

3.2

Opérations sur les vecteurs

MATHS 2NDE 7 - JB DUTHOIT

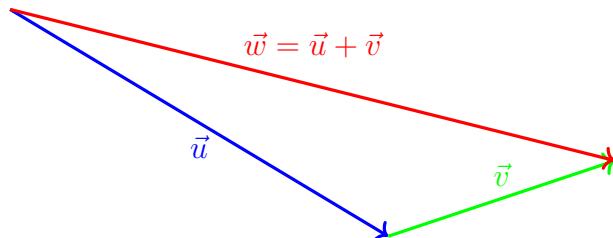
3.2.1 Somme de deux vecteurs

Définition

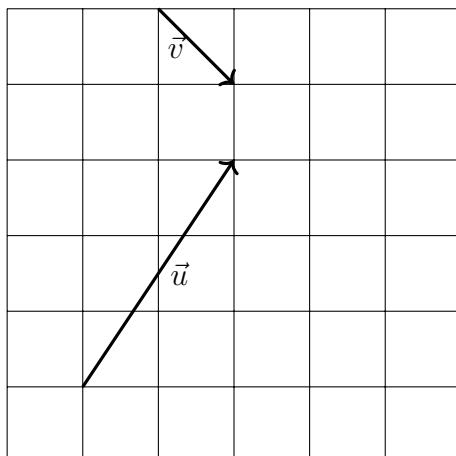
Définition

La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur \vec{w} qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur \vec{u} puis de vecteur \vec{v} .

