1- La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sea $x_1(t)$ & $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = A e^{-jnw_0t}$$

$$x_2(t) = B e^{jmw_0t}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ & $n, m \in \mathbb{Z}$.

Determine la distancia entre las 2 señales.
Compruebe sus resultados con Python

R=/ Nos dicen que la distancia media entre las 2 señales es:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Esto es igual a la Potencia del error, la cual sabemos que es:

$$\bar{P}_e = \bar{P}_{x_1} - \frac{2}{T}\int_T x_1(t)\, x_2^*(t)\, dt + \bar{P}_{x_2}$$

Luego es sencillo calcular cada una por aparte:

$$\overline{P}_{x1} = \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jnw_0t})(Ae^{-jnw_0t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T A^2 e^{-jnw_0t} e^{jnw_0t} dt = \frac{1}{T}\int_T A^2 e^0 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} = \frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{A^2 T}{T} = \underline{\underline{A^2}}$$

$$\overline{P}_{x_2} = \frac{1}{T}\int_T (Be^{jmw_0t})(Be^{jmw_0t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T B^2 e^{jmw_0t - jmw_0t} dt = \frac{1}{T} B^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt$$

$$\frac{B^2}{T}\left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = \underline{\underline{B^2}}$$

$$-\frac{2}{T}\int_T (Ae^{-jnw_0t})(Be^{jmw_0t})^* dt = -\frac{2}{T}\int_T AB e^{-jnw_0t} e^{-jmw_0t} dt$$

$$= -\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(n+m)} dt$$

Hay 2 casos posibles:

Caso 1: $n = -m$

Luego

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(n+m)} dt = -\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(n-n)} dt$$

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(0)}\,dt = -\frac{2AB}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) = -\frac{2AB}{T}[T] = -2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

Luego

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(n+m)}\,dt = -\frac{2AB}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-jw_0t(n+m)}\,dt$$

$$-\frac{2AB}{T}\left(\frac{e^{-jw_0t(n+m)}}{-jw_0(n+m)}\right)\Bigg|_{-T/2}^{t=T/2} =$$

$$-\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(w_0t(n+m)) - j\,\mathrm{Sen}(w_0t(n+m))}{-jw_0(n+m)}\right]\Bigg|_{t=-T/2}^{t=T/2} =$$

Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$ luego

$n+m = p \rightarrow p \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - j\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right) + j\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right)}{-jw_0p}\right]$$

Powered by CamScanner

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p) - \cos(-\pi p) + j\,\mathrm{Sen}(-\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

Como coseno es par luego

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

Entonces

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(\pi p) - \cos(\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p) + j\,\mathrm{Sen}(-\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{j\,\mathrm{Sen}(-\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

Por su parte $\mathrm{Sen}(\pi p)$ $p \in \mathbb{Z}$ es igual a 0 por definición y circulo unitario entonces

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{0}{-j\frac{2\pi}{T}p}\right] = 0$$

De esta forma $\bar{P}_e$ para estas 2 señales tiene 2 valores posibles

Caso 1: $n = -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2 - 2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

$\bar{P_e} = A^2 + B^2$

El problema nos dice que

$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \bar{P_e}$

Luego

$d^2(x_1, x_2) = \bar{P_e}$

Entonces

$d(x_1, x_2) = \sqrt{\bar{P_e}}$

Así que si $n = -m$

$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$

Y si $n \neq -m$

$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2}$

2- Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua?

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar la simulación del proceso de discretización incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$. En caso de que la discretización no sea adecuada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

R=/ Para discretizar una señal se nos enseñó en clase que para $x(t)$ debemos hacer $t = nT_s$ donde T_s es el periodo de muestreo y se halla

$$T_s = \frac{1}{F_s} \rightarrow \text{Frecuencia de muestreo}$$

En nuestro caso

$$T_s = \frac{1}{5000\,Hz} = 0{,}2 * 10^{-3} = 0{,}0002$$

Luego

$$x(nT_s) = 3\cos(1000\pi(0{,}0002\,n)) + 5\sin(3000\pi(0{,}0002\,n))$$
$$+ 10\cos(11000\pi(0{,}0002\,n))$$

$$x(n) = 3\cos(0{,}2\pi n) + 5\sin(0{,}6\pi n)$$
$$+ 10\cos(2{,}2\pi n)$$

Lo que acompaña a nuestra nueva variable discreta n podemos llamarlo Ω y según lo visto en clase

