1- La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sean $x_1(t)$ & $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = A e^{-jn w_0 t}$$

$$x_2(t) = B e^{jm w_0 t}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ & $n, m \in \mathbb{Z}$.

Determine la distancia entre las 2 señales. Compruebe sus resultados con Python

R=/ Nos dicen que la distancia media entre las 2 señales es:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Esto es igual a la Potencia del error, la cual sabemos que es:

$$\overline{P_e} = \overline{P}_{x_1} - \frac{2}{T} \int_T x_1(t)\, x_2^*(t)\, dt + \overline{P}_{x_2}$$

Luego es sencillo calcular cada una por aparte:

$$\overline{P_{x1}} = \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jn\omega_0 t})(Ae^{-jn\omega_0 t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T A^2 e^{-jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T A^2 e^0 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} = \frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{A^2 T}{T} = \underline{\underline{A^2}}$$

$$\overline{P_{x2}} = \frac{1}{T}\int_T (Be^{jm\omega_0 t})(Be^{jm\omega_0 t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T B^2 e^{jm\omega_0 t - jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} B^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt$$

$$\frac{B^2}{T}\left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = \underline{\underline{B^2}}$$

$$-\frac{2}{T}\int_T (Ae^{-jn\omega_0 t})(Be^{jm\omega_0 t})^* dt = -\frac{2}{T}\int_T AB e^{-jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$= -\frac{2AB}{T}\int_T e^{-j\omega_0 t(n+m)} dt$$

Hay 2 casos posibles:

Caso 1: $n = -m$

Luego

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-j\omega_0 t(n+m)} dt = -\frac{2AB}{T}\int_T e^{-j\omega_0 t(n-n)} dt$$

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(0)}\,dt = -\frac{2AB}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right] = -\frac{2AB}{T}[T] = -2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

Luego

$$-\frac{2AB}{T}\int_T e^{-jw_0t(n+m)}\,dt = -\frac{2AB}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-jw_0t(n+m)}\,dt$$

$$-\frac{2AB}{T}\left(\frac{e^{-jw_0t(n+m)}}{-jw_0(n+m)}\right)\Bigg|_{-T/2}^{t=T/2} =$$

$$-\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(w_0t(n+m)) - j\,\mathrm{Sen}(w_0t(n+m))}{-jw_0(n+m)}\right]\Bigg|_{t=-T/2}^{t=T/2} =$$

Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$ luego

$n+m = p \rightarrow p \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - j\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right] + j\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right)}{-jw_0p}\right]$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p) - \cos(-\pi p) + j\,\mathrm{Sen}(-\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

Como coseno es par luego

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

Entonces

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{\cos(\pi p) - \cos(\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p) + j\,\mathrm{Sen}(-\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{j\,\mathrm{Sen}(-\pi p) - j\,\mathrm{Sen}(\pi p)}{-j w_0 p}\right]$$

Por su parte $\mathrm{Sen}(\pi p)$ $p \in \mathbb{Z}$ es igual a 0 por definición y circulo unitario entonces

$$= -\frac{2AB}{\cancel{T}}\left[\frac{0}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T}}p}\right] = 0$$

De esta forma $\overline{P_e}$ para estas 2 señales tiene 2 valores posibles

Caso 1: $n = -m$

$$\overline{P_e} = A^2 + B^2 - 2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2$$

El problema nos dice que

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \bar{P}_e$$

Luego

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_e$$

Entonces

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\bar{P}_e}$$

Así que si $n = -m$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$$

Y si $n \neq -m$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2}$$

2- Encuentre la señal en tiempo discreto, al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de 5 kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua?

