

3.1

Vecteurs de l'espace

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

3.1.1 Définitions

Définition

Les points A et B étant distincts, le vecteur \overrightarrow{AB} est caractérisé par :

- sa direction
- son sens (de A vers B)
- sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est la longueur AB .

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- D est l'image de C par la translation de vecteurs \overrightarrow{AB} si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Pour tout vecteur \vec{u} et tout point O , il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Remarque

- La translation qui transforme M en lui-même est la translation de vecteur \overrightarrow{MM} . Le vecteur \overrightarrow{MM} est appelé vecteur nul ; on le note $\vec{0}$ ainsi $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

3.1.2 Opérations sur les vecteurs

Définition règle du parallélogramme

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

La somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant \overrightarrow{AD} tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Propriété - Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Définition - Produit d'un vecteur par un réel

Soient \vec{u} un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que le vecteur \vec{u}
- le même sens que \vec{u} si $k > 0$, le sens contraire de \vec{u} si $k < 0$
- pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$

Propriété

Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout réel k : $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$

Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Soit k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

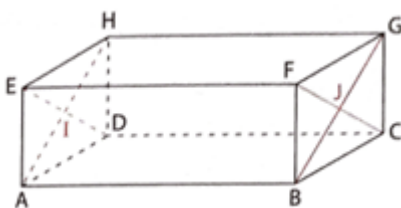
Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. On dit que \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace

Exercice 3.1

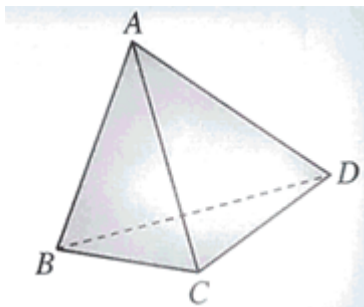


$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

I et J sont les centres respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.

1. Déterminer trois vecteurs de la figure égaux au vecteur \vec{FG}
2. Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur \vec{FJ} ?
3. Compléter l'égalité suivante : $\vec{FC} - \vec{BA} = \vec{E...}$

Exercice 3.2



On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires.

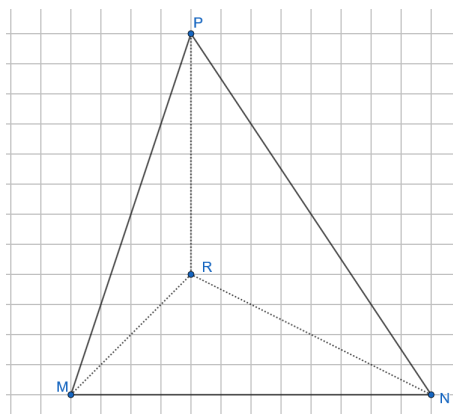
3.1.3 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition

Dire que \vec{u} est une **combinaison linéaire** des vecteurs \vec{v} , \vec{w} et \vec{t} signifie qu'il existe des réels x , y et z tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}$.

Exercice 3.3

REPRÉSENTATION DE COMBINAISONS LINÉAIRES DE VECTEURS

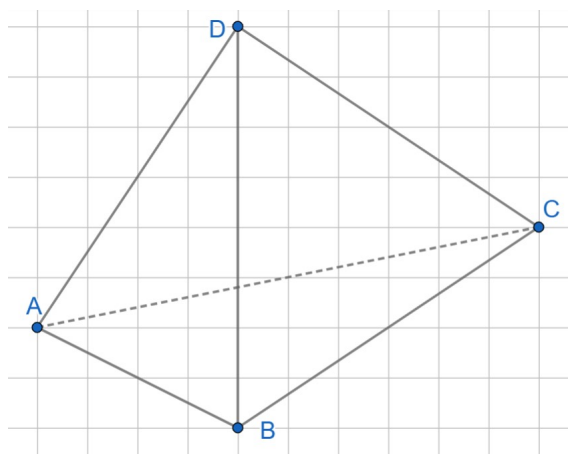


Sur la figure ci-dessus, $MNPR$ est un tétraèdre. S , T et U sont des points de l'espace tels que $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MR} + \frac{1}{4}\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{PT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PU} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PN}$.

