0.1 Les fonctions

Maths Spé terminale - JB Duthoit

0.1.1 Nombre dérivé

Taux de variation

Définition

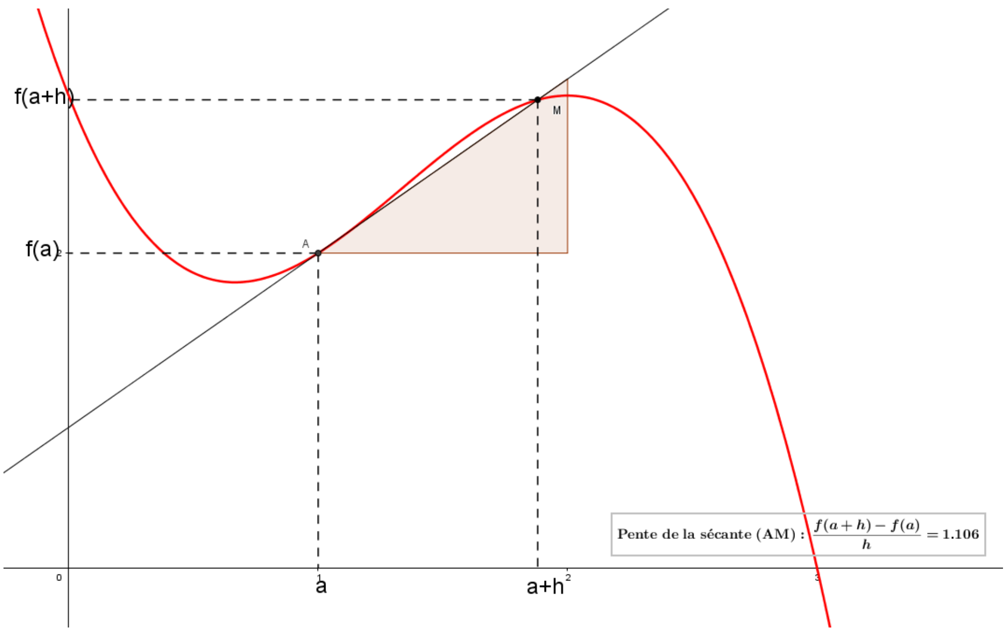
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

Le **taux de variation de f entre a et $a+h$** est le réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque

Avec les notations et le contexte précédents, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) avec $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$. Vous pouvez le visualiser sur la figure dynamique géogébra.



Interprétation graphique du taux de variation

Nombre dérivé

Définition

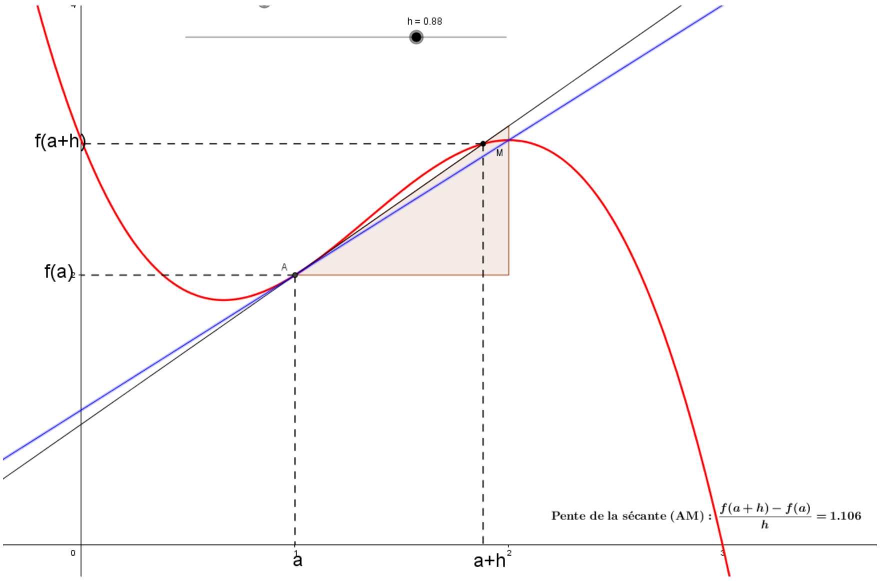
Avec les mêmes notations.

