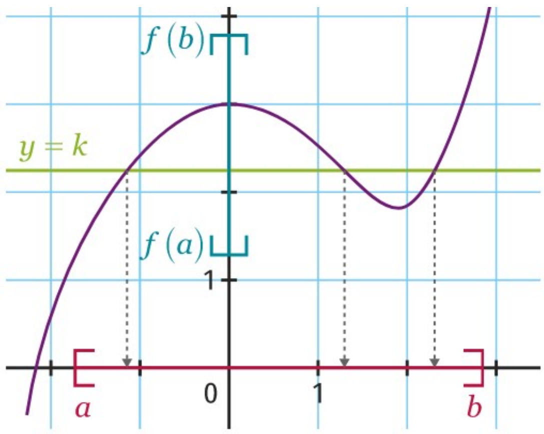
7.2 Théorème des valeurs intermédiaires

7.2.1 Définition

Propriété - Théorème des valeurs intermédiaires

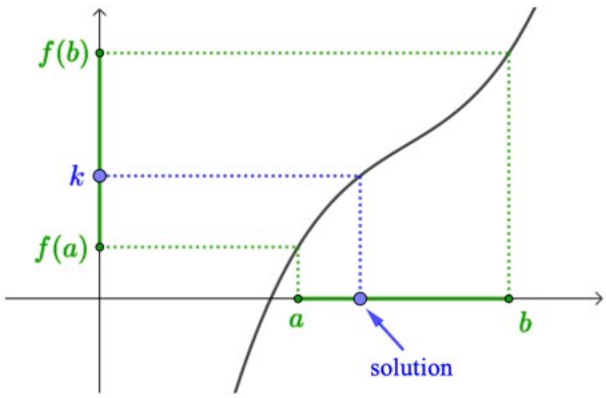
Si f est continue sur $[a;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.
Autrement dit, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f dans $[a;b]$.



7.2.2 Cas des fonctions monotones

Propriété - Corolaire

Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a;b]$.



Remarque

On peut aussi étendre ce corollaire aux intervalles ouverts en utilisant les limites.

Savoir-Faire 7.26

Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$

2. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

Exercice 7.6
Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.7
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2;2]$
2. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2;+\infty[$

7.2.3 Méthode d'encadrement

Il existe deux méthodes pour déterminer un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = k$:

- La méthode par "balayage"
- La méthode par "dichotomie". Le principe est ici de diviser par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a;b]$ et on détermine si α se trouve dans $[a;m]$ ou bien $[m;b]$.

Savoir-Faire 7.27

Savoir donner un encadrement de la solution de l'équation
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
On a démontré précédemment que l'équation $f(x) = 0$ admettait une solution unique dans l'intervalle $]1;+\infty[$. Notons α cette solution.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.0001 par "balayage" avec la calculatrice.

Savoir-Faire 7.28

Savoir construire un algorithme de dichotomie

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;1]$.
2. L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-n} près, avec $n \in \mathbb{N}$

TANT QUE $b - a > 10^{-n}$ **FAIRE**
    m = (a+b) / 2
    SI $f(a) \times f(m) < 0$ **ALORS**
        $b = m$
    SINON
        $a = m$

3. Exécuter cet algorithme pas à pas pour $n = 1$ et compléter le tableau suivant :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
a	-1					
b	1					
$b - a > 10^{-1}$	Vrai					
m	0					
$f(a) \times f(m) < 0$	Faux					

4. Coder cet algorithme en langage python. Saisir et exécuter le programme avec $n = 4$ et interpréter le résultat renvoyé.

Exercice 7.8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 2x - 2$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.

Exercice 7.9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode du balayage.

Exercice 7.10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.