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi$$

En este caso hay un Ω que no cumple con esto, para que lo cumpla le restamos 2π ya que si no estamos viendo la copia

$$2{,}2\pi - 2\pi = 0{,}2\pi$$

Para obtener este Ω originalmente lo que se hizo fue

$$wTs = 0{,}2\pi \longrightarrow 2\pi f = \frac{0{,}2\pi}{Ts}$$

$$f = \frac{0{,}2\pi Fs}{2\pi} = 0{,}1 * 5000Hz = 500Hz$$

Mientras que la frecuencia original de esa señal era

$$2\pi f = 11000\pi \longrightarrow f = 5500Hz$$

Es decir que de los 5500Hz solo estamos viendo 500Hz, esto pasa por que no se cumple Nyquist ya que

$f_{max} = 5500$ y $Fs = 5000Hz$

$$F_s < 2 f_{max}$$

Para solucionar este problema es ideal que el conversor cumple Nyquist, así que esto se implementa en Python

Ahora bien, para digitalizar se dice que se tienen 4 bits, esto corresponde a:

$2^4 = 16$ estados posibles

Si las 3 señales se llegan a coordinar al llegar a su máxima amplitud, lo máximo que llegarán es a 18 ya que $10+5+3=18$ y por consiguiente la Amplitud pico a pico de la señal es: 36, así que los saltos serán de

$$\frac{36}{16} = 2,25$$

Todo lo demás es programado en Python

3- Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n & b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de

Fourier ?

R=/ Si utilizamos todos los armónicos

$$x(t) = \sum C_n e^{jnw_0t}$$

Luego si derivamos una vez

$$x'(t) = \sum C_n e^{jnw_0t} (jnw_0)$$

Y al derivar la segunda vez

$$x''(t) = \sum C_n e^{jnw_0t} (jnw_0)^2$$

$$= \sum C_n e^{jnw_0t} j^2 n^2 w_0^2$$

$$= \sum \underbrace{(-C_n n^2 w_0^2)}_{} e^{jnw_0t}$$

A esto lo podemos llamar $\tilde{C_n}$
y lo podemos calcular:

$$\tilde{C_n} = \frac{1}{T}\int_T x''(t) e^{-jnw_0t} dt$$

Luego

$$-C_n n^2 w_0^2 = \frac{1}{T}\int_T x''(t) e^{-jnw_0t} dt$$

$$C_n = \frac{-1}{T n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt$$

Pero $T = (t_f - t_i)$ luego

$$C_n = -\frac{1}{(t_f - t_i)\, n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt \quad //$$

Esta no es la única forma de reconstruir la señal, hay otra la cual es:

$$x(t) = \sum a_n \operatorname{Cos}(nw_0 t) + b_n \operatorname{Sen}(nw_0 t)$$

Si la derivamos se obtiene:

$$x'(t) = \sum -a_n \operatorname{Sen}(nw_0 t)\, nw_0 + b_n \operatorname{Cos}(nw_0 t)\, nw_0$$

Y su segunda derivada es:

$$x''(t) = \sum \underbrace{-n^2 w_0^2 a_n}_{\tilde{a}_n} \operatorname{Cos}(nw_0 t) \underbrace{-n^2 w_0^2 b_n}_{\tilde{b}_n} \operatorname{Sen}(nw_0 t)$$

Otra vez, nombramos un $\tilde{a}_n$ y $\tilde{b}_n$ que por definición se calcula:

$$\tilde{a_n} = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

$$-n^2 w_0^2 a_n = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

$$a_n = -\frac{2}{(t_f-t_i)n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{(t_i-t_f)n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

Y para $\tilde{b_n}$:

