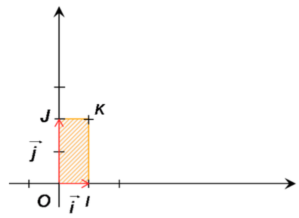
10.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Maths Spé terminale - JB Duthoit

10.1.1 Définitions

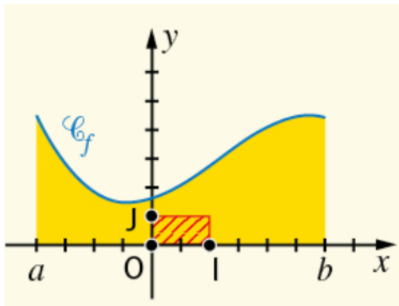
Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'**unité d'aire**, que l'on note parfois **u.a.** est l'aire du rectangle $OIJK$, comme illustré sur la figure ci-contre.



Définition

a et Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, et soit C_f sa courbe représentative.
On appelle **intégrale de a à b de f** l'aire (exprimée en u.a.) de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$.

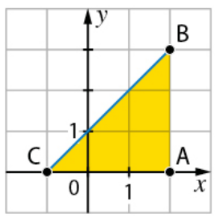


Vocabulaire

Les réels a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.

Exercice 10.1

On considère la fonction f définie sur $[-1;2]$ par $f(x) = x + 1$. Cette fonction est continue et positive, et sa courbe représentative est le segment $[BC]$ sur la figure ci-contre.
Déterminer $\int_{-1}^{2}(x+1)dx$

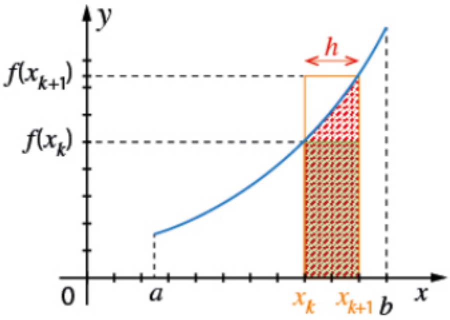


10.1.2 La méthode des rectangles

Pour déterminer un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue, monotone et positive sur $[a;b]$, on peut partager $[a;b]$ en n intervalle d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur chacun de ces intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, l'aire sous C_f est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- L'un de largeur h et de hauteur $f(x_k)$
- L'un de largeur h et de hauteur $f(x_{k+1})$



L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ peut donc être encadrée par la somme des n rectangles "sous C_f" d'une part, et la somme des n rectangles qui "contiennent C_f" d'autre part.
On peut alors construire un algorithme qui permet d'encadrer une aire. L'algorithme ci-dessous fonctionne pour une fonction croissante. Il faudrait l'adapter légèrement pour une fonction décroissante.

$x \leftarrow a$
$u \leftarrow 0$
$v \leftarrow 0$
$h \leftarrow (b-a)/n$
POUR k allant de 1 à n **FAIRE**
  $u \leftarrow u + h * f(x)$
  $x \leftarrow x + h$
  $v \leftarrow v + h * f(x)$

Histoire

GW Leibniz (1646-1716)

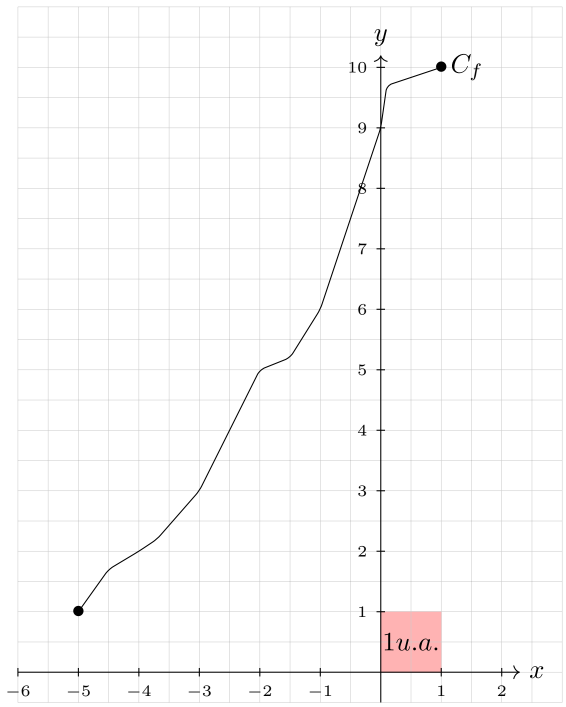
C'est le mathématicien allemand **Leibniz** qui a le premier employé la notation $\int$. Ce symbole illustre le fait qu'une intégrale peut être approchée par une somme d'aires de rectangles notée

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

$f(x)dx$ correspond en fait à l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.

