

10.2

Intégrale d'une fonction continue

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

10.2.1 Théorème fondamental

Propriété

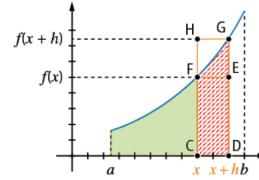
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. La fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a . Autrement dit, $\forall x \in [a; b], F'_a(x) = f(x)$.

Exigible

Soit f une fonction positive et croissante sur $[a, b]$. Soit F_a la fonction définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$. Montrer que $F_a(x)$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Soit $x \in [a, b]$ et h un réel non nul tel que $x + h \in [a; b]$.

On montrera que F_a est dérivable en tout réel $x \in [a; b]$ et que $F'_a(x) = f(x)$, en distinguant $h > 0$ puis $h < 0$.

Cas où $h > 0$

10.2.2 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Exigible

Soit f une fonction positive et croissante sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

Montrer que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, et soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

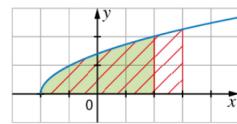
On appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Savoir-Faire 10.44

SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t+2} dt$.

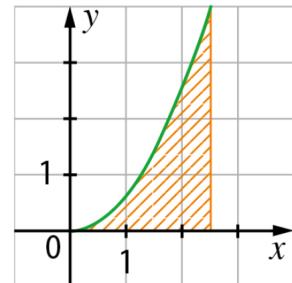


Fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$

1. Donner une interprétation graphique de $F(3)$.
2. Donner une interprétation graphique de $F(2)$.
3. Conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
4. Étudier le sens de variation de F sur $[-2; +\infty[$
5. En déduire que la conjecture est vraie.

Exercice 10.5

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^x t \ln(t+1) dt$.



Fonction $x \mapsto t \ln(t+1)$

1. Donner une interprétation graphique de $F(5)$.
2. Donner une interprétation graphique de $F(4)$.
3. Conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
4. Étudier le sens de variation de F sur $[0; +\infty[$
5. En déduire que la conjecture est vraie.

Exercice 10.6

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2} dt$.

Étudier le sens de variation de F sur $[-1; +\infty[$

Savoir-Faire 10.45

SAVOIR CALCULER UNE INTÉGRALE AVEC UNE PRIMITIVE

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^4 (3x^2 + 4x + 1)dx.$
2. $\int_{-1}^0 e^{3x+1}dx.$
3. $\int_1^\pi \frac{1}{x^2}dx.$

4. a) Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$
 b) En déduire $\int_1^e \ln(x)dx.$

Exercice 10.7

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^3 (x^3 + 4x^2 - 5x + 1)dx$
2. $\int_{-2}^2 (x + 1)^2 dx$
3. $\int_1^e (1 - \frac{1}{x})dx$

Exercice 10.8

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
2. $\int_0^{\ln(2)} (2x + e^x)dx$
3. $\int_1^3 \frac{2}{x}dx$

Exercice 10.9

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x}dx$
2. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$
3. $\int_1^{\ln(3)} e^{4x}dx$

Exercice 10.10

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^0 t^2 e^{t^3} dt$
2. $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1} dt$
3. $\int_0^1 \frac{t}{t^2 + 3} dt$

Exercice 10.11

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^1 (2u + 1)(u^2 + u)^2 du$
2. $\int_0^1 (3u^2 - 5)(u^3 - 5u + 1)^3 du$
3. $\int_1^e \frac{1}{u} \ln(u) du$

Exercice 10.12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$.

1. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de la fonction f sur $]-\infty; +\infty[$
2. En déduire $\int_0^1 xe^x dx.$

Exercice 10.13

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 \ln(x)$.
2. En déduire $\int_1^e x \ln(x) dx$.