6.5 Notion de limite de suite

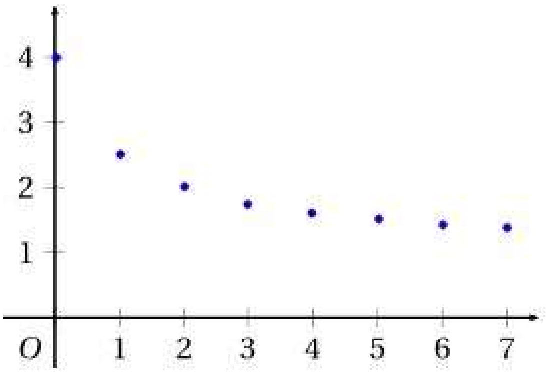
Spé Maths 1ère - JB Duthoit

6.5.1 Suite convergente

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{3}{n+1}$. Que devient u_n si n prend des "grandes" valeurs ?
On observe que les termes de la suite (u_n) semblent se rapprocher de 1, et donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
On peut d'ailleurs renforcer ce sentiment de façon numérique, en utilisant la calculatrice par exemple, afin de représenter la suite (u_n) .

Représentation de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{3}{n+1}$



Définition 6.5

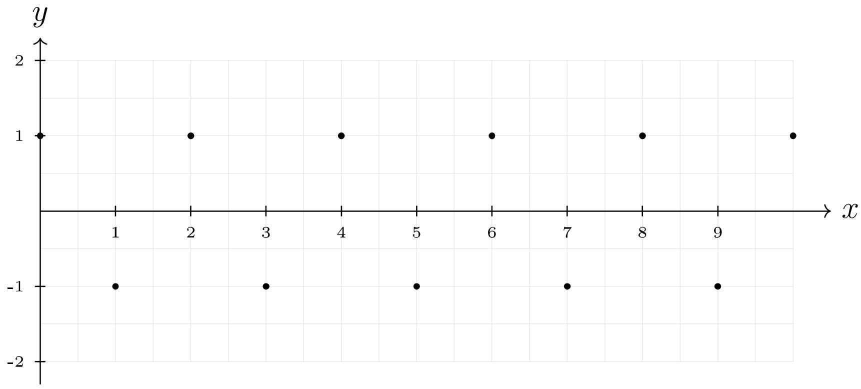
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de l dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

6.5.2 Suite divergente

Définition 6.6

Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.



Définition 6.7

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 6.8

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi petits[a] que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

a. petits ne signifie pas proche de zéro, mais négatifs et grands en valeur absolue !

