# 3.2 Droites et plans de l'espace

Maths Spé terminale - JB Duthoit

## 3.2.1 Règles d'incidence

**Propriété**

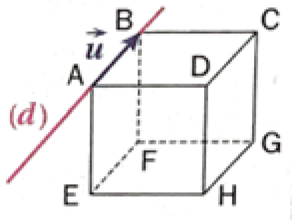
- Par deux points de l'espace, il passe une unique droite
- Par trois points non alignés, il passe un unique plan
- Si deux points distincts $A$ et $B$ appartiennent à un plan $P$ alors la droite $(AB)$ est incluse dans le plan $P$
- Dans chaque plan de l'espace, toute les règles de la géométrie plane s'appliquent.

## 3.2.2 Caractérisation vectorielle d'une droite

**Définition**

Une droite de l'espace est définie :

- soit par la donnée de deux points distincts
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul




**Propriété - Caractérisation d'une droite de l'espace**

La droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

**Remarque**

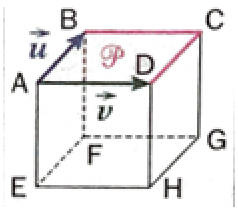
une droite possède une infinité de vecteurs directeurs

## 3.2.3 Caractérisation vectorielle d'un plan

**Définition**

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignées. Le plan s'écrit alors $(ABC)$
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires. Le plan s'écrit alors $(A, \vec{u}, \vec{v})$



### Définition

On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** du plan $P$. Le couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé **direction** de $P$.

### Propriété - Caractérisation d'un plan de l'espace

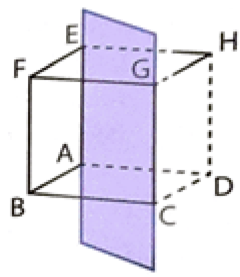
Le plan défini par le point $A$ et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .

### Remarque

- Par trois points de l'espace, non alignés, passe un unique plan.
- Le plan $(ABC)$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ où $x$ et $y$ sont des réels. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont alors des vecteurs directeurs du plan $(ABC)$
- Un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs

**Exercice 3.40**

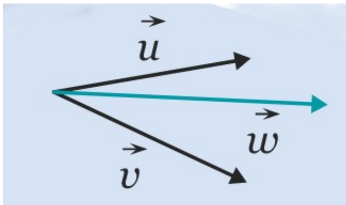
Dans un cube $ABCDEFGH$, donner une caractérisation du plan $(CEG)$ à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires puis justifier que le point $A$ appartient à ce plan.




## 3.2.4 Vecteurs coplanaires

### Définition

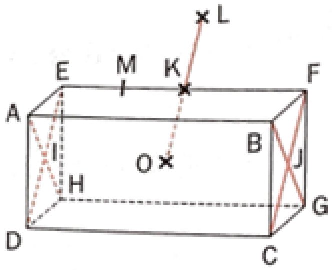
Soit $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace non colinéaires.
Si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ , cela signifie qu'il existe des réels $x$, $y$ tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que les trois vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** .




### Remarque

- Si deux des vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont colinéaires alors ils sont tous trois coplanaires.
- Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires mais deux droites ne le sont pas toujours.

**Exercice 3.41**

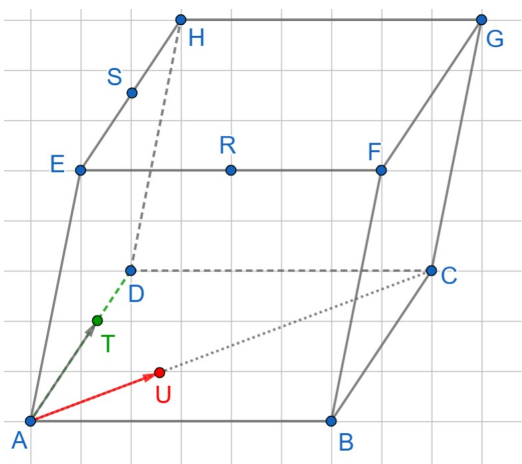



$ABCDEFGH$ est un pavé droit de centre $O$. $I$ et $J$ sont les centres respectifs des faces $AEHD$ et $BFGC$. $K$ est le milieu de $[EF]$ et $M$ celui de $[EK]$. $L$ est le symétrique de $O$ par rapport à $K$.

1. Montrer que les points $I$, $M$ et $L$ sont alignés
2. Montrer qu'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{JF} + b\overrightarrow{CI}$.
3. Que peut-on en conclure sur les vecteurs $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{JF}$ ?
4. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont coplanaires.
5. Conclure sur la position des points $C$, $I$, $L$ et $J$.

## Savoir-Faire 3.10

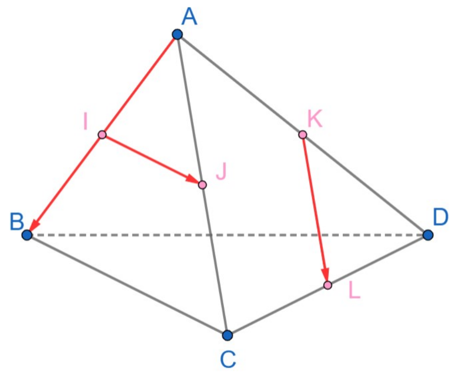
### Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires




Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. $R$ est le milieu de $[EF]$ et $S$ le milieu de $[EH]$.
Les points $T$ et $U$ sont définis par $\overrightarrow{AT} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Exprimer $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Calculer $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.
4. Que peut-on en déduire pour les points $T$, $R$, $U$ et $S$ ?

**Exercice 3.42**




On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre. $I$,$J$,$K$ et $L$ sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Justifier que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$