

5.2

Limite finie ou infinie en un réel

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

5.2.1 Limite infinie en un réel a

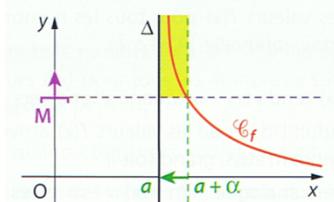
Définition

Soit f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et soit le nombre a qui est une borne de I .

Dire que la **limite de f en a est $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$ contient toute les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proches de a . Autrement dit, dire que la limite de f en a est $+\infty$ signifie que pour tout nombre M , il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tous les nombres de $x \in I$, si $|x - a| < \alpha$, alors $f(x) > M$.

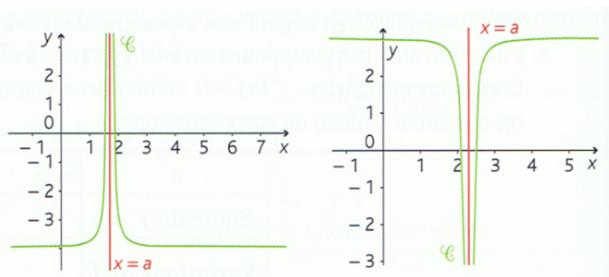
On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



Définition

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, on dit alors que la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f .



Remarque

Dire que f a une limite infinie en a signifie que f possède en a , une limite à gauche et une limite à droite (infinies) et que ces limites sont égales.

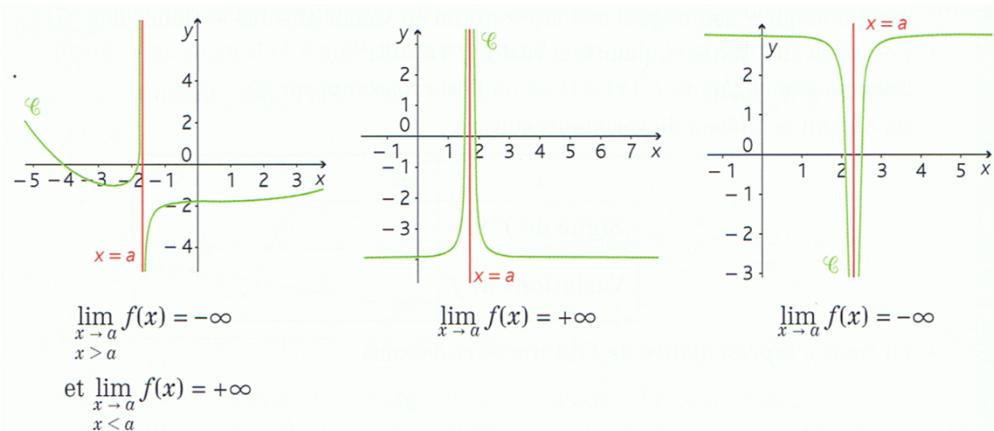
On a alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Par exemple, la fonction définie pour tout x réel non nul par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

Remarque

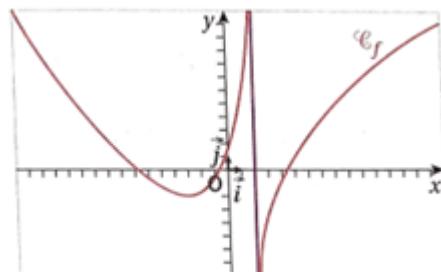
Pour une fonction f définie pour tout x réel différent de a , la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f si l'une au moins des limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe et est infinie.



Exercice 5.6

f est une fonction définie sur un intervalle réel, et représentée ci-contre par sa courbe.

- Conjecturer la limite de la fonction f en 2.
- En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) verticale(s) à la courbe de f , si elle(s) existe(nt).
- Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites conjecturées.



Exercice 5.7

g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 5\}$ par $g(x) = \frac{x+3}{x^2 - 4x - 5}$.

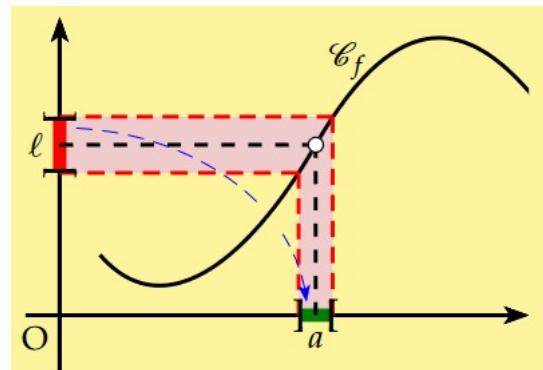
- A l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer la limite de g en 5
- En supposant cette conjecture exacte, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de g ?

5.2.2 Limite finie en un réel a

Définition

Si f est une fonction définie sur une intervalle I contenant un nombre réel a alors on dit que f admet pour limite l en $x = a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.



Propriété (admise)

Soit a un réel.

- Si $a \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si P est un polynôme, $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) définie en a , $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

Exercice 5.8

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -2} x^3$

3. $\lim_{x \rightarrow 12} \sqrt{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{x + 4}$

6. $\lim_{x \rightarrow -5} e^x$

Exercice 5.9

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------------|-----|-----|-----------|
| $f(x)$ | 2 ↗ +∞ | +∞ ↘ 1 ↗ 4 ↘ -∞ | | | |

1. Donner les limites de f en $-\infty, +\infty$ et en -1 .
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f .

Exercice 5.10

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
|--------|-------------|---------|-----|-----------|
| $f(x)$ | -∞ ↗ 1 ↘ -∞ | +∞ ↘ -∞ | | |

1. Donner les limites de f en $-\infty, +\infty$ et en -1 .
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f .

Exercice 5.11

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f

. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Au maximum, combien d'asymptotes horizontales C_f peut-elle admettre ? Et d'asymptotes verticales ?
2. Trouver deux exemples permettant d'illustrer les réponses à la question précédente.



Savoir-Faire 5.14

SAVOIR INTERPRÉTER GRAPHIQUEMENT DES LIMITES

1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et soit C_f sa courbe représentative. Le tableau de variation de f est donné ci-dessous :

| | | | |
|--------|-----------|----|-----------|
| x | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 2 | -4 | $+\infty$ |

- a) Lire dans le tableau $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) En déduire l'existence d'asymptote(s) à la courbe C_f .

2. Soit f une fonction définie sur $] -1; 3[\cup]3; 7]$ telle que :

- f est croissante sur $] -1; 3[$ et sur $]3; 7]$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$ et $f(7) = 1$.

On nomme C_f la courbe représentative de f .

- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ? Préciser.
- c) Tracer dans un repère une allure de la courbe C_f et ses asymptotes.