

## 2.3

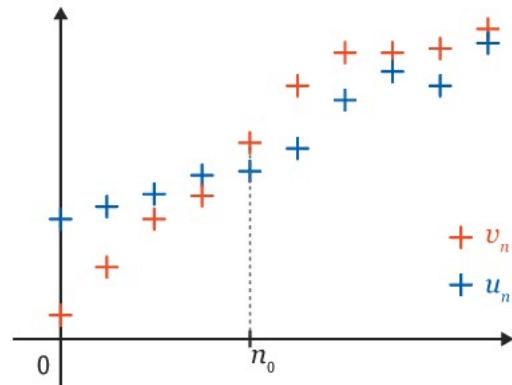
## Limites et comparaison

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

## 2.3.1 Théorème de comparaison

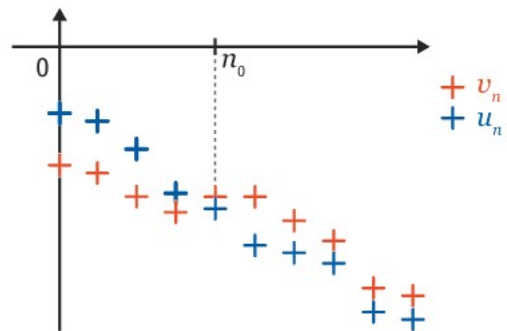
## Propriété

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ .  
 Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .



## Propriété

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ .  
 Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .



## ● Exercice 2.10

1. Soit  $(u_n)$  une suite telle que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq n^2 + 1$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
2. Soit  $(v_n)$  une suite telle que, pour tout entier  $n$ ,  $v_n \leq -3n - 4$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
3. Soit  $(w_n)$  une suite telle que, pour tout entier  $n$ ,  $-1 + 2n \leq w_n \leq 1 + 2n$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .



## Savoir-Faire 2.4

DÉTERMINER UNE LIMITE PAR COMPARAISON

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n)$
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + (-1)^n}{n^2}$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$

### Exercice 2.11

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sqrt{n^3 + 1} \geq n\sqrt{n}$ .
2. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3 + 1}$

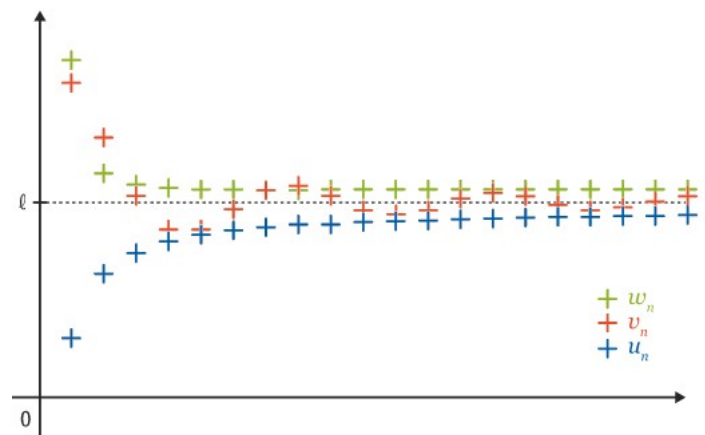
## 2.3.2 Théorème des gendarmes

### Propriété (admise) Théorème des gendarmes

Soient  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , avec  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Autrement dit, si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers un réel  $l$ , alors  $(v_n)$  converge aussi vers  $l$ .



### Remarque

⚠ Le plus souvent, on utiliseras des encadrements classiques, comme :

- $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
- $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
- $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

### Exercice 2.12

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = 0.59^n(5 + (-1)^n)$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 2.13

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  dans les cas suivants :

1. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \frac{\sin(n)}{n^3}$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \frac{n + \sin(n)}{n}$ .
3. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ .