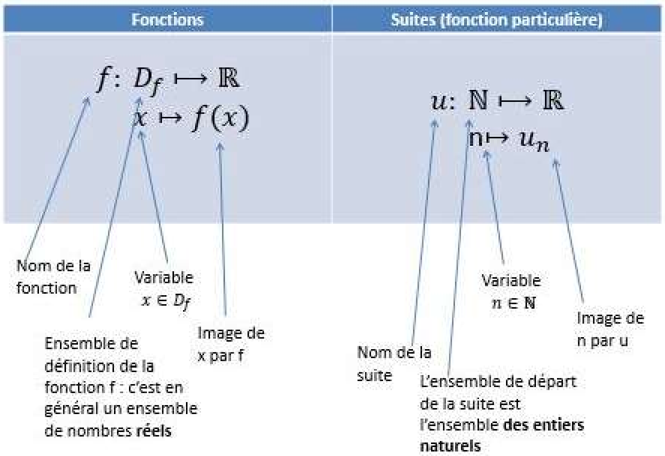
7.1 Définition et modes de génération

Spé Maths 1ère - JB Duthoit

7.1.1 Analogie avec une fonction classique



7.1.2 Définition

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une **suite numérique** est une fonction définie pour tout entier $n \geq n_0$ et à valeurs réelles.
Pour chaque $n \geq n_0$, on associe le nombre réel noté u_n.
La suite est notée u ou (u_n).

Remarque

- u_n est un réel ; on dit que c'est le **terme** de la suite (u_n) de rang n.
- (u_n) est la suite.

Remarque

C'est la faute classiques des lycéens débutants : La lettre n est à la fois utilisée comme indice des termes de la suite et comme valeur dans les formules.
Voici un exemple pour mieux comprendre : en rouge le n en indice et en vert le n utilisée comme "valeurs" :
$u_{n+1} = n \times u_n + 11n$ Ainsi, si on remplace n par 51, on obtient $u_{52} = 51 \times u_{51} + 11 \times 51$.

7.1.3 Modes de générations d'une suite

Par une formule explicite

Ici, le terme de la suite u_n est défini directement en fonction de n, et uniquement en fonction de n.
☛ On dit que (u_n) est définie par une **formule explicite**.

Exemple

la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$ est une suite explicite.

Savoir-Faire 7.31

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

- On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 6$ par $v_n = \frac{1}{n-5}$.
- On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $w_n = \sqrt{n-1}$.
- On considère la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = 2^n$.

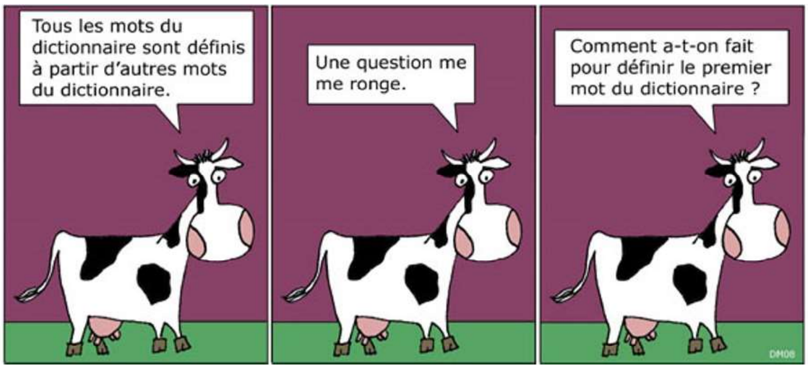
Remarque

Comment reconnaître une suite explicite ? Dans le cas d'une suite explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'entier souhaité.

Par une formule récurrente

Ici, le terme u_n de la suite se définit par rapport au(x) terme(s) précédent(s).

☞ On parle de **suite récurrente**.



Exemple

La suite w_n définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$ est une suite définie par récurrence.

Savoir-Faire 7.32

SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

Pour chaque exemple, on pourra calculer les 5 premiers termes :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
- Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n + 5$.
- Soit la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = 2 \times z_n + n$.

Remarque

> Dans le cas d'une suite récurrente, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme : pour calculer u_{100}, on a besoin de u_{99} par exemple... et ainsi de suite jusqu'au premier terme.

Par un algorithme

Ici, c'est un algorithme qui va être à l'origine de la construction de la suite.

Exemple

Voici un premier programme en Python :

```python
def suite1(n):
    return -2*n**2-2*n+7
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Et voici un second programme, toujours en Python :

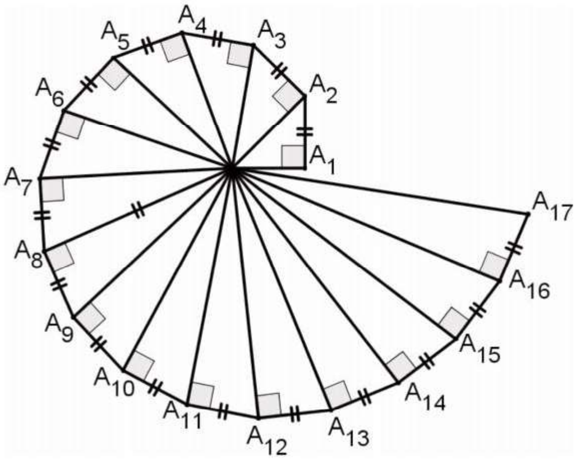
```python
def suite1(n):
        a = 5
        for i in range(n):
                a = 2 * a + 5
        return a
```

- La suite définie par ce programme est-elle explicite, récurrente ? Quelle est cette suite ?
- Calculer les 5 premiers termes (à la main, puis vérifier avec python).

Savoir-Faire 7.33

> SAVOIR CALCULER LES PREMIERS TERMES D'UNE SUITE (RÉCURRENTE OU EXPLICITE) EN UTILISANT PYTHON
> ☞ Utiliser les exemples faits en classe pour s'entraîner à programmer en Python des suites explicites et récurrentes (avec boucle for et/ou while).
> Bien évidemment, s'entraîner davantage avec les suites récurrentes, plus difficiles à programmer.

Par une situation géométrique



On part d'un triangle rectangle en A_1 OA_1A_2 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On pose $u_1 = A_1A_2$. Pour tout $n > 1$, en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle OA_nA_{n+1} comme suit : il est rectangle en A_n, et $A_{n+1} = 1$.

Pour $n > 0$, on pose $u_n = A_nA_{n+1}$

- Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
- Conjecturer la formule explicite de cette suite.

♡**Défi !**

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \begin{cases} 3 \times u_n & \text{si n est pair} \\ u_n - 2 & \text{si n est impair} \end{cases} \end{cases}$$

1. Calculer les 6 premiers termes (ce n'est pas ça le défi !)
2. Calculer la somme des 43 premiers termes ! (u_0 compris)

7.1.4 Calculer les termes d'une suite avec la calculatrice

- Il faut d'abord passer en mode **suite** : $\boxed{Mode}$ puis choisir **suite** ou **séquence**. Ensuite, il faut quitter avec $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{quitter}$.
- Appuyer ensuite sur la touche $\boxed{f(x)}$.
- Pour les suites explicites :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre ensuite l'expression de la suite en fonction de n : pour afficher n, il suffit de taper sur la touche $\boxed{X, T, \theta, n}$.

- Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.(Il faudra peut être régler la table pour ne faire apparaître que les valeurs positives de n.
- Exemple avec $u_n = 2n + 1$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,$\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{X, T, \theta, n}$,$\boxed{+}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2nde}$ et $\boxed{table}$.

- Pour les suites récurrentes :
  - On entre **nMin=0** si la suite est définie à partir de 0.
  - On entre **u(nMin)** la valeur de la suite pour **nMin**
  - Il reste ensuite à donner l'expression de la suite. Attention sur TI, il faudra rentrer u_n en fonction de u_{n-1} (et non pas u_{n+1} en fonction de u_n !) Le terme u_{n-1} se trouve en appuyant sur $\boxed{2nde}$ puis sur $\boxed{7}$, puis $\boxed{(}$, $\boxed{X, T, \theta, n}$, puis $\boxed{-}$, puis $\boxed{1}$ et on ferme la parenthèse avec $\boxed{)}$.
  - Pour afficher les termes, il suffit de faire $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.
  - Exemple avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+3$: $\boxed{f(x)}$,**nMin=0**,**u(nMin)=1**, $\boxed{2}$,$\boxed{\times}$,$\boxed{2nde}$,$\boxed{7}$, $\boxed{(}$,$\boxed{X, T, \theta, n}$,$\boxed{-}$,$\boxed{1}$, $\boxed{)}$, $\boxed{+}$, $\boxed{3}$. puis $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{table}$.

Savoir-Faire 7.34

SAVOIR UTILISER LA CALCULATRICE POUR CALCULER DES TERMES (SUITES RÉCURRENTES ET EXPLICITES)

✎Je m'entraîne seul(e)

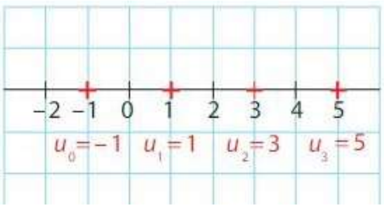
Utiliser les exemples déjà étudiés pour les vérifier à la calculatrice.

7.1.5 Représentation graphique de suites

Sur une droite graduée

C'est tout simple : on trace une droite graduée, et on place dessus les valeurs de u_0, u_1, u_2...

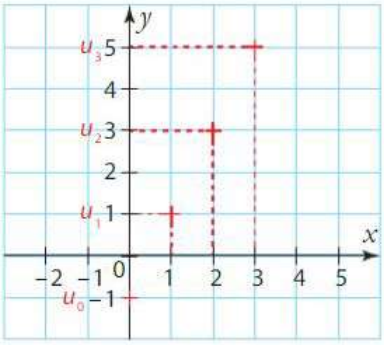
Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



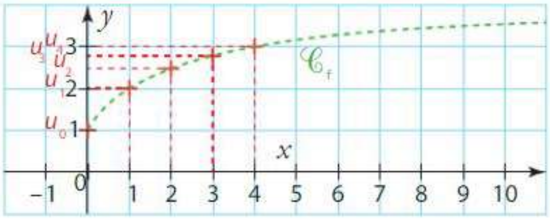
Dans un repère

C'est tout simple aussi : on trace place les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$...

Suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$



Suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$



Cas des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Bien sûr, on peut représenter cette suite en utilisant l'un des deux procédés précédents. Mais dans le cas d'une suite récurrente, il y a une méthode qui se base sur la courbe représentative de la fonction f.
Attention, cette méthode fonctionne uniquement avec les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'idée est de construire les termes à l'aide de la courbe C_f et la droite d'équation $y = x$.

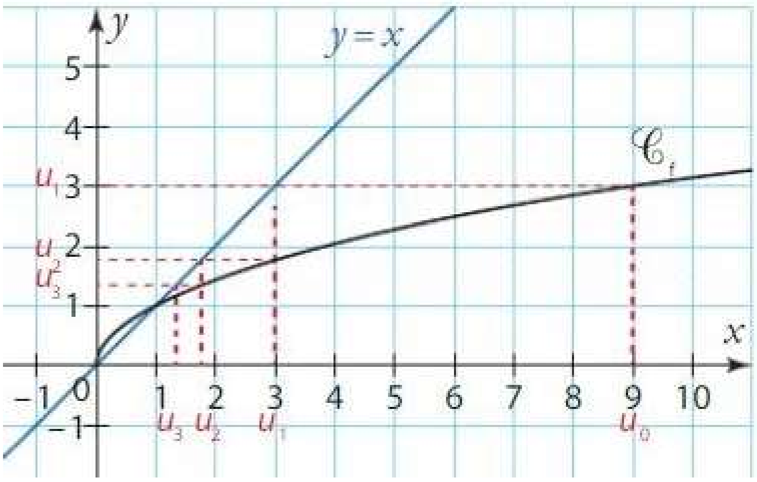
- On commence par placer u_0 sur l'axe des abscisses

- On construit u_1 sur l'axe des ordonnées en utilisant le courbe C_f et le fait que $u_1 = f(u_0)$.

- On construit u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$.

- On a donc u_1 sur l'axe des abscisses, et on peut réitérer le procédé pour u_2, u_3...autant de fois que nécessaire.

Suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

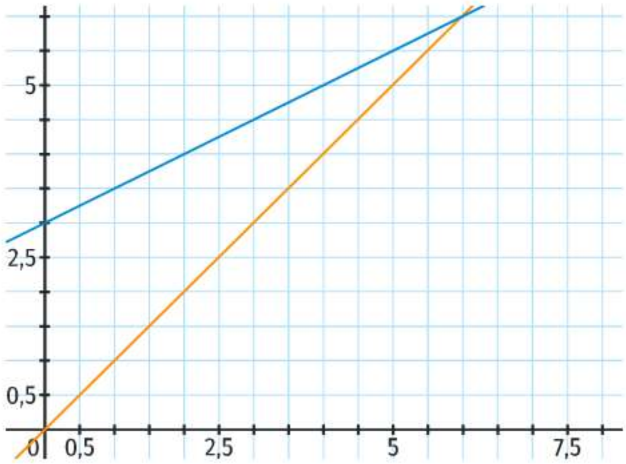


Savoir-Faire 7.35

Savoir représenter une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

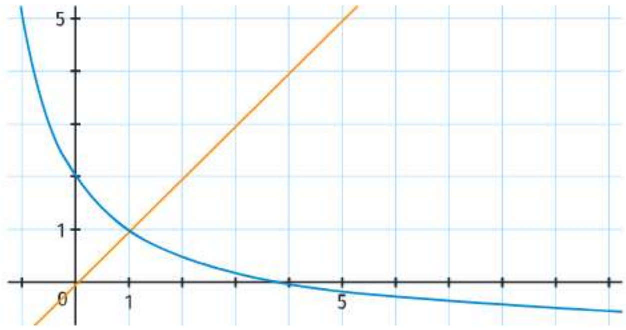
Soit u_n une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et soit (v_n) une suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$.
Déterminer la fonction f et g telles que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. Représenter ensuite ces deux suites (deux graphiques différents) en utilisant la méthode précédente. Pour vérification, on pourra faire les calculs à la main des premiers termes (ou avec la calculatrice) et s'assurer que les valeurs trouvées graphiquement soient en cohérence avec les valeurs calculées.

Exercice 7.23
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 3$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 7.24
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x+2} - 1$.



Reproduire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !

Exercice 7.25
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0.5x + 7$.
Construire la figure et représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
☛ Bien laisser les traits de construction !