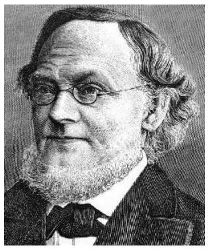
Rappels sur le produit scalaire dans le plan

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

15.0.1 Premières expressions du produit scalaire

Histoire

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique.
Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809 ; 1877).
Il fut baptisé produit scalaire par William Hamilton en 1853.

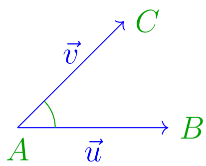


Définition

Définition

Le **produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$** est le nombre réel noté $\vec{u}\vec{v}$, défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

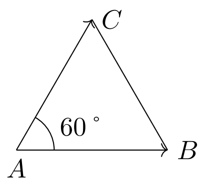


Remarque

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut donc choisir des vecteurs de même origine.

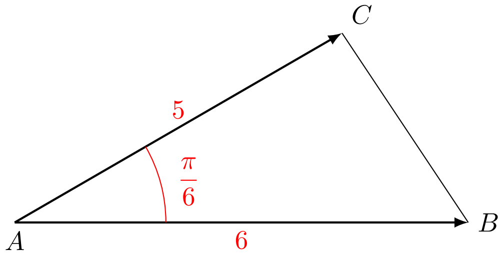
Exercice 15.1

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en sachant que $AB = AC = BC = 1$.



Exercice 15.2

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant les données de la figure suivante :



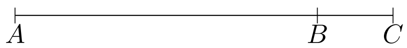
Cas particulier de vecteurs colinéaires

Propriété

- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

Exercice 15.3

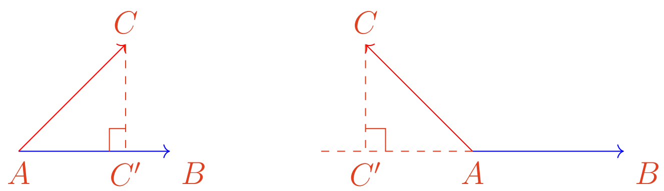
Soient A,B et C trois points alignés tels que $B \in [AC]$ et $AB = 4$ et $BC = 1$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.



Expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal

Propriété

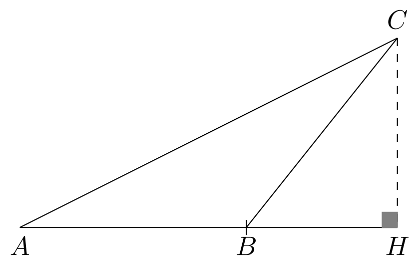
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on considère le point C' projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$



Angle $\widehat{BAC}$ aïgu — Angle $\widehat{BAC}$ obtu

Exercice 15.4

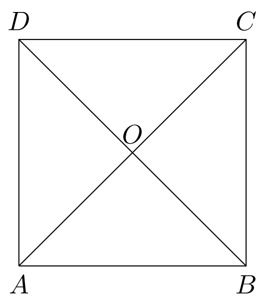
Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait également que AH=5, AB=3 et B appartient au segment $[AH]$. ☛ Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



Exercice 15.5

On considère le carré $ABCD$ de coté a.
On note O le point d'intersection de ses diagonales.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

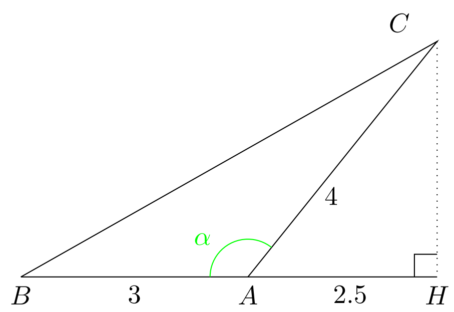
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$



Exercice 15.6
SAVOIR UTILISER LE PRODUIT SCALAIRE POUR CALCULER UN ANGLE OU UNE DISTANCE

ABC est le triangle ci-dessous avec AB=3 et AC=4.
H est le pied de la hauteur issue de C, et AH=2.5

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. En déduire la mesure de α, mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.



