

15.4

Vecteurs normal à un plan

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

15.4.1 Caractérisation d'un plan avec le produit scalaire

Définition

On dit qu'un vecteur non nul \vec{n} est un **vecteur normal à un plan P** si \vec{n} est orthogonal au plan P.

Propriété

Un vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan P si et seulement si \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P.

Propriété

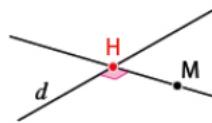
Soit \vec{n} un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M tels que $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

15.4.2 Projeté orthogonal sur une droite ou un plan

Définition Projeté orthogonal sur une droite

Soit M un point de l'espace. On appelle projeté de M sur d, l'unique point H vérifiant :

- Si M appartient à d, alors H est confondu avec M.
- sinon, H est le projeté orthogonal de M sur d dans l'unique plan P passant par M et contenant la droite d.

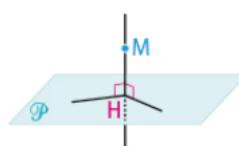


Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de M.

Définition Projeté orthogonal sur un plan

Soit M un point de l'espace et P un plan de l'espace. On appelle projeté de M sur P, l'unique point H qui est l'intersection de P avec sa perpendiculaire passant par M.



Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur le plan \mathcal{P} est le point de la droite \mathcal{P} le plus proche de M .

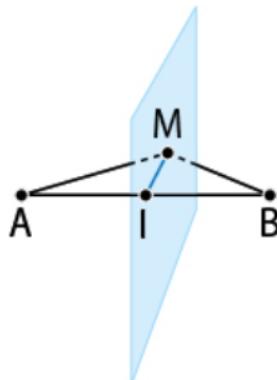
Démonstration 24- -

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace et soit M un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan \mathcal{P} .
Montrer que H est le point de \mathcal{P} le plus proche de M .

15.4.3 Plan médiateur d'un segment

Définition

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le **plan médiateur** du segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal \overrightarrow{AB} .



Propriété

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et de B .

Savoir-Faire 15.81

SAVOIR DÉTERMINER SI UN VECTEUR EST NORMAL À UN PLAN

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2; -3; 5)$, $B(1; 0; 7)$ et $C(-4; 1; 3)$.

1. Démontrer que A, B et C définissent un plan
2. Montrer que $\vec{n}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à (ABC)

Exercice 15.19

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(-1; 2; 7)$, $B(3; 3; 2)$ et $C(0; 3; 8)$.

1. Démontrer que A, B et C définissent un plan
2. Montrer que $\vec{n}(2; -3; 1)$ est un vecteur normal à (ABC)


Savoir-Faire 15.82

UTILISER LA PROJECTION ORTHOGONALE POUR DÉTERMINER LA DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE OU UN PLAN

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2; 3; 3)$, $B(-1, 17; -17)$ et le vecteur $\vec{n}(2; 3; -4)$.

On note P le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n}

1. Démontrer que le point $H(-9; 5; -1)$ appartient à P
2. a) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur P
b) En déduire la distance du point B au plan P
3. Soit $C(5; 11; -5)$
 - a) Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC) .
 - b) Calculer la distance du point H à la droite (BC) .


Exercice 15.20

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(0; -1; 0)$ et P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; 1)$.

On note P le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n}

1. Démontrer que le point $H(2; -1; -4)$ appartient à P
2. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de $B(-2; -3; -6)$ sur P
3. En déduire la distance du point B au plan P


Exercice 15.21

L'espace est muni d'un repère orthonormé, on considère $A(-5; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(10; -1; -3)$ et $D(11; -2; 0)$ quatre points de l'espace.

1. Démontrer que le point C est le projeté orthogonal de D sur (AB) .
2. En déduire la distance du point D à la droite (AB)