15.1 Produit scalaire dans l'espace

15.1.1 Définition

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère trois point A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points A, B et C.
On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque

On admet que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est indépendant du plan $\mathcal{P}$ choisi, et aussi des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété

Toutes les propriétés du produit scalaire énoncées dans le plan s'appliquent à des points et des vecteurs coplanaires.

Propriété -Bilinéarité-

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Propriété -symétrie-

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

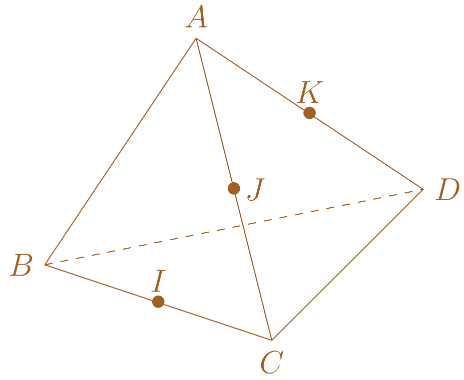
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Savoir-Faire 15.76

Savoir calculer un produit scalaire dans l'espace

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$
3. a) Justifier que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
   b) Calculer $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC}$

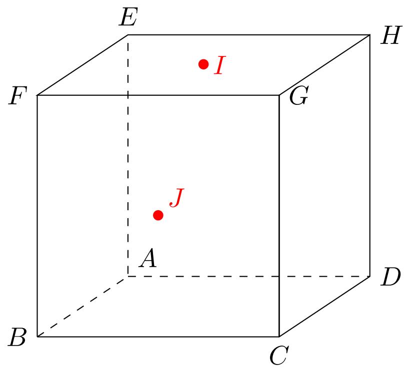


Méthode :
☛ On se place ensuite dans des plans particuliers pour utiliser les formules qui permettent de calculer un produit scalaire dans le plan

Exercice 15.13

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a.
Le centre du carré $EFGH$ est I, et J est le centre de $BCGF$
Calculer les produits scalaires suivants :

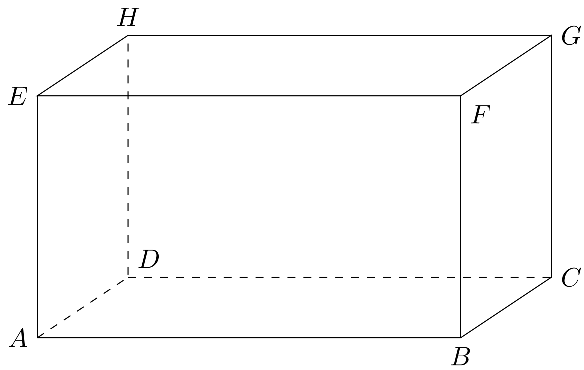
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF}$
3. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CG}$
4. a) Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
   b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ}$



Exercice 15.14

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AE = AD = a$ et $AB = 3a$, avec $a > 0$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CG}$
3. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF}$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$



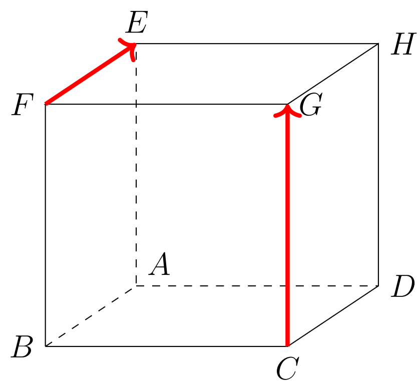
15.1.2 Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition

- Par convention, le vecteurs nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
  Soit A un point de l'espace, et d_1 et d_2 deux droites passant par A et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  Les vecteurs **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** si et seulement si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

Exemple

Dans la figure ci-contre, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont orthogonaux.



Remarque

On admet que la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs est indépendante du point A choisi.

Propriété

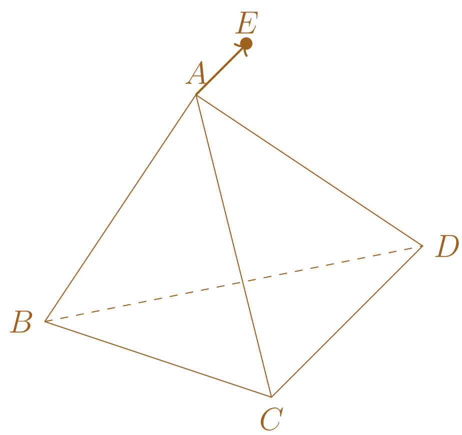
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Savoir-Faire 15.77

SAVOIR UTILISER UN PRODUIT SCALAIRE POUR DÉMONTRER UNE ORTHOGONALITÉ

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a.
Les points E est définie par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

1. Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
2. En déduire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.



Méthode :

- On peut décomposer le produit scalaire demandé avec la relation de Chasles
- On se place ensuite dans des plans particuliers pour utiliser les formules qui permettent de calculer un produit scalaire dans le plan.

Exercice 15.15

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a.
Le centre du carré $DCGH$ est I, et J est le milieu du segment $[AD]$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (BJ) ?