10.1 Succession d'expériences aléatoires et notion d'indépendance

Maths Spé terminale - JB Duthoit

Des maths dans la vraie vie !

Dans la vie courante, un grand nombre de situations se traduisent par une répétition d'expériences identiques soumises à un succès ou à un échec. L'étude de ces situations sera abordée dans ce chapitre et aboutira à l'énoncé de la Loi binomiale qui permet de modéliser ce type de situations.

"On a donc une chance sur 19 068 840 de gagner le jackpot du Loto. Dépêchons-nous de perdre 19 068 839 fois !"

10.1.1 Succession d'expériences aléatoires

Savoir-Faire 10.1

Savoir modéliser une succession d'épreuves aléatoires

On considère une urne de 5 boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres vertes. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une première boule, à noter son numéro, à la remettre dans l'urne, et à tirer ensuite une seconde boule dont on note sa couleur.

1. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré. On utilisera les notations des probabilités conditionnelles.

2. Quelle est la probabilité de l'issue $(1; R)$?

Méthode :

- Pour calculer la probabilité d'un chemin sur un arbre pondéré, on multiplie la probabilité de chaque branche qui compose ce chemin.
- Pour rappel la formule des probabilités conditionnelle :

$$P(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Exercice 10.1

Un bocal contient 4 bonbons emballés individuellement, numérotés de 1 à 4. On réalise l'expérience aléatoire suivante :

- Un client prend au hasard un premier bonbon dans un bocal, note son numéro, et le mange !
- Il prend ensuite un second bonbon, note son numéro, et le mange.

1. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité de l'issue $(3; 4)$

10.1.2 Succession d'expériences aléatoires indépendantes

Définition

Une succession d'expériences aléatoires est dite indépendante si le résultat d'une expérience n'influence en rien le résultat des expériences suivantes.

Savoir-Faire 10.2

Reconnaître si les expériences aléatoires sont indépendantes ou non

Pour chaque situation suivante, déterminer si les expériences aléatoires sont indépendantes ou non. Justifier votre réponse.

1. Un joueur lance deux dés à six faces successivement et note les résultats obtenus.
2. Un élève pioche une carte dans un jeu de 52 cartes, la remet dans le jeu, mélange puis pioche une deuxième carte.
3. Un magasin propose un tirage au sort : un client tire une boule dans une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules bleues. Il garde la boule et en tire une deuxième.
4. Un concours est organisé : chaque participant tire au hasard un ticket numéroté. Après chaque tirage, le ticket est remis dans l'urne avant le tirage suivant.
5. Dans un sac, il y a 10 bonbons (6 au chocolat et 4 aux fruits). Un enfant en prend un au hasard et le mange, puis il en prend un deuxième.

Exercice 10.2

Indiquer si les expériences suivantes sont indépendantes ou non. Justifier chaque réponse.

1. Un joueur tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, la remet dans le jeu, mélange et tire une deuxième carte.
2. Une machine industrielle produit des pièces métalliques. Chaque pièce est contrôlée individuellement pour vérifier si elle est défectueuse.
3. Une boîte contient 8 billes rouges et 4 billes bleues. Un joueur tire une bille sans la remettre, puis il en tire une deuxième.
4. Un entraîneur de football sélectionne successivement deux joueurs au hasard parmi les 20 disponibles pour participer à un test de vitesse.
5. Un étudiant répond à une série de 10 questions à choix multiples où chaque réponse est choisie au hasard, sans regarder les questions précédentes.

Propriété

Lors d'une succession d'expériences indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i, pour $1 \leq i \leq n$.

Savoir-Faire 10.3

Savoir effectuer des calculs de probabilité en utilisant l'indépendance

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie truquée 3 fois de suite. Pour chaque lancer, on a deux fois plus de chance de tomber sur "pile" que sur "face".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" si on lance cette pièce une seule fois ? On

note p cette probabilité.

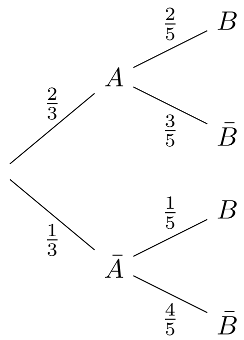
2. Réaliser un arbre pondéré qui représente l'expérience aléatoire
3. Quelle est la probabilité de l'événement E : "obtenir trois fois "pile" " ?
4. Quelle est la probabilité de l'événement F : "obtenir aucune fois "pile" " ?
5. Quelle est la probabilité de l'événement G : "obtenir au moins une fois "pile" " ?

Méthode :

- Pour rappel, si A et B sont indépendants, alors $p_A(B) = p(B)$ et donc $p(A \cap B) = P(A) \times p(B)$

Exercice 10.3

Pour un test d'entrée dans une école, les candidats doivent passer deux tests qui se soldent chacun par un succès ou un échec.
On considère l'événement A :"réussir au premier test", et l'événement B :"réussir au second test".
On considère l'arbre ci-dessous, qui représente cette situation.



1. Donner $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Déterminer $P_B(A)$, et interpréter ce résultat.
4. on ajoute un troisième test, et on considère C :"réussir au troisième test". On sait aussi que $P(C) = 0.2$. Que vaut $P(A \cap C)$ ensachant que A et C sont indépendants ?