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar la simulación del proceso de discretización incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$. En caso de que la discretización no sea adecuada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

R=/ Para discretizar una señal se nos enseñó en clase que para $x(t)$ debemos hacer $t = nTs$ donde Ts es el periodo de muestreo y se halla

$$T_s = \frac{1}{F_s} \rightarrow \text{Frecuencia de muestreo}$$

En nuestro caso

$$T_s = \frac{1}{5000\,Hz} = 0{,}2 * 10^{-3} = 0{,}0002$$

Luego

$$x(nT_s) = 3\cos(1000\pi(0{,}0002\,n)) + 5\sin(3000\pi(0{,}0002\,n)) + 10\cos(11000\pi(0{,}0002\,n))$$

$$x(n) = 3\cos(0{,}2\pi n) + 5\sin(0{,}6\pi n) + 10\cos(2{,}2\pi n)$$

Lo que acompaña a nuestra nueva variable discreta n podemos llamarlo Ω y según lo visto en clase:

$-\pi \leq \Omega \leq \pi$

En este caso hay un Ω que no cumple con esto, para que lo cumpla le restamos 2π ya que si no estamos viendo la copia

$2{,}2\pi - 2\pi = 0{,}2\pi$

Para obtener esta Ω originalmente lo que se hizo fue

$wTs = 0{,}2\pi \rightarrow 2\pi f = \frac{0{,}2\pi}{Ts}$

$f = \frac{0{,}2\pi Fs}{2\pi} = 0{,}1 * 5000Hz = 500Hz$

Mientras que la frecuencia original de esa señal era

$2\pi f = 11000\pi \rightarrow f = 5500Hz$

Es decir que de los 5500Hz solo estamos viendo 500Hz, esto pasa por que no se cumple Nyquist ya que

$f_{max} = 5500$ y $Fs = 5000Hz$

$Fs < 2f_{max}$

Para solucionar este problema es ideal que el conversor cumple Nyquist, así que esto se implementa en Python

Ahora bien, para digitalizar se dice que se tienen 4 bits, esto corresponde a:

$2^4 = 16$ estados posibles

Si las 3 señales se llegan a coordinar al llegar a su máxima amplitud, lo máximo que llegaran es a 18 ya que $10+5+3=18$ y por consiguiente la Amplitud pico a pico de la señal es: 36, así que los saltos serían de

$$\frac{36}{16} = 2,25$$

Todo lo demás es programado en Python

3- Sea $\ddot{x}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestra que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} \ddot{x}(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n & b_n desde $\ddot{x}(t)$ en la serie trigonométrica de

Fourier ?

R=/ Si utilizamos todos los armónicos

$$x(t) = \sum C_n e^{jnw_0 t}$$

Luego si derivamos una vez

$$x'(t) = \sum C_n e^{jnw_0 t} (jnw_0)$$

Y al derivar la segunda vez

$$x''(t) = \sum C_n e^{jnw_0 t} (jnw_0)^2$$

$$= \sum C_n e^{jnw_0 t} j^2 n^2 w_0^2$$

$$= \sum \underbrace{(-C_n n^2 w_0^2)}_{} e^{jnw_0 t}$$

A esto lo podemos llamar $\tilde{C_n}$
y lo podemos calcular:

$$\tilde{C_n} = \frac{1}{T} \int_T x''(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

Luego

$$-C_n n^2 w_0^2 = \frac{1}{T} \int_T x''(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

$$C_n = -\frac{1}{T n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

Pero $T = (t_f - t_i)$ luego

$$C_n = -\frac{1}{(t_f - t_i)\, n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

$$= \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2} \int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

Esta no es la única forma de reconstruir la señal, hay otra la cual es:

$$x(t) = \sum a_n \operatorname{Cos}(nw_0t) + b_n \operatorname{Sen}(nw_0t)$$

Si la derivamos se obtiene:

$$x'(t) = \sum -a_n \operatorname{Sen}(nw_0t)\, nw_0 + b_n \operatorname{Cos}(nw_0t)\, nw_0$$

Y su segunda derivada es:

$$x''(t) = \sum \underbrace{-n^2 w_0^2 a_n}_{\tilde{a}_n} \operatorname{Cos}(nw_0t) \underbrace{-n^2 w_0^2 b_n}_{\tilde{b}_n} \operatorname{Sen}(nw_0t)$$

