15.5 Applications du produit scalaire

Maths Spé terminale - JB Duthoit

15.5.1 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, si les réels a,b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration 25- -

Savoir-Faire 15.83

Savoir déterminer une équation cartésienne d'un plans connaissant un vecteur normal et un point

Soit $A(-1;2;5)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-3;1;4)$ un vecteur.

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3;8;7)$. Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 15.22

Soit $A(1;9;3)$ et $B(-2;-7;-5)$ deux point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 15.23

Soit $A(4;5;8)$, $B(1;3;-12)$ et $C(0;0;8)$ trois point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

Savoir-Faire 15.84

Savoir reconnaître un plan donné par une équation cartésienne

Soit $A(1;0;3)$, $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$ trois points de l'espace et soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z+1=0$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le plan (ABC) est le plan $\mathcal{P}$
3. En déduire un vecteur normal à (ABC).

Exercice 15.24
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x + 2y + 6z - 4 = 0$.

Exercice 15.25
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $y = 2x - 6$.

Exercice 15.26
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $z = 0$.

Savoir-Faire 15.85

SAVOIR DÉTERMINER LES COORDONNÉES DU PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN POINT SUR UNE DROITE
Soit d la droite passant par $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1; 4)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d

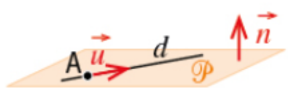
Exercice 15.27
Soit d la droite passant par $A(2; 2; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6; -1; 2)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(11; -18; 2)$ sur la droite d

15.5.2 Intersection de droites et de plans

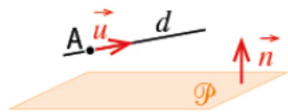
Propriété

On considère un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

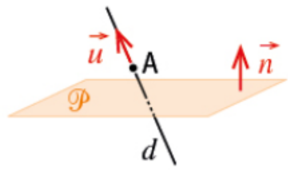
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors :
  - Si $A \in \mathcal{P}$ alors $d \subset \mathcal{P}$ (d est incluse dans $\mathcal{P}$).



  - Si $A \notin \mathcal{P}$ alors d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.



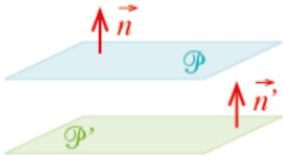
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.



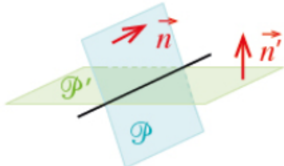
Propriété

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles



- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite.



Exercice 15.28

Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x - y)^2 = z^2$.