# 7.1 Variable aléatoire

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

## 7.1.1 Notion de variable aléatoire

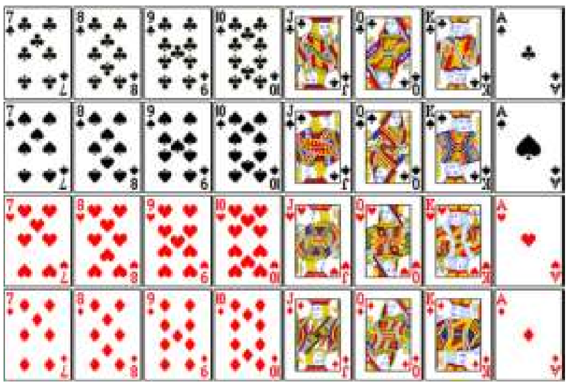
Dans la suite, on considère une expérience aléatoire associé à un univers $\Omega$ fini sur lequel on a défini une loi de probabilité $p$.

### Découvrir la notion de variable aléatoire

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si la carte obtenue est un as, on gagne 3 euros, si c'est une figure, on gagne 2 euros et sinon on perd 3 euros.

- Déterminer les différentes valeurs de gain possible.
- Calculer les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs.

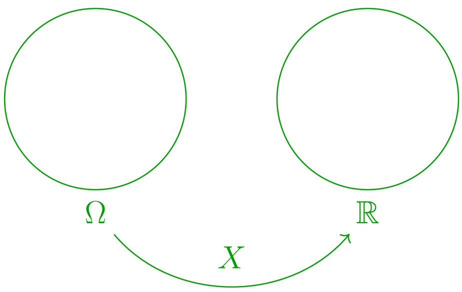
Composition d'un jeu de 32 cartes



## 7.1.2 Variable aléatoire

### Définition

Une **variable aléatoire** $X$ est une fonction définie sur $\Omega$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ , qui à tout élément de $\Omega$ fait correspondre un nombre réel.



## Remarque

- Comme $\Omega$ est fini, l'ensemble des valeurs prises par $X$ est fini également.
- On nomme en général les variables aléatoires avec une lettre majuscule, par exemple $X$, $Y$ ou $Z$.
- Soit $a$ un nombre réel. On note :
  - $\{X = a\}$ l'événement "la variable aléatoire $X$ prend la valeur $a$.
  - $\{X \geq a\}$ l'événement "la variable aléatoire $X$ prend la valeur supérieure ou égale à $a$.
  - $\{X < a\}$ l'événement "la variable aléatoire $X$ prend la valeur strictement inférieure à $a$.

### 7.1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

## Définition

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Définir la **loi de probabilité de $X$**, c'est associer à chaque valeur prise par $X$ sa probabilité. Autrement dit, en notant $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ les valeurs prises par $X$, c'est donner les valeurs des probabilités $P(X = x_i)$ pour tout entier $i$, où $1 \leq i \leq n$. En général , on présente les résultats dans un tableau :

| Valeurs prises par $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

## Savoir-Faire 7.38

SAVOIR DÉTERMINER UNE LOI DE PROBABILITÉ

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Si la carte tirée est un as, on gagne 3 jetons. Si c'est un cœur, on gagne 2 jetons.
Pour toutes les autres cartes, on perd un jeton. Éventuellement, les gains se cumulent.
On appelle $X$ la variable aléatoire égale au gain en jetons. Déterminer la loi de probabilité de $X$. Méthode :

- Il faut bien identifier les différentes valeurs que peut prendre $X$
- Il faut ensuite déterminer la probabilité de chacune des valeurs que peut prendre $X$ (On peut utiliser un tableau, un arbre...)

## Savoir-Faire 7.39

SAVOIR SIMULER UNE VARIABLE ALÉATOIRE AVEC PYTHON

On reprend le problème précédent, et on désire simuler avec Python la variable aléatoire égale au gain obtenu en tirant la carte. On commence par chercher à simuler le tirage d'une carte :

```
from random import *
val = ['as','r','d','v','10','9','8','7'] # on créé le jeu de
    carte
coul = ['coeur','carreau','trefle','pique']
```

```
def tirage():
    a = randint(...,...)
    b = randint(...,...)
    return (val[a],coul[b])
```

Simuler ensuite la variable aléatoire :

```
def gain():
    carte_tiree = tirage()
    gain = ...
    if carte_tiree[0] == 'as':
        gain += ...
    if carte_tiree[1] == 'coeur':
        gain += ...
    if carte_tiree[0] ....... and carte_tiree[1] ...........:
        gain += .....
    return gain
```

**Exercice 7.28**

On considère deux dés cubiques bien équilibrés, numérotés de 1 à 6.
On lance ces deux dés.
On note $X$ la variable aléatoire égale à la somme obtenue.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.29**

On considère deux dés cubiques bien équilibrés, numérotés de 1 à 6.
On lance ces deux dés.
On note $Y$ la variable aléatoire égale au maximum des deux dès.
Déterminer la loi de probabilité de $Y$.

