

## 2.1

## Limites de suites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

On va étudier le comportement d'une suite  $(u_n)$ , c'est-à-dire étudier les propriétés du nombre  $u_n$  lorsque  $n$  devient de plus en plus grand (variations, encadrement comportement à l'infini...) Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.1.1 Limite finie ou infinie en l'infini

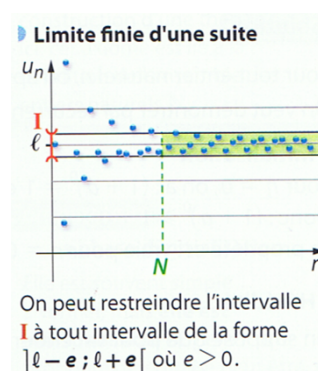
## Définition

La suite  $(u_n)$  admet pour limite le réel  $l$  si, tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

On écrit alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

On dit que la suite  $(u_n)$  **converge** vers le réel  $l$  ou qu'elle est convergente.

Interprétation graphique :



La définition traduit l'accumulation des termes  $u_n$  autour de  $l$ . À partir du rang  $N$ , toutes les valeurs  $u_n$  appartiennent à l'intervalle  $I$ .

## Définition

| Si la suite  $(u_n)$  ne converge pas, elle est **divergente**.

## Remarque

| Lorsqu'elle existe, la limite  $l$  est unique (l'unicité se démontre par l'absurde)

## Définition

Soit  $A \in \mathbb{R}$

- La suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si, tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

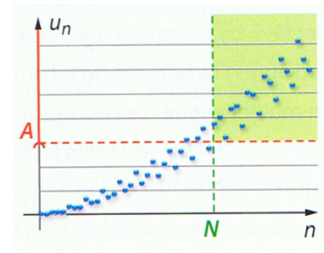
On écrit alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

- La suite  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  si, tout intervalle de la forme  $] -\infty ; A[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

On écrit alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ . On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

☛ Interprétation graphique :

La définition traduit l'idée que les termes  $u_n$  arrivent à dépasser tout nombre  $A$  aussi grand soit-il. A partir du rang  $N$ , toutes les valeurs  $u_n$  appartiennent à l'intervalle  $]A; +\infty[$ .



### Remarque

- Si  $(u_n)$  admet une limite (finie ou infinie), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$
- Si une suite  $(u_n)$  diverge alors soit cette suite a une limite égale à  $+\infty$ , soit elle a une limite égale à  $-\infty$ , soit elle n'a pas de limite. Par exemple, la suite de terme général  $(-1)^n$  diverge sans avoir de limite.

## 2.1.2 Limites de suites usuelles

### Propriété

- |  |   |  |
|--|---|--|
| • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$     | • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$      | • Pour tout $k \geq 1$ ,<br>$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$     |
| • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$   | • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$     |  |
| • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ | • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ | • Pour tout $k \geq 1$ ,<br>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ |

### ✍ Savoir-Faire 2.2

SAVOIR ÉCRIRE UN ALGORITHME DE RECHERCHE DE SEUIL

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$
2. Écrire un programme en Python permettant de déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n > 1000$
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de cet entier.