

12.1

Fonctions sinus et cosinus

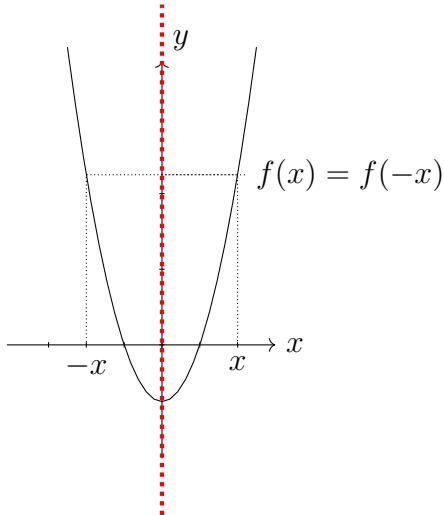
MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

12.1.1 Quelques rappels

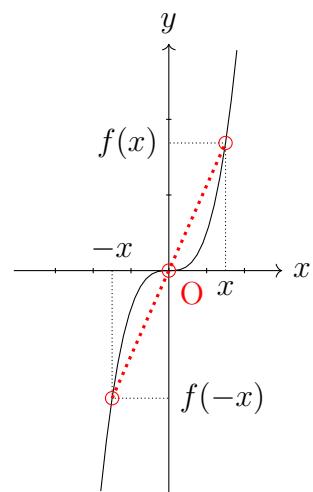
Définition - Rappels de seconde-

On considère une fonction f définie sur un ensemble D .

- On dit que f est **paire** si D est centré en 0 et si pour tout réel x de D , on a $f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** si D est centré en 0 et si pour tout réel x de D , on a $f(-x) = -f(x)$



Fonction paire



Fonction impaire

12.1.2 Quelques propriétés

Propriété

- Soit f la fonction définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$. La fonction f est continue et dérivable sur \mathbb{R} , et $f'(x) = -\sin(x)$
- Soit g la fonction définies sur \mathbb{R} par $g(x) = \sin(x)$. La fonction g est continue et dérivable sur \mathbb{R} , et $g'(x) = \cos(x)$

Propriété -Périodicité-

Pour tout réel x de \mathbb{R} , $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π .

Propriété -Parité-

Pour tout réel x de \mathbb{R} , $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est paire, et que la fonction sinus est impaire. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et celle de la fonction sinus symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(u(x))$ et $g(x) = \sin(u(x))$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$.

Démonstration 21- -

La démonstration, facile, utilise la formule de la dérivée d'une fonction composée.

Propriété

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x)$. Une primitive de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = -\cos(x)$
- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \cos(x)$. Une primitive de la fonction g est la fonction définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \sin(x)$

Propriété

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Une primitive de la fonction $u'\cos(u)$ est $\sin(u)$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Une primitive de la fonction $u'\sin(u)$ est $-\cos(u)$

12.1.3 Variations des fonctions trigonométriques

Exercice 12.1

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$. En utilisant le cercle trigonométrique, étudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Propriété

x	0	π
$f(x) = \cos(x)$	1	-1

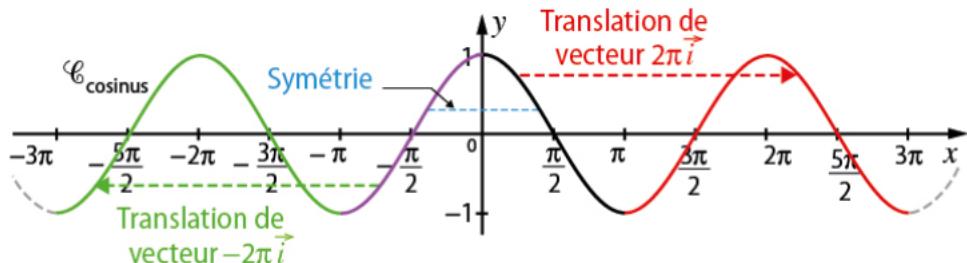
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = \sin(x)$	0	1	0

