11.2 Propriété du produit scalaire

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

11.2.1 Produit scalaire et orthogonalité

Définition

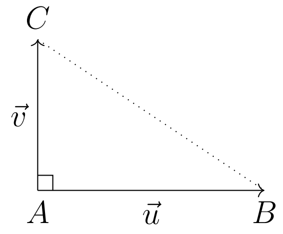
- Dire que deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux signifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Démonstration 11.12

Dans le cas où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non nuls, montrons que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$.



11.2.2 règles de calculs

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tout nombre réel λ :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
4. $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$
5. $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$

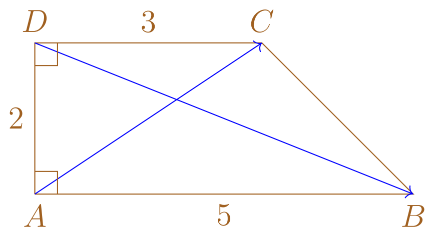
Exemple

$\vec{u}.(2\vec{v} - 3\vec{w}) =$

Savoir-Faire 11.60

SAVOIR UTILISER LA RELATION DE CHASLES POUR CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE

ABCD est le trapèze rectangle ci-dessous avec AB=5 et AD=2 et CD=3.
Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$



11.2.3 Carré scalaire

Définition

Le **carré scalaire d'un vecteur** $\vec{u}$, noté $\vec{u}^{\,2}$, est le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$.

Conséquence 11.62

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.
- Pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

11.2.4 Identités remarquables

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

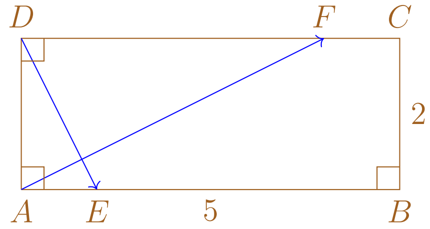
Démonstration 11.13

Démontrer les 3 identités remarquables.

Savoir-Faire 11.61

SAVOIR DÉMONTRER L'ORTHOGONALITÉ DE DEUX VECTEURS - MÉTHODE 1

ABCD est le rectangle ci-dessous avec AB=5 et BC=2.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.
Monter que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.


D
F
C
2
A
E
5
B