

GELSON IEZZI  
SAMUEL HAZZAN

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências  
Matrizes  
Determinantes  
Sistemas

4





GELSON IEZZI  
SAMUEL HAZZAN

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências  
Matrizes

Determinantes  
Sistemas

4

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

8<sup>a</sup> edição | São Paulo – 2013

Coordenadora de edição eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Projeto gráfico: Robson Caiuá Alves  
Impressão e acabamento:  
**Atual  
Editora**

Copyright desta edição:

**SARAIVA S.A. Livreiros Editores**, São Paulo, 2013.

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

[www.editorasaraiva.com.br](http://www.editorasaraiva.com.br)

Todos os direitos reservados.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson, 1939-

Fundamentos de matemática elementar, 4 : sequências, matrizes, determinantes e sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. – 8. ed. – São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1748-8 (aluno)

ISBN 978-85-357-1749-5 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) – Testes I. Hazzan, Samuel, 1946-. II. Título. III. Título: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas.

13-02580

CDD-510.7

**Índice para catálogo sistemático:**

1. Matemática: Ensino médio 510.7

**Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 4**

**Gerente editorial:** Lauri Cericato

**Editor:** José Luiz Carvalho da Cruz

**Editores-assistentes:** Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar/Livio A. D'Ottaviantonio

**Auxiliares de serviços editoriais:** Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçallo Ramos/Vanderlei Aparecido Orso

**Digitação e cotejo de originais:** Guilherme Reghin Gaspar/Eillyane Kaori Kamimura

**Pesquisa iconográfica:** Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes

**Revisão:** Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigrist/Maura Loria/Aline Araújo/Elza Gasparotto/Luciana Azevedo/Patricia Cordeiro

**Gerente de arte:** Nair de Medeiros Barbosa

**Supervisor de arte:** Antonio Roberto Bressan

**Projeto gráfico:** Carlos Magno

**Capa:** Homem de Melo & Tróia Desing

**Imagen de Capa:** tiridifilm/Getty Images

**Ilustrações:** Conceitograf/Mario Yoshida

**Diagramação:** Ulhoa Cintra

**Assessoria de arte:** Maria Paula Santo Siqueira

**Encarregada de produção e arte:** Grace Alves

**Coordenadora de edição eletrônica:** Silvia Regina E. Almeida

**Produção gráfica:** Robson Cacau Alves

**Impressão e acabamento:**

731.306.008.002



**SAC** | 0800-0117875  
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30  
[www.editorasaraiva.com.br/contato](http://www.editorasaraiva.com.br/contato)

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

# Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 4, Sequências/Matrizes/Determinantes/Sistemas, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas por meio da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores

# Sumário

<b>CAPÍTULO II — Progressão aritmética .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO III — Progressão geométrica .....</b>	<b>14</b>
<b>CAPÍTULO IV — Matrizes .....</b>	<b>42</b>
<b>CAPÍTULO V — Determinantes .....</b>	<b>54</b>
<b>CAPÍTULO VI — Sistemas lineares .....</b>	<b>78</b>

**CAPÍTULO II** — Progressão aritmética

**8.**  $(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 = (x - 1 + x + x + 1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow (0, 1, 2) \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow (1, 2, 3) \end{cases}$$

**9.**  $\begin{cases} x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow x = 6 \quad (1) \\ \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+r} = \frac{23}{30} \Rightarrow \frac{3x^2 - r^2}{x(x^2 - r^2)} = \frac{23}{30} \quad (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{108 - r^2}{6(36 - r^2)} = \frac{23}{30} \Rightarrow r = \pm 4$$

Para  $x = 6$  e  $r = -4 \Rightarrow (10, 6, 2)$ .

Para  $x = 6$  e  $r = 4 \Rightarrow (2, 6, 10)$ .

**10.**  $\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = (x - r + x + x + r)^2 \\ x - r + x = x + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - r^2 = 9x \\ x = 2r \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 - 6r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \\ \text{ou} \\ r = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (6, 12, 18) \end{cases}$$

**11.**  $\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (1) \\ 3x^2 + 2r^2 = 11 \quad (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem  $r = \pm 2$ .

Para  $x = 1$  e  $r = -2$ , temos  $(3, 1, -1)$ .

Para  $x = 1$  e  $r = 2$ , temos  $(-1, 1, 3)$ .

**13.**  $\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = -6 \\ (x - 3y)(x + 3y) = -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ x^2 - 9y^2 = -54 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ e } y = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \text{termos: } -9, -4, 1, 6.$$

**14.**  $\begin{cases} (x - 3y)(x + y) = 45 \\ (x - y)(x + y) = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 45 \\ x^2 - y^2 = 77 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2 \text{ e } x = \pm 9$

$y = -2$  rejeitado porque a P.A. deve ser crescente.

Para  $x = 9$  e  $y = 2$ , vem:  $(3, 7, 11, 15)$ .

Para  $x = -9$  e  $y = 2$ , vem:  $(-15, -11, -7, -3)$ .

**15.**  $\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 22 \\ (x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 2x^2 + 10y^2 = 83 \end{cases} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}$$

Para  $x = \frac{11}{2}$  e  $y = \frac{3}{2} \Rightarrow (1, 4, 7, 10)$ .

Para  $x = \frac{11}{2}$  e  $y = -\frac{3}{2} \Rightarrow (10, 7, 4, 1)$ .

- 20.** Em toda P.A., cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

Assim: P.A.  $(a, b, c) \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b - a$ .

**21.**  $3x = \frac{2x + x^2}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$

Então,  $(0, 0, 0)$  rejeitada porque os termos devem ser distintos.

Assim:  $(8, 12, 16)$ .

**22.**  $2x = \frac{x+1+x^2-5}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -1$

$x = -1$  rejeitado porque  $2x$  é lado de um triângulo.

Portanto, temos:  $(5, 8, 11)$  e, então, perímetro igual a 24.

**23.** lado =  $x$ , diagonal =  $\sqrt{2}x$ , área =  $x^2 \Rightarrow (x, \sqrt{2}x, x^2)$ .

Então:  $\sqrt{2}x = \frac{x+x^2}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{2} - 1$ .

$x = 0$  rejeitado porque é lado do quadrado

Então:  $x = 2\sqrt{2} - 1$ .

**25.** Por hipótese,  $\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+y} = r \Rightarrow x-z = r(x+y)(y+z)$

e  $\frac{1}{z+x} - \frac{1}{y+z} = r \Rightarrow r = \frac{y-x}{(x+z)(y+z)}$

Então:  $x^2 - z^2 = (x-z)(x+z) = r(x+y)(y+z)(x+z) =$

$$= \frac{y-x}{(x+z)(y+z)} \cdot (x+y)(y+z)(x+z) = (y-x)(x+y) = y^2 - x^2$$

**26.** Por hipótese,  $b-a = c-b = r$ .

$$\begin{aligned} \text{Então: } & b^2(a+c) - a^2(b+c) = ab^2 + b^2c - a^2b - a^2c = \\ & = ab(b-a) + c(b^2 - a^2) = ab(b-a) + c(b-a)(b+a) = \\ & = ab(c-b) + c(c-b)(b+a) = \\ & = abc - ab^2 + c^2b + ac^2 - b^2c - abc = \\ & = ac^2 + bc^2 - ab^2 - b^2c = \\ & = c^2(a+b) - b^2(a+c) \end{aligned}$$

**27.** Por hipótese,  $b-a = c-b \quad (1) \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \quad (2)$ .

De (2) vem  $\frac{b-c}{bc} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \quad (3)$ .

Utilizando (1) em (3), vem:

$$\frac{a-b}{bc} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \text{ e daí } \frac{a}{bc} - \frac{1}{c} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$$

então,  $\frac{a}{bc} = \frac{1}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad = \frac{a+c}{2} \cdot c \Rightarrow 2ad = c(a+c)$

- 28.** Fazendo  $\alpha = x - 3y$ ,  $\beta = x - y$ ,  $\gamma = x + y$  e  $\delta = x + 3y$ , temos:

$$\begin{aligned} (\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) &= 4x(6y - 2x) + 4x(-6y - 2x) = \\ &= 4x(-4x) = -16x^2 \\ 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma) &= 2(x^2 - 9y^2 - 9x^2 - 9y^2) = -16x^2 \\ \text{então: } (\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) &= 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma). \end{aligned}$$

- 34.**  $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 + 2 = 24 \Rightarrow a_1 = 22$   
 $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 60 = 22 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 20 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  vigésimo termo ou  $a_{20}$ .

**38.**  $\begin{cases} a_{12} + a_{21} = 302 \\ a_{23} + a_{46} = 446 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 31r = 302 \\ 2a_1 + 67r = 446 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 89 \text{ e } r = 4$

P.A.(89, 93, 97, ...).

- 39.** (14, 15, ..., 191, 192)

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_n \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 191 = 15 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 89$$

- 40.**  $a_m + a_n = a_p + a_q \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a_1 + (m - 1)r + a_1 + (n - 1)r = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (q - 1)r \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (m - 1)r + (n - 1)r = (p - 1)r + (q - 1)r \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m - 1 + n - 1 = p - 1 + q - 1 \Rightarrow m + n = p + q.$

- 42.** P.A.<sub>1</sub>(5, 8, 11, ...)

$$\left. \begin{array}{l} n = 100 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{100} = 5 + 99 \cdot 3 = 302$$

Então, P.A.<sub>1</sub>(5, 8, 11, ..., 302).

P.A.<sub>2</sub>{3, 7, 11, ...})

$$\left. \begin{array}{l} n = 100 \\ r = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{100} = 3 + 99 \cdot 4 = 399$$

Então, P.A.<sub>2</sub>{3, 7, 11, ..., 399}).

Como queremos os termos comuns às duas progressões, então  $a_n \leq 302$ .

Observamos que o primeiro termo comum é  $a_1 = 11$  e o segundo termo comum é  $a_2 = 23 \Rightarrow r = 12$ .

Então:  $a_1 + (n - 1)r \leq 302$

$$11 + (n - 1) \cdot 12 \leq 302 \Rightarrow n \leq 25,25 \Rightarrow n = 25.$$

**43.**  $a_p = a + (p - 1)r \Rightarrow a = a_p - (p - 1)r$

Como  $0 \leq a \leq 10$  e  $a_p = 35$ , vem:

$$0 \leq 35 - (p - 1) \cdot 13 \leq 10 \Rightarrow 2,9 \leq p \leq 3,6 \Rightarrow p = 3.$$

Então:  $a_3 = a + 2r \Rightarrow 35 = a + 2 \cdot 13 \Rightarrow a = 9.$

**44.**  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (1, 3, 5, \dots, a_n)$

$$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)) = (f(1), f(3), f(5), \dots, f(a_n)) = (4, 10, 16, \dots, f(a_n))$$

Sendo  $f(x) = ax + b$   $\begin{cases} f(1) = a + b = 4 \\ f(3) = 3a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 1$

Portanto:  $f(2) = a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 7.$

**45.** Por hipótese  $a_p - a_{p-1} = r$  e  $a_{p-1} - a_{p-2} = r$  para todo  $\frac{p}{2}$  natural,  $3 \leq p \leq n$ .