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

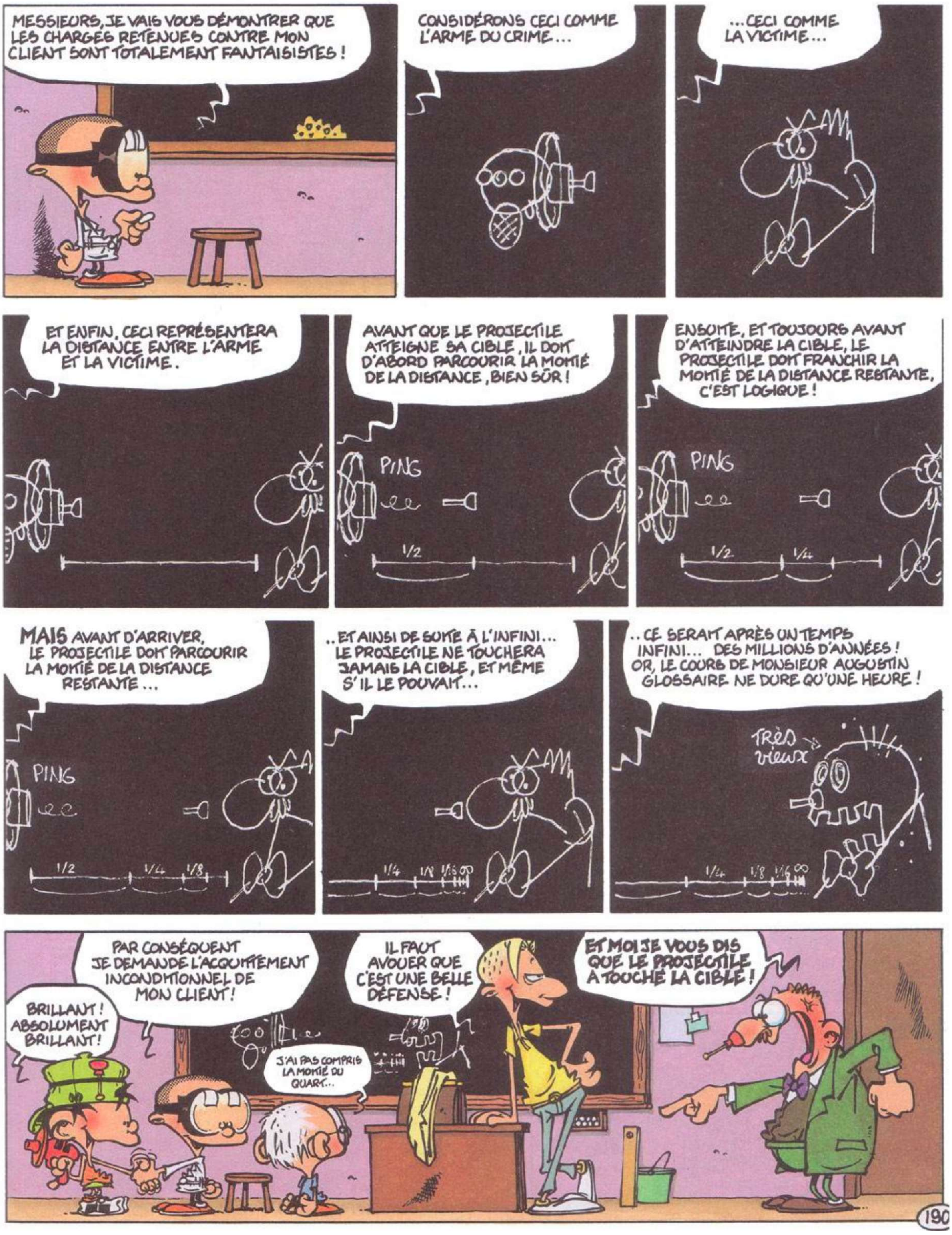
Savoir-Faire 6.14

SAVOIR CONJECTURER UNE LIMITE DE SUITE

Conjecturer, en utilisant la calculatrice, les limites des suites suivantes :

- (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.
- (u_n) la suite définie par $u_n = -n^3$.
- (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{1+n}$.

Paradoxe de Zénon



On supposera dans la suite que le projectile est lancé avec suffisamment de force pour qu'il puisse atteindre sa cible, et que la direction est correcte aussi ; le raisonnement précédent (BD) tient toujours ! ! Il est basé sur le fait que la distance entre le projectile et le prof ne sera jamais nulle.

Et pourtant, en toute logique, le projectile a dû atteindre sa cible, car :

- Observons la tête du prof !

- On l'a dit, le projectile est lancé avec assez de force, et l'élève est supposé adroit pour ne pas rater la tête du prof !

Alors, que se passe-t-il ?
On prendra dans la suite $d = 1$
L'idée est donc de considérer la somme infinie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

Le paradoxe vient de cette idée intuitive -fausse- : "Puisque il faut ajouter une infinité de longueurs, alors la distance ne sera jamais réalisée entièrement ".

Ici, on ajoute une infinité de longueurs qui deviennent infiniment proches de zéro. La question est de savoir si cette somme infinie va (un jour) être égale (exactement) à d (distance initiale)

Supposons pour cela la suite (Il fallait s'y attendre !) $u_)$ tel que u_n représente la longueur parcourue par le projectile à la n-ième étape.
On a donc $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$...etc...

On peut ainsi considérer la somme S_n définie par $S_n = u_1 + u_2 + u_3 ... + u_n$

1. Exprimer S_n en fonction de n
2. Étudier la limite de (S_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. La suite (S_n) est-elle convergente ? divergente ?

On vient de démontrer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 1$! (et c'est bien un "=", pas une valeur approchée ! ! !)

Le projectile va donc bien parcourir la distance initiale, et atteindra bien le pauvre professeur !