

Chapitre 4 : Nombre dérivé

1 Nombre dérivé

1.1 Taux de variation



Approche

Cf. doc

Définition 4.1

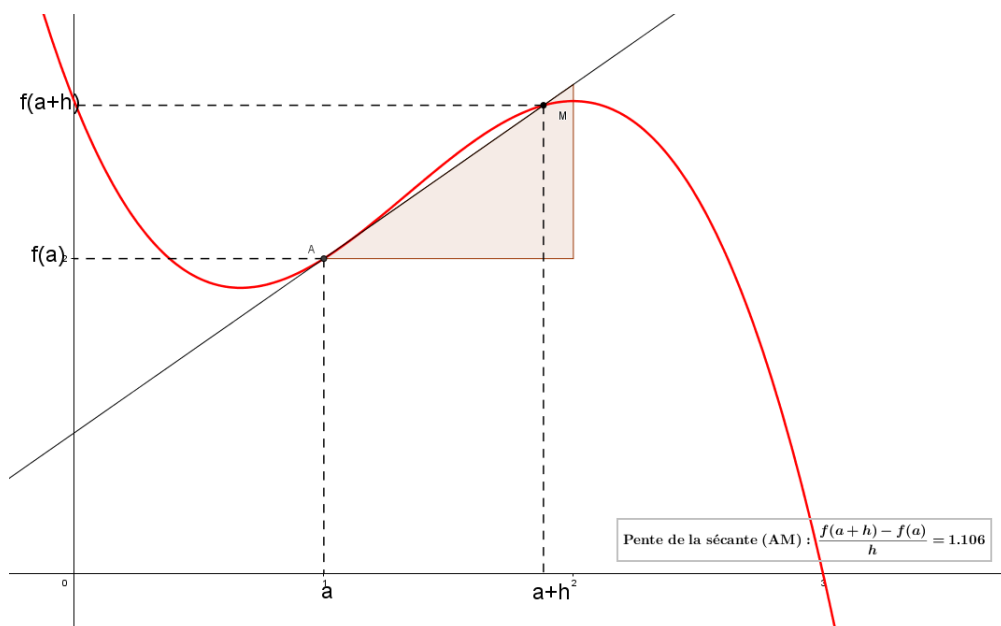
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le réel $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Remarque

Avec les notations et le contexte précédents, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) avec $A(a; f(a))$ et $M(a + h; f(a + h))$. Vous pouvez le visualiser sur la figure dynamique [géogébra](#).



Interprétation graphique du taux de variation

1.2 Nombre dérivé



Approche

I Cf. doc

Définition 4.2

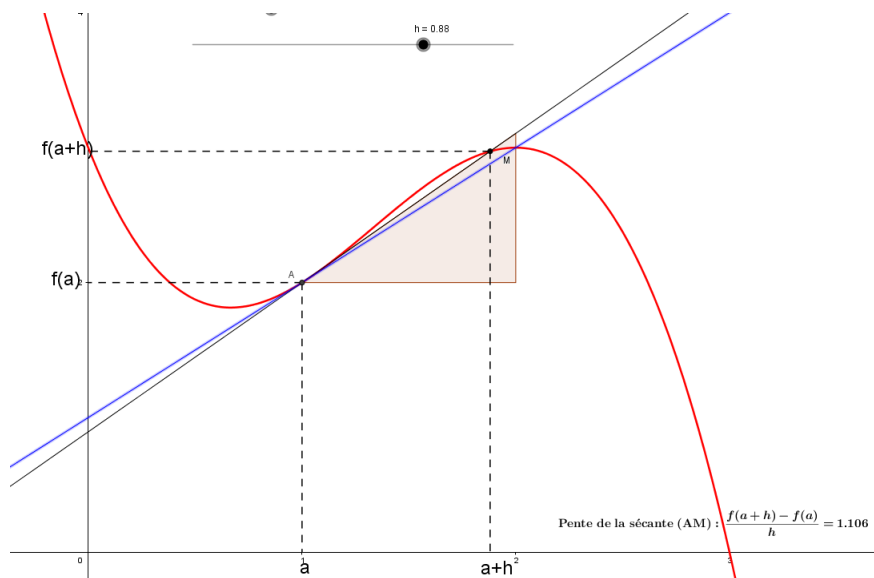
Avec les mêmes notations.

Si, lorsque h tend vers 0, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel l , on dit que la fonction f est dérivable en a .

Le réel l est appelé nombre dérivé de la fonction f en a , et on note $f'(a) = l$.

