

## 11.2

### Définir les arrangements et les permutations

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

#### 11.2.1 Arrangement

##### Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On appelle **factorielle**  $n$  et on note  $n!$  le produit de tous les entiers de 1 à  $n$  :  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ .

➔ Par convention :  $0! = 1$

##### Exercice 11.6

Calculer  $5!$ ,  $6!$  et  $7!$ . Déterminer une relation entre  $7!$  et  $6!$ .

##### Définition

Un **p-arrangement** de  $p$  éléments d'un ensemble  $E$  est un p-uplet d'éléments **distincts** de  $E$ .

##### Remarque

- Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte et il n'y a pas de répétition d'élément.
- Un arrangement de  $A$  peut être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de  $A$

##### Exercice 11.7

On considère l'ensemble  $A = \{b; j; n; o; r; u\}$ .

1. Donner 2 arrangements de 4 éléments de  $A$ .
2. Donner 3 arrangements de 3 éléments de  $A$ .
3.  $(b, o, n, j, o, u, r)$  est-il un arrangement de  $A$  ?

##### Propriété

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.  $p$  et  $n$  sont des entiers naturels avec  $p \leq n$ .

Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  (ou nombre de p-uplets distincts de  $E$ ) est :  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$ .

#### \*Démonstration 18



## Savoir-Faire 11.53

UTILISER LES K-UPLETS D'ÉLÉMENTS DISTINCTS POUR DÉNOMBRER

1. Soit  $E = \{a, b, c\}$ . Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments distincts de  $E$  ?
2. Le TOP 14 (championnat de France de rugby) est composé de 14 équipes. Les 6 premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase régulière) passent à la seconde phase du championnat.
  - a) Combien de classements composés de 6 équipes qui atteignent la phase finale sont possibles ?
  - b) Sachant que le Stade Toulousain a fini premier de la première phase, combien de classements sont encore possibles .

 **Exercice 11.8**

1. On considère l'ensemble  $A = \{b; j; n; o; r; u\}$ . Combien peut-on former de 4-uplets d'éléments distincts de  $A$  ?
2. Sur son piano, Hugo joue avec sept notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si. Combien de mélodies différentes peut-il obtenir avec cinq notes distinctes de cet ensemble ?
3. On s'intéresse au classement de trois gagnants dans un tournoi de jeux vidéo opposant huit joueurs, c'est-à-dire aux trois joueurs arrivés en tête et à l'ordre d'arrivée. Combien y a-t-il de classements possibles ?

### 11.2.2 Permutations

#### Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide à  $n$  éléments.

Une **permutation** de  $E$  est un arrangement à  $n$  éléments de  $E$ .

#### Exemple

- On considère l'ensemble  $G = \{a; b; c\}$ .  
 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, b, a), (c, a, b)$  sont les six permutations de  $G$ .
- On considère l'ensemble  $A = \{b; j; n; o; r; u\}$ .  $(b, o, n, j, u, r), (j, n, o, r, b, u)$  et  $(n, j, r, o, b, u)$  sont des permutations de  $A$ .

#### Propriété

Soit  $E$  un ensemble non vide à  $n$  éléments. Le nombre de permutations de  $E$  est  $n!$ .



## Savoir-Faire 11.54

UTILISER LES PERMUTATIONS POUR DÉNOMBRER

1. Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . Combien y a-t-il de permutation de  $E$  ?
2. Le TOP 14 (championnat de France de rugby) est composé de 14 équipes. Les 6 premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase

régulière) passent à la seconde phase du championnat.

- Combien y a-t-il de classements possibles des 14 équipes de la première phase du TOP 40 ?
- Sachant que le Stade Toulousain a fini premier de la première phase, et que Clermont-Ferrand a terminé second, combien de classements sont encore possibles .

### Exercice 11.9

- Quel est le nombre de permutations de l'ensemble  $A = \{b; j; n; o; r; u\}$  ?
- Dans une classe de terminale, cinq élèves n'ont pas encore été évalués à l'oral. Dans combien d'ordres différents le professeur peut-il les interroger, chaque élève n'étant interrogé qu'un et une seule fois ?
- Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) de sept lettres distinctes avec les lettres du mot "produit" ? Parmi ces mots, combien commencent par une voyelle ?
- Lila souhaite ranger verticalement sur une même étagère 5 livres de biologie, 3 livres de mathématiques et 2 livres d'histoire.
  - Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?
  - Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

### Exercice 11.10

Combien d'anagrammes peut-on créer avec le mots "MATHS" ?

### Exercice 11.11

Combien d'anagrammes peut-on créer avec le mots "GAGNER" ?

### Exercice 11.12

Au cours d'une partie d'un jeu vidéo, 12 joueurs font une course de karting.

- Combien y a-t-il de classements possibles ?
- Marie termine première. Combien y a-t-il alors de classements possibles ?
- Luigo, Bouseure et Tibo finissent respectivement 3ème, 7ème et 9ème. Combien y a-t-il de classements possibles ?