11.3 Définir les combinaisons

Maths Spé terminale - JB Duthoit

11.3.1 Combinaisons d'éléments d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. p et n sont des entiers naturels avec $p \leq n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments

Exemple

Si $E = \{bleu; rouge : orange : noir, vert\}$ alors les ensembles $\{bleu; noir; vert\}$ et $\{noir; orange, bleu\}$ sont deux combinaisons de 3 éléments de E.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n éléments de E , noté $\binom{n}{p}$ est
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\binom{n}{p}$ est appelé **coefficient binomial** et se lit "p parmi n".

Remarque

- Par convention, si $p > n$ on décide que $\binom{n}{p} = 0$
- Si $p = 0$ alors $\binom{n}{0} = 1$ (le seul sous-ensemble de E ayant 0 élément est $\emptyset$)
- Si $p = 1$ alors $\binom{n}{1} = n$ (il existe exactement n sous-ensembles de E ayant un seul élément)
- Si $p = 2$ alors $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Si $p = n$ alors $\binom{n}{n} = 1$

Savoir-Faire 11.55

Savoir calculer des combinaisons

1. Calculer $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$
2. Calculer $\binom{5}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 5$
3. Utiliser la calculatrice pour calculer $\binom{20}{12}$

Savoir-Faire 11.56

Savoir utiliser des combinaisons pour dénombrer

1. On dispose d'un jeu de 32 cartes.
   a) Combien de mains de 4 cartes peut-on former ?
   b) On tire simultanément 4 cartes, quelle est la probabilité d'avoir 4 as ?
2. Dix amis veulent composer 2 équipes de 5 pour jouer au jorki. Parmi ces amis, il y a Hugo et Kilian
   a) Combien d'équipes peut-on former comportant Hugo et Kilian ?
   b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité que Hugo et Kilian soient ensemble (arrondir à 0.01 près) ?

Démonstration 19- Exigible -

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

- Par le calcul
- Par le dénombrement, la combinatoire

Exercice 11.14

1. Au début d'une partie de belote, on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main". Combien existe-t-il de mains différentes possibles ?
2. Neuf amis souhaitent constituer une équipe de volley-ball de plage de 4 joueurs.
   a) Combien d'équipes différentes peuvent-ils constituer ?
   b) Parmi les neuf amis, Hector ne veut pas participer à la partie. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Hector ?
   c) On sait de plus que Nadia souhaite absolument participer. Combien d'équipes différentes comprenant Nadia peut-on constituer ?
3. Olivia a installé 10 jeux sur sa console : 5 jeux d'aventure, 3 jeux de course de voitures et 2 jeux sportifs. On s'intéresse ici aux groupes de 5 jeux différents qu'Olivia choisit chaque week-end.
   - Parmi combien de groupes de 5 jeux effectue-t-elle son choix chaque week-end ?
   - Combien de ces groupes comportent exactement 2 jeux de course de voitures ?
   - Combien de ces groupes comportent au moins un jeu d'aventure ?

11.3.2 Triangle de Pascal

Propriété

- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- **Relation de Pascal** : pour tout $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Démonstration 20- Exigible -

Montrer que pour tout $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

- Par le calcul
- Par le dénombrement, la combinatoire

Remarque

- La relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ traduit le fait que choisir p objets parmi n revient à choisir les $n-p$ objets qu'on ne prend pas.
- La relation de Pascal permet de calculer les coefficients $\binom{n}{p}$ de proche en proche, sous la forme du tableau triangulaire ci-dessous. Le coefficient $\binom{n}{p}$ s'obtient en faisant la somme du coefficient $\binom{n-1}{p}$ placé juste au-dessus et du coefficient $\binom{n-1}{p-1}$ situé à gauche de ce dernier.

n \ k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration 21- -

Savoir-Faire 11.57

Savoir utiliser le triangle de Pascal pour calculer une combinaison

Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes : $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$ et $\binom{6}{4}$

Exercice 11.15

On sait que $\binom{7}{1} = 7$ et $\binom{7}{2} = 21$. En déduire la valeur de $\binom{8}{2}$ et de $\binom{8}{6} = 7$

Savoir-Faire 11.58

Savoir effectuer des dénombrements simples

⚠ La difficulté réside ici dans le fait de déterminer s'il s'agit de k-uplets ou de combinaisons !

1. Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments (appelés allèles) de l'ensemble $E = \{A, B, O\}$.
   a) Combien de couples d'allèles sont possibles ?
   b) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents, l'ordre ne comptant pas (par exemple le couple d'allèle (A,B) donne le même code que le couple d'allèle (B,A)). Déterminer le nombre d'hétérozygote pour le groupe sanguin.
   c) On appelle homozygote un gène qui contient les mêmes allèles, et on appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Déterminer le nombre de génotypes sanguins.
2. Pour accéder à un compte sur Internet, un utilisateur doit saisir un mot de passe contenant 2 lettres et 3 chiffres. Dans chaque cas, déterminer le nombre de mots de passe :
   a) Le mot de passe commence par les deux lettres
   b) Le mot de passe commence par les deux lettres et les caractères sont tous différents.

Exercice 11.16

1. En première générale, il y a 12 spécialités possibles, et chaque élève doit en choisir 3. Combien de triplettes possibles y a-t-il ?
2. En terminale, les élèves doivent garder 2 spécialités sur les 3. Combien s'offre alors à un élève de première qui arrive en terminale ?
3. a) Un parcours est constitué d'une triplette de spécialités choisie en première et d'une doublette de spécialité conservées en terminale. Combien y a-t-il de parcours différents ?
   b) Coline a choisi les maths en première et en terminale. Combien de parcours correspondent à ce choix ?

Exercice 11.17

1. Marylène possède 5 jeans et 7 tee-shirts. Elle part en vacances et décide d'emmener 2 jeans et 3 tee-shirts. Déterminer le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et tee-shirts.
2. Son mari possède quant à lui 10 jeans, 13 tee-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 8 jeans, 10 tee-shirts et 4 paires de chaussures. Combien de manières a-t-il pour remplir sa voiture ?

Exercice 11.18

Une commune d'Espagne s'appelle ANANA. A l'aide d'un arbre, vérifier qu'il y a 10 anagrammes du mot ANANA. Retrouver ce résultat en utilisant des combinaisons.

Exercice 11.19

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 "couleurs" différentes : trèfle, carreau, coeur et pique. Pour chaque couleur, il y a 8 "valeurs" différentes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire simultanément 6 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien de tirages différents contiennent les 4 as ?
3. On exprimera les probabilités suivantes en arrondissant à 0.01 % près.
   a) Déterminer la probabilité d'avoir les 4 As lors d'un tirage
   b) Déterminer la probabilité d'avoir 2 cartes piques et 4 cartes coeurs.
   c) Déterminer la probabilité de n'avoir aucune carte coeur et aucune carte Valet.

Exercice 11.20

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement 6 boules de l'urne sans remise.
   a) Combien y a-t-il de tirages différents
   b) Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?
2. Une boîte comporte 6 compartiments numérotés de 1 à 6. On place 6 boules au hasard, une par compartiment. On dit qu'une boule est dans son compartiment si elle est placée dans le comportement qui porte le même numéro qu'elle. Quelle est la probabilité pour que 4 boules soient dans son compartiment ?
3. Soit k un entier naturel non nul. On effectue k tirages successifs d'une boule avec remise. Les tirages sont supposés équiprobables.
   a) Déterminer la probabilité p_k de tirer au moins une fois 1 boule qui porte le numéro 6.
   b) Recopier et compléter le programme python ci-dessous afin qu'il retourne le premier entier k tel que $p_k > 0.9$

```python
def nombre_tirages():
  k = 1
  p = 1 - (5 / 6) ** k
  while ... :
    k = ...
    p = ...
  return ...
```