4.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

4.2.1 Dérivée de (u+v)

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^3$.
Donner $f'(x)$

4.2.2 Dérivée de (u-v)

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u-v)$ est dérivable sur I et $(u-v)' = u' - v'$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^3$.
Donner $f'(x)$

4.2.3 Dérivée de (ku)

Propriété (admise)

Soient u une fonctions définie et dérivable sur un intervalle I, et soit $k \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et $(ku)' = k \times u'$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.
Donner $f'(x)$

Exercice 4.41
Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -3x^2 + 10x$, $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 4x^2 + 171$, $D_f = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 1 - 5x$, $D_f = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{5}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$
6. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$, $D_f = \mathbb{R}$
7. $f(x) = 4x^3 + x^2 + x$, $D_f = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3x + 1$, $D_f = \mathbb{R}^*$
9. $f(x) = \sqrt{x} + x$, $D_f = [0; +\infty[$
10. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$, $D_f = \mathbb{R}$
12. $f(x) = 4$, $D_f = \mathbb{R}$

4.2.4 Dérivée de (uv)

Propriété
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration 4.5
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Montrer que la fonction (uv) est dérivable sur I et que $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1) \times x^3$.
Donner $f'(x)$

Exercice 4.42
Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = (x^2 + 1) \times x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$, $D_f =]0; \infty[$

4.2.5 Dérivée de $\frac{1}{v}$

Propriété (admise)
Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, avec pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Exercice 4.43

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$, $D_f = \mathbb{R} - 2$
4. $f(x) = \dfrac{-3}{1+x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$

4.2.6 Dérivée de $\frac{u}{v}$

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 4.44

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1-3x}{4x-8}$, $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

4.2.7 Dérivée de $g(ax+b)$

Propriété (admise)

Soient a et b deux réels, et I un intervalle.
Soit J l'intervalle constitué de l'ensemble des valeurs de $ax+b$ lorsque x décrit I.
Si g st une fonction dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur I et $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Savoir-Faire 4.27

Savoir calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 5x + 7$, $D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = (x^2+3x)(x^3-3x^2+7)$, $D_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = x\sqrt{x}$, $D_f =]0; +\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+9}$, $D_f = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{17}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $D_f =]-\frac{3}{2};+\infty[$.
8. $f(x) = \sqrt{-2x+1}$, $D_f =]-\infty;\frac{1}{2}[$.
9. $f(x) = (2x-3)^{15}$, $D_f = \mathbb{R}$.

Exercice 4.45
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 1$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en 1.

4.2.8 Tableau récapitulatif

Propriété

$(u+v)' = u' + v'$
$(\lambda u)' = \lambda u'$
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$\left(\dfrac{1}{u^2}\right)' = \dfrac{-2u'}{u^3}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$
$(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)$