

5.1

Limites de fonctions en $+\infty$ ou en $-\infty$

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT



5.1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$.

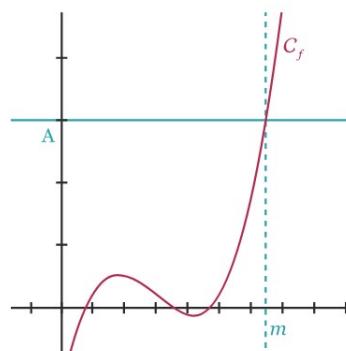
Dire qu'une **fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres x "suffisamment grands" (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]m; +\infty[$).

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique :

Quel que soit le nombre M , on peut trouver un nombre A tel que pour tout $x > A$, $f(x) > M$.

La courbe de f restreinte à $]A; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous (la courbe est située au-dessus de la droite d'équation $y = M$ sur l'intervalle $]A; +\infty[$)



M qui est appelé le **seuil**, peut être aussi grand que l'on veut. Il s'agit de la valeur à dépasser.

Remarque

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

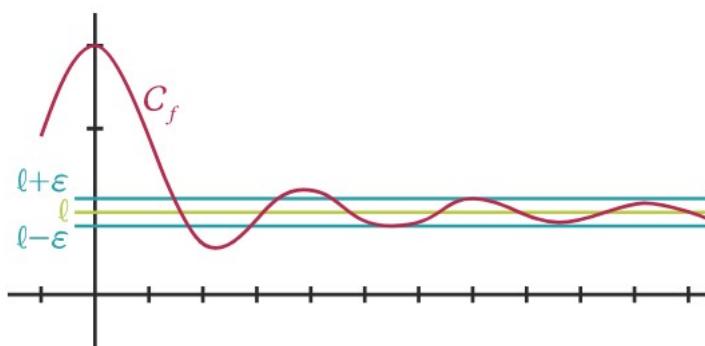
5.1.2 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$ et l un nombre réel.

Dire que la **limite de f en $+\infty$ est l** signifie que $f(x)$ reste dans un intervalle $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ (intervalle ouvert contenant l) où ϵ est un réel positif, dès que x est "suffisamment grand".

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[-\infty; x_0[$ et l un nombre réel.

Dire que la limite de f en $-\infty$ est l signifie que $f(x)$ reste dans un intervalle $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ (intervalle ouvert contenant l) où ϵ est un réel positif, dès que x est "suffisamment petit".

On note : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Définition

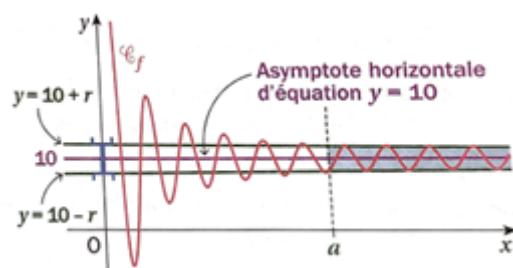
Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemple

f est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$.

Pour tout nombre réel $r > 0$, on peut trouver un nombre réel a tel que si $x > a$ alors $f(x) \in]10 - r; 10 + r[$.

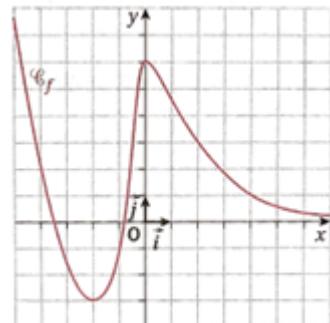
(On peut choisir $r > 0$ aussi petit que l'on veut, $f(x)$ sera toujours contenu dans l'intervalle pour x assez grand).



Exercice 5.1

f est une fonction définie sur \mathbb{R} et représentée par la courbe ci-contre.

- Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
- En supposant ces conjectures exactes, préciser la (ou les) asymptote(s) horizontale(s) à la courbe de f , si elle(s) existe(nt).
- Dresser le tableau de variations de f et faire figurer les limites conjecturées.



Exercice 5.2

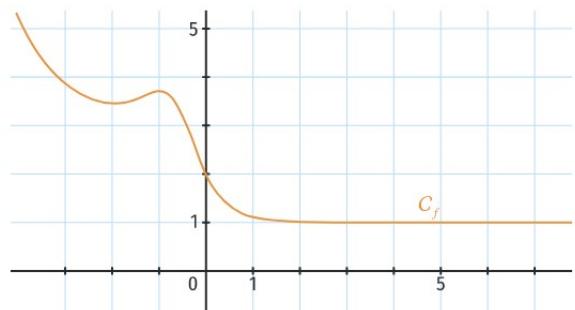
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x^2 - 10}{1 + 2x^2}$.

- Avec la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Exercice 5.3

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

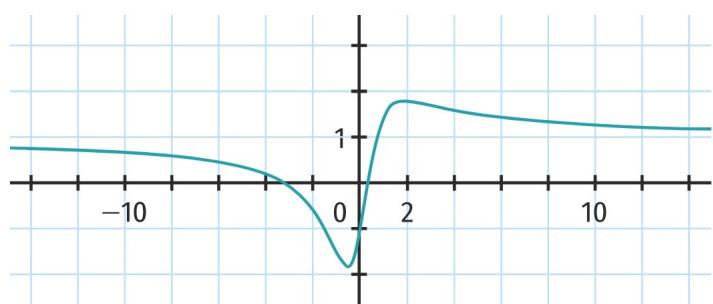
- Conjecturer le tableau de variations de f sur \mathbb{R} ainsi que les éventuelles limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



Exercice 5.4

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

- Conjecturer le tableau de variations de f sur \mathbb{R} ainsi que les éventuelles limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer une équation de l'asymptote horizontale obtenue.



Exercice 5.5

On considère le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g(x)$	1	0	10	5

Déterminer à l'aide du tableau une équation des éventuelles asymptotes de la courbe représentative de la fonction g .

5.1.3 Limites de quelques fonctions de référence

Propriété

1. $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

3. $f(x) = e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

↗ (Exigible)

Démontrer que la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

Remarque

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