Remarque

Graphiquement, si la fonction f est dérivable en a , cela signifie que le coefficient directeur de la sécante (AM) tend vers un réel lorsque M se rapproche de A . En d'autres termes, cela signifie que la droite (AM) se "rapproche" d'une droite imaginaire, d'une "position limite". Dans l'activité **géogebra**, la sécante (AM) va se rapprocher de la droite bleue.



Interprétation graphique du nombre dérivé



Savoir-Faire 4.1

SAVOIR DÉTERMINER SI UNE FONCTION EST DÉRIVABLE ET SAVOIR CALCULER LE CAS ÉCHÉANT SON NOMBRE DÉRIVÉ

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer si la fonction f est dérivable en a . Si oui, déterminer son nombre dérivé $f'(a)$



Exercice 4.1

Pour chacune des fonctions f , déterminer si la fonction f est dérivable en a . Si oui, déterminer son nombre dérivé $f'(a)$

1. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = 2x + 5$, $D_f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$
6. $f(x) = x^4$, $D_f = \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$

2 Tangente à une courbe

2.1 Définition d'une tangente

Définition 4.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in \mathbb{R}$

On suppose de plus que la fonction f est dérivable en a .

La tangente à la courbe C_f est la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.



Savoir-Faire 4.2

| SAVOIR CONSTRUIRE DES TANGENTES À UNE COURBE



Savoir-Faire 4.3

| SAVOIR DÉTERMINER GRAPHIQUEMENT UN NOMBRE DÉRIVÉ

2.2 Equation d'une tangente à une courbe

Propriété 4.1

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et soit C_f sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $a \in D_f$. On suppose que f est dérivable en a .

Une équation de la tangente à C_f en a est :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Savoir-Faire 4.4

| SAVOIR DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE TANGENTE À UNE COURBE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Déterminer les équations des tangentes T_2, T_{-2} et T_1 .



Exercice 4.2

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Donner une équation de la tangente à C_f en 4, notée T_4 .

3 Nombre dérivé de fonctions usuelles

✚ Démonstration 4.1

⌘ Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction carré est dérivable en a . Donner son nombre dérivé.

✚ Démonstration 4.2

⌘ Soit a un nombre réel non nul. Montrer que la fonction inverse est dérivable en a . Donner son nombre dérivé.

✚ Démonstration 4.3

⌘ Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Propriété 4.2

Fonction usuelle	Ensemble de définition	$a \in \dots$	nombre dérivé
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = m$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 2a$
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 3a^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$a \in \mathbb{R}^*$	$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$
$f(x) = x^4$	\mathbb{R}	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a) = 4a^3$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$a \in]0; +\infty[$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

● Exercice 4.3

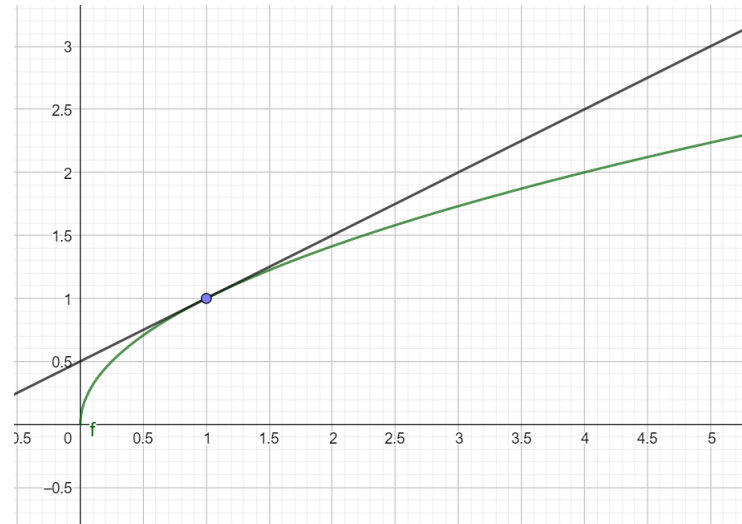
Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = x^3$.

Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Rappeler $f'(a)$ et en déduire $f'(-1)$.
2. Tracer la tangente à C_f en -1, notée T_{-1} .
3. Existe-t-il une autre tangente à C_f parallèle à T_{-1} ? Si oui, la tracer ensuite.
4. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 12x + 1$? Si oui, la tracer. Déterminer ensuite le point d'intersection entre cette tangente et la courbe C_f .
5. Existe-t-il une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

● Exercice 4.4

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



1. Lire le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Retrouver ce résultat par le calcul
3. Donner une équation de T_1 , tangente à C_f en 1.
4. La courbe C_f admet-elle une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 5$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre la courbe et la tangente.