

1.2

Fonction polynôme du second degré

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

1.2.1 Définitions et vocabulaire

Approche

Un fermier possède un terrain carré. Il désire poser une clôture à 1€ le mètre linéaire et souhaite également amender son terrain avec un engrais qui lui revient à 1€ le mètre carré.

☞ Quel est la taille du terrain sachant qu'il dépense 140 € ?

Définition

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels, avec a non nul.

Vocabulaire

- Les réels a , b et c sont appelés **coefficients** de la fonction f .
- Une fonction polynôme du second degré est aussi appelé fonction **trinôme du second degré**.
- Les solutions (si elles existent) de $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** de $ax^2 + bx + c$

Remarque

Une équation de parabole est donc du type $y = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels, avec a non nul.

Exemples

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 2x - \sqrt{7}$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 2x$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 1$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.

Savoir-Faire 1.3

SAVOIR DÉTERMINER SI UNE FONCTION EST UNE FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Précisez si les fonctions f suivantes sont des fonctions polynômes du second degré ? Si oui, préciser les coefficients.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x - 2)(x + 3)$
2. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - (x - 6)(x + 1)$

3. f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Exercice 1.3

Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré. Précisez les coefficients.

1. $f(x) = -x^2 + 5 - 3x$
 2. $f(x) = x^2 + 1 + 3x^2 + 4x + 5$

3. $f(x) = (x + 1)^2 + 17$
 4. $f(x) = (2x + 1)^2 + (x - 1)^2$

1.2.2 La forme canonique

Vocabulaire

- $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$ est une écriture sous forme factorisée de la fonction f .
- $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ est une écriture sous forme développée de la fonction f .

On cherche à déterminer une autre forme d'écriture, où la variable x n'apparaîtrait qu'une seule fois...

Propriété (admise)

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a non nul, on peut trouver des réels α et β , tels que pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Remarque

Ce n'est pas une formule à connaître par cœur, il faut savoir déterminer la forme canonique sans la formule

Exercices

Parmi les polynômes du second degré suivants, dire ceux qui sont écrits sous la forme canonique.

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| 1. $x^2 + 7x + 1$ | 4. $-5(x + 1)^2 + 2$ | 7. $x(x + 1)^2 + 3$ |
| 2. $(2x + 1)^2 - 4$ | 5. $-3x^2 + x$ | |
| 3. $3(x - 8)^2 + 5$ | 6. $3 + 53x - 5)^2$ | |

Savoir-Faire 1.4

SAVOIR DÉTERMINER LA FORME CANONIQUE D'UNE EXPRESSION DU SECOND DEGRÉ.

1. $x^2 + 4x - 1$
2. $2x^2 - 4x + 6$
3. $-x^2 + 2x + 5$
4. $f(x) = 25x^2 - 150x + 209$
5. $3x^2 - x + 1$

**Exercice 1.4**

Ecrire chaque polynôme suivant sous la forme canonique :

1. $x^2 + 6x - 10$

2. $3x^2 + 12x + 2$

3. $-2x^2 + 8x - 12$

4. $-x^2 + 6x - 1$

Exercice 1.5

Ecrire chaque polynôme suivant sous la forme canonique :

1. $6x^2 + 12x - 5$

2. $-2x^2 + 8x + 5$

3. $-5x^2 + 10x - 3$

4. $3x^2 - x + 6$