Então:

$$a_p^2 - a_{p-1}^2 = (a_p - a_{p-1})(a_p + a_{p-1}) = r(a_p + a_{p-1})$$

$$a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2 = (a_{p-1} - a_{p-2})(a_{p-1} + a_{p-2}) = r(a_{p-1} + a_{p-2})$$

e daí vem:

$$(a_p^2 - a_{p-1}^2) - (a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2) = r(a_p - a_{p-2}) = r \cdot 2r = 2r^2 (\text{constante}).$$

**46.** Por hipótese:

$$x = a_m = a_1 + (m - 1)r$$

$$y = a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$z = a_p = a_1 + (p - 1)r$$

então:

$$(n - p)x + (p - m)y + (m - n)z =$$

$$= (n - p)[a_1 + (m - 1)r] + (p - m)[a_1 + (n - 1)r] + (m - n)[a_1 + (p - 1)r] =$$

$$= a_1(n - p + p - m + m - n) + r[(n - p)(m - 1) + (p - m)(n - 1) + (m - n)(p - 1)] = a_1 \cdot 0 + r \cdot 0 = 0.$$

- 47.** Demonstração pelo princípio da indução finita.  
Para  $n = 3$ , temos:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3} = \frac{3-1}{a_1 a_3}$$

Suponhamos a tese válida para  $p$  termos iniciais,  $p \geq 3$ , ou seja:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{p-1} a_p} = \frac{p-1}{a_1 a_p}$$

então, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{p-1} a_p} + \frac{1}{a_p a_{p+1}} = \frac{p-1}{a_1 a_p} + \frac{1}{a_p a_{p+1}} = \\ & = \frac{(p-1)a_{p+1} + a_1}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{(p-1)(a_p + r) + a_1}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{(p-1)a_p + a_1 + (p-1)r}{a_1 a_p a_{p+1}} = \\ & = \frac{p \cdot a_p}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{p}{a_1 a_{p+1}} = \frac{(p+1)-1}{a_1 a_{p+1}} \end{aligned}$$

e a tese está verificada para  $p + 1$  termos iniciais.  
Em consequência, a tese vale para todo  $n$  natural.

- 49.**  $(12, \_, \_, \dots, \_, \_, 34)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 34 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 34 = 12 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow n = 45 \quad (\text{incluindo os extremos})$$

Então, devem ser interpolados 43 termos.

- 52.** Múltiplos de 2  $\rightarrow (100, 102, \dots, 1\,000)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 100 \\ a_n = 1\,000 \\ r = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1\,000 = 100 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = 451$$

Múltiplos de 3  $\Rightarrow (102, \dots, 999)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_m = 999 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 999 = 102 + (m-1) \cdot 3 \Rightarrow m = 300$$

Múltiplos de 2 e 3, isto é, múltiplos de 6 → (102, ..., 996)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_p = 996 \\ r = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 996 = 102 + (p - 1) \cdot 6 \Rightarrow p = 150$$

Assim, múltiplos de 2 ou 3 de 100 a 1 000 são no total:  
 $n + m - p = 451 + 300 - 150 = 601$ .

- 53.** Números de dois ou três algarismos: (10, 11, 12, ..., 998, 999)  
 $n = 999 - 10 + 1 = 990$

Números de dois ou três algarismos, divisíveis por 7: (14, ..., 994)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_p = 994 \\ r = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 994 = 14 + (p - 1)r \Rightarrow p = 141$$

Então, não são divisíveis por 7:  $n - p = 849$  números.

- 54.** Total de inteiros de 1 000 a 10 000,  $n = 9\,001$   
Números divisíveis por 5: (1 000, ..., 10 000)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1\,000 \\ a_m = 10\,000 \\ r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 10\,000 = 1\,000 + (m - 1) \cdot 5 \Rightarrow m = 1\,801$$

Números divisíveis por 7: (1 001, ..., 9 996)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1\,001 \\ a_p = 9\,996 \\ r = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 9\,996 = 1\,001 + (p - 1) \cdot 7 \Rightarrow p = 1\,286$$

Números divisíveis por 5 e 7: (1 015, ..., 9 975)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1\,015 \\ a_q = 9\,975 \\ r = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 9\,975 = 1\,015 + (q - 1) \cdot 35 \Rightarrow q = 257$$

Então, não são divisíveis nem por 5 nem por 7:

$$n - [m + p - q] = 9\,001 - [1\,801 + 1\,286 - 257] = 6\,171.$$

**56.**  $\underbrace{(1, \dots, n^2)}_n$

A P.A. tem  $n + 2$  termos.

$$n^2 = 1 + (n + 2 - 1)r \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 1} = r \Rightarrow r = n - 1$$

**62.**  $\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1-n}{n} \\ a_2 = \frac{2-n}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \frac{2-n-(1-n)}{n} \Rightarrow r = \frac{1}{n}$

Então:  $a_n = \frac{1-n}{n} + (n-1) \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = 0$ .

Portanto,  $S_n = \frac{\left(\frac{1-n}{n} + 0\right) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{1-n}{2}$ .

**67.**  $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 10(a_1 + a_{20}) = -15 \Rightarrow a_1 + a_{20} = -\frac{3}{2}$

Como  $a_6$  e  $a_{15}$  são termos equidistantes dos extremos, então:

$$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20} \Rightarrow a_6 + a_{15} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

**68.**  $r = 0,08a_1$

$$a_{11} = 36 \Rightarrow a_1 + 10 \cdot 0,08a_1 = 36 \Rightarrow a_1 = 20$$

$$\text{Portanto, } r = 1,6 \text{ e } a_{26} = 60.$$

$$\text{Assim, } S_{26} = \frac{(20+60) \cdot 26}{2} \Rightarrow S_{26} = 1040.$$

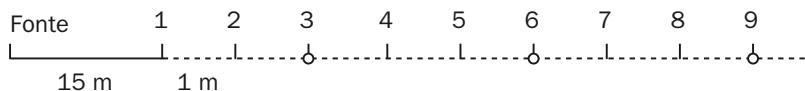
**69.**  $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 10$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 5$$

$$\begin{cases} a_1 + a_{10} = 10 \\ a_1 + a_{20} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9r = 10 \\ 2a_1 + 19r = 5 \end{cases} \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \text{ e } a_1 = \frac{29}{4}$$

$$\text{Então: } a_{30} = \frac{29}{4} + 29\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a_{30} = -\frac{29}{4}$$

$$\text{Portanto, } S_{30} = \frac{\left(\frac{29}{4} - \frac{29}{4}\right) \cdot 30}{2} = 0.$$

**71.**

$$1^{\text{a}} \text{ caminhada (ida e volta)} = 2(15 + 1 + 1) = 2 \cdot 17 = 34.$$

$$2^{\text{a}} \text{ caminhada (ida e volta)} = 2(17 + 1 + 1 + 1) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Assim, à P.A.<sub>1</sub> (3, 6, 9, ..., 60), que é o número de roseiras regadas a cada caminhada, corresponde a P.A.<sub>2</sub> (34, 40, ...), que representa o percurso percorrido.

$$\begin{array}{l} \text{Considerando} \\ \text{a P.A.}_1, \text{ vem:} \end{array} \left. \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 60 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 = 3 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 20$$

$$\begin{array}{l} \text{Considerando} \\ \text{a P.A.}_2, \text{ vem:} \end{array} \left. \begin{array}{l} a_1 = 34 \\ a_n = 20 \\ r = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{20} = 34 + 19 \cdot 6 \Rightarrow a_{20} = 148$$

$$\text{Assim: } S_{20} = \frac{34 + 148}{2} \cdot 20 \Rightarrow S_{20} = 1820 \text{ m.}$$

**73.**

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -5 \\ r = 4 \\ a_n = -5 + (n-1) \cdot 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1590 = \left( \frac{-5 - 5 + 4n - 4}{2} \right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 7n - 1590 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 30 \\ \text{ou} \\ n = -\frac{53}{2} \quad (\text{rejeitado}) \end{cases}$$

Então,  $S_n = 1590$  se  $n = 30$ .

**74.**  $\left. \begin{array}{l} a_1 = 13 \\ a_2 = \frac{45}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -\frac{7}{4}$

$$a_n = 13 + (n - 1) \left( -\frac{7}{4} \right) \Rightarrow a_n = \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n$$

$$S_n = \left( \frac{13 + \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n}{2} \right) \cdot n < 0 \Rightarrow -7n^2 + 111n < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 111n < 0 \Rightarrow \begin{cases} n < 0 & (\text{rejeitado}) \\ \text{ou} \\ n > \frac{111}{7} \Rightarrow n = 16 & (\text{valor mínimo}) \end{cases}$$

**76.**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(a_1 + a_{59}) \cdot 59}{2} = 12 \\ \frac{(a_2 + a_{60}) \cdot 59}{2} = 130 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a_1 + 58r = \frac{24}{59} \\ 2a_1 + 60r = \frac{260}{59} \end{array} \right. \Rightarrow r = 2 \text{ e } a_1 = -\frac{3410}{59}$

**78.** (4, 7, 10, 13, ..., 517)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ r = 3 \\ a_n = 517 \end{array} \right\} \Rightarrow 517 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 172$$

Então, 517 é termo de ordem par e cada P.A. extraída dessa tem 86 termos:

P.A.<sub>i</sub> (4, 10, 16, ..., 514) e P.A.<sub>p</sub> (7, 13, ..., 517)

$$\left. \begin{array}{l} S_{86i} = \frac{(4 + 514) \cdot 86}{2} \\ S_{86p} = \frac{(7 + 517) \cdot 86}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} S_{86i} = \frac{518}{524} = \frac{259}{262} \\ S_{86p} = \end{array} \right.$$

**81.**(14, 21, 28, ...,  $a_n$ ), em que  $a_n \leq 9999$ Então,  $14 + (n - 1) \cdot 7 \leq 9999 \Rightarrow n \leq 1427 \Rightarrow n = 1427$ Assim,  $a_{1427} = 14 + 1426 \cdot 7 = 9996$ .

$$S_{1427} = \frac{(14 + 9996) \cdot 1427}{2} \Rightarrow S_{1427} = 7142135$$

**84.**

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 5 \\ f(25) = 2 \cdot 25 + 3 \Rightarrow f(25) = 53 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{25} = \frac{(5 + 53) \cdot 25}{2} = 725$$

Portanto  $f(1) + f(2) + \dots + f(25) = 725$ **85.**

$$\sum_{x=5}^{n+5} 4(x-3) = An^2 + Bn + C$$

Para  $n = 1$ , vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^6 4(x-3) &= A + B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) &= A + B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow A + B + C &= 20 \quad (1) \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ , vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^7 4(x-3) &= 4A + 2B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) &= 4A + 2B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4A + 2B + C &= 36 \quad (2) \end{aligned}$$

Para  $n = 3$ , vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^8 4(x-3) &= 9A + 3B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) + 4(8-3) &= 9A + 3B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 9A + 3B + C &= 56 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad A + B + C = 20 \\ (2) \quad 4A + 2B + C = 36 \\ (3) \quad 9A + 3B + C = 56 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ 6B + 8C = 124 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ C = 8 \end{array} \right.$$

Então,  $A + B = 20 - C \Rightarrow 20 - 8 = 12$ .

**86.**  $S_m = S_n \Rightarrow \frac{[2a_1 + (m-1)r]m}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a_1m + (m-1)rm = 2a_1n + (n-1)rn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1(m-n) = [n(n-1) - m(m-1)]r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1(m-n) = (n-m)(n+m-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -(n+m-1)r \quad (1)$$

Sendo  $a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)r$ , então:

$$S_{m+n} = \frac{[a_1 + a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2}$$

$$S_{m+n} = \frac{[2a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$S_{m+n} = 0.$$

- 87.**  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$  é uma P.A. com número ímpar de termos. Então, o termo médio é média aritmética entre os extremos e essa relação também é válida entre os índices desses termos.

Assim:

$$\frac{2n+1+1}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1 \text{ (índice do termo médio).}$$

Temos, ainda:

$$a_{2n+1} = a_1 + 2nr \text{ e } a_{2n} = a_1 + (2n-1)r.$$

$$S_i = \frac{(a_1 + a_1 + 2nr)(2n+1)}{2} = (a_1 + nr)(2n+1)$$

$$S_p = \frac{[a_1 + r + a_1 + (2n - 1)r]2n}{2} = 2(a_1 + nr) \cdot n$$

$$\begin{aligned} S_i - S_p &= (a_1 + nr)(2n + 1) - 2(a_1 + nr)n = \\ &= (a_1 + nr)(2n + 1 - 2n) = a_1 + nr = a_{n+1} \text{ (termo médio)} \end{aligned}$$

**88.**  $(a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_n, \dots)$   
 $a_p + a_n = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (n - 1)r =$   
 $= a_1 + [a_1 + (p + n - 2)r] \in \text{P.A.} \Rightarrow a_1 = Kr, K \in \mathbb{Z}$

**89.**  $a_{\frac{n}{3}} = 4 \Rightarrow a_{\frac{n}{3}} = a_1 + \left(\frac{n}{3} - 1\right) \cdot 1 = 4 \Rightarrow a_1 + \left(\frac{n-3}{3}\right) = 4$

Sabendo que  $n = 3K$ , então  $a_1 + \frac{3(K-1)}{3} = 4 \Rightarrow a_1 = 5 - K$ .

Então:  $a_n = a_{3K} = 5 - K + 3K - 1 = 4 + 2K$ .

Portanto,  $S_{3K} = \frac{(5 - K + 4 + 2K)3K}{2} = 33 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K^2 + 9K - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = -11 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ K = 2 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ e } n = 6 \end{cases}$$

Assim: P.A. (3, 4, 5, 6, 7, 8).

**91.**  $\frac{(a_1 + a_n)n}{2} = (n+1) \cdot \frac{a_n}{2}$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot n + a_n \cdot n &= n \cdot a_n + a_n \Rightarrow a_1n = a_n \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1n &= a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_1(n - 1) = (n - 1)r \Rightarrow a_1 = r \end{aligned}$$

### CAPÍTULO III — Progressão geométrica

**97.**  $(1 + x, 13 + x, 49 + x)$

$$\frac{13+x}{1+x} = \frac{49+x}{13+x} \Rightarrow (13+x)^2 = (49+x)(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x - 120 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Portanto,  $(6, 18, 54) \Rightarrow q = 3$ .

**99.**  $\frac{\sin(x + \pi)}{\sin x} = q \Rightarrow q = \frac{-\sin x}{\sin x} = -1$

$$\frac{\sin(x + 2\pi)}{\sin(x + \pi)} = q \Rightarrow q = \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

A progressão geométrica é alternante, com  $q = -1$ .

**101.** P.G.:  $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

condições:  $\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = \frac{21}{8} & (1) \\ \frac{x^2}{q^2} + x^2 + x^2q^2 = \frac{189}{64} & (2) \end{cases}$

Fazendo a diferença entre o quadrado de (1) e (2), temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{q} + 2x^2q + 2x^2 &= \left(\frac{21}{8}\right)^2 - \frac{189}{64} \Rightarrow 2x\left(\frac{x}{q} + x + xq\right) = \frac{63}{16} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x \cdot \frac{21}{8} &= \frac{63}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo em (1), resulta:

$$\frac{3}{4q} + \frac{3}{4} + \frac{3q}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 2$$

Os números procurados são:  $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}$  e  $\frac{3}{2}$ .

$$\text{102. } \begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xq = 12 \\ xq^2 + xq^3 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+q) = 12 & (1) \\ xq^2(1+q) = 300 & (2) \end{cases}$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$$

Para  $q = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10, 50, 250)$ .

Para  $q = -5 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 15, -75, 375)$ .

$$\text{103. } \begin{cases} \frac{x}{q^2} + \frac{x}{q} + x + xq + xq^2 = \frac{121}{3} & (1) \\ \frac{x}{q^2} \cdot \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq \cdot xq^2 = 243 & (2) \end{cases}$$

De (2) vem  $x^5 = 243 \Rightarrow x = 3$ .

Substituindo em (1), resulta:  $\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = \frac{121}{9}$ .

E daí:

$$\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) + 1 = \frac{121}{9}.$$

Fazendo  $q + \frac{1}{q} = y$  e  $q^2 + \frac{1}{q^2} = y^2 - 2$ , resulta:

$$(y^2 - 2) + y + 1 = \frac{121}{9} \Rightarrow y^2 + y - \frac{130}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y = -\frac{13}{3} \text{ ou } y = \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left(q = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6} \text{ ou } q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right).$$

Como  $q$  é racional, os números são:  $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$ .

$$\begin{aligned}
 \text{104. } & \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_3 + a_5 = 182 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 546 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + xq^2 + xq^4 = 182 \\ xq + xq^3 + xq^5 = 546 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(1 + q^2 + q^4) = 182 \quad (1) \\ xq(1 + q^2 + q^4) = 546 \quad (2) \end{array} \right. \\
 & (2)
 \end{aligned}$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$q = \frac{546}{182} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 6, 18, 54, 162, 486).$$

$$\begin{aligned}
 \text{105. } & \left\{ \begin{array}{l} b^2 = ac \quad (1) \\ 2c = b + d \Rightarrow d = 2c - b \quad (2) \\ a + d = 32 \Rightarrow a = 32 - d \quad (3) \\ b + c = 24 \Rightarrow c = 24 - b \quad (4) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Substituindo (4) em (2), vem:  $d = 48 - 3b$  (5).

Substituindo (5) em (3), vem:  $a = -16 + 3b$  (6).

Substituindo (4) e (6) em 1, temos:

$$b^2 = (-16 + 3b)(24 - b) \Rightarrow b^2 - 22b + 96 = 0 \Rightarrow b = 16 \text{ ou } b = 6$$

$$\text{Para } b = 16, \text{ vem: } a = 32, c = 8 \text{ e } d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.(32,16,8)} \\ \text{P.A.(16,8,0)} \end{cases}$$

$$\text{Para } b = 6, \text{ vem: } a = 2, c = 18 \text{ e } d = 30 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.(2,6,18)} \\ \text{P.A.(6,18,30)} \end{cases}$$

$$\text{106. } x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow x = 12$$

P.A.  $(12 - r, 12, 12 + r) \Rightarrow (12 - r, 12, 18 + r)$  é P.G.

Então:  $12^2 = (12 - r)(18 + r) \Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 6$  ou  $r = -12$  (rejeitado porque a P.A. é crescente)

Então, os números são 6, 12 e 18.

$$\begin{aligned}
 \text{107. } & \text{Como } x, y \text{ e } z \text{ estão em P.G., nessa ordem, então } y^2 = xz. \text{ Assim, vem:} \\
 & (x + y + z)(x - y + z) = x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = \\
 & = x^2 + y^2 + z^2.
 \end{aligned}$$

**108.**  $a, b, c \text{ e } d$  estão em P.G.  $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ ad = bc \end{cases}$

Assim, temos:

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = ac - 2ad + bd.$$

**109.**  $(a, b, c)$  é P.A.  $\Rightarrow 2b = a + c$

$$(a, b, c) \text{ é P.G.} \Rightarrow b^2 = ac$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} (2b)^2 &= (a + c)^2 \Rightarrow 4b^2 = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow 4ac = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c. \end{aligned}$$

Como  $2b = a + c$ , então  $2b = 2a \Rightarrow b = a$ .

**110.**  $(a, b, c, d)$  é P.G.  $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$

$$\begin{aligned} (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 &= \\ &= b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 = \\ &= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd = \\ &= a^2 + 2ac + 2bd + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd = \\ &= (a - d)^2 \end{aligned}$$

**111.** medidas dos lados:  $x, xq, xq^2$

condição:  $(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2$  (teorema de Pitágoras)

Então, temos:

$$x^2q^4 = x^2 + x^2q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

**112.** medidas dos lados:  $x$ ,  $xq$  e  $xq^2$

condições: (1)  $q > 1$  (P.G. crescente)

(2)  $xq^2 < x + xq$  (condição para existência do triângulo)

$$\text{De (2) vem: } q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Fazendo a interseção, temos:

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**113.** medidas dos lados:  $\frac{x}{q}$ ,  $x$ ,  $xq$

$$\text{condições: (1)} \quad \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 1728$$

$$(2) \quad xq < x + \frac{x}{q}$$

De (1) vem  $x = 12$ , que, substituído em (2), dá:

$$q^2 - q - 12 < 0 \Rightarrow -3 < q < 4.$$

Como  $q$  deve ser positivo e divisor de 12, então temos:

$q = 1 \Rightarrow$  lados medindo 12, 12 e 12

$q = 2 \Rightarrow$  lados medindo 6, 12 e 24

$q = 3 \Rightarrow$  lados medindo 4, 12 e 36

e, ainda,  $q = 1,5 \Rightarrow$  lados medindo 8, 12, 18.

**114.**  $\text{sen}^2 x = \frac{\text{sen } x}{2} \cdot \text{tg } x \Rightarrow 2 \text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \text{sen}^2 x \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**118.**  $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2^2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 1$$

**120.**  $a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow \frac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

**123.**  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$   
 $100 < 3^{n-1} < 1000 \Rightarrow 3^4 < 100 < 3^{n-1} < 1000 < 3^7 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 < n - 1 < 7 \Rightarrow 5 < n < 8 \Rightarrow n \in \{6, 7\}$   
Então existem 2 termos:  $a_6$  e  $a_7$ .

**124.**  $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow (a_{10})^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$

A igualdade dada é falsa.

**125.** taxa de crescimento = 3% a.a.  $\Rightarrow q = 1,03$   
 $a_4 = 120\,000 \cdot (1,03)^3 = 131\,127$

**126.** taxa de crescimento = 10% a.a.  $\Rightarrow q = 1,1$   
Ao final de 4 anos, temos:  $a_5 = 100\,000 \cdot (1,1)^4 = 146\,410$ .

**127.** Vamos representar por  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  o volume de álcool existente na mistura após cada uma das operações realizadas. Temos:

$$a_1 = 12 - 3 = 9$$

$$a_2 = 9 - \frac{9}{12} \cdot 3 = \frac{27}{4}, \text{ pois a quantidade de álcool nos } 3 \ell \text{ retirados}$$

é de  $\frac{9}{12}$  do total.)

$$a_3 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} \cdot 3 = \frac{81}{16}, \text{ pois a quantidade de álcool nos } 3 \ell$$

retirados é de  $\frac{27}{12}$  do total.

Pode-se notar, então, que  $a_1, \dots, a_5$  é uma P.G. com  $a_1 = 9$  e  $q = \frac{3}{4}$ .

$$\text{Daí vem: } a_5 = a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{729}{256} \cong 2,85 \ell.$$

**129.**  $a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 = 10 \quad (1)$

$$a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = 30 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1), temos:

$$\frac{q^2(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)}{q(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)} = 3 \Rightarrow q = 3.$$

Substituindo em (1), temos:

$$3a_1 + 27a_1 + 243a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{273}.$$

**131.**  $a = a_p$

$$b = a_q = a_p \cdot Q^{q-p}$$

$$c = a_r = a_p \cdot Q^{r-p}$$

$$\text{Então: } a^{q-p} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = \frac{a^q}{a^p} \cdot \frac{b^r}{b^p} \cdot \frac{c^p}{c^q} =$$

$$= \frac{a_p^q}{a_p^r} \cdot \frac{a_p^r \cdot Q^{(q-p)r}}{a_p^p \cdot Q^{(q-p)p}} \cdot \frac{a_p^p \cdot Q^{(r-p)p}}{a_p^q \cdot Q^{(r-p)q}} =$$

$$= Q^{(q-p)(r-p)} \cdot Q^{(r-p)(p-q)} = Q^{(r-p)(q-p+p-q)} = Q^0 = 1$$

**132.**  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = q$ , então:

$$\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{q}$$

provando que  $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots\right)$  também é P.G.

**133.**  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = q$ , então:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = q^2, \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que  $(a_1, a_3, a_5, \dots)$  também é P.G.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = q^2, \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que  $(a_2, a_4, a_6, \dots)$  também é P.G.

**135.** P.G.:  $(3, \_, \_, -24, \_, \_)$

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = -24 \\ a_1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 3 \cdot (-2)^5 = -96$$

**136.**  $a_1 = 78\ 125$ ,  $a_n = 128$  e  $q = \frac{2}{5}$ , então:

$$128 = 78\ 125 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{5^7} \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

então devem ser interpolados 6 meios geométricos.

**137.**  $a_1 = 1458$ ,  $a_n = 2$  e  $q < \frac{1}{3}$ , então:

$$2 = 1458 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q = \left(\frac{2}{1458}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{3^6}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 3^{-\frac{6}{n-1}}$$

$$q < \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{6}{n-1}} < 3^{-1} \Rightarrow \frac{6}{n-1} > 1 \Rightarrow n-1 < 6 \Rightarrow n < 7$$

Como a P.G. deve ter no máximo 6 termos, então o número de meios a interpolar é no máximo 4.

**138.** P.G. ( $a, x, y, b$ )  $\Rightarrow \begin{cases} xy = ab & (1) \\ x^2 = ay & (2) \\ y^2 = xb & (3) \end{cases}$

De (1), vem:  $y = \frac{ab}{x}$ , que substituído em (2) implica:

$$x^2 = a \cdot \frac{ab}{x} \Rightarrow x^3 = a^2b \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Analogamente, } x = \frac{ab}{y} \Rightarrow y^2 = \frac{ab}{y} \cdot b \Rightarrow y^3 = ab^2 \Rightarrow y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}.$$

**140.** a)  $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \dots + \log_2 2^n a =$   
 $= \log_2 [a \cdot 2a \cdot 4a \cdot \dots \cdot 2^n a]$

O logaritmando é uma P.G., tal que  $a_1 = a$ ,  $q = 2$  e o número de termos é  $n + 1$ .

Para calcular esse produto, temos:

$$P = a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{E, então, } S = \log_2 \left[ a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a.$$

b) Sendo  $S = n + 1$ , então:

$$n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a \Rightarrow 1 = \frac{n}{2} + \log_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n}{2} = \log_2 a \Rightarrow a = 2^{1-\frac{n}{2}}.$$

**141.**  $\begin{cases} \log_a b = 4 & (1) \\ \log_q b = 2 & (2) \\ \log_c b = \frac{1}{100} & (3) \\ c = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} & (4) \end{cases}$

De (3), vem:  $b = c^{\frac{1}{100}}$  (5)

Substituindo (4) em (5), temos:  $b = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}$  (6)

Substituindo (6) em (1), vem:

$$\log_a \left( a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \right) = 4 \Rightarrow a^4 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} \quad (7)$$

Substituindo (6) em (2), vem:

$$\log_q \left( a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \right) = 2 \Rightarrow q^2 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \quad (8)$$

Comparando (7) e (8), temos:

$$\begin{aligned} q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} &= q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{400-n} = \frac{400-n(n-1)}{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 400n^2 = 400^2 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20 \end{aligned}$$

**143.**  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2n} = (a_2 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{2n}) \cdot (a_1 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2n-1})$

$$a_{2n} = 2^n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_2 = 2^2 = 4 \\ n=2 \rightarrow a_4 = 2^4 = 16 \\ n=3 \rightarrow a_6 = 2^6 = 64 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem par é 4, 16, 64, ..., em que  $a_2 = 4$  e  $q = 4$ .

$$a_{2n-1} = (-3)^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = (-3)^1 = -3 \\ n=2 \rightarrow a_3 = (-3)^3 = -27 \\ n=3 \rightarrow a_5 = (-3)^5 = -243 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem ímpar é  $-3, -27, -243, \dots$ , em que  $a_1 = -3$  e  $q = 9$ .

Entre os 55 termos iniciais há 28 termos ímpares e 27 termos pares. Assim:

$$P_{28} = (-3)^{28} \cdot (9)^{\frac{28 \cdot 27}{2}} = (-3)^{28} \cdot (9)^{378} = 3^{784}$$

$$P_{27} = 4^{27} \cdot 4^{\frac{27 \cdot 26}{2}} = 4^{27} \cdot 4^{351} = 4^{378} = 2^{756}$$

Assim:  $P_{55} = P_{28} \cdot P_{27} = 3^{784} \cdot 2^{756}$ .

$$\begin{array}{l} \text{146. } \begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_1 + a_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1q + a_1q^3 = 10 \\ a_1 + a_1q^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q(1+q^2) = 10 & (1) \\ a_1(1+q^2) = 5 & (2) \end{cases} \end{array}$$

Dividindo (1) por (2), membro a membro, vem:

$$q = 2 \Rightarrow a_1 = 1 \text{ e, portanto, } a_4 = 1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_4 = 8.$$

**147.** (base  $b$ , altura  $h$ , área  $a$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{por hipótese: } \frac{h}{b} = 8 \Rightarrow h = 8b \quad (1) \\ \text{propriedade dos termos da P.G.: } h^2 = ba \quad (2) \\ \text{área do triângulo: } a = \frac{b \cdot h}{2} \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\text{Substituindo (3) em (2), temos: } h^2 = \frac{b^2 h}{2} \Rightarrow h = \frac{b^2}{2}.$$

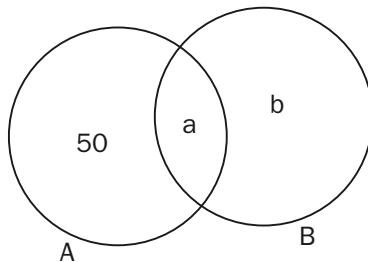
$$\text{Considerando (1), vem: } \frac{b^2}{2} = 8b \Rightarrow b = 16.$$

$$\begin{array}{l} \text{148. } S_3 = \frac{3(q^3 - 1)}{q - 1} = 21 \Rightarrow \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow q = -3 \text{ ou } q = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_4 = \frac{3(q^4 - 1)}{q - 1} = 45 \Rightarrow \frac{(q^2 + 1)(q + 1)(q - 1)}{q - 1} = 15 \Rightarrow \\ \Rightarrow (q^2 + 1)(q + 1) = 15 \end{array}$$

Verifica-se que  $q = -3$  não satisfaz esta última condição.  
Então,  $q = 2$ .

$$\text{Portanto: } S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93.$$

**149.**

$$50 + a + b = 62 \Rightarrow a = 12 - b \quad (1)$$

$$\text{P.G. } (50, a, b) \Rightarrow a^2 = 50b \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos:

$$a = 12 - b \Rightarrow a^2 = 144 - 24b + b^2 = 50b$$

$$b^2 - 74b + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 72 \text{ (rejeitado porque é maior que } n(A \cup B)) \\ \text{ou} \\ b = 2 \Rightarrow a = 10 \end{cases}$$

Então: P.G. (50, 10, 2) e  $n(A \cap B) = 10$ .

**150.**  $(x, y, z)$  é P.A.  $\Rightarrow (x = y - r \text{ e } z = y + r)$ 

Por hipótese,  $x + y + z = 15 \Rightarrow y - r + y + y + r = 15 \Rightarrow y = 5$   
e daí  $x = 5 - r$  e  $z = 5 + r$ .

$(x, y + 1, z + 5)$  é P.G.  $\Rightarrow (5 - r, 6, 10 + r)$  é P.G.

Então:  $6^2 = (5 - r)(10 + r) \Rightarrow r = 2$  ou  $r = -7$ .

Para  $r = 2$ ,  $x = 3$ ,  $y = 5$  e  $z = 7 \Rightarrow 3z = 21$ .

Para  $r = 7$ ,  $x = 12$  (rejeitado porque  $12 > 10$ ).

**151.** P.A.  $(a, a + r, a + 2r, \dots) \Rightarrow S_3 = 3(a + r)$ 

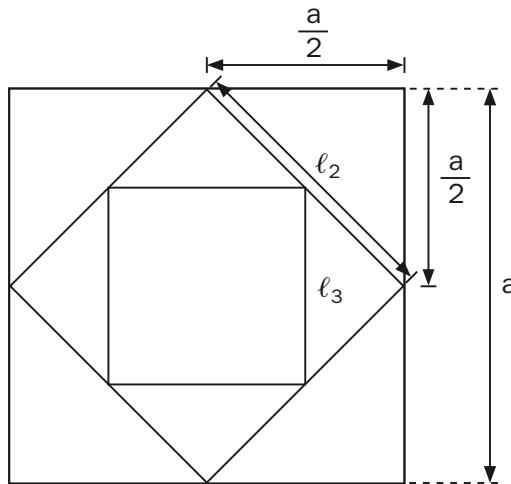
$$\text{P.G. } \left( a, \frac{2\sqrt{3}}{3}r, S_3, \dots \right) \Rightarrow \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}r \right)^2 = a \cdot S_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4r^2}{3} = 3a(a+r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 9ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{r}{3} \text{ ou } a = -\frac{4}{3}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{a}{r} = -\frac{4}{3}$$

153.



$\ell_2$  é lado de  $Q_2$

$$\ell_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$\ell_3$  é lado de  $Q_3$

$$\ell_3^2 = \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \ell_3 = \frac{a}{2}$$

Então, considerando os lados, temos:

$$\text{P.G. } \left( a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \dots, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \right).$$

Considerando as áreas, vem:

P.G.  $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots\right)$ , em que  $a_1 = a^2$  e  $q = \frac{1}{2}$ .

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2(2^n - 1)}{2^{n-1}}$$

**155.**  $\sum_{i=3}^n 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$  é a soma dos elementos de uma P.G.

em que  $a_1 = 2^3$ ,  $q = 2$  e o último termo é  $2^n$ . Essa P.G. tem  $n - 2$  termos, então:

$$\sum_{i=3}^n 2^i = \frac{2^3(2^{n-2} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 8 = 4088.$$

Daí resulta  $2^{n+1} = 4096 = 2^{12}$  e  $n = 11$ .

**157.**  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ,  $S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$  e  $S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1}$

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot \left[ (q^n - 1)^2 + (q^{2n} - 1)^2 \right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2)$$

$$S_n(S_{2n} + S_{3n}) = \frac{a_1}{q - 1} (q^n - 1) \cdot \left[ \frac{a_1}{q - 1} \cdot (q^{2n} - 1 + q^{3n} - 1) \right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^n - 1)(q^{3n} + q^{2n} - 2) = \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^{4n} + q^{2n} - 2q^n + 2)$$

então:  $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n(S_{2n} + S_{3n})$ .

**158.**  $S_1 = \frac{a_{10}q - a_1}{q - 1} = 3096 \quad (1)$

$$S_2 = \frac{a_{11}q - a_2}{q - 1} = 6138 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_{11}q - a_2}{a_{10}q - a_1} = \frac{6138}{3069} = 2 \Rightarrow \frac{a_1q^{11} - a_1q}{a_1q^{10} - a_1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q(q^{10} - 1)}{a_1(q^{10} - 1)} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Substituindo  $q = 2$  em (1), vem  $a = 3 \Rightarrow$  P.G.  $(3, 6, 12, \dots, 3072)$ .

**159.** Seja P.G.  $(a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1})$  de razão  $q$  e seja

$$\text{P.G. } \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \dots, \frac{1}{aq^{n-1}} \right) \text{ de razão } \frac{1}{q}.$$

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S^n = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n}$$

$$S' = \frac{\frac{1}{a} \left( \frac{1}{q^n} - 1 \right)}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{q^n - 1}{aq^{n-1}(q - 1)} \Rightarrow (S')^n = \frac{(q^n - 1)^n}{a^n q^{n(n-1)} (q - 1)^n}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{S}{S'} \right)^n &= \frac{\frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n}}{\frac{(q^n - 1)^n}{a^n q^{n(n-1)} (q - 1)^n}} = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n} \cdot \frac{a^n q^{n(n-1)} (q - 1)^n}{(q^n - 1)^n} = \\ &= a^{2n} q^{n(n-1)} = P^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{161.} \quad S &= 1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots = \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots\right)}_{S_1} + \underbrace{\left(2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots\right)}_{S_2}
 \end{aligned}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots\right) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

$$\textbf{165.} \quad S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1000} &= \frac{1 \cdot \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3 \left( \frac{1 - 3^{1000}}{3^{1000}} \right)}{-2} = \frac{3(3^{1000} - 1)}{2 \cdot 3^{1000}} = \\
 &= \frac{3^{1000} - 1}{2 \cdot 3^{999}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{999}
 \end{aligned}$$

Então,  $S_{1000} = S - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}$ , ou seja,  $S = S_{1000} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$ , isto

é, comete-se um erro de  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}$  para mais.

**166.**  $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$

Podemos decompor cada parcela, a partir da segunda, em uma soma de frações.

$$1 = 1$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

⋮

Verificamos que cada coluna forma uma nova série infinita.

$$1^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$2^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{2} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$3^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{4} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{8} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

e assim por diante.

As somas  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ , por sua vez, formam uma P.G. infinita de

primeiro termo 2 e razão  $\frac{1}{2}$ , então:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

**167.**

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$$

**168.**

$$2 + \frac{4}{m} + \frac{8}{m^2} + \dots = \frac{14}{5}$$

$$2 \left( 1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \dots \right) = \frac{14}{5}$$

Sendo  $S = 1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{m}} = \frac{m}{m-2}$ , temos:

$$2 \left( \frac{m}{m-2} \right) = \frac{14}{5} \Rightarrow m = 7.$$

**169.**  $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

$$xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$\text{então, } S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

e daí vem:

$$(1 - x) \cdot S = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 171. \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots = \\
 & \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}_{S_2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \\ S_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 172. \quad & S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \dots = \\
 & = (2 - 1) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right) + \dots + \\
 & + \left(\frac{2^n}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) + \dots = \\
 & = \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{2^n}{2^{2n-2}} + \dots\right) - \\
 & - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} + \dots\right) = \\
 & = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

**173.** a)  $0,417417\dots = \frac{417}{1000} + \frac{417}{1000000} + \dots =$

$$= \frac{\frac{417}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{417}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{417}{999} = \frac{139}{333}$$

b)  $5,121212\dots = 5 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \dots =$

$$= 5 + \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = 5 + \frac{12}{99} = 5 + \frac{4}{33} = \frac{169}{33}$$

c)  $0,17090909\dots = \frac{1}{100} (17,090909\dots) =$

$$= \frac{1}{100} \left[ 17 + \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + \dots \right] = \frac{1}{100} = \left[ 17 + \frac{1}{11} \right] = \frac{47}{275}$$

d)  $9,3858585\dots = \frac{1}{10} [93,858585\dots] =$

$$= \frac{1}{10} \left[ 93 + \frac{85}{100} + \frac{85}{10000} + \dots \right] = \frac{1}{10} \left[ 93 + \frac{85}{99} \right] = \frac{4646}{495}$$

**176.**  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 20$  (razão:  $q^2$ )  
 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots = 10$  (razão:  $q^2$ )

$$S_i = \frac{a_1}{1 - q^2} = 20 \text{ e } S_p = \frac{a_2}{1 - q^2} = 10, \text{ de onde vem:}$$

$$\frac{S_p}{S_i} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \text{ isto é, } q = \frac{1}{2}.$$

Substituindo  $q = \frac{1}{2}$  em  $S_i$ , vem:  $a_1 = 15$ .

**178.** a)  $a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow \frac{2(a^2 + 1)^2}{5a} = \frac{25a^2}{4(a^2 + 1)} \cdot q^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{8(a^2 + 1)^3}{125a^3} \Rightarrow q = \frac{2(a^2 + 1)}{5a}$$

A P.G. é decrescente  $\Rightarrow$  se  $a > 0, 0 < q < 1$

Então,  $0 < \frac{2(a^2 + 1)}{5a} < 1 \Rightarrow 0 < \underbrace{2(a^2 + 1)}_{(2)} < \underbrace{5a}_{(1)}$

(1)  $2(a^2 + 1) > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

(2)  $2(a^2 + 1) < 5a \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < a < 2$

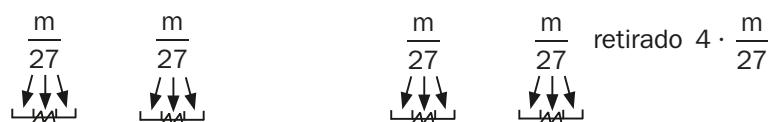
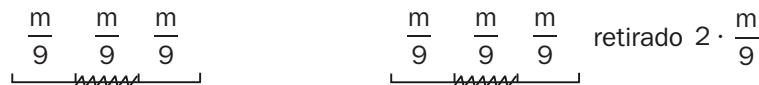
$(1) \cap (2) \Rightarrow \frac{1}{2} < a < 2$

b)  $q = a - \frac{1}{5} = \frac{2(a^2 + 1)}{5a} \Rightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$  (rejeitado)

Para  $a = 1 \Rightarrow q = \frac{4}{5}$  e  $a_1 = \frac{25}{8}.$

Então:  $S = \frac{\frac{25}{8}}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S = \frac{125}{8}.$

**179.**



$\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \dots\right)$  é P.G. em que  $a_1 = \frac{m}{3}$  e  $q = \frac{2}{3}$ .

$$S = \frac{\frac{m}{3}}{1 - \frac{2}{3}} S = m.$$

**180.**  $\ell_1 = 3 \Rightarrow p_1 = 9$

$$\ell_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{9}{2}$$

$$\ell_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow p_3 = \frac{9}{4}$$

etc.

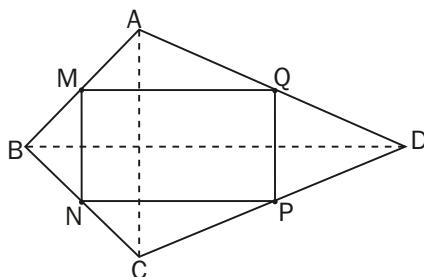
A sequência dos perímetros  $\left(9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \dots\right)$ , é P.G. em que  $a_1 = 9$

e  $q = \frac{1}{2}$ , então  $S = \frac{9}{1 - \frac{1}{2}} = 18$ .

**181.** Os perímetros  $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \dots$  formam uma P.G. em que  $a_1 = p$  e  $q = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{então } S = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p.$$

**182.** Seja ABCD um quadrilátero qualquer e seja MNPQ o quadrilátero que tem vértices nos pontos médios dos lados de ABCD.



Temos:

$$A_{AMQ} + A_{CNP} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABD} + \frac{1}{4} \cdot A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$A_{BNM} + A_{DPQ} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot A_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

Então a soma das áreas dos triângulos AMQ, CNP, BMN e DPQ é  $\frac{A}{2}$ ;

portanto, a área de MNPQ é  $\frac{A}{2}$ , em que A é a área de ABCD.

Concluímos, dessa forma, que as áreas dos quadriláteros construídos

conforme descrição do enunciado formam a P.G.:  $\left( A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \dots \right)$ , cuja

$$\text{soma é } S = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}} = 2A.$$

- 183.** As áreas dos círculos formam a P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  de razão  $\frac{1}{2}$ .

Determinemos a sequência  $(d_1, d_2, d_3, \dots)$  dos diâmetros dessas circunferências.

$$d_1 = d \Rightarrow a_1 = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d_2^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = \pi \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{\pi d^2}{16} \Rightarrow d_3^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3 = \frac{d}{2}$$

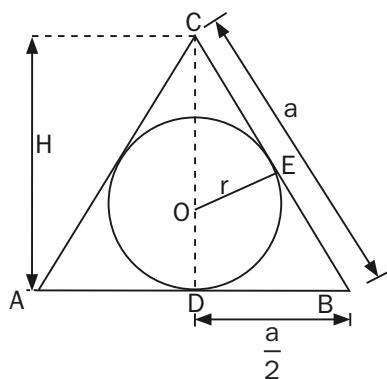
etc.

Os diâmetros formam a P.G.:  $\left( d, \frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{2}, \dots \right)$  cuja soma é  $A_0 A_n$ ,

$$\text{então } A_0 A_n = \frac{d}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = d(2 + \sqrt{2}).$$

**184.** I)  $\triangle BDC \sim \triangle OEC \Rightarrow \frac{BD}{OE} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{H-r} \quad (1)$$



Por Pitágoras, no  $\triangle CDB$ , vem:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

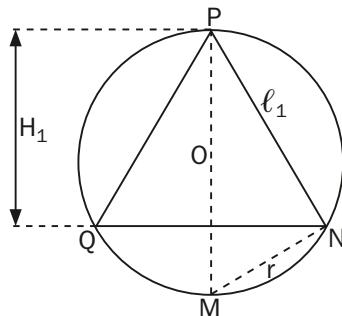
$$\text{De (1) e (2), temos: } \frac{a}{2r} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

II) Por Pitágoras, no  $\triangle MNP$ , vem:

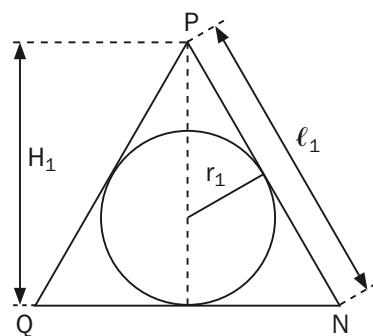
$$(PM)^2 = (PN)^2 + (MN)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2r)^2 = \ell_1^2 + r^2 \Rightarrow \ell_1 = \frac{a}{2} \quad (4)$$



III) Por analogia à parte (I), vem:

$$H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad (5) \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \quad (6)$$



## IV) Lados dos triângulos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{por hipótese, } a_1 = a \\ \text{de (4), } a_2 = \frac{a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left( a, \frac{a}{2}, \dots \right); q_{\Delta} = \frac{1}{2}$$

raios das circunferências:

$$\left. \begin{array}{l} \text{de (2), } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ \text{de (6), } r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left( \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{12}, \dots \right); q_{\odot} = \frac{1}{2}$$

áreas dos triângulos:

$$\text{por hipótese e de (2): } A_1 = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{de (4) e de (5): } A_2 = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Portanto: P.G.} \left( \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}, \dots \right); q_{\Delta} = \frac{1}{4}$$

áreas dos círculos:

$$\text{de (3): } \alpha_1 = \pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$$

$$\text{de (6): } \alpha_2 = \pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{12} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{48}$$

$$\text{Portanto: P.G.} \left( \frac{\pi a^2}{12}, \frac{\pi a^2}{48}, \dots \right); q_{\odot} = \frac{1}{4}.$$

Assim:

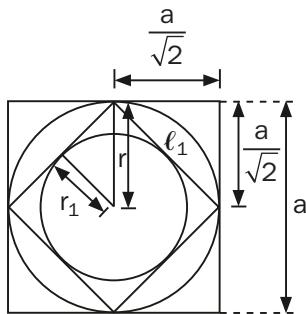
$$\text{a)} S_{\Delta} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\Delta} = 2a$$

$$\text{b) } S_{\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) } S_{\Delta} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{d) } S_{\circ} = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{\pi a^2}{9}$$

**185.** a)  $\ell_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$



1º quadrado: lado = a  $\Rightarrow p_1 = 4a$

2º quadrado: lado =  $\frac{a}{\sqrt{2}}$   $\Rightarrow p_2 = \frac{4a}{\sqrt{2}}$

P.G.  $\left(4a, \frac{4a}{\sqrt{2}}, \dots\right)$ ;  $q_{\square} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\square} = \frac{4a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = S_{\square} = 4a(2 + \sqrt{2})$$

b) 1º círculo:  $r = \frac{a}{2} \Rightarrow C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi a$

2º círculo:  $r_1 = \frac{\ell_1}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}$

P.G.  $\left( \pi a, \frac{\pi a}{\sqrt{2}}, \dots \right)$ ;  $q_{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\circ} = \frac{\pi a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \Rightarrow S_{\circ} = \pi a (2 + \sqrt{2})$$

c) 1º quadrado: lado =  $a \Rightarrow$  área =  $a^2$

2º quadrado: lado =  $\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow$  área =  $\frac{a^2}{2}$

P.G.  $\left( a^2, \frac{a^2}{2}, \dots \right)$ ;  $q_{\square} = \frac{1}{2}$

$$S_{\square} = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\square} = 2a^2$$

d) 1º círculo: raio =  $\frac{a}{2} \Rightarrow$  área =  $\frac{\pi a^2}{4}$

2º círculo: raio =  $\frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$  área =  $\frac{\pi a^2}{8}$

P.G.  $\left( \frac{\pi a^2}{4}, \frac{\pi a^2}{8}, \dots \right)$ ;  $q_{\circ} = \frac{1}{2}$

$$S_{\circ} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{\pi a^2}{2}$$

## CAPÍTULO IV — Matrizes

$$189. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$1) +/A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

$$2) +\not{A} = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times p}$$

$$\text{Assim: } +/(+\not{A}) = +/[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] = [p]$$

$$191. \quad \begin{aligned} x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2x = x \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

$$y = 3$$

$$z = 4$$

$$\begin{aligned} 5 = 5t \Rightarrow t = 1 \\ t^2 = t \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array} \right\}$$

$$195. \quad \begin{aligned} c_{21} &= a_{21} + b_{21} = 3 + 9 = 12 \\ c_{22} &= a_{22} + b_{22} = 4 + 10 = 14 \\ c_{23} &= a_{23} + b_{23} = 5 + 11 = 16 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} c_{21} + c_{22} + c_{23} = 12 + 14 + 16 = 42 \end{array} \right\}$$

**196.**  $\alpha + 2 = 3 \Rightarrow \alpha = 1$   
 $1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$   
 $1 + 0 = \gamma \Rightarrow \gamma = 1$   
 $2 + (-1) = \delta \Rightarrow \delta = 1$

**197.**  $\begin{cases} y^3 - y - 1 = 5 & (1) \\ y^2 + 2y + 2 = 10 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -4) \end{cases}$

Substituindo  $y = 2$  em (1):  $8 - 2 - 6 = 0$ . (V)

Substituindo  $y = -4$  em (1):  $-64 + 4 - 6 = 0$ . (F)

Portanto,  $y = 2$ .

$$\begin{cases} 3x + x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = -3) \\ 4x + x^2 + 2 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Substituindo  $x = 0$  em (2):  $0 + 0 + 3 = 0$ . (F)

Substituindo  $x = -3$  em (2):  $9 - 12 + 3 = 0$ . (V)

Portanto:  $x = -3$ .

**201.**  $|a_{11} - b_{11}| = |1 - 5| = |-4| = 4$   
 $|a_{12} - b_{12}| = |2 - 7| = |-5| = 5$   
 $|a_{21} - b_{21}| = |3 - 6| = |-3| = 3$   
 $|a_{22} - b_{22}| = |4 - 8| = |-4| = 4$   
 $d(A; B) = 5$

**204.** a)  $2X + A = 3B + C$   
 $2X = 3B + C - A$

$$X = \frac{1}{2}(3B + C - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 2 & \frac{3}{2} \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } X + A = \frac{1}{2}(B - C)$$

$$X = \frac{1}{2}(B - C) - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } 3X + A = B - X$$

$$3X + X = B - A$$

$$4X = B - A$$

$$X = \frac{1}{4}(B - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$$

$$3(X - A - B) = 2(X - C)$$

$$3X - 3A - 3B = 2X - 2C$$

$$X = 3A + 3B - 2C \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$$

**205.**  $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C \Rightarrow 3(X - A) = 2(B + X) + 6C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3X - 2X = 3A + 2B + 6C \Rightarrow X = 3A + 2B + 6C$$

então,  $X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

**207.** 
$$\begin{cases} X + Y = A & (1) \\ X - Y = B & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2X = A + B = [3 \quad 5 \quad 12] \Rightarrow X = \left[ \begin{array}{c} \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 6 \end{array} \right]$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = A - B = [-1 \quad 3 \quad 2] \Rightarrow Y = \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 1 \end{array} \right]$$

**208.** 
$$\begin{cases} 2X + 3Y = A + B \\ 3X + 4Y = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X + 9Y = 3A + 3B & (1) \\ 6X + 8Y = 2A - 2B & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow Y = A + 5B = \left[ \begin{array}{c} 11 \\ 28 \\ 9 \end{array} \right]$$

$$(1) 6X = 3A + 3B - 9Y = \left[ \begin{array}{c} -90 \\ -228 \\ -54 \end{array} \right] \Rightarrow X = \left[ \begin{array}{c} -15 \\ -38 \\ -9 \end{array} \right]$$

**210.**  $c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53} + a_{26} \cdot b_{63} + a_{27} \cdot b_{73} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + (-4) \cdot 6 + (-5) \cdot 7 = 1 + 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - 35 = -84$

**215.** a)  $\left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 7 \\ 5 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 12 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 7 \\ 5 \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 34 \\ 56 \end{array} \right]$

$$\left. \begin{array}{l} b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

**219.** Como  $(AB)_{3 \times 3}$  e  $A_{3 \times 3}$ , então  $B_{3 \times 3}$ .

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax & b & 2c \\ 3a & by & 5c \\ 2a & 3b & cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\left. \begin{array}{l} ax = 2 \\ 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 3 \\ by = 12 \\ 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 5c = 25 \Rightarrow c = 5 \\ cz = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 4$$

$$221. \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix}$$

Como  $AB = BA$ , então:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x+y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**225.** A e B são comutáveis significa dizer que  $AB = BA$ .

$$\begin{aligned} a) (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = \\ &= A^2 + AB + AB + B^2 = \\ &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = \\ &= A^2 - AB - AB + B^2 = \\ &= A^2 - 2AB + B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (A + B)^3 &= (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = \\ &= A^3 + A^2B + 2ABA + 2AB^2 + B^2A + B^3 = \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$

d) Analogamente.

e) Por indução:

I) Vale para  $k = 1$ :  $(AB)^1 = A^1 \cdot B^1 = AB$

II) Suponhamos válido para  $n = k$ :  $(AB)^k = A^k \cdot B^k$

III) Vamos provar que vale para  $n = k + 1$ :

$$(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB)^1 = A^k B^k \cdot AB = A^k \cdot A \cdot B^k \cdot B = A^{k+1} B^{k+1}$$

**226.** a)  $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b)  $(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$

c)  $A^2 - 2I_2 A + I_2^2 = (A - I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

d)  $A^3 - I_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 55 & 189 \\ 42 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$$

**228.** Fazendo  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , então  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

Logo:  $\begin{cases} a^2 + bc = 1 & (1) \\ bc + d^2 = 1 & (2) \\ ab + bd = 0 & (3) \\ ac + cd = 0 & (4) \end{cases}$

De (3) vem:  $b(a + d) = 0$ ; então, temos:

1ª possibilidade:  $a + d = 0$

Neste caso,  $d = -a = \pm \sqrt{1 - bc}$ , e para satisfazer (3) e (4) servem quaisquer  $b$  e  $c$ ,  $bc \leq 1$ .

2<sup>a</sup> possibilidade:  $b = 0$  e  $a + d \neq 0$

Neste caso, o sistema fica:

$$(1) a^2 = 1, (2) d^2 = 1, (4) c(a + d) = 0$$

cuja solução é ( $a = d = 1$  e  $c = 0$ ) ou ( $a = d = -1$  e  $c = 0$ ).

Assim:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$$

**229.** Fazendo  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , então  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,

logo:  $\begin{cases} a^2 + bc = a \ (1) \\ ab + bd = b \ (2) \\ ac + cd = c \ (3) \\ bc + d^2 = d \ (4) \end{cases}$

De (2) vem:  $b(a + d) = b$ ; então, temos:

1<sup>a</sup> possibilidade:  $a + d = 1$  e  $b$  qualquer

Neste caso, temos:

$$(1) \quad a^2 - a + bc = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}, \text{ com } bc \leq \frac{1}{4}$$

$$(4) \quad d^2 - d + bc = 0 \Rightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{1-bc}}{2}$$

Como  $a + d = 1$ , os sinais tomados diante do radical  $\sqrt{1-bc}$  devem ser opostos.

Note-se que para (3) o valor de  $c$  é qualquer.

2<sup>a</sup> possibilidade:  $b = 0$  e  $a + d \neq 1$

Neste caso, o sistema fica:

$$(1) \quad a^2 = a, \quad (3) \quad c(a + d) = c, \quad (4) \quad d^2 = d$$

cuja solução é  $(a = c = d = 0)$  ou  $(a = 1 = d \text{ e } c = 0)$ .

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{232. } \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 7 & z \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 2, y = 5 \text{ e } z = -4)$$

$$\text{233. } \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x & -y \\ 4 & 0 & -2z \\ -2 & z-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 4, y = -2 \text{ e } z = -1)$$

**234.** Para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  temos:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}.$$

$$\text{237. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+2x & -1+2y \\ 2+4x & -1+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2+2x=1 \\ 2+4x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -1 + 2y = 0 \\ -1 + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e, então, } x + y = 0.$$

**238.**  $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-x & 1-x \\ x-x^2 & 2x-x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{aligned} 2-x &= 1 \Rightarrow x = 1 \\ 1-x &= 0 \Rightarrow x = 1 \\ x-x^2 &= 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2x-x^2 &= 1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{portanto, } x &= 1. \end{aligned}$$

**239.**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + A^{-1})^3 = (2A)^3 = 8A^3 =$

$$= 8A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

**244.**  $B = PAP^{-1} \Rightarrow BP = PAP^{-1}P \Rightarrow BP = PA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2a+30 & -a+50 \\ 150+3b & -75+5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+30=78 \\ -a+50=26 \end{cases} \Rightarrow a=24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 150+3b=117 \\ -75+5b=-130 \end{cases} \Rightarrow b=-11$$

**246.**

a)  $AX = B$   
 $A^{-1}AX = A^{-1}B$   
 $I_nX = A^{-1}B$   
 $X = A^{-1}B$

b)  $AXB = I_n$   
 $A^{-1}AXB = A^{-1}I_n$   
 $I_nXB = A^{-1}$   
 $XBB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$   
 $XI_n = A^{-1}B^{-1}$   
 $X = A^{-1}B^{-1}$

c)  $(AX)^{-1} = B$   
 $AX = B^{-1}$   
 $A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}$   
 $I_nX = A^{-1}B^{-1}$   
 $X = A^{-1}B^{-1}$

d)  $BAX = A$   
 $B^{-1}BAX = B^{-1}A$   
 $I_nAX = B^{-1}A$   
 $AX = B^{-1}A$   
 $A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}A$

e)  $(AX)^t = B$   
 $[(AX)^t]^t = B^t$   
 $AX = B^t$   
 $A^{-1}AX = A^{-1}B^t$   
 $I_nX = A^{-1}B^t$   
 $X = A^{-1}B^t$

f)  $(A + X)^t = B$   
 $[(A + X)^t]^t = B^t$   
 $A + X = B^t$   
 $X = B^t - A$

**247.**

$$(XA)^{-1} = B \Rightarrow XA = B^{-1} \Rightarrow XAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}$$

Determinemos  $A^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{11} \text{ e } c = \frac{2}{11}$$

$$\begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{4}{11} \text{ e } d = \frac{3}{11}$$

Então,  $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

Determinemos  $B^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5e - 2g = 1 \\ 3g = 0 \end{cases} \Rightarrow g = 0 \quad e \quad e = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5f - 2h = 0 \\ 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{3} \quad e \quad f = \frac{2}{15}$$

Então,  $B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

$$X = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{165} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

- 250.** Devemos provar que  $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$  é a matriz inversa de  $ABC$ , isto é, que  $D(ABC) = (ABC)D = I_n$ .

$$\begin{aligned} 1^{\circ}) D(ABC) &= (C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}I_nBC = \\ &= C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}I_nC = C^{-1}C = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ}) (ABC)D &= (ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABI_nB^{-1}A^{-1} = \\ &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \end{aligned}$$

- 251.** Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  uma matriz inversível.

