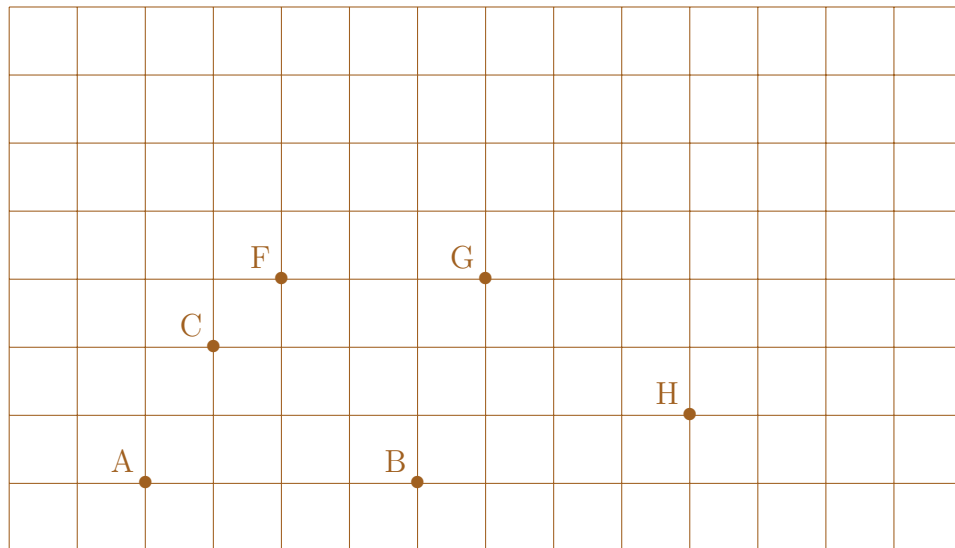
Le vecteur nul a une norme égale à 0, mais n'a ni direction, ni sens !



Savoir-Faire 3.1

SAVOIR REPRÉSENTER UN VECTEUR

Recopier la figure ci-dessous :



1. Construire un vecteur \vec{u} , ayant la même direction et le même sens que \overrightarrow{AB} et pour longueur 3.
2. Construire le point P tel que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BC}$.
3. Construire le point Q tel que $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{BH}$.
4. Construire un vecteur \vec{v} , ayant la même direction que \overrightarrow{BC} , un sens contraire à \overrightarrow{BC} , et pour longueur identique à \overrightarrow{BC} .
5. Construire le point R tel que $\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{GH}$.
6. Construire le point T tel que $\overrightarrow{BT} = \vec{0}$.

2 Opérations sur les vecteurs

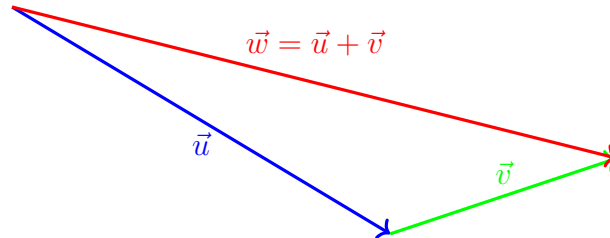
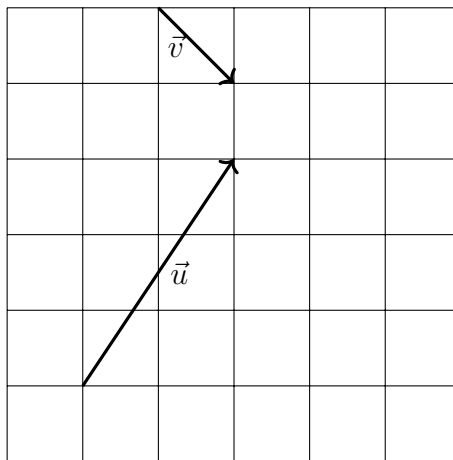
2.1 Somme de deux vecteurs

2.1.1 Définition

Définition 3.4

La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur \vec{w} qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur \vec{u} puis de vecteur \vec{v} .

