9.3 Définir les combinaisons

Maths Spé terminale - JB Duthoit

9.3.1 Combinaisons d'éléments d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. p et n sont des entiers naturels avec $p \leq n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments

Exemple

Si $E = \{bleu; rouge : orange : noir, vert\}$ alors les ensembles $\{bleu; noir; vert\}$ et $\{noir; orange, bleu\}$ sont deux combinaisons de 3 éléments de E.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n éléments de E , noté $\binom{n}{p}$ est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\binom{n}{p}$ est appelé **coefficient binomial** et se lit "p parmi n".

Remarque

- Par convention, si $p > n$ on décide que $\binom{n}{p} = 0$
- Si $p = 0$ alors $\binom{n}{0} = 1$ (le seul sous-ensemble de E ayant 0 élément est $\emptyset$)
- Si $p = 1$ alors $\binom{n}{1} = n$ (il existe exactement n sous-ensembles de E ayant un seul élément)
- Si $p = 2$ alors $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Si $p = n$ alors $\binom{n}{n} = 1$

Savoir-Faire 9.40

Savoir calculer des combinaisons

1. Calculer $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$
2. Calculer $\binom{5}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 5$
3. Utiliser la calculatrice pour calculer $\binom{20}{12}$

Savoir-Faire 9.41

Savoir utiliser des combinaisons pour dénombrer

1. On dispose d'un jeu de 32 cartes.
   a) Combien de mains de 4 cartes peut-on former ?
   b) On tire simultanément 4 cartes, quelle est la probabilité d'avoir 4 as ?
2. Dix amis veulent composer 2 équipes de 5 pour jouer au jorki. Parmi ces amis, il y a Hugo et Kilian
   a) Combien d'équipes peut-on former comportant Hugo et Kilian ?
   b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité que Hugo et Kilian soient ensemble (arrondir à 0.01 près) ?

Démonstration 12- Exigible -

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 9.16

1. Au début d'une partie de belote, on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main". Combien existe-t-il de mains différentes possibles ?
2. Neuf amis souhaitent constituer une équipe de volley-ball de plage de 4 joueurs.
   a) Combien d'équipes différentes peuvent-ils constituer ?
   b) Parmi les neuf amis, Hector ne veut pas participer à la partie. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Hector ?
   c) On sait de plus que Nadia souhaite absolument participer. Combien d'équipes différentes comprenant Nadia peut-on constituer ?
3. Olivia a installé 10 jeux sur sa console : 5 jeux d'aventure, 3 jeux de course de voitures et 2 jeux sportifs. On s'intéresse ici aux groupes de 5 jeux différents qu'Olivia choisit chaque week-end.
   - Parmi combien de groupes de 5 jeux effectue-t-elle son choix chaque week-end ?
   - Combien de ces groupes comportent exactement 2 jeux de course de voitures ?
   - Combien de ces groupes comportent au moins un jeu d'aventure ?

9.3.2 Triangle de Pascal

Propriété

- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- **Relation de Pascal** : pour tout $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Démonstration 13- Exigible -

Montrer que pour tout $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

- Par le calcul
- Par le dénombrement, la combinatoire

Remarque

- La relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ traduit le fait que choisir p objets parmi n revient à choisir les $n-p$ objets qu'on ne prend pas.
- La relation de Pascal permet de calculer les coefficients $\binom{n}{p}$ de proche en proche, sous la forme du tableau triangulaire ci-dessous. Le coefficient $\binom{n}{p}$ s'obtient en faisant la somme du coefficient $\binom{n-1}{p}$ placé juste au-dessus et du coefficient $\binom{n-1}{p-1}$ situé à gauche de ce dernier.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Savoir-Faire 9.42

SAVOIR UTILISER LE TRIANGLE DE PASCAL POUR CALCULER UNE COMBINAISON

Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes : $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$ et $\binom{6}{4}$

Exercice 9.17

On sait que $\binom{7}{1} = 7$ et $\binom{7}{2} = 21$. En déduire la valeur de $\binom{8}{2}$ et de $\binom{8}{6} = 7$

Savoir-Faire 9.43

SAVOIR EFFECTUER DES DÉNOMBREMENTS SIMPLES

⚠ La difficulté réside ici dans le fait de déterminer s'il s'agit de k-uplets ou de combinaisons !

1. Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments (appelés allèles) de l'ensemble $E =$

$\{A, B, O\}$.

a) Combien de couples d'allèles sont possibles ?

b) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents, l'ordre ne comptant pas (par exemple le couple d'allèle (A,B) donne le même code que le couple d'allèle (B,A)). Déterminer le nombre d'hétérozygote pour le groupe sanguin.

c) On appelle homozygote un gène qui contient les mêmes allèles, et on appelle génotype l'ensemble constitué des homozygotes et des hétérozygotes. Déterminer le nombre de génotypes sanguins.

2. Pour accéder à un compte sur Internet, un utilisateur doit saisir un mot de passe contenant 2 lettres et 3 chiffres. Dans chaque cas, déterminer le nombre de mots de passe :

   a) Le mot de passe commence par les deux lettres

   b) Le mot de passe commence par les deux lettres et les caractères sont tous différents.

