

1.2

Fonction polynôme du second degré

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

1.2.1 Définitions et vocabulaire

Approche

Un fermier possède un terrain carré. Il désire poser une clôture à 1€ le mètre linéaire et souhaite également amender son terrain avec un engrais qui lui revient à 1€ le mètre carré.

☞ Quel est la taille du terrain sachant qu'il dépense 140 € ?

Définition

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels, avec a non nul.

Vocabulaire

- Les réels a , b et c sont appelés **coefficients** de la fonction f .
- Une fonction polynôme du second degré est aussi appelé fonction **trinôme du second degré**.
- Les solutions (si elles existent) de $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** de $ax^2 + bx + c$

Remarque

Une équation de parabole est donc du type $y = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels, avec a non nul.

Exemples

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 2x - \sqrt{7}$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 2x$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.
- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 1$ est-elle une fonction polynôme du second degré ? Si oui, donner les coefficients.

Savoir-Faire 1.3

SAVOIR DÉTERMINER SI UNE FONCTION EST UNE FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Précisez si les fonctions f suivantes sont des fonctions polynômes du second degré ? Si oui, préciser les coefficients.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x - 2)(x + 3)$
2. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - (x - 6)(x + 1)$

3. f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Exercice 1.3

Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré. Précisez les coefficients.

1. $f(x) = -x^2 + 5 - 3x$
2. $f(x) = x^2 + 1 + 3x^2 + 4x + 5$

3. $f(x) = (x + 1)^2 + 17$
4. $f(x) = (2x + 1)^2 + (x - 1)^2$

1.2.2 La forme canonique

Vocabulaire

- $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$ est une écriture sous forme factorisée de la fonction f .
- $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ est une écriture sous forme développée de la fonction f .

On cherche à déterminer une autre forme d'écriture, où la variable x n'apparaîtrait qu'une seule fois...

Propriété (admise)

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a non nul, on peut trouver des réels α et β , tels que pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Remarque

Ce n'est pas une formule à connaître par cœur, il faut savoir déterminer la forme canonique sans la formule

Exercice 1.4

Parmi les polynômes du second degré suivants, dire ceux qui sont écrits sous la forme canonique.

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| 1. $x^2 + 7x + 1$ | 4. $-5(x + 1)^2 + 2$ | 7. $x(x + 1)^2 + 3$ |
| 2. $(2x + 1)^2 - 4$ | 5. $-3x^2 + x$ | |
| 3. $3(x - 8)^2 + 5$ | 6. $3 + 53(x - 5)^2$ | |

Savoir-Faire 1.4

SAVOIR DÉTERMINER LA FORME CANONIQUE D'UNE EXPRESSION DU SECOND DEGRÉ.

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$
3. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$
4. $f(x) = 25x^2 - 150x + 209$
5. $f(x) = 3x^2 - x + 1$

**Exercice 1.5**

Ecrire chaque polynôme suivant sous la forme canonique :

1. $f(x) = x^2 + 6x - 10$

2. $f(x) = 3x^2 + 12x + 2$

3. $f(x) = -2x^2 + 8x - 12$

4. $f(x) = -x^2 + 6x - 1$

Exercice 1.6

Ecrire chaque polynôme suivant sous la forme canonique :

1. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

2. $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

3. $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$

4. $f(x) = 3x^2 - x + 6$