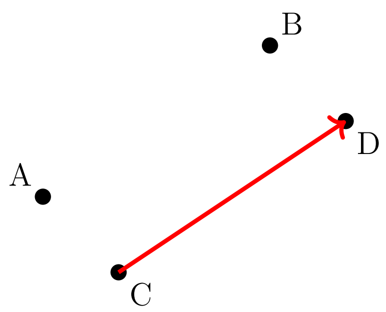
Chapitre 3: Les vecteurs

1 Définition d'un vecteur

1.1 Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Sur la figure ci-contre, on considère D, l'image de C dans la translation qui transforme A en B.



La flèche rouge indique :

- La direction
- Le sens
- La longueur

du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition 3.1

La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$

Remarque

La longueur d'un vecteur est appelé **norme** du vecteur.

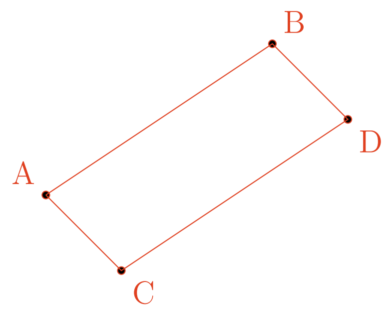
1.2 Egalité de deux vecteurs

Définition 3.2

Soient A,B,C et D quatre points du plan.
Dire que $\overrightarrow{AB}$ est égal à $\overrightarrow{CD}$ signifie que les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme.

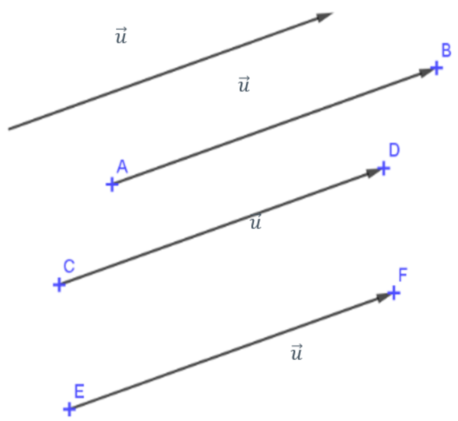
Propriété 3.1

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



1.3 Notation

Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Par exemple, sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$.
$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants de $\vec{u}$**



1.4 Le vecteur nul

Définition 3.3

On appelle vecteur nul, noté $\vec{u}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues

Par exemple, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

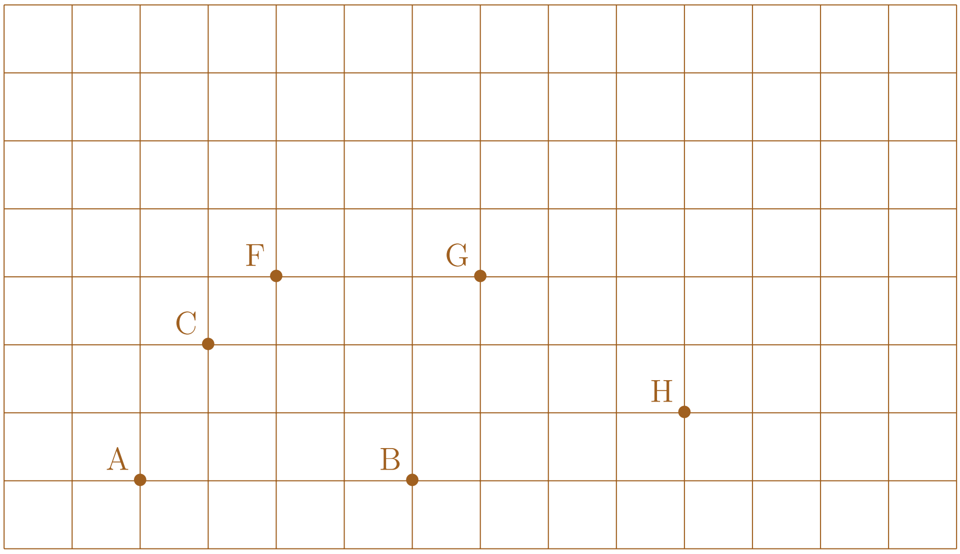
Remarque

Le vacteur nulle à une norme égale à 0, mais n'a ni direction, ni sens !

