

1.3

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

Démonstration 1.1

On considère une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels et avec $a \neq 0$. Résolvons cette équation.

Propriété

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

Savoir-Faire 1.5

SAVOIR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2x^2 - x = 0$ \triangleleft

4. $16x^2 - 8x + 13 = 0$

2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

3. $6x^2 - x - 1 = 0$

5. $x^2 + 2x = 0$

Remarque

Il est possible est facile de vérifier les résultats avec la console python (sur Pythonista par exemple). Il suffit d'écrire en console :

```
from sympy import * # pour importer la bibliothèque sympy
var('x') # pour déclarer la variable
```

Une fois ceci réalisé, il suffit d'écrire, toujours en console, l'équation demandée :

```
z = x ** 2 + 3 * x
solve(z)
```

→ Il ne faut pas indiquer " $=0$ " dans `solve` : en effet, `solve` donne les racines de l'expression entrée !


Exercice 1.7

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^2 + x - 12 = 0$
3. $2x^2 + x - 3 = 0$
2. $5x^2 - 3x + 1 = 0$
4. $9x^2 - 30x + 25 = 0$


Exercice 1.8

Déterminer les racines des polynômes suivants :

1. $f(x) = 15x^2 + x - 6$
3. $f(x) = 5x^2 - 7x + 6$
2. $f(x) = x^2 - 3x - 15$
4. $f(x) = 4x^2 - 20x + 21$


Savoir-Faire 1.6

SAVOIR ÉTUDIER UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ AVEC PARAMÈTRE

Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit (E) l'équation $x^2 + 2x - 7m = 0$.

Déterminer m pour que (E) n'admette qu'une solution. Quelle est cette solution ?


Exercice 1.9

Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ admette deux solutions distinctes.


Exercice 1.10

Déterminer tous les réels b tels que l'équation $x^2 + bx + 5 = 0$ n'ait aucune solution.


Exercice 1.11

Déterminer tous les réels c tels que l'équation $-x^2 + x + c = 0$ n'ait aucune solution.


Exercice 1.12

Soit (E) une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Montrer que si a et c sont non nuls et de signes contraires, alors l'équation (E) a deux solutions distinctes.


Exercice 1.13

Soit (E) une équation du second degré de la forme $2x^2 + (m - 5)x + m + 3 = 0$, avec m un réel.

Pour quelles valeurs de m l'équation (E) a-t-elle deux solutions distinctes ?


Savoir-Faire 1.7

SAVOIR RÉSOUTRE DES ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT AU SECOND DEGRÉ

Soit l'équation suivante :

$$x + \frac{1}{x-3} = 5$$

Résoudre cette équation.


Exercice 1.14

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = \frac{47}{7}$
2. $x^3 - x^2 - 6x = 0$
3. $(x^2 - 5x - 14)(9x^2 + 9x - 10) = 0$



Savoir-Faire 1.8

SAVOIR RÉSOUDRE UN PROBLÈME LIÉ AU SECOND DEGRÉ

Déterminer 3 entiers consécutifs, sachant que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1877.


Exercice 1.15

Trouver deux nombres dont la somme est 21 et le produit 54.


Exercice 1.16

Des participants à une conférence ont échangé des poignées de mains (ça, c'était avant le covid :-) et l'un deux (il s'ennuyait peut-être!) a compté qu'il y avait eu en tout 325 poignées de mains.

Combien de personnes ont assisté à la conférence ?