Chapitre 15

Variable aléatoire

Sommaire

Rappels

15.0.1 Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire qui prend n valeurs distinctes.

Son espérance mathématique est **la moyenne des valeurs** prises par ses réalisations, soit x_1, x_2, ... x_n pondérées par leurs probabilités respectives p_1, p_2, ... p_n.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

(Cette notion a été introduite par Christian Huygens avant qu'il découvre les anneaux de Saturne.)

☛ $E(X)$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

15.0.2 Variance et écart-type

La variance est l'espérance des carrés des écarts par rapport à l'espérance...
Pour dire les choses plus simplement,

$$V(X) = E\left((X - E(X)\right)^2$$

.

Ou encore :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Une formule plus simple d'emploi, dite de König, consiste à retrancher le carré de l'espérance de l'espérance des carrées :

$$V(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

.

Ce qui donne

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - \left(E(X)\right)^2$$

La démonstration est au programme de première.
L'écart-type de la X est la racine carrée de sa variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

☛ L'espérance et l'écart-type sont exprimés dans la **même** unité que X, au contraire de la variance, que l'on n'interprète pas.

Exercice 15.1
Le jeu consiste a lancer un dé à 6 faces, bien équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 6 euros et sinon on perd 1 euro.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur._

1. Donner la loi de probabilité de X
2. Calculer $E(X)$ et donner une interprétation du résultat
3. Calculer $\sigma(X)$ de deux façons différentes

Exercice 15.2
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Montrer que $E(X) = p$ et que $\sigma(x) = \sqrt{p - p^2}$