

12.2

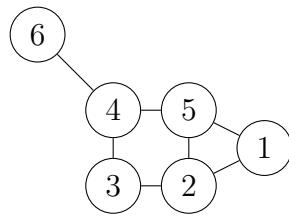
Implémentation d'un graphe

NSI TERMINALE - JB DUTHOIT

12.2.1 Implémentation d'un graphe à l'aide d'une matrice d'adjacence

Graph simple

Reprenons le graphe simple pour commencer :



La matrice associée au graphe ci-dessus est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est obtenue en remplissant un tableau où chaque ligne correspond au sommet de départ et chaque colonne au sommet d'arrivée :

	A ①	B ②	C ③	D ④	E ⑤	F ⑥
A ①	0	1	0	0	1	0
B ②	1	0	1	0	1	0
C ③	0	1	0	1	0	0
D ④	0	0	1	0	1	1
E ⑤	1	1	0	1	0	0
F ⑥	0	0	0	1	0	0

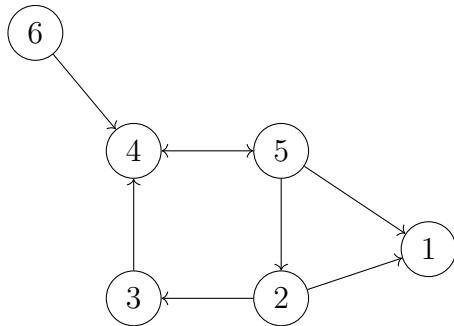
Il faut savoir qu'à chaque ligne correspond un sommet du graphe et qu'à chaque colonne correspond aussi un sommet du graphe. À chaque intersection ligne i-colonne j (ligne i correspond au sommet i et colonne j correspond au sommet j), on place un 1 s'il existe une arête entre le sommet i et le sommet j, et un zéro s'il n'existe pas d'arête entre le sommet i et le sommet j.

La case verte indique qu'il n'y a pas de relation de D vers B.

On remarque ici une symétrie par rapport à une des diagonale ; ceci s'explique par la fait d'avoir un graphe simple.

Graphé orienté

Repronons le graphé orienté :

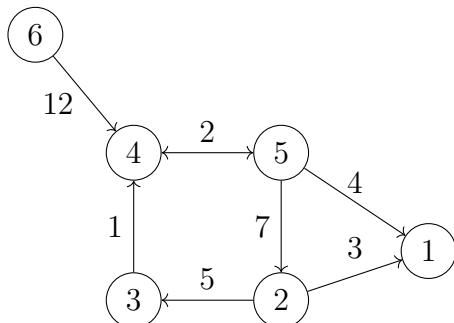


La matrice associée au graphé ci-dessus est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphé pondéré

Repronons le graphé pondéré et orienté :



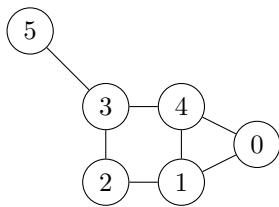
Il suffit ici de remplacer les "1" par les pondérations respectives.

La matrice associée au graphé ci-dessus est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.2

On considère le graphe simple suivant :



- Construire la fonction `_vide(n)` qui prend en argument la taille `n` de la matrice et qui renvoie la matrice carrée `n*n` avec `False` pour chaque coefficient

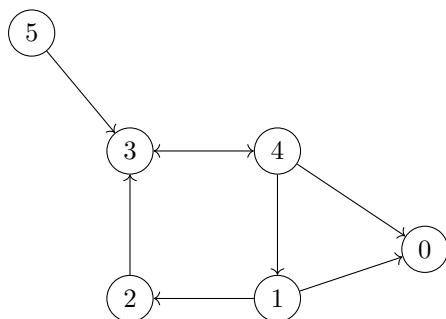
```
>>> matrice_vide(6)
[[False, False, False, False, False], [False, False, False, False, False],
 [False, False, False, False, False], [False, False, False, False, False],
 [False, False, False, False, False], [False, False, False, False, False]]
```