Si, lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel l, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Le réel l est appelé **nombre dérivé de la fonction f en a**, et on note $f'(a) = l$.

Remarque

Graphiquement, si la fonction f est dérivable en a, cela signifie que le coefficient directeur de la sécante (AM) tend vers un réel lorsque M se rapproche de A. En d'autres termes, cela signifie que la droite (AM) se "rapproche" d'une droite imaginaire, d'une "position limite". Dans l'activité géogébra, la sécante (AM) va se rapprocher de la droite bleue.



Interprétation graphique du nombre dérivé

Tangente à une courbe

Définition d'une tangente

Définition

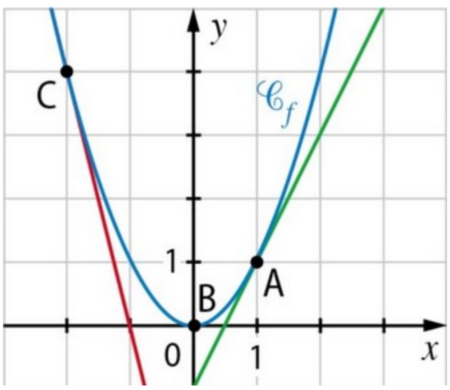
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$

On suppose de plus que la fonction f est dérivable en a.

La **tangente à la courbe C_f en a** est <u>la</u> droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exercice 0.1

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 3 de ses tangentes aux points A,B et C.
Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(-2)$ et $f'(1)$.

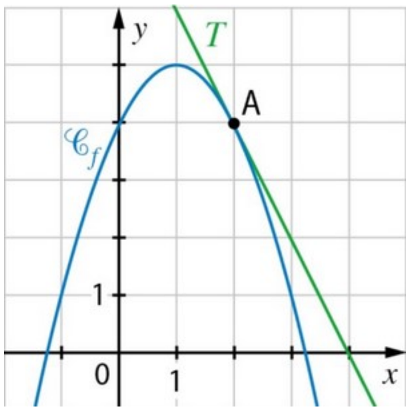


Exercice 0.2

Savoir déterminer graphiquement un nombre dérivé ☛ SF en ligne !

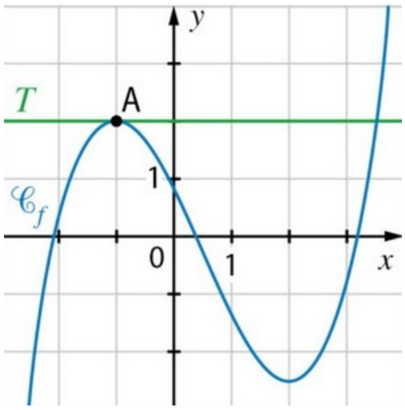
Exercice 0.3

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A.
Par lecture graphique, déterminer $f'(2)$ et $f(2)$.



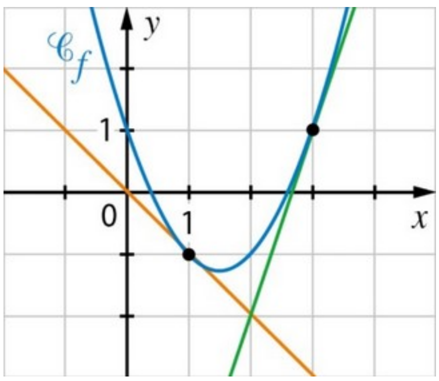
Exercice 0.4

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A.
Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f(-1)$.



Exercice 0.5

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes aux points d'abscisse 1 et 3.
Par lecture graphique, déterminer $f(1)$, $f'(1)$, $f(3)$ et $f'(3)$.



