

## 5.4

# Limites et comparaison

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### 5.4.1 Théorèmes de comparaison

#### Propriété Comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de la forme  $]A; +\infty$ , avec  $A$  désignant un réel ou  $-\infty$ .

- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

#### Remarque

La même propriété est valable pour une limite en  $-\infty$  et en un réel  $a$ .

#### Propriété Comparaison

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de la forme  $]A; +\infty$ , avec  $A$  désignant un réel ou  $-\infty$ . Soit  $l$  un réel.

- Si pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $g$  et  $h$  ont même limite  $l$  en  $+\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

#### Remarque

La même propriété est valable pour une limite en  $-\infty$  et en un réel  $a$ . Cette propriété est souvent appelée "théorème des gendarmes"



### Savoir-Faire 5.19

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ AVEC LES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \cos(x)/$

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$   
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

#### Exercice 5.27

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 3\cos(x))$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x))$$

### Exercice 5.28

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 2\sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

## 5.4.2 Croissances comparées

### Propriété

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

## ❖ Démonstration 5.3



### Savoir-Faire 5.20

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE AVEC LA CROISSANCE COMPARÉE  
Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$$

### Exercice 5.29

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x}\right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$$