**Exercice 7.30**

On considère une urne dans laquelle sont placés 13 cartons de même forme, indiscernables au toucher.
Sur chaque carton, on a écrit respectivement $\boxed{\text{tu}}$ , $\boxed{\text{es}}$ , $\boxed{\text{le}}$ , $\boxed{\text{i}}$ , $\boxed{\text{de}}$ , $\boxed{\text{aimer}}$, $\boxed{\text{car}}$, $\boxed{\text{sans}}$ , $\boxed{\text{toi}}$ , $\boxed{\text{ma}}$ , $\boxed{\text{vie}}$, $\boxed{\text{est}}$ , $\boxed{\text{amer}}$.
On tire au hasard un carton de l'urne.
X est la variable aléatoire égale au nombre de consonnes notées sur le carton.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.31**

Au début d'un concert, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs.
Parmi les 120 billets distribués :

- 3 donnent droit à 4 places gratuites au prochain concert.
- 6 donnent droit à 2 places gratuites pour le prochain concert.
- 42 donnent droit à 1 place gratuite pour le prochain concert.
- Les autres billets ne donnent droit a rien :-(

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de places gratuites au prochain concert.

1. Décrire les événements $\{X = 1\}$ et $\{X \leq 2\}$.
2. Déterminer $p(\{X = 4\})$

3. Donner la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.32**

On lance deux fois de suite une pièce truquée. Lors de chaque lancer, la probabilité que "face" apparaisse est égale à $\frac{2}{3}$.
Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer de deux pièces, associe le nombre de "face".
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.33**

Pour une promotion commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tous les acheteurs d'un appareil électroménager.
Les 500 billets sont numérotées de 001 à 500 et ils sont tous distribués.
A la fin de la promotion, on effectue un tirage au sort :

- Le numéro 397 gagne 5000 €.
- Les autres numéros se terminant par 97 gagnent chacun 1000 €.
- Les 45 autres numéros se terminant par 7 gagnent chacun 7 €.

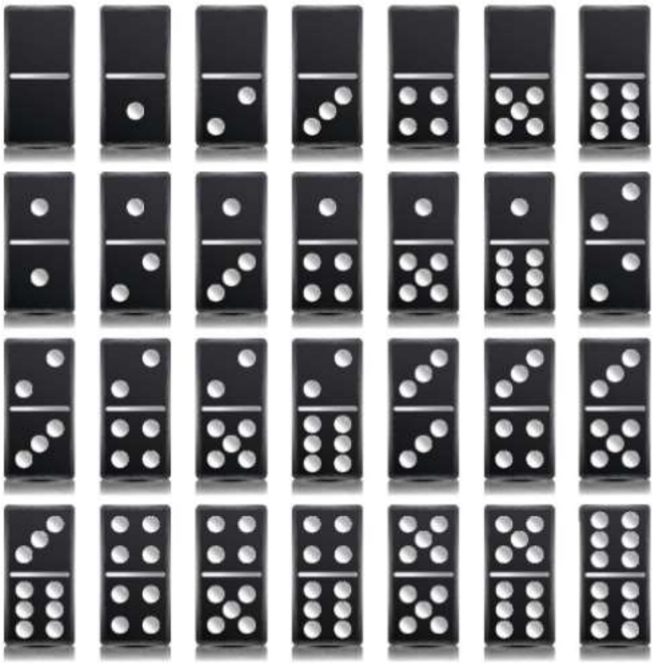
Après l'achat d'un appareil, une personne tire un billet au hasard.
On désigne par $X$ la variable aléatoire qui, au numéro de ce billet, associe le gain correspondant, en euros.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.34**

On considère une urne composée de 4 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues.
Le jeu consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne.
Pour jouer, il est nécessaire de miser $m$ € , $m$ étant un réel strictement positif.
S'il tire une boule bleue, il reçoit 18 €, s'il tire une boule verte, on lui rembourse sa mise et s'il tire une rouge, il perd sa mise.
Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 7.35**

Voici la composition d'un jeu de domino :



On tire au hasard un domino. Soit $S$ la variable aléatoire qui donne la somme des points inscrits sur le domino.
Déterminer la loi de probabilité de $S$.

**Exercice 7.36**
Le jeu de Uno est composé de 108 cartes réparties de la façon suivante :

- 76 cartes numérotées de 0 à 9 (19 de chacune des quatre couleurs, neuf paires de même valeur et un seul 0) ;
- 32 cartes spéciales (huit cartes "inversion", huit cartes "passe ton tour", huit cartes "+2", quatre cartes "+4" et quatre cartes "joker").

Dans le comptage des points, les cartes numérotées rapportent autant de points que le nombre qu'elles représentent, les cartes "inversion", "passe ton tour" et "+2" rapportent 20 points et les cartes"+4" et "joker" rapportent 50 points.

Soit Y la variable aléatoire qui au tirage d'une carte du jeu de Uno associe sa valeur en points.
Déterminer la loi de probabilité de Y.

**Exercice 7.37**
On lance un dé icosaédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 20, que l'on suppose bien équilibré.

On marque :

- 2 points si le nombre obtenu est pair
- 3 points si le nombre obtenu est premier
- 5 points si le nombre obtenu est un multiple de 5
- 7 points si le nombre obtenu est un carré parfait.

Les points sont cumulables.
Soit $X$ la variable aléatoire qui associe au lancer du dé le nombre de points marqués par le joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
2. En déduire $p(X \leq 5)$