Équation d'une tangente à une courbe

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soit $a \in D_f$. On suppose que f est dérivable en a.
Une équation de la tangente à C_f en a est :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Exercice 0.6
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Donner une équation de la tangente à C_f en 4, notée T_4.

Exercice 0.7
Savoir déterminer une équation de tangente à une courbe
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
Déterminer les équations suivantes :

1. Équation de de la tangente à C_f en 2, notée T_2
2. Équation de de la tangente à C_f en -2, notée T_{-2}
3. Équation de de la tangente à C_f en a, avec $a \in \mathbb{R}$, notée T_a

0.1.2 Nombre dérivé de fonctions usuelles

Propriété

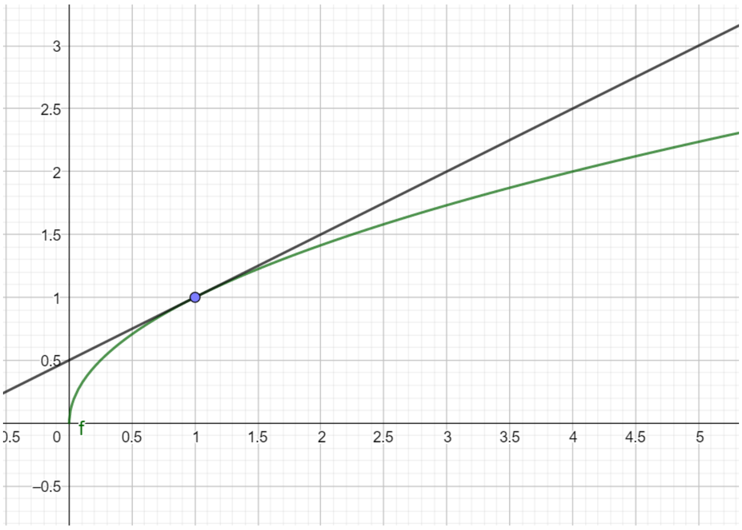
Fonction usuelle	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité : $a \in$...	nombre dérivé
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a)=m$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a)=2a$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a)=3a^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$a \in \mathbb{R}^*$	$f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$
$f(x)=x^4$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$f'(a)=4a^3$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$a \in]0;+\infty[$	$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Exercice 0.8
Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=x^3$.
Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Rappeler $f'(a)$ et en déduire $f'(-1)$.
2. Tracer la tangente à C_f en -1, notée T_{-1}.
3. Existe-t-il une autre tangente à C_f parallèle à T_{-1} ? Si oui, la tracer ensuite.
4. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y=12x+1$?.
5. Existe-t-il une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 0.9

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On considère la courbe représentative de f, notée C_f et tracée en vert. On considère également la tangente à C_f en 1, tracée en noir.



1. Lire le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Retrouver ce résultat par le calcul
3. Donner une équation de T_1, tangente à C_f en 1.
4. La courbe C_f admet-elle une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 5$? Si oui, en quel(s) point(s) ?
5. La courbe C_f admet-elle une tangente à C_f parallèle à l'axe des abscisses ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

0.1.3 Fonctions dérivées

Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout réel a de I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de f sur I**. On la note f'.

Fonctions dérivées des fonctions de référence

Propriété

Fonction usuelle	Ensemble de définition	Ensemble de **dérivabilité**	**fonction dérivée**
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = x^4$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les fonctions dérivées

Dérivée de (u+v)

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

Dérivée de (u-v)

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u - v)$ est dérivable sur I et $(u - v)' = u' - v'$.

Dérivée de (ku)

Propriété (admise)

Soient u une fonctions définie et dérivable sur un intervalle I, et soit $k \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et $(ku)' = k \times u'$.

