3.2 Droites et plans de l'espace

Maths Spé terminale - JB Duthoit

3.2.1 Règles d'incidence

Propriété

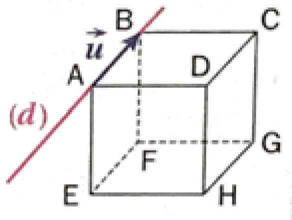
- Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite
- Par trois points distincts non alignés, il passe un unique plan
- Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan P alors la droite (AB) est incluse dans le plan P
- Dans chaque plan de l'espace, toute les règles de la géométrie plane s'appliquent.

3.2.2 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition

Une droite de l'espace est définie :

- soit par la donnée de deux points distincts
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul



Propriété - Caractérisation d'une droite de l'espace

La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Remarque

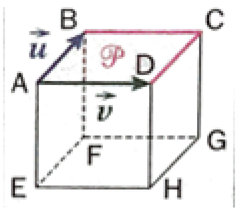
Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs

3.2.3 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignées. Le plan s'écrit alors (ABC)
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires. Le plan s'écrit alors $(A, \vec{u}, \vec{v})$



Définition

On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** du plan P. Le couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé **direction** de P.

Propriété - Caractérisation d'un plan de l'espace

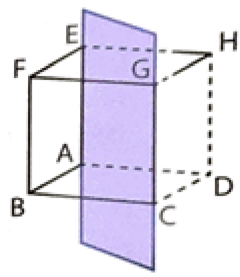
Le plan défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque

- Par trois points de l'espace, non alignés, passe un unique plan.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ où x et y sont des réels. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont alors des vecteurs directeurs du plan (ABC)
- Un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs

Exercice 3.6

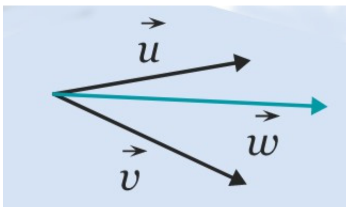
Dans un cube $ABCDEFGH$, donner une caractérisation du plan (CEG) à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires puis justifier que le point A appartient à ce plan.



3.2.4 Vecteurs coplanaires

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace non colinéaires.
Si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, cela signifie qu'il existe des réels x, y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** .

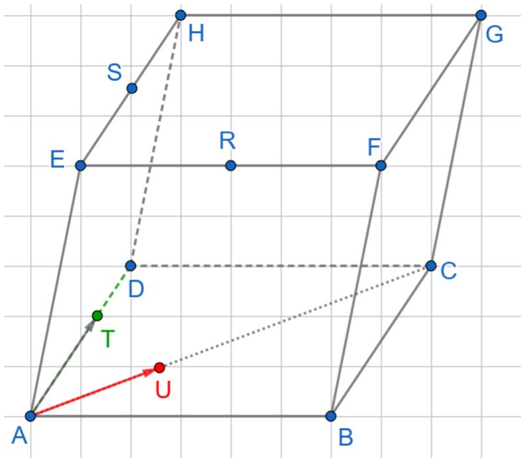


Remarque

- Si deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont colinéaires alors ils sont tous trois coplanaires.
- Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires mais deux droites ne le sont pas toujours.

Savoir-Faire 3.4

SAVOIR MONTRER QUE DES VECTEURS SONT COPLANAIRES



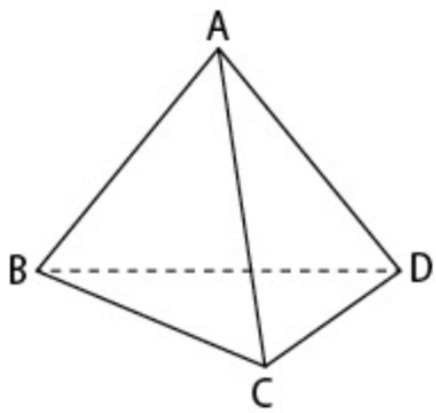
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. R est le milieu de $[EF]$ et S le milieu de $[EH]$.
Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Exprimer $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Calculer $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.
4. Que peut-on en déduire pour les points T, R, U et S ?

Exercice 3.7

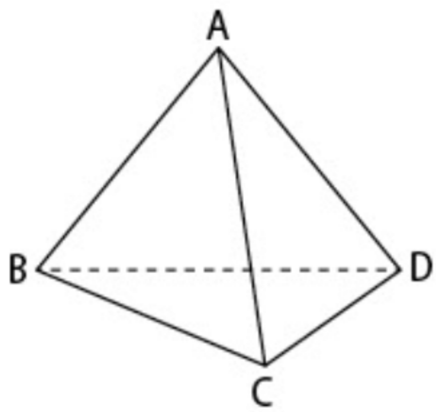
On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
I,J,K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$,$[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$.

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.



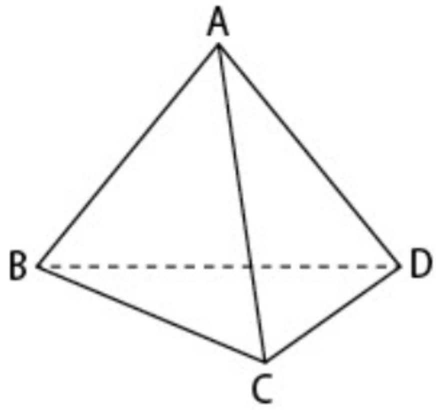
Exercice 3.8

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
Le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



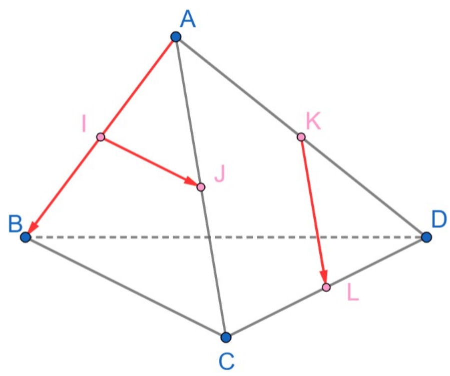
Exercice 3.9

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
M,N,P et Q sont définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = -4\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$.



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$,$\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que dire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$?

Exercice 3.10



On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre. I,J,K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Justifier que $\overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires