12.1 Fonctions sinus et cosinus

12.1.1 Quelques propriétés

Propriété

- Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x)$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = -sin(x)$
- Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = sin(x)$. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = cos(x)$

Propriété périodicité

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $sin(x + 2\pi) = sin(x)$ et $cos(x + 2\pi) = cos(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** , de période 2π.

Propriété parité

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $sin(-x)) = -sin(x)$ et $cos(-x) = cos(x)$. On dit que les fonction cosinus est paire, et que la fonction sinus est impaire. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et celle de la fonction sinus symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos\,(u(x))$ et $g(x) = sin\,(u(x))$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -u'(x)sin\,(u(x))$ et $g'(x) = u'(x)cos\,(u(x))$.

Démonstration 21- -

La démonstration, facile, utilise la formule de la dérivée d'une fonction composée.

Démonstration 22- -

- Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$. Une primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -cos(x)$
- Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = cos(x)$. Une primitive de la fonction g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = sin(x)$

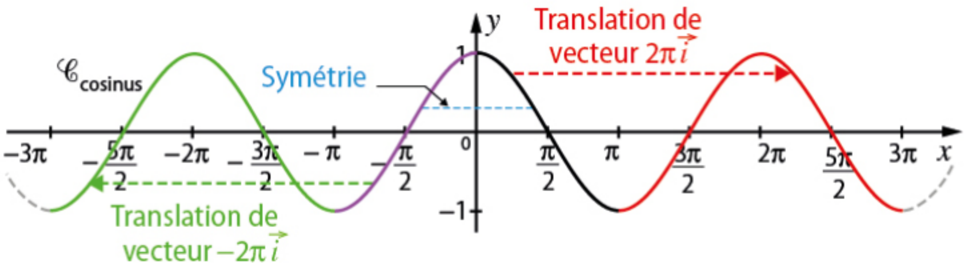
Démonstration 23- -

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de la fonction $u'cos(u)$ est $sin(u)$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de la fonction $u'sin(u)$ est $-cos(u)$

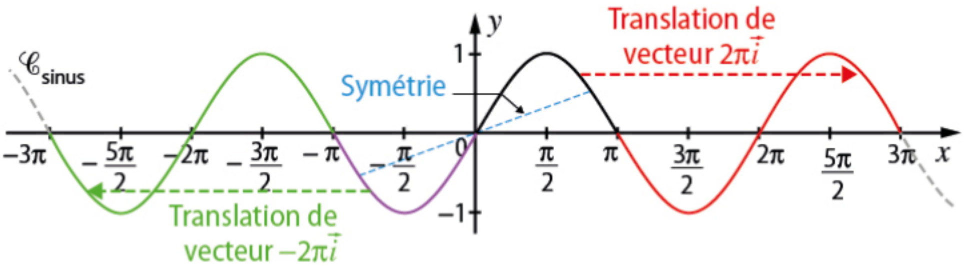
12.1.2 Courbes représentatives

Pour tracer la courbe de la fonction cosinus, il suffit de la tracer sur $[0;\pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.
Pour la fonction sinus, il suffit de la tracer sur $[0;\pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'origine (fonction impaire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.

Courbe de la fonction cosinus



Courbe de la fonction sinus



12.1.3 Variations des fonctions trigonométriques

Exercice 12.1
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x)$ et $g(x) = sin(x)$. En utilisant le cercle trigonométrique, étudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Propriété

x	0	π
$f(x) = cos(x)$	↘	

x	à	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = sin(x)$	0 ↗	1	↘ 0

Savoir-Faire 12.59

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE

Dans chaque cas f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = sin(x) \times cos(x)$
2. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{3 + sin(x)}$
3. $f(x) = cos(3x + 5)$

Savoir-Faire 12.60

SAVOIR ÉTUDIER DES FONCTIONS COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin^2(x) - 2cos(x) + 1$.

1. a) Étudier la parité de f
   b) Montrer que f est périodique de période 2π.
   c) En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variations sur $[-\pi; 3\pi]$.

Savoir-Faire 12.61

SAVOIR DÉTERMINER DES PRIMITIVES COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = sin(3x) - cos(2x)$
2. $f(x) = sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $f(x) = sin(x)cos(x)$

Exercice 12.2

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = sin(x)cos^2(x)$
2. $f(x) = cos(x)e^{sin(x)}$
3. $f(x) = sin(x)\left(1 - cos(x)\right)^3$

Exercice 12.3

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur I. Déterminer une primitive de f sur I.

1. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$, $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}}$, $I =]0; \pi]$