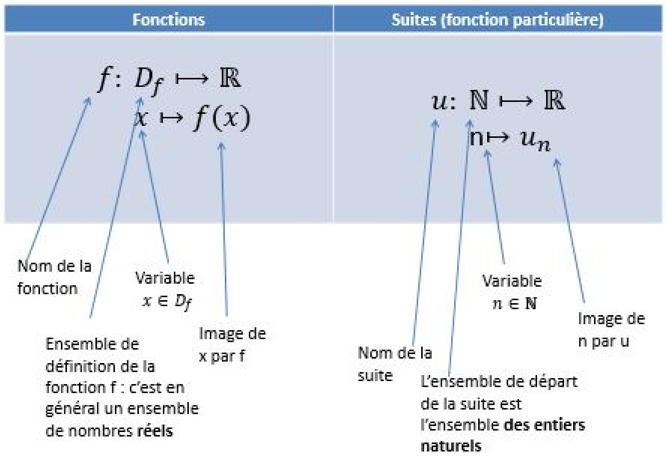
0.2 Les suites

Maths Spé terminale - JB Duthoit

0.2.1 Définition et modes de génération

Analogie avec une fonction classique



0.2.2 Définition

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une **suite numérique** est une fonction définie pour tout entier $n \geq n_0$ et à valeurs réelles.
Pour chaque $n \geq n_0$, on associe le nombre réel noté u_n.
La suite est notée u ou (u_n).

Remarque

- u_n est un réel ; on dit que c'est le **terme** de la suite (u_n) de rang n.
- (u_n) est la suite.

Remarque

C'est la faute classiques des lycéens débutants : La lettre n est à la fois utilisée comme indice des termes de la suite et comme valeur dans les formules.
Voici un exemple pour mieux comprendre : en rouge le n en indice et en vert le n utilisée comme "valeurs" :
$u_{n+1} = n \times u_n + 11n$ Ainsi, si on remplace n par 51, on obtient $u_{52} = 51 \times u_{51} + 11 \times 51$.

0.2.3 Modes de générations d'une suite

Par une formule explicite

Ici, le terme de la suite u_n est défini directement en fonction de n, et uniquement en fonction de n.
☛ On dit que (u_n) est définie par une **formule explicite**.

Exemple
la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$ est une suite explicite.

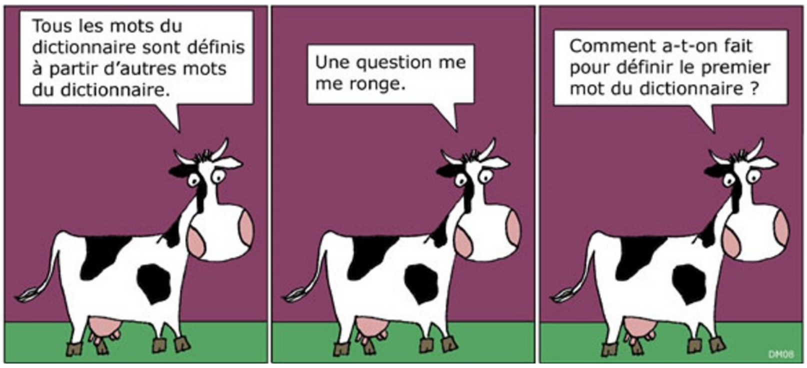
Exercice 0.20
Savoir calculer les premiers termes
Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 6$ par $v_n = \frac{1}{n-5}$.

Remarque
Comment reconnaître une suite explicite ? Dans le cas d'une suite explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'entier souhaité.

Par une formule récurrente

Ici, le terme u_n de la suite se définit par rapport au(x) terme(s) précédent(s).
☞ On parle de **suite récurrente**.



Exemple
La suite w_n définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$ est une suite définie par récurrence.

Exercice 0.21
Savoir calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

Histoire

Les suites numériques sont présentes dans de nombreux domaines relevant de la modélisation. Parmi ces suites, l'une des plus connues est la suite de Fibonacci définie dans cet exemple.
Historiquement, elle proviendrait du mathématicien italien Fibonacci qui aurait souhaité étudier l'évolution d'une population de lapins. Aujourd'hui, cette suite apparaît dans la réalisation de nombreuses oeuvres d'art.

Remarque

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme : pour calculer u_{100}, on a besoin de u_{99} par exemple... et ainsi de suite jusqu'au premier terme.

Exercice 0.22

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{n+1} - 1$. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
3. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 0.23

On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = 1$ et $u_{n+1} = 2{u_n}^2 + u_n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Que peut-on conjecturer ?

