5.4 Extrema d'une fonction

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

Des maths dans la vraie vie !

Les domaines d'activités où l'on rencontre des problèmes d'optimisation sont extrêmement variés ! Impossible d'en faire la liste exhaustive !

- Optimisation d'un trajet,
- de la forme d'un objet,
- d'un prix de vente,
- d'une réaction chimique,
- du contrôle aérien,
- du rendement d'un appareil,
- du fonctionnement d'un moteur,
- de la gestion des lignes ferroviaires,
- du choix des investissements économiques,
- de la construction d'un navire,
- optimiser un algorithme
- etc...

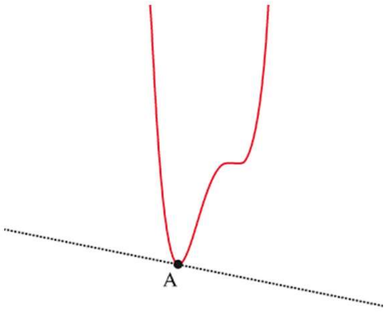
L'optimisation de ces systèmes permet de trouver une **configuration idéale**, d'obtenir un gain d'effort, de temps, d'argent, d'énergie, de matière première, ou encore de satisfaction.

Très loin de constituer une liste exhaustive, ces quelques exemples montrent aussi la variété des domaines professionnels qui utilisent l'optimisation...

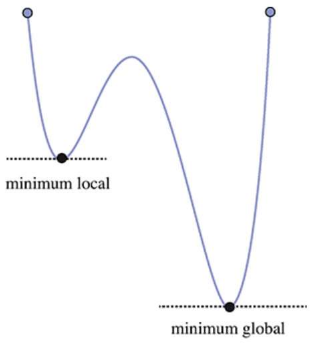
☛ Vous êtes prévenu ! Vous risquez d'utiliser d'une façon ou d'une autre l'optimisation dans votre vie professionnelle ! :-)

Les maths faciles !

Voyons maintenant ce qui se passe au point le plus bas d'une courbe. Se pourrait-il que la tangente n'y soit pas horizontale ?
Supposons par exemple qu'elle descende vers la droite, comme le suggère le dessin ci-dessous.

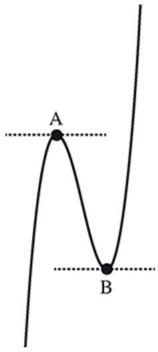


Le point A est supposé être le plus bas de la courbe, mais la tangente est penchée. Un zoom autour du point A révèlera donc que, puisque la tangente « colle » à la courbe au voisinage de A, la courbe est en train de descendre lorsqu'on se déplace sur elle vers la droite en partant de A. Et donc, A n'est pas le point le plus bas de la courbe. La figure est donc contradictoire : si vraiment A est le point le plus bas, alors la tangente doit être horizontale ! !
☛ Ce résultat est fondamental dans la recherche des valeurs optimales prises par une fonction.
☛ Tout point a pour lequel f prend la plus petite de ses valeurs vérifie donc l'équation f ' (a) = 0. (à condition que f soit dérivable). ⚠ Si la tangente est horizontale, a-t-on forcément un minimum ? La réponse est non :

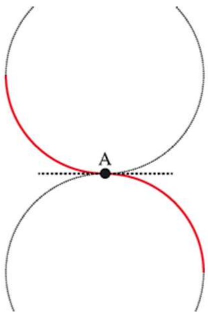


⚠ Mais l'inverse est-il vrai ? A t-on nécessairement un extremum (minimum ou maximum) lorsque f'(a)=0 ?
La réponse est non ! !
Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Le premier, c'est qu'il se peut que le minimum ne soit que local. La tangente ne nous renseigne que sur ce qui se passe au voisinage immédiat d'un point, et pas sur ce qui peut se passer ailleurs. Rien n'exclut donc, a priori, que le « vrai » minimum (que l'on qualifie de global) se trouve à un autre endroit.