On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

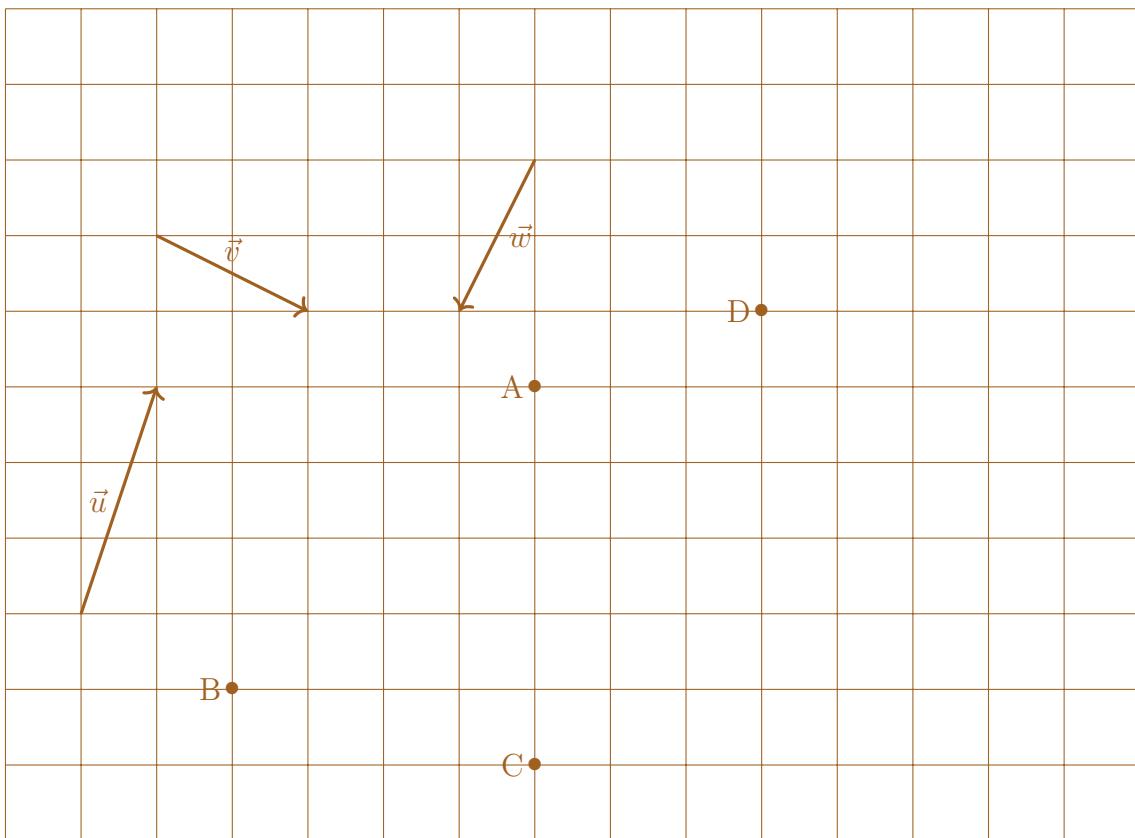


Exemple



Savoir-Faire 3.21

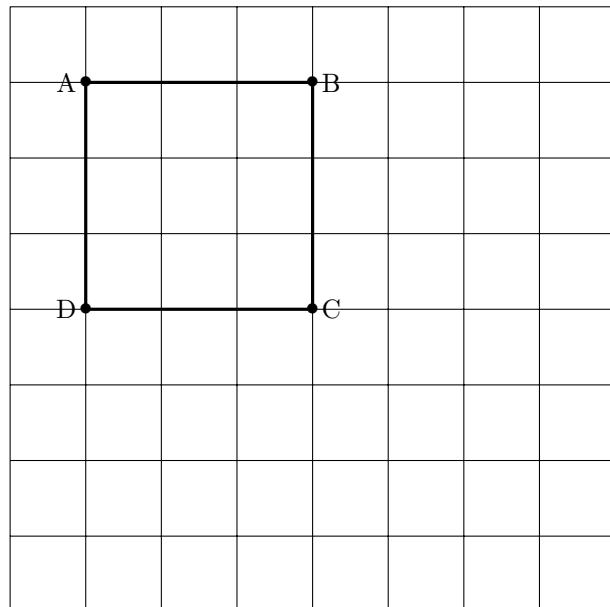
| SAVOIR REPRÉSENTER LA SOMME DE DEUX VECTEURS



1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w}$
4. Placer le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
5. Placer le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \vec{v} + \vec{w}$

Exercice 3.24

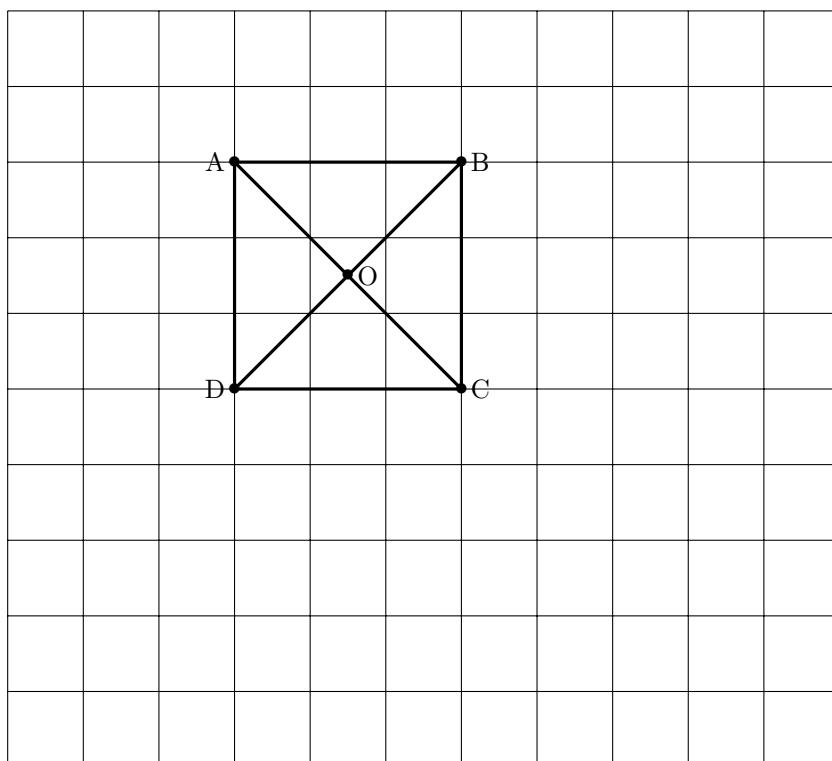
Soient $ABCD$ un carré..



1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

Exercice 3.25

Soient $ABCD$ un carré de centre O .



Placer les points

1. E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$
2. F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
3. G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

4. H tel que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HB}$
5. I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AD}$
6. J tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OB}$
7. K tel que $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AD}$

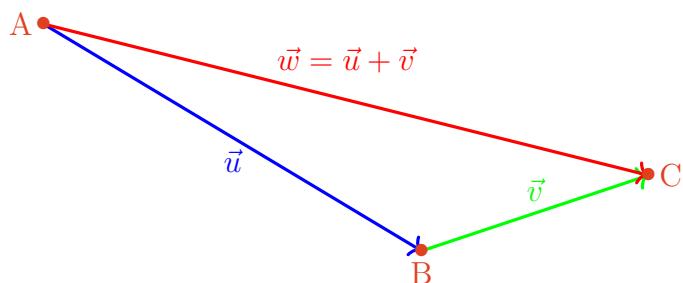
Relation de Chasles

Propriété (admise)

RELATION DE CHASLES

Pour tous points A,B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Savoir-Faire 3.22

SAVOIR UTILISER LA RELATION DE CHASLES

1. Compléter :

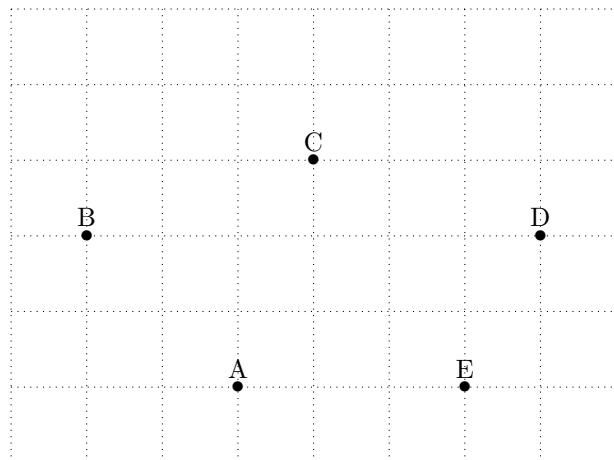
- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{\quad}$
- b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{\quad}$
- c) $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{\quad} = \overrightarrow{FB}$
- d) $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{B}$
- e) $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{I} = \overrightarrow{RI}$
- f) $\overrightarrow{K} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$

2. Simplifier :

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
- b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA}$
- c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{GD}$
- d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- e) $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{GH}$

Exercice 3.26

Reproduire la figure ci-dessous :



1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$, puis un représentant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB}$. (utiliser des couleurs). Que constate-t-on ?
2. Le démontrer à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 3.27

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Exercice 3.28

Soit RST un triangle.

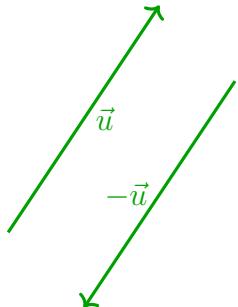
1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$
2. Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$. Penser à la relation de Chasles !

3.2.2 Opposé d'un vecteur

Définition

L'opposé d'un vecteur \vec{u} du plan est le vecteur noté $-\vec{u}$, qui a :

- même direction que \vec{u} .
- même norme que \vec{u} .
- le sens opposé à celui de \vec{u} .

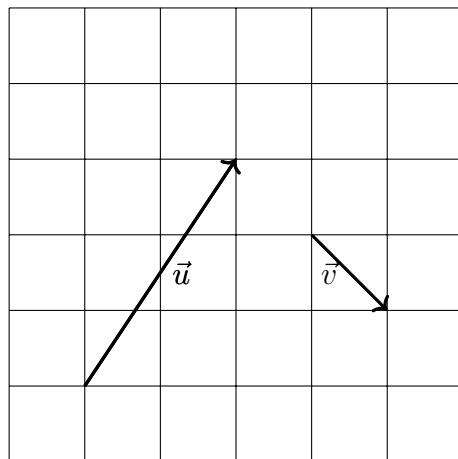


Soustraction de deux vecteurs

Définition

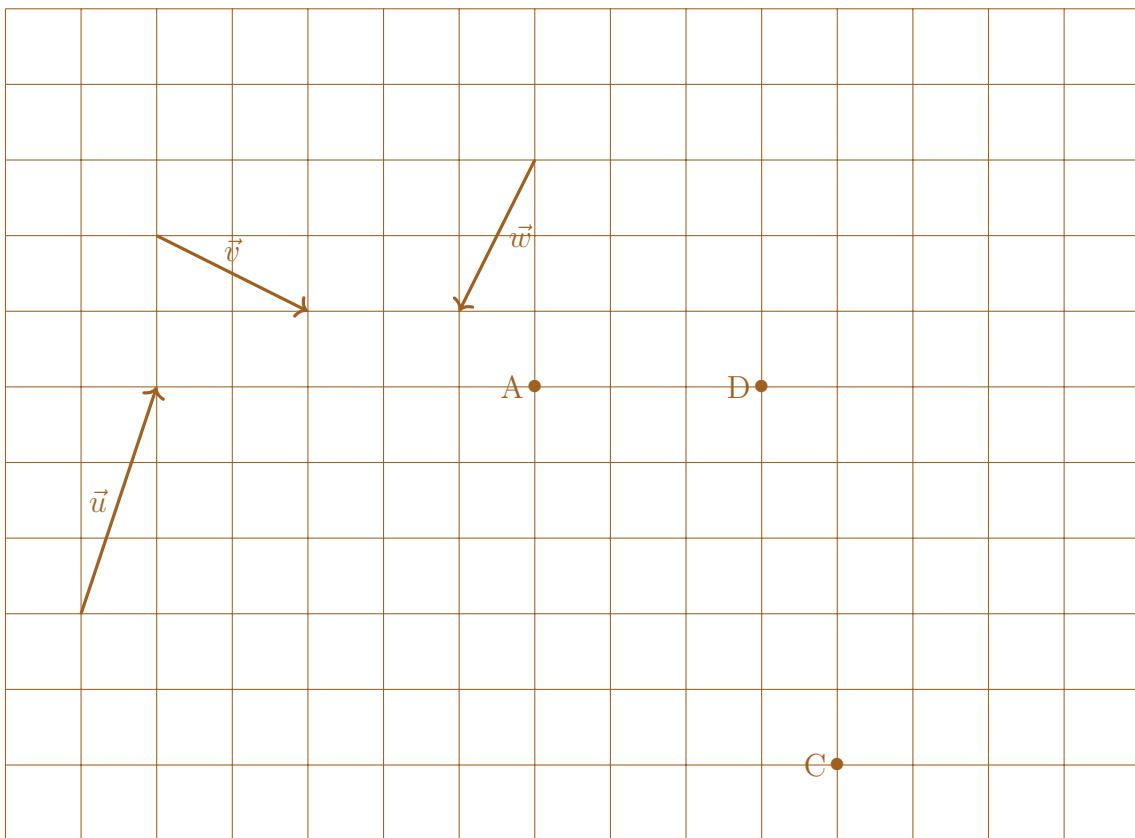
Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. On définit la soustraction de \vec{u} par \vec{v} , notée $\vec{u} - \vec{v}$, le vecteur \vec{w} défini par $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Exemple



Savoir-Faire 3.23

| SAVOIR PRÉSENTER LA DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{v} - \vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{u} - \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \vec{u} - \vec{w}$

3.2.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition

Soient \vec{u} un vecteur du plan et k un réel.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$

Sinon :

- Direction : \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont la même direction.
- Sens :
 - si $k > 0$ alors \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont le même sens
 - si $k < 0$, alors \vec{u} et $k \times \vec{u}$ ont des sens contraires
- Longueur : La longueur du vecteur $k \times \vec{u}$ est égale à la longueur du vecteur \vec{u} multipliée par $|k|$.

