8.1 Définition de la fonction logarithme népérien

Maths Spé terminale - JB Duthoit

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, quel que soit le réel k strictement positif, l'équation $e^x = k$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de k l'unique solution de l'équation $e^x = k$. Ce nombre est noté $ln(k)$.

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout $x \in]0;+\infty[$ associe le nombre $ln(x)$.

Conséquence

Ainsi, $y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$.
Ainsi, notamment :

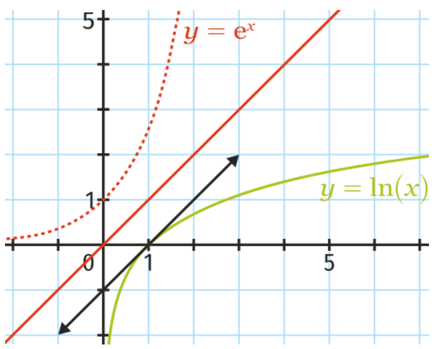
- $ln(1) = ...$ car $e^0 = 1$
- $ln(e) = ...$ car $e^1 = e$

Remarque

⚠ Python utilise la notation **log** pour le logarithme népérien.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$



Propriété

La fonction f définie par $f(x) = ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 8.1
Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Propriété

1. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ln(e^x) = x$.
3. $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{ln(x)} = x$.
4. $\forall a \in]0;+\infty[$, $\forall b \in]0;+\infty[$, $a = b \Leftrightarrow ln(a) = ln(b)$
5. $\forall a \in]0;+\infty[$, $\forall b \in]0;+\infty[$, $a < b \Leftrightarrow ln(a) < ln(b)$

Démonstration 9- (Exigible) -

CALCUL DE LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN
Soit f la fonction logarithme népérien.
On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on note f' sa dérivée.
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = x$, et en déduire $g'(x)$.
2. En utilisant $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, donner une autre expression de $g'(x)$.
3. Conclure

Savoir-Faire 8.32

SAVOIR RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS OU INÉQUATION AVEC DES LOGARITHMES
Déterminer les conditions d'existence des équations suivantes, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. Un premier exemple corrigé, avec $ln(2x+3) = ln(x)$

Solution possible :

$$\begin{aligned} ln(x) \text{ et } ln(2x+3) \text{ existent si et ssi } & x > 0 \text{ et } 2x+3 > 0 \\ \text{si et ssi } & x > 0 \text{ et } x > \frac{-3}{2} \\ \text{si et ssi } & x > 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} ln(x) = ln(2x+3) & \Leftrightarrow x = 2x+3 \\ & \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Comme $-3 \notin]0;+\infty[$, l'équation n'admet pas de solution et $S = \emptyset$

2. $2ln(x)+1=7$
3. $3e^x+3=9$
4. $5ln(x)<10$
5. $5-2ln(x)\geq 1$
6. $e^{x-3}>5$

Exercice 8.2
Déterminer les conditions d'existence des équations, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(5x+1)=ln(x)$
2. $2ln(x)+2=5$
3. $3e^{2x+3}=e$
4. $4-2e^{x-4}>0$

Exercice 8.3
On considère les équations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette équation, et la résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(x^2-49)=0$
2. $ln(2x^2-7x+6)=ln(10)$
3. $e^{\frac{x}{x+2}}=3$
4. $ln(e^{2x}+1)=1$

Exercice 8.4
On considère les inéquations suivantes. Pour chacune d'elles, déterminer les conditions d'existence de cette inéquation, et la résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$:

1. $ln(x-3)>1$
2. $e^{2-x}\leq 3$
3. $ln(4x^2-x)\leq ln(3x)$
4. $e^{x^2-1}\leq -1$
5. $e^{x^2-1}>2$

Exercice 8.5
On considère les équations ou inéquations suivantes. Résoudre chacune d'elles dans $\mathbb{R}$ en posant un changement de variable :

1. $(ln(x))^2+2ln(x)=3$ en posant $X=ln(x)$
2. $5e^{4x}-13e^{2x}-6=0$ en posant $X=e^{2x}$
3. $(ln(x))^2-2ln(x)=15$
4. $e^{2x}-2e^x-15<0$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $\forall x\in I$, $u(x)>0$.

La fonction f définie sur I par $f(x)=ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Autrement dit, $(ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$.

Savoir-Faire 8.33

Savoir étudier une fonction avec logarithmes

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{ln(x)}{x}$
2. Soit f la fonction définie par $f(x)=ln\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.6

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - ln(x)$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = ln\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$.

   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   b) Étudier les variation de f sur l'ensemble de définition trouvé précédemment.

Exercice 8.7

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;11]$ par $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 15ln(x)$
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x - 1)$.

Exercice 8.8

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty]$ par $g(x) = x - 1 + ln(x)$
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty]$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x} \times ln(x)$.

   a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   b) En déduire les variations de f

Exercice 8.9

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty]$ par $f(x) = (ln(x))^3 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer l'équation réduite de T_1, tangente à C_f en 1.
3. Étudier la position relative de C_f et de T_1.