2.2 Opérations sur les suites

Maths Spé terminale - JB Duthoit

2.2.1 Addition

Propriété

Le tableau suivant nous permet dans certains cas de trouver la limite de la suite $(u_n + v_n)$ connaissant la limite de (u_n) et de (v_n).

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$			
Somme	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Remarque

FI signifie que la forme est une **forme indéterminée**, c'est-à-dire que l'on ne peut pas conclure directement sur le résultat. Il faut approfondir l'étude (en transformant l'écriture par exemple)

Exercice 2.1

Déterminer si possible les limites suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - n$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + n^2 + n$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + n$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 5$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4000$
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - n + 1$

2.2.2 Produit

Les résultats associés à le produit des suites (u_n) et (v_n) sont :

Propriété

Le tableau suivant nous permet dans certains cas de trouver la limite de la suite $(u_n \times v_n)$ connaissant la limite de (u_n) et de (v_n).

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$				
Produit	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	$l \times l'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 2.2

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée
2. Factoriser u_n
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n^2 - 1)(-n + 7)$. Déterminer la limite de le suite (u_n).

Exercice 2.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n - 4^n$. Déterminer la limite à l'infini de (u_n).

Exercice 2.5

Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 + 3n + 1$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - 4n + 2$

Exercice 2.6

Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + 3n^2 - 5$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 - 3n^2 + n$

2.2.3 Quotient

Les résultats associés au quotient des suites (u_n) et (v_n) sont :

Propriété

Le tableau suivant nous permet dans certains cas de trouver la limite de la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ connaissant la limite de (u_n) et de (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (colonnes) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (lignes)

Quotient	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

Exercice 2.7

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour $n \geq 0$.Déterminer la limite de la suite (u_n).

Savoir-Faire 2.2

SAVOIR DÉTERMINER LA LIMITE D'UNE SUITE EN UTILISANT LES OPÉRATIONS SUR LES SUITES Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 + n - 5$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - n - 5$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n+3}{-n-5}$

Exercice 2.8

Déterminer la limite de le suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{5n^2+n}{n^3+4n}$.
2. (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{6n+5}{2n-7}$.
3. (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{\frac{5}{n}+7}{8+\frac{2}{n}}$
4. (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n^3+2n}{8n^2}$

Exercice 2.9

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1}$

Exercice 2.10

Déterminer la limite des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2+5n}{2n^2+1}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$

Exercice Python 2.11

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 - 4n + 2$..
Écrire un programme python qui permet de déterminer à partir de quel rang $u_n \geq 10^6$.