9.2 Recherche de primitives

Maths Spé terminale - JB Duthoit

9.2.1 Primitives de fonctions usuelles

On rappelle ici les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les dérivées :

Propriété (rappel sur les dérivées de fonctions usuelles)

Fonction usuelle	Fonction dérivée	Fonction usuelle	Primitive
$f(x) = mx + p, \mathbb{R}$	$f'(x) = m, \mathbb{R}$	$f(x) = m, \mathbb{R}$	$F(x) = mx, \mathbb{R}$
$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x, \mathbb{R}$	$f(x) = x, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \mathbb{R}$
$f(x) = x^3, \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2, \mathbb{R}$	$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3, \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}, \mathbb{R}$	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{x}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2, \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}, \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x},]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x},]0; +\infty[$
$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x, \mathbb{R}$	$f(x) = e^x, \mathbb{R}$	$F(x) = e^x, \mathbb{R}$
$f(x) = ln(x),]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x},]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x},]0; +\infty[$	$F(x) = ln(x),]0; +\infty[$
$f(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x), \mathbb{R}$	$f(x) = sin(x), \mathbb{R}$	$F(x) = -cos(x), \mathbb{R}$
$f(x) = sin(x), \mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$f(x) = cos(x), \mathbb{R}$	$F(x) = sin(x), \mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)$, $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$, $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$F(x) = tan(x)$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété rappel de la dérivée d'une somme et de λu

Dérivation	Primitive	
	Fonction	*Primitive*
$(u+v)' = u' + v'$	$u' + v'$	$u + v$
$(\lambda u)' = \lambda u'$	$\lambda u'$	λu

Savoir-Faire 9.3

Savoir calculer une primitive en utilisant les fonctions de référence

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 9$.
3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

4. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^3}$.

Exercice 9.8

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+3x^2-x+2$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^3-3x+7$.
3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^4-\frac{1}{2}x^3$.
4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^5-x$.
5. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^4-7x+\sqrt{2}$.

Exercice 9.9

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=10-3e^x+x$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)(x+2)$.
3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)^2$.
4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

Exercice 9.10

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x+1+\dfrac{1}{x}$.
2. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$.
3. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{2x}$.
4. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{7}{x^3}$.
5. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2}$.
6. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$.
7. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4-x\sqrt{x}}{x^2}$.

9.2.2 Primitives avec les formules de composées

Propriété (rappels sur dérivées de fonctions composées)

Dérivation	Primitive	
	$Fonction$	$Primitive$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$	$\frac{u'}{u^3}$	$\frac{-1}{2u^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}, n \geq 2$	$u'u^n, n \geq 1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}, n \geq 2$	$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$(e^u)' = u' \times e^u$	$u' \times e^u$	e^u
$(ln(u))'$ avec u>0 $= \frac{u'}{u}$ avec u>0	$\frac{u'}{u}$ avec u>0	$ln(u)$ avec u>0
$(cos(u))' = -u' \times sin(u)$	$u'sin(u)$	$-cos(u)$
$(sin(u))' = u' \times cos(u)$	$u'cos(u)$	$sin(u)$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

Savoir-Faire 9.4

SAVOIR CALCULER UNE PRIMITIVE EN UTILISANT LES FORMULES DE DÉRIVATION

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 6x(x^2-1)^3, I = \mathbb{R}^+$
2. $f(x) = \frac{5}{2x+3}, I = \mathbb{R}^+$
3. $f(x) = e^{2x+1}, I = \mathbb{R}^+$
4. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+4}}, I = \mathbb{R}^+$

Méthode :

On cherche à réécrire l'expression $f(x)$ sous une des formes bleues suivantes :

1. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
2. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, $n \geq 2$, avec en particulier :
   a) Pour $n = 2$: $(u^2)' = 2u'u$
   b) Pour $n = 3$: $(u^3)' = 3u'u^2$
   c) Pour $n = 4$: $(u^4)' = 4u'u^3$
3. $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$, $n \geq 2$, avec en particulier :
   a) Pour $n = 2$: $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{2u'}{u^3}$
   b) Pour $n = 3$: $\left(\frac{1}{u^3}\right)' = -\frac{3u'}{u^4}$
   c) Pour $n = 4$: $\left(\frac{1}{u^4}\right)' = -\frac{4u'}{u^5}$
4. $(e^u)' = u' \times e^u$
5. $(\ln(u))'$ avec $u > 0 = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$
6. $(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$
7. $(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$
8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 9.11

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 3x^2(x^3+1)^2$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{-x+3}$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+7}}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9.12

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 3e^{3x+4}$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = xe^{x^2-3}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^2e^{-3}$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+4}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9.13

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 5e^{4-x}$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+5}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^x(e^x+4)^3$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = (2x-1)^4$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9.14

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{e^{-x}(e^x+1)}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9.15

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}(ln(x)+2)^2$, $I = \mathbb{R}^{*+}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{(3x-1)^2} + \dfrac{1}{3x-1}$, $I = \left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$
3. $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$
4. $f(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$, $I =]1;+\infty[$

Savoir-Faire 9.5

SAVOIR DÉTERMINER UNE AUTRE EXPRESSION EN UTILISANT LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-5}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $\forall x > 2,\ f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{x-2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2;+\infty[$.

Exercice 9.16

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-1}{x+1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 9.17

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 9.18

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de $]2;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{x-2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2;+\infty[$.