Otra vez, nombramos un $\tilde{a}_n$ y $\tilde{b}_n$ que por definición se calcula:

$$\tilde{a_n} = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\, \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$-n^2 w_0^2\, a_n = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\, \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$a_n = -\frac{2}{(t_f - t_i)\, n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\, \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\, \cos(n w_0 t)\, dt$$

Y para $\tilde{b_n}$:

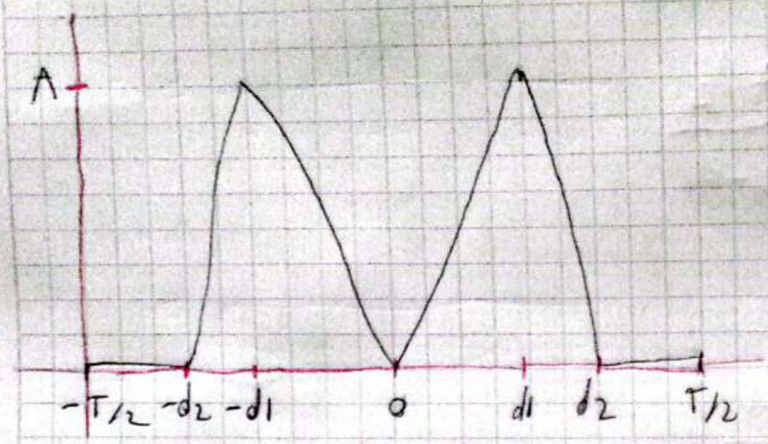
$$\tilde{b_n} = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\, \mathrm{Sen}(n w_0 t)\, dt$$

$$-n^2 w_0^2\, b_n = \frac{2}{(t_f - t_i)}\int_T x''(t)\, \mathrm{Sen}(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\, \mathrm{Sen}(n w_0 t)\, dt$$

4- Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de

$x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la figura 1.
Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



R=/ Para empezar definimos a $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t \leq -d_2 & x(t) = 0 \quad \text{Tramo 1} \\ -d_2 \leq t \leq -d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 2} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 3} \\ 0 \leq t \leq d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 4} \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{Tramo 5} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x(t) = 0 \quad \text{Tramo 6} \end{cases}$$

Ahora sacamos la ecuación de todas las rectas lineales así:

Tramo 2:

$$m = \frac{0 - A}{-d_2 - (-d_1)} = \frac{-A}{d_1 - d_2} = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$b = y - mt = 0 - \frac{A(-d_2)}{d_2 - d_1}$$

$$b = \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

$$x(t) = \frac{A\,t}{d_2 - d_1} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

Tramo 3:

$$m = \frac{A - 0}{-d_1 - 0} = -\frac{A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{-A}{d_1}(0) = 0$$

$$x(t) = -\frac{A}{d_1}t$$

Tramo 4:

$$m = \frac{0 - A}{0 - d_1} = \frac{A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{A}{d_1}(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{At}{d_1}$$

Tramo 5:

$$m = \frac{A-0}{d_1-d_2} = \frac{A}{d_1-d_2}$$

$$b = 0 - \frac{A(d_2)}{d_1-d_2} = \frac{Ad_2}{d_2-d_1}$$

$$x(t) = \frac{A}{d_1-d_2}t + \frac{Ad_2}{d_2-d_1}$$

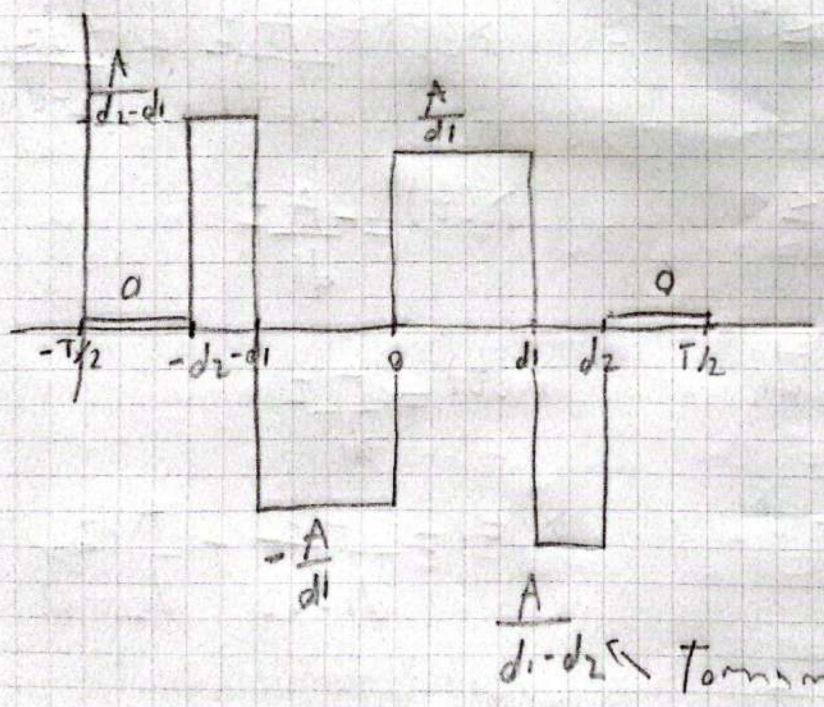
Así la definición por tramos de $x(t)$ es.

$$x(t)\begin{cases} -T/2 \le t \le -d_2 & x(t)=0 \\ -d_2 \le t \le -d_1 & x(t) = \frac{At}{d_2-d_1} + \frac{Ad_2}{d_2-d_1} \\ -d_1 \le t \le 0 & x(t) = -\frac{A}{d_1}t \\ 0 \le t \le d_1 & x(t) = \frac{A}{d_1}t \\ d_1 \le t \le d_2 & x(t) = \frac{At}{d_1-d_2} + \frac{Ad_2}{d_2-d_1} \\ d_2 \le t \le T/2 & x(t) = 0 \end{cases}$$

Ahora la primera derivada de $x(t)$ también se define a trozos así:

$$x'(t)\begin{cases} -T/2 < t < -d_2 & x(t) = 0 \\ -d_2 < t < -d_1 & x'(t) = \dfrac{A}{d_2 - d_1} \\ -d_1 < t < 0 & x'(t) = -\dfrac{A}{d_1} \\ 0 < t < d_1 & x'(t) = \dfrac{A}{d_1} \\ d_1 < t < d_2 & x'(t) = \dfrac{A}{d_1 - d_2} \\ d_2 < t < T/2 & x'(t) = 0 \end{cases}$$

Lo cual gráficamente luce:



Tomamos esta línea abajo ya que esa recta es decreciente, luego su pendiente es negativa

Nótese que en esta definición los puntos $-d_2, -d_1, 0, d_1, d_2$ no se incluyen, ya que en estos puntos la curva no es suave, por lo cual su derivada no está definida, luego la segunda derivada de $x(t)$ está también definida a trozos así:

$$
x''(t)\begin{cases}
-T/2 \leq t < -d_2 & x''(t) = 0 \\
t = -d_2 & x''(t) = \dfrac{A}{d_2-d_1}\,\delta(t+d_2) \\
-d_2 < t < -d_1 & x''(t) = 0 \\
t = -d_1 & x''(t) = \left(-\dfrac{A}{d_2-d_1} - \dfrac{A}{d_1}\right)\delta(t+d_1) \\
-d_1 < t < 0 & x''(t) = 0 \\
t = 0 & x''(t) = \dfrac{2A}{d_1}\,\delta(t) \\
0 < t < d_1 & x''(t) = 0 \\
t = d_1 & x''(t) = \left(-\dfrac{A}{d_1} + \dfrac{A}{d_1-d_2}\right)\delta(t-d_1) \\
d_1 < t < d_2 & x''(t) = 0 \\
t = d_2 & x''(t) = \dfrac{A}{d_2-d_1}\,\delta(t-d_2)
\end{cases}
$$

