5.4 Limites et comparaison

5.4.1 Théorèmes de comparaison

Propriété Comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$, avec A désignant un réel ou $-\infty$.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a.

Propriété Comparaison

Soient f,g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty$, avec A désignant un réel ou $-\infty$. Soit l un réel.

- Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Remarque

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$ et en un réel a. Cette propriété est souvent appelée "théorème des gendarmes"

Savoir-Faire 5.19

Savoir calculer une limite avec les théorèmes de comparaison

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + cos(x)/$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 5.27

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - 3cos(x))$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x sin(x))$

Exercice 5.28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel x, $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

5.4.2 Croissances comparées

Propriété

Soit n un entier naturel non nul. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démonstration 5.5

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Savoir-Faire 5.20

Savoir calculer une limite avec la croissance comparée

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 1)e^x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x}$

Exercice 5.29

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{4e^x}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{e^x}{2x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{e^x}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - 3x}{e^x}$