

10.4

Applications du calcul intégral

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

10.4.1 Calculs d'aires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On considère ici la surface S délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

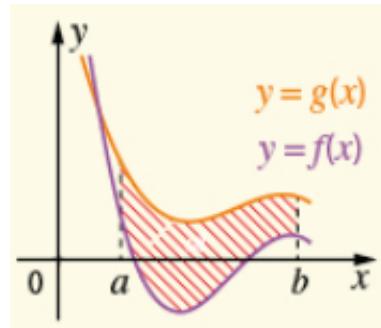
- Si $f \geq 0$: d'après ce qui précède, $S = \int_a^b f(x)dx$
- Si $f \leq 0$: la fonction $-f$ est alors positive. Deux surfaces symétriques par rapport une même droite ont même aire. Donc $S = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Si f change de signe, on décompose alors la fonction f sur des intervalles sur lesquels la fonction f est soit positive, soit négative. On utilise alors les deux points précédents.

Propriété Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$, avec $\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Savoir-Faire 10.48

SAVOIR ÉTUDIER UNE SUITE D'INTÉGRALE

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par
 $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

On note f_n les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

On a tracé ci-contre les courbes pour n prenant les valeurs 1, 2, 3 et 4.

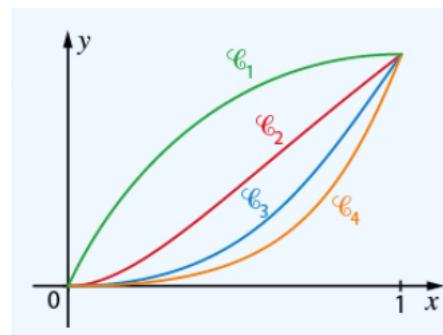
- Conjecturer le sens de variations de (I_n) .

- Démontrer cette conjecture

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



Savoir-Faire 10.49

SAVOIR CALCULER L'AIRE ENTRE DEUX COURBES

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

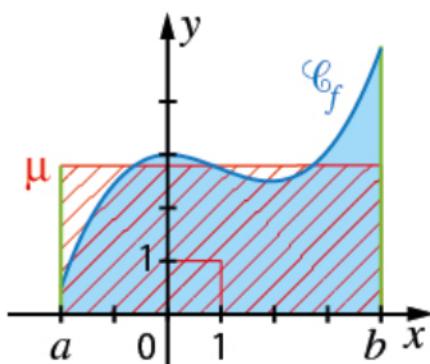
- Étudier la position relative de C_f et C_g sur $[0; 1]$
- Calculer, en u.a., la surface délimitée par les deux courbes C_f et C_g , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

10.4.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ le réel μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



Remarque

De façon évidente, on a $\mu \times (b - a) = \int_a^b f(x) dx$, ce qui signifie que l'aire hachurée du rectangle (de hauteur μ et de largeur $b - a$) est égale à l'aire bleue sous la courbe C_f .

 **Savoir-Faire 10.50****SAVOIR CALCULER ET INTERPRÉTER UNE MOYENNE**

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur la période des 16 premiers jours.