15.4 Vecteurs normal à un plan

Maths Spé terminale - JB Duthoit

15.4.1 Caractérisation d'un plan avec le produit scalaire

Définition

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un **vecteur normal à un plan P** si $\vec{n}$ est orthogonal au plan P.

Propriété

Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P.

Propriété

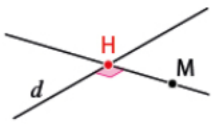
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et$A$ un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

15.4.2 Projeté orthogonal sur une droite ou un plan

Définition Projeté orthogonal sur une droite

Soit M un point de l'espace. On appelle projeté de M sur d, l'unique point H vérifiant :

- Si M appartient à d, alors H est confondu avec M.
- sinon, H est le projeté orthogonal de M sur d dans l'unique plan P passant par M et contenant la droite d.

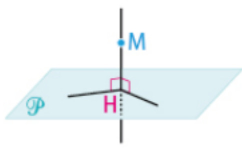


Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de M.

Définition Projeté orthogonal sur un plan

Soit M un point de l'espace et P un plan de l'espace. On appelle projeté de M sur P, l'unique point H qui est l'intersection de P avec sa perpendiculaire passant par M.



Propriété

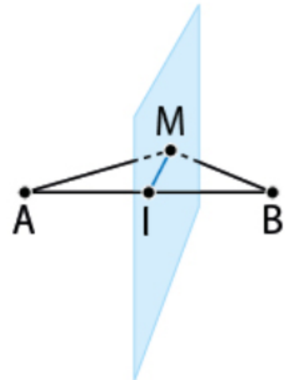
Le projeté orthogonal du point M sur le plan P est le point de la droite P le plus proche de M.

Démonstration 24- -

15.4.3 Plan médiateur d'un segment

Définition

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le **plan médiateur** du segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.



Propriété

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et de B.

Savoir-Faire 15.81

Savoir déterminer si un vecteur est normal à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2;-3;5)$, $B(1;0;7)$ et $C(-4;1;3)$.

1. Démontrer que A,B et C définissent un plan
2. Montrer que $\vec{n}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à (ABC)

Exercice 15.19

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(-1;2;7)$, $B(3;3;2)$ et $C(0;3;8)$.

1. Démontrer que A,B et C définissent un plan
2. Montrer que $\vec{n}(2;-3;1)$ est un vecteur normal à (ABC)

Savoir-Faire 15.82

Utuliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2;3;3)$, $B(-1,17;-17)$ et le vecteur $\vec{n}(2;3;-4)$.
On note P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

1. Démontrer que le point $H(-9;5;-1)$ appartient à P
2. a) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur P
   b) En déduire la distance du point B au plan P
3. Soit $C(5;11;-5)$
   a) Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
   b) Calculer la distance du point H à la droite (BC).

Exercice 15.20

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(0;-1;0)$ et P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2;-1;-4)$.
On note P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

1. Démontrer que le point $H(2;-1;-4)$ appartient à P
2. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de $B(-2;-3;-6)$ sur P
3. En déduire la distance du point B au plan P

Exercice 15.21

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(-5;2;3)$,$B(0;1;1)$,$C(10;-1;-3)$ et $D(11;-2;0)$ quatre ponts de l'espace.

1. Démontrer que le point C est le projeté orthogonal de D sur (AB).
2. En déduire la distance du point D à la droite (AB)