14.3 La loi des grands nombres

Maths Spé terminale - JB Duthoit

C'est dingue ;-) :
8.06×10^67 est approximativement le nombre de façons différentes de mélanger un jeu de 52 cartes. Même si l'humanité tout entière mélangeait depuis 10 000 ans chaque seconde, on serait encore loin de ce nombre. Il est donc quasi certain qu'aucun mélange de cartes de l'histoire n'est apparu deux fois !

14.3.1 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété - inégalité de Bienaymé-Tchebychev -

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$. Cette inégalité est appelée l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.

Remarque

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale. En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

Exercice 14.7

1. Majorer $P(X \geq 4)$ pour une variable aléatoire positive X d'espérance 1.
2. Une classe présente les caractéristiques suivantes : une moyenne de 12,4 et un écart type de 1,2. Majorer la probabilité qu'un élève ait une moyenne écartée d'au moins 2,5 points de la moyenne

Exercice 14.8

On considère un troupeau de zèbres vivant en liberté à proximité d'un fleuve. Chaque zèbre qui s'hydrate au bord du fleuve risque d'être agressé par un alligator, avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$. On suppose que 33 zèbres s'hydratent au bord du fleuve. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de zèbres victimes d'une attaque.

1. Donner l'espérance de X.
2. Majorer la probabilité que plus de 25 zèbres soient victimes d'une attaque.

Exercice 14.9

Après étude de sa production, un boulanger constate que la masse moyenne de ses pains s'élève à 275 g. Il décide que seuls les pains dont la masse est comprise entre 250 g et 300 g peuvent être vendus. On choisit un pain au hasard dans la production et on note X la variable aléatoire correspondant à la masse du pain en grammes. On donne $V(X) = 225$.
Majorer la probabilité que le pain choisi ne soit pas mis en vente.

Savoir-Faire 14.73

Savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de 2.5, avec une variance de 1,1.
Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.

Méthode :

- Définir une variable aléatoire correspondant à l'énoncé.
- Traduire les inégalités de l'énoncé sous forme d'écart par rapport à la moyenne.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour conclure.

14.3.2 Inégalité de concentration

Propriété

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X ; autrement dit, $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de X).
Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{na^2}$.
Cette inégalité est appelée l'**inégalité de concentration**.

14.3.3 Loi faible des grands nombres

Propriété

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire.
On pose $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Alors, pour tout réel a strictement positif, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geq a\right) = 0$.