

## 5.2

### Limite finie ou infinie en un réel

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

#### 5.2.1 Limite infinie en un réel $a$

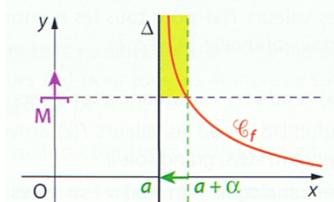
##### Définition

Soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ , et soit le nombre  $a$  qui est une borne de  $I$ .

Dire que la **limite de  $f$  en  $a$  est  $+\infty$**  signifie que tout intervalle ouvert  $]M; +\infty[$  contient toute les valeurs  $f(x)$  pour tous les nombres  $x$  de l'intervalle  $I$  suffisamment proches de  $a$ . Autrement dit, dire que la limite de  $f$  en  $a$  est  $+\infty$  signifie que pour tout nombre  $M$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que pour tous les nombres de  $x \in I$ , si  $|x - a| < \alpha$ , alors  $f(x) > M$ .

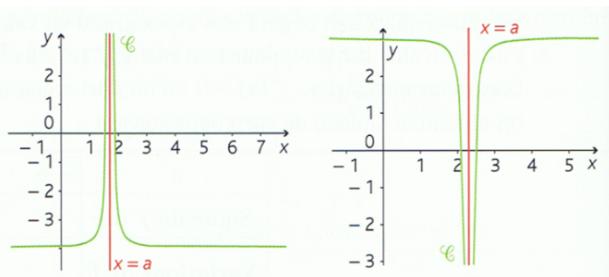
On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



##### Définition

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , on dit alors que la droite  $\Delta$  d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à la courbe de  $f$ .



##### Remarque

Dire que  $f$  a une limite infinie en  $a$  signifie que  $f$  possède en  $a$ , une limite à gauche et une limite à droite (infinies) et que ces limites sont égales.

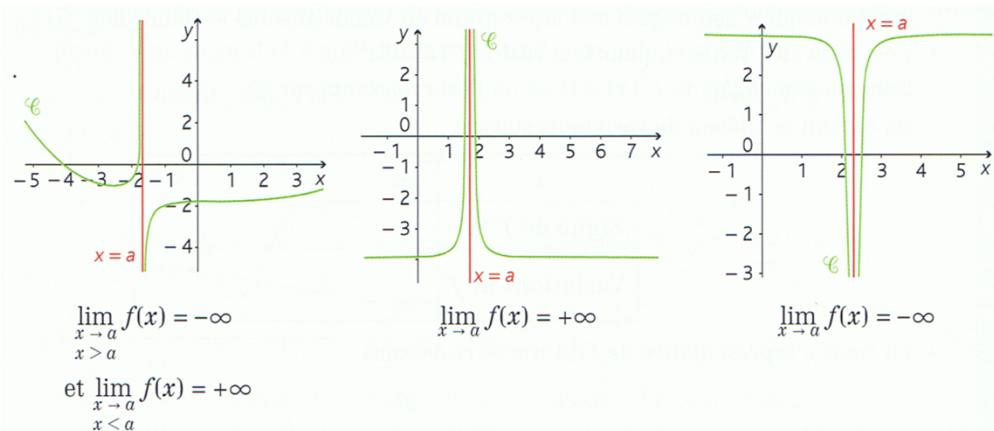
On a alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Par exemple, la fonction définie pour tout  $x$  réel non nul par  $f(x) = \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0 car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

## Remarque

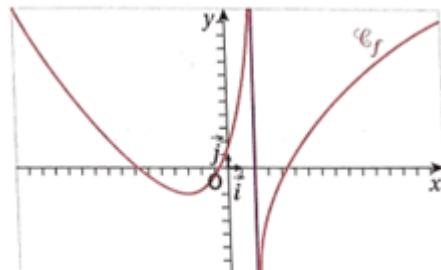
Pour une fonction  $f$  définie pour tout  $x$  réel différent de  $a$ , la droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à la courbe de  $f$  si l'une au moins des limites  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existe et est infinie.



### Exercice 5.6

$f$  est une fonction définie sur un intervalle réel, et représentée ci-contre par sa courbe.

- Conjecturer la limite de la fonction  $f$  en 2.
- En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) verticale(s) à la courbe de  $f$ , si elle(s) existe(nt).
- Dresser le tableau de variations de  $f$  en  $y$  faisant figurer les limites conjecturées.



### Exercice 5.7

$g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 5\}$  par  $g(x) = \frac{x+3}{x^2 - 4x - 5}$ .

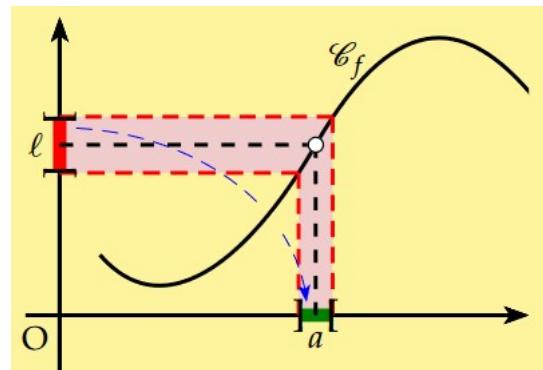
- A l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer la limite de  $g$  en 5
- En supposant cette conjecture exacte, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $g$  ?

## 5.2.2 Limite finie en un réel $a$

### Définition

Si  $f$  est une fonction définie sur une intervalle  $I$  contenant un nombre réel  $a$  alors on dit que  $f$  admet pour limite  $l$  en  $x = a$  lorsque tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$ .

On écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .



## Propriété (admise)

Soit  $a$  un réel.

- Si  $a \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si  $P$  est un polynôme,  $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- Si  $F$  est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) définie en  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

### Exercice 5.8

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3$

3.  $\lim_{x \rightarrow 12} \sqrt{x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{x + 4}$

6.  $\lim_{x \rightarrow -5} e^x$

### Exercice 5.9

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗ +∞	+∞ ↘ 1	↗ 4 ↘ -∞		

1. Donner les limites de  $f$  en  $-\infty, +\infty$  et en 2.
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 5.10

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	-∞ ↗ 1 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	↗ -∞	

1. Donner les limites de  $f$  en  $-\infty, +\infty$  et en -1.
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 5.11

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D_f$

. On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Au maximum, combien d'asymptotes horizontales  $C_f$  peut-elle admettre ? Et d'asymptotes verticales ?
2. Trouver deux exemples permettant d'illustrer les réponses à la question précédente.



### Savoir-Faire 5.14

SAVOIR INTERPRÉTER GRAPHIQUEMENT DES LIMITES

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative. Le tableau de variation de  $f$  est donné ci-dessous :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	2	-4	$+\infty$

- a) Lire dans le tableau  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b) En déduire l'existence d'asymptote(s) à la courbe  $C_f$ .
2. Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -1; 3[ \cup ]3; 7]$  telle que :
    - $f$  est décroissante sur  $] -1; 3[$  et sur  $]3; 7]$
    - $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$  et  $f(7) = 1$ .

On nomme  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- a) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$
- b) La courbe  $C_f$  admet-elle des asymptotes ? Préciser.
- c) Tracer dans un repère une allure de la courbe  $C_f$  et ses asymptotes.