

Rappels sur le produit scalaire dans le plan

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

15.0.1 Premières expressions du produit scalaire

Histoire

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIX^e siècle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809 ; 1877). Il fut baptisé produit scalaire par William Hamilton en 1853.

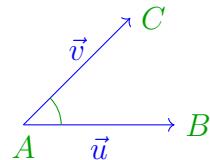


Définition

Définition

Le **produit scalaire d'un vecteur \vec{u} par un vecteur \vec{v}** est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

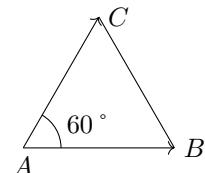


Remarque

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . On peut donc choisir des vecteurs de même origine.

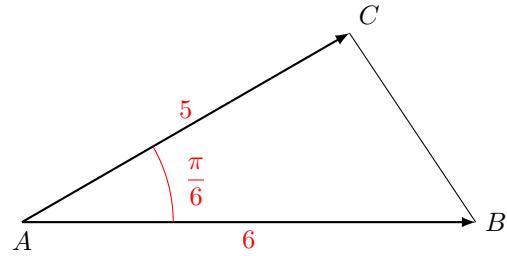
Exercice 15.1

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en sachant que $AB = AC = BC = 1$.



Exercice 15.2

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant les données de la figure suivante :



Cas particulier de vecteurs colinéaires

Propriété

- si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et de sens opposés, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

Exercice 15.3

Soient A,B et C trois points alignés tels que $B \in [AC]$ et $AB = 4$ et $BC = 1$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

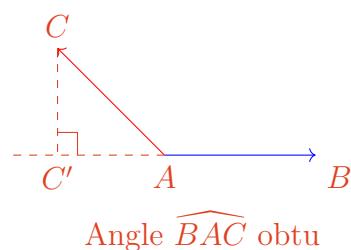
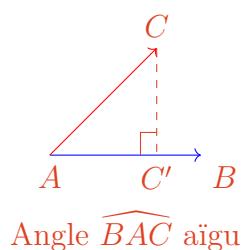


Expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on considère le point C' projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

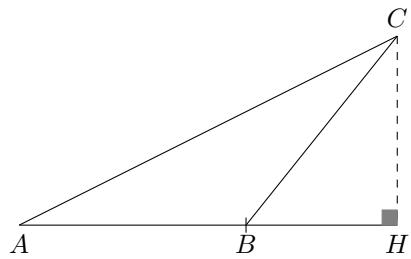
On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$



Exercice 15.4

Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait également que AH=5, AB=3 et B appartient au segment [AH].

Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



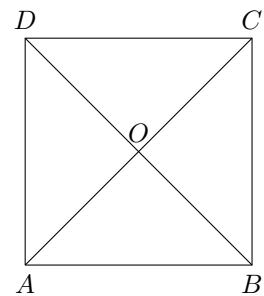
Exercice 15.5

On considère le carré ABCD de côté a .

On note O le point d'intersection de ses diagonales.

Calculer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$



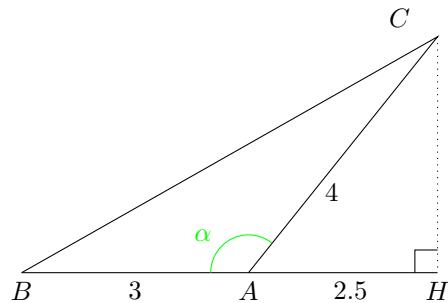
Exercice 15.6

SAVOIR UTILISER LE PRODUIT SCALAIRE POUR CALCULER UN ANGLE OU UNE DISTANCE

ABC est le triangle ci-dessous avec AB=3 et AC=4.

H est le pied de la hauteur issue de C, et AH=2.5

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. En déduire la mesure de α , mesure de l'angle \widehat{BAC} arrondie au degré près.



15.0.2 Propriété du produit scalaire

Produit scalaire et orthogonalité

Définition

- Dire que deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux signifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

| Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , \vec{u} est orthogonal à \vec{v} équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

15.0.3 règles de calculs

Propriété

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , pour tout nombre réel λ :

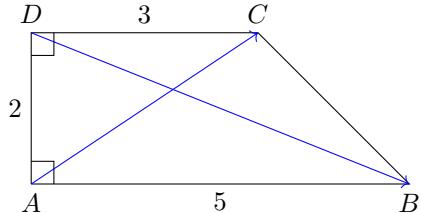
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exemple

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v} - 3\vec{w}) =$$

Exercice 15.7

SAVOIR UTILISER LA RELATION DE CHASLES
POUR CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE
 $ABCD$ est le trapèze rectangle ci-dessous avec
 $AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.
Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$



Carré scalaire

Définition

| Le **carré scalaire d'un vecteur** \vec{u} , noté \vec{u}^2 , est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Conséquence

- Pour tout vecteur \vec{u} , $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
- Pour tous points A et B , $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Identités remarquables

Propriété

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

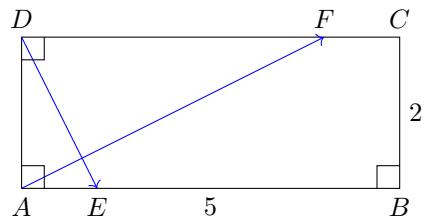
Exercice 15.8

SAVOIR DÉMONTRER L'ORTHOGONALITÉ DE DEUX VECTEURS - MÉTHODE 1

$ABCD$ est le rectangle ci-dessous avec $AB = 5$ et $BC = 2$.

E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



15.0.4 Autres expressions du produits scalaire

Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(1; 4)$ dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) du plan.
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Conséquence

Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , et si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors :
 \vec{u} et \vec{v} orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Propriété

Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , et si $\vec{u}(x; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(5; 7)$ et $\vec{v}(-5; 4)$ dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) du plan.
Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

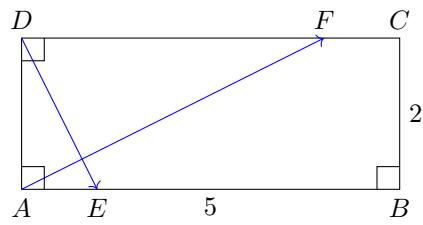
Exercice 15.9

SAVOIR DÉMONTRER L'ORTHOGONALITÉ DE DEUX VECTEURS - MÉTHODE 2 , AVEC DES COORDONNÉES

ABCD est le rectangle ci-dessous avec $AB=5$ et $BC=2$.

E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



Expression du produit scalaire à partir des normes

Propriété

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Exercice 15.10

On considère un triangle ABC avec $AB = 6$, $AC = 3$ et $BC = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 15.11

On considère un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 5$, $AD = 7$ et $AC = 10$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.