

## 2.4

## Suites minorées, majorées, bornées. Monotonie et convergence

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

## Définition

- Une suite  $(u_n)$  est **majorée** par un nombre réel  $M$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **minorée** par un nombre réel  $m$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

## Exemple

- Une suite à termes tous positifs est minorée par 0
- Une suite croissante est minorée par son 1er terme :  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$
- Une suite décroissante est majorée par son 1er terme :  $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$

## Remarque

- Les nombres  $m$  et  $M$  (appelés minorants et majorants) sont des réels indépendants de  $n$ .
- Si une suite est majorée par  $M$ , elle a une infinité de majorants. En particulier, tout nombre supérieur à  $M$  est aussi un majorant de la suite.

## Exercice 2.15

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1,8$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{2}{3-x}$ .

- Montrer que  $f$  est croissante sur  $[0; 3[$
- Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est bornée par 1 et 2.
- Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

## Savoir-Faire 2.4

DÉMONTRER QU'UNE SUITE EST MAJORÉE OU MINORÉE

1. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par  $u_n = \frac{4n+1}{1-5n}$ . Démontrer que  $(u_n)$  est minorée par  $\frac{-5}{4}$ .
2. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 0$  par  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ , avec  $u_0 = 1$ . Démontrer par récurrence que  $(u_n)$  est majorée par 4.

**Exercice 2.16**

Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 - 2n + 3$  est minorée par 2.

**Exercice 2.17**

Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 0.75u_n + 2$  est majorée par 8.

**Exercice 2.18**

Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \frac{5n}{n+1}$  est majorée par 5.

**Propriété**

- Si une suite croissante a pour limite  $l$ , alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à  $l$  (autrement dit, elle est majorée par  $l$ ).
- De même, si une suite décroissante a pour limite  $l$ , alors tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à  $l$  (autrement dit, elle est minorée par  $l$ ).

**Propriété Théorème de la convergence monotone**

- Toute suite croissante majorée converge.
- De même, toute suite décroissante minorée converge.

**Remarque**

Si une suite croissante est majorée par un réel  $M$ , on sait qu'elle converge vers un réel  $l \leq M$ . On ne peut pas conclure qu'elle est égale à  $M$ .

⚠ Ce théorème donne donc une condition suffisante pour qu'une suite converge mais ne donne pas la limite de cette suite.

**Propriété**

- Une suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$
- De même, toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$

**Démonstration 4- Démonstration au programme -**

⌘ Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée.

⌘ Montrer que  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$

**Remarque**

les réciproques des propriétés précédentes sont fausses. Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 + (-1)^n$  diverge vers  $+\infty$  mais elle n'est pas croissante.

## Savoir-Faire 2.5

### ÉTUDIER LA CONVERGENCE D'UNE SUITE MONOTONE

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ , avec  $u_0 = 1$

1. Démontrer par récurrence que  $(u_n)$  est majorée par 7
2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante
3. Conclure quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ .

#### Exercice 2.19

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_0 = -2$  et  $u_{n+1} = 0.5u_n + 1$ .

1. Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2
2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante
3. Conclure quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ .

#### Exercice 2.20

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_n = 2n^2 + 4n - 3$$

est minorée par  $-5$ .

2. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}v_n^2 + 8}$$

est majorée par 8.

#### Exercice 2.21

Fin 2020, un club de rugby comptait 7 000 abonnés. À la fin de chaque année, le club constate que 20% des abonnés ne se réabonnent pas et que 4 000 nouveaux abonnés arrivent. On note  $a_n$  le nombre d'abonnés à la fin de l'année  $2020 + n$ .

1. Préciser  $a_0$  et expliquer pourquoi, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} = 0,8 a_n + 4\,000.$$

2. Démontrer que la suite  $(a_n)$  est majorée par 20 000.
3. Démontrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
4. En déduire la convergence de la suite  $(a_n)$ .