Exercice 10.2

On considère la courbe C_f suivante, courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;1]$, où l'unité d'aire est l'aire du rectangle rouge :



1. On veut ici comprendre la méthode des rectangles. En utilisant deux couleurs différentes, tracer les rectangles qui permettront l'encadrement, puis donner un encadrement de $\int_{-5}^{1} f(x)dx$.

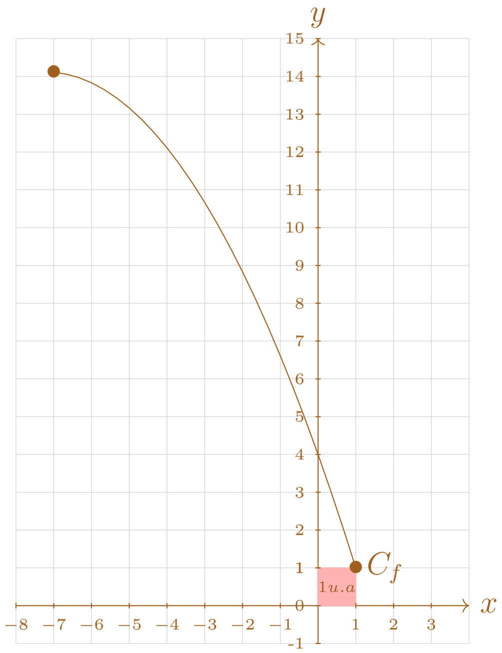
2. Afin de comprendre l'algorithme précédent, le faire tourner "à la main" avec cet exemple, en complétant le tableau suivant. On décide ici de prendre $n = 6$, et on peut donc facilement calculer que $h = 1$.

Étape	0	1	2	3	4	5	6
u	0						
x	-5						
v	0						

Savoir-Faire 10.42

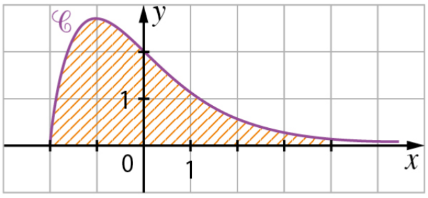
Savoir estimer graphiquement une intégrale

On considère une fonction f dont la courbe représentative C_f est représentée ci-dessous.
Déterminer un encadrement de $\int_{-7}^{1} f(x)dx$ en comptant les carrés de 1 u.a.



Exercice 10.3

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par la courbe C représentée ci dessous :



1. Donner le signe de f sur $[-2;4]$
2. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale notée I.
3. Encadrer $\int_0^1 f(x)dx$ par deux nombres entiers.
4. Encadrer I par deux nombres entiers.

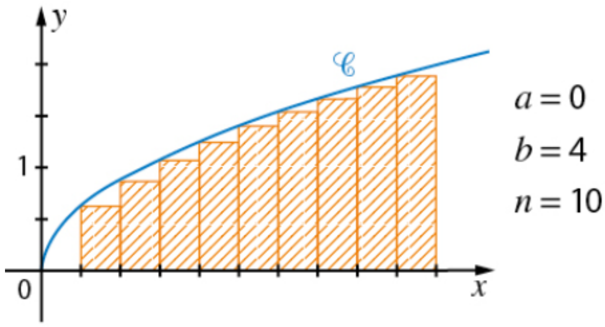
Savoir-Faire 10.43

SAVOIR UTILISER LA MÉTHODE DES RECTANGLES

On reprend la fonction étudiée dans le savoir-faire précédent. Créer un programme python qui permet de donner un encadrement de $\int_{-7}^{1} f(x)dx$, en utilisant la méthode des rectangles et en prenant $n = 100$

Exercice 10.4

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et soit C sa courbe représentative ci-contre. On considère la surface S délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$, où a et b sont des réels positifs, avec $a < b$.



1. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface S à l'aide d'une intégrale notée I.
2. On partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude h. On note u_n la somme des aires des rectangles contenus dans C.
   a) Exprimer h en fonction de a, b et n.
   b) Écrire une fonction python `rectangle(a,b,n)` qui renvoie une valeur approchée de S, en unités d'aire.
   c) Quelle approximation (arrondir à 0.01 près) donne `rectangle(0,4,50)` ?