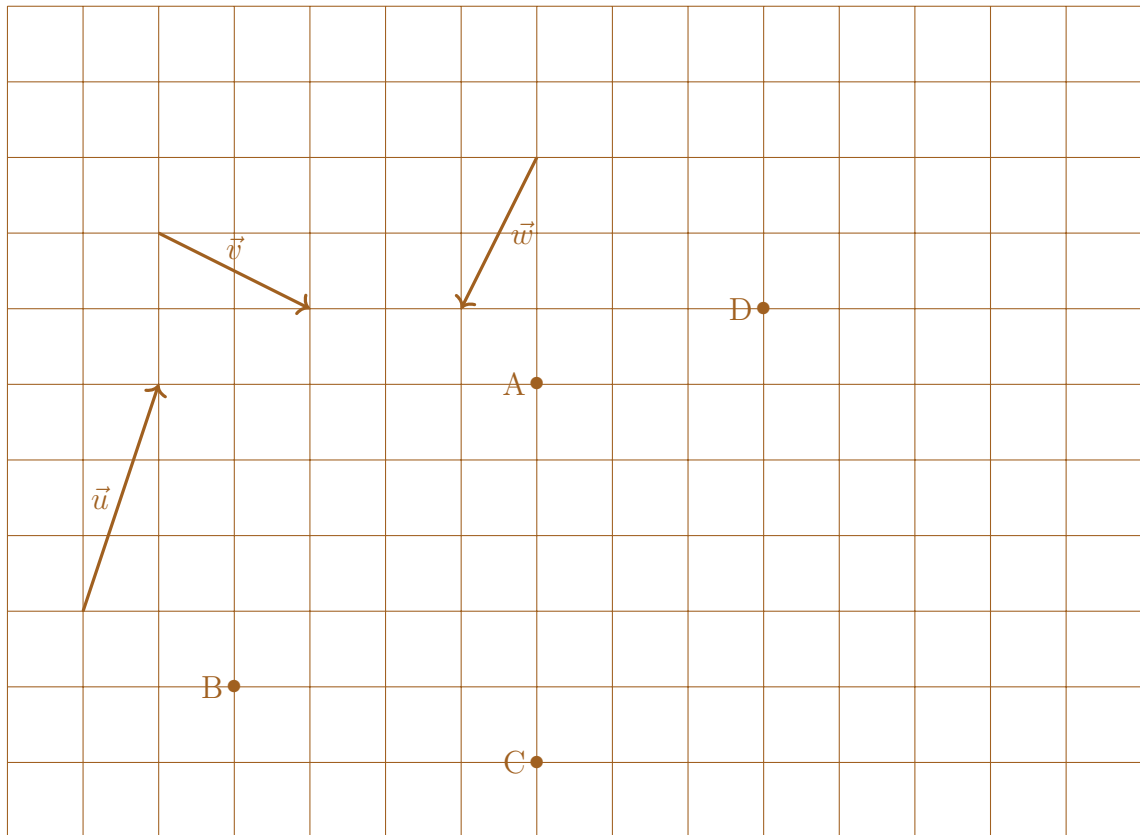
On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

**Exemple**



Savoir-Faire 3.2

SAVOIR REPRÉSENTER LA SOMME DE DEUX VECTEURS



1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w}$
4. Placer le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
5. Placer le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \vec{v} + \vec{w}$

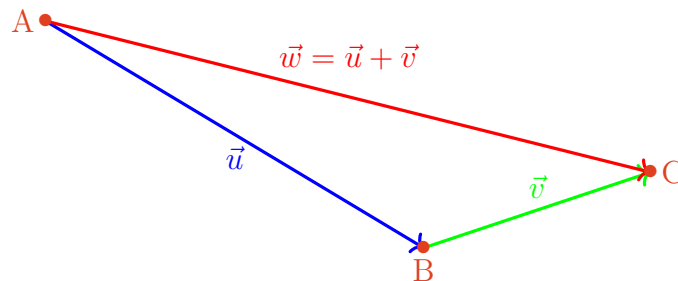
2.1.2 Relation de Chasles

Propriété 3.2 (admise)

