11.3 Équations différentielles

Maths Spé terminale - JB Duthoit

11.3.1 Équation différentielle $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réel.

Démonstration 16- -Exigible au bac- -

Soit a un réel. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay$.

1. Partie directe :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$ avec C un réel. Montrer que f est bien solution de (E).
2. Réciproque. Soit f une solution de (E). Montrons que f est nécessairement de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec C un réel.

Savoir-Faire 11.5

Savoir une équation différentielle de la forme $y' = ay$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = -4y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(2) = 1$

Exercice 11.17

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.
2. Représenter sur votre calculatrice les courbes de ces fonctions solutions, en prenant pour C les valeur 1,2,-1 et -2. on remarquera que l'axe des abscisses et une asymptote horizontale à ces courbes (on peut choisir xmin = -2, xmax=1, ymin= -3 et ymax = 3)

Exercice 11.18

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 5y$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 4$

Exercice 11.19

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + 6y = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(1) = 1$

Exercice 11.20
Déterminer l'ensemble des solutions de chacune de ces équations différentielles :

1. $y' = -2y$
2. $-y' + 0.1y = 0$
3. $3y' - 2y = 0$
4. $y' + ln(2)y = 0$

11.3.2 Équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 11.21
On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$, où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-b}{a}$ est une solution de (E).

Propriété (admise)
Soient a et b sont des réels avec $a \neq 0$.
L'ensemble des solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 définie par $f(x) = \frac{-b}{a}$ est la solution particulière constante de (E).

Vocabulaire
On dit que $y' = ay$ est l' **équation homogène** de $y' = ay + b$

Savoir-Faire 11.6
SAVOIR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' = ay + b$
Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 3y - 2$.

Méthode :
En 3 points :

- On trouve la solution particulière constante de (E) (la fonctions f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \frac{-b}{a}$).
- On détermine l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$. (l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.)
- On conclut (l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + f_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.)

1. Déterminer la solution particulière constante de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(E') : y' = ay$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 11.22
1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 3$.
   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).
   b) En déduire les solutions de (E).
2. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 4y = 8$.
   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).

b) En déduire les solutions de (E).

3. Soit l'équation différentielle $(E) : 2y' + 6y = 1$.

   a) Déterminer la solution particulière constante de (E).

   b) En déduire les solutions de (E).

   c) En déduire la solution de (E) qui vérifie $f(2) = 0$.

11.3.3 Équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété (admise)

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto g(x) + f_0(x)$, où g est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 une solution particulière de (E).

Savoir-Faire 11.7

Savoir une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$

Méthode :

En 3 points :

- On trouve une solution particulière de (E) (En général, l'énoncé nous donne une indication).
- On détermine l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$. (l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.)
- On conclut (l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + f_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.)

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = y + x - 3$.

1. Déterminer les réels m et p telle que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(E') : y' = ay$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 11.23

1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

   a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

   b) En déduire toutes les solutions de (E).

2. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x$.

   a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E).

   b) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 11.24

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 4y = 3xe^{2x}$. On note aussi (E') l'équation différentielle $y' + 4y = 0$

1. Résoudre l'équation (E').
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 11.25

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^{x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{x}$ soit une solution particulière de (E).
2. En déduire la solution générale de (E).
3. En déduire la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine, dans une repère donné.