$d_2 < t \leq T/2 \qquad x''(t) = 0$

Para esta segunda derivada se usaron deltas de Dirac ya que estas representan cambios bruscos en un instante, las cuales se multiplican por la magnitud de los cambios

$$c_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \left\{ \int_T \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t + d_2) e^{-jnw_0 t} \, dt \right.$$

$$+ \int_T \left(-\frac{A}{d_2 - d_1} - \frac{A}{d_1} \right) \delta(t + d_1) e^{-jnw_0 t} \, dt$$

$$+ \int_T \frac{2A}{d_1} \delta(t) e^{-jnw_0 t} \, dt + \int_T \left(-\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_1 - d_2} \right) \delta(t - d_1) e^{-jnw_0 t} \, dt$$

$$\left. + \int_T \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t - d_2) e^{-jnw_0 t} \, dt \right\}$$

Las integrales pueden evaluarse en un intervalo de $(-\infty, \infty)$ sin que tengan ningún cambio ya que al multiplicarse por la delta de Dirac solo tendrán un cambio en un solo punto, mientras para el resto del dominio valdrán 0 con lo que nos es posible aplicar propiedades y obtener:

$$c_n = \frac{1}{-T n^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \left\{ \frac{A}{d_2-d_1} e^{jn\omega_0 d_2} - \frac{A}{d_2-d_1} e^{jn\omega_0 d_1} \right.$$

$$- \frac{A}{d_1} e^{jn\omega_0 d_1} + \frac{2A}{d_1} e^{0} - \frac{A}{d_1} e^{-jn\omega_0 d_1} - \frac{A}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0 d_1}$$

$$\left. + \frac{A}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0 d_2} \right\}$$

$$= -\frac{TA\, e^{jn\omega_0 d_2}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{TA e^{jn\omega_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA e^{jn\omega_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} + \frac{TA e^{-jn\omega_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+ \frac{TA e^{-jn\omega_0 d_1}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} - \frac{TA e^{-jn\omega_0 d_2}}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$= -\frac{TA \cos(n\omega_0 d_2)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} - \frac{jTA \operatorname{Sen}(n\omega_0 d_2)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA \cos(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)} + \frac{jTA \operatorname{Sen}(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 (d_2-d_1)}$$

$$+ \frac{TA \cos(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} + \frac{jTA \operatorname{Sen}(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+ \frac{TA \cos(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{jTA \operatorname{Sen}(n\omega_0 d_1)}{4\pi^2 n^2 d_1}$$

$$+\frac{TA\,\text{Cos}(nw_0d_1)}{4\pi^2n^2(d_2-d_1)}-\frac{jTA\,\text{Sen}(nw_0d_1)}{4\pi^2n^2(d_2-d_1)}$$

$$-\frac{TA\,\text{Cos}(nw_0d_2)}{4\pi^2n^2(d_2-d_1)}+\frac{jTA\,\text{Sen}(nw_0d_2)}{4\pi^2n^2(d_2-d_1)}$$

$$=-\frac{TA\,\text{Cos}(nw_0d_2)}{2\pi^2n^2(d_2-d_1)}+\frac{TA\,\text{Cos}(nw_0d_1)}{2\pi^2n^2(d_2-d_1)}$$

$$+\frac{TA\,\text{Cos}(nw_0d_1)}{2\pi^2n^2d_1}-\frac{TA}{2\pi^2n^2d_1}=C_n$$

Con este calculo nos es posible decir que el espectro de Fourier de nuestra señal es puramente real, luego no tiene parte imaginaria y su la magnitud viene dada por:

$$|C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

Y al no tener parte imaginaria $b_n=0$ luego

$$|C_n|=\frac{\sqrt{a_n^2}}{2}=\frac{|a_n|}{2}=\frac{|2\,\text{Re}\{C_n\}|}{2}$$

O podemos decir sencillamente que la magnitud de nuestra señal es

$$|C_n| = \left| -\frac{TA\cos(n\omega_0 d_2)}{2\pi^2 n^2(d_2-d_1)} + \frac{TA\cos(n\omega_0 d_1)}{2\pi^2 n^2(d_2-d_1)} \right.$$

$$\left. + \frac{TA\cos(n\omega_0 d_1)}{2\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} \right|$$

