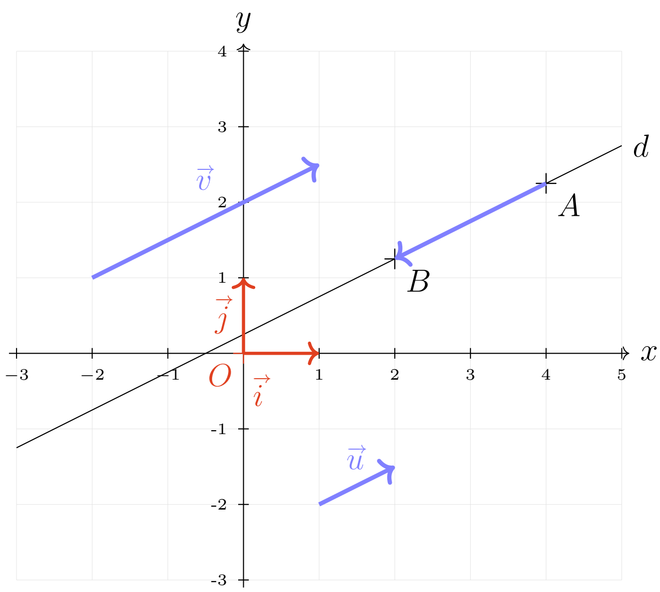
9.1 Équations cartésiennes de droites

9.1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit d une droite du plan, muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle **vecteur directeur** tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite d.

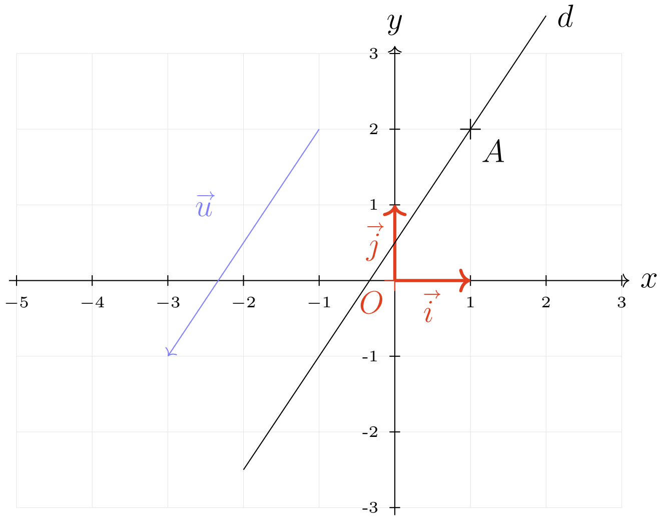


Remarque

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires entre eux.
- A et B étant deux points distincts, tout vecteur directeur est non nul.

