5.1 Limites de fonctions en $+\infty$ ou en $-\infty$

Maths Spé terminale - JB Duthoit

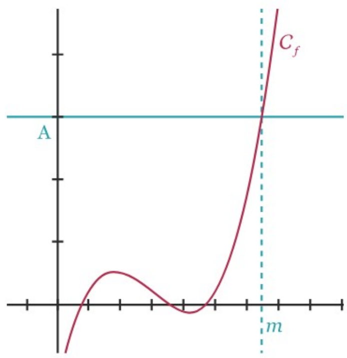
5.1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$.
Dire qu'une **fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres x "suffisamment grands" (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]m; +\infty[$, avec $m \in \mathbb{R}$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique :

Quel que soit le nombre A, on peut trouver un nombre m tel que pour tout $x > m$, $f(x) > A$.
La courbe de f restreinte à $]m; +\infty[$ est située au-dessus de la droite d'équation $y = A$)



A qui est appelé le **seuil**, peut être aussi grand que l'on veut. Il s'agit de la valeur à dépasser.

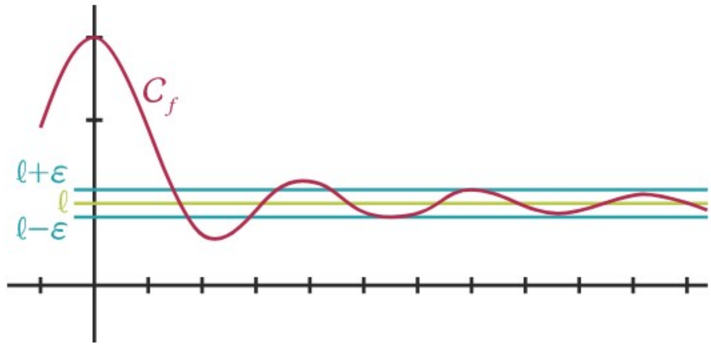
Remarque

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5.1.2 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0; +\infty[$ et l un nombre réel.
Dire que la **limite de f en $+\infty$ est l** signifie que $f(x)$ reste dans un intervalle $]l-\epsilon; l+\epsilon[$ (intervalle ouvert contenant l) où ϵ est un réel positif, dès que x est "suffisamment grand ".
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



Définition

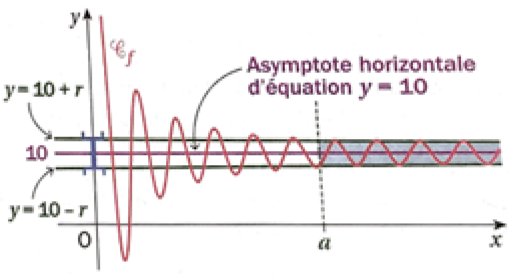
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[-\infty; x_0[$ et l un nombre réel.
Dire que la limite de f en $-\infty$ est l signifie que $f(x)$ reste dans un intervalle $]l-\epsilon; l+\epsilon[$ (intervalle ouvert contenant l) où ϵ est un réel positif, dès que x est "suffisamment petit ".
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Définition

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemple

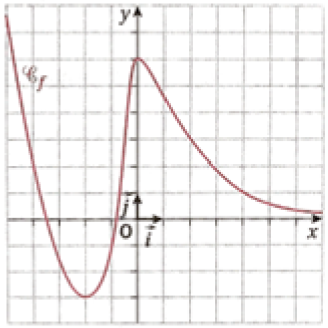
f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10$.
Pour tout nombre réel $r > 0$, on peut trouver un nombre réel a tel que si $x > a$ alors $f(x) \in]10-r; 10+r[$.
(On peut choisir $r > 0$ aussi petit que l'on veut, $f(x)$ sera toujours contenu dans l'intervalle pour x assez grand).



Exercice 5.1

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ci-contre.

1. Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
2. En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) horizontale(s) à la courbe de f, si elle(s) existe(nt).
3. Dresser le tableau de variations de f et faire figurer les limites conjecturées.



Exercice 5.2

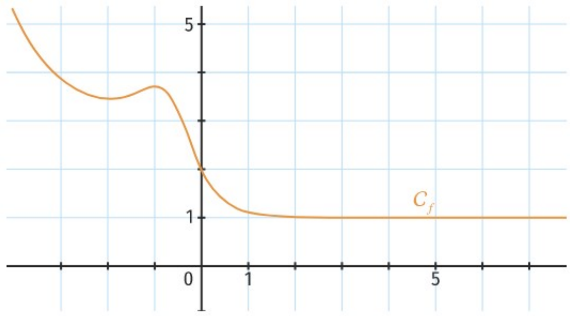
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 10}{1 + 2x^2}$.

1. Avec la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Exercice 5.3

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

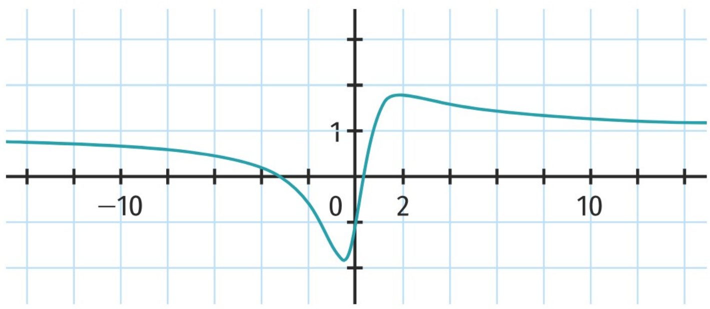
1. Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les éventuelles limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



Exercice 5.4

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les éventuelles limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



Exercice 5.5

On considère le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	5

Déterminer à l'aide du tableau une équation des éventuelles asymptotes de la courbe représentative de la fonction g.

5.1.3 Limites de quelques fonctions de référence

Propriété

1. $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
3. $f(x) = e^x$
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Démonstration 5 :

⚠ *les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.*

Démontrer que la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$

3. Conclure

Remarque

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$.