Dérivée de (uv)

Propriété

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Dérivée de $\frac{1}{v}$

Propriété (admise)

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, avec pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Dérivée de $\frac{u}{v}$

Propriété (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 0.10

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -3x^2 + 10x$, $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = (x^2 + 1) \times x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
4. $f(x) = (2x^2 + x - 1)(x^2 + 3)$, $D_f =]-\infty; +\infty[$
5. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
8. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 0.11

Savoir calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 5x + 7$, $D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = (x^2 + 3x)(x^3 - 3x^2 + 7)$, $D_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = x\sqrt{x}$, $D_f =]0; +\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+9}$, $D_f = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{17}{2x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

Exercice 0.12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 1$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en 1.

Tableau récapitulatif

Propriété

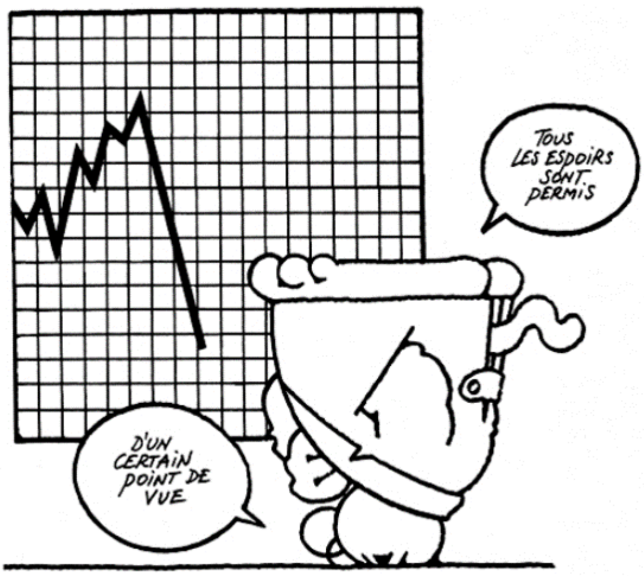
$(u+v)' = u' + v'$
$(\lambda u)' = \lambda u'$
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$\left(\dfrac{1}{u^2}\right)' = \dfrac{-2u'}{u^3}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$
$(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)$

0.1.4 Lien entre les variations de f et le signe de f'

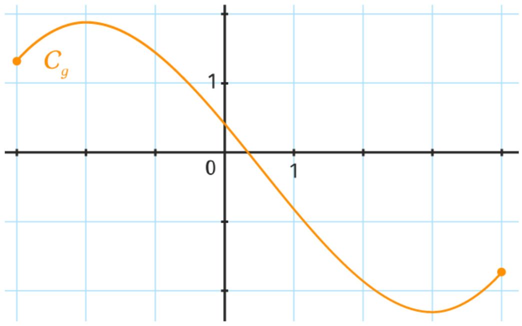
Propriété (admise)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si la fonction f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si la fonction f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si la fonction f' est nulle sur I.

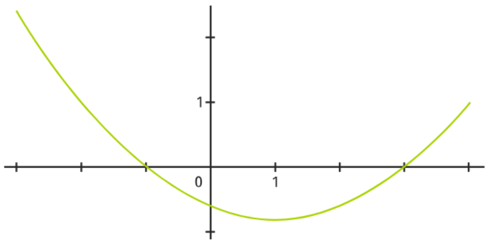


Exercice 0.13
Soit g une fonction définie sur $[-3; 4]$ dont la courbe représentative C_g est donnée par :



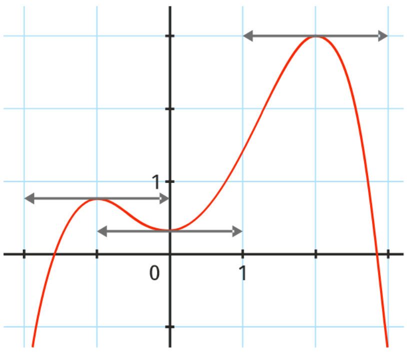
Donner le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 0.14
Soit h une fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$. La courbe ci-dessous représente la fonction h', dérivée de la fonction h :