0.2.4 Calculer les termes d'une suite avec la calculatrice

- Il faut d'abord passer en mode **suite** : $\boxed{Mode}$ puis choisir **suite** ou **séquence**. Ensuite, il faut quitter avec $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{quitter}$.
- Appuyer ensuite sur la touche $\boxed{f(x)}$.
- Pour les suites explicites :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre ensuite l'expression de la suite en fonction de n : pour afficher n, il suffit de taper sur la touche $\boxed{X, T, \theta, n}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.(Il faudra peut être régler la table pour ne faire apparaître que les valeurs positives de n.
  - Exemple avec $u_n = 2n + 1$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,$\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{X, T, \theta, n}$,$\boxed{+}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2nde}$ et $\boxed{table}$.

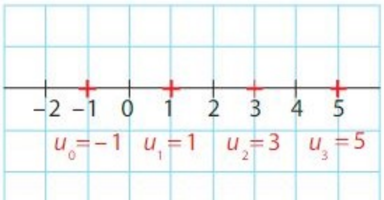
- <u>Pour les suites récurrentes</u> :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre **u(nMin)** la valeur de la suite pour **nMin**
  - Il reste ensuite à donner l'expression de la suite. Attention sur TI, il faudra rentrer u_n en fonction de u_{n-1} (et non pas u_{n+1} en fonction de u_n !) Le terme u_{n-1} se trouve en appuyant sur $\boxed{2nde}$ puis sur $\boxed{7}$, puis $\boxed{(}$, $\boxed{X,T,\theta,n}$, puis $\boxed{-}$, puis $\boxed{1}$ et on ferme la parenthèse avec $\boxed{)}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.
  - Exemple avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+3$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,**u(nMin)=1**, $\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{2nde}$,$\boxed{7}$, $\boxed{(}$,$\boxed{X,T,\theta,n}$,$\boxed{-}$,$\boxed{1}$, $\boxed{)}$, $\boxed{+}$, $\boxed{3}$. puis $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.

0.2.5 Représentation graphique de suites

Sur une droite graduée

C'est tout simple : on trace une droite graduée, et on place dessus les valeurs de u_0, u_1, u_2...

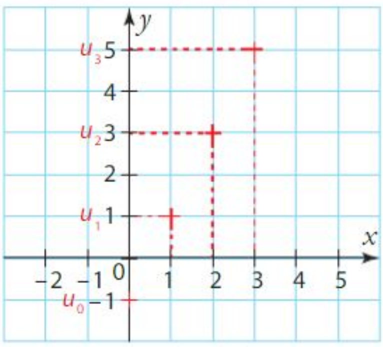
Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



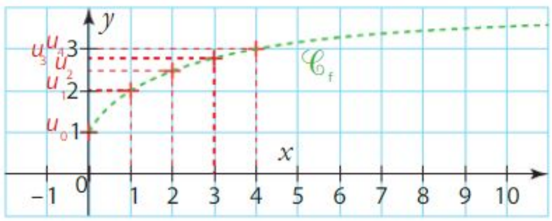
Dans un repère

C'est tout simple aussi : on trace place les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$...

Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



Suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$

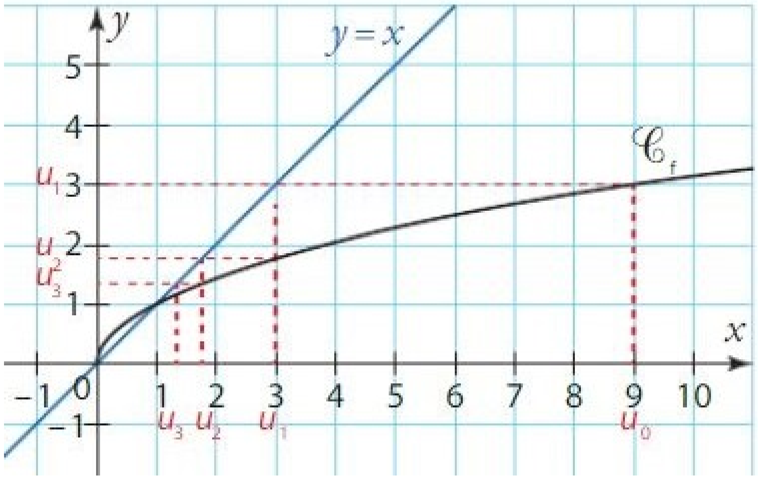


Cas des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Bien sûr, on peut représenter cette suite en utilisant l'un des deux procédés précédents. Mais dans le cas d'une suite récurrente, il y a une méthode qui se base sur la courbe représentative de la fonction f.
Attention, cette méthode fonctionne uniquement avec les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'idée est de construire les termes à l'aide de la courbe C_f et la droite d'équation $y = x$.

