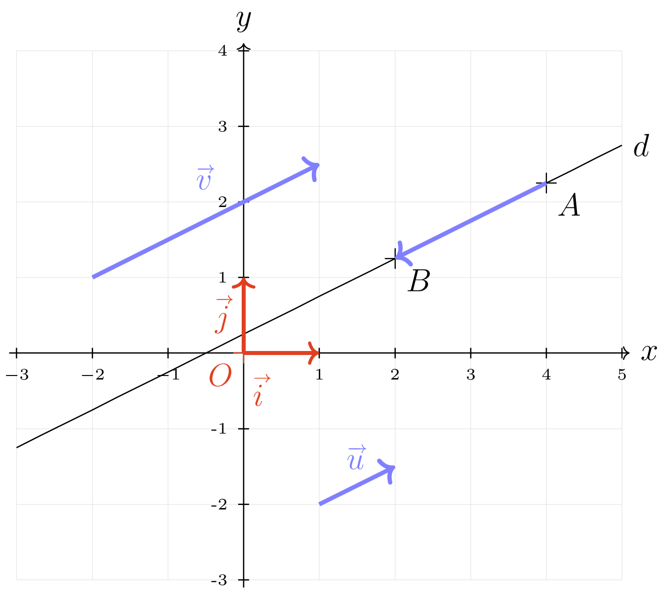
12.1 Equations cartésiennes de droites

Maths 2nde 7 - JB Duthoit

12.1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit d une droite du plan, muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle ***vecteur directeur*** tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite d.

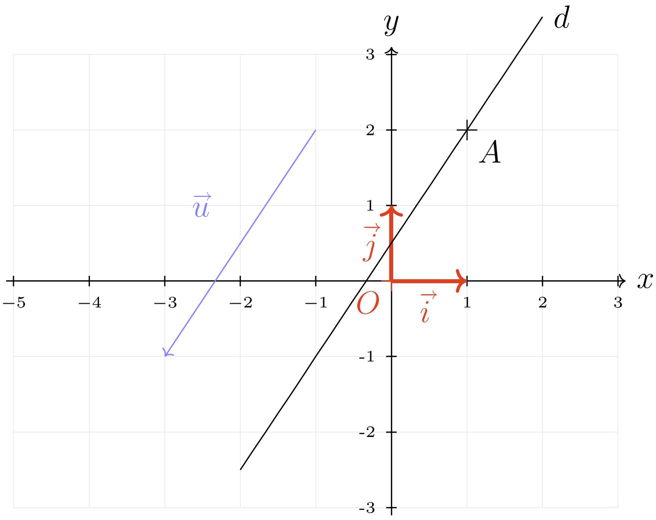


Remarque

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires entre eux.
- A et B étant deux points distincts, tout vecteur directeur est non nul.

Exemple

Dans un repère du plan, tracer la droite d passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;-3)$.



Savoir-Faire 12.52
Savoir lire un vecteur directeur sur une droite donnée

12.1.2 Équation cartésienne de droite

Propriété

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, toute droite d a une équation du type $ax + by + c = 0$.

Démonstration 12.10

Soit d une droite définie par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{pmatrix}$.

Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
M \in d &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix}x-x_A \ , & x_{\vec{u}}\\ y-y_A \ , & y_{\vec{u}}\end{vmatrix} = 0\\
&\iff (x-x_A)\times y_{\vec{u}} - x_{\vec{u}}\times(y-y_A) = 0\\
&\iff x \times \underbrace{y_{\vec{u}}}_{a} + y \times \underbrace{(-x_{\vec{u}})}_{b} + \underbrace{-x_A \times y_{\vec{u}} - y_A\times(-x_{\vec{u}})}_{c} = 0\\
&\iff ax + by + c = 0 \text{ , avec } a, \ b \text{ et } c \text{ trois réels.}
\end{aligned}$$

Remarque : Les nombres a et b ne peuvent pas être nuls en même temps, car sinon, on aurait $x_{\vec{u}} = y_{\vec{u}} = 0$, ce qui signifierait que $\vec{u} = \vec{0}$; ce qui est impossible, car $\vec{u}$ est une vecteur directeur, donc non nul. On note cela $(a,b) \neq (0,0)$.

Propriété (admise)

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.
L'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite.

Remarque

Cette propriété est la propriété réciproque de la propriété précédente.

Définition

La relation $ax + by + c = 0$ est appelée ***équation cartésienne*** de la droite d.

Remarque

Une même droite d admet une infinité d'équations cartésiennes.

Savoir-Faire 12.53

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite (méthode 1)

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par un point et un vecteur directeur.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(-5;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-3)$
- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par deux points distincts.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $B(2;3)$ et $C(4;-1)$.

Propriété

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Exemple

On considère la droite (AB) dont une équation cartésienne est $5x + 4y - 1 = 0$.
Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}(-4;5)$

Savoir-Faire 12.54

Savoir déterminer une équation cartésienne de droite (méthode 2, avec la propriété précédente)

- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par un point et un vecteur directeur.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la drote d passant par $A(-5;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-3)$
- **Savoir déterminer une équation cartésienne de droite définie par deux points distincts.**
  Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la drote d passant par $B(2;3)$ et $C(4;-1)$.

Savoir-Faire 12.55

Savoir tracer une droite dont on connait une équation cartésienne