Mientras que el ángulo será

0 si $a_n > 0$

π si $a_n < 0$

Independiente si $a_n = 0$

El error se calculará mediante Python

Comprobación con la estimación a partir de $x(t)$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{At}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \right.$$

$$+ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{Ad_2}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0 t}\,dt + \int_{-d_1}^{0} -\frac{A}{d_1} t e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$+ \int_{0}^{d_1} \frac{A}{d_1} t e^{-jn\omega_0 t}\,dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{At}{d_1-d_2} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{Ad_2}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \right\} =$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{At}{d_2-d_1}\,dt + \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{Ad_2}{d_2-d_1}\,dt \right.$$

$$+ \int_{-d_1}^{0} -\frac{A}{d_1}t\,dt + \int_{0}^{d_1} \frac{A}{d_1}t\,dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{At}{d_1-d_2}\,dt$$

$$\left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{Ad_2}{d_2-d_1}\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{At^2}{2(d_2-d_1)}\Big|_{-d_2}^{t=-d_1} + \frac{Ad_2t}{d_2-d_1}\Big|_{-d_2}^{t=-d_1} \right.$$

$$+ \left(-\frac{At^2}{2d_1}\right)\Big|_{-d_1}^{t=0} + \left(\frac{At^2}{2d_1}\right)_0^{t=d_1} + \left(\frac{At^2}{2(d_1-d_2)}\right)_{d_1}^{t=d_2}$$

$$\left. + \frac{Ad_2t}{d_2-d_1}\Big|_{d_1}^{t=d_2} \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{A(-d_1-(-d_2))^2}{2(d_2-d_1)} + \frac{Ad_2(-d_1-(-d_2))}{d_2-d_1} \right.$$

$$- \frac{A(0-(-d_1))^2}{2d_1} + \frac{A(d_1-0)^2}{2d_1} - \left(\frac{A(d_2-d_1)^2}{2(d_2-d_1)}\right)$$

$$\left. + \frac{Ad_2(d_2-d_1)}{d_2-d_1} \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{A(d_2-d_1)^2}{2(d_2-d_1)} + \frac{A(d_2-d_1)d_2}{d_2-d_1} - \frac{Ad_1^2}{2d_1} \right.$$

$$\left. + \frac{Ad_1^2}{2d_1} - \frac{A(d_2-d_1)^2}{2(d_2-d_1)} + \frac{Ad_2(d_2-d_1)}{(d_2-d_1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{A(d_2-d_1)}{2} + Ad_2 - \frac{Ad_1}{2} + \frac{Ad_1}{2} \right.$$

$$\left. - \frac{A(d_2-d_1)}{2} + Ad_2 \right\}$$

$$= \frac{2Ad_2}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\Big\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{At}{d_2-d_1}\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt + \int_{-d_2}^{-d_1}\frac{Ad_2}{d_2-d_1}\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$-\int_{-d_1}^{0}\frac{At}{d_1}\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{d_1}\frac{At}{d_1}\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$+\int_{d_1}^{d_2}\frac{At}{d_1-d_2}\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)\,dt + \int_{d_1}^{d_2}\frac{Ad_2\,\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)}{d_2-d_1}\,dt\Big\}$$

$$=\frac{2}{T}\Big\{\frac{At\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{(d_2-d_1)n\omega_0}\Big|_{-d_2}^{-d_1} - \int_{-d_2}^{-d_1}\frac{A\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0(d_2-d_1)}\,dt$$

$$+\frac{Ad_2\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{(d_2-d_1)(n\omega_0)}\Big|_{-d_2}^{-d_1} - \Big[\frac{At\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{d_1 n\omega_0}\Big|_{-d_1}^{0}$$

$$-\int_{-d_1}^{0}\frac{A\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{d_1 n\omega_0}\,dt\Big] + \frac{At\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{d_1 n\omega_0}\Big|_{0}^{d_1}$$

