14.3 La loi des grands nombres

C'est dingue ;-) :
8.06×10^{67} est approximativement le nombre de façons différentes de mélanger un jeu de 52 cartes. Même si l'humanité tout entière mélangeait depuis 10 000 ans chaque seconde, on serait encore loin de ce nombre. Il est donc quasi certain qu'aucun mélange de cartes de l'histoire n'est apparu deux fois !

14.3.1 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété - inégalité de Bienaymé-Tchebychev -

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$. Cette inégalité est appelée l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.

Remarque

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale. En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

Savoir-Faire 14.73

Savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de 2.5, avec une variance de 1,1.
Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.

Méthode :

- Définir une variable aléatoire correspondant à l'énoncé.
- Traduire les inégalités de l'énoncé sous forme d'écart par rapport à la moyenne.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour conclure.

Exercice 14.7
On lance 3600 fois une pièce de monnaie non truquée.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X
2. Minorer la probabilité que ne nombre d'apparition de Pile soit strictement compris entre 1600 et 2000.

Exercice 14.8

On appelle X la variable aléatoire qui, sur le créneau horaire 14h-15h, associe le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport. On estime que $E(X) = 16$ et $V(X) = 16$.
Déterminer une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

Exercice 14.9

1. Majorer $P(X \geq 4)$ pour une variable aléatoire positive X d'espérance 1 et de variance 0.2. Montrer que $P(|X-1| \geq 0.5) \leq 0.8$
2. Une classe présente les caractéristiques suivantes : une moyenne de 12,4 et un écart type de 1,2. Majorer la probabilité qu'un élève ait une moyenne écartée d'au moins 2,5 points de la moyenne

Exercice 14.10

Après étude de sa production, un boulanger constate que la masse moyenne de ses pains s'élève à 275 g. Il décide que seuls les pains dont la masse est comprise entre 250 g et 300 g peuvent être vendus. On choisit un pain au hasard dans la production et on note X la variable aléatoire correspondant à la masse du pain en grammes. On donne $V(X) = 225$.
Majorer la probabilité que le pain choisi ne soit pas mis en vente.

Exercice 14.11

On considère un troupeau de zèbres vivant en liberté à proximité d'un fleuve. Chaque zèbre qui s'hydrate au bord du fleuve risque d'être agressé par un alligator, avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$. On suppose que 33 zèbres s'hydratent au bord du fleuve. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de zèbres victimes d'une attaque.

1. Donner l'espérance de X.
2. Majorer la probabilité que plus de 25 zèbres soient victimes d'une attaque.

14.3.2 Inégalité de concentration

Propriété

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X ; autrement dit, $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de X).

Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{na^2}$.
Cette inégalité est appelée l'**inégalité de concentration**.

Savoir-Faire 14.74

Savoir utiliser l'inégalité de concentration

On effectue n tirages successifs avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donnée, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon. On considère aussi M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$
2. Écrire l'inégalité de concentration pour M_n.
3. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion

de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 14.12
On lance n foi un dé à 6 faces.
On note X la variable aléatoire qui, à un lancer donné,associe 1 si le 1 sort, et 0 sinon.
On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$
2. Écrire l'inégalité de concentration relative à M_n
3. Combien suffit-il de lancers pour que la fréquence de sortie de la face 1 s'écarte de plus de $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{6}$ avec une probabilité inférieure ou égale à 0.95 ?

14.3.3 Loi faible des grands nombres

Propriété

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire.
On pose $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Alors, pour tout réel a strictement positif, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geq a\right) = 0$.

Savoir-Faire 14.75

Savoir simuler des valeurs pour observer la loi des grands nombres

On lance un dé équilibré à 6 faces et on considère la variable aléatoire X égale à la valeur du dé.
On nomme M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. On considère le script python suivant :

```
from random import randint
import math

def de():
  """
  cette fonction simule le lancer d'un dé
  """
    return randint(1,6)

def simulation_Mn(n):
  """
  Cette fonction simule un échantillon de taille n
  et renvoie la valeur moyenne
  """
    tab = []
    for i in range(...):
        tab.append(...)
    return sum(tab) / ...


def simulation_500_Mn(n,a):
  """
```

```
    Cette fonction calcule 500 valeurs moyennes pour un
    échantillon de taille n
    elle renvoie le proportion en pourcentage de valeurs
     moyennes dont l'écart avec l'espérance
    est supérieur à la valeur a
    """
    c = 0
    for i in range(...):
        M = simulation_Mn(n)
        if abs(M - ... ) > a:
            c += 1
    return c * 100 / 500
```

1. Déterminer $E(X)$
2. Compléter la fonction `simulation_Mn(n)`
3. Compléter la fonction `simulation_500_Mn(n,a)`
4. Tester le programme pour des valeurs de plus en plus grande, et mettre en évidence la loi faible des grand nombre.

```
>>> simulation_500_Mn(5,0.1)
1.0
>>> simulation_500_Mn(10,0.1)
0.928
>>> simulation_500_Mn(15,0.1)
0.878
>>> simulation_500_Mn(20,0.1)
0.826
>>> simulation_500_Mn(40,0.1)
0.754
>>> simulation_500_Mn(1000,0.1)
0.056
>>> simulation_500_Mn(2000,0.1)
0.014
>>> simulation_500_Mn(5000,0.1)
0.0
```