Propriété (admise)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , pour tous réels k et k' , on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemple

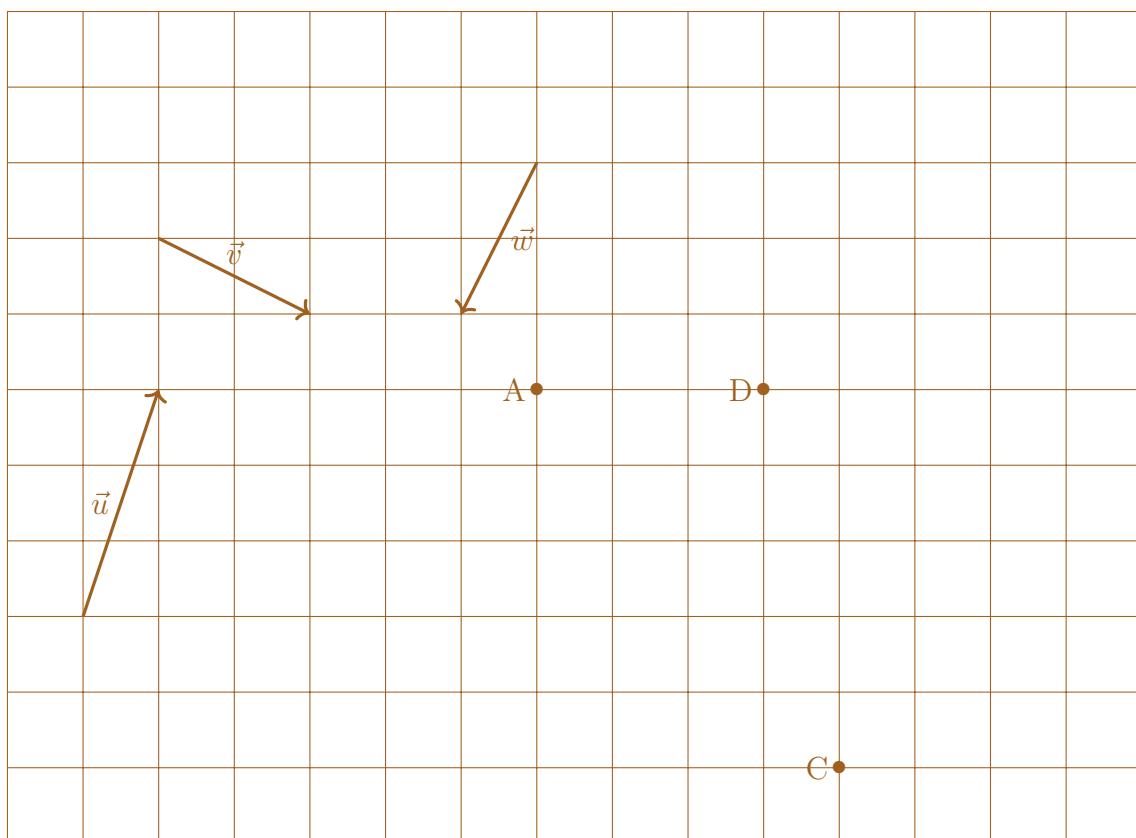
Simplifier les expressions suivantes :

- $5\vec{u} + 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} - 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} + 5\vec{v} =$
- $5 \times (3\vec{v}) =$



