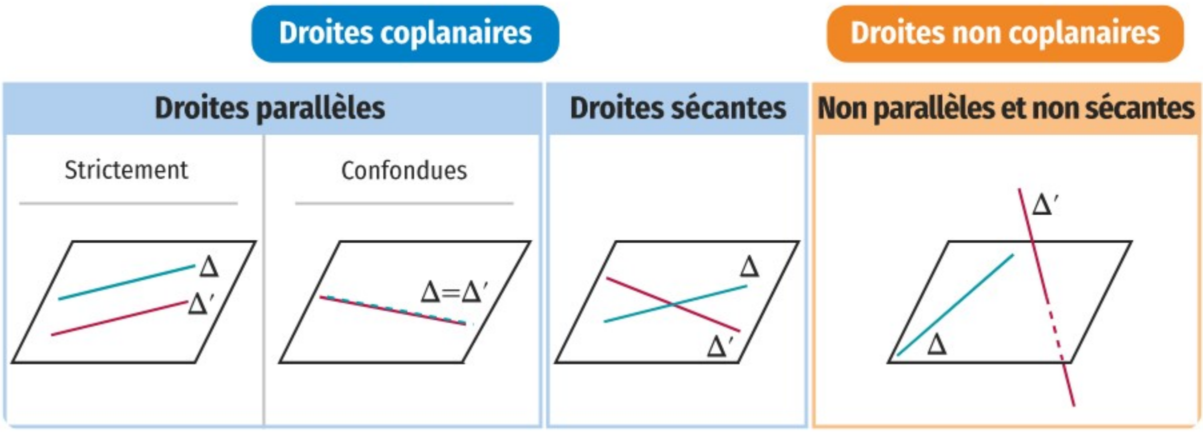
3.3 Positions relatives de droites et de plans

Maths Spé terminale - JB Duthoit

3.3.1 Positions relatives de deux droites

Définition

Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.
Si elles sont coplanaires, alors elles appartiennent à un même plan. Elles peuvent donc être sécantes (avoir un point d'intersection) ou parallèles (strictement parallèles ou confondues)



Remarque

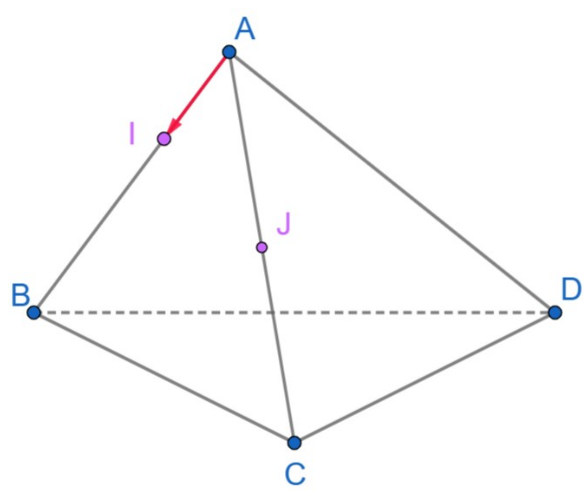
⚠ Dans l'espace, des droites non sécantes ne sont pas nécessairement parallèles

Savoir-Faire 3.4

Savoir décrire la position relative de deux droites

$ABCD$ est un tétraèdre. On définit le point I par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J qui est le milieu de $[AC]$.

1. Démontrer que les droite (IJ) et (CB) sont sécantes.
2. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.



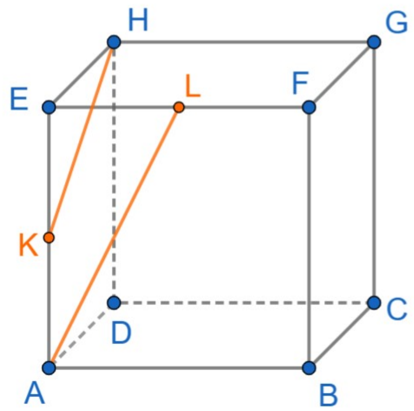
Méthode :

Pour démontrer que deux droites sont sécantes dans l'espace, il faut démontrer que ces deux droites sont coplanaires et non parallèles !

Exercice 3.11

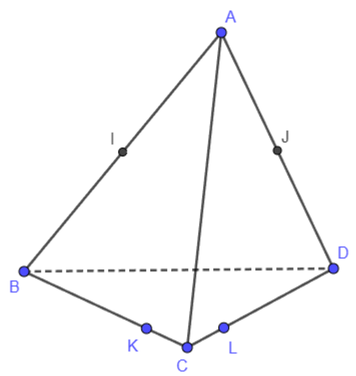
$ABCDEFGH$ est un cube, K est le milieu de $[AE]$ et L est le milieu de $[EF]$

1. a) Justifier que K appartient au plan (ADH)
   b) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires
   c) Que dire des droites (AD) et (KH) ?
2. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que les droites (AL) et (KH) ne sont pas parallèles.