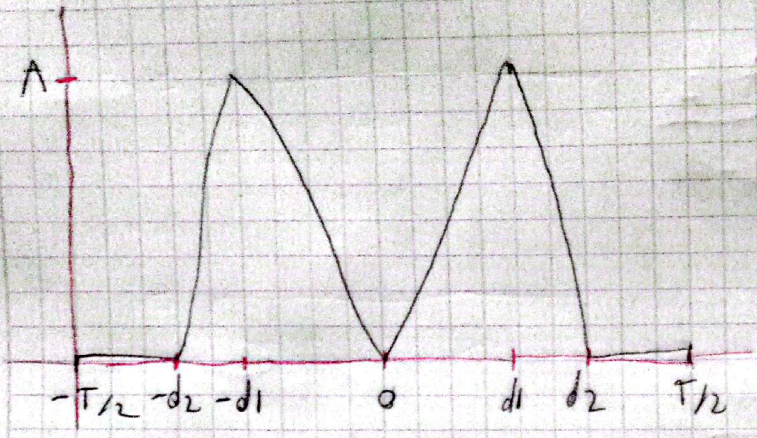
$$\tilde{b_n} = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\,\text{Sen}(n w_0 t)\,dt$$

$$-n^2 w_0^2 b_n = \frac{2}{(t_f-t_i)}\int_T x''(t)\,\text{Sen}(n w_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_i-t_f)n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\,\text{Sen}(n w_0 t)\,dt$$

4- Encuentra el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de

$x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la figura 1.
Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



R=/ Para empezar definimos a $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t \leq -d_2 & x(t) = 0 \quad \text{Tramo 1} \\ -d_2 \leq t \leq -d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 2} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 3} \\ 0 \leq t \leq d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 4} \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 5} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x(t) = 0 \quad \text{Tramo 6} \end{cases}$$

Ahora sacamos la ecuación de todas las rectas lineales así:

Tramo 2:

$$m = \frac{0 - A}{-d_2 - (-d_1)} = \frac{-A}{d_1 - d_2} = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$b = y - mt = 0 - \frac{A(-d_2)}{d_2 - d_1}$$

$$b = \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

$$x(t) = \frac{A\,t}{d_2 - d_1} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

Tramo 3:

$$m = \frac{A - 0}{-d_1 - 0} = -\frac{A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{-A}{d_1}(0) = 0$$

$$x(t) = -\frac{A\,t}{d_1}$$

Tramo 4:

$$m = \frac{0 - A}{0 - d_1} = \frac{A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{A}{d_1}(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{A\,t}{d_1}$$

Tenemos:

$$m = \frac{A - 0}{d_1 - d_2} = \frac{A}{d_1 - d_2}$$

$$b = 0 - \frac{A(d_2)}{d_1 - d_2} = \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

$$x(t) = \frac{A}{d_1 - d_2} t + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

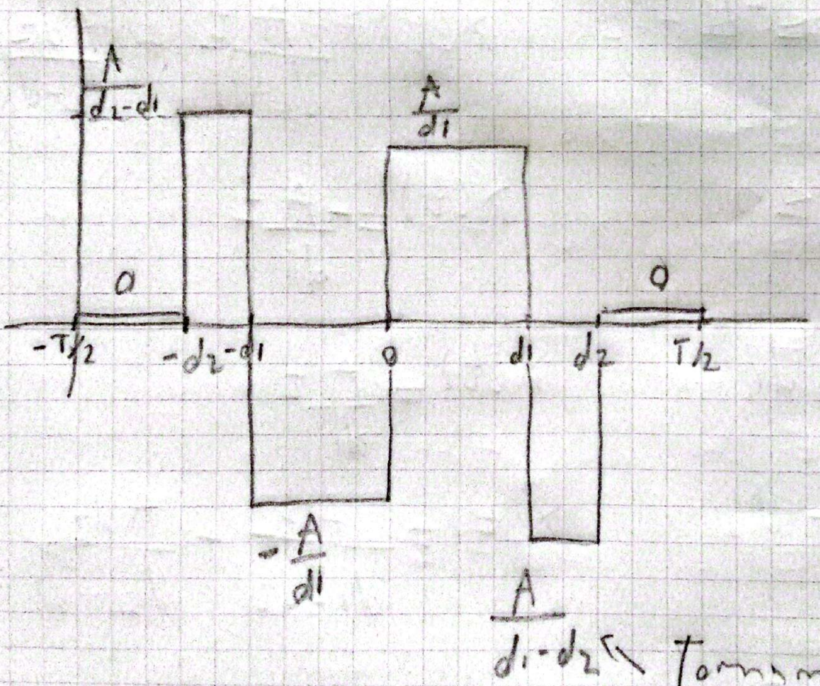
Así la definición por tramos de $x(t)$ es:

$$x(t) \begin{cases} -T/2 \leq t \leq -d_2 & x(t) = 0 \\ -d_2 \leq t \leq -d_1 & x(t) = \frac{At}{d_2 - d_1} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x(t) = -\frac{A}{d_1} t \\ 0 \leq t \leq d_1 & x(t) = \frac{A}{d_1} t \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x(t) = \frac{At}{d_1 - d_2} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x(t) = 0 \end{cases}$$

