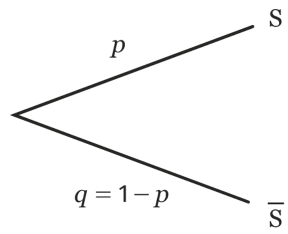
10.2 Loi binomiale

10.2.1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Soit p un nombre réel appartenant à $[0;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement **succès** S et **échec** $\bar{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



Savoir-Faire 10.4

SAVOIR RECONNAÎTRE UNE ÉPREUVE DE BERNOULLI

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Pour chacune des épreuves suivantes, indiquer s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et préciser le succès et sa probabilité le cas échéant.

1. On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau ou trèfle).
2. On vérifie que la carte est un pique.
3. On regarde si la carte n'est pas un pique.
4. On vérifie que la carte est un as.
5. On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.).
6. On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet)

Définition

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0;1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p.
Autrement dit, on a $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

10.2.2 Schéma de Bernoulli

Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, identiques et indépendantes.

Propriété

L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et p est $\left\{S; \bar{S}\right\}^n$.

10.2.3 Loi binomiale

Définition

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**, et elle est noté $\mathcal{B}(n; p)$.

Savoir-Faire 10.5

Savoir reconnaître si une variable suit une loi binomiale

On considère un jeu de 32 cartes. On tire deux cartes de ce jeux, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de carreaux obtenus. Dans chacune des situations suivantes, dire si X suit une loi binomiale, et préciser éventuellement ces paramètres.

1. On tire deux cartes l'une après l'autre, sans remettre la première.
2. On tire une carte l'une après l'autre, en remettant la première dans le jeu.

Méthode :

Pour bien justifier que la variable aléatoire étudiée suit une loi binomiale, il faut s'assurer que :

- **Répétition** d'une expérience ayant **deux** issues (succès et échec)
- Expériences **identiques**
- Expériences **indépendantes**
- X **compte le nombre de succès**

Exercice 10.4

On lance trois fois de suite le même dé, où le succès S est l'obtention d'un 6.

1. Représenter l'expérience aléatoire par un arbre pondéré
2. Donner l'ensemble des issues possibles.

Exercice 10.5
On lance 5 fois de suite un dé bien équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui, à chaque série de 5 lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparaît.
X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser les paramètres.

Exercice 10.6
La ville de Las-Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour, et on estime que 95% des touristes viennent à Las-Vegas pour jouer au casino. On interroge au hasard 10 touristes différents dans la rue. On note X la variable aléatoire égale au nombre de touristes affirmant être venu à Las-Végas pour jouer au casino. Montrer pourquoi X peut-être considéré comme une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

Démonstration 14- Exigible -

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Soit k un entier compris entre 0 et n.
Montrer que $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Remarque

Sur la calculatrice Numworks, se rendre sur l'onglet `Probabilités`, puis :

- Choisir `Binomiale`
- Rentrer la valeur de `n` et `p`, puis `suivant`
- Choisir le symbole qui correspond à $P(X=k)$, puis renseigner la valeur de `k`

Savoir-Faire 10.6

Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une variable binomiale

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3;\frac{1}{4}\right)$. Déterminer la valeur exacte $P(X=1)$ puis $P(X\leq 2)$
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10;\frac{1}{4}\right)$.
   a) Déterminer la valeur exacte $P(X=7)$ puis une valeur approchée à 0.001 près.
   b) Calculer la valeur exacte de $P(X\leq 9)$

Savoir-Faire 10.7

Savoir résoudre un problème de seuil, de comparaison et d'optimisation

On lance n fois la même pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire, qui à chaque série de n lancers, associe le nombre de "Pile" obtenus.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois "Pile" dépasse 0.999.

Exercice 10.7
Dans un jeu vidéo, la probabilité de réussir le lancement d'un sort spécial est 0.7.

1. Le sort est lancé 4 fois de suite, et on suppose que la réussite ou non d'un sort n'a pas d'influence sur les autres.
   a) Calculer la probabilité qu'aucun des sorts ne soient réussi
   b) Calculer la probabilité qu'au moins 1 sort soit réussi
2. On lance le sort n fois de suite, et on note X la variable aléatoire qui, aux n lancement de sorts, associe le nombre de lancements de sorts réussis.
   a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n
   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité qu'au moins un sort soit lancé avec succès dépasse 0.999

Exercice 10.8
On s'intéresse au jeu de Loto, qui consiste à tirer 5 boules parmi 49 boules numérotées de 1 à 49. On s'intéresse ici à la probabilité de gagner le gros lot :-)

1. On joue au jeu du Loto, quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?
2. On décide de jouer de façon systématique jouer 3 fois par semaines pendant n semaine(s), et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on gagne le gros lot.
   a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n
   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité de gagner le gros lot dépasse 0.9.