Savoir-Faire 3.24

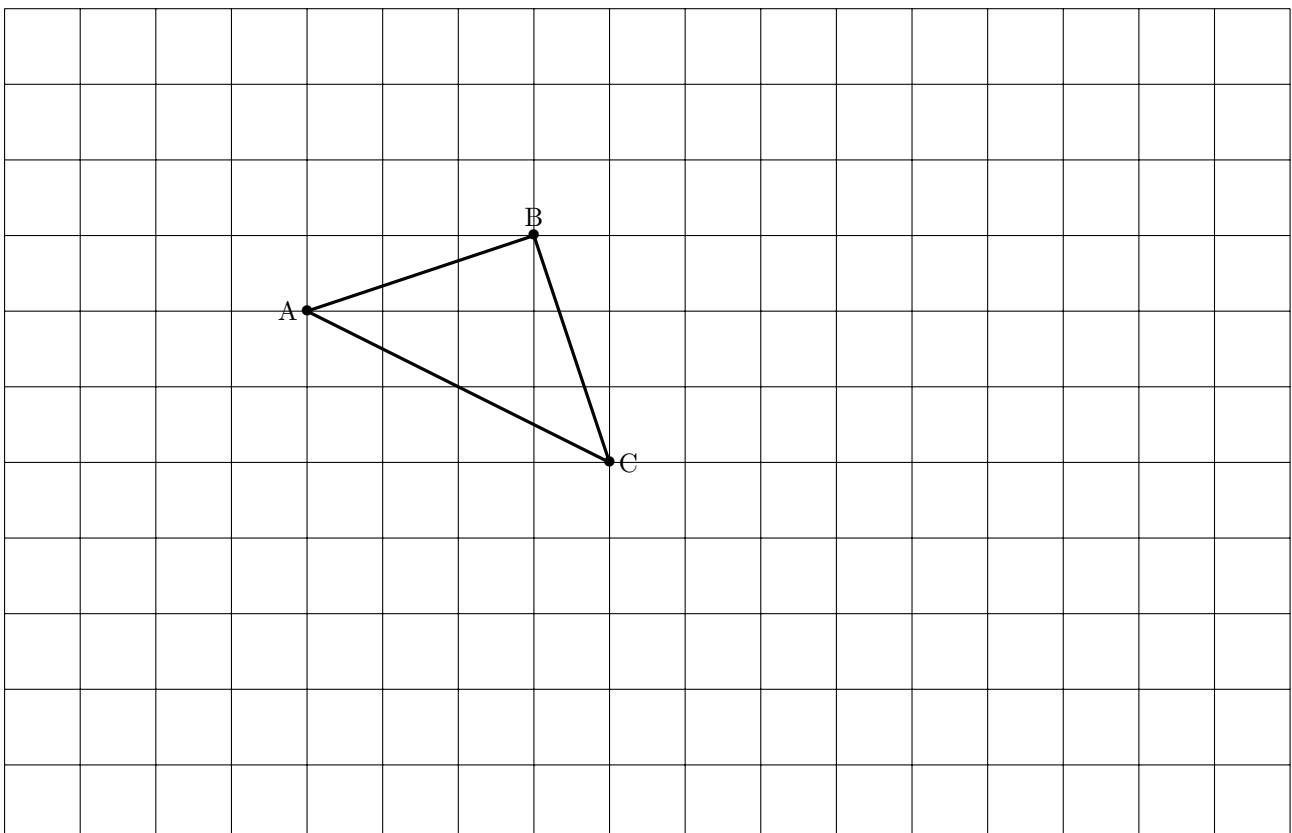
SAVOIR PLACER UN POINT DÉFINI PAR DES ÉGALITÉS VECTORIELLES



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = -2\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$

2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = 2\vec{w} + \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

Exercice 3.29



1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$



Savoir-Faire 3.25

SAVOIR UTILISER LES RÈGLES DE CALCUL SUR LES VECTEURS AFIN D'EXPRIMER UN VECTEUR EN FONCTION D'UN AUTRE

1. Placer trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
2. Exprimer \overrightarrow{BC} en fonction de \overrightarrow{AB} . Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

Exercice 3.30

1. Placer trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$
2. Exprimer \overrightarrow{AB} en fonction de \overrightarrow{CB} . Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

Exercice 3.31

1. Placer trois points P, Q et R tels que $\overrightarrow{PR} = -2\overrightarrow{QP}$
2. Exprimer \overrightarrow{RQ} en fonction de \overrightarrow{QP} . Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

Exercice 3.32

Soit ABC un triangle.

