9.1 Équation différentielle et primitives

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

9.1.1 Équation différentielle

De nombreux phénomènes de physique peuvent être modélisé par une relation entre une fonction g et sa dérivée g'.

Définition

Une **équation différentielle** est une équation pour laquelle l'inconnue recherchée n'est pas une valeur mais une fonction et pour laquelle l'égalité proposée fait intervenir la dérivée de cette fonction.
Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables qui vérifient l'égalité.

Savoir-Faire 9.1

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

1. Soit l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = 6x + 1$, pour tout réel x. Déterminer les réels a et b de telle sorte que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.

Exercice 9.1

1. Soit l'équation différentielle $y' = 6x^2 + 8x$, pour tout réel x. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ est une solution de cette équation.
2. Soit l'équation différentielle $x^2y' + (x-1)y = 2x^2 - x$, pour tout réel x. Déterminer les réels a et b de telle sorte que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.
3. Soit l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{-1}{x^2}$, pour tout réel $x \neq 0$. Montrer que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est une solution de cette équation.

9.1.2 Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On dit que F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.
Autrement dit, toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$ est une **primitive** de f sur I.

Vocabulaire

$y' = f$ signifie que, pour tout $x \in I$, $y'(x) = f(x)$

Propriété

- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
- Soit f une fonction continue. Deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Démonstration 11(Exigible) :

⚠ *les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.*

MONTRER QUE DEUX PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION CONTINUE f DIFFÈRENT D'UNE CONSTANTE

Soit f une fonction continue sur I. Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I. Monter que F et G diffèrent d'une constante.

Savoir-Faire 9.2

SAVOIR VÉRIFIER QU'UNE FONCTION EST PRIMITIVE D'UNE AUTRE FONCTION

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de f, puis en déduire toutes les primitives de f.
2. Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Montrer que la fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = 2x + 5ln(x-2)$ est une primitive de f, puis en déduire la primitive de f qui s'annule en 3.

Exercice 9.2

Soient f et g deux fonctions définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ et $g(x) = -ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1

Exercice 9.3

Soient F et f deux fonctions définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + 5$. Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 9.4

Soient F et f deux fonctions définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $F(x) = x - ln(x+1)$. Montrer que F est une primitive de f sur $]-1; +\infty[$.

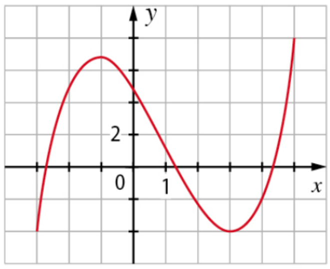
Exercice 9.5

Soit F la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par $F(x)=(x-2)\sqrt{2-x}$.

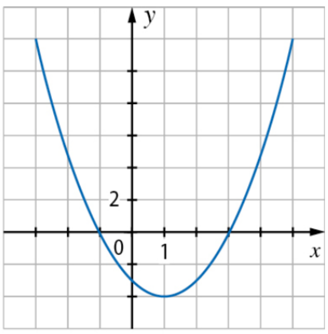
1. Calculer $F'(x)$
2. En déduire une primitive sur $]-\infty;2[$ de la fonction f définie sur $]-\infty;2[$ par $f(x)=\sqrt{2-x}$

Exercice 9.6

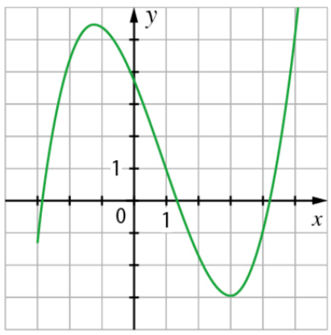
Soit f une fonction définie sur $[-3;5]$. La courbe ci-contre représente une primitive F de f.



Parmi les deux courbes ci-dessous, laquelle représente la fonction f ? Justifier !



