3.1 Vecteurs de l'espace

3.1.1 Définitions

Définition

Les points A et B étant distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction
- son sens (de A vers B)
- sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est la longueur AB.

Propriété

Soient A,B,C et D quatre points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $AB\underline{DC}$ est un parallélogramme.
- D est l'image de C par la translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Remarque

- La translation qui transforme M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé vecteur nul ; on le note $\vec{0}$ ainsi $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

3.1.2 Opérations sur les vecteurs

Définition règle du parallélogramme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Propriété - Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Définition - Produit d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que le vecteur $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$
- pour norme $|k| \times ||\vec{u}||$

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k : $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

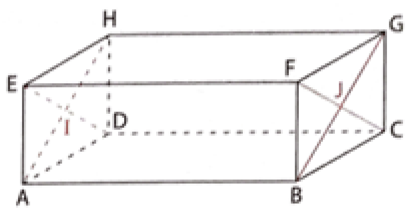
Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace

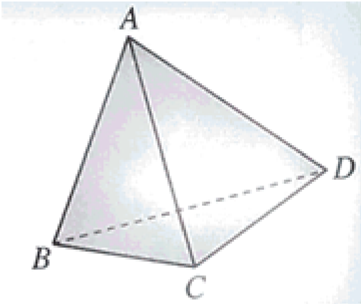
Exercice 3.1



$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.

1. Déterminer trois vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FG}$
2. Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$?
3. Compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{E...}$

Exercice 3.2



On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

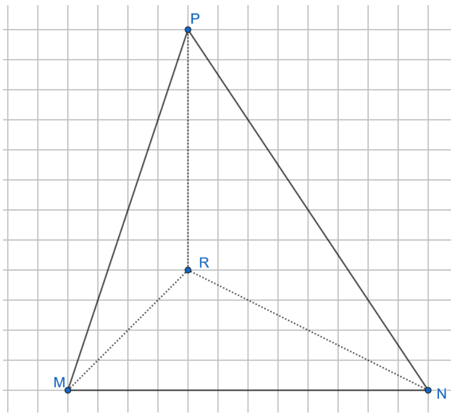
3.1.3 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition

Dire que $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}$,$\vec{w}$ et $\vec{t}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}$.

Exercice 3.3

Représentation de combinaisons linéaires de vecteurs

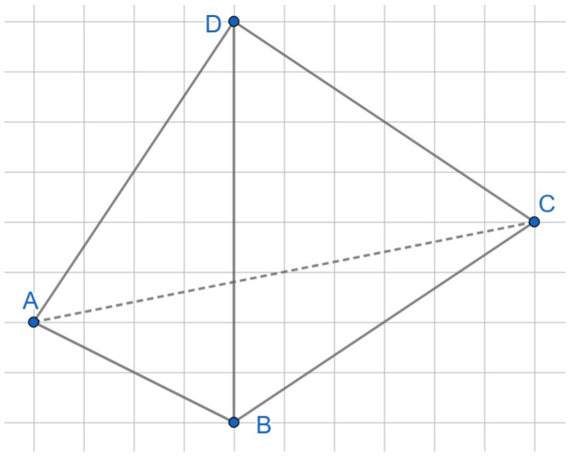


Sur la figure ci-dessus, $MNPR$ est un tétraèdre. S, T et U sont des points de l'espace tels que $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MR} + \frac{1}{4}\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{PT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PU} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PN}$.

1. Recopier la figure
2. Placer, en laissant les traits de construction, les points S, T et U

Savoir-Faire 3.1

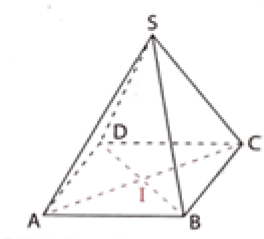
Savoir exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

1. Recopier la figure, puis placer, sur la figure les points I et J
2. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$
3. Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
4. En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

Exercice 3.4

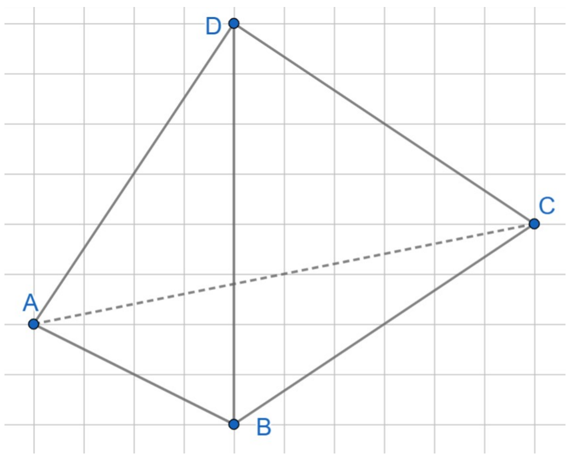


$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme $ABCD$ de centre I.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{SI}$
2. En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$

Savoir-Faire 3.2

Savoir exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs

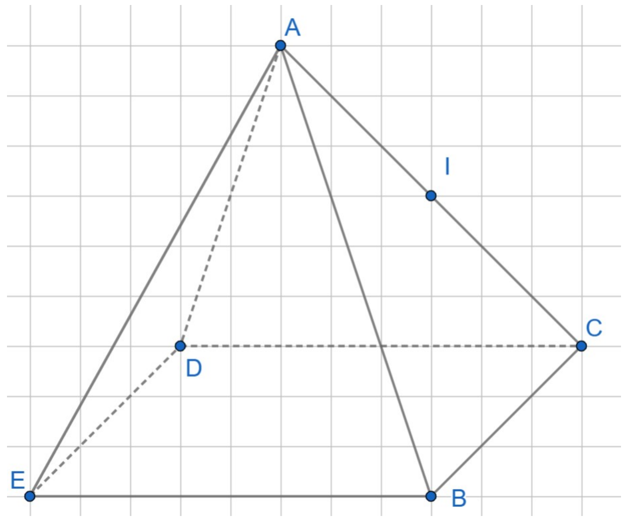


Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

1. Recopier la figure, puis placer, sur la figure les points I et J
2. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$
3. Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
4. En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

