6.2 Variations d'une suite

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

Approche

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 3$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = (n-3)^2$.

6.2.1 Définitions

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Dire qu'**une suite** (u_n) **est croissante pour** $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Dire qu'**une suite** (u_n) **est décroissante pour** $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.

6.2.2 Méthodes pour démontrer les variations d'une suite

Méthode de la différence

- On calcule $u_{n+1} - u_n$.
- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est décroissante à partir de ce rang.

Méthode du quotient

⚠ Cette méthode ne fonctionne que si tous les termes de la suite sont strictement positifs.

- On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

Méthode en utilisant les variations de f pour une suite du type $u_n = f(n)$

On utilise pour cela la propriété suivante :

Propriété Variation de fonction et de suite

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

- si f est une fonction croissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est croissante pour $n \geq k$.
- si f est une fonction décroissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante pour $n \geq k$.

La méthode consiste donc à :

- Étudier les variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Trouver un intervalle du type $[k; +\infty[$ (avec $k \in \mathbb{N}$) où la fonction f est monotone.
- Conclure, en utilisant la propriété précédente, quant aux variations de la suite (u_n) .

Savoir-Faire 6.42

Savoir démontrer les variations d'une suite.

1. Méthode 1 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = (n+2)^2$.
2. Méthode 2 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5}{2^n}$.
3. Méthode 3 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

✎Je m'entraîne seul(e)

Étudier les variations des suites (u_n) définie par :

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Rép : (u_n) est strictement croissante pour $n \geq 1$.
2. $u_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
3. $u_n = n^3 - n^2 + n$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
4. $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$ Rép : (u_n) est strictement croissante.

Exercice 6.79

On se propose d'étudier l'évolution du nombre de souris d'une animalerie sur une période de six semaines. Initialement, ce nombre s'élève à 240 souris.
On peut modéliser ce nombre de souris au bout de n semaines par la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n (avec $0 \leq n \leq 6$), par $u_n = 240 - 40n$.

1. a) Donner la valeur de u_0, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b) Donner une interprétation de u_2.
2. On considère maintenant la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 240 - 40n$.

a) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

b) Démontrer cette conjecture.

c) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

Exercice 6.80

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{10}{n}$. Étudier les variations de la suite (u_n)

1. En utilisant la méthode de la différence
2. En étudiant la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{10}{x}$