

4.3

Compléments de dérivation

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

4.3.1 Dérivée de la composée

Définition

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.

La fonction $v \circ u$ est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Exercice 4.1

On considère la fonction $u : x \mapsto x^2$ et la fonction $v : x \mapsto 2x + 3$, toutes les deux définies sur \mathbb{R} .

Déterminer l'expression de $(v \circ u)(x)$ puis de $(u \circ v)(x)$.

\triangleleft En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

Exercice 4.2

On considère la fonction $u : x \mapsto x^2 + x$ et la fonction $v : x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Sans vous préoccuper des ensemble de définition, déterminer l'expression de $(v \circ u)(x)$ puis de $(u \circ v)(x)$.

Exercice 4.3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Décomposer la fonction f comme composée de deux fonctions.

Propriété (admise)

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.

La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Voici trois propriétés qui sont des conséquences de la propriété précédente :

Propriété

- Soit n un entier positif non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

- Soit n un entier négatif non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et si u ne s'annule pas sur I , alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Propriété

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

Démonstration 4.2

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ dans le cas où n est un entier positif non nul.
2. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. $(e^u)' = u'e^u$

Savoir-Faire 4.13

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION EN UTILISANT LA COMPOSÉE
Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur \mathbb{R} :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$
2. $g(x) = (2x - 1)^4$
3. $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$
4. $k(x) = e^{3x^2+1}$

Exercice 4.4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur \mathbb{R} :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
2. $g(x) = (3x + 1)^3$
3. $h(x) = \frac{1}{(x^4 + 3)^2}$
4. $i(x) = \frac{1}{(e^x + 3)^4}$
5. $j(x) = \sqrt{e^x + 1}$
6. $k(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$
7. $l(x) = 3(1 - x)^3$
8. $m(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}$

4.3.2 Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I . On appelle **dérivée seconde** de f sur I la fonction dérivée de f' , que l'on note f'' .

 **Exercice 4.5**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$. Déterminer la dérivée seconde de la fonction f .