- Ensuite, la courbe peut se trouver des deux côtés de sa tangente. On parle alors de **point d'inflexion**.
  Un exemple est donné par la courbe en rouge constituée de deux quarts de cercles disposés comme dans la figure ci-dessous.
  Au point A, cette courbe admet bien une tangente au sens de notre définition, mais cette tangente la traverse : toute horizontale qu'elle est, elle ne correspond pas à un minimum ou un maximum local.



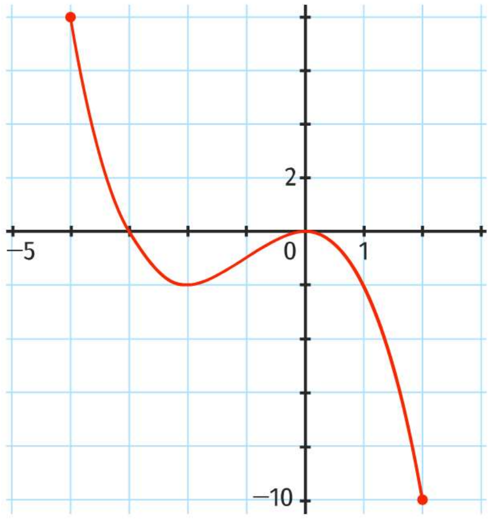
⚠ En toute rigueur, il n'est pas tout à fait vrai que la tangente à la courbe est toujours horizontale en son point le plus bas. En effet, lorsque ce point est atteint à l'une des extrémités de la courbe, la tangente n'est assujettie à aucune contrainte.

5.4.1 Définition

Définition

Soient I un intervalle ouvert et c un réel de I.
On considère une fonction f définie sur I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f au voisinage de c signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et, pour tout réel x de $]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$). Un extremum local est un maximum ou un minimum local.

Exercice 5.11
La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$.



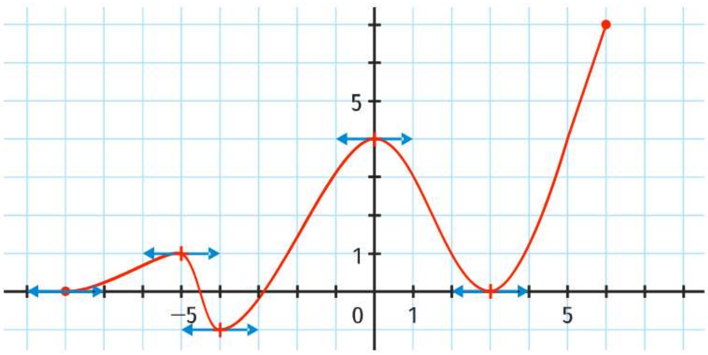
Déterminer les extrema locaux éventuels

Définition

On dit que $f(c)$ est un **maximum global** sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$. On définit de façon analogue un **minimum global**.

Exercice 5.12
On reprend la courbe de l'exercice précédent. Déterminer les extrema globaux éventuels

Exercice 5.13
La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-8; 6]$.



Déterminer les extrema locaux éventuels. En déduire les extrema globaux éventuels.

5.4.2 Lien avec la dérivée

Propriété (admise)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

Propriété (admise)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Savoir-Faire 5.29

Savoir déterminer les extrema locaux et globaux d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = -0.5x^3 + 0.75x^2 + 3x - 1$.
Déterminer les extrema éventuels locaux et globaux de la fonction f.
Méthode :

1. On vérifie que la fonction est dérivable
2. On dérive la fonction
3. On peut dresser le tableau de variations
4. Si f' s'annule en changeant de signe, c'est que l'on est en présence d'un extremum local.

Exercice 5.14

Dans chacun des cas suivants, déterminer les éventuels extrema globaux de la fonction f :

1. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{4}x(x^2 - 12)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$ sur $]1;+\infty[$
4. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$ sur $]-\infty;2[$