

15.1

Produit scalaire dans l'espace

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

15.1.1 Définition

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. On considère trois points A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan \mathcal{P} contenant les trois points A , B et C .

On appelle **produit scalaire de \vec{u} et \vec{v}** le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} calculé dans le plan \mathcal{P} .

Remarque

On admet que le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est indépendant du plan \mathcal{P} choisi, et aussi des représentants \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} choisis pour \vec{u} et \vec{v} .

Propriété

Toutes les propriétés du produit scalaire énoncées dans le plan s'appliquent à des points et des vecteurs coplanaires.

Propriété -Bilinéarité-

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace, et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Propriété -symétrie-

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace, et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$



Savoir-Faire 15.76

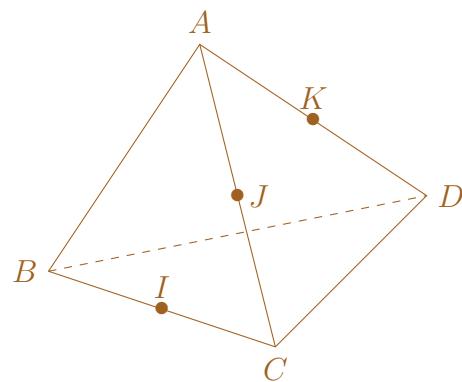
SAVOIR CALCULER UN PRODUIT SCALAIRES DANS L'ESPACE

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a .

Les points I , J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$
3. a) Justifier que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
b) Calculer $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC}$



♥ Méthode :

On se place ensuite dans des plans particuliers pour utiliser les formules qui permettent de calculer un produit scalaire dans le plan

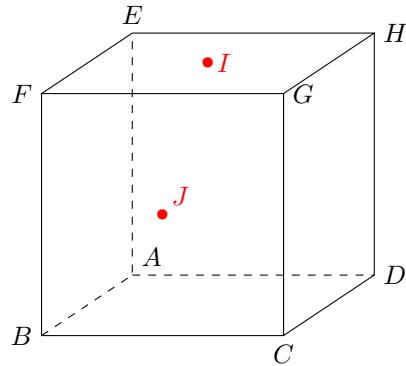
Exercice 15.15

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a .

Le centre du carré $EFGH$ est I , et J est le centre de $BCGF$

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF}$
3. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CG}$
4. a) Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ}$

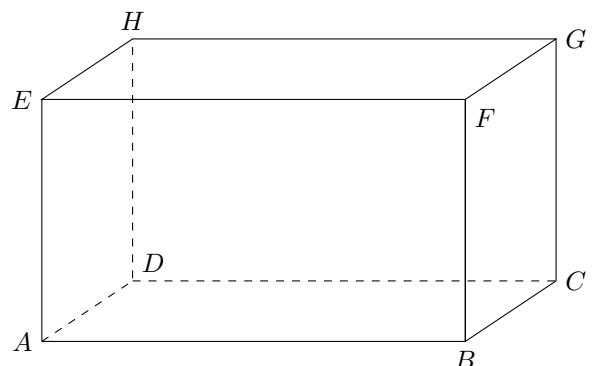


Exercice 15.16

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AE = AD = a$ et $AB = 3a$, avec $a > 0$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CG}$
3. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF}$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$



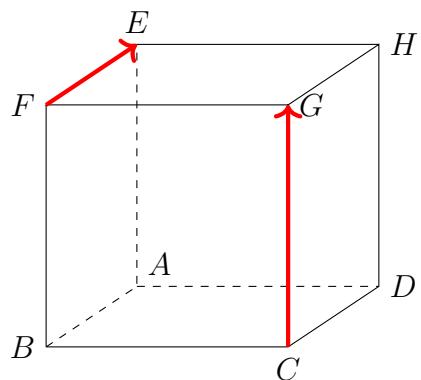
15.1.2 Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition

- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.
- Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace.
Soit A un point de l'espace, et d_1 et d_2 deux droites passant par A et de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} .
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

Exemple

Dans la figure ci-contre, on considère le cube $ABCDEFGH$. Montrer que les vecteurs \vec{FE} et \vec{CG} sont orthogonaux.



Remarque

On admet que la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs est indépendante du point A choisi.

Propriété

- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

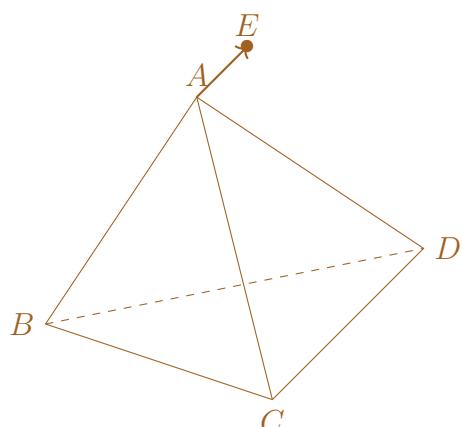
Savoir-Faire 15.77

SAVOIR UTILISER UN PRODUIT SCALAIRE POUR DÉMONTRER UNE ORTHOGONALITÉ

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a .

Les points E est défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

1. Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
2. En déduire que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} sont orthogonaux.



♥ Méthode :

- On peut décomposer le produit scalaire demandé avec la relation de Chasles
- On se place ensuite dans des plans particuliers pour utiliser les formules qui permettent de calculer un produit scalaire dans le plan.

● Exercice 15.17

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a .
Le centre du carré $DCGH$ est I , et J est le milieu du segment $[AD]$.

1. Exprimer les vecteurs \vec{AI} et \vec{BJ} en fonction des vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} .
2. Calculer les produits scalaires $\vec{AI} \cdot \vec{BJ}$.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (BJ) ?