RELATION DE CHASLES

Pour tous points A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Savoir-Faire 3.3

SAVOIR UTILISER LA RELATION DE CHASLES

1. Compléter :

- (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{\quad}$
- (b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{\quad}$
- (c) $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{FB}$
- (d) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AT}$
- (e) $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{RI}$
- (f) $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{KM}$

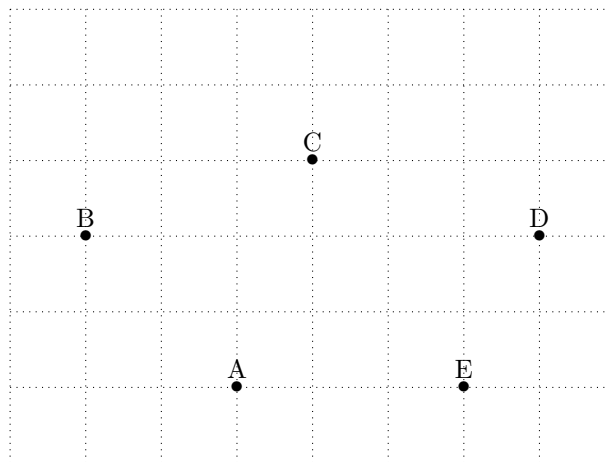
2. Simplifier :

- (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
- (b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA}$
- (c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{GD}$
- (d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- (e) $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{GH}$



Exercice 3.1

Reproduire la figure ci-dessous :



1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$, puis un représentant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$. (utiliser des couleurs). Que constate-t-on ?
2. Le démontrer à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 3.2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Exercice 3.3

Soit RST un triangle.

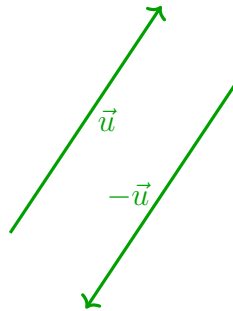
1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$
2. Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$. Penser à la relation de Chasles !

2.2 Opposé d'un vecteur

Définition 3.5

L'opposé d'un vecteur \vec{u} du plan est le vecteur noté $-\vec{u}$, qui a :

- même direction que \vec{u} .
- même norme que \vec{u} .
- le sens opposé à celui de \vec{u} .

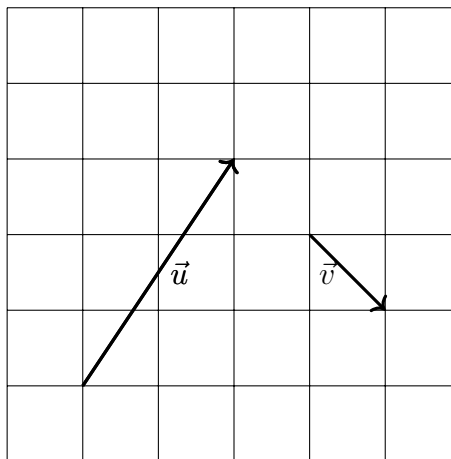


2.2.1 Soustraction de deux vecteurs

Définition 3.6

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. On définit la soustraction de \vec{u} par \vec{v} , notée $\vec{u} - \vec{v}$, le vecteur \vec{w} défini par $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

