

8.1

Définition de la fonction logarithme népérien

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, quel que soit le réel k strictement positif, l'équation $e^x = k$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} .

Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de k l'unique solution de l'équation $e^x = k$. Ce nombre est noté $\ln(k)$.

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe le nombre $\ln(x)$.

Conséquence

Ainsi, $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$.

Ainsi, notamment :

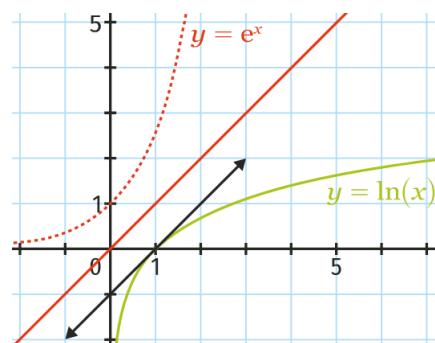
- $\ln(1) = \dots$ car $e^0 = 1$
- $\ln(e) = \dots$ car $e^1 = e$

Remarque

⚠ Python utilise la notation `log` pour le logarithme népérien.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction \ln est symétrique à la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$



Propriété

La fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x \in]0; +\infty[$,
 $f'(x) = \frac{1}{x}$.



Exercice 8.1

Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.

Propriété

1. La fonction \ln est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
3. $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln(x)} = x$.
4. $\forall a \in]0; +\infty[, \forall b \in]0; +\infty[, a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$
5. $\forall a \in]0; +\infty[, \forall b \in]0; +\infty[, a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

Démonstration 9(Exigible) :

\triangle les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.

CALCUL DE LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Soit f la fonction logarithme népérien.

On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on note f' sa dérivée.

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = x$, et en déduire $g'(x)$.
2. En utilisant $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, donner une autre expression de $g'(x)$.
3. Conclure

Savoir-Faire 8.1

SAVOIR RÉSOUTRE DES ÉQUATIONS OU INÉQUATION AVEC DES LOGARITHMES

Déterminer les conditions d'existence des équations suivantes, puis les résoudre dans \mathbb{R} :

1. Un premier exemple corrigé, avec $\ln(2x + 3) = \ln(x)$

Solution possible :

$$\begin{aligned} \ln(x) \text{ et } \ln(2x + 3) \text{ existent si et ssi } x > 0 \text{ et } 2x + 3 > 0 \\ \text{si et ssi } x > 0 \text{ et } x > -\frac{3}{2} \\ \text{si et ssi } x > 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \ln(x) = \ln(2x + 3) &\Leftrightarrow x = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Comme $-3 \notin]0; +\infty[$, l'équation n'admet pas de solution et $S = \emptyset$

2. $2\ln(x) + 1 = 7$ 4. $5\ln(x) < 10$ 6. $e^{x-3} > 5$
 3. $3e^x + 3 = 9$ 5. $5 - 2\ln(x) \geq 1$

Exercice 8.2

Déterminer les conditions d'existence des équations, puis les résoudre dans \mathbb{R} :

1. $\ln(5x + 1) = \ln(x)$ 3. $3e^{2x+3} = e$
 2. $2\ln(x) + 2 = 5$ 4. $4 - 2e^{x-4} > 0$

Exercice 8.3

On considère les équations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette équation, et la résoudre ensuite dans \mathbb{R} :

1. $\ln(x^2 - 49) = 0$ 3. $e^{\frac{x}{x+2}} = 3$
 2. $\ln(2x^2 - 7x + 6) = \ln(10)$ 4. $\ln(e^{2x} + 1) = 1$

Exercice 8.4

On considère les inéquations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette inéquation, et la résoudre ensuite dans \mathbb{R} :

1. $\ln(x - 3) > 1$ 4. $e^{x^2-1} \leq -1$
 2. $e^{2-x} \leq 3$ 5. $e^{x^2-1} > 2$
 3. $\ln(4x^2 - x) \leq \ln(3x)$

Exercice 8.5

On considère les équations ou inéquations suivantes. Résoudre chacune d'elles dans \mathbb{R} en posant un changement de variable :

1. $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 3$ en posant $X = \ln(x)$ 3. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) = 15$
 2. $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$ en posant $X = e^{2x}$ 4. $e^{2x} - 2e^x - 15 < 0$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $\forall x \in I, u(x) > 0$.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Autrement dit, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Savoir-Faire 8.2

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION AVEC LOGARITHMES

- Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-2}\right)$.
 - Quel est l'ensemble de définition de f ?

- b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.6

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - \ln(x)$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$.
 - a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
 - b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.7

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1; 11]$ par $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 15\ln(x)$
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x(e^x - 1)$.

Exercice 8.8

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty]$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty]$
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x)$.
 - a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - b) En déduire les variations de f

Exercice 8.9

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^3 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer l'équation réduite de T_1 , tangente à C_f en 1.
3. Étudier la position relative de C_f et de T_1 .