- Construire la fonction `ajouter_arete(mat,s1,s2)` de paramètres `mat` (une matrice), `s1` et `s2` des sommets. La fonction crée dans la matrice un lien qui matérialise l'arête entre `s1` vers `s2`.
- Créer la matrice ci-dessus.
- Créer une fonction `afficher_arete` de paramètres `mat`, `s1` et `s2` et qui renvoie `True` si il y une arête entre `s1` vers `s2`, `False` sinon
- Construire une fonction `sommet_voisinage(mat,s)` de paramètre une matrice `mat` et un sommet `s`. La fonction renvoie un tableau avec la liste des sommets voisins de `s`

```
>>> voisinage_sommet(mat,4)
[0, 1, 3]
>>> voisinage_sommet(mat,2)
[1, 3]
```

Exercice 12.3

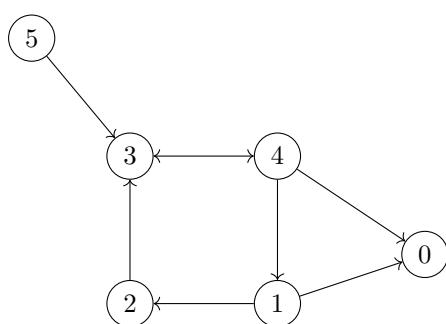
Même exercice que le précédent, mais pour un graphe orienté. On créera de la même façon les fonctions `ajouter_arc(mat,s1,s2)`, `afficher_arc` et `sommet_voisinage(mat,s)`. On pourra tester cet exercice avec le graphe suivant :



Exercice 12.4

Implémenter une classe `Graphe_oriente` avec l'interface ci-dessous :

- Un constructeur `__init__(self,n)` avec `n` la taille de la matrice carrée. Cette classe contiendra deux attributs : `n` qui sera la taille de la matrice et `adj` qui sera la matrice de taille `n*n`, avec chaque coefficient égal à `False`.
- Une méthode `creer_arc(self,s1,s2)` avec `s1` et `s2` deux sommets. La fonction indique `True` dans la matrice pour matérialiser le lien de `s1` vers `s2`.
- La méthode `afficher_arc(self,s1,s2)` qui renvoie `True` s'il y a un lien de `s1` vers `s2`, `False` sinon.
- La méthode `sommet_voisin(self,s)` de paramètre `s` un sommet, et qui renvoie la liste des sommets voisins à `s`.



Créer l'objet `t` qui correspond au graphe ci-contre.
**

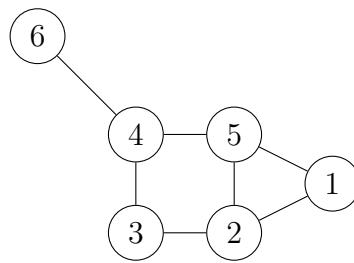
Exercice 12.5

Créer une classe `GrapheNO(self,n)` où `n` est le nombre de sommets du graphe. On utiliser une matrice d'adjacence. On implémentera les méthodes `ajouter_arete(self,s1,s2)`, `arete(self,s1,s2)`, `voisins(self,s)`, `sommet(self)` et `retirer_arete(self,s1,s2)`.

