Chapitre 6 : Fonctions dérivées

Table des matières

1 Fonctions dérivées

1.1 Exemple

On sait que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout nombre réel a, et que $f'(a) = 2a$.

☛ On dit alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$!

1.2 Définition

Définition 6.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout réel a de I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I On la note f'.

1.3 Fonctions dérivées des fonctions de réference

Propriété 6.1

Fonction usuelle	Ensemble de définition	Ensemble de ***dérivabilité***	***fonction dérivée***
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = x^4$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2 Opérations sur les fonctions dérivées

2.1 Dérivée de (u+v)

Propriété 6.2 (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^3$.
Donner $f'(x)$

2.2 Dérivée de (u-v)

Propriété 6.3 (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u - v)$ est dérivable sur I et $(u - v)' = u' - v'$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^3$.
Donner $f'(x)$

2.3 Dérivée de (ku)

Propriété 6.4 (admise)

Soient u une fonctions définie et dérivable sur un intervalle I, et soit $k \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et $(ku)' = k \times u'$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.
Donner $f'(x)$

2.4 Dérivée de (uv)

Propriété 6.5

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration 6.1

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Montrer que la fonction (uv) est dérivable sur I et que $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1) \times x^3$.
Donner $f'(x)$

2.5 Dérivée de $\frac{1}{v}$

Propriété 6.6 (admise)

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, avec pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\left(\frac{1}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$.
Donner $f'(x)$

2.6 Dérivée de $\frac{u}{v}$

Propriété 6.7 (admise)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$.

Donner $f'(x)$

2.7 Dérivée de $g(ax+b)$

Propriété 6.8 (admise)

Soient a et b deux réels, et I un intervalle.

Soit J l'intervalle constitué de l'ensemble des valeurs de $ax+b$ lorsque x décrit I.

Si g st une fonction dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur I et $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Savoir-Faire 6.1

Savoir calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

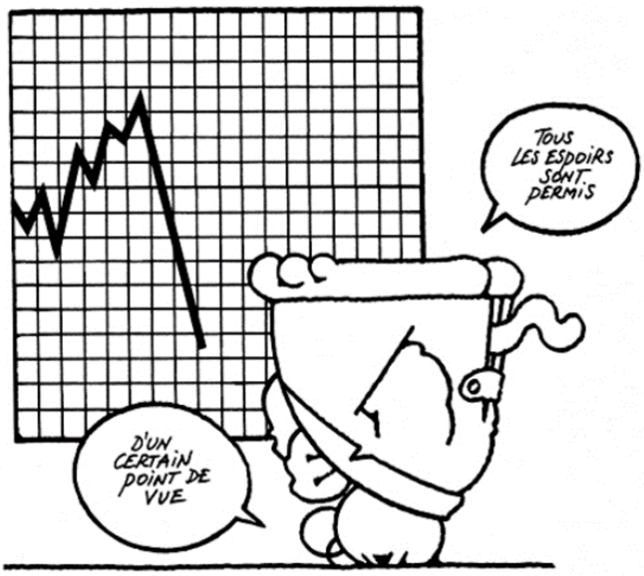
1. $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 5x + 7$
2. $f(x) = (x^2+3x)(x^3-3x^2+7)$
3. $f(x) = x\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3}$
5. $f(x) = \frac{1}{3x^2+9}$
6. $f(x) = \frac{17}{2x^2+1}$
7. $f(x) = \sqrt{2x+3}$
8. $f(x) = \sqrt{-2x+1}$
9. $f(x) = (2x-3)^{15}$

3 Lien entre les variations de f et le signe de f'

Propriété 6.9 (admise)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si la fonction f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si la fonction f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si la fonction f' est nulle sur I.



Savoir-Faire 6.2

Savoir étudier les variations d'une fonction grâce à la dérivation

1. $f(x) = 18x^3 + 12x^2 - 5x + 7$, $I = \mathbb{R}$
   - On calcule $f'(x)$
   - On étudie le signe de $f'(x)$ (au besoin, penser à factoriser)
   - On dresse le tableau de variations (avec le signe de f' et les variations de f.
2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty[$