1.1 Les ensembles de nombres

MATHS 2NDE 7 - JB DUTHOIT

Histoire

Au fil de l'histoire, les mathématiciens ont progressivement pris conscience qu'il existait une infinité de nombres, de natures très variées. Ils se sont aperçus qu'il était possible de « ranger » en grandes familles les nombres ayant des propriétés identiques.
Cette typologie fut l'œuvre de trois mathématiciens de la deuxième moitié du XIXe siècle et du début du XXe siècle : l'Allemand Richard Dedekind (1831-1916), le Russe Georg Cantor (1845-1918) et l'Italien Giuseppe Peano (1858-1932).

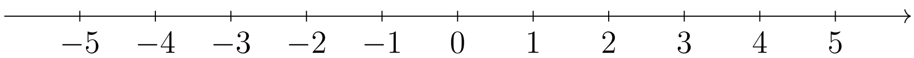
1.1.1 L'ensemble des réels

Définition

L'ensemble de tous les nombres connus en seconde s'appelle l' **ensemble des réels**.
Il est noté $\mathbb{R}$.

Remarque

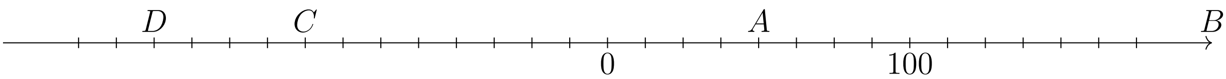
On peut représenter chaque nombre réel par un point d'une droite graduée. Et inversement : Chaque point de la droite graduée correspond à un réel et un seul.



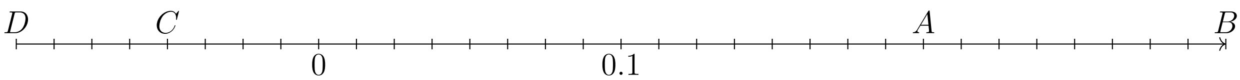
Exercice 1.1

Déterminer dans chacun des cas l'abscisse des points suivants :

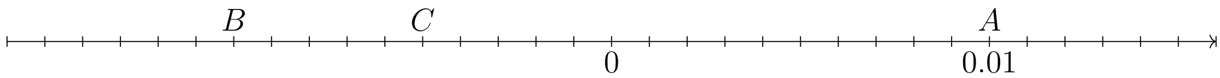
1.



2.



3.



1.1.2 Les autres ensembles de nombres

Définition

Il existe des réels particuliers :

- L'ensemble des **entiers naturels** , noté $\mathbb{N}$:
  $0; 1; 2; 3; 4; ....$
- L'ensemble des **entiers relatifs** , noté $\mathbb{Z}$:
  $... - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...$
- L'ensemble des **nombres décimaux** , noté $\mathbb{D}$: Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 10.
- L'ensemble des **nombres rationnels** , noté $\mathbb{Q}$: Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers.

Exemple

- 1.25 est un décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{125}{100}$. 1.25 est donc aussi un nombre rationnel. On note $1.25 \in \mathbb{D}$ et $1.25 \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel (sans être un décimal). On note $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.
- -5 est un entier relatif. C'est aussi un décimal car $-5 = \frac{-50}{10}$, et c'est également un nombre rationnel. On note $-5 \in \mathbb{Z}$, $-5 \in \mathbb{D}$, $-5 \in \mathbb{Q}$ et bien évidemment $-5 \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1.1

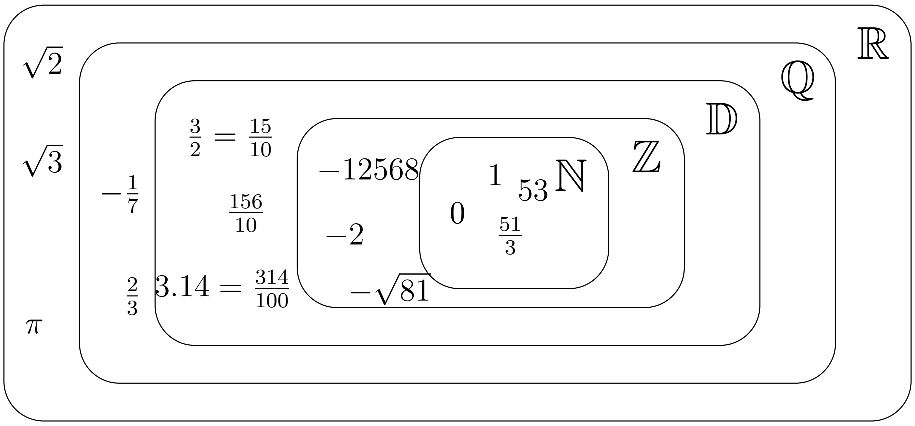
Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1.1.3 Propriétés

Propriété (admise)

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple



Savoir-Faire 1.1

Savoir déterminer à quel(s) ensemble(s) appartient un nombre

Indiquer par une croix à quel **plus petit ensemble** de nombres appartiennent les nombres suivants (Attention, deux colonnes) :

Dans le tableau apparaissent les nombre a et b qui sont définis de la façon suivante :

☞ a est l'inverse de 5

☞ b est la somme de 7 et de l'opposé de 8.

✰ Si ce n'est pas évident, il faut **expliquer** !

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3						π					
$-\sqrt{144}$						$\sqrt{7}$					
$\frac{12}{3}$						0					
$-\frac{2}{3}$						$\frac{77}{25}$					
$\frac{-56874}{3}$						$\frac{4}{7}$					
a						b					

Exercice 1.2

Dans chacun des cas suivants, dire si le réel est un décimal ou un rationnel. S'il est rationnel, mettez-le sous la forme d'un quotient d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 10.

1. $\frac{59}{9}$
2. $\frac{59}{50}$
3. $\frac{123}{7}$
4. $\frac{479}{11}$
5. $\frac{45}{13}$

Exercice 1.3

Écrire chacun des nombres suivants comme la somme d'un entier et d'une fraction comprise entre 0 et 1. Encadrer ensuite ce nombre par deux entiers consécutifs.

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{8}{5}$
3. $\frac{37}{7}$
4. $\frac{48}{9}$
5. $\frac{123}{11}$

Exercice 1.4

Soit A le nombre suivant :

$$A = 0.123612361236123612361 2..$$

.

1. Quelle semble être la période de A ?
2. Donner l'écriture décimale de $10000A$.
3. En déduire l'écriture décimale de $10000A - A$
4. En déduire l'écriture décimale de A.

Algorithme 1.1

$\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut donc pas l'écrire sous la forme d'une fraction. On cherche donc à déterminer une valeur approchée à l'aide de l'informatique.
Question préliminaire : Donner deux entiers consécutifs a et b tel que $a \leq \sqrt{2} \leq b$. On obtient ainsi un encadrement de $\sqrt{2}$ à l'unité près.
Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.

Savoir-Faire 1.2

Savoir effectuer des calculs avec des fractions (rappels de collège)
Calculer les nombres suivants en mettant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

1. $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$
2. $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2}$
3. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}}$
4. $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}$
5. $5 - \frac{2}{3} \times \frac{7}{2}$
6. $\dfrac{1 + \frac{3}{5}}{4 - \frac{1}{2}}$
7. $\dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{5}{4}}$