

8.3

Limites

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

8.3.1 Limite de la fonction logarithme

Propriété

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Exercice 8.17

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x)}$. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition. La courbe C_f admet-elle des asymptotes ? Lesquelles ?

Exercice 8.18

Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-3}\right)$. Déterminer la limite en 3 et en $+\infty$.

8.3.2 Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 8.19

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x)$
2. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x}$

Propriété - Croissance comparée -

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$

Démonstration 10(Exigible) :

⚠ les questions qui suivent sont là pour vous guider ; la démonstration est exigible sans ces étapes intermédiaires.

CALCUL DE $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x)$

☛ On pourra poser le changement de variable $x = e^X$

Propriété - Croissance comparée -

Pour tout entier n strictement positif, on a

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$



Savoir-Faire 8.4

SAVOIR CALCULER DES LIMITES EN UTILISANT LA CROISSANCE COMPARÉE

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(\ln(x) - 1)$



Exercice 8.20

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \ln(x)$
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \times \ln(x^3)$
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x - \ln(x)}$



Exercice 8.21

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 3x}{2x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3}{x^3}$



Exercice 8.22

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(\sqrt{x})$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln(x)$

● Exercice de synthèse 8.23

Le niveau sonore $N(I)$, en décibels (dB), d'un son d'intensité acoustique I exprimée en watts par mètre carré ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), est donné par la formule :

$$N(I) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où I_0 désigne la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine et où \log est la fonction logarithme décimal définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

1. a) Calculer, en décibels, le niveau sonore $N(I)$ lorsque $I = I_0$.
 b) Lors du décollage de la fusée Ariane, on a observé que $I = I_0 \times 10^{17}$. Calculer, en décibels, le niveau sonore correspondant.
2. Pour un marteau piqueur, on a $N(I) = 110$. Déterminer l'expression de l'intensité acoustique en fonction de I_0 .
3. On admet que les intensités acoustiques des sons s'additionnent. Le niveau sonore d'un violon est de 70 dB. Calculer, en décibels, le niveau sonore de dix violons identiques jouant ensemble.
4. Un isolant acoustique est vendu pour effectuer une atténuation du niveau sonore de 1,5 dB par centimètre d'épaisseur. L'épaisseur d'une cloison fabriquée avec ce matériau est de 10 cm. Cette cloison sépare deux pièces. Un son d'intensité acoustique notée I_B émis dans une pièce est atténué en un son d'intensité acoustique I_C dans l'autre pièce.

Donner la valeur arrondie à l'unité du rapport $\frac{I_B}{I_C}$.