Exercice 9.18

1. En première générale, il y a 12 spécialités possibles, et chaque élève doit en choisir 3. Combien de triplettes possibles y a-t-il ?
2. En terminale, les élèves doivent garder 2 spécialités sur les 3. Combien s'offre alors à un élève de première qui arrive en terminale ?
3. a) Un parcours est constitué d'une triplette de spécialités choisie en première et d'une doublette de spécialité conservées en terminale. Combien y a-t-il de parcours différents ?

   b) Coline a choisi les maths en première et en terminale. Combien de parcours correspondent à ce choix ?

Exercice 9.19

1. Marylène possède 5 jeans et 7 tee-shirts. Elle part en vacances et décide d'emmener 2 jeans et 3 tee-shirts. Déterminer le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et tee-shirts.
2. Son mari possède quant à lui 10 jeans, 13 tee-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 8 jeans, 10 tee-shirts et 4 paires de chaussures. Combien de manières a-t-il pour remplir sa valise ?

Exercice 9.20

Une commune d'Espagne s'appelle ANANA. A l'aide d'un arbre, vérifier qu'il y a 10 anagrammes du mot ANANA. Retrouver ce résultat en utilisant des combinaisons.

Exercice 9.21

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 "couleurs" différentes : trèfle, carreau, coeur et pique. Pour chaque couleur, il y a 8 "valeurs" différentes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire simultanément 6 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien de tirages différents contiennent les 4 as ?
3. On exprimera les probabilités suivantes en arrondissant à 0.0001 près.

   a) Déterminer la probabilité d'avoir les 4 As lors d'un tirage

   b) Déterminer la probabilité d'avoir 2 cartes piques et 4 cartes coeurs.

c) Déterminer la probabilité de n'avoir aucune carte cœur et aucune carte Valet.

Exercice 9.22

On dispose de 26 lettres de l'alphabet indiscernables. On tire successivement et sans remise 7 lettres pour former un mot.

1. Combien y a-t-il de mots au total ?
2. Combien y a-t-il de mots commençant par **V** ?
3. Combien y a-t-il de mots comportant la lettre **Z** ?

Exercice 9.23

On considère un jeu de 32 cartes. On tire 5 cartes de ce jeu (ce qu'on appelle une main).

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains composées de 2 cœurs et 3 trèfles ?
3. Combien de mains possèdent au moins 1 valet ?
4. Combien de mains possèdent au plus 1 valet ?
5. Combien de mains possèdent exactement 2 dames et 3 trèfles (si on a dans sa main une dame de trèfle, cela fera donc 4 trèfles en tout) ?

Exercice 9.24

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement 6 boules de l'urne sans remise.
   a) Combien y a-t-il de tirages différents
   b) Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?
2. Une boîte comporte 6 compartiments numérotés de 1 à 6. On place 6 boules au hasard, une par compartiment. On dit qu'une boule est dans son compartiment si elle est placée dans le comportement qui porte le même numéro qu'elle. Quelle est la probabilité pour que 4 boules soient dans son compartiment ?
3. Soit k un entier naturel non nul. On effectue k tirages successifs d'une boule avec remise. Les tirages sont supposés équiprobables.
   a) Déterminer la probabilité p_k de tirer au moins une fois 1 boule qui porte le numéro 6.
   b) Recopier et compléter le programme python ci-dessous afin qu'il retourne le premier entier k tel que $p_k > 0.9$

```python
def nombre_tirages():
  k = 1
  p = 1 - (5 / 6) ** k
  while ... :
    k = ...
    p = ...
  return ...
```

Exercice de synthèse 9.25

On donnera les résultats sous forme théorique avant d'effectuer les calculs.

Une grille de loto se présente sous la forme d'une grille de quarante nombres (de 1 à 40) et quatre lettres (A, B, C, D), dans laquelle un joueur coche quatre numéros et deux lettres.

1	6	11	16	21	26	31	36
2	7	12	17	22	27	32	37
3	8	13	18	23	28	33	38
4	9	14	19	24	29	34	39
5	10	15	20	25	30	35	40

A	B	C	D

1. De combien de manières peut-on choisir les quatre numéros ? Les deux lettres ?
2. Combien de grilles peut-on former ?
3. Les nombres sont rangés dans quatre blocs (de 1 à 10, de 11 à 20, de 21 à 30, de 31 à 40). Un joueur décide de cocher un numéro par bloc. Combien de grilles peut-on former avec cette contrainte ?
4. Un autre joueur, par superstition (?), décide qu'il doit y avoir au plus un numéro par ligne. Combien de grilles peut-on former avec cette contrainte ?

Exercice de synthèse 9.26

On donnera les résultats sous forme théorique et on n'effectuera aucun calcul.

On remplit un damier carré de 16 cases avec les chiffres 0 et 1, comme illustré ci-dessous.

0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0

- Combien de grilles peut-on former ?
- Combien de grilles peut-on former, si chaque colonne contient exactement un 1 ?
- Combien de grilles peut-on former, si chaque colonne contient au plus un 1 ?