3.5

Représentation paramétrique d'une droite

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Propriété

Soit d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur \vec{u} b

le repère $\left(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$. Un point M(x;y;z) appartient à d si et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Définition

Soit x_0, y_0, z_0, a, b , et c des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Le système d'équations $\begin{cases} x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\\ z=z_0+tc \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$ définit une **représentation para-**

métrique de la droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Un tel système est aussi appelé système d'équations paramétriques de d.

Savoir-Faire 3.15

SAVOIR DÉTERMINER UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DE DROITE Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(3; 3; 3) et B(2; 6; 4). Déterminer deux représentations paramétriques de la droite (AB).

Exercice 3.53

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB):

- 1. A(3;-1;0) et B(5;2;-3)
- 2. A(1;2;-2) et B(6;-4;3)

Exercice 3.54

Déterminer <u>une</u> représentation paramétrique de la droite d passant par A(5;2;-1) et parallèle à la droite (BC), avec B(4; -3; 1) et C(0; 5; 7).

Savoir-Faire 3.16

Savoir reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique

On considère <u>la</u> droite d dont <u>une</u> représentation paramétrique est $\begin{cases} x=5-t\\ y=1-3t\\ z=1+t \end{cases}$, avec

$t \in \mathbb{R}$

Déterminer un point de la droite, ainsi qu'un de ses vecteurs directeurs

Exercice 3.55

On considère <u>la</u> droite d dont <u>une</u> représentation paramétrique est $\begin{cases} x=-5+t\\ y=8-7t\\ z=1+2t \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$

- 1. Le point A(-4;1;3) appartient-il à la droite d? et le point B(1,1,2)?
- 2. Donner les coordonnées d'un autre point de d, ainsi que celles d'un vecteur directeur de d.
- 3. d est-elle parallèle à d' de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=1-2k\\ y=3-14k\\ z=5+4k \end{array}\right.$, avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice 3.56

On considère <u>la</u> droite d dont <u>une</u> représentation paramétrique est $\left\{ \begin{array}{l} x=3\\y=6-2t\\z=4t \end{array} \right.$, avec $t\in\mathbb{R}$

- 1. Le point A(3;0;4) appartient-il à la droite d?
- 2. Donner les coordonnées d'un autre point de d, ainsi que celles d'un vecteur directeur de d.
- 3. Soient B(3; -3; 13) et C(3; 5; -3). Les droites d et (BD) sont-elles parallèles?

Exercice 3.57

Soient A(3; -2; 4) et B(5; 2; 0) deux point de l'espace dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Exercice 3.58

La droite d passant par A(2;5;-1) et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4;0)$ est-elle parallèle au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$?

Exercice 3.59

Soit d la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{ll} x=4-2k \\ y=1+k \\ z=-9+3k \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{R}$

Déterminer les coordonnées de E, F et G, points d'intersection respectifs de d avec

- 1. le plan $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- 2. le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.
- 3. le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

Savoir-Faire 3.17

SAVOIR DÉTERMINER L'INTERSECTION DE DEUX DROITES DE L'ESPACE On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3.60

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=8-t\\ y=-6-2t\\ z=15+t \end{array} \right. \text{, avec } t\in\mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=-2+4k\\ y=6-6k\\ z=1+2k \end{array} \right. \text{, avec } k\in\mathbb{R} \\ \end{array}$$

Déterminer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3.61

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=7+4t\\ y=20+t\\ z=2+2t \end{array} \right. \text{, avec } t\in\mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=5+2k\\ y=2-3k\\ z=1+k \end{array} \right. \text{, avec } k\in\mathbb{R} \\ \end{array}$$

Déterminer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3.62

On considère la droite d et la droite d' de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} x=3+k\\ y=-2+3k\\ z=2k \end{array}\right. \text{, avec } k\in\mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2+k'\\ y=2-k'\\ z=1+4k' \end{array}\right. \text{, avec } k'\in\mathbb{R}$$

Les droites d et d' sont-elles coplanaires? sont-elles sécantes?

Exercice 3.63

Dans chacun des cas, déterminer la position relative de d et de d':

1.
$$d:$$

$$\begin{cases} x=-2t+3\\ y=-3t+1\\ z=t+2 \end{cases}$$
, avec $t\in\mathbb{R}$
$$d':$$

$$\begin{cases} x=t'-1\\ y=2t'+2\\ z=-t'-3 \end{cases}$$
, avec $t'\in\mathbb{R}$

2.
$$d: \left\{ \begin{array}{l} x=t-1 \\ y=2t+2 \\ z=-t-3 \end{array} \right.$$
, avec $t\in \mathbb{R}$

$$d': \left\{ \begin{array}{l} x=3t'\\ y=-2t'+1\\ z=t'+1 \end{array} \right., \, \text{avec} \,\, t'\in \mathbb{R}$$

Exercice 3.64

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A(1; 2; -3), B(2; 4; 1) et C(-1; 3; 2).

- 1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan
- 2. Soit M(x; y; z) un point du plan (ABC). Montrer qu'il existe deux réel t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$.
- 3. En déduire que $M \in (ABC)$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} x=t-2t'+1\\ y=2t+t'+2\\ z=4t+5t'-3 \end{array} \right.$ où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.
- 4. Le point E(1; 4; -7) appartient-il au plan (ABC)?
- 5. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = -3k + 4 \\ z = 9k 7 \end{cases}$ La droite d est-elle parallèle au plan (ABC)?

Savoir-Faire 3.18

SAVOIR DÉTERMINER LA COPLANARITÉ DE QUATRE POINTS L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,\right)$. Soient les points $A(2;-1;4),\,B(6;-7;0),\,C(1;0;1)$ et D(13;-16;5).

- 1. Montrer que \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} ne sont pas colinéaires.
- 2. Montrer que $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ et \overrightarrow{BD} sont coplanaires et en déduire que A, B, C et D le sont aussi.

Exercice 3.65

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, et on considère les points A(-2;-14;-24), B(-2;8;4), C(-1;3;-7) et D(-3;2;1).

- 1. Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.
- 2. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3.66

L'espace est muni d'un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et on considère les points A(1;0;1), B(3;14;9), C(12;5;0) et D(-2;3;4).

- 1. Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.
- 2. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3.67

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on considère les points A(-3; 0; 1), B(4; 2; 3), C(-5; 2; -3) et D(3; 0; 5).

- 1. Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.
- 2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires?

Exercice 3.68

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, et on considère les points $A(2;3;4),\ B(3;0;4),\ C(5;6;7)$ et D(8;7;13).

Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires?