

## 3.5

# Représentation paramétrique d'une droite

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### Propriété

Soit  $d$  une droite passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Un point  $M(x; y; z)$  appartient à  $d$  si et seulement si, il existe un réel  $t$  tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

### Définition

Soit  $x_0, y_0, z_0, a, b$ , et  $c$  des réels tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

Le système d'équations  $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  définit une **représentation paramétrique** de la droite  $d$  passant par  $A(x_0; y_0; z_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Un tel système est aussi appelé **système d'équations paramétriques** de  $d$ .



### Savoir-Faire 3.9

SAVOIR DÉTERMINER UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DE DROITE

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(3; 3; 3)$  et  $B(2; 6; 4)$ .

Déterminer deux représentations paramétriques de la droite  $(AB)$ .

### Exercice 3.22

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$  :

1.  $A(3; -1; 0)$  et  $B(5; 2; -3)$
2.  $A(1; 2; -2)$  et  $B(6; -4; 3)$

### Exercice 3.23

Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $d$  passant par  $A(5; 2; -1)$  et parallèle à la droite  $(BC)$ , avec  $B(4; -3; 1)$  et  $C(0; 5; 7)$ .

## Savoir-Faire 3.10

SAVOIR RECONNAÎTRE UNE DROITE DONNÉE PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

On considère la droite  $d$  dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$

Déterminer un point de la droite, ainsi qu'un de ses vecteurs directeurs

### Exercice 3.24

On considère la droite  $d$  dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 8 - 7t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$

1. Le point  $A(-4; 1; 3)$  appartient-il à la droite  $d$ ? et le point  $B(1, 1, 2)$ ?
2. Donner les coordonnées d'un autre point de  $d$ , ainsi que celles d'un vecteur directeur de  $d$ .
3.  $d$  est-elle parallèle à  $d'$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 - 14k \\ z = 5 + 4k \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$

### Exercice 3.25

On considère la droite  $d$  dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$

1. Le point  $A(3; 0; 4)$  appartient-il à la droite  $d$ ?
2. Donner les coordonnées d'un autre point de  $d$ , ainsi que celles d'un vecteur directeur de  $d$ .
3. Soient  $B(3; -3; 13)$  et  $C(3; 5; -3)$ . Les droites  $d$  et  $(BD)$  sont-elles parallèles?

### Exercice 3.26

Soient  $A(3; -2; 4)$  et  $B(5; 2; 0)$  deux points de l'espace dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan  $(O; \vec{i}, \vec{k})$ .

### Exercice 3.27

La droite  $d$  passant par  $A(2; 5; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3; -4; 0)$  est-elle parallèle au plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ?

### Exercice 3.28

Soit  $d$  la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = 1 + k \\ z = -9 + 3k \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$

Déterminer les coordonnées de  $E$ ,  $F$  et  $G$ , points d'intersection respectifs de  $d$  avec

1. le plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
2. le plan  $(O; \vec{i}, \vec{k})$ .
3. le plan  $(O; \vec{j}, \vec{k})$ .



## Savoir-Faire 3.11

SAVOIR DÉTERMINER L'INTERSECTION DE DEUX DROITES DE L'ESPACE

On considère la droite  $d$  et la droite  $d'$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites  $d$  et  $d'$  sont sécantes en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.

### Exercice 3.29

On considère la droite  $d$  et la droite  $d'$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 8 - t \\ y = -6 - 2t \\ z = 15 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 6 - 6k \\ z = 1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites  $d$  et  $d'$  sont sécantes en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.

### Exercice 3.30

On considère la droite  $d$  et la droite  $d'$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 20 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer que les droites  $d$  et  $d'$  sont sécantes en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.

### Exercice 3.31

On considère la droite  $d$  et la droite  $d'$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -2 + k' \\ y = 2 - k' \\ z = 1 + 4k' \end{cases}, \text{ avec } k' \in \mathbb{R}$$

Les droites  $d$  et  $d'$  sont-elles coplanaires ? sont-elles sécantes ?

### Exercice 3.32

Dans chacun des cas, déterminer la position relative de  $d$  et de  $d'$  :

1.  $d : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

$d' : \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = 2t' + 2 \\ z = -t' - 3 \end{cases}, \text{ avec } t' \in \mathbb{R}$

$$2. \ d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$d' : \begin{cases} x = 3t' \\ y = -2t' + 1 \\ z = t' + 1 \end{cases}, \text{ avec } t' \in \mathbb{R}$$

**Exercice 3.33**

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(2; 4; 1)$  et  $C(-1; 3; 2)$ .

1. Justifier que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan
2. Soit  $M(x; y; z)$  un point du plan  $(ABC)$ . Montrer qu'il existe deux réel  $t$  et  $t'$  tels que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ .
3. En déduire que  $M \in (ABC)$  si et seulement si  $\begin{cases} x = t - 2t' + 1 \\ y = 2t + t' + 2 \\ z = 4t + 5t' - 3 \end{cases}$  où  $t \in \mathbb{R}$  et  $t' \in \mathbb{R}$ .
4. Le point  $E(1; 4; -7)$  appartient-il au plan  $(ABC)$  ?
5. Soit  $d$  la droite dont une représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = -3k + 4 \\ z = 9k - 7 \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ . La droite  $d$  est-elle parallèle au plan  $(ABC)$  ?

**Savoir-Faire 3.12**

**SAVOIR DÉTERMINER LA COPLANARITÉ DE QUATRE POINTS**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient les points  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(6; -7; 0)$ ,  $C(1; 0; 1)$  et  $D(13; -16; 5)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BD}$  sont coplanaires et en déduire que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  le sont aussi.

**Exercice 3.34**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et on considère les points  $A(-2; -14; -24)$ ,  $B(-2; 8; 4)$ ,  $C(-1; 3; -7)$  et  $D(-3; 2; 1)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

**Exercice 3.35**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et on considère les points  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(3; 14; 9)$ ,  $C(12; 5; 0)$  et  $D(-2; 3; 4)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

**Exercice 3.36**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et on considère les points  $A(-3; 0; 1)$ ,  $B(4; 2; 3)$ ,  $C(-5; 2; -3)$  et  $D(3; 0; 5)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.
2. Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont-ils coplanaires ?

**Exercice 3.37**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et on considère les points  $A(2; 3; 4)$ ,  $B(3; 0; 4)$ ,  $C(5; 6; 7)$  et  $D(8; 7; 13)$ .

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont-ils coplanaires ?