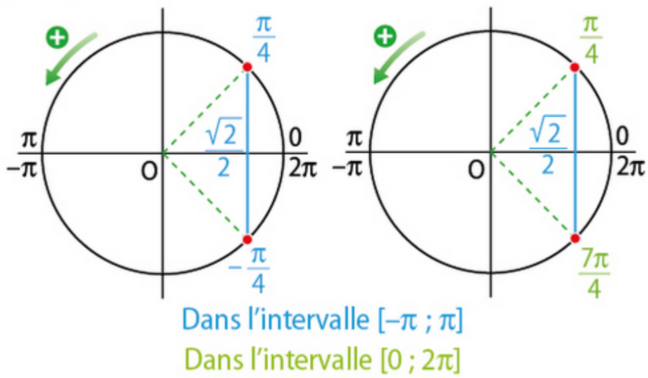
12.2 Équations trigonométriques

Maths Spé terminale - JB Duthoit

12.2.1 Équation $cos(x) = a$

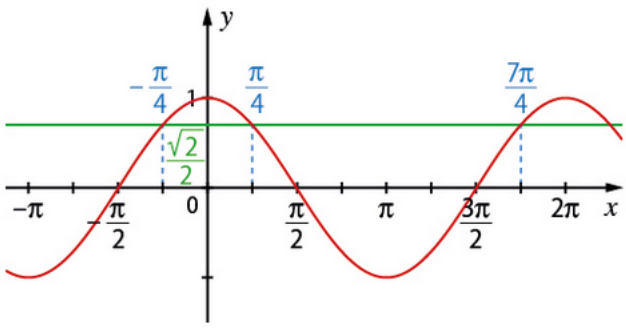
On veut ici résoudre graphiquement $cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On va ici s'aider et utiliser le cercle trigonométrique, en plaçant sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On repère ensuite les réels auxquels sont associés ces points.



Remarque

On peut bien sûr visualiser aussi les solutions à l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus :



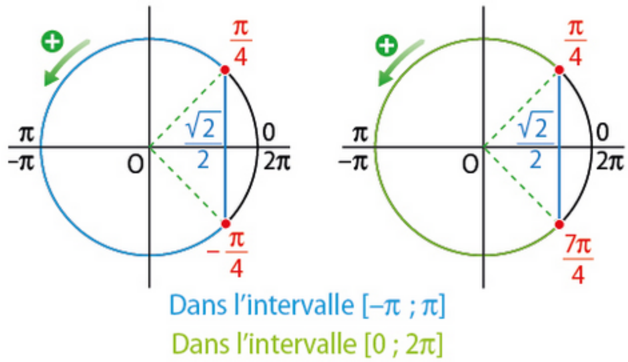
Exercice 12.10

1. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $cos(x) = \frac{1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

12.2.2 Équation $cos(x) \leq a$

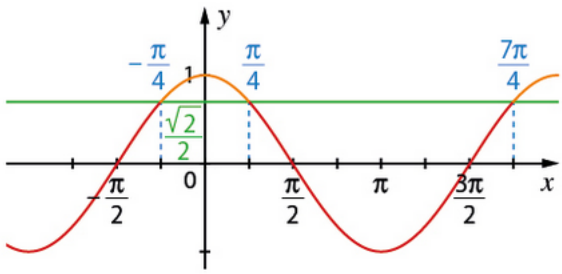
On veut ici résoudre graphiquement $cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On va ici s'aider et utiliser le cercle trigonométrique, en plaçant sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On repère ensuite les réels auxquels sont associés ces points.



Remarque

On peut bien sûr visualiser aussi les solutions à l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus :



Exercice 12.11

1. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $cos(x) \leq \frac{-1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 12.12

1. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $2cos(x) = \sqrt{3}$
2. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $cos(x) = -1$
3. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $cos(2x) = \frac{1}{2}$

Exercice 12.13

1. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $2cos(x) > \sqrt{3}$
2. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $-2cos(x) \leq -\sqrt{2}$
3. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation $cos(2x) = \frac{1}{2}$

Exercice 12.14

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$

1. $f(x) = 1 + \sqrt{2}cos(x)$
2. $f(x) = -4cos(x) + 2\sqrt{3}$

Exercice 12.15

La fonction f est définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = 2cos^2(x) - cos(x)$.

1. Étudier le signe de $cos(x) - 1$ sur $[0;\pi]$.
2. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0;\pi]$.

Exercice 12.16

On considère la fonction f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = x + cos(x)sin(x) - 4sin(x)$.

1. a) Montrer que pour tout réel x de $[0;2\pi]$, on a $f'(x) = 2cos(x)\left(cos(x) - 2\right)$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0;2\pi]$
2. a) Calculer $f''(x)$ pour tout réel x de $[0;2\pi]$.
   b) Étudier la convexité de f sur $[0;2\pi]$.
   c) La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 12.17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2cos^2(x) - 1$.

1. a) Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on a $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On note d_1 et d_2 les droites d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$. Déterminer sur $[0;2\pi]$ les points d'intersection de C_f avec la droite d_1 puis la droite d_2.

Exercice 12.18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin^2(x) + \sqrt{2}cos(x)$, et soit C_f sa courbe représentative dans un repère

1. Étudier la parité de f. En déduire une conséquence graphique pour C_f.
2. Montrer que f est périodique, de période 2π. En déduire une conséquence graphique pour C_f.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2sin(x)\left(cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
4. Étudier les variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Représenter f sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$. On expliquera les symétries et/ou translations utilisées.

Retour sur les IPP !

Exercice 12.19

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos(x)dx$
2. $\int_0^{\pi} (x+1)sin(x)dx$
3. $\int_0^{\pi} tsin(t)dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)dx$