Ahora la primera derivada de $x(t)$ también se define a trozos así:

$$x'(t)\begin{cases} -T/2 < t < -d_2 & x'(t) = 0 \\ -d_2 < t < -d_1 & x'(t) = \dfrac{A}{d_2-d_1} \\ -d_1 < t < 0 & x'(t) = -\dfrac{A}{d_1} \\ 0 < t < d_1 & x'(t) = \dfrac{A}{d_1} \\ d_1 < t < d_2 & x'(t) = \dfrac{A}{d_1-d_2} \\ d_2 < t < T/2 & x'(t) = 0 \end{cases}$$

Lo cual gráficamente luce:



Tomamos esta área abajo ya que esta recta es decreciente, luego su pendiente es negativa

Nótese que en esta definición los puntos $-d_2, -d_1, 0, d_1, d_2$ no se incluyen, ya que en estos puntos la curva no es suave, por lo cual su derivada no está definida, luego la segunda derivada de $x(t)$ así también definida a trozos así:

$$
x''(t)\begin{cases}
-T/2 \leq t < -d_2 & x''(t) = 0 \\[2ex]
t = -d_2 & x''(t) = \dfrac{A}{d_2-d_1}\,\delta(t+d_2) \\[2ex]
-d_2 < t < -d_1 & x''(t) = 0 \\[2ex]
t = -d_1 & x''(t) = \left(-\dfrac{A}{d_2-d_1} - \dfrac{A}{d_1}\right)\delta(t+d_1) \\[2ex]
-d_1 < t < 0 & x''(t) = 0 \\[2ex]
t = 0 & x''(t) = \dfrac{2A}{d_1}\,\delta(t) \\[2ex]
0 < t < d_1 & x''(t) = 0 \\[2ex]
t = d_1 & x''(t) = \left(-\dfrac{A}{d_1} + \dfrac{A}{d_1-d_2}\right)\delta(t-d_1) \\[2ex]
d_1 < t < d_2 & x''(t) = 0 \\[2ex]
t = d_2 & x''(t) = \dfrac{A}{d_2-d_1}\,\delta(t-d_2)
\end{cases}
$$

$d_2 < t \leq T/2 \qquad x''(t) = 0$

Para esta segunda derivada se usaron deltas de Dirac ya que estas representan cambios bruscos en un instante, las cuales se multiplican por la magnitud de los cambios

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 \omega_0^2} \left\{ \int_T \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t + d_2) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \right.$$

$$+ \int_T \left(-\frac{A}{d_2 - d_1} - \frac{A}{d_1} \right) \delta(t + d_1) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$+ \int_T \frac{2A}{d_1} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt + \int_T \left(-\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_1 - d_2} \right) \delta(t - d_1) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$\left. + \int_T \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t - d_2) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \right\}$$

Las integrales pueden evaluarse en un intervalo de $(-\infty, \infty)$ sin que tengan ningún cambio ya que al multiplicarse por la delta de Dirac solo tendrán un cambio en un solo punto, mientras para el resto del dominio valdrán 0 con lo que nos es posible aplicar propiedades y obtener:

$$C_n = \frac{1}{-T n^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \left\{ \frac{A}{d_2-d_1} e^{jnw_0 d_2} - \frac{A}{d_2-d_1} e^{jnw_0 d_1} \right.$$

$$- \frac{A}{d_1} e^{jnw_0 d_1} + \frac{2A}{d_1} e^0 - \frac{A}{d_1} e^{-jnw_0 d_1} - \frac{A}{d_2-d_1} e^{-jnw_0 d_1}$$

