Funkcje ciągłe i różniczkowalne

Jakub Bełcik

14 grudnia 2010

Spis treści

1 Funkcje ciągłe

Definicja 1.1. (funkcja ciągła). Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, oraz niech $x_0 \in (a, b)$. Mówimy, że instrukcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall x \in (a, b)|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Przykład 1.2. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład 1.3. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Jest ciągła w każdym punkcie poza $x_0 = 0$.
Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Przykład 1.4. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 1.5. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale nie jest ciągła w pozostałych punktach dziedziny.

Zadanie 1. Udowodnij prawdziwość podanych przykładów.

Definicja 1.6. Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny A to mówimy krótko, że jest ciągła.

Poniższe twierdzenie zbiera podstawowe własności zbioru funkcji ciągłych.

Twierdzenie 1.7. *Niech funkcje $f, g : R \to \mathbb{R}$ będą ciągłe, oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje:*

a) $h_1(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$,

b) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$,

c) $h_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(o ile $g(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$),*

d) $h_4(x) = f(g(x))$,

Są ciągłe.

Nie chciało mi się tego przepisywać to wkleiłem jakiś tekst o bobrach z google.pl... We wczesnym średniowieczu bóbr europejski (Castor fiber L.) zamieszkiwał licznie całą Europę i Azję od strefy stepów po tundrę. Jednak w początkach wieku XX przetrwało jedynie osiem małych populacji gromadzących w sumie ok. 1200 osobników. Gatunek stanął w obliczu groźby wyginięcia. W większości krajów zniknęły wraz z wiekiem XIX.

Twierdzenie 1.8. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła, oraz niech $f(a) \neq f(b)$. Wtedy dla dowolnego $y_0 \in conv\{f(a), f(b)\}$ istnieje $x_0 \in [a, b]$ takie, że $f(x_0) = y_0$.*

2 Różniczkowalność

Definicja 2.1. Niech $F : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ oraz f ciągła w otoczeniu punktu x_0. Jeśli istnieje granica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

I jest skończona, to oznaczamy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 2.2. Jeśli funkcja f posiada pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy, że f jest różniczkowalna. Istnieje wtedy funkcja f', która każdemu punktowi z dziedziny funkcji f przyporządkowuje wartość pochodnej pochodnej funkcji f w tym punkcie.

Przykład 2.3. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne są różniczkowalne w każdym punkcie dziedziny.

Przykład 2.4. Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie posiada pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

Twierdzenie 2.5. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna na (a,b). Dodatkowo niech $f'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, oraz niech $m = min_{x\in[a,b]} f(x), M = max_{x\in[a,b]} f(x)$. Wtedy na pewno $f(a) = m, f(b) = M$ lub $f(a) = M$ i $f(b) = m$.*