$$-\int_{0}^{d_1}\frac{A\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0 d_1}\,dt + \frac{At\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{(d_1-d_2)n\omega_0}\Big|_{d_1}^{d_2}$$

$$-\int_{d_1}^{d_2}\frac{A\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{(d_1-d_2)(n\omega_0)}\,dt + \frac{Ad_2\,\mathrm{Sen}(n\omega_0 t)}{(d_2-d_1)n\omega_0}\Big|_{d_1}^{d_2}\Big\}$$

$$= \frac{2A}{Tn\omega_0}\left\{ \frac{t\,Sen(n\omega_0 t)}{d_2-d_1}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} + \frac{Cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0(d_2-d_1)}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1}\right.$$

$$+ \frac{d_2\,Sen(n\omega_0 t)}{d_2-d_1}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} - \frac{t\,Sen(n\omega_0 t)}{d_1}\Bigg|_{-d_1}^{0}$$

$$- \frac{Cos(n\omega_0 t)}{d_1 n\omega_0}\Bigg|_{-d_1}^{0} + \frac{t\,Sen(n\omega_0 t)}{d_1}\Bigg|_{0}^{d_1}$$

$$+ \frac{Cos(n\omega_0 t)}{d_1 n\omega_0}\Bigg|_{0}^{d_1} + \frac{t\,Sen(n\omega_0 t)}{d_1-d_2}\Bigg|_{d_1}^{d_2}$$

$$\left. + \frac{Cos(n\omega_0 t)}{(d_1-d_2)n\omega_0}\Bigg|_{d_1}^{d_2} + \frac{d_2\,Sen(n\omega_0 t)}{d_2-d_1}\Bigg|_{d_1}^{d_2} \right\}$$

$$= \frac{2A}{Tn\omega_0}\left\{\left[\frac{-d_1\,Sen(n\omega_0(-d_1))}{d_2-d_1} - \frac{-d_2\,Sen(n\omega_0(-d_2))}{d_2-d_1}\right]\right.$$

$$+\left[\frac{Cos(n\omega_0(-d_1))}{n\omega_0(d_2-d_1)} - \frac{Cos(n\omega_0(-d_2))}{n\omega_0(d_2-d_1)}\right]$$

$$+\left[\frac{d_2\,Sen(n\omega_0(-d_1))}{d_2-d_1} - \frac{d_2\,Sen(n\omega_0(-d_2))}{d_2-d_1}\right]$$

$$-\left[\frac{(0)\,Sen(n\omega_0(0))}{d_1} - \frac{-d_1\,Sen(n\omega_0(-d_1))}{d_1}\right]$$

$$-\left[\frac{Cos(n\omega_0(0))}{d_1 n\omega_0} - \frac{Cos(n\omega_0(-d_1))}{d_1 n\omega_0}\right]$$

$$+\left[\frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_1} - \frac{(0)\operatorname{Sen}(n w_0 (0))}{d_1}\right]$$

$$+\left[\frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_1)}{d_1 n w_0} - \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 (0))}{d_1 n w_0}\right]$$

$$+\left[\frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{d_1 - d_2} - \frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_1 - d_2}\right]$$

$$+\left[\frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_2)}{(d_1 - d_2) n w_0} - \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_1)}{(d_1 - d_2) n w_0}\right]$$

$$+\left[\frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{d_2 - d_1} - \frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_2 - d_1}\right]\Big\}$$

$$= \frac{2A}{T n w_0}\Big\{ \frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_2 - d_1} - \frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{d_2 - d_1}$$

$$+ \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_1)}{n w_0 (d_2 - d_1)} - \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_2)}{n w_0 (d_2 - d_1)} - \frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_2 - d_1}$$

$$+ \frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{d_2 - d_1} + \frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_1} - \frac{1}{d_1 n w_0}$$

$$+ \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_1)}{d_1 n w_0} + \frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_1} + \frac{\operatorname{Cos}(n w_0 d_1)}{d_1 n w_0}$$

