

5.3

Cosinus et sinus d'un réel

SPÉ MATHS 1ÈRE - JB DUTHOIT

5.3.1 Définition

Soit x un réel. L'objectif est de déterminer le **cosinus** et le **sinus** de ce nombre réel. Après enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, le nombre x se retrouve en un point M .

Définition

On considère un nombre x ayant pour point image M sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus de x** , noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Le **sinus de x** , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5.3.2 Propriétés

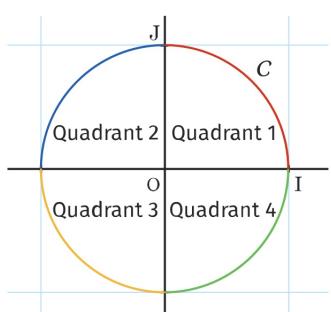
Propriété

Pour tout nombre réel x ,

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Exercice 5.61

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. M est le point image sur le cercle d'un nombre réel x .



Compléter le tableau suivant :

M est dans le quadrant	1	2	3	4
Signe de $\cos(x)$				
Signe de $\sin(x)$				



Savoir-Faire 5.33

SAVOIR CALCULER UN COSINUS CONNAISSANT UN SINUS ET INVERSEMENT

Exemple :

1. Soit x un réel appartenant à $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ avec $\sin(x) = 0.4$. Calculer $\cos(x)$

2. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.



Exercice 5.62

On donne $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.



Exercice 5.63

Soit x une réel dans $[0; \frac{\pi}{2}]$

On sait aussi que $\cos(x) = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

Calculer $\sin(x)$



Exercice 5.64

Soit x une réel dans $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$

On sait aussi que $\sin(x) = -0.36$

Calculer $\cos(x)$



Exercice 5.65

Pour tout x avec $\cos(x) \neq 0$, on considère $\tan(x)$ défini par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Montrer que

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$



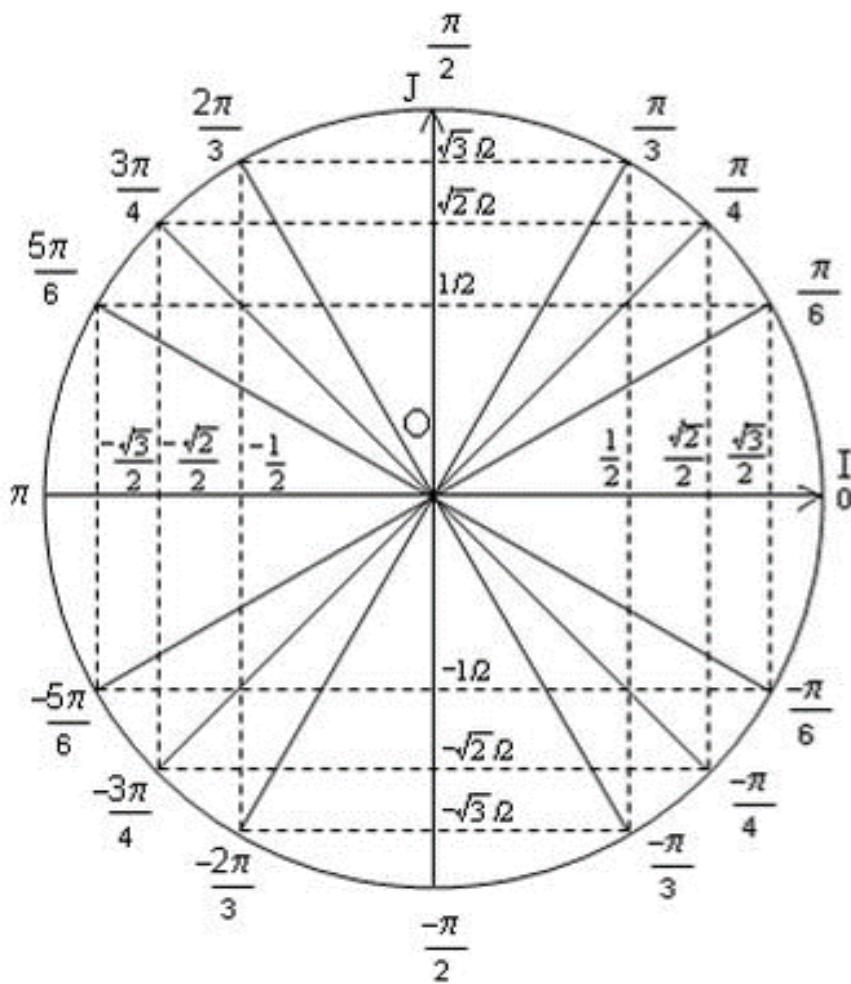
Exercice 5.66

Démontrer que pour tout réel x , on a :

$$1. (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 2$$

$$2. (\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x)$$

5.3.3 Cosinus et sinus d'angles remarquables



Cercle trigonométrique et valeurs remarquables de sinus et cosinus

 Savoir-Faire 5.34

SAVOIR CALCULER LE COSINUS OU LE SINUS D'UN RÉEL

Déterminer le cosinus et le sinus (on appelle cela les **lignes trigonométriques**) de :

