

„Hilberts Albtraum“
(The answer may *not* be out there!)

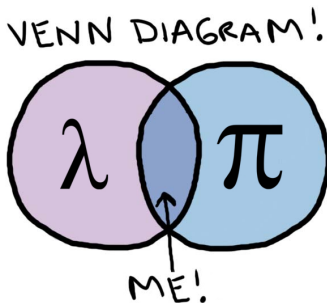
Jonas Betzendahl

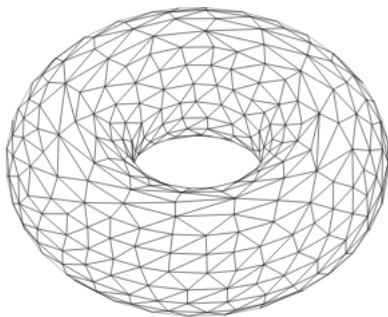
@jbetzend



Mein Thema

*Wie kann ich einem Computer beibringen,
mit mathematischen Beweisen umzugehen?*





Mathematik ist eine Wissenschaft
fast wie jede andere. . .

*Math is the reverse of comedy. The anti-joke.
We'll tell you the punchline first, then laboriously explain
to you why it was the right punchline.*

Joseph Maher, College of Staten Island

GIVEN THE PACE OF
TECHNOLOGY, I PROPOSE
WE LEAVE MATH TO THE
MACHINES AND GO PLAY
OUTSIDE.



David Hilbert

Mathematiker (1862-1943) aus Königsberg, bekannt für seine Grundlagenforschung und Problemsammlungen.

Hilberts Traum:

Ein Computer, dem ich eine beliebige mathematische Aussage reichen kann und der mir sagt, ob sie stimmt.



Manchmal ist es sehr leicht zu sehen, ob ein Programm jemals halten wird oder nicht:

```
-- Dieses Programm hält quasi sofort  
main :: IO ()  
main = print $ plus (3,4)  
  where  
    plus :: (Int, Int) -> Int  
    plus (x,y) = x + y
```


Manchmal ist es sehr leicht zu sehen, ob ein Programm jemals halten wird oder nicht:

```
-- Dieses Programm hält quasi sofort  
main :: IO ()  
main = print $ plus (3,4)  
  where  
    plus :: (Int, Int) -> Int  
    plus (x,y) = x + y
```

```
-- Dieses Programm läuft "für immer"  
main :: IO ()  
main = forever $ print "lol, infinite loop!"
```

Manchmal ist es aber auch nahezu unmöglich!

```
-- Nobody knows if this ever halts...
main :: IO ()
main = do let results = filter isPerfect [1,3..]
          case results of
            [] -> print " No odd perfect numbers!"
            _  -> print "Yes odd perfect numbers!"

divisors :: Int -> [Int]
divisors n = filter (\x -> n `rem` x == 0) [1..n]

isPerfect :: Int -> Bool
isPerfect n = (sum . divisors) n == n + n
```

Alan Turing



Mathematiker (1912-1954) aus London. Half in Bletchley Park, den dt. *Enigma*-Code zu lösen.

Bewies in seiner Doktorarbeit, dass das Halteproblem *nicht lösbar sein kann* (zumindest im allgemeinen Fall)!

Alan Turing



Mathematiker (1912-1954) aus London. Half in Bletchley Park, den dt. *Enigma*-Code zu lösen.

Bewies in seiner Doktorarbeit, dass das Halteproblem *nicht lösbar sein kann* (zumindest im allgemeinen Fall)!

Aber nehmen wir mal an, es *wäre lösbar*...

Ein magisches Halte-Orakel (1)



Ein magisches Halte-Orakel (2)

Quellcode ->

Input ->



-> Ergebnis
(Hält oder
hält nicht)

Ein magisches Halte-Orakel (3)



Ein magisches Halte-Orakel (4)

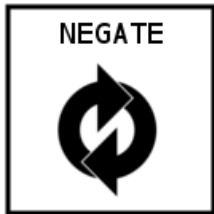
plus ->

(Lübeck, 🍌) ->



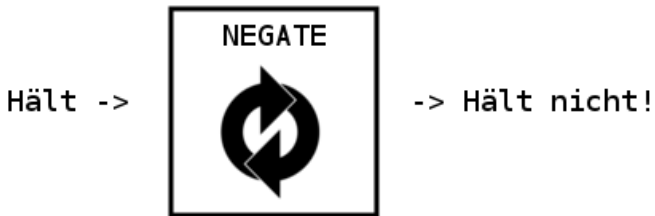
-> Hält nicht!

