9.1 Équation différentielle et primitives

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

9.1.1 Equation différentielle

De nombreux phénomènes de physique peuvent être modélisé par une relation entre une fonction g et sa dérivée g'.

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On dit que g est solution de l'équation $y' = f$, appelée **équation différentielle** dont l'inconnue est la fonction y. , si et seulement si g est dérivable et si pour tout x de I, on a $g'(x) = f$

Savoir-Faire 9.35

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

1. Soit l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = 6x + 1$, pour tout réel x. Déterminer les réels a et b de telle sorte que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.

Exercice 9.1

1. Soit l'équation différentielle $y' = 6x^2 + 8x$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $x^2y' + (x - 1)y = 2x^2 - x$, pour tout réel x. Déterminer les réels a et b de telle sorte que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{-1}{x^2}$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution de cette équation.

9.1.2 Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On dit que F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.
Autrement dit, toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$ est une primitive de f sur I.

Vocabulaire

$y' = f$ signifie que, pour tout $x \in I$, $y'(x) = f(x)$

Propriété

- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
- Soit f une fonction continue. Deux primitives de f différent d'une constante.

(Exigible)

MONTRER QUE DEUX PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION CONTINUE f DIFFÈRENT D'UNE CONSTANTE

Soit f une fonction continue. Soit F et G deux primitives de la fonction f. Monter que F et G diffèrent d'une constante.

Savoir-Faire 9.36

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION ESTPRIMITIVE D'UNE AUTRE FONCTION

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de f, puis en déduire toutes les primitives de f.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5ln(x-2)$ est une primitive de f, puis en déduire toutes la primitive de f qui s'annule en 3.

9.1.3 Primitives de fonctions usuelles

On rappelle ici les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les dérivées :

Propriété (rappel sur les dérivées de fonctions usuelles)

Fonction usuelle	Fonction dérivée	Fonction usuelle	Primitive
$f(x) = mx + p, \mathbb{R}$	$f'(x) = m, \mathbb{R}$	$f(x) = m, \mathbb{R}$	$F(x) = mx, \mathbb{R}$
$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x, \mathbb{R}$	$f(x) = x, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \mathbb{R}$
$f(x) = x^3, \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2, \mathbb{R}$	$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3, \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}, \mathbb{R}$	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}, [0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, [0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}, [0; +\infty[$
$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$F(x) = e^x, \mathbb{R}$
$f(x) = ln(x), [0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}, [0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}, [0; +\infty[$	$F(x) = ln(x), [0; +\infty[$
$f(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x), \mathbb{R}$	$f(x) = sin(x), \mathbb{R}$	$F(x) = -cos(x), \mathbb{R}$
$f(x) = sin(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$f(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$F(x) = sin(x), \mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)$, $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$, $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$F(x) = tan(x)$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété (rappels sur les opérations de dérivées)

Dérivation	Primitive	
	Fonction	*Primitive*
$(u+v)' = u' + v'$	$u' + v'$	$u + v$
$(\lambda u)' = \lambda u'$	$\lambda u'$	λu
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$		
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$		
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$	$\frac{u'}{u^3}$	$\frac{-1}{2u^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$	$u'u^n, n \geq 2$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}, n \geq 2$
$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$	$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}, n \geq 2$
$(e^u)' = u' \times e^u$	$u' \times e^u$	e^u
$(ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u}$	$ln\|u\|$
$(cos(u))' = -u' \times sin(u)$	$u' sin(u)$	$-cos(u)$
$(sin(u))' = u' \times cos(u)$	$u' cos(u)$	$sin(u)$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$