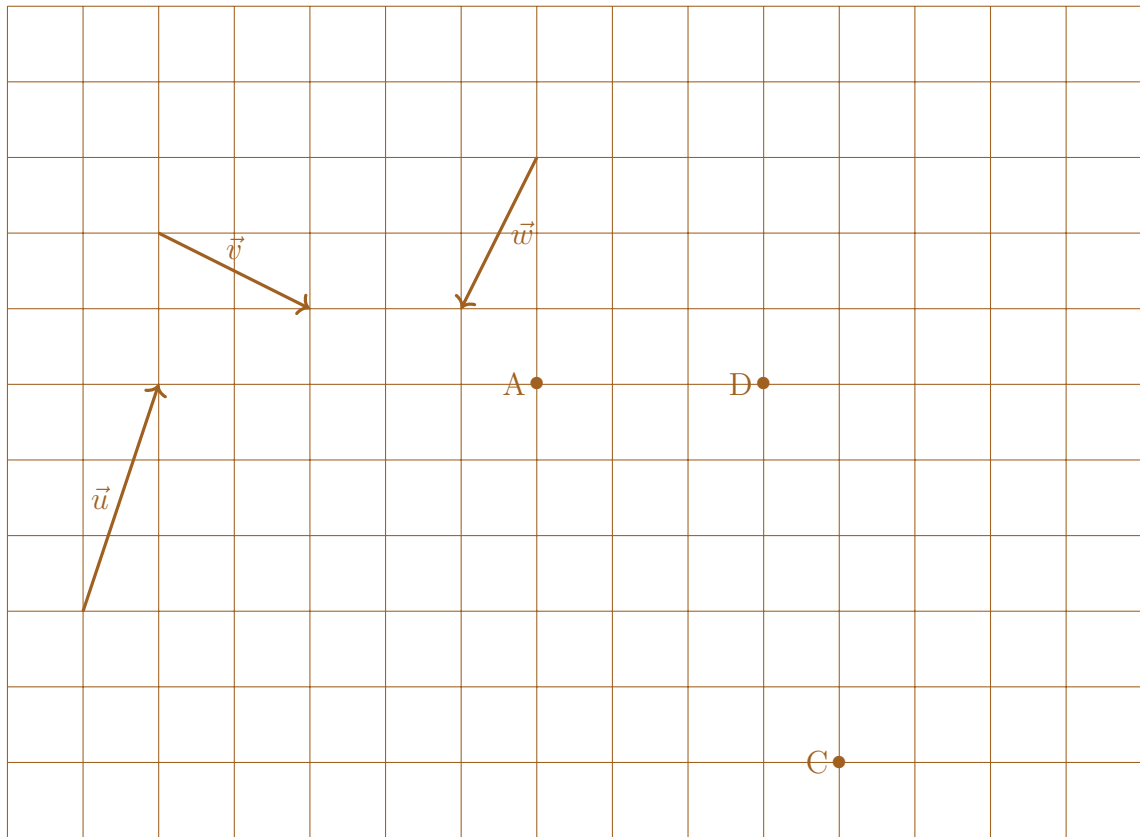
Exemple





Savoir-Faire 3.4

SAVOIR REPRÉSENTER LA DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{v} - \vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{u} - \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \vec{u} - \vec{w}$

2.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition 3.7

Soient \vec{u} un vecteur du plan et k un réel.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$

Sinon :

- Direction : \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont la même direction.
- Sens :
 - si $k > 0$ alors \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont le même sens
 - si $k < 0$, alors \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont des sens contraires
- Longueur : La longueur du vecteur $k \times \vec{u}$ est égale à la longueur du vecteur \vec{u} multipliée par $|k|$.

Propriété 3.3 (admise)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , pour tous réels k et k' , on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemple

