7.3 Application à l'étude de suites

7.3.1 Propriété

Propriété

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) une suite d'élément de I convergeant vers $a \in I$.
Alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(a)$.
Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$.

Exercice 7.11
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ et soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$.

7.3.2 Propriété du point fixe

Propriété - Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par son premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers l.
Si la fonction f est continue en l alors la limite l de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 7.12
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0,1$ et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(1-x)$.
On admet que (u_n) est croissante et convergente vers l. Déterminer l.

Savoir-Faire 7.29

Savoir étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.65u_n + 1.8$.

1. Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par $f(x) = 0,65x+1,8$.
   a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0,65x + 1,8$ et $y = x$.
   b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
   c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question précédente.

Exercice 7.13

Soit f la fonction définie sur $[-6;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante et majorée par 3
2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 7.14

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{5} \end{array}\right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de f
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante
5. Montrer que (u_n) converge er déterminer sa limite.

Exercice 7.15

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{u_n+1}{e^{u_n}} \end{array}\right.$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près, en utilisant une méthode par balayage.
5. Montrer, par récurrence sur n, que (u_n) est croissante et majorée par α.
6. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.