- On commence par placer u_0 sur l'axe des abscisses
- On construit u_1 sur l'axe des ordonnées en utilisant le courbe C_f et le fait que $u_1 = f(u_0)$.
- On construit u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$.
- On a donc u_1 sur l'axe des abscisses, et on peut réitérer le procédé pour u_2, u_3...autant de fois que nécessaire.

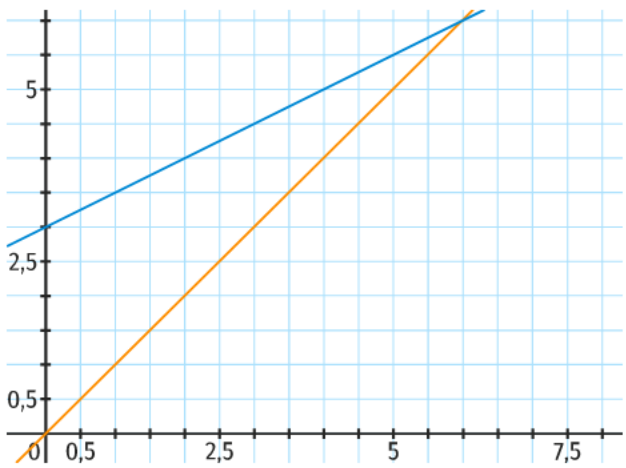
Suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



Exercice 0.24
Savoir représenter une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

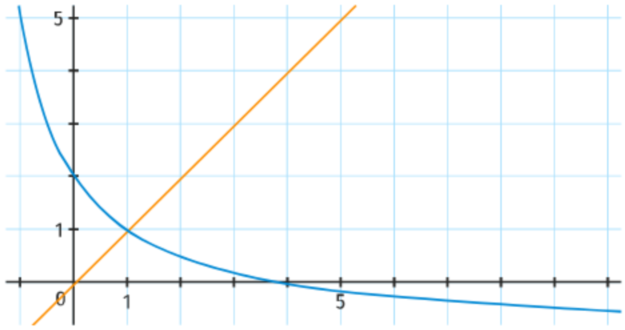
Soit u_n une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et soit (v_n) une suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$.
Déterminer la fonction f et g telles que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. Représenter ensuite ces deux suites (deux graphiques différents) en utilisant la méthode précédente. Pour vérification, on pourra faire les calculs à la main des premiers termes (ou avec la calculatrice) et s'assurer que les valeurs trouvées graphiquement soient en cohérence avec les valeurs calculées.

Exercice 0.25
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 3$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 0.26
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x+2} - 1$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 0.27
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -0.5u_n + 7$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n)
2. a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(un)$.
   b) Construire dans un repère la droite d'équation $y = x$ ainsi que la courbe C_f (qui est ici représentée par une droite).
   c) Représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   ☛ Bien laisser les traits de construction !

0.2.6 Variations d'une suite

Approche

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 3$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = (n-3)^2$.

Définitions

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Dire qu'**une suite** (u_n) **est croissante pour** $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Dire qu'**une suite** (u_n) **est décroissante pour** $n \geq k$ signifie que pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthodes pour démontrer les variations d'une suite

Méthode de la différence

- On calcule $u_{n+1} - u_n$.
- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est décroissante à partir de ce rang.

Méthode du quotient ⚠ Cette méthode ne fonctionne que si tous les termes de la suite sont strictement positifs.

- On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
-
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante à partir de ce rang.
  - Si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

Méthode en utilisant les variations de f pour une suite du type $u_n = f(n)$ On utilise pour cela la propriété suivante :

Propriété Variation de fonction et de suite

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

- si f est une fonction croissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est croissante pour $n \geq k$.
- si f est une fonction décroissante sur $[k; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante pour $n \geq k$.

La méthode consiste donc à :

- Étudier les variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Trouver un intervalle du type $[k; +\infty[$ (avec $k \in \mathbb{N}$) où la fonction f est monotone.
- Conclure, en utilisant la propriété précédente, quant aux variations de la suite (u_n) .

Exercice 0.28

Savoir démontrer les variations d'une suite.

