

5.3

Opération sur les limites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

Remarque

⚠️ Les propriétés suivantes donnent la limite en a de la somme, du produit ou du quotient de f et g , a pouvant désigner un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

5.3.1 Somme

Propriété

| | | | | | | |
|-----------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si f a pour limite | l | l | l | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si g a pour limite | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $f + g$ a pour limite | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

Exercice 5.12

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x}$

5.3.2 Produit

Propriété

| | | | | | | | | | |
|----------------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si f a pour limite | l | $l > 0$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $l < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| Si g a pour limite | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| Alors $f \times g$ a pour limite | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

Exercice 5.13

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$

5.3.3 Quotient

Propriété

| | | | | | | | |
|-----------------------------------|----------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si f a pour limite | l | l | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| Si g a pour limite | $l' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $\pm\infty$ |
| Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite | $\frac{l}{l'}$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

| | | | | | |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----|
| Si f a pour limite | $l > 0$ ou $+\infty$ | $l < 0$ ou $-\infty$ | $l > 0$ ou $+\infty$ | $l < 0$ ou $-\infty$ | 0 |
| Si g a pour limite | 0 avec $g(x) > 0$ | 0 avec $g(x) > 0$ | 0 avec $g(x) < 0$ | 0 avec $g(x) < 0$ | 0 |
| Alors $\frac{f}{g}$ tend vers | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

Exercice 5.14

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2}$

Propriété

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exercice 5.15

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 45x^2 + 4x - 5$

Savoir-Faire 5.15

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE DE FONCTION DANS DES CAS SIMPLES

1. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 - x$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$
3. g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2(\frac{1}{\sqrt{x}} + 5)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. h est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $h(x) = x^2 + 3x + x - 11$. Déterminer les limites à droite et à gauche de h en 1.
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} + 2x + 3$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2 - x)$
7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3)(2 - \frac{1}{x})$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 7x + 1$
9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$



Savoir-Faire 5.16

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉE DE FONCTION EN LEVANT UNE FI

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2+x\sqrt{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{-x+4} \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{3x}{-x+4}$$

Exercice 5.16

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

$$2. f(x) = -x^5 + 10x^4 + x^2 + x$$

$$4. f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

Exercice 5.17

Déterminer les limites en a des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{1}{x-4} + \sqrt{x}, \text{ avec } a = 4$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \text{ avec } a = -1$$

$$2. f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}, \text{ avec } a = 1$$

$$5. f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-2}, \text{ avec } a = 4$$

$$3. f(x) = \frac{5x+2}{x+4}, \text{ avec } a = -4$$

Exercice 5.18

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x + 1$$

$$3. f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x^7 - 5x^4 + x^2 + 2x - 3}$$

$$2. f(x) = \frac{-x^3 + x - 1}{2x + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 2}$$

5.3.4 Composée

Définition

Soit g est une fonction définie sur un intervalle J de \mathbb{R} et f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

On appelle **fonction composée de f par g** ou la composée de f suivie de g :

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

Remarque

- On note $g \circ f$ (on lit "g rond f") la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- L'écriture $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ n'a de sens que si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- De manière générale, $f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 5.19

On considère les fonctions $f(x) = x - 1$ définie sur \mathbb{R} et $g(x) = \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* .

1. Donner l'ensemble de définition de $f \circ g$
2. Donner l'ensemble de définition de $g \circ f$

Propriété Théorème de composition des limites

a, b et l représentent ici des réels ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$

Exercice 5.20

1. On considère la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Déterminer la limite éventuelle de u en $+\infty$.
2. On considère la fonction v définie sur $]14; +\infty[$ par $v(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-5}-3}$. Déterminer la limite éventuelle de v en 14.

↗ (Exigible)

Démontrer que la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ est égale à 0.

✎ Savoir-Faire 5.17

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ DE FONCTION PAR COMPOSITION

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-3x)^4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x)^4$$

Exercice 5.21

Écrire f comme composée de deux fonctions, puis calculer les limites de f , en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$3. f(x) = (5-x)^3$$

$$2. f(x) = e^{1-0.5x}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{(x^4 + x + 1)^4}$$

Exercice 5.22

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}$

Savoir-Faire 5.18**SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.23

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 3 + \frac{xe}{e^x}$
b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$
b) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.24

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (e^{1-0.5x} - 1)^2$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote que l'on précisera.
2. a) Calculer $f'(x)$
b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}
c) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.25

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote d que l'on précisera.
c) Avec la calculatrice, tracer C_f et d et conjecturer la position relative de C_f et d .

- d) Démontrer cette conjecture
- 2. a) Calculer $f'(x)$
- b) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5.26

Soit f la fonction définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

- 1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-3; +\infty[$
- 3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3; +\infty[$.