10.2 Intégrale d'une fonction continue

Maths Spé terminale - JB Duthoit

10.2.1 Théorème fondamental

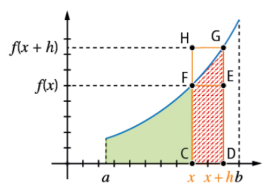
Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. La fonction F_a définie sur $[a,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.
Autrement dit, $\forall x \in [a;b]$, $F_a'(x) = f(x)$.

Exigible

Soit f une fonction positive, continue et croissante sur $[a,b]$. Soit F_a la fonction définie sur $[a,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$. Montrer que $F_a(x)$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Soit $x \in [a,b]$ et h un réel non nul tel que $x+h \in [a;b]$.
On montrera que F_a est dérivable en tout réel $x \in [a;b]$ et que $F_a'(x) = f(x)$, en distinguant $h > 0$ puis $h < 0$.



Cas où $h > 0$

10.2.2 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Exigible

Soit f une fonction positive et croissante sur $[a,b]$. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.
Montrer que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Définition

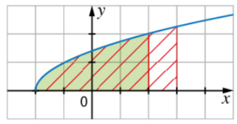
Soit f une fonction continue intervalle $[a;b]$, et soit F une primitive de f sur $[a;b]$.
On appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Savoir-Faire 10.44

Savoir étudier une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{t+2}dt$.

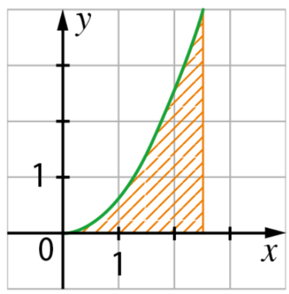


Fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$

1. Donner une interprétation graphique de $F(3)$.
2. Donner une interprétation graphique de $F(2)$.
3. Conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
4. Étudier le sens de variation de F sur $[-2;+\infty[$
5. En déduire que la conjecture est vraie.

Exercice 10.5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_{0}^{x} t \times ln(t+1)dt$.



Fonction $x \mapsto tln(t+1)$

1. Donner une interprétation graphique de $F(5)$.
2. Donner une interprétation graphique de $F(4)$.
3. Conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
4. Étudier le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$
5. En déduire que la conjecture est vraie.

Exercice 10.6

Soit F la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $F(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2}dt$.
Étudier le sens de variation de F sur $[-1;+\infty[$

Savoir-Faire 10.45

Savoir calculer une intégrale avec une primitive

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{4}(3x^2+4x+1)dx$.
2. $\int_{-1}^{0} e^{3x+1}dx$.
3. $\int_{1}^{\pi} \dfrac{1}{x^2}dx$.
4. a) Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = xln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$
   b) En déduire $\int_1^e ln(x)dx$.

Exercice 10.7
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^3 (x^3+4x^2-5x+1)dx$
2. $\int_{-2}^{2}(x+1)^2dx$
3. $\int_1^e (1-\frac{1}{x})dx$

Exercice 10.8
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^9 x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$
2. $\int_0^{ln(2)}(2x+e^x)dx$
3. $\int_1^3 \dfrac{2}{x}dx$

Exercice 10.9
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \dfrac{x^2+3}{x}dx$
2. $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx$
3. $\int_1^{ln(3)} e^{4x}dx$

Exercice 10.10
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{0} t^2e^{t^3}dt$
2. $\int_0^1 \dfrac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt$
3. $\int_0^1 \dfrac{t}{t^2+3}dt$

Exercice 10.11
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1}(2u+1)(u^2+u)^2du$
2. $\int_0^1 (3u^2-5)(u^3-5u+1)^3du$
3. $\int_1^e \frac{1}{u}ln(u)du$

Exercice 10.12
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$
2. En déduire $\int_0^1 xe^x dx$.

Exercice 10.13

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = xln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2ln(x)$.
2. En déduire $\int_1^e xln(x)dx$.