

# 5.4

## Limites et comparaison

MATHS SPÉ TERMINALE - JB DUTHOIT

### 5.4.1 Théorèmes de comparaison

#### Propriété Comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de la forme  $]A; +\infty[$ , avec  $A$  désignant un réel ou  $-\infty$ .

- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

#### Remarque

La même propriété est valable pour une limite en  $-\infty$  et en un réel  $a$ .

#### Propriété Comparaison

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de la forme  $]A; +\infty[$ , avec  $A$  désignant un réel ou  $-\infty$ . Soit  $l$  un réel.

- Si pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $g$  et  $h$  ont même limite  $l$  en  $+\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

#### Remarque

La même propriété est valable pour une limite en  $-\infty$  et en un réel  $a$ . Cette propriété est souvent appelée "théorème des gendarmes"



### Savoir-Faire 5.18

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ AVEC LES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \cos(x)/$

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$   
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

#### Exercice 5.26

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 3\cos(x))$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x))$$

### Exercice 5.27

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 2\sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

## 5.4.2 Croissances comparées

### Propriété (Propriété de croissance comparée)

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

### Démonstration 5.8

Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

1. On commence pour  $n = 1$  :

- a) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ . Montrer que la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$
- b) En déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
- c) En déduire  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$

2. Pour  $n \geq 2$

- a) Montrer que  $\forall x \neq 0$ ,  $\frac{e^x}{x^n} = \left( \frac{1}{n} \times \frac{e^{\left(\frac{x}{n}\right)}}{\frac{x}{n}} \right)^n$ .
- b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$

### Savoir-Faire 5.19

SAVOIR CALCULER UNE LIMITÉ AVEC LA CROISSANCE COMPARÉE  
Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$$

### Exercice 5.28

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2x - x^3e^x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x}\right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$$

## Savoir-Faire 5.20

### SAVOIR ÉTUDIER UNE FONCTION

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-2x}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer  $f'(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.29

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3 + xe^{1-x}$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 3 + \frac{xe}{e^x}$   
b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.30

On considère une population de lapins. Cette population de lapins, exprimées en centaines d'individus, est modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{3e^{0.5t}}{e^{0.5t} + 2}$ , où  $t$  représente le temps écoulé en années depuis 2015.



1. Calculer  $f(0)$  et interpréter ce résultat
2. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$
3. Montrer que pour tout réel  $t$  dans  $[0; +\infty[,$  on a  $f'(t) = \frac{3e^{0.5t}}{(e^{0.5t} + 2)^2}.$
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[.$
5. Compléter le code suivant afin que la fonction `lapin()` renvoie l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 lapins.

```
from math import *
def lapin():
    t = 0
    p = 1
    while .....:
        t = t + 1
        p = .....
    return .....
```