10.2.4 Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. On a alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration 15- Exigible -

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. Montrer que $E(X) = np$ et que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Savoir-Faire 10.8

Savoir utiliser l'espérance et la variance

Une étude faite dans un restaurant montre que 85 % des clients consomment un dessert. On interroge dix clients du restaurant. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients commandant un dessert parmi ceux interrogés.

1. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire X.
2. Calculer et interpréter l'écart type (arrondi au millième) de la variable aléatoire X.

Méthode :

- Avant d'appliquer les résultats obtenus dans la propriété, il est tout d'abord essentiel de bien justifier que la variable aléatoire étudiée suit une loi binomiale :
  - **Répétition** d'une expérience ayant **deux** issues (succès et échec)
  - Expériences **identiques**
  - Expériences **indépendantes**
  - X **compte le nombre de succès**
- C'est seulement après avoir justifié que X suit une loi binomiale que nous pouvons utiliser les égalités de la propriété.

Exercice 10.9

Une étude menée dans une salle de sport montre que 70 % des abonnés fréquentent régulièrement les cours collectifs. On interroge quinze abonnés au hasard. On suppose que cette expérience peut être assimilée à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'abonnés déclarant fréquenter régulièrement les cours collectifs parmi ceux interrogés.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire X.
3. Calculer et interpréter l'écart type (arrondi au millième) de la variable aléatoire X.

Exercice de synthèse 10.10

Dans une usine qui fabrique des pièces mécaniques de précision, les normes de qualité impliquent que chaque pièce est défectueuse avec une probabilité égale à $0,05$. Dans la production, on prélève 20 pièces. Le nombre de pièces est suffisamment important pour assimiler ces tirages à des tirages identiques et indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses.
On donnera les résultats à 0.0001 près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse, puis celle qu'exactement une pièce le soit.
3. Calculer la probabilité qu'au plus trois pièces soient défectueuses.
4. En moyenne, sur un très grand nombre de lots de 20 pièces, combien compte-t-on de pièces défectueuses par lot ?

Exercice de synthèse 10.11

Dans une usine de matériel électronique, on considère que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est égale à $0,04$, indépendamment des autres pièces. Les pièces sont conditionnées en boîtes de 25 pièces chacune. À des fins de contrôle, on prélève 30 boîtes dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler cette expérience à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans une boite.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Une boîte est considérée comme conforme si elle contient au plus trois pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une boîte soit non conforme ? On donnera les résultats à 0.0001 près.
3. Lors du contrôle des 30 boîtes, quelle est la probabilité qu'au moins trois boîtes soient non conformes ? On pourra considérer la variable aléatoire Y égale au nombre de boîtes non conformes.
4. En moyenne, sur un très grand nombre de lots de 30 boîtes, combien de boîtes parmi les 30 sont non conformes ?

Exercice de synthèse 10.12

Pour un groupe de n cobayes, au lieu d'analyser individuellement les échantillons sanguins, on applique la procédure dite de *group testing* suivante. Les échantillons sont prélevés puis une partie de chaque échantillon est mélangée avec les autres. Ce mélange est analysé.
On donnera tous les résultats à 0.001 près.

- Si le résultat est négatif, aucun patient n'est malade.
- Si le résultat est positif, on analyse individuellement chaque échantillon.

On cherche à trouver la valeur de n permettant de limiter au maximum le nombre de tests à faire.

1. Dans cette question, $n = 5$.
   a) Si le résultat est négatif, combien de tests au total ont été réalisés ? Même question si le résultat est positif.
   b) On suppose à partir de maintenant que la probabilité qu'un patient soit malade est $p = 0,001$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tests réalisés. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) En déduire le nombre moyen de tests et l'économie réalisée.
2. Reprendre les questions précédentes où n est un entier naturel quelconque.
3. On cherche à tester $N = 110880$ patients. Minimiser le nombre de tests à réaliser en déterminant la taille optimale du groupe n. On pourra supposer que n divise N.

Exercice de synthèse 10.13

Pour procéder au contrôle d'un lot important d'articles dont la proportion d'articles défectueux dans le lot est notée p, on adopte la règle suivante :

- On prélève un article au hasard : s'il est mauvais, on refuse le lot et s'il est bon, on prélève un deuxième article.
- Si le deuxième article est mauvais, on refuse le lot et s'il est bon, on prélève un troisième article.
- Si le troisième article est mauvais, on refuse le lot et s'il est bon, on accepte le lot.

Le nombre important d'articles dans le lot permet d'assimiler le contrôle à un tirage avec remise.

1. a) Déterminer, en fonction de p, la probabilité de refuser le lot.
   b) Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre d'articles prélevés. Déterminer l'espérance de Y.
2. Comparer ces résultats à ceux que l'on aurait obtenus en prélevant directement trois articles et en refusant le lot si au moins l'un de ces articles était mauvais.