1. Recopier la figure
2. Placer, en laissant les traits de construction, les points S , T et U

Savoir-Faire 3.1

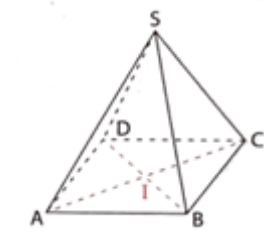
SAVOIR EXPRIMER UN VECTEUR COMME COMBINAISON LINÉAIRE DE VECTEURS



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

1. Recopier la figure, puis placer, sur la figure les points I et J
2. Exprimer \overrightarrow{BJ} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BD}
3. Exprimer \overrightarrow{IB} en fonction de \overrightarrow{AB}
4. En déduire une expression de \overrightarrow{IJ} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD}

Exercice 3.4

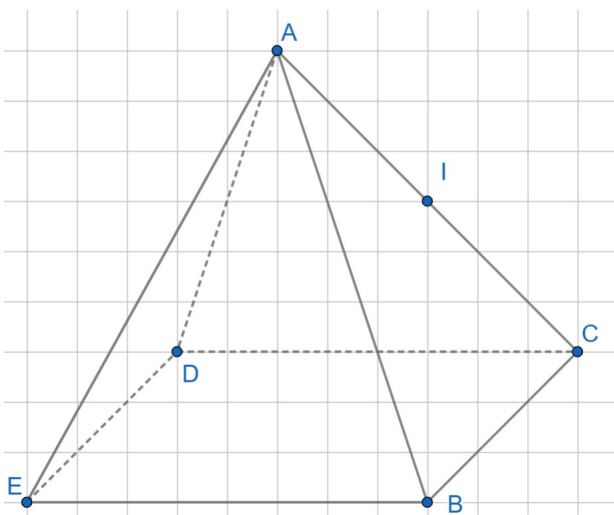


$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme $ABCD$ de centre I .

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ en fonction du vecteur \overrightarrow{SI}
2. En déduire une expression du vecteur \overrightarrow{SI} comme combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BS}

Savoir-Faire 3.2

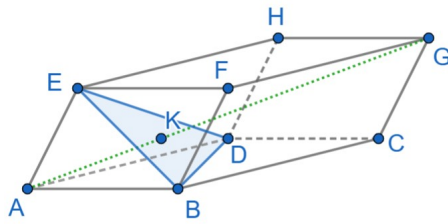
SAVOIR DÉMONTRER UN ALIGNEMENT AVEC LE CALCUL VECTORIEL



Sur la figure ci-contre, $ABCDE$ est une pyramide de sommet A et de base le parallélogramme $BCDE$. On appelle I le milieu de $[AC]$.

1. Recopier la figure, puis placer, sur la figure le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer \overrightarrow{EG} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD}
3. Exprimer \overrightarrow{EI} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD}
4. En déduire que les points E , I et G sont alignés.

Exercice 3.5



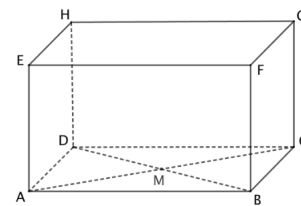
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$
2. a) Exprimer \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE}
 b) En déduire que A , K et G sont alignés.

Exercice 3.6

Dans le parallélépipède rectangle ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.

Exprimer les vecteurs \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{MG} et \overrightarrow{MF} comme combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} .



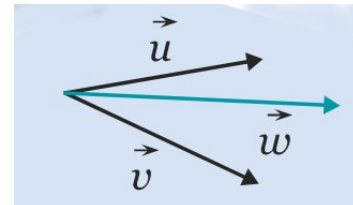
3.1.4 Vecteurs coplanaires

Définition

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace non colinéaires.