$$\left. + \frac{A}{d_2-d_1} e^{-jnw_0 d_2} \right\}$$

$$= - \frac{TA\, e^{jnw_0 d_2}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{TA e^{jnw_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA e^{jnw_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} + \frac{TA e^{-jnw_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+ \frac{TA e^{-jnw_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} - \frac{TA e^{-jnw_0 d_2}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$= - \frac{TA \operatorname{Cos}(nw_0 d_2)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} - \frac{jTA \operatorname{Sen}(nw_0 d_2)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA \operatorname{Cos}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{jTA \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA \operatorname{Cos}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} + \frac{jTA \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+ \frac{TA \operatorname{Cos}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{jTA \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+\frac{TA\cos(n w_0 d_1)}{4\pi^2 n^2(d_2-d_1)}-\frac{jTA\operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{4\pi^2 n^2(d_2-d_1)}$$

$$-\frac{TA\cos(n w_0 d_2)}{4\pi^2 n^2(d_2-d_1)}+\frac{jTA\operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{4\pi^2 n^2(d_2-d_1)}$$

$$=-\frac{TA\cos(n w_0 d_2)}{2\pi^2 n^2(d_2-d_1)}+\frac{TA\cos(n w_0 d_1)}{2\pi^2 n^2(d_2-d_1)}$$

$$+\frac{TA\cos(n w_0 d_1)}{2\pi^2 n^2 d_1}-\frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1}=C_n$$

Con este calculo nos es posible decir que el espectro de Fourier de nuestra señal es puramente real, luego no tiene parte imaginaria y si la magnitud viene dada por:

$$|C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

Y al no tener parte imaginaria $b_n=0$ luego

$$|C_n|=\frac{\sqrt{a_n^2}}{2}=\frac{|a_n|}{2}=\frac{|2\operatorname{Re}\{C_n\}|}{2}$$

O podemos decir sencillamente que la magnitud de nuestra señal es

$$|c_n| = \left| -\frac{TA\cos(n w_0 d_2)}{2\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{TA\cos(n w_0 d_1)}{2\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{TA\cos(n w_0 d_1)}{2\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} \right|$$

Mientras que el ángulo será

0 si $a_n > 0$

π si $a_n < 0$

Indefinido si $a_n = 0$

El error se calcula mediante Python

Comprobación con la estimación a partir de $x(t)$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jnw_0t}\,dt = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{At}{d_2-d_1} e^{-jnw_0t}\,dt \right.$$

$$+ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{Ad_2}{d_2-d_1} e^{-jnw_0t}\,dt + \int_{-d_1}^{0} -\frac{A}{d_1} t e^{-jnw_0t}\,dt$$

$$+ \int_0^{d_1} \frac{A}{d_1} t e^{-jnw_0t}\,dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{At}{d_1-d_2} e^{-jnw_0t}\,dt$$

$$\left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{Ad_2}{d_2-d_1} e^{-jnw_0t}\,dt \right\} =$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{At}{d_2-d_1}\,dt + \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{Ad_2}{d_2-d_1}\,dt \right.$$

$$+ \int_{-d_1}^{0} -\frac{A}{d_1}t\,dt + \int_{0}^{d_1} \frac{A}{d_1}t\,dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{At}{d_1-d_2}\,dt$$

$$\left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{Ad_2}{d_2-d_1}\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{At^2}{2(d_2-d_1)}\bigg|_{-d_2}^{t=-d_1} + \frac{Ad_2t}{d_2-d_1}\bigg|_{-d_2}^{t=-d_1} \right.$$

$$+ \left(-\frac{At^2}{2d_1}\right)\bigg|_{-d_1}^{t=0} + \left(\frac{At^2}{2d_1}\right)\bigg|_{0}^{t=d_1} + \left(\frac{At^2}{2(d_1-d_2)}\right)\bigg|_{d_1}^{t=d_2}$$

$$\left. + \frac{Ad_2t}{d_2-d_1}\bigg|_{d_1}^{t=d_2} \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{A(-d_1-(-d_2))^2}{2(d_2-d_1)} + \frac{Ad_2(-d_1-(-d_2))}{d_2-d_1} \right.$$

$$- \frac{A(0-(-d_1))^2}{2d_1} + \frac{A(d_1-0)^2}{2d_1} - \left(\frac{A(d_2-d_1)^2}{2(d_2-d_1)}\right)$$

$$\left. + \frac{Ad_2(d_2-d_1)}{d_2-d_1} \right\}$$

Powered by CamScanner