1.1 Raisonnement par récurrence

Maths Spé terminale - JB Duthoit

1.1.1 Contexte

Imaginons que l'on souhaite démontrer l'égalité suivante :

$$\forall n \geq 1, 1+2+3+...+n = \frac{(1+n)\times n}{2}$$

Si l'on considère la propriété $P(n)$: $1+2+3+...+n = \dfrac{(1+n)\times n}{2}$, il suffit alors de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(n)\text{est vraie.}$$

- Pour $n=1$, on a 1 d'un côté et $\dfrac{(1+1)\times 1}{2} = 1$ de l'autre. Donc l'égalité est vraie pour $n=1$, donc $P(1)$ est vraie.
- Pour $n=2$, on a $1+2=3$ d'un côté et $\dfrac{(1+2)\times 2}{2} = 3$ de l'autre. Donc l'égalité est vraie pour $n=2$, donc $P(2)$ est vraie.
- Pour $n=3$, on a $1+2+3=6$ d'un côté et $\dfrac{(1+3)\times 3}{2} = 6$ de l'autre. Donc l'égalité est vraie pour $n=3$, donc $P(3)$ est vraie.

⚠ Pour autant, ce n'est pas parce que l'égalité est vraie pour $n=1$,$n=2$ et $n=3$ qu'elle est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

On utilise donc un raisonnement particulier appelé **raisonnement par récurrence**.

1.1.2 Principe du raisonnement par récurrence avec l'image des dominos

Ce raisonnement peut-être visualisé par des dominos qui tombent tous quand :

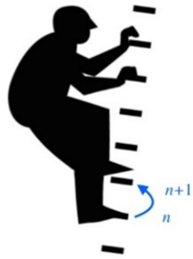
- Étape 1 : le premier tombe,
- Étape 2 : la chute d'un domino quelconque entraîne inévitablement la chute du suivant.
- Étape 3 : On peut en conclure que tous les dominos vont tomber...

☛ C'est exactement comme cela que se passe la démonstration. Il faut nécessairement deux conditions : une condition initiale, et une implication

1.1.3 Principe du raisonnement par récurrence avec l'image de l'échelle que l'on gravit

Si l'on peut se placer sur un barreau d'une échelle et si l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque au suivant, alors on peut gravir tous les barreaux, à partir du barreau initial.

- Première étape : on vérifie que l'on peut se placer sur le premier barreau de l'échelle.
- Deuxième étape : on montre que l'on peut passer d'un barreau quelconque n au suivant n + 1.
- On conclut que l'on peut gravir toute « l'échelle »



1.1.4 Principe de la récurrence

Propriété

Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier k supérieur ou égal à n_0, elle est aussi vraie pour l'entier naturel $k+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs ou égaux à n_0.

Remarque

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait un axiome des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé a priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.

Concrètement, On note $P(n)$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n et n_0 un entier naturel.

- **Initialisation** : on démontre que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On considère qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**, et on montre que la propriété $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie

Exercice 1.1

Pour chacune des propriétés $P(n)$ suivantes, dire si $P(O)$ et $P(1)$ sont vraies (justifier).

1. $P(n) : -3n+5 \geq 0$.
2. $P(n) : 3^n \leq 2$.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. On considère la propriété $P(n)$ définie par $P(n) : u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 1.2

Soit (u_n) la suite telle que pour tout entier naturel n, $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 8$. On considère la propriété suivante : $P(n) : u_n = 4$.

1. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie. Écrire l'égalité que l'on obtient.
2. Montrer qu'alors $u_{k+1} = 4$

⚠ On vient de démontrer que la propriété $P(n)$ est héréditaire !

Exercice 1.3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$. On pose $P(n) : u_n \geq n$.

L'objectif est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

1. Étape 1 : initialisation : Montrer que $P(0)$ est vraie
2. Étape 2 : hérédité :
   a) On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie. Écrire l'égalité que l'on obtient.
   b) Écrire la propriété $P(k+1)$.
   c) Montrer que si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie.

   ⚠ On vient de démontrer que la propriété $P(n)$ est héréditaire !
3. Étape 3 : conclusion : Que peut-on en conclure ?

Savoir-Faire 1.1

Savoir mener un raisonnement par récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(1+n) \times n}{2}$

Démonstration 1- -

Savoir démontrer l'inégalité de Bernoulli

Soit $x \in]0; +\infty[$. Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 1.4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$ pour tout entier naturel n.
Démontrer, par récurrence que, $u_n = 2^n + 5$ pour tout $n \geq 0$

Exercice 1.5

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = -3v_n + 8$ pour tout entier naturel n.
Démontrer, par récurrence que $v_n = -3 \times (-3)^n + 2$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1.6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 7$ pour tout entier naturel n.
Démontrer, par récurrence que $u_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$

Exercice 1.7

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = \frac{1}{5}w_n + 3$ pour tout entier naturel n.
Démontrer, par récurrence, que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 0.

⚠ Dans cet exemple (avec une suite définie par récurrence), les méthodes de Première ne permettaient pas de justifier les variations.

Exercice 1.8

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ pour tout entier naturel n.
Prouver, par récurrence que tous les termes de la suite (v_n) sont strictement positifs et que la suite est croissante.

Exercice 1.9

Soit la suite définie par $u_1 = 5$ et pour tout $n \geq 1$ par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Démontrer, par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 2, autrement dit que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 2$.

Exercice 1.10

Soit a un réel différent de 1.

Démontrer, par récurrence, que pour tout n entier naturel, $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

Exercice 1.11

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

☛ On vient de montrer, avec le symbole somme, que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 1.12

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$