Savoir-Faire 3.1

Savoir représenter un vecteur

Recopier la figure ci-dessous :



1. Construire un vecteur $\vec{u}$, ayant la même direction et le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur 3.
2. Construire le point P tel que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BC}$.
3. Construire le point Q tel que $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{BH}$
4. Construire un vecteur $\vec{v}$, ayant la même direction que $\overrightarrow{BC}$, un sens contraire à $\overrightarrow{BC}$, et pour longueur identique à $\overrightarrow{BC}$.
5. Construire le point R tel que $\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{GH}$
6. Construire le point T tel que $\overrightarrow{BT} = \vec{0}$

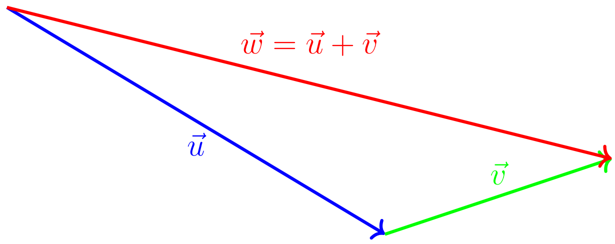
2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme de deux vecteurs

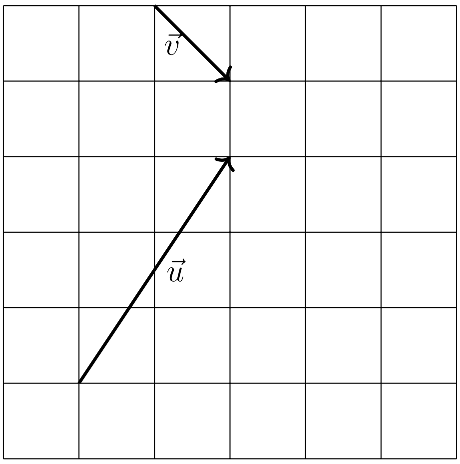
2.1.1 Définition

Définition 3.4

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$.
On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