1. Méthode 1 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = (n+2)^2$.
2. Méthode 2 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5}{2^n}$.
3. Méthode 3 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

✎Je m'entraîne seul(e)

Étudier les variations des suites (u_n) définie par :

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Rép : (u_n) est strictement croissante pour $n \geq 1$.
2. $u_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
3. $u_n = n^3 - n^2 + n$. Rép : (u_n) est strictement croissante.
4. $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$ Rép : (u_n) est strictement croissante.

Exercice 0.29

On se propose d'étudier l'évolution du nombre de souris d'une animalerie sur une période de six semaines.
Initialement, ce nombre s'élève à 240 souris.
On peut modéliser ce nombre de souris au bout de n semaines par la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n (avec $0 \leq n \leq 6$), par $u_n = 240 - 40n$.

1. a) Donner la valeur de u_0, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b) Donner une interprétation de u_2.
2. On considère maintenant la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 240 - 40n$.
   a) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
   b) Démontrer cette conjecture.
   c) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

Exercice 0.30

Pour chacune des suites suivantes, étudier son sens de variations en utilisant la méthode 2 :

1. (u_n) définie par $u_n = 4 \times 5^n$.
2. (v_n) définie par $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3. (w_n) définie par $w_n = 5 \times 2^{2n+1}$.
4. (w_n) définie par $w_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$.

Exercice 0.31

Pour chacune des suites suivantes, étudier son sens de variations en utilisant la méthode 1 ou la méthode 2 :

1. (u_n) définie par $u_n = n^2 - n + 1$.
2. (v_n) définie par $v_n = 2^n$.
3. (w_n) définie par $w_n = \frac{-5}{n}$, pour $n \geq 1$.

Exercice 0.32

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{10}{n}$. Étudier les variations de la suite (u_n)

1. En utilisant la méthode de la différence
2. En étudiant la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{10}{x}$

Exercice 0.33

Pour chacune des suites suivantes, étudier son sens de variations :

1. (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$, pour $n \geq 1$.
2. (v_n) définie par $v_n = \frac{2-n}{2+n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (w_n) définie par $w_n = n^2 + 2n - 1$, pour $n \in \mathbb{N}$.

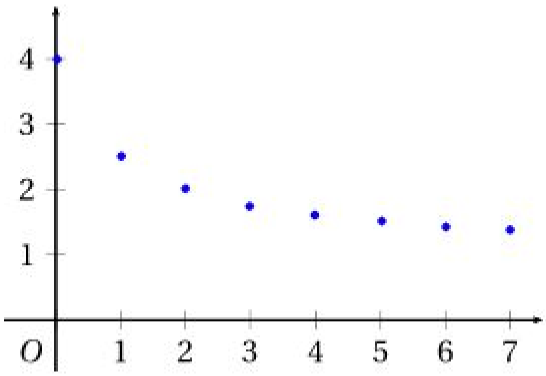
0.2.7 Notion de limite de suite

Suite convergente

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$. Que devient u_n si n prend des "grandes" valeurs ?
On observe que les termes de la suite (u_n) semblent se rapprocher de 1, et donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
On peut d'ailleurs renforcer ce sentiment de façon numérique, en utilisant la calculatrice par exemple, afin de représenter la suite (u_n) .

Représentation de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$



Définition

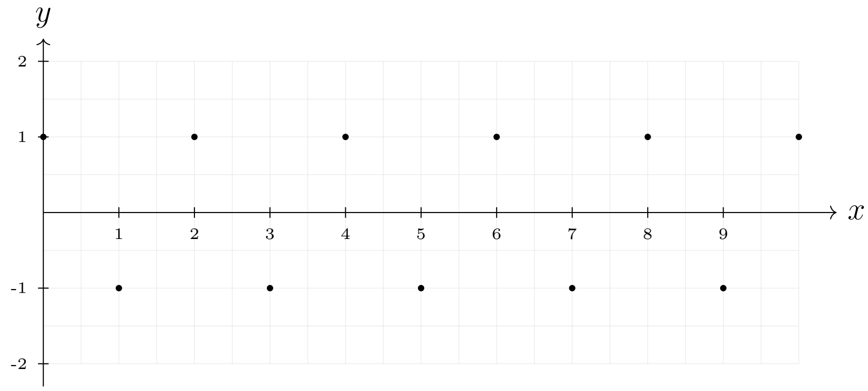
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de l dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Suite divergente

Définition

Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.



Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi petits [a] que l'on veut dès que n est suffisamment grand.
On dit que la (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

a. petits ne signifie pas proche de zéro, mais négatifs et grands en valeur absolue !

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. En utilisant la calculatrice (par exemple), on observe que les termes de la suite semblent être de plus en plus grands, et on peut donc +penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.