

## 4.1

## Compléments de dérivation

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

## 4.1.1 Dérivée de la composée

**Définition**

Soit  $v$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  et  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  tel que pour tout réel  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

La fonction  $v \circ u$  est la fonction définie sur  $I$  par  $(v \circ u)(x) = v(u(x))$ .

**Exercice 4.1**

On considère la fonction  $u : x \mapsto x^2$  et la fonction  $v : x \mapsto 2x + 3$ , toutes les deux définies sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer l'expression de  $(v \circ u)(x)$  puis de  $(u \circ v)(x)$ .

$\triangle$  En général,  $v \circ u \neq u \circ v$ .

**Exercice 4.2**

On considère la fonction  $u : x \mapsto x^2 + x$  et la fonction  $v : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ .

Sans vous préoccuper des ensemble de définition, déterminer l'expression de  $(v \circ u)(x)$  puis de  $(u \circ v)(x)$ .

**Exercice 4.3**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

Décomposer la fonction  $f$  comme composée de deux fonctions.

**Propriété (admise)**

Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  et  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  tel que pour tout réel  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

La fonction  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et  $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Voici trois propriétés qui sont des conséquences de la propriété précédente :

**Propriété**

- Soit  $n$  un entier positif non nul.  
Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $I$  et  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Soit  $n$  un entier négatif non nul.  
Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , et si  $u$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $I$  et  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

**Propriété**

Si  $u$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $\sqrt{u}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

**Propriété**

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et  $(e^u)' = u'e^u$ .

**Savoir-Faire 4.1**

SAVOIR CALCULER LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION EN UTILISANT LA COMPOSÉE  
Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

3.  $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

2.  $g(x) = (2x - 1)^4$

4.  $k(x) = e^{3x^2+1}$

**Exercice 4.4**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

5.  $j(x) = \sqrt{e^x + 1}$

2.  $g(x) = (3x + 1)^3$

6.  $k(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

3.  $h(x) = \frac{1}{(x^4 + 3)^2}$

7.  $l(x) = 3(1 - x)^3$

4.  $i(x) = \frac{1}{(e^x + 3)^4}$

8.  $m(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}$

**4.1.2 Dérivée seconde****Définition**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  telle que  $f'$  est dérivable sur  $I$ .  
On appelle **dérivée seconde** de  $f$  sur  $I$  la fonction dérivée de  $f'$ , que l'on note  $f''$ .

**Exercice 4.5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ . Déterminer la dérivée seconde de la fonction  $f$ .