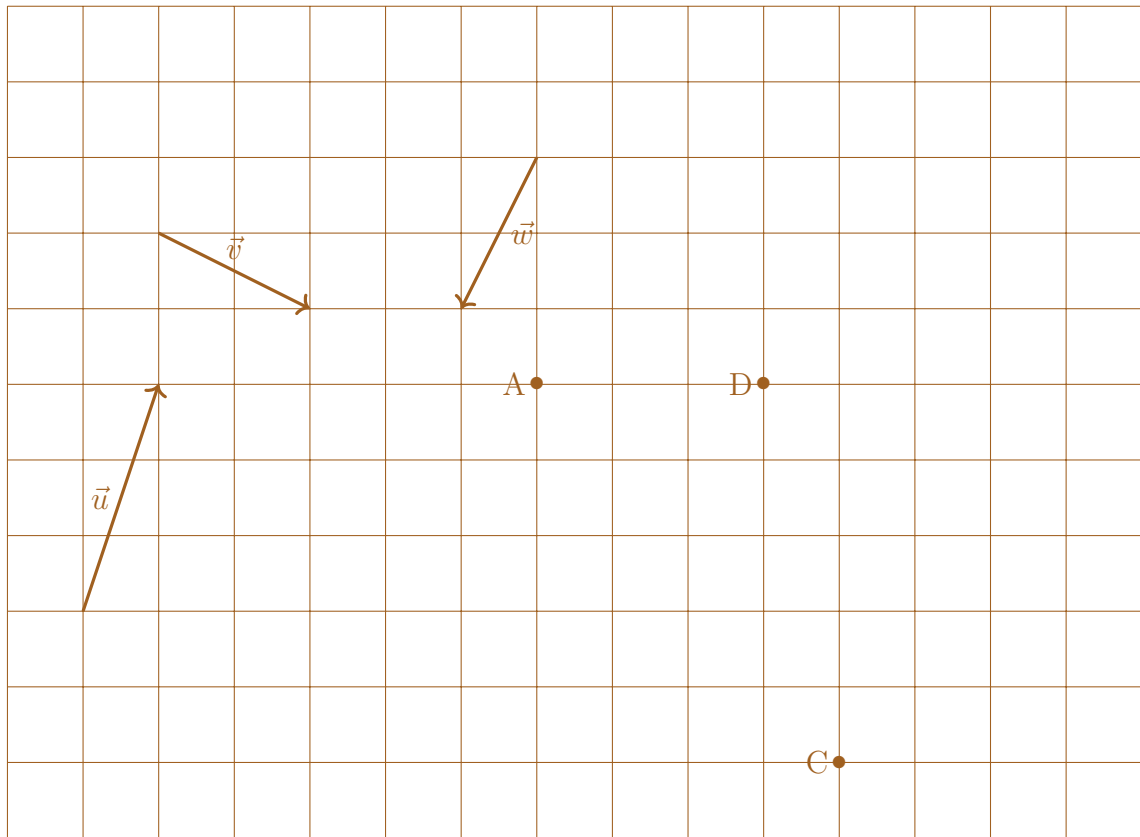
Simplifier les expressions suivantes :

- $5\vec{u} + 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} - 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} + 5\vec{v} =$
- $5 \times (3\vec{v}) =$



Savoir-Faire 3.5

SAVOIR PLACER UN POINT DÉFINI PAR DES ÉGALITÉS VECTORIELLES



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = -2\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = 2\vec{w} + \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$



Savoir-Faire 3.6

SAVOIR UTILISER LES RÈGLES DE CALCUL SUR LES VECTEURS AFIN D'EXPRIMER UN VECTEUR EN FONCTION D'UN AUTRE

1. Placer trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
2. Exprimer \overrightarrow{BC} en fonction de \overrightarrow{AB} . Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

2.4 Vecteurs colinéaires

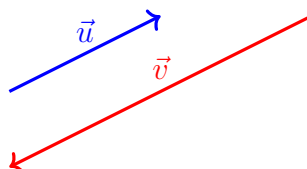
Définition 3.8

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.



Exemple de vecteurs \vec{u} et \vec{v} colinéaires

Savoir-Faire 3.7

SAVOIR MONTRER QUE DEUX VECTEURS SONT COLINÉAIRES

On considère un triangle MNP non aplati.

Soit le point R tel que $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MN}$.

Soit le point S tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{MP}$.

1. Faire une figure
2. En remarquant que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PS}$, exprimer le vecteurs \overrightarrow{RS} en fonction de \overrightarrow{NP}
3. Que peut-on en déduire au sujet des deux vecteurs \overrightarrow{RS} et \overrightarrow{NP} ?
4. Que peut-on en déduire pour les droites (RS) et (NP) ?

Exercice 3.4

Soit EFG un triangle.

On considère les points H et K définis par $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{EG}$.

1. Faire une figure
2. Montrer que $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{FE}$ en utilisant la relation de Chasles.
3. En remarquant que $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HK}$, montrer que $\overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{FG}$.
4. Que dire des vecteurs \overrightarrow{FK} et \overrightarrow{FG} ?
5. Que peut-on en déduire pour les points F , G et K ?