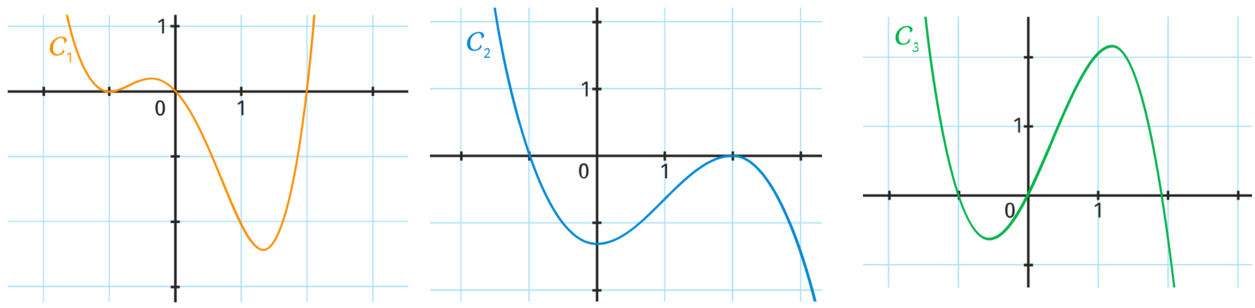


Sachant de plus que $h(-1) = 2$ et $h(3) = -1$.
Dresser le tableau de variations de h sur l'intervalle $[-3; 4]$.

Exercice 0.15
Soit une fonction f dont la courbe représentative est :



Quelle est la courbe qui représente la fonction f' parmi les courbes suivantes ? Expliquez !



Exercice 0.16

Savoir étudier les variations d'une fonction grâce à la dérivation

1. $f(x) = 5x^2 - 8x + 1$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2x^3 - 18x^2 - 42x + 7$, $I = \mathbb{R}$

Méthode :

- On calcule $f'(x)$
- On étudie le signe de $f'(x)$. Pour cela, il faut avoir en tête qu'il faudra peut-être :
  - factoriser l'expression
  - penser au signe de la fonction trinôme
  - mettre au même dénominateur ...
- On dresse le tableau de variations (avec le signe de f' et les variations de f).

Exercice 0.17

Dans chaque cas suivant, dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur D_f :

1. $f(x) = -x^3 + x^2 - x$, $D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$, $D_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
4. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

0.1.5 Extrema d'une fonction

Définition

Définition

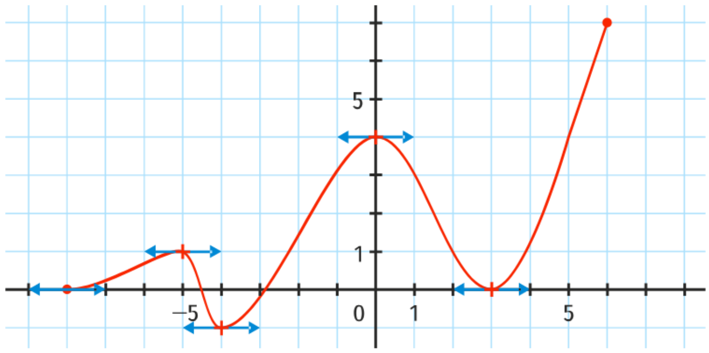
Soient I un intervalle ouvert et c un réel de I.
On considère une fonction f définie sur I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f au voisinage de c signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et, pour tout réel x de $]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$). Un extremum local est un maximum ou un minimum local.

Définition

On dit que $f(c)$ est un **maximum global** sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$. On définit de façon analogue un **minimum global**.

Exercice 0.18

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-8; 6]$.



Déterminer les extrema locaux éventuels. En déduire les extrema globaux éventuels.

Lien avec la dérivée

Propriété (admise)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

Propriété (admise)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exercice 0.19

Savoir déterminer les extrema locaux et globaux d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = -0.5x^3 + 0.75x^2 + 3x - 1$.
Déterminer les extrema éventuels locaux et globaux de la fonction f.
Méthode :

1. On vérifie que la fonction est dérivable
2. On dérive la fonction
3. On peut dresser le tableau de variations
4. Si f' s'annule en changeant de signe, c'est que l'on est en présence d'un extremum local.