12.1.4 Courbes représentatives

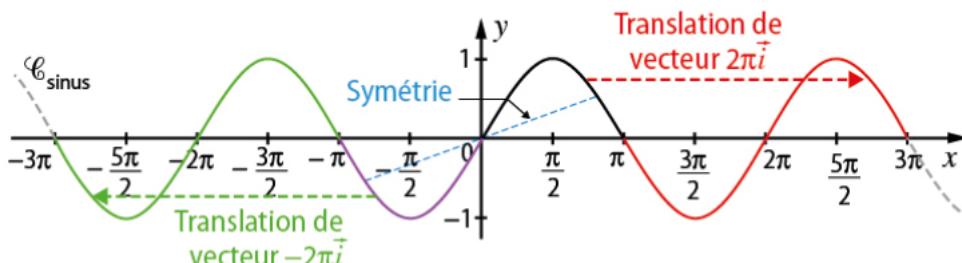
Pour tracer la courbe de la fonction cosinus, il suffit de la tracer sur $[0; \pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.

Pour la fonction sinus, il suffit de la tracer sur $[0; \pi]$, puis de construire la symétrie par rapport à l'origine (fonction impaire), puis enfin d'utiliser la périodicité pour faire des translations.

Courbe de la fonction cosinus



Courbe de la fonction sinus



Savoir-Faire 12.59

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE
Dans chaque cas f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Calculer $f'(x)$.

$$1. f(x) = \sin(x) \times \cos(x)$$

$$3. f(x) = \cos(3x + 5)$$

$$2. f(x) = \frac{\sin(x)}{3 + \sin(x)}$$

Exercice 12.2

Dans chaque cas f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Calculer $f'(x)$.

$$1. f(x) = x \cos(x)$$

$$4. f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

$$2. f(x) = x \sin(x)$$

$$5. f(x) = \cos(x + 2)$$

$$3. f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$6. f(x) = \sin(7 - x)$$

Exercice 12.3

Dans chaque cas f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = e^x \cos(x)$
3. $f(x) = e^{-x} \cos(x)$
2. $f(x) = e^x \sin(x)$
4. $f(x) = \cos(4x^2 + 2)$

Exercice 12.4

Dans chaque cas f est une fonction définie sur I . Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $I =]0; \frac{\pi}{2}]$
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $I =]0; \frac{\pi}{2}]$
4. $f(x) = \frac{\sin(x) + 5}{\cos(x) + 5}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 12.5

Dans chaque cas f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \cos^2(x)$
3. $f(x) = \sin^3(x)$
2. $f(x) = x e^{\sin(x)}$
4. $f(x) = \sin^2(x) \cos(x)$

 **Savoir-Faire 12.60**

SAVOIR ÉTUDIER DES FONCTIONS COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES
 f est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x) + 1$.

1. a) Étudier la parité de f
 b) Montrer que f est périodique de période 2π .
 c) En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variations sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 12.6

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{2}\sin^2(x) + 2\cos(x)$

1. Étudier l'éventuelle parité de f .
2. Montrer que f est périodique, de période 2π .
3. En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
4. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 12.7

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2}{3 + 2\cos(x)}$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}
2. Étudier l'éventuelle parité de f .
3. Montrer que f est périodique, de période 2π .

4. En déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$
 5. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.

Savoir-Faire 12.61

SAVOIR DÉTERMINER DES PRIMITIVES COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur \mathbb{R} . Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R} .

$$1. f(x) = \sin(3x) - \cos(2x) \quad 2. f(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \quad 3. f(x) = \sin(x)\cos(x)$$

Exercice 12.8

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur \mathbb{R} . Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R} .

$$1. f(x) = \sin(x)\cos^2(x) \quad 3. f(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3 \\ 2. f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$$

Exercice 12.9

Dans chaque cas f est une fonction définie et continue sur I . Déterminer une primitive de f sur I .

$$1. f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, I = \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad 2. f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}, I =]0; \pi]$$