Exercice 3.12

⚠ Exercice donnée au bac blanc de décembre 2024



ABCD est un tétraèdre de sommet A. I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$.
K et L sont les points tels que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

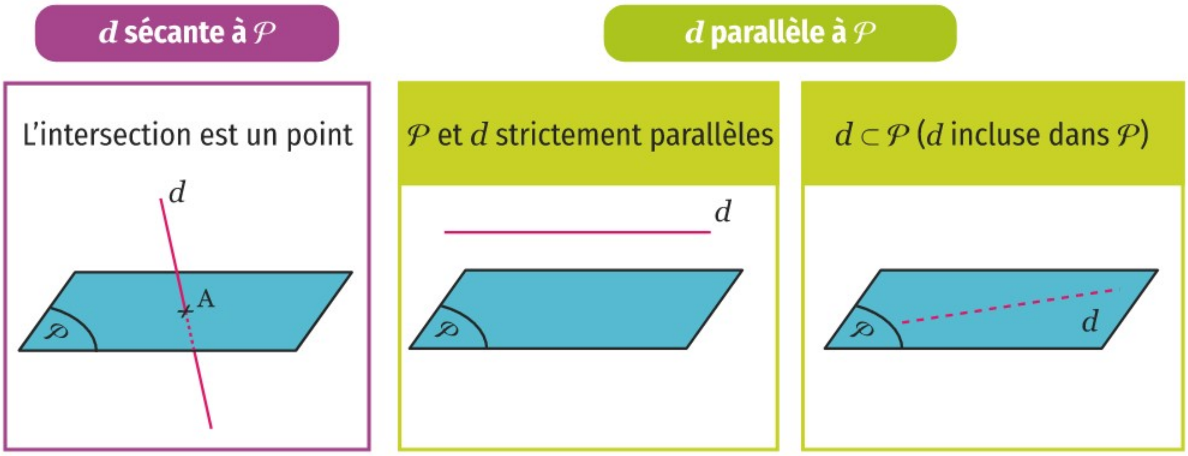
1. a) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.
   d) Que peut-on en déduire pour les points I,J,K et L ?
2. Justifier que les droite (IK) et (JL) sont sécantes.

3.3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition

Soit une droite $d(A, \vec{u})$ de l'espace et un plan $P(C, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace.
La droite d est parallèle au plan P si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

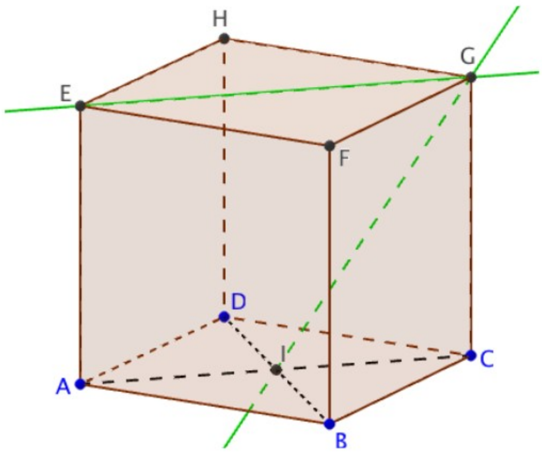
Définition



Exercice 3.13

$ABCDEFGH$ est un cube. Compléter les pointillés avec le vocabulaire adéquat :

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont .... en I.
- La droite (EG) est .... dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont ....

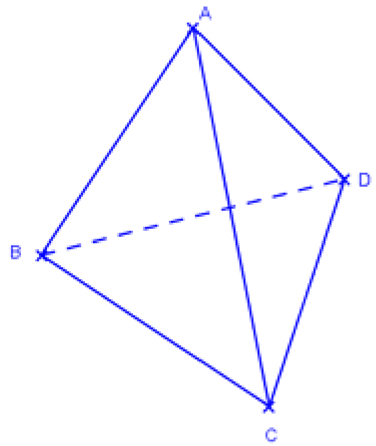


Savoir-Faire 3.5

Savoir étudier la position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

I est le milieu de $[AB]$.
J est le milieu de $[AC]$.
K est le milieu de $[DC]$.
L est le milieu de $[BD]$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère $IJKL$.
2. a) Déterminer la position relative du plan $(IJKL)$ et de la droite (BC).
   b) Déterminer la position relative du plan $(IJKL)$ et de la droite (AD).
   c) Peut-on conclure que les droites (BC) et (AD) sont parallèles ?