- | | | | |
|----|---------------------|----|--------------------|
| 1. | $\frac{217\pi}{2}$ | 3. | 12345π |
| 2. | $\frac{-212\pi}{3}$ | 4. | $\frac{133\pi}{6}$ |

 Exercice 5.67

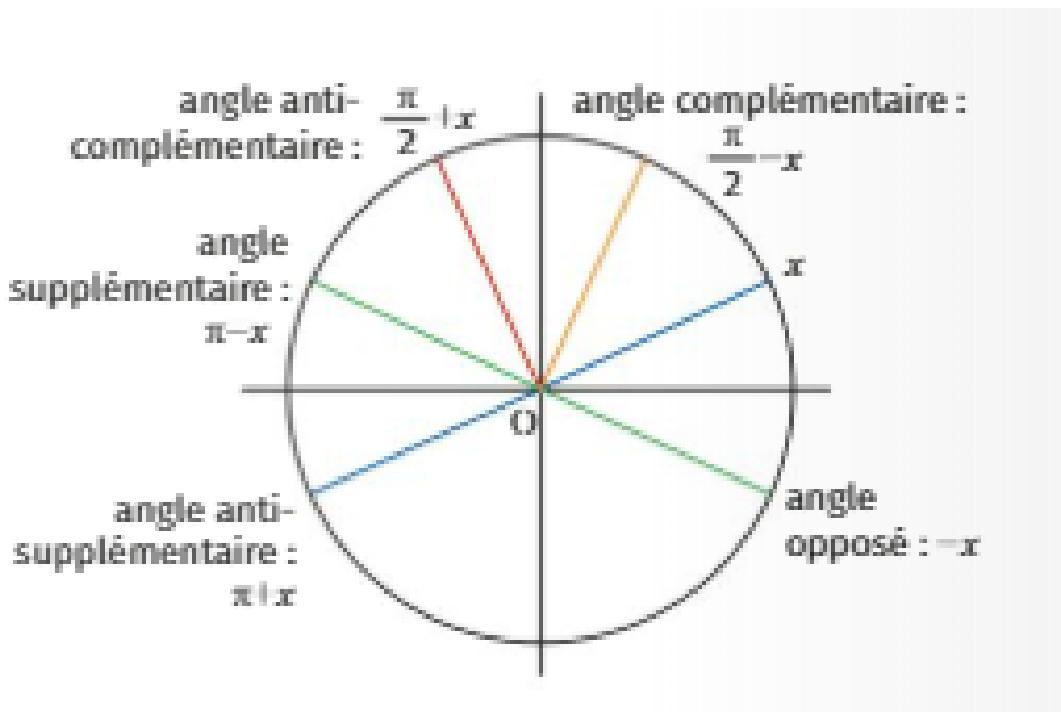
Sans calculatrice (ou seulement pour vérifier), calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.

- $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$
 - $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

3. $\cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 4. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

5.3.4 Cosinus et sinus d'angles associés



cosinus et sinus d'angles associés

Savoir-Faire 5.35

SAVOIR DÉTERMINER, PAR LECTURE DU CERCLE TRIGO, LES COSINUS ET SINUS DES ANGLES ASSOCIÉS À x

Exercice 5.68

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$:

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ | 4. $\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$ | 7. $\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$ |
| 2. $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ | 5. $\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)$ | |
| 3. $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ | 6. $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)$ | |

Exercice 5.69

Exprimer $\cos\left(\frac{-76\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

 **Exercice 5.70**

On considère que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. c) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
 2. En déduire : d) $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
- a) $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ e) $\cos\left(\frac{11\pi}{10}\right)$
- b) $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$

 **Exercice 5.71**

Pour tout x avec $\cos(x) \neq 0$, on considère $\tan(x)$ défini par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Montrer que

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

5.3.5 Lien avec le cosinus et sinus d'un triangle rectangle

5.3.6 Et avec la calculatrice ?

- ☛ $\arccos(a)$ renvoie l'angle compris entre 0 et π et dont le cosinus vaut a .
- ☛ $\arcsin(a)$ renvoie l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et dont le sinus vaut a .