

2.1

Limites de suites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

On va étudier le comportement d'une suite (u_n) , c'est-à-dire étudier les propriétés du nombre u_n lorsque n devient de plus en plus grand (variations, encadrement comportement à l'infini...) Soit (u_n) une suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Limite finie ou infinie en l'infini

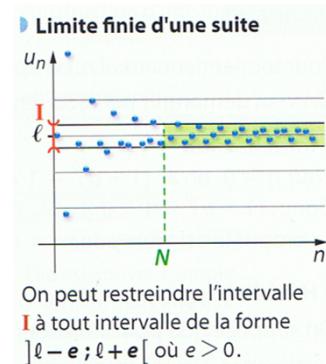
Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel l si, tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

On dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel l ou qu'elle est convergente.

Interprétation graphique :



La définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de l . À partir du rang N , toutes les valeurs u_n appartiennent à l'intervalle I .

Définition

Si la suite (u_n) ne converge pas, elle est **divergente**.

Remarque

Lorsqu'elle existe, la limite l est unique (l'unicité se démontre par l'absurde)

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}$

- La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si, tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

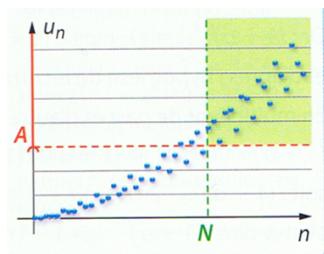
On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

- La suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si, tout intervalle de la forme $] - \infty; A [$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

☛ Interprétation graphique :

La définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi grand soit-il. À partir du rang N , toutes les valeurs u_n appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$.



Remarque

- Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$
- Si une suite (u_n) diverge alors soit cette suite a une limite égale à $+\infty$, soit elle a une limite égale à $-\infty$, soit elle n'a pas de limite. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ diverge sans avoir de limite.

2.1.2 Limites de suites usuelles

Propriété

- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> • Pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ • Pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ |
|---|---|--|

Propriété

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$.

- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Dans les autres cas, la suite (u_n) diverge.

Savoir-Faire 2.1

SAVOIR ÉCRIRE UN ALGORITHME DE RECHERCHE DE SEUIL

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n)
2. Écrire un programme en Python permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1000$
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de cet entier.