7.3 Utilisation du signe des fonctions affines pour étudier le signe d'expressions et résoudre des inéquations

Savoir-Faire 7.6

Étude du signe d'un produit ou d'un quotient

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x - 5)(4 - 2x)$
2. $f(x) = \dfrac{10x + 20}{3 - 2x}$

⚠ Réaliser un tableau de signes nécessite d'avoir un produit ou un quotient ! Dans le cas contraire, il faut commencer par factoriser et \ou mettre sous la forme d'un quotient.

Méthode :

- Je vérifie que l'expression est bien sous forme factorisée ou sous forme d'un quotient, avec chaque terme sous la forme d'une fonction affine (sinon, il faudra commencer par modifier l'expression, cf. Savoir-faire suivant)
- J'étudie le signe de chaque fonction affine. Avec un peu d'habitude, je pourrais me passer de cette étape.
- Je regroupe les différents tableaux de signes en un seul, et j'ajoute une ligne pour l'expression finale.
  ⚠ S'il y a des valeurs interdites, je n'oublie pas la double barre.

Le savoir-faire en vidéo

Exercice 7.5

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $f(x) = (-2x + 4)(-x - 6)$
2. $f(x) = (x + 1)(1 - x)$
3. $f(x) = x(3 - x)$

Exercice 7.6

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $f(x) = (3 + x)(4 + x)(5 + x)$
2. $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

Exercice 7.7

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{-x+6}$
2. $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{x-4}{x+8}$

✎Je m'entraîne seul(e)

- $f(x) = (3x+2)(5x-4)$. Réponse : $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{5}; +\infty[$, $f(x) < 0$ pour $x \in]-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = -\frac{2}{3}$ et $x = \frac{4}{5}$.
- $f(x) = (-2x+7)(5x-4)$. Réponse : $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{4}{5}[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$, $f(x) > 0$ pour $x \in]\frac{4}{5}; \frac{7}{2}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = \frac{4}{5}$ et $x = \frac{7}{2}$.
- $f(x) = (-5x+2)(-13x+7)$. Réponse : $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\cup]\frac{7}{13}; +\infty[$, $f(x) < 0$ pour $x \in]\frac{2}{5}; \frac{7}{13}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = \frac{2}{5}$ et $x = \frac{7}{13}$.
- $f(x) = \dfrac{13x-11}{6-5x}$. Réponse : $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{11}{13}[\cup]\frac{6}{5}; +\infty[$, $f(x) > 0$ pour $x \in]\frac{11}{13}; \frac{6}{5}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = -\frac{6}{5}$.

Savoir-Faire 7.7

Savoir résoudre une inéquation produit ou quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $(2x+7)(3x-2) > 0$
2. $(-5x+4)(7-3x) \leq 0$
3. $\dfrac{1-6x}{3+x} \geq 0$

Méthode :

- On dresse un tableau de signes pour l'expression
- On conclut !

Exercice 7.8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x(x+1) \leq 0$
2. $\dfrac{x+1}{x+2} < 0$

Savoir-Faire 7.8

Savoir résoudre une inéquation qui se ramène à une inéquation produit ou une inéquation quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 + 4x \geq 0$
2. $5 + \frac{1}{x+1} \leq 0$
3. $(x-5)^2 > (2x+1)^2$

Méthode :

- On commence par transposer tout d'un côté (on met tout à gauche par exemple).
- Si l'expression comporte des fractions, on met au même dénominateur pour avoir l'expression sous forme d'un quotient.
- Si on est en présence de x^2 ou de x^3, on factorise.
- Nous avons donc à résoudre une équation produit ou une équation quotient. cf. les savoir-faire précédent.

Exercice 7.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(5x-3)(2x+1) > (2x+1)(x-4)$
2. $x^2 \geq 4x$
3. $(x+5)(x+3) > 15$

Exercice 7.10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x-4}{x+8} > -1$
2. $\dfrac{x}{2x-10} \geq 2$
3. $\dfrac{1-4x}{x-3} < -4$