

Chapitre 15

Variable aléatoire

Sommaire

15.0.1	Espérance mathématique	185
15.0.2	Variance et écart-type	186
15.1	Opération sur les variables aléatoires	187
15.1.1	Propriétés sur les variables aléatoires	187
15.1.2	Échantillon d'une loi de probabilité	189
15.1.3	Espérance, variance et écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon	189
15.1.4	Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale	189
15.2	Python et les suites	192
15.3	Python et les probabilités	194
15.4	Python et les intégrales	194
15.5	Python et les fonctions	194

Rappels

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

15.0.1 Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire qui prend n valeurs distinctes.

Son espérance mathématique est **la moyenne des valeurs** prises par ses réalisations, soit x_1, x_2, \dots, x_n pondérées par leurs probabilités respectives p_1, p_2, \dots, p_n .

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

(Cette notion a été introduite par Christian Huygens avant qu'il découvre les anneaux de Saturne.)

► $E(X)$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

15.0.2 Variance et écart-type

La variance est l'espérance des carrés des écarts par rapport à l'espérance...
Pour dire les choses plus simplement,

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Ou encore :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Une formule plus simple d'emploi, dite de König, consiste à retrancher le carré de l'espérance de l'espérance des carrées :

$$V(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

Ce qui donne

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2 - (E(X))^2$$

La démonstration est au programme de première.

L'écart-type de la X est la racine carrée de sa variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

☞ L'espérance et l'écart-type sont exprimés dans la **même** unité que X , au contraire de la variance, que l'on n'interprète pas.

Exercice 15.1

Le jeu consiste à lancer un dé à 6 faces, bien équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 6 euros et sinon on perd 1 euro.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de X
2. Calculer $E(X)$ et donner une interprétation du résultat
3. Calculer $\sigma(X)$ de deux façons différentes

Exercice 15.2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p . Montrer que $E(X) = p$ et que $\sigma(x) = \sqrt{p - p^2}$