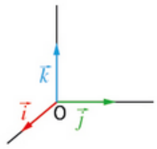
15.3 Produit scalaire dans un repère de l'espace

15.3.1 Expression analytique du produit scalaire

Définition

On appelle **base orthonormé de l'espace** toute base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace telle que :

- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$



Définition

On appelle **repère orthonormé de l'espace** tout repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace avec $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace.

Propriété

Dans une base orthonormé de l'espace $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace. On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Conséquence directe :

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. On a alors :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

15.3.2 Formules de polarisation

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Propriété -Formules de polarisation-

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Remarque

La première formule de polarisation permet de calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ connaissant AB, AC et BC.

Savoir-Faire 15.79

Savoir étudier l'orthogonalité d'une droite et d'un plan dans un repère

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -11)$, $C(-4, 5, -9)$,$D(-8, 3, 4)$ et $E(-3, 10, 6)$.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan
2. Montrer que (AB) et (DE) sont orthogonales
3. Montre que (DE) est orthogonale au plan (ABC)

Méthode :

On procède comme le SF précédent, mais en utilisant la géométrie analytique :

- On cherche deux droites sécantes du plan (ABC) qui sont orthogonales à (EO)
- On utilise l'expression analytique du produit scalaire pour démontrer que ces droites sont orthogonales.

Savoir-Faire 15.80

Savoir utiliser le produit scalaire pour calculer un angle et une longueur

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 4$, $AE = 3$ et $AD = 12$.
Le point L est le milieu de $[AG]$, et on définit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

1. Justifier que $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace
2. a) Quelles sont les coordonnées de B, C et G ?
   b) Calculer les coordonnées de L
3. Calculer $\overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{LC}$
4. a) Calculer LB et LC
   b) En déduire une valeur approché à 1 degré de l'angle $\widehat{BLC}$