

# 7.3

## Application à l'étude de suites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### 7.3.1 Propriété

#### Propriété

Soit une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et soit une suite  $(u_n)$  une suite d'élément de  $I$  convergeant vers  $a \in I$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a)$ .

Autrement dit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right)$ .

#### Exercice 7.11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)^2$  et soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ .

1. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ .

### 7.3.2 Propriété du point fixe

#### Propriété - Théorème du point fixe

Soit une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme et  $u_{n+1} = f(u_n)$  convergente vers  $l$ .

Si la fonction  $f$  est continue en  $l$  alors la limite  $l$  de la suite est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

#### Exercice 7.12

On considère la suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 0,1$  et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x(1-x)$ .

On admet que  $(u_n)$  est croissante et convergente vers  $l$ . Déterminer  $l$ .

### Savoir-Faire 7.29

#### SAVOIR ÉTUDIER UNE SUITE DÉFINIE PAR $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 8$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0.65u_n + 1.8$ .

1. Dans un repère orthonormé, on considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 0,65x+1,8$ .
  - a) Tracer les droites d'équations respectives  $y = 0,65x + 1,8$  et  $y = x$ .
  - b) Dans ce repère, placer  $u_0$  sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . On laissera apparent les traits de construction.
  - c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .

2. En supposant que la suite  $(u_n)$  est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question précédente.

### Méthode :

Pour utiliser le théorème du point fixe, plusieurs conditions doivent être réalisées :

- La suite  $(u_n)$  doit converger vers un réel  $l$
- La suite  $(u_n)$  doit vérifier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$
- La fonction  $f$  doit être continue sur un intervalle  $I$  contenant  $l$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

### Exercice 7.13

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-6; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{6+x}$ .

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est une suite croissante et majorée par 3
2. Que peut-on dire de la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 7.14

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2}{5} \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de  $f$
3. Résoudre l'équation  $f(x) = x$
4. Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est décroissante
5. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 7.15

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 3 - \frac{u_n + 1}{e^{u_n}} \end{cases}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$
3. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ .
4. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près, en utilisant une méthode par balayage.
5. Montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $\alpha$ .
6. Justifier que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.