15.0.2 Propriété du produit scalaire

Produit scalaire et orthogonalité

Définition

- Dire que deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux signifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$

15.0.3 règles de calculs

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tout nombre réel λ :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

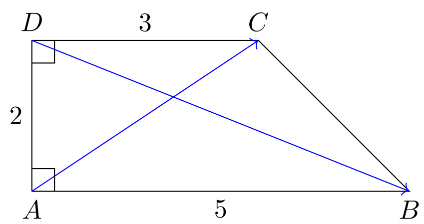
Exemple

$\vec{u} \cdot (2\vec{v} - 3\vec{w}) =$

Exercice 15.7

Savoir utiliser la relation de Chasles pour calculer un produit scalaire

$ABCD$ est le trapèze rectangle ci-dessous avec $AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.
Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$



Carré scalaire

Définition

Le **carré scalaire d'un vecteur** $\vec{u}$, noté $\vec{u}^{\,2}$, est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Conséquence

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.
- Pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

Identités remarquables

Propriété

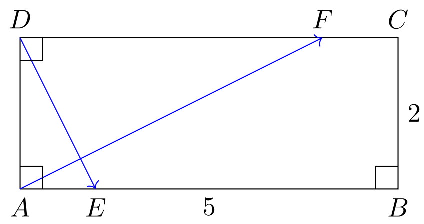
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

Exercice 15.8

Savoir démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs - Méthode 1

$ABCD$ est le rectangle ci-dessous avec $AB = 5$ et $BC = 2$.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.
Monter que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



15.0.4 Autres expressions du produits scalaire

Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(-5;2)$ et $\vec{v}(1;4)$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Conséquence

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et si $\vec{u}(x;y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Exemple

On considère deux vecteurs $\vec{u}(5;7)$ et $\vec{v}(-5;4)$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

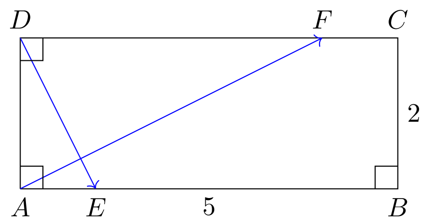
Exercice 15.9

Savoir démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs - Méthode 2 , avec des coordonnées

ABCD est le rectangle ci-dessous avec AB=5 et BC=2.

E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$.

Monter que (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



Expression du produit scalaire à partir des normes

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

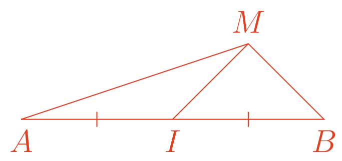
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

15.0.5 Calcul de longueurs et d'angles

Transformation d'expression

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a :
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$.



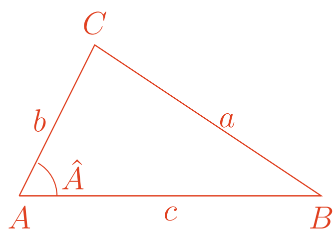
Exercice 15.10
Soit ABC un triangle avec I milieu de $[AB]$.
On sait aussi que $CI = 2$ et $AB = 6$.
Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Formules d'Al Kashi

Propriété Théorème d'Al Kashi :

Soit ABC un triangle. On a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(\hat{B})$
En posant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on obtient :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A})$$



Exercice 15.11
On considère un triangle ABC avec $AB = 4$, $AC = 3$ et $B\hat{A}C = 60°$.
Calculer BC.

Exercice 15.12
Savoir utiliser le théorème d'Al Kashi (ou théorème de Pythagore généralisé)
Soit ABC le triangle tel que $AB = 9$, $BC = 4$ et $AC = 7$.
Calculer une mesure en degré des angles du triangle ABC, arrondie au degré près.