12.2.2 Implémentation avec des listes adjacentes

Cas d'un graphe non orienté

Reprendons le graphe non orienté :

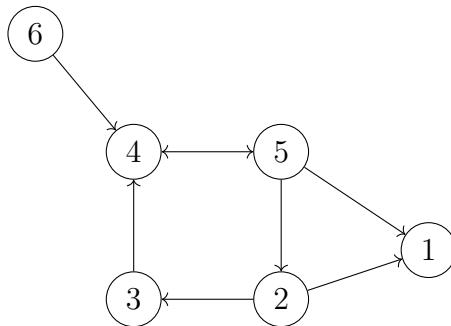


On définit une liste des sommets du graphe. À chaque élément de cette liste, on associe une autre liste qui contient les sommets liés à cet élément :

Sommet	Sommet(s) liés
1	2 ; 5
2	1 ; 3 ; 5
3	2 ; 4
4	3 ; 5 ; 6
5	1 ; 2 ; 4
6	4

Cas d'un graphe orienté

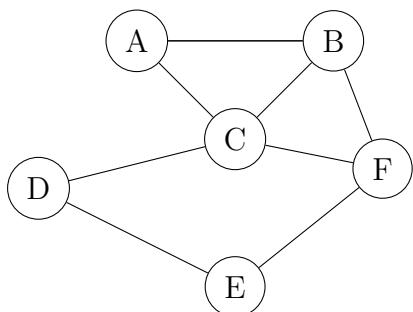
Il est alors possible ici de faire deux tableaux : un pour les prédécesseurs et un pour les successeurs de chaque sommet :



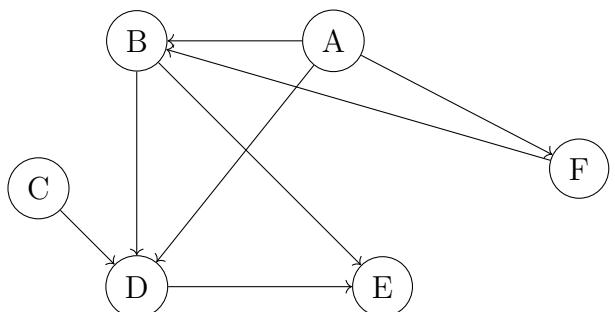
Sommet	Sommet(s) adjacent(s) prédécesseur(s)	Sommet	Sommet(s) adjacent(s) successeurs(s)
1	2 ; 5	1	
2	5	2	1 ; 3
3	2	3	4
4	3 ; 5 ; 6	4	5
5	4	5	1 ; 2
6		6	4

Exercice 12.6

Graphe 1



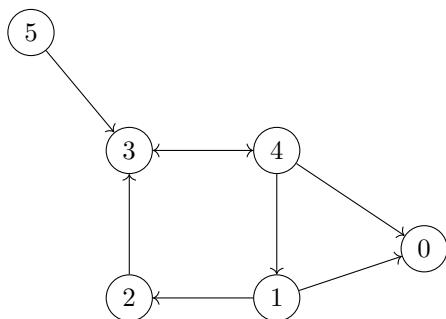
Graphe 2



1. Pour le graphe 1, donner la matrice d'adjacence et le tableau des sommets liés
2. Pour le graphe 2, donner la matrice d'adjacence, le tableau des prédecesseurs et le tableau des successeurs.

Exercice 12.7

Considérons le graphe orienté :



On décide de représenter ce graphe par une liste des successeurs.

Réaliser une classe `GraphV` qui prend comme argument une liste de successeurs. Cette classe comportera une méthode `est_lie(self,i,j)` qui renvoie `True` s'il y a un lien de `i` vers `j`, `False` sinon. La classe comportera aussi une méthode `graph_vers_matrice(self)` qui renvoie la matrice d'adjacence au graphe.

```

>>> g = GraphV([[], [0,2],[3],[4],[1,0],[3]])
>>> g.est_lie(5,3)
True
>>> g.est_lie(3,5)
False
>>> g.est_lie(3,3)
False
>>> g.graph_vers_matrice()
[[0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0]]
  
```

Remarque

Comment choisir l'implémentation à utiliser (matrice d'adjacence ou liste d'adjacence) ?

le choix se fait en fonction de la densité du graphe, c'est-à-dire du rapport entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets. Pour un graphe dense on utilisera plutôt une matrice d'adjacence.

certains algorithmes travaillent plutôt avec les listes d'adjacences alors que d'autres travaillent plutôt avec les matrices d'adjacences. Le choix doit donc aussi dépendre des algorithmes utilisés.