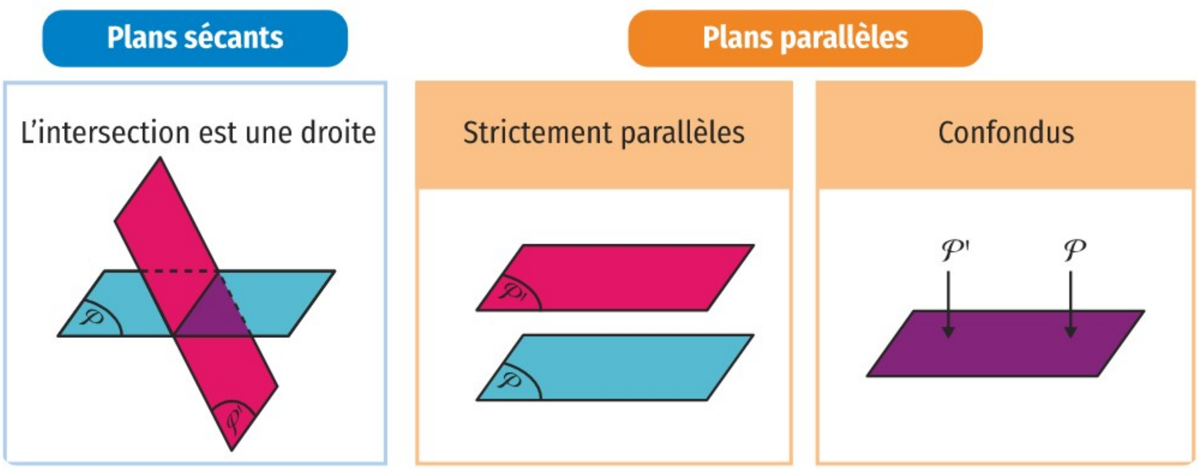
Méthode :
Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un des deux vecteurs directeurs du plan.

3.3.3 Positions relatives de deux plans

Définition

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction.

Définition



Remarque

Trois points non alignés définissent un plan !

Propriété

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

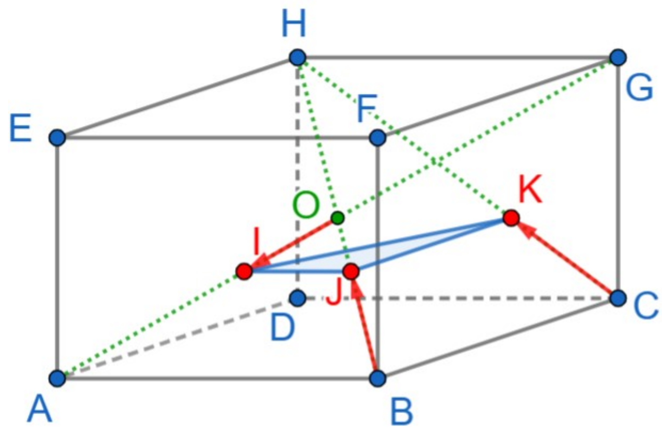
Conséquence

Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre plan.

Savoir-Faire 3.6

SAVOIR DÉTERMINER LA POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

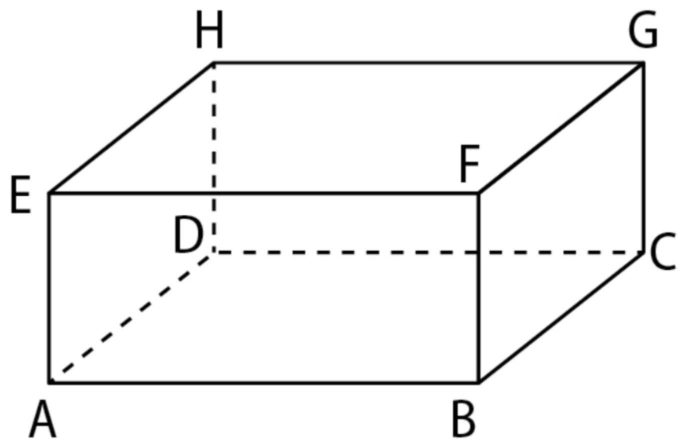
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre O. On définit les points I, J et K par $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$.



1. Démontrer que les droite (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. a) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BH}$
   b) Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles

Exercice 3.14

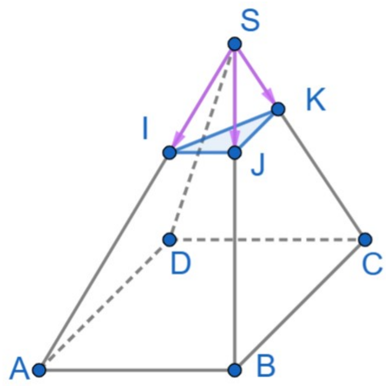
$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle ci-contre. Pour chacune des items suivants, préciser si les plans sont confondus,strictement parallèles ou sécants. S'ils sont sécants, préciser leur droite d'intersection.



1. (ABC) et (FGH)
2. (ABF) et (AEG)
3. (EFG) et (EHF)
4. (ADE) et (BFH)

Exercice 3.15

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Les points I, J et K sont tels que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$



1. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

2. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires

3. Justifier que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.