$$- \frac{1}{d_1 n w_0} + \frac{d_2 \operatorname{Sen}(n w_0 d_2)}{d_1 - d_2} - \frac{d_1 \operatorname{Sen}(n w_0 d_1)}{d_1 - d_2}$$

$$+\frac{\cos(nw_0 d_2)}{(d_1-d_2)nw_0}-\frac{\cos(nw_0 d_1)}{(d_1-d_2)nw_0}+\frac{d_2 \operatorname{Sen}(nw_0 d_2)}{d_2-d_1}$$

$$-\frac{d_2 \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{d_2-d_1}\Big\}$$

$$=\frac{2A}{Tnw_0}\Big\{\frac{2d_1 \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{d_2-d_1}+\frac{2\cos(nw_0 d_1)}{(d_2-d_1)nw_0}$$

$$-\frac{2\cos(nw_0 d_2)}{(d_2-d_1)nw_0}-\frac{2d_2 \operatorname{Sen}(nw_0 d_1)}{d_2-d_1}$$

$$+2\operatorname{Sen}(nw_0 d_1)-\frac{2}{d_1 nw_0}+\frac{2\cos(nw_0 d_1)}{d_1 nw_0}\Big\}$$

$$C_n=\frac{a_n}{2}$$ //

Ya que la señal tiene simetría par

$$P_x=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{T}\Big\{\int_{-d_2}^{-d_1}\left|\frac{At}{d_2-d_1}+\frac{Ad_2}{d_2-d_1}\right|^2 dt$$

$$+\int_{-d_1}^{0}\left|-\frac{At}{d_1}\right|^2 dt+\int_{0}^{d_1}\left|\frac{At}{d_1}\right|^2 dt$$

$$+\int_{d_1}^{d_2}\left|\frac{At}{d_1-d_2}+\frac{Ad_2}{d_2-d_1}\right|^2 dt\Big\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{A^2t^2}{(d_2-d_1)^2} + \frac{2A^2td_2}{(d_2-d_1)^2} + \frac{A^2d_2^2}{(d_2-d_1)^2}\,dt \right.$$

$$+ \int_{-d_1}^{0} \frac{A^2t^2}{d_1^2}\,dt + \int_{0}^{d_1} \frac{A^2t^2}{d_1^2}\,dt$$

$$\left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{A^2t^2}{(d_1-d_2)^2} + \frac{2A^2td_2}{(d_1-d_2)(d_2-d_1)} + \frac{A^2d_2^2}{(d_2-d_1)^2}\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ \frac{A^2t^3}{3(d_2-d_1)^2}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} + \frac{At^2d_2}{(d_2-d_1)^2}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} \right.$$

$$+ \frac{A^2d_2^2t}{(d_2-d_1)^2}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} + \frac{A^2t^3}{3d_1^2}\Bigg|_{-d_1}^{0} + \frac{A^2t^3}{3d_1}\Bigg|_{0}^{d_1}$$

$$+ \frac{A^2t^3}{3(d_1-d_2)^2}\Bigg|_{d_1}^{d_2} + \frac{A^2t^2d_2}{(d_1-d_2)(d_2-d_1)}\Bigg|_{d_1}^{d_2}$$

$$\left. + \frac{A^2d_2^2t}{(d_2-d_1)^2} \right\} = \frac{1}{T}\left\{ \frac{A^2(-d_1^3-(-d_2)^3)}{3(d_2-d_1)^2} \right.$$

$$+ \frac{Ad_2(d_1^2-d_2^2)}{(d_2-d_1)^2} + \frac{A^2d^2(-d_1-(-d_2))}{(d_2-d_1)^2}$$

$$+ \frac{A^2(0-(-d_1)^3)}{3d_1^2} + \frac{A^2d_1^3}{3d_1} + \frac{A^2(d_2^3-d_1^3)}{3(d_2-d_1)^2}$$

$$\frac{A^2 d_2 \left(d_2^2 - d_1^2 \right)}{(d_1 - d_2)(d_2 - d_1)} + \frac{A^2 d_2^2 (d_2 - d_1)}{(d_2 - d_1)^2} \}$$