Savoir-Faire 3.3

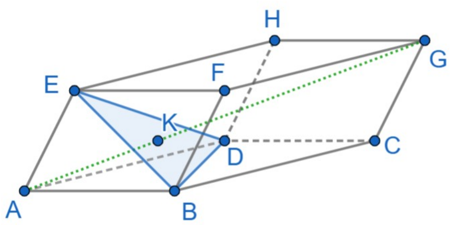
Savoir démontrer un alignement avec le calcul vectoriel



Sur la figure ci-contre, $ABCDE$ est une pyramide de sommet A et de base le parallélogramme $BCDE$. On appelle I le milieu de $[AC]$.

1. Recopier la figure, puis placer, sur la figure le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
3. Exprimer $\overrightarrow{EI}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
4. En déduire que les points E, I et G sont alignés.

Exercice 3.5



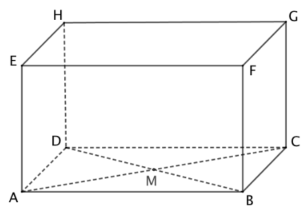
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$
2. a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

   b) En déduire que A, K et G sont alignés.

Exercice 3.6

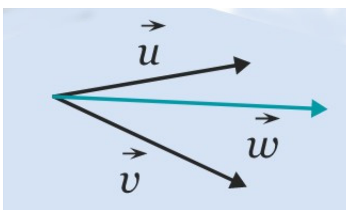
Dans le parallélépipède rectangle ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



3.1.4 Vecteurs coplanaires

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace non colinéaires.
Si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, cela signifie qu'il existe des réels a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
On dit alors que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** .



Propriété

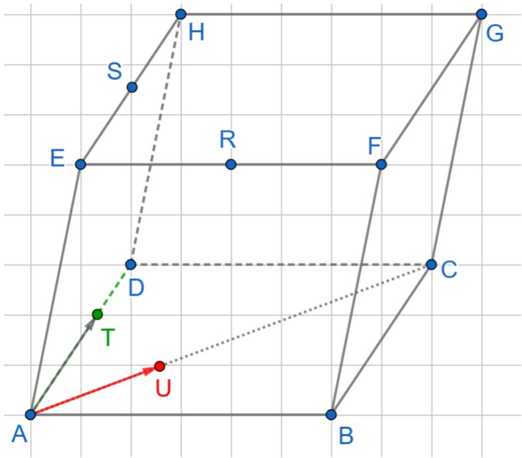
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas **coplanaires** si et seulement si l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Remarque

- Si deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont colinéaires alors ils sont tous trois coplanaires.

Savoir-Faire 3.4

Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires



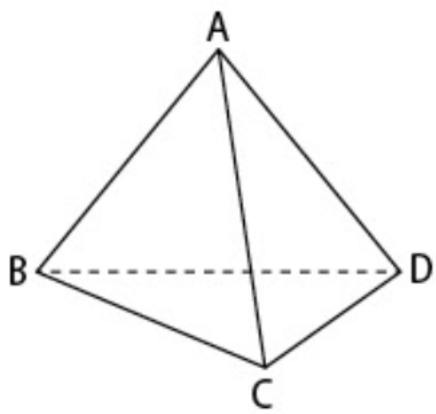
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. R est le milieu de $[EF]$ et S le milieu de $[EH]$.
Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Exprimer $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Calculer $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.

Exercice 3.7

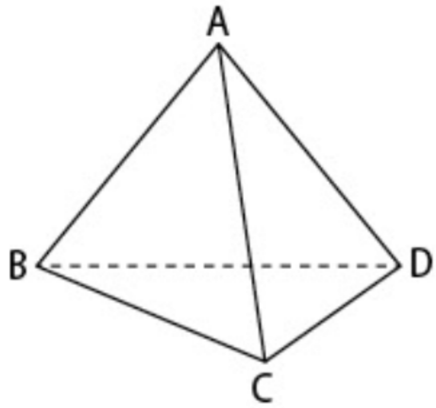
On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
I,J,K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$,$[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$.

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.



Exercice 3.8

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
Le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



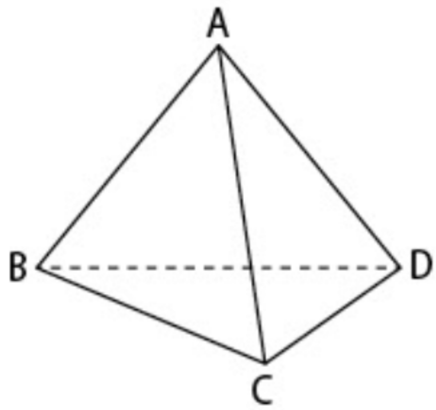
Exercice 3.9

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.
M,N,P et Q sont définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = -4\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$,$\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Exprimer $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Que dire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$?



3.1.5 Vecteurs linéairement indépendants

Définition

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si et seulement si l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.