

7.2

Théorème des valeurs intermédiaires

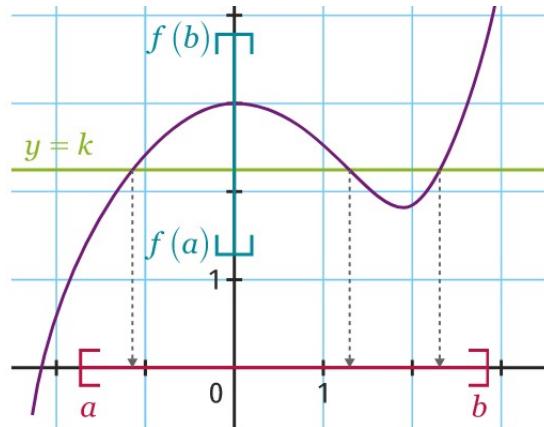
MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

7.2.1 Définition

Propriété - Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur $[a; b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

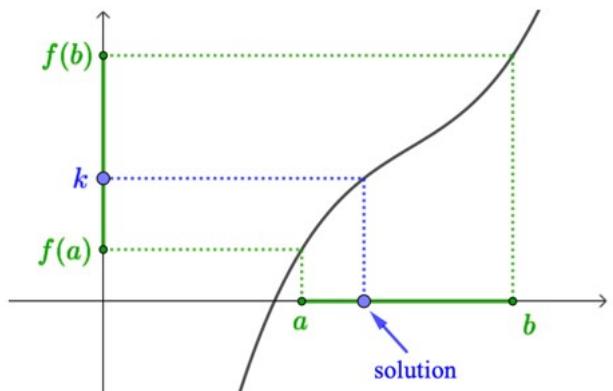
Autrement dit, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f dans $[a; b]$.



7.2.2 Cas des fonctions monotones

Propriété - Corolaire

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.



Remarque

- On peut aussi étendre ce corollaire aux intervalles ouverts en utilisant les limites.

Savoir-Faire 7.26

SAVOIR UTILISER LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$

2. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$
 b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 7.6

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur \mathbb{R} .
 Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur \mathbb{R} ?

Exercice 7.7

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2; 2]$
2. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$
 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$

7.2.3 Méthode d'encadrement

Il existe deux méthodes pour déterminer un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = k$:

- La méthode par "balayage"
- La méthode par "dichotomie". Le principe est ici de diviser par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ et on détermine si α se trouve dans $[a; m]$ ou bien $[m; b]$.

Savoir-Faire 7.27

SAVOIR DONNER UN ENCADREMENT DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

On a démontré précédemment que l'équation $f(x) = 0$ admettait une solution unique dans l'intervalle $]1; +\infty[$. Notons α cette solution.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0.0001 par "balayage" avec la calculatrice.

Savoir-Faire 7.28

SAVOIR CONSTRUIRE UN ALGORITHME DE DICHOTOMIE

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 + 0 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 1]$.
2. L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-n} près, avec $n \in \mathbb{N}$

1	TANT QUE $b - a > 10^{-n}$
FAIRE	
2	$m = (a+b) / 2$
3	SI $f(a) \times f(m) < 0$
ALORS	
4	$b = m$
5	$a = m$

3. Exécuter cet algorithme pas à pas pour $n = 1$ et compléter le tableau suivant :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
a	-1					
b	1					
$b - a > 10^{-1}$	Vrai					
m	0					
$f(a) \times f(m) < 0$	Faux					

4. Coder cet algorithme en langage python. Saisir et exécuter le programme avec $n = 4$ et interpréter le résultat renvoyé.

Exercice 7.8

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^5 + 2x - 2$.

- Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R}
- Montrer que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
- Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.

Exercice 7.9

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10$.

- Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R}
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
- Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.

Exercice 7.10

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x$.

- Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R}
- Montrer que l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
- Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.