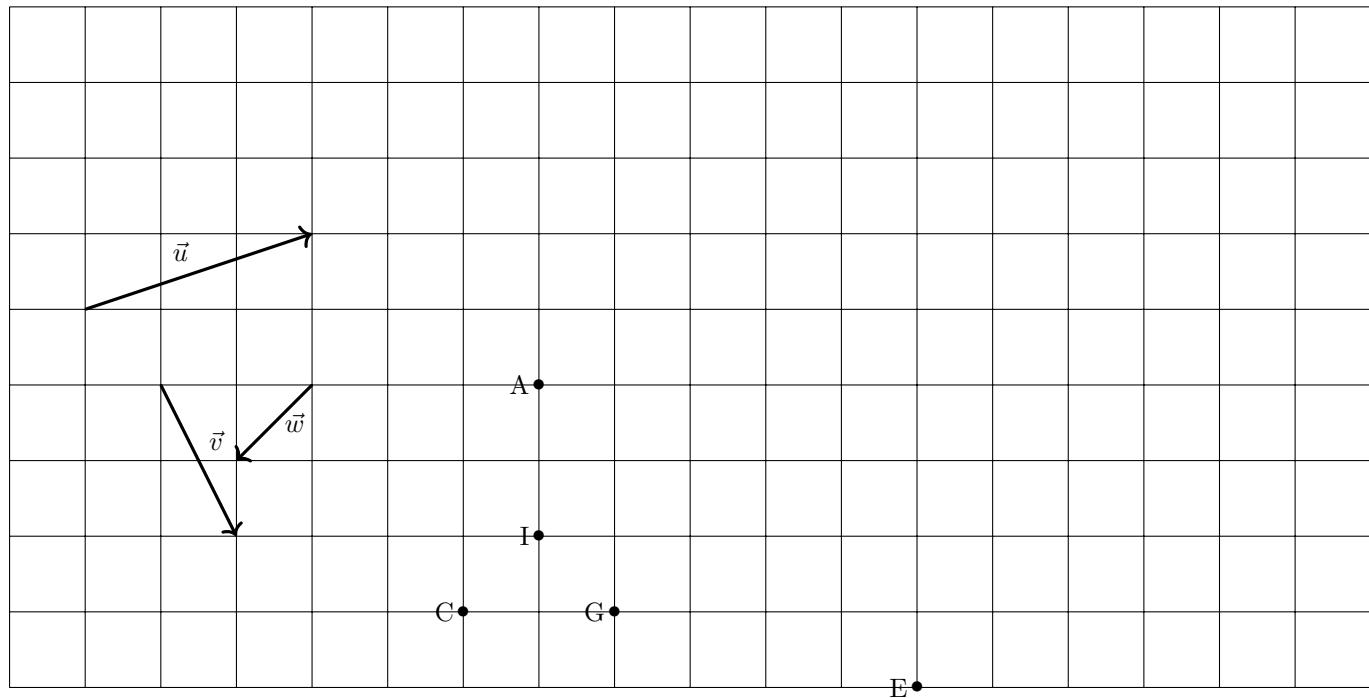
Construire les points I, J et K tels que :

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

Exercice 3.33

Construire les points H, B, J, D et F vérifiant les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{GH} = 3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$
2. $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
3. $\overrightarrow{IJ} = -\frac{5}{2}\vec{v}$
4. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{u}$
5. $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



Exercice 3.34

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH}$
2. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$
4. $\vec{u} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$
5. $\vec{u} = \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{FC}$
6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$$7. \vec{u} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MQ}$$