15.5 Applications du produit scalaire

Maths Spé terminale - JB Duthoit

15.5.1 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, si les réels a,b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration 25- -

Soit A un point de l'espace et soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur de l'espace. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Montrer qu'une équation de $\mathcal{P}$ est $ax+by+c+0=0$.

Savoir-Faire 15.83

Savoir déterminer une équation cartésienne d'un plans connaissant un vecteur normal et un point

Soit $A(-1;2;5)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-3;1;4)$ un vecteur.

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3;8;7)$. Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 15.22

Soit $A(1;9;3)$ et $B(-2;-7;-5)$ deux point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 15.23

Soit $A(4;5;8)$, $B(1;3;-12)$ et $C(0;0;8)$ trois point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

Savoir-Faire 15.84

Savoir reconnaître un plan donné par une équation cartésienne

Soit $A(1;0;3)$, $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$ trois points de l'espace et soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z+1=0$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le plan (ABC) est le plan $\mathcal{P}$
3. En déduire un vecteur normal à (ABC).

Exercice 15.24
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x + 2y + 6z - 4 = 0$.

Exercice 15.25
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $y = 2x - 6$.

Exercice 15.26
Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $z = 0$.

Savoir-Faire 15.85

Savoir déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit d la droite passant par $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1; 4)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d

Exercice 15.27
Soit d la droite passant par $A(2; 2; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6; -1; 2)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $B(11; -18; 2)$ sur la droite d

Exercice 15.28
Soit d la droite passant par $K(1; -1; 10)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4; -5)$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $R(0; 6; -5)$ sur la droite d

Exercice 15.29
Soit d la droite passant par $A(2; 3; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4; -8; -4)$.

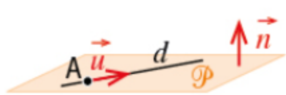
1. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $C(0; -5; 13)$ sur la droite d
2. Déterminer CH, AB et l'aire du triangle ABC.
3. Le point H est-il le projeté orthogonal de $R(-13; 1; -12)$ sur la droite d ?

15.5.2 Intersection de droites et de plans

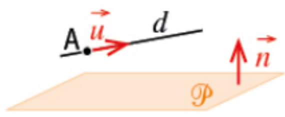
Propriété

On considère un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

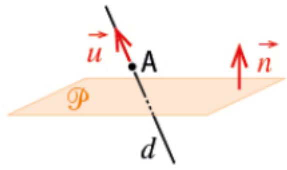
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors :
  - Si $A \in \mathcal{P}$ alors $d \subset \mathcal{P}$ (d est incluse dans $\mathcal{P}$).



– Si $A \notin \mathcal{P}$ alors d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.



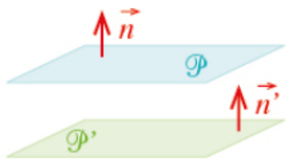
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.



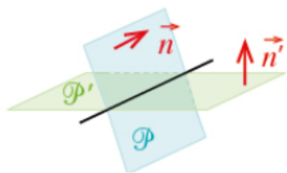
Propriété

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles



- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite.



Savoir-Faire 15.86

Savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+3y-7z-14=0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-11+3t \\ z=19-5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont sécantes en un point A
2. Déterminer les coordonnées de A

Exercice 15.30

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-3y-2z+3=0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+5t \\ z=7-t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont sécantes en un point A
2. Déterminer les coordonnées de A

Exercice 15.31

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 5y + 3z - 7 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 9 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont strictement parallèles.

Savoir-Faire 15.87

Savoir déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + 3y - z + 1 = 0$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $A(8; 10; 5)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Méthode :

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan, il suffit de déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan avec la droite passant par ce point et perpendiculaire au plan.

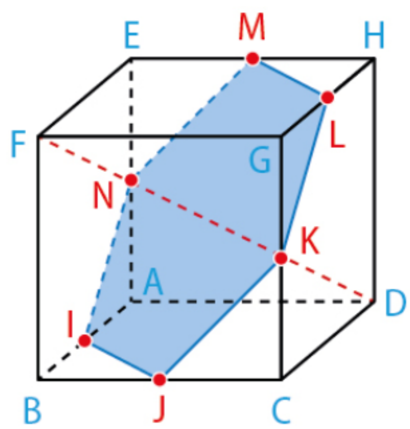
Exercice 15.32

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant d'équation cartésienne $5x + 2y + 4y - 11 = 0$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $A(6; 1; 6)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 15.33

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par I et perpendiculaire à la droite (FD). On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. On note J,K,L,M et N les milieux respectifs de $[BC]$,$[GC]$,$[GH]$,$[HE]$ et $[EA]$. Démontrer que les points J,K,L,M et N appartiennent à $\mathcal{P}$.
3. Quelle est la nature de l'hexagone $IJKLMN$?



Exercice 15.34

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant d'équation cartésienne $-x + 2y + z + 4 = 0$.
Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de $A(-8; 17; 8)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Savoir-Faire 15.88

Savoir déterminer l'intersection de deux plans sécants

Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $-x + 2y + z - 5 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécante selon une droite d.

2. Déterminer une représentation paramétrique de le droite d.

Exercice 15.35

Reconnaître et caractériser l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $(x-y)^2 = z^2$.