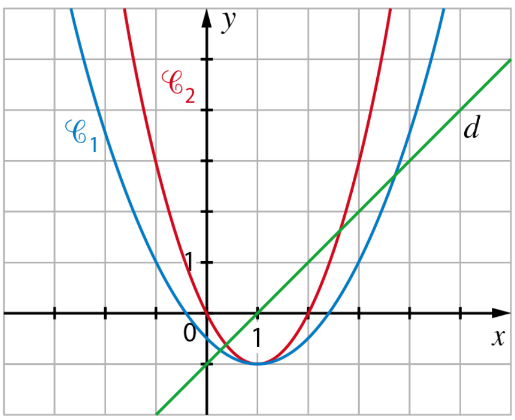
courbe 1



courbe 2

Exercice 9.7

Soit f une fonction dont La courbe représentative est la droite d.
On considère également les courbes C_1 et C_2 représentatives de fonctions g et h. Laquelle des fonction, parmi g et h, est une primitive de f ?



9.3 Équations différentielles

Maths Spé terminale - JB Duthoit

9.3.1 Équation différentielle $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réel.

Démonstration 12-Exigible au bac- :

⚠ *les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.*

Soit a un réel. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay$.

1. Partie directe :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$ avec C un réel. Montrer que f est bien solution de (E).
2. Réciproque. Soit f une solution de (E). Montrons que f est nécessairement de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec C un réel.

Savoir-Faire 9.5

Savoir une équation différentielle de la forme $y' = ay$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = -4y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(2) = 1$

Exercice 9.17

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.
2. Représenter sur votre calculatrice les courbes de ces fonctions solutions, en prenant pour C les valeur 1,2,-1 et -2. on remarquera que l'axe des abscisses et une asymptote horizontale à ces courbes (on peut choisir xmin = -2, xmax=1, ymin= -3 et ymax = 3)

Exercice 9.18

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 5y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 4$

Exercice 9.19

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + 6y = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 1$

Exercice 9.20
Déterminer l'ensemble des solutions de chacune de ces équations différentielles :

1. $y' = -2y$
2. $-y' + 0.1y = 0$
3. $3y' - 2y = 0$
4. $y' + ln(2)y = 0$

9.3.2 Équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 9.21
On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-b}{a}$ est une solution de (E).

Propriété (admise)
Soient a et b sont des réels avec $a \neq 0$.
L'ensemble des solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 définie par $f(x) = \frac{-b}{a}$ est la solution particulière constante de (E).

Vocabulaire
On dit que $y' = ay$ est l' **équation homogène** de $y' = ay + b$

Savoir-Faire 9.6
Savoir une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$
Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 2$.

Méthode :
En 3 points :

- On trouve la solution particulière constante de (E) (la fonctions f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \frac{-b}{a}$).
- On détermine l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$. (l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.)
- On conclut (l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + f_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.)

1. Déterminer la solution particulière constante de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (E') : $y' = ay$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 9.22
1. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 3$.
   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).
   b) En déduire les solutions de (E).
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 4y = 8$.
   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).

b) En déduire les solutions de (E).

3. Soit l'équation différentielle $(E) : 2y' + 6y = 1$.

   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).

   b) En déduire les solutions de (E).

   c) En déduire la solution de (E) qui vérifie $f(2) = 0$.

9.3.3 Équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété (admise)

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto g(x) + f_0(x)$, où g est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 une solution particulière de (E).

Savoir-Faire 9.7

SAVOIR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' = ay + f$

Méthode :

En 3 points :

- On trouve une solution particulière de (E) (En général, l'énoncé nous donne une indication).
- On détermine l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$. (l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.)
- On conclut (l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + f_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.)

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = y + x - 3$.

1. Déterminer les réels m et p telle que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(E') : y' = ay$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 9.23

1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

   a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

   b) En déduire toutes les solutions de (E).

2. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x$.

   a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E).

   b) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 9.24

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 4y = 3xe^{2x}$. On note aussi (E') l'équation différentielle $y' + 4y = 0$

1. Résoudre l'équation (E').
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 9.25

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^{x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{x}$ soit une solution particulière de (E).
2. En déduire la solution générale de (E).
3. En déduire la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine, dans une repère donné.

Exercice 9.26

⚠ Extrait de l'exercice 4 du bac du 17 juin 2025, suite de l'exercice **??**

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée *posidonie*, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- f est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0{,}02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

   Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0{,}3y + 0{,}02$.
2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.