Si \vec{w} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , cela signifie qu'il existe des réels a , b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On dit alors que les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires**.



Propriété

- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** s'il existe trois réels a , b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas **coplanaires** si et seulement si l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

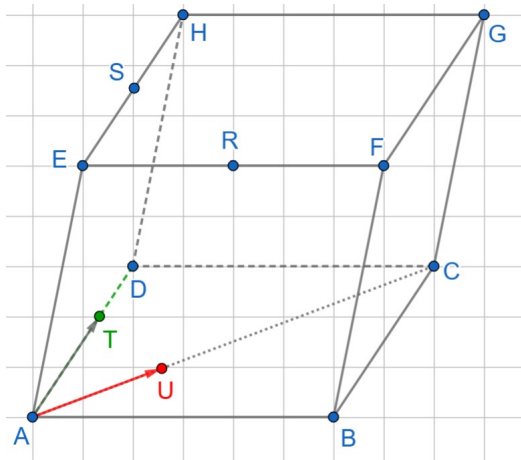
Remarque

- Si deux des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont colinéaires alors ils sont tous trois coplanaires.



Savoir-Faire 3.3

SAVOIR MONTRER QUE DES VECTEURS SONT COPLANAIRES



Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. R est le milieu de $[EF]$ et S le milieu de $[EH]$.

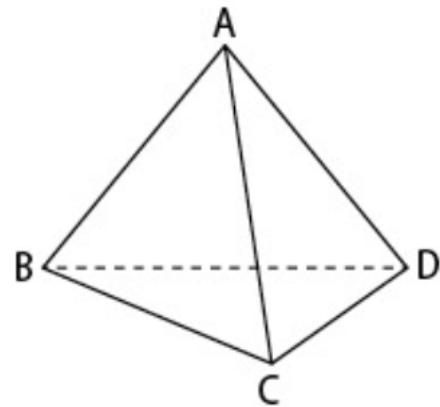
Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Exprimer \overrightarrow{TU} , \overrightarrow{TR} et \overrightarrow{TS} en fonction de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE}
2. Calculer $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$
3. En déduire que les vecteurs \overrightarrow{TU} , \overrightarrow{TR} et \overrightarrow{TS} sont coplanaires.

Exercice 3.7

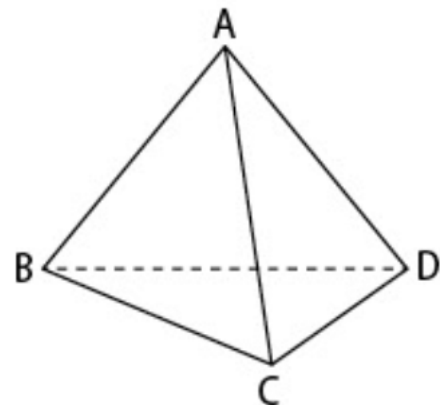
On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB], [AC], [AD]$ et $[CD]$.

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{KL} et \overrightarrow{AB} sont coplanaires.



Exercice 3.8

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre. Le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires.

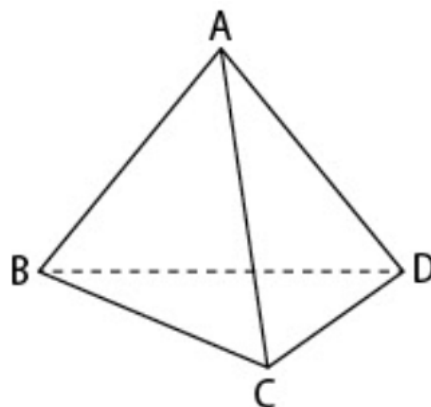


● Exercice 3.9

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.

M, N, P et Q sont définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$,
 $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = -4\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{MQ} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} .
2. Exprimer $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$ en fonction de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} .
3. Que dire des vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{MQ} ?



3.1.5 Vecteurs linéairement indépendants

Définition

Trois vecteurs de l'espace \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont dits **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres

Propriété

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants si et seulement si l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.