

# 15.2

## Échantillon d'une loi de probabilité

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### 15.2.1 Définition

#### Définition Échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un ensemble  $\Omega$ . Un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$  est une liste  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

#### Définition

- La variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$  est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille  $n$  par  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .
- La variable aléatoire moyenne est la variable aléatoire définie par  $M_n = \frac{1}{n} S_n$ .

#### Exemple

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe sa masse en grammes. On note  $X_i$  la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3 paquets de chips, associe la masse en gramme du  $i$ -ème paquet.

Les variables aléatoires  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes et suivent la même loi que  $X$  donc  $(X_1, X_2, X_3)$  est un échantillon de taille 3 de la loi de  $X$ .

Aussi,  $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$  associe à chaque lot sa masse en grammes. La variable aléatoire moyenne  $M_3 = \frac{S_3}{3}$  associe à chaque lot de 3 paquets la masse moyenne d'un paquet.

### 15.2.2 Espérance, variance et écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

#### Propriété

Soit  $S_n$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

#### Propriété

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$

$$\bullet \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

### Remarque

$V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$  montrer que la variance diminue quand la taille de l'échantillon augmente. Elle qualifie la fluctuation d'échantillonnage. Plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance est proche de 0.

### 15.2.3 Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

#### Propriété

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . On a alors :

1.  $E(X) = np$
2.  $V(X) = np(1 - p)$
3.  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

#### Démonstration 23- - Exigible - -

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Montrer que  $E(X) = np$  et que  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

#### ☞ Savoir-Faire 15.71

##### SAVOIR UTILISER LA PROPRIÉTÉ PRÉCÉDENTE

Une étude faite dans un restaurant montre que 85 % des clients consomment un dessert. On interroge dix clients du restaurant. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de clients commandant un dessert parmi ceux interrogés.

1. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire  $X$ .
2. Calculer la variance et l'écart type (arrondi au millième) de la variable aléatoire  $X$ .

#### ♥ Méthode :

- Avant d'appliquer les résultats obtenus dans la propriété, il est tout d'abord essentiel de bien justifier que la variable aléatoire étudiée suit une loi binomiale :
  - Répétition d'une expérience ayant deux issues (succès et échec)
  - Expériences identiques
  - Expériences indépendantes
  - $X$  compte le nombre de succès
- C'est seulement après avoir justifié que  $X$  suit une loi binomiale que nous pouvons utiliser les égalités de la propriété.

## Savoir-Faire 15.72

SAVOIR UTILISER LA SOMME ET LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON DE TAILLE  $n$

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en charge par le standardiste.

La variable aléatoire  $T$  associe à tout client son temps d'attente. On sait que  $E(T) = 18$  et  $\sigma(T) = 7$ . On estime que la probabilité qu'un client attende plus de 20 secondes est égale à 0.4.

1. Au cours de la même semaine, un même client passe 5 appels indépendants les uns des autres. On note  $X$  la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours des 5 appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer  $E(X)$  et  $\sigma(X)$ .
2. Dans le but de diminuer l'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit  $Y$  la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen pour cet échantillon. Déterminer  $E(Y)$  et  $\sigma(Y)$ .

## 15.3

### La loi des grands nombres

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

#### 15.3.1 L'inégalité de Markov

##### Propriété - inégalité de Bienaymé-Tchebychev -

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $E(X)$  et de variance  $V(X)$ .

Alors, pour tout réel  $a$  strictement positif,  $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$ . Cette inégalité est appelée l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.

##### Remarque

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale. En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

## Savoir-Faire 15.73

SAVOIR UTILISER L'INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de 2,5, avec une variance de 1,1.

Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.

##### Méthode :

- Définir une variable aléatoire correspondant à l'énoncé.
- Traduire les inégalités de l'énoncé sous forme d'écart par rapport à la moyenne.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour conclure.