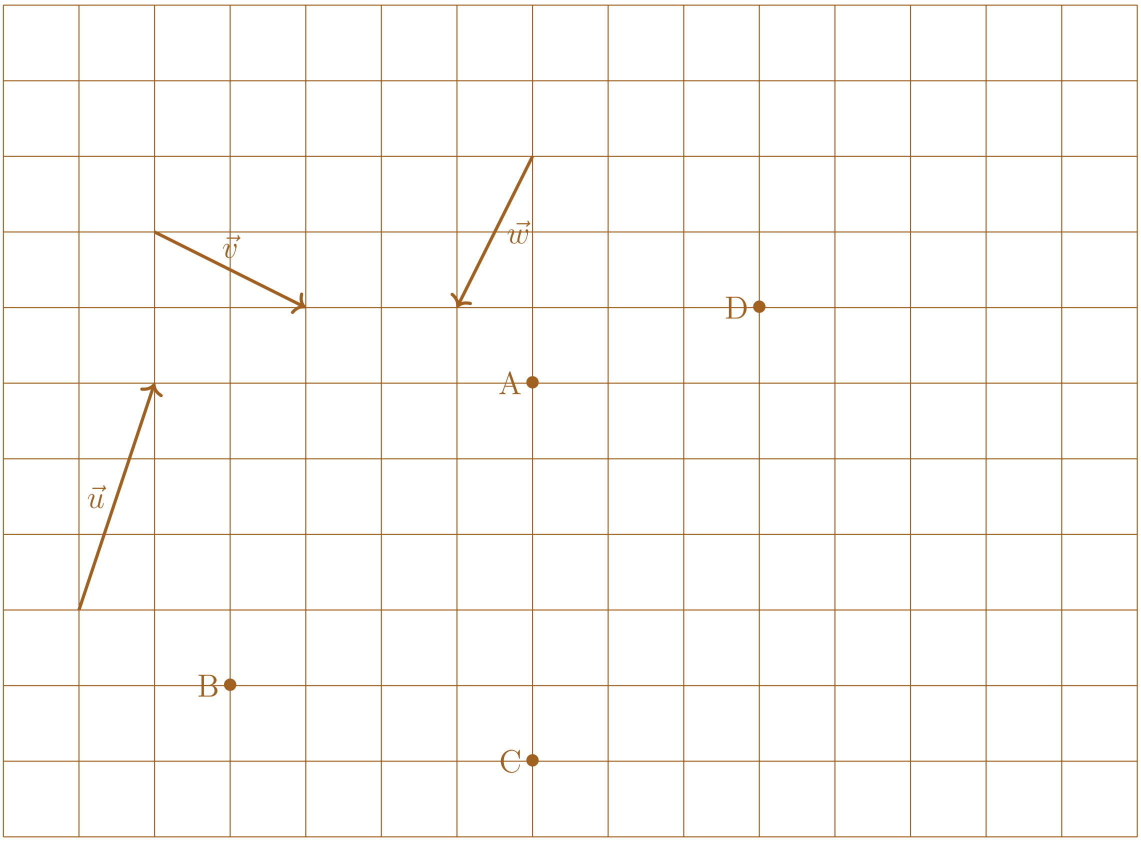


Exemple



Savoir-Faire 3.2

Savoir représenter la somme de deux vecteurs



1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w}$
4. Placer le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
5. Placer le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \vec{v} + \vec{w}$

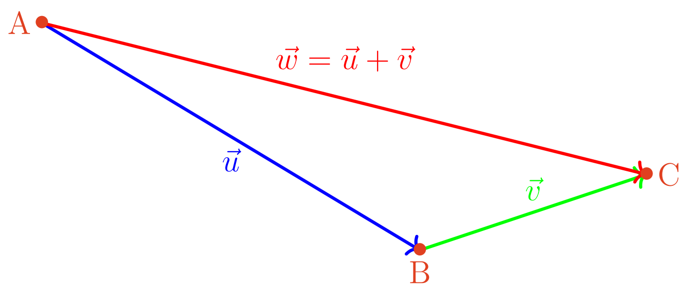
2.1.2 Relation de Chasles

Propriété 3.2 (admise)

RELATION DE CHASLES

Pour tous points A,B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



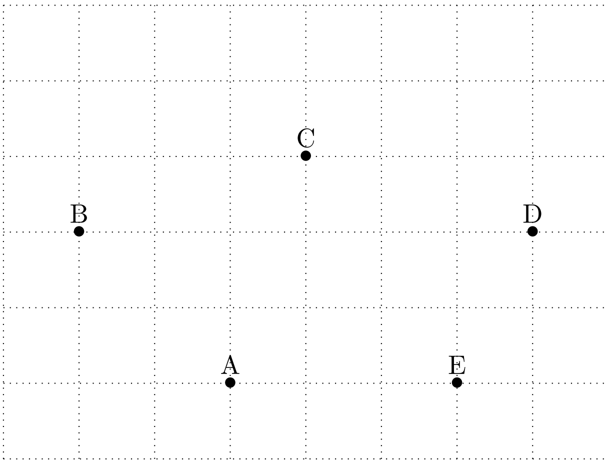
Savoir-Faire 3.3

SAVOIR UTILISER LA RELATION DE CHASLES

1. Compléter :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{\quad\quad}$
   (b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{\quad G} = \overrightarrow{\quad\quad}$
   (c) $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{\quad\quad} = \overrightarrow{FB}$
   (d) $\overrightarrow{\quad R} + \overrightarrow{\quad T} = \overrightarrow{B\quad}$
   (e) $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{\quad I} = \overrightarrow{RI}$
   (f) $\overrightarrow{K\quad} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$
2. Simplifier :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA}$
   (c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{GD}$
   (d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
   (e) $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{GH}$

Exercice 3.1

Reproduire la figure ci-dessous :



1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$, puis un représenant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$. (utilser des couleurs). Que constate-t-on ?
2. Le démontrer à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 3.2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Exercice 3.3

Soit RST un triangle.

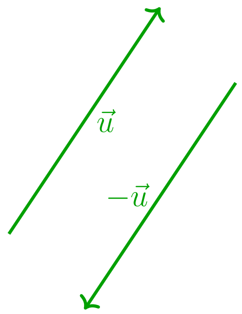
1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$
2. Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$. Penser à la relation de Chasles !

2.2 Opposé d'un vecteur

Définition 3.5

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ du plan est le vecteur noté -$\vec{u}$, qui a :

- même direction que $\vec{u}$.
- même norme que $\vec{u}$.
- le sens opposé à celui de $\vec{u}$.

