2.1 Limites de suites

Maths Spé terminale - JB Duthoit

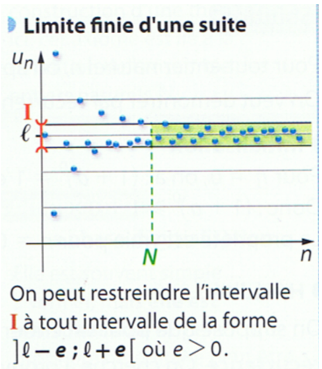
On va étudier le comportement d'une suite (u_n), c'est-à-dire étudier les propriétés du nombre u_n lorsque n devient de plus en plus grand (variations, encadrement comportement à l'infini...) Soit (u_n) une suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Limite finie ou infinie en l'infini

Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel l si, tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
On dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel l ou qu'elle est convergente.

Interprétation graphique :



La définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de l A partir du rang N, toutes les valeurs u_n appartiennent à l'intervalle I

Définition

Si la suite (u_n) ne converge pas, elle est **divergente**.

Remarque

Lorsqu'elle existe, la limite l est unique (l'unicité se démontre par l'absurde)

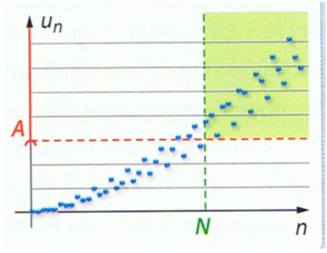
Définition

Soit $A \in \mathbb{R}$

- La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
  On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- La suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si, tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
  On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

☛ Interprétation graphique :

La définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi grand soit-il. A partir du rang N, toutes les valeurs u_n appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$.



Remarque

- Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$
- Si une suite (u_n) diverge alors soit cette suite a une limite égale à $+\infty$, soit elle a une limite égale à $-\infty$, soit elle n'a pas de limite. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ diverge sans avoir de limite.

2.1.2 Limites de suites usuelles

Propriété

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout $k \geq 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$
- Pour tout $k \geq 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Propriété

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$.

- si $q = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ et donc (u_n) converge vers 1.
- si $q = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et donc (u_n) converge vers 0.
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Dans les autres cas, la suite (u_n) diverge.

Remarque

Nous démontrerons bientôt (Démonstration 3, exigible) que si si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Savoir-Faire 2.1

Savoir écrire un algorithme de recherche de seuil

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n)
2. Écrire un programme en Python permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1000$
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de cet entier.