1.6 Divisibilité et parité

1.6.1 Définitions

Définition

Soit a et b deux entiers.
a est **multiple** de b si et seulement si il existe un entier k tel que $a = k \times b$.

Définition

Soit a et b deux entiers avec b non nul.
b est **diviseur** de a si et seulement si il existe un entier k tel que $a = k \times b$.

Exemples

25 est un multiple de 5 car...

68 est un multiple de 2 car ...

3 est un diviseur de 51 car ...

4 est un diviseur de 32 car ...

Exercice 1.28
On considère les nombres suivants :

- 10
- 85
- 510
- 28
- 34
- 60
- 72
- 97

Parmi les nombres précédents, lesquels sont :

1. multiples de 5
2. multiples de 3
3. multiples de 2

☛ Justifier quand le nombre est bien un multiple.

Exercice 1.29
On considère le nombre $a = 35$ et $b = 25$.

1. Donner un multiple de a, puis un multiple de b.
2. Est-il possible de trouver un multiple de a qui soit aussi un multiple de b ?
3. Parmi tous les nombres strictement positifs qui sont multiples simultanément de a et de b, quel est le plus petit ?

Exercice 1.30

Une crèche dispose de 60 dalles carrées en mousse. Elle souhaite les placer de manière à former un rectangle.

1. Quelles sont les dimensions possibles pour ce rectangle ?
2. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

Exercice 1.31

Lors d'un tournoi de pétanque, il y a 80 hommes et 60 femmes inscrits.
L'organisation du tournoi veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre d'hommes et le même nombre de femmes.
Combien d'équipes peuvent être constituées ?

♡**Défi !**

Dans ce cadre, on compte exactement :

- .... multiple(s) de 2
- .... multiple(s) de 3
- .... multiple(s) de 4
- .... multiple(s) de 5

Exercice 1.32

Soit $a = 10k$ et $b = 6k$ où $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que a est divisible par 2 et par 5.
2. Montrer que b est un multiple de 3
3. Est-ce que 8 divise $a + b$?

1.6.2 Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

On considère un entier relatif n.

- Si n est divisible par 2, on dit que n **est pair**. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k$.
- Sinon, n **est impair** et il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Propriété

Le définition précédente est aussi une propriété !

Remarque

On rappelle :

- Un entier pair est un entier qui peut s'écrire sous la forme $2k$, avec $k \in \mathbb{N}$
- Un entier impair est un entier qui peut s'écrire sous la forme $2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 1.33
Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est un entier impair.

Exercice 1.34
Montrer que la somme de deux entiers pairs est un entier pair.

Démonstration 3- -

UTILISER LA PARITÉ POUR MONTRER QUE $\sqrt{2}$ N'EST PAS UN RATIONNEL On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, ce qui signifie qu'on souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers.
On suppose que que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible, et on va démontrer que cela est impossible. Ce type de raisonnement est appelé **raisonnement par l'absurde**.
On suppose donc que que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible.

1. Montrer que $p^2 = 2q^2$
2. En déduire que p est pair.
3. On pose donc $p = 2k$, avec k un entier relatif. Montrer que $q^2 = 2k^2$.
4. En déduire la parité de q
5. Conclure