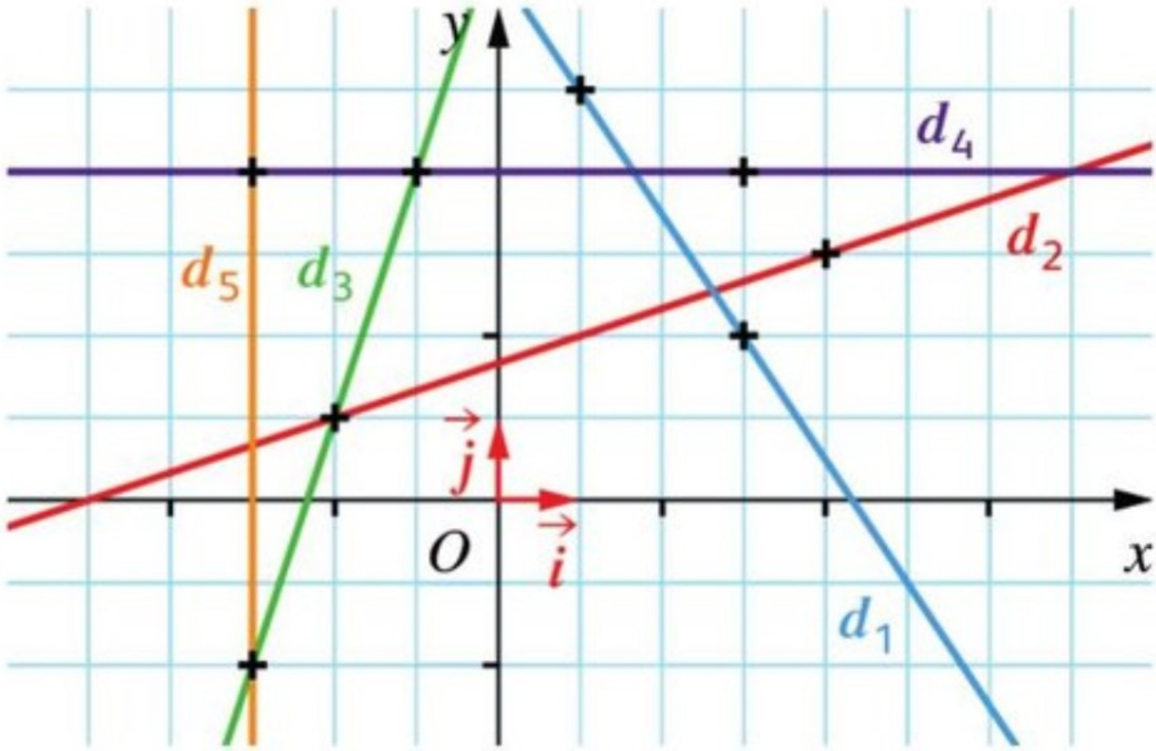
Exemple

Dans un repère du plan, tracer la droite d passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;-3)$.



Savoir-Faire 9.28

Savoir lire un vecteur directeur sur une droite donnée Lire les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites ci-dessous :



9.1.2 Équation cartésienne de droite

Propriété

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, toute droite d a une équation du type $ax + by + c = 0$.

Démonstration 7- -

Soit d une droite définie par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
M \in d &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_{\vec{u}} \\ y - y_A & y_{\vec{u}} \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x - x_A) \times y_{\vec{u}} - x_{\vec{u}} \times (y - y_A) = 0 \\
&\iff x \times \underbrace{y_{\vec{u}}}_{a} + y \times \underbrace{(-x_{\vec{u}})}_{b} + \underbrace{-x_A \times y_{\vec{u}} - y_A \times (-x_{\vec{u}})}_{c} = 0 \\
&\iff ax + by + c = 0 \text{ , avec } a, \ b \text{ et } c \text{ trois réels.}
\end{aligned}$$

Remarque : Les nombres a et b ne peuvent pas être nuls en même temps, car sinon, on aurait $x_{\vec{u}} = y_{\vec{u}} = 0$, ce qui signifierait que $\vec{u} = \vec{0}$; ce qui est impossible, car $\vec{u}$ est une vecteur directeur, donc non nul. On note cela $(a, b) \neq (0, 0)$.

Propriété (admise)

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.
L'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite.

Remarque

Cette propriété est la propriété réciproque de la propriété précédente.

Définition

La relation $ax + by + c = 0$ est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Remarque

Une même droite d admet une infinité d'équations cartésiennes.

Savoir-Faire 9.29

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite (méthode 1)

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par un point et un vecteur directeur.**
  Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(-5; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; -3)$

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par deux points distincts.**
  Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $B(2; 3)$ et $C(4; -1)$.

Propriété

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Exemple

On considère la droite (AB) dont une équation cartésienne est $5x + 4y - 1 = 0$.
Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}(-4; 5)$

Savoir-Faire 9.30

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite (méthode 2, avec la propriété précédente)

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par un point et un vecteur directeur.**
  Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la drote d passant par $A(-5; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; -3)$

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par deux points distincts.**
  Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la drote d passant par $B(2; 3)$ et $C(4; -1)$.

Savoir-Faire 9.31

Savoir tracer une droite dont on connait une équation cartésienne