4.3 Compléments de dérivation

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Propriété (admise)

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Voici trois propriétés qui sont des conséquences de la propriété précédente :

Propriété

- Soit n un entier positif non nul.
  Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Soit n un entier négatif non nul.
  Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si u ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Propriété

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

4.3.1 Dérivée de la composée

4.3.2 Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I.
On appelle **dérivée seconde** de f sur I la fonction dérivée de f', que l'on note f''.

Exercice 4.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$. Déterminer la dérivée seconde de la fonction f.

Savoir-Faire 4.13

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION EN UTILISANT LA COMPOSÉE

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+5}$
2. $g(x) = (2x-1)^4$
3. $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$
4. $k(x) = e^{3x^2+1}$

Exercice 4.2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \sqrt{x^2+2}$
2. $g(x) = (3x+1)^3$
3. $h(x) = \dfrac{1}{(x^4+3)^2}$
4. $i(x) = \dfrac{1}{(e^x+3)^4}$
5. $j(x) = \sqrt{e^x+1}$
6. $k(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$
7. $l(x) = 3(1-x)^3$
8. $m(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

Savoir-Faire 4.14

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3 + \dfrac{xe}{e^x}$
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(e^{1-0.5x}-1\right)^2$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote que l'on précisera.
2. a) Calculer $f'(x)$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote d que l'on précisera.
   c) Avec la calculatrice, tracer C_f et d et conjecturer la position relative de C_f et d.
   d) Démontrer cette conjecture
2. a) Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.6

Soit f la fonction définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-3; +\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3; +\infty[$.