

10.3

Propriétés et intégration par parties

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

10.3.1 Propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I .
 a, b et c sont trois réels dans I et k un réel quelconque.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$
3. Linéarité :
 - $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
 - $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
4. Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
5. Positivité : Si $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
6. Comparaison : Si $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

⚠ Les réciproques de la positivité et de la comparaison sont fausses !

Savoir-Faire 10.46

SAVOIR MAJORIZER OU MINORER UNE INTÉGRALE

1. Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
2. En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

Exercice 10.14

1. Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$.
2. En déduire que $0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$

10.3.2 Intégration par partie

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec des dérivées u' et v' continues sur I . Soient a et b deux réels dans I .

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$


Exigible

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec des dérivées u' et v' continues sur I . Soient a et b deux réels dans I . Montrer que

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$


Savoir-Faire 10.47
SAVOIR CALCULER UNE INTÉGRALE AVEC L'INTÉGRATION PAR PARTIES

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par partie :

1. $\int_1^e x \ln(x) dx$

2. $\int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x dx$


Exercice 10.15

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par partie :

1. $\int_{-2}^3 (x+1)e^x dx$

2. $\int_0^1 x e^{2x} dx$

3. $\int_1^e \ln(x) dx$


Exercice 10.16

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par partie :

1. $\int_1^9 x \sqrt{x} dx$

2. $\int_{-1}^2 (3x+1)e^{-x} dx$

3. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

 plus difficile!