Negierer (1)



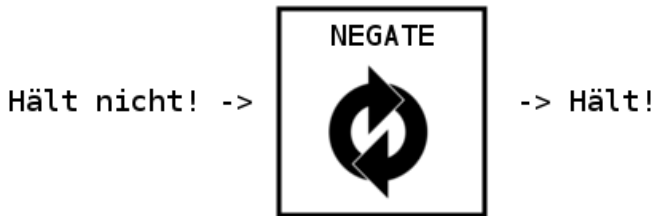
Dazu kommt ein Negierer, der ein Haltergebnis umdreht!

Negierer (2)



Dazu kommt ein Negierer, der ein Haltergebnis umdreht!

Negierer (3)



Dazu kommt ein Negierer, der ein Haltergebnis umdreht!

Duplizierer (1)



Wir haben auch einen Duplizierer, der seine Eingabe verdoppelt!

Duplizierer (2)



Wir haben auch einen Duplizierer, der seine Eingabe verdoppelt!

Duplizierer (3)



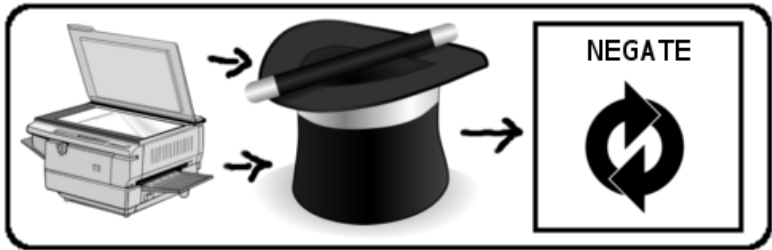
Wir haben auch einen Duplizierer, der seine Eingabe verdoppelt!

Unite and conquer! (1)



Sie ahnen es! Alles das können wir jetzt zusammen stecken!

Unite and conquer! (2)



Insbesondere können wir diese Aneinanderreihung als *eine Maschine* betrachten. Nennen wir sie X.

Unite and conquer! (3)

A large, bold, black 'X' is centered within a teal-colored rounded rectangle with a thin black border. The rectangle has rounded corners and is positioned in the upper half of the slide.

Insbesondere können wir diese Aneinanderreihung als *eine Maschine* betrachten. Nennen wir sie X.

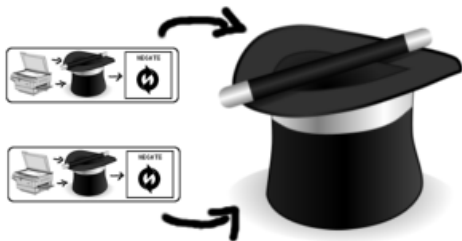
Going Meta! (1)



Jetzt nur keine Panik bekommen!

Aber was passiert, wenn wir den Quellcode von X an X geben?

Going Meta! (2)



Der interessante Teil der Frage ist, was das Orakel ausspuckt.
Hier gibt es aber überhaupt nur zwei Möglichkeiten!

Fall 1: Orakel sagt "Hält!"



Entweder oder

Fall 2: Orakel sagt "Hält nicht!"



Oder das Orakel sagt X mit X als Inpt hält *nicht*! Das bringt aber das gleiche Problem: dank des Negierers hält X eben doch!

Widerspruch



Was bleibt uns von unserer erdachten magischen Maschine?
Jeder mögliche Weg führt zum Widerspruch!

Widerspruch



Was bleibt uns von unserer erdachten magischen Maschine?
Jeder mögliche Weg führt zum Widerspruch!

Damit ist bewiesen: so ein Orakel *kann* es nicht geben!
Das Halteproblem ist (im Allgemeinen) unlösbar!

Widerspruch



Was bleibt uns von unserer erdachten magischen Maschine?
Jeder mögliche Weg führt zum Widerspruch!

Damit ist bewiesen: so ein Orakel *kann* es nicht geben!
Das Halteproblem ist (im Allgemeinen) unlösbar!

Schlusswort

Was haben wir heute gelernt?



Schlusswort

Was haben wir heute gelernt?

- Die Welt ist groß und ungewiss!



Schlusswort

Was haben wir heute gelernt?

- Die Welt ist groß und ungewiss!
- Mathe macht Spaß!



Schlusswort



Was haben wir heute gelernt?

- Die Welt ist groß und ungewiss!
- Mathe macht Spaß!
- Wir können jetzt das Halteproblem erklären und wissen, dass es keine allgemeine Lösung gibt.

Schlusswort



Was haben wir heute gelernt?

- Die Welt ist groß und ungewiss!
- Mathe macht Spaß!
- Wir können jetzt das Halteproblem erklären und wissen, dass es keine allgemeine Lösung gibt.

*Bitte bleiben
Sie neugierig!*