10.2 Étude de la fonction exponentielle

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

10.2.1 Signe de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.

Démonstration 10.10

Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.

10.2.2 Sens de variation de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = e^x$	$\nearrow$

Démonstration 10.11

Montrer que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque

La fonction exponentielle est de croissance très rapide, d'où l'expression courante de "croissance exponentielle".

Savoir-Faire 10.56

Savoir résoudre des équations et inéquations avec la fonction exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $e^{3x} = e^{5x+2}$
2. $e^{x+1} > e^{5x}$
3. $e^{7x-1} \leq e^x$
4. $e^{x+1} = 1$
5. $e^x > 1$
6. $e^{x+3} < 0$
7. $-2e^{x+2} \geq -2e^{-5}$
8. $e^{-x} - e \leq 0$

Exercice 10.57

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x+3} < e^4$
2. $e^{-2x+1} > e^{x-7}$
3. $e^{9t-1} \leq e^{4t}$
4. $e^{t+4} \geq e^{-3t}$
5. $e^{x-4} > e$

Exercice 10.58

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

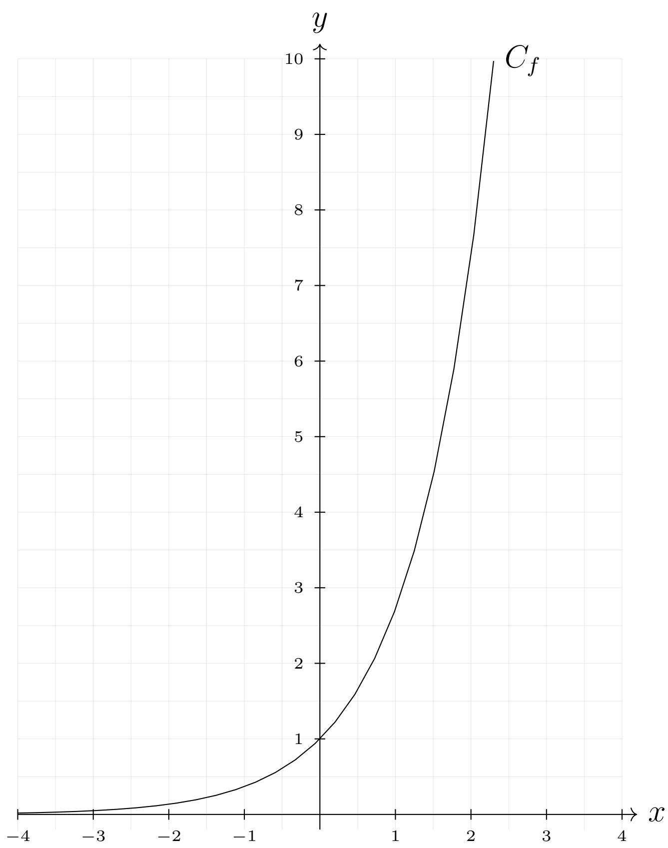
1. $e^{x+4} \leq \dfrac{1}{e^{3x}}$
2. $e^{x^2+x} = 1$
3. $e^{x^2+1} = e^{2x}$
4. $e^{x^2+3x+1} = e$

10.2.3 Représentation graphique

tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
e^x	0.02	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09	54.60

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque

- La courbe C_f passe par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,e)$.
- La courbe C_f est situé au dessus de l'axe des abscisses, et ne le coupe jamais.

10.2.4 Dériver des fonctions comportant e^x

Exercice 10.59

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, et calculer la fonction dérivée :

1. $f(x) = e^x + 1$ avec $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = xe^x$ avec $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = (x+1)e^x$ avec $D_f = \mathbb{R}$
4. $f(x) = x^2 e^x$ avec $D_f = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^*$
6. $f(x) = e^x + 1$ avec $D_f = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ avec $D_f = \mathbb{R}$

10.2.5 Dérivée de la fonction g définie par $g(x) = exp(ax+b)$

Propriété

Soient a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$.
Calculer $f'(x)$

Exercice 10.60

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, et calculer la fonction dérivée :

1. $f(x) = e^{3x+1}$ avec $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{2x} + 3x - 1$ avec $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$ avec $D_f = \mathbb{R}$
4. $f(x) = -8e^{-3x+1}$ avec $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 10.61

Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, et calculer la fonction dérivée :

1. $f(x) = -8xe^{-3x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^*$
2. $f(x) = x^2 e^{2x}$ avec $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{e^{x+1}}$ avec $D_f = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ avec $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 10.62

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x + 1$.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f.
2. Calculer $f'(x)$
3. a) Résoudre $f'(x) = 0$
   b) Résoudre $f'(x) > 0$
   c) Résoudre $f'(x) < 0$
4. Utiliser les résultats précédents pour dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 10.63

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2e^{2x} + 4x$.
☛ On pourra s'aider de l'exercice précédent qui détaille davantage les différentes étapes.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f, puis calculer $f'(x)$
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Savoir-Faire 10.57

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION COMPORTANT UNE EXPONENTIELLE

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2x$.
   a) Calculer $f'(x)$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
   d) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à C_f passant par le point de la courbe d'abscisse $\frac{1}{2}$.
   e) La droite $\mathscr{D}$ passe-t-elle par l'origine du repère ?
   f) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.
   a) Calculer $f'(x)$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à C_f passant par le point de la courbe d'abscisse 0.
   d) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.
   a) Étudier les variations de la fonction f.
   b) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.