15.1 Opération sur les variables aléatoires

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ et soit Soit Y une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega' = \{e'_1; e'_2; ...; e'_n\}$

- Soir $a \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire $Z = aX$ est la variable aléatoire qui à chaque issue e_i de Ω associe le réel $a \times x_i$, avec $P(Z = ax_i) = P(X = x_i)$.
- La variable aléatoire $S = X + Y$ est la variable aléatoire qui à chaque issue e_i et e_j de $\Omega \times \Omega'$ associe le réel $x_i + y_j$, avec $P(S = s_k)$ égale à la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i$ et $Y = y_i)$ telle que $x_i + y_j = s_k$.

Remarque

On définit de même la somme de n variables aléatoires...

Propriété

Deux variables aléatoires sont indépendantes si, quelles que soient les valeurs de x_i et y_j, $P(X = x_i \texttt{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

15.1.1 Propriétés sur les variables aléatoires

Propriété

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire. Alors on a :
  - $E(aX) = aE(X)$ (linéarité de l'espérance)
  - $V(aX) = a^2V(X)$
  - $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$
- Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors on a :
  - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (linéarité de l'espérance)
  - Uniquement si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Savoir-Faire 15.68

SAVOIR CRÉER LA LOI DE PROBABILITÉ DE LA MULTIPLICATION D'UNE VA PAR UN NOMBRE RÉEL, ET EN DÉDUIRE SON ESPÉRANCE ET SON ÉCART-TYPE

Une usine fabrique des machines.

Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant ce mois. Une étude statistique donne la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0.04	0.08	0.12	0.28	0.25	0.17	0.06

1. Calculer $E(X)$.
2. La vente d'une machine rapporte 8000 euros. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z qui associe, pour un mois au hasard, le résultat en euros de l'usine.
3. Calculer $E(Z)$ et interpréter ce résultat.

Savoir-Faire 15.69

Savoir créer la loi de probabilité d'une somme de deux VA, et en déduire son espérance et son écart-type

Une urne contient trois jetons rouges marqués "O" et deux jetons bleus marqués "1". On tire au hasard et sans remise deux jetons de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré. Soit Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, puis de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S définie par $S = X + Y$.
4. Calculer $E(S)$.

Exercice 15.3
On lance deux dés équilibrés A et B, à six faces.
Soit X la variable aléatoire égale à chaque lancer du dé A :

- La valeur du dé A s'il est inférieur à 4
- 0 sinon

Soit Y la variable aléatoire égale à chaque lancer du dé B :

- O si le dé B est un multiple de 3
- 1 si le dé B tombe sur "5"
- 2 sinon

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$

Exercice 15.4
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X et Y suivent les lois de Bernoulli de paramètres respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.
On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1. Calculer $P(Z = 1)$
2. Déterminer la loi de probabilité de Z
3. Calculer $P_{z=1}(X = 1)$ et $P_{x+1}(Z = 2)$.

15.1.2 Échantillon d'une loi de probabilité

Définition Echantillon de taille n d'une loi de proba

Définition

15.1.3 Espérance,variance et écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

Propriété

Propriété

15.1.4 Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. On a alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration 23- - Exigible - -

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. Montrer que $E(X) = np$ et que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Savoir-Faire 15.70

SAVOIR UTILISER LA PROPRIÉTÉ PRÉCÉDENTE

Une étude faite dans un restaurant montre que 85 % des clients consomment un dessert. On interroge dix clients du restaurant. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients commandant un dessert parmi ceux interrogés.

1. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire X.
2. Calculer la variance et l'écart type (arrondi au millième) de la variable aléatoire X.

Méthode :

- Avant d'appliquer les résultats obtenus dans la propriété, il est tout d'abord essentiel de bien justifier que la variable aléatoire étudiée suit une loi binomiale :
  - **Répétition** d'une expérience ayant **deux** issues (succès et échec)
  - Expériences **identiques**
  - Expériences **indépendantes**
  - X **compte le nombre de succès**
- C'est seulement après avoir justifié que X suit une loi binomiale que nous pouvons utiliser les égalités de la propriété.