9.1 Découvrir les principes de dénombrement

Maths Spé terminale - JB Duthoit

9.1.1 Ensemble fini, cardinal et principe additif

Définition

Un **ensemble** E est une collection d'objets distincts que l'on appelle **éléments**.
Si x un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Remarque

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$ et il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a; a\} = \{a\}$.

Exemple

$E = \{a; b; c; d\}$ est un ensemble à 4 éléments. Les ensembles $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ont une infinité d'éléments.

Remarque

- La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (ou bien aux deux ensembles)
- L'intersection $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B

Définition

Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $card(E)$.
En particulier $card(\emptyset) = 0$

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{pomme; poire; cerise; abricot; kiwi\}$ alors $card(E) = 5$.

Définition

Deux ensembles E et F sont **disjoints** lorsque $E \cap F = \emptyset$

Propriété - principe additif -

Soit p un nombre entier naturel avec $p > 1$.
Si $E_1, E_2, E_3, ..., E_p$ sont p ensembles disjoints deux à deux alors :

$$card(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + ... + card(E_p)$$

Exemple

On considère les ensembles $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{x; y; z\}$.
$A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B) = 4 + 3 = 7$.

9.1.2 Couple, triplet et k-uplet

Définition

Soit k un nombre entier naturel avec $k > 1$.
On appelle **couple**, **triplet**, **k-uplet** d'un ensemble E une collection ordonnée respectivement de deux objets de E, trois objets de E, de k objets de E.

Exemple

- $(4; 5)$, $(m; k)$ et $(11; a)$ sont des couples (ou 2-uplets)
- $(7; \beta; n; 4; 5; \pi)$ est un 6-uplet

Remarque

- Les coordonnées d'un point dans un repère du plan sont des 2-uplets de nombres réels
- Un k-uplet s'appelle aussi une k-liste

Exercice 9.1

1. Soit $E = \{a; b; c\}$ un ensemble. Donnez tous les couples de E. Comptez-les !
2. Soit $F = \{d; e\}$ un ensemble. Donnez tous les triplets de E. Comptez-les !
3. Soit E un ensemble de n éléments. Conjecturer en fonction de n le nombre de k-uplets de E.

Propriété

Le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments est n^k.
(Si $card(E) = n$ alors n^k est le nombre de k-uplets d'éléments de E)

Savoir-Faire 9.36

UTILISER LES K-UPLETS POUR DÉNOMBRER

1. Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 10 chiffres commençant par 06 ?
2. Un mot de passe est composé de 7 lettres minuscules. Combien de mots de passe sont-ils possibles ?

Exercice 9.2

1. On lance sept fois une pièce de 1 € pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles
2. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à l'aide des lettres A, E, I, O et U ?
3. Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

9.1.3 Produit cartésien et principe multiplicatif

Définition

Soit E, F, G trois ensembles.

- Le **produit cartésien** de E par F est l'ensemble des couples $(a; b)$ où $a \in E$ et $b \in F$.
  Il est noté $E \times F$ (se lit "E croix F")
- Le **produit cartésien** $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.
- Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ de p ensembles est l'ensemble des p-uplets $(a_1; a_2; ...; a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$,..., $a_p \in E_p$.

Remarque

Notation : $E \times E$ est noté E^2 et $E \times E \times E$ est noté E^3

Exercice 9.3

On considère les ensembles $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Déterminer les ensembles $E \cup F$, $E \cap F$, $E \times F$, E^2, puis donner 2 éléments de E^5.

Remarque

- Dans les couples, triplets ou k-uplets, l'ordre compte : si $E \neq F$ alors $E \times F \neq F \times E$
- Un produit cartésien peut être représenté par un arbre, appelé aussi arbre de choix. Un élément du produit cartésien correspond alors à un chemin sur cet arbre.

Propriété - principe multiplicatif -

Si E_1, E_2, E_3,...,E_p sont p ensembles finis alors

$$card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_p)$$

Remarque

⚠ Le signe $\times$ dans $card(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F alors que celui dans $card(E) \times card(F)$ symbolise la multiplication de deux entiers.

Exemple

Si on considère les ensembles $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors
$card(E \times F) = card(E) \times card(F) = 3 \times 2 = 6$ et $card(E \times E) = 3 \times 3 = 9$.
De même : $card(E^5) = 3^5 = 243$: c'est le nombre de 5-uplets d'éléments de E

Savoir-Faire 9.37

UTILISER LES PRINCIPES ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS

1. Soient deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ et de $E \times F$, puis décrire $E \cup F$ et $E \times F$.

2. Un restaurant propose un menu "plat+dessert". Un client choisi cette formule et doit choisir un plat parmi les 3 viandes et les 2 poissons proposés, puis un dessert parmi les 4 desserts proposés. Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire le menu.

Exercice 9.4

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9 puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Exercice 9.5

Pour aller de Marseille à Paris, Jean souhaite faire une étape à Lyon. Entre Marseille et Lyon, Jean a le choix entre deux itinéraires qui utilisent l'autoroute, et trois autres qui n'utilisent pas l'autoroute. Ensuite, entre Lyon et Paris, il a le choix entre deux itinéraires.
Combien de parcours différents Jean peut-il emprunter pour aller de Marseille à Paris en passant par Lyon ?

Exercice 9.6

1. Au cours d'une soirée entre célibataires, il y a 6 femmes et 5 hommes. Combien y a-t-il de couples mixtes (1 homme et 1 femme) possibles ?

2. Jeanne va dans un refuge de la SPA et décide d'adopter un furet, et en plus, un chien ou un chat. La SPA possède 4 chiens, 5 chats et 3 furets. Quel est le nombre de choix possibles pour Jeanne ?

Exercice 9.7

On s'intéresse aux familles composées de 6 enfants. On note, dans l'ordre des naissances, le sexe des enfants, avec le codage F pour fille et G pour garçon. Par exemple, on note (F,G,G,G,G,G) quand l'ainée est une fille et les 5 autres enfants des garçons. On appelle cela une "fratrie".
Déterminer :

1. Le nombre total de fratries

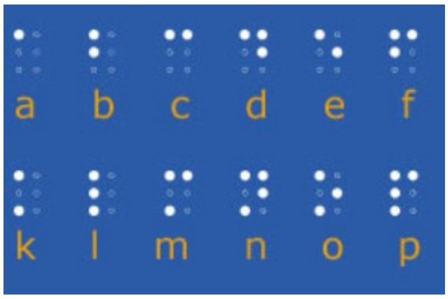
2. Le nombre total de fratrie dont l'ainé est un garçon

3. Le nombre total de fratrie dont le 2ème, le 4ème et le 5ème enfant sont des filles.

Exercice 9.8

L'écriture braille est constituée de symboles composés d'un assemblage de 6 points. On a deux possibilités pour chaque point : un petit point ou bien un gros point, tous les deux en relief, comme le montre l'image ci-contre.

1. Combien de symboles différents y a-t-il dans cette écriture ?
2. Si une personne arrive à déchiffrer les 3 points de la première colonne, mais pas les 3 autres, combien de possibilités lui rest-t-il pour déchiffrer le symbole ?



9.1.4 Nombre de parties d'un ensemble

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensembles (ou le nombre de parties) de E est égal à 2^n

Exemple

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer toutes les parties de E.

Démonstration 11- Exigible -