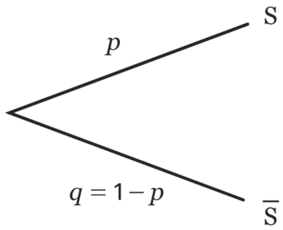
13.1 Épreuve de Bernoulli et succession d'épreuves indépendantes

Maths Spé terminale - JB Duthoit

13.1.1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Soit p un nombre réel appartenant à $[0;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement **succès** S et **échec** $\bar{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



Exercice 13.1
On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Pour chacune des épreuves suivantes, indiquer s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et préciser le succès et sa probabilité le cas échéant.

1. On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau ou trèfle).
2. On vérifie que la carte est un pique.
3. On regarde si la carte n'est pas un pique.
4. On vérifie que la carte est un as.
5. On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.).
6. On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet)

Définition

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0;1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p.
Autrement dit, on a $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

13.1.2 Succession d'épreuves indépendantes

Propriété

Lors d'une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i, pour $1 \leq i \leq n$.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a 6 faces, puis une pièce de monnaie.
L'univers de la première épreuve est $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et celui de la deuxième est $\Omega_2 = \{P; F\}$.
L'ensemble de toutes les issues possibles est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in \Omega_1$ et $b \in \Omega_2$.
L'univers Ω de cette expérience aléatoire est donc le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$. On peut également représenter cette situation par un arbre pondéré.

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Savoir-Faire 13.62

`Savoir modéliser une succession d'épreuves`

On considère une urne de 5 boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres vertes. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une première boule, à noter son numéro, à la remettre dans l'urne, et à tirer ensuite une seconde boule dont on note sa couleur.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'issue $(1; R)$?

Savoir-Faire 13.63

`Savoir modéliser une succession d'épreuves indépendantes`

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie truquée 3 fois de suite. Pour chaque lancer, on a deux fois plus de chance de tomber sur "pile" que sur "face".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" si on lance cette pièce une seule fois ?
2. Réaliser un arbre pondéré qui représente l'expérience aléatoire
3. Exprimer l'univers en terme de produit cartésien.
4. Quelle est la probabilité de l'événement E : "obtenir une seule fois "pile" " ?