12.1 Fonctions sinus et cosinus

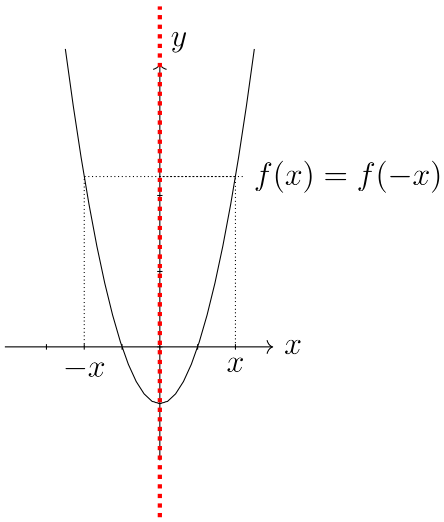
Maths Spé terminale - JB Duthoit

12.1.1 Quelques rappels

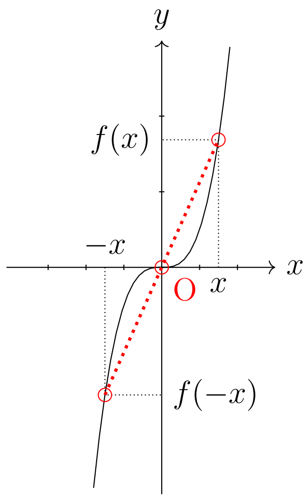
Définition - Rappels de seconde-

On considère une fonction f définie sur un ensemble D.

- On dit que f est **paire** si D est centré en 0 et si pour tout réel x de D, on a $f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** si D est centré en 0 et si pour tout réel x de D, on a $f(-x) = -f(x)$



Fonction paire



Fonction impaire

12.1.2 Quelques propriétés

Propriété

- Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x)$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = -sin(x)$
- Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = sin(x)$. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = cos(x)$

Propriété -Périodicité-

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $sin(x + 2\pi) = sin(x)$ et $cos(x + 2\pi) = cos(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** , de période 2π.

Propriété -Parité-

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $sin(-x) = -sin(x)$ et $cos(-x) = cos(x)$. On dit que les fonction cosinus est paire, et que la fonction sinus est impaire. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et celle de la fonction sinus symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos\left(u(x)\right)$ et $g(x) = sin\left(u(x)\right)$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -u'(x)sin\left(u(x)\right)$ et $g'(x) = u'(x)cos\left(u(x)\right)$.

Démonstration 21- -

La démonstration, facile, utilise la formule de la dérivée d'une fonction composée.

Propriété

- Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$. Une primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -cos(x)$
- Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = cos(x)$. Une primitive de la fonction g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = sin(x)$

Propriété

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de la fonction $u'cos(u)$ est $sin(u)$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de la fonction $u'sin(u)$ est $-cos(u)$

12.1.3 Variations des fonctions trigonométriques

Exercice 12.1

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x)$ et $g(x) = sin(x)$. En utilisant le cercle trigonométrique, étudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Propriété

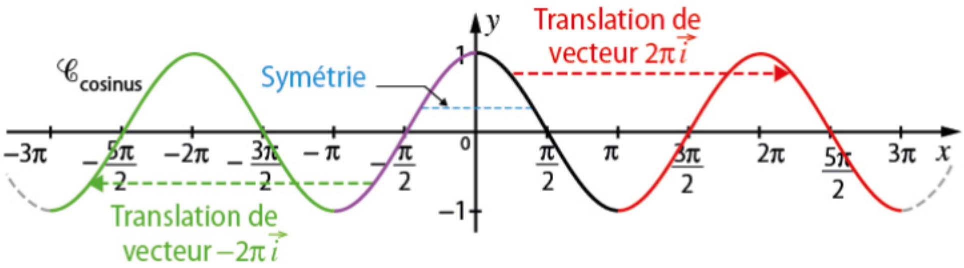
x	0	π
$f(x) = cos(x)$	1 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0

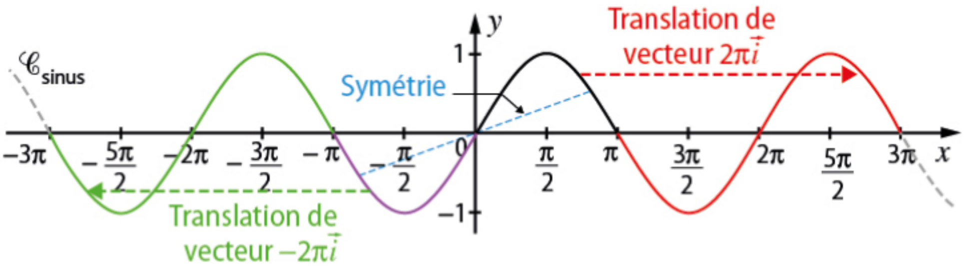
12.1.4 Courbes représentatives

Pour tracer la courbe de la fonction cosinus, il suffit de la tracer sur $[0;\pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.
Pour la fonction sinus, il suffit de la tracer sur $[0;\pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'origine (fonction impaire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.

Courbe de la fonction cosinus



Courbe de la fonction sinus



Savoir-Faire 12.59

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE
Dans chaque cas f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = sin(x) \times cos(x)$
2. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{3 + sin(x)}$
3. $f(x) = cos(3x + 5)$

Exercice 12.2
Dans chaque cas f est une fonction définie sur I. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = xcos(x)$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = xsin(x)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$
4. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$
5. $f(x) = cos(x + 2)$, $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = sin(7 - x)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 12.3

Dans chaque cas f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = e^x cos(x)$
2. $f(x) = e^x sin(x)$
3. $f(x) = e^{-x} cos(x)$
4. $f(x) = cos(4x^2 + 2)$

Exercice 12.4

Dans chaque cas f est une fonction définie sur I. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{sin(x)}$, $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. $f(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$, $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
3. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x) + 2}$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{sin(x) + 5}{cos(x) + 5}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 12.5

Dans chaque cas f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = cos^2(x)$
2. $f(x) = xe^{sin(x)}$
3. $f(x) = sin^3(x)$
4. $f(x) = sin^2(x)cos(x)$

Savoir-Faire 12.60

Savoir étudier des fonctions comportant des fonctions trigonométriques

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin^2(x) - 2cos(x) + 1$.

1. a) Étudier la parité de f
   b) Montrer que f est périodique de période 2π.
   c) En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variations sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 12.6

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2}sin^2(x) + 2cos(x)$

1. Étudier l'éventuelle parité de f.
2. Montrer que f est périodique, de période 2π.
3. En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
4. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 12.7

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{3 + 2cos(x)}$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Étudier l'éventuelle parité de f.
3. Montrer que f est périodique, de période 2π.

4. En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$
5. Étudier les variations de f sur $[0;\pi]$.

Savoir-Faire 12.61

SAVOIR DÉTERMINER DES PRIMITIVES COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = sin(3x) - cos(2x)$
2. $f(x) = sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $f(x) = sin(x)cos(x)$

Exercice 12.8

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = sin(x)cos^2(x)$
2. $f(x) = cos(x)e^{sin(x)}$
3. $f(x) = sin(x)\left(1 - cos(x)\right)^3$

Exercice 12.9

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur I. Déterminer une primitive de f sur I.

1. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$, $I = \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}}$, $I =]0;\pi]$