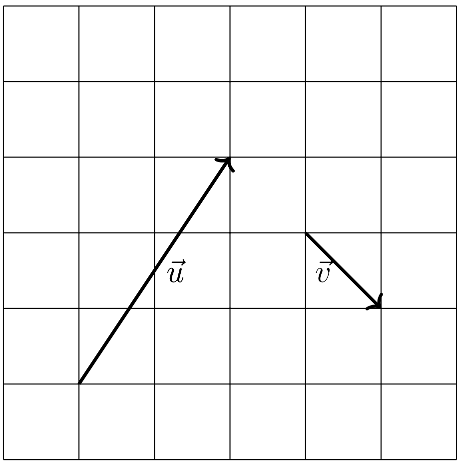


2.2.1 Soustraction de deux vecteurs

Définition 3.6

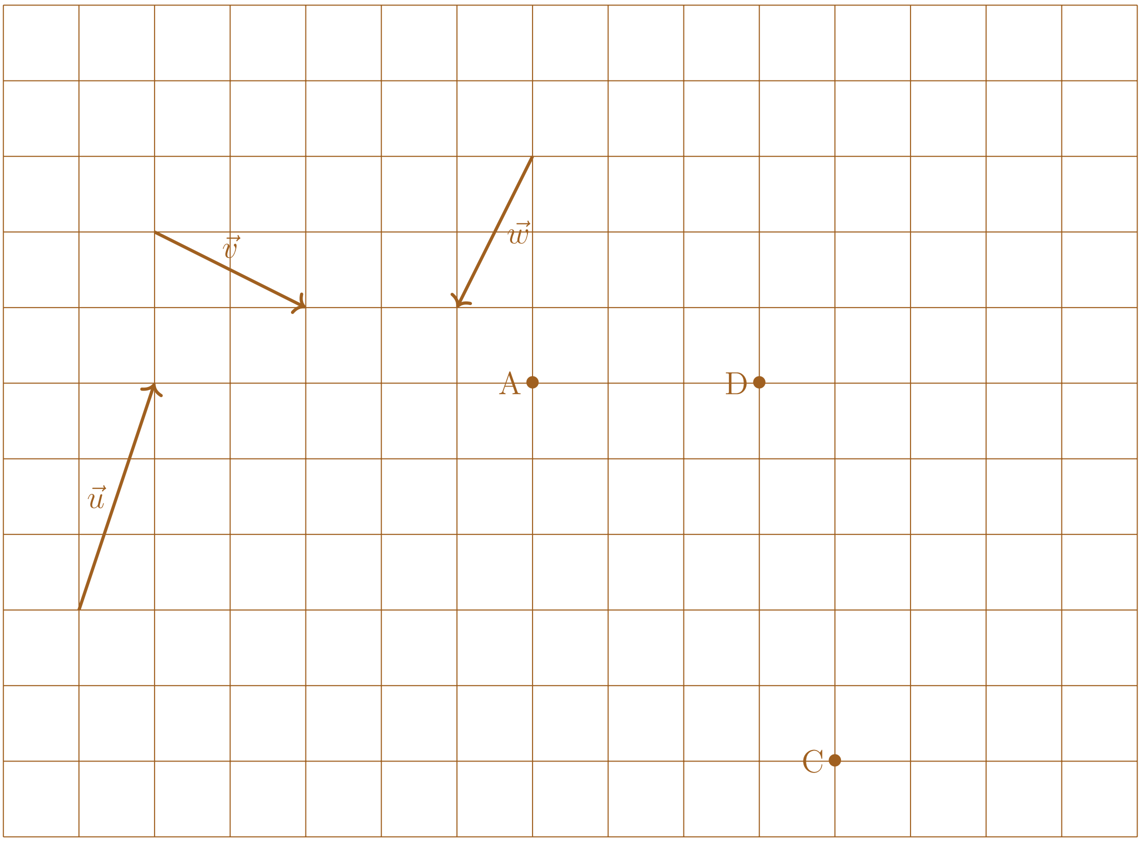
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit la soustraction de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, notée $\vec{u}$ -$\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{u} +$ (-$\vec{v}$).

Exemple



Savoir-Faire 3.4

Savoir représenter la différence de deux vecteurs



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{v} - \vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{u} - \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \vec{u} - \vec{w}$

2.3 Produit d'un vecteur par un nombre