12.2.3 Coloration de graphe

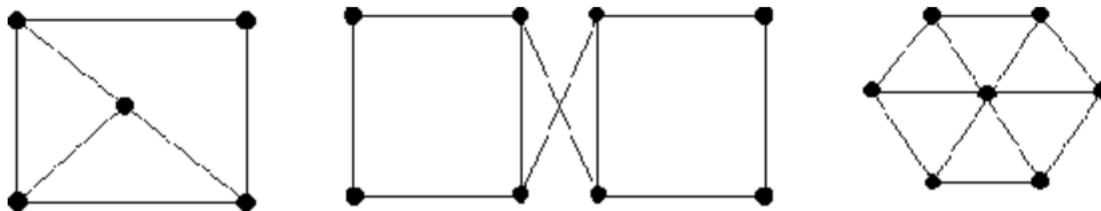
Exercice 12.8

Cet exercice ne rentre pas directement dans le programme de NSI; il permet de se familiariser avec la coloration de graphe dans 3 exemples très simples.

Coloration de graphe : chaque sommet doit être dans une couleur différente de ses voisins.

Nombre chromatique : nombre minimal de couleur pour colorier un graphe.

On considère les 3 graphes suivants :



Déterminer dans chacun des cas le nombre chromatique.

Exercice 12.9

Noé, Isa, Karim, Lola, Véro et Fred doivent suivre des cours de Maths(M), PC, SVT, NSI et Français(F).

Tous ne doivent pas suivre tous les cours, car certains ont déjà validé des matières.

Le tableau suivant donne les matières que chaque élève doit suivre :

Nom	Noé	Isa	Karim	Lola	Véro	Fred
Matières	M-PC-SVT	PC	M-SVT	PC-SVT-NSI	NSI-F	SVT-F

L'objectif est de prévoir un planning optimal pour que chacun puisse suivre les cours. Est-il possible de mettre Maths et PC en même temps par exemple ? (non, car Noé doit suivre M et PC)

- Construire un graphe non orienté à 5 sommets (M-PP-SVT-NSI-F) en considérant qu'une arête entre deux sommets signifie une incompatibilité. Par exemple, on reliera le sommet M et le sommet PC, car il y a une incompatibilité entre M et PC (pour Noé par exemple, qui doit suivre les deux).
- On coloriera chaque sommet avec un minimum de couleur et en respectant :
 - Chaque sommet doit avoir une couleur
 - Chaque sommet doit avoir une couleur différente de son voisin.
- En déduire un planning optimal possible.

☛ Le problème de la coloration d'un graphe avec un minimum de couleur est un exercice difficile . Il n'existe pas, pour l'instant, d'algorithme efficace pour répondre à cette question.

Exercice 12.10

Comprendre et analyser ces fonctions, qui permettent de colorier un graphe.

```
def coloriage(g):
    """ coloriage d'un graphe avec un algorithme glouton"""
    couleur = {} # dico avec les couleurs numérotées avec des
    ent à partir de zéro
                # couleur= {2:3,3:4, 4:4} signifie que
    les sommet 1 est colorié en coul 3 et abs
                # sommet 3 et sommet 4 en coul 4
    n = 0
    for s in g.sommets():
        c = mex(g.voisins(s),couleur) # c est la couleur
    pour le sommet s en cours
        couleur[s] = c
        n = max(c+1,n) #explications plus tard
    return couleur, n

def mex(voisins,couleur):
    '''voisins est une liste de voisins, couleur un dico
    renvoie la plus petite couleur non utilisée'''
    n = len(voisins)
    dispo = [True] * (n + 1)
    for v in voisins :
        if v in couleur and couleur[v] <= n :
            dispo[couleur[v]] = False
    for c in range(n+1):
        if dispo[c]:
            return c
```