5.4 Limites et comparaison

5.4.1 Théorèmes de comparaison

Propriété Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$, avec A désignant un réel ou $-\infty$.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a.

Propriété Théorème des gendarmes

Soient f,g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$, avec A désignant un réel ou $-\infty$. Soit l un réel.

- Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a.

Savoir-Faire 5.20

Savoir calculer une limite avec les théorèmes de comparaison

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + cos(x)$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 5.26

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - 3cos(2x))$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x sin(x))$

Exercice 5.27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel x, $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

5.4.2 Croissances comparées

Propriété (Propriété de croissance comparée)

Soit n un entier naturel non nul. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démonstration 7- -

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

1. On commence pour $n = 1$:
   a) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Montrer que la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$
   b) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
   c) En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$
2. Pour $n \geq 2$
   a) Montrer que $\forall x \neq 0$, $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\left(\frac{x}{n}\right)}}{\frac{x}{n}} \right)^n$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n}$

Savoir-Faire 5.21

SAVOIR CALCULER UNE LIMITE AVEC LA CROISSANCE COMPARÉE

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to -\infty} (2 - xe^x)$
2. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)$
3. $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 1)e^x$
4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x}$

Exercice 5.28

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$
2. $\lim_{x \to -\infty} (1 - e^2x - x^3e^x)$
3. $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{4e^x}{x}\right)$
4. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{e^x}{2x^2}\right)$
5. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{e^x}$
6. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5 - 3x}{e^x}$

Savoir-Faire 5.22

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3 + \dfrac{xe}{e^x}$
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.30

On considère une population de lapins. Cette population de lapins, exprimées en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{3e^{0.5t}}{e^{0.5t}+2}$, où t représente le temps écoulé en années depuis 2015.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$
3. Montrer que pour tout réel t dans $[0;+\infty[$, on a $f'(t) = \dfrac{3e^{0.5t}}{(e^{0.5t}+2)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
5. Compléter le code suivant afin que la fonction `lapin()` renvoie l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 lapins.

```
from math import *
def lapin():
  t = 0
  p = 1
  while ...........:
    t = t + 1
    p = .......................
  return .................
```