Determinemos  $A^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{d}{ad - bc} \quad e \quad z = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-b}{ad - bc} \quad e \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

então:  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  e  $(A^{-1})^t = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Determinemos  $(A^t)^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap + cr = 1 \\ bp + dr = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{d}{ad - bc} \text{ e } r = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} aq + cs = 0 \\ bq + ds = 1 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{-c}{ad - bc} \text{ e } s = \frac{a}{ad - bc}$$

$$\text{então: } (A^t)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{e daí } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

## CAPÍTULO V — Determinantes

**253.** a)  $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x + y)$

b)  $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

c)  $\begin{vmatrix} 2 \sin x & 3 \cos x \\ 1 - 2 \cos x & 3 \sin x + 2 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \sin x(3 \sin x + 2) - 3 \cos x(1 - 2 \cos x) =$$

$$= 6 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x =$$

$$= 6 + 4 \sin x - 3 \cos x$$

**254.** a)  $\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \log a - \frac{1}{2} \log b = \log \sqrt[4]{a} - \log \sqrt{b} =$

$$= \log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \log \sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left| \begin{array}{cc} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{array} \right| = 2m^2(m^3 - 1) - m(2m^4 - m) = \\ & = 2m^5 - 2m^2 - 2m^5 + m^2 = -m^2 \end{aligned}$$

**255.**  $a_{ij} = j - i^2 \Rightarrow a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = -3, a_{22} = -2$

e, então,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

**256.** a)  $\left| \begin{array}{cc} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{array} \right| = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \left( x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \right)$

b)  $\left| \begin{array}{cc} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{array} \right| = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left( x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1 \right)$

**257.**  $\left| \begin{array}{cc} x^2 & -1 \\ -1 & x^2 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$  (duas raízes reais distintas)

**258.** 
$$\left. \begin{array}{l} x = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow x = ad - bc \\ y = \det \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix} \Rightarrow y = -6(ad - bc) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = -6$$

**261.**  $D = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$262. \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = m - 1$$

$$D' = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & m+4 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = 5(m-1) \Rightarrow D' = 5D$$

$$264. \quad D_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = -8x - 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -3x^2 - 8x$$

$$D_1 = D_2 \Rightarrow -8x - 1 = -3x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

$$265. \quad \begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$266. \quad \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & -8 & -5 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \operatorname{cotg} x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 & (1) \\ \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

$$(2) \cos x = 0 \Rightarrow \left( x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \right)$$

Então, o menor valor  $x$  tal que  $0 < x < 2\pi$  é  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned}
 267. \quad \det A &= \begin{vmatrix} \sin^2 x & \sin^2 x & 0 \\ \cos^2 x & \cos^2 y & \sin^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{vmatrix} = \\
 &= r^2 \sin^2 x \cos^2 y + r^2 \sin^2 x \sin^2 y - r^2 \sin^2 x \cos^2 x = \\
 &= r^2 \sin^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y - \cos^2 x) = r^2 \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = \\
 &= r^2 \sin^2 x \sin^2 x = r^2 \sin^4 x
 \end{aligned}$$

$$268. \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = xy = 15 \quad (1)$$

$$\text{traço de } A = x + y + 1 = 9 \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2), vem: } \begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x = 5 \text{ ou } x = 3)$$

Para  $x = 5, y = 3$  e para  $x = 3, y = 5$ .

$$\begin{aligned}
 278. \quad D &= \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ \textcircled{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ \textcircled{x} & h & i & j \end{vmatrix} = \\
 &= x \cdot (-1)^{4+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ \textcircled{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & e \end{vmatrix} = \\
 &= -x^3 \cdot (-x^2) = x^5
 \end{aligned}$$

Sendo  $D < -32 \Rightarrow x^5 < -32 \Rightarrow x^5 < (-2)^5 \Rightarrow x < -2$ .

$$280. \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \cdot 1 & 11 \\ 5 & 12 \cdot 2 & 13 \\ 7 & 12 \cdot 3 & 17 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \cdot 1 & 11 \\ 1 \cdot 4 & 2 \cdot 4 & 3 \cdot 4 & 2 \cdot 4 \\ 10 & 5 & 3 \cdot 3 & 13 \\ 14 & 7 & 3 \cdot (-1) & 15 \end{vmatrix} = \\
 &= 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \cdot 1 \\ 3 & 11 & 5 \cdot 3 \\ 5 & 13 & 5 \cdot 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

**281.** A é uma matriz quadrada de ordem 4.

$$\text{Então, } \det(2A) = 2^4 \cdot \det A \Rightarrow \det(2A) = 16(-6) = -96$$

$$\text{Como } \det(2A) = x - 97, \text{ então } x - 97 = -96 \Rightarrow x = 1.$$

**282.** Se  $\det Q \neq 0$ , então Q é inversível, ou seja, existe  $Q^{-1}$  tal que  $Q^{-1}Q = I_4 = QQ^{-1}$  e daí:

$$Q^3 + 2Q^2 = 0 \Rightarrow Q^3Q^{-1} + 2Q^2Q^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q^2 + 2Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2Q^{-1} + 2QQ^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q + 2I_4 = 0 \Rightarrow Q = -2I_4$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Q = 16$$

$$\begin{aligned}
 \text{284. } D' &= \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 4 \cdot 2 \cdot x & 2 \cdot (-1) \cdot x^2 & 2 \cdot x^3 & 2 \cdot (-1) \cdot x^4 \\ 4 \cdot y & (-1) \cdot y^2 & y^3 & (-1) \cdot y^4 \\ 4 \cdot z & (-1) \cdot z^2 & z^3 & (-1) \cdot z^4 \\ 4 \cdot t & (-1) \cdot t^2 & t^3 & (-1) \cdot t^4 \end{vmatrix} = \\
 &= 4(-1)(-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8 \cdot D
 \end{aligned}$$

**286.** Multiplicamos a 1<sup>a</sup> linha por  $x$ , a 2<sup>a</sup> por  $y$  e a 3<sup>a</sup> por  $z$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & y \\ xyz & z^2 & z \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{289. } \begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 2c & c \\ x & 2z & z \\ m & 2p & p \end{vmatrix}}_{(*)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

(\*) 2<sup>a</sup> coluna =  $2 \cdot 3^{\text{a}}$  coluna e, então, o determinante é igual a zero.

$$\begin{aligned}
 \text{291. } \begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \operatorname{sen}^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \operatorname{sen}^2 c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a & \cos^2 a & \operatorname{sen}^2 a \\ \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b & \cos^2 b & \operatorname{sen}^2 b \\ \cos^2 c - \operatorname{sen}^2 c & \cos^2 c & \operatorname{sen}^2 c \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

porque 1<sup>a</sup> coluna = 2<sup>a</sup> coluna +  $(-1) \cdot 3^{\text{a}}$  coluna, isto é, a 1<sup>a</sup> coluna é combinação linear das outras duas.

**292.** Seja  $M = \begin{bmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$

Pelo teorema de Jacobi, podemos adicionar, à 1<sup>a</sup> linha, a 2<sup>a</sup> e a 3<sup>a</sup> linhas, obtendo:

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}, \text{ tal que } \det M = \det M'.$$

Mas  $\det M' = 0$  porque a 1<sup>a</sup> linha é nula. Então,  $\det M = 0$ .

**295.** Vamos somar à 3<sup>a</sup> coluna uma combinação linear das duas outras, a saber,  $1^a \times 100 + 2^a \times 10$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & (0+1\cdot 100+3\cdot 10) \\ 1 & 1 & (7+1\cdot 100+1\cdot 10) \\ 1 & 5 & (6+1\cdot 100+5\cdot 10) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 130 \\ 1 & 1 & 117 \\ 1 & 5 & 156 \end{vmatrix} =$$

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

**296.** Somando à 1<sup>a</sup> coluna as outras três colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

**297.**  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x & x & x \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x & x & x \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| = \\
 &= 0 + y \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| + x \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| + 0 = \\
 &= (x - y) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| = (x - y) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ a & b - a & c - a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{array} \right| = \\
 &= (x - y) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left| \begin{array}{cc} b - a & c - a \\ b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{array} \right| = \\
 &= (x - y)(b - a)(c - a) \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ b + a & c + a \end{array} \right| = (x - y)(b - a)(c - a)(c - b)
 \end{aligned}$$

**298.**  $\left| \begin{array}{ccc} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{array} \right| = (1)$

$$= \left| \begin{array}{ccc} a + b + c & a + b + c & a + b + c \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{array} \right| =$$

$$= (a + b + c) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{array} \right| = (2)$$

$$= (a + b + c) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a + b + c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a + b + c) \end{array} \right| =$$

$$= (a + b + c)(a + b + c)^2 = (a + b + c)^3$$

(1)  $(2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha}) + 1^{\text{a}} \text{ linha}$

(2)  $2^{\text{a}} \text{ coluna} - 1^{\text{a}} \text{ coluna} \text{ e } 3^{\text{a}} \text{ coluna} - 1^{\text{a}} \text{ coluna}$

$$\text{299.} \quad \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{array} \right| = (1)$$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 - a^2 & b^2 - (a+c)^2 & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} (b+c+a)(b+c-a) & (b+a+c)(b-a-c) & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{array} \right| =$$

$$= (a + b + c) \cdot \left| \begin{array}{ccc} b+c-a & b-a-c & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{array} \right|$$

Justificativa:

(1)  $1^{\text{a}} \text{ linha} - 2^{\text{a}} \text{ linha}$

**300.** Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , temos:

$$D = \left| \begin{array}{ccc} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \end{array} \right| = (1)$$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{ccc} \cos 0 & (\cos 0 + \cos a + \cos 2a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos a + \cos 2a + \cos 3a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 2a + \cos 3a + \cos 4a) & \cos 2a \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= (2) \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos a + 2 \cdot \cos^2 a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 3a + 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} = \\
 &= (1 + 2 \cos a) \cdot \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = (1 + 2 \cdot \cos a) \cdot D
 \end{aligned}$$

então, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , temos:

$$D = D + 2D \cdot \cos a \Rightarrow D \cdot \cos a = 0 \text{ e isso exige } D = 0.$$

Justificativas:

$$(1) 2^{\text{a}} \text{ coluna} + (1^{\text{a}} \text{ coluna} + 3^{\text{a}} \text{ coluna})$$

$$(2) \cos 2a + \cos 0 = 2 \cdot \cos^2 a, \forall a$$

$$\cos 3a + \cos a = 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a, \forall a$$

$$\cos 4a + \cos 2a = 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a, \forall a$$

$$\text{pois } \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$301. \quad \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \cos(x+b) & \sin(x+b) \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin(x + c - x - b) - \sin(x + c - x - a) + \sin(x + b - x - a) = \\
 &= \sin(c - b) + \sin(a - c) + \sin(b - a) \\
 &\text{que independe de } x.
 \end{aligned}$$

**302.**

$$\left| \begin{array}{ccc} a^2 & a^2 + 4a + 4 & a^2 + 8a + 16 \\ a^2 + 4a + 4 & a^2 + 8a + 16 & a^2 + 12a + 36 \\ a^2 + 8a + 16 & a^2 + 12a + 36 & a^2 + 16a + 64 \end{array} \right| = (1)$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} a^2 & 4a + 4 & 4a + 12 \\ a^2 + 4a + 4 & 4a + 12 & 4a + 20 \\ a^2 + 8a + 16 & 4a + 20 & 4a + 28 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} a^2 & 4(a+1) & 4(a+3) \\ a^2 + 4a + 4 & 4(a+3) & 4(a+5) \\ a^2 + 8a + 16 & 4(a+5) & 4(a+7) \end{array} \right| =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot \left| \begin{array}{ccc} a^2 & a+1 & a+3 \\ a^2 + 4a + 4 & a+3 & a+5 \\ a^2 + 8a + 16 & a+5 & a+7 \end{array} \right| \stackrel{(2)}{=}$$

$$= 2^4 \cdot \left| \begin{array}{ccc} a^2 & a+1 & a+3 \\ 4(a+1) & 2 & 2 \\ 4(a+3) & 2 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left| \begin{array}{ccc} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 2(a+3) & 1 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(3)}{=}$$

$$= 2^6 \cdot \left| \begin{array}{ccc} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2^6 \cdot 2^2 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^8 \cdot (a+1 - a-3) = 2^8 \cdot (-2) = -2^9$$

Justificativas:

- (1) 3ª coluna – 2ª coluna  
2ª coluna – 1ª coluna
- (2) 3ª linha – 2ª linha  
2ª linha – 1ª linha
- (3) 3ª linha – 2ª linha

**303.**  $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$

Como  $u = x^4$ , então  $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ .

**304.**  $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$$

**305.**  $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot [\det(2A)] = (\det A)(2^3 \cdot \det A) =$

$$= 2^3 \cdot (\det A)^2 = \det C^{-1} \Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^8} \Rightarrow |\det A| = \frac{1}{16}$$

**306.** 
$$\left| \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1$$

$$307. \quad \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & a & b \\ 1 & a & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 \\ a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} = a(a-b)^3$$

$$308. \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 & 5 \\ 1 & x & x & 6 \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x-1 & x-2 & 3 \\ x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & x-2 & 3 \\ 1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ x-4 & x-5 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1)(x-4)(x-6) = 0$$

então, S = {0, 1, 4, 6}.

$$311. \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{array} = \begin{vmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 \\ r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 \\ r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & r+1 & r^2+r+1 \\ r+1 & r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) \\ r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) & r^4+r^3+r^2+r+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r+1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -r & -r(r+1) \\ -r(r+1) & -r(r+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

pois no último determinante a 2ª linha é proporcional à 1ª.

$$313. \quad \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(-1)}} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot (x+3a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = -3a \Rightarrow S = \{a, -3a\}$$

$$314. \quad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & a & b \\ -x & -y & z & c \\ -x & -y & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & -1 & z & c \\ -1 & -1 & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 2 & a+z & b+t \\ 0 & 2z & c+t \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} =$$

$$= xy \cdot 2 \cdot 2z \cdot 2t = 8xyzt$$

$$315. \quad \left| \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{array} \right| = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$316. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \\ \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)(\cos z - \cos x) - (\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x)(\cos y - \cos x) = \\
 &= (\operatorname{sen} y \cdot \cos z - \operatorname{sen} z \cdot \cos y) + (\operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x) + \\
 &\quad + (\operatorname{sen} z \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos z) = \\
 &= \operatorname{sen}(y - z) + \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(z - x).
 \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

$$\text{317. } \left| \begin{array}{ccc} 1 & \operatorname{sen} a & \cos a \\ 1 & \operatorname{sen} b & \cos b \\ 1 & \operatorname{sen} c & \cos c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a & \cos b - \cos a \\ \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a & \cos c - \cos a \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a)(\cos c - \cos a) - (\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a)(\cos b - \cos a) = \\
 &= \left( 2 \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2} \right) \left( -2 \operatorname{sen} \frac{c+a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{c-a}{2} \right) - \\
 &\quad - \left( 2 \operatorname{sen} \frac{c-a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2} \right) \left( -2 \operatorname{sen} \frac{b+a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} \right) = \\
 &= 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{c-a}{2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{b+a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2} - \operatorname{sen} \frac{c+a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2} \right) = \\
 &= 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{c-a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} = \\
 &= 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-c}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{318. } \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cos 2a & \operatorname{sen} a \\ 1 & \cos 2b & \operatorname{sen} b \\ 1 & \cos 2c & \operatorname{sen} c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a & \operatorname{sen} a \\ 1 & 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 b & \operatorname{sen} b \\ 1 & 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 c & \operatorname{sen} c \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} 2 \cdot (\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b) & \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \\ 2 \cdot (\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen} c) & \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \end{array} \right| =$$

$$= 2 \cdot (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b) \cdot (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c) \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b & -1 \\ \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} c & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c)(\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b)$$

**319.**  $D = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} S_2 - S_1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot (S_2 - S_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix}$$

e, assim por diante, chegamos a:

$$\begin{aligned} D &= S_1 \cdot (S_2 - S_1)(S_3 - S_2)(S_4 - S_3) \dots (S_{n-1} - S_{n-2})(S_n - S_{n-1}) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n! \end{aligned}$$

**323.**  $P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2)$  se anula para  $x = 1$  ou  $x = 2$  ou  $x = 3$ .

**325.**  $(\log 70 - \log 7)(\log 700 - \log 7)(\log 7000 - \log 7)(\log 700 - \log 70) \cdot (\log 7000 - \log 70)(\log 7000 - \log 700) =$

$$\begin{aligned} &= \log \frac{70}{7} \cdot \log \frac{700}{7} \cdot \log \frac{7000}{7} \cdot \log \frac{700}{70} \cdot \log \frac{7000}{70} \cdot \log \frac{7000}{700} = \\ &= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 1000 \cdot \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \end{aligned}$$

**327.**  $(2 - 1)(x - 1)(-5 - 1)(x - 2)(-5 - 2)(-5 - x) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(-5 - x) = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -5)$   
 $S = \{-5, 1, 2\}$

**328.**  $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Se desenvolvemos  $\det M$  pela última linha, obtemos:

$$\det M = (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Reiterando o processo até eliminarmos o último determinante (de ordem 2), achamos:  $\det M =$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot (-1)^n \cdot r_2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot r_3 \cdots (-1)^{3+1} \cdot c_{n-2} \cdot (-1) \cdot b_{n-1} \cdot a_n = \\ &= (-1)^S r_1 r_2 r_3 \cdots c_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot a_n \cdot (-1) \end{aligned}$$

em que  $S$  é a soma dos termos da P.A. ( $n + 1, n, n - 1, \dots, 4$ ) que tem  $n - 2$  termos; portanto:

$$S = \frac{(n-2)(n+1+4)}{2} = \frac{(n-2)(n+5)}{2}.$$

Como  $n$  é múltiplo de 4,  $S$  é ímpar e então:

$\det M = (-1)^{S+1} \cdot r_1 r_2 r_3 \dots a_n$  é positivo.

- 329.** O cálculo do determinante de uma matriz  $M$  é feito utilizando operações de multiplicação e de adição com os elementos de  $M$ . Se os elementos de  $M$  são inteiros, então o resultado dessas operações também é inteiro.
- 330.** Vamos usar as propriedades dos determinantes e a relação de Stifel:

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$$

para calcular o determinante  $D$ :

$$D = (1) \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$(2) \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$(3) = \left| \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$(4) = \left| \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$(5) = \left| \begin{matrix} 1 & p & \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 & p+1 & \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 & p+2 & \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$(6) = \left| \begin{matrix} 1 & p & \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 & \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p+1 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = 1$$

Justificativas:

(1) 4<sup>a</sup> linha – 3<sup>a</sup> linha, 3<sup>a</sup> linha – 2<sup>a</sup> linha, 2<sup>a</sup> linha – 1<sup>a</sup> linha

(2) Stifel

(3) 3<sup>a</sup> coluna – 2<sup>a</sup> coluna, 2<sup>a</sup> coluna – 1<sup>a</sup> coluna

(4) Stifel

$$(5) \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ e } \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

(6) 3<sup>a</sup> linha – 2<sup>a</sup> linha, 2<sup>a</sup> linha – 1<sup>a</sup> linha

(7) Stifel

**331.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & c & d & a \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & c & d & a \\ 1 & d & a & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (a + b + c + d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & c - b & d - c & a - d \\ 0 & d - c & a - d & b - a \\ 0 & a - d & b - a & c - b \end{vmatrix} = \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &= (a + b + c + d) \begin{vmatrix} (a - b + c - d) & d - c & a - d \\ -(a - b + c - d) & a - d & b - a \\ (a - b + c - d) & b - a & c - b \end{vmatrix} = \\
 &= (a + b + c + d)(a - b + c - d) \begin{vmatrix} 1 & d - c & a - d \\ -1 & a - d & a - b \\ 1 & b - a & c - b \end{vmatrix} = \\
 &= -(a + b + c + d)(a - b + c - d) \begin{vmatrix} 1 & d - c & a - d \\ 1 & d - a & a - b \\ 1 & b - a & c - b \end{vmatrix} = \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &= -(a + b + c + d)(a - b + c - d) \begin{vmatrix} 1 & d - c & a - d \\ 0 & c - a & -(b - d) \\ 0 & b - d & c - a \end{vmatrix} = \\
 &= -(a + b + c + d)(a - b + c - d) \begin{vmatrix} c - a & -(b - d) \\ b - d & c - a \end{vmatrix} = \\
 &= -(a + b + c + d)(a - b + c - d)[(c - a)^2 + (b - d)^2] = \\
 &= -(a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2]
 \end{aligned}$$

- 332.** Seja  $M = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz simétrica.  
 Os complementos algébricos de dois elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são:  
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$  e  $A_{ij} = (-1)^{j+i} \cdot D_{ji}$ .  
 Como  $D_{ij} = D_{ji}$ , por se tratarem de determinantes de matrizes transpostas, então  $A_{ij} = A_{ji}$ .

- 333.** Chamemos de  $a_i$  o primeiro termo e de  $q_i$  a razão da P.G. colocada na linha  $i$  da matriz  $M$ . Temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 q_1 & a_1 q_1^2 & \dots & a_1 q_1^{n-1} \\ a_2 & a_2 q_2 & a_2 q_2^2 & \dots & a_2 q_2^{n-1} \\ a_3 & a_3 q_3 & a_3 q_3^2 & \dots & a_3 q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n q_n & a_n q_n^2 & \dots & a_n q_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det M = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ 1 & q_3 & q_3^2 & \dots & q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)(q_2 - q_1)(q_3 - q_1) \dots (q_n - q_{n-1})$$

então:

$$\det M = 0 \Leftrightarrow (\exists i, j \mid q_i = q_j).$$

**334.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} =$$

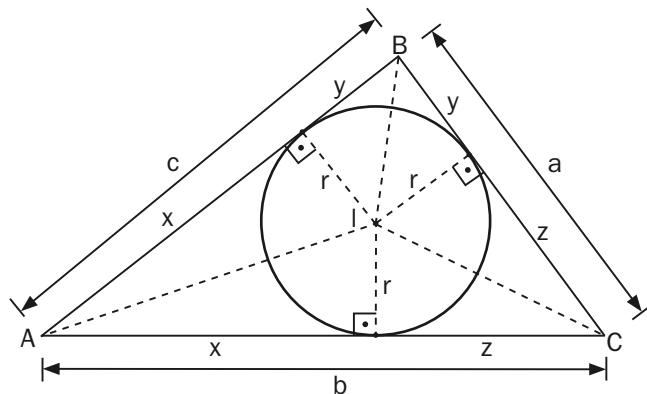
$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(n-2)!$$

**335.** Temos que provar a identidade:

$$(b - c) \cdot \cotg \frac{A}{2} + (c - a) \cdot \cotg \frac{B}{2} + (a - b) \cdot \cotg \frac{C}{2} = 0.$$

Consideremos a circunferência inscrita no triângulo ABC (figura a seguir). Seu centro  $I$  é o ponto de interseção das bissetrizes internas, então:



$$\left\{ \begin{array}{l} \cotg \frac{A}{2} = \frac{x}{r} \\ \cotg \frac{B}{2} = \frac{y}{r} \\ \cotg \frac{C}{2} = \frac{z}{r} \end{array} \right.$$

e daí

$$\left\{ \begin{array}{l} a = y + z = r \cdot \left( \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right) \\ b = x + z = r \cdot \left( \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right) \\ c = x + y = r \cdot \left( \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} \right) \end{array} \right.$$

Calculando cada cotangente nesse sistema, vem:

$$\cotg \frac{A}{2} = \frac{(a+b+c) - 2a}{2r} = \frac{p-a}{r}, \cotg \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r}, \cotg \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}$$

em que  $a + b + c = 2p$ .

Temos, então:

$$\begin{aligned} & (b-c) \cdot \cotg \frac{A}{2} + (c-a) \cdot \cotg \frac{B}{2} + (a-b) \cdot \cotg \frac{C}{2} = \\ &= \frac{1}{r} \cdot [(b-c)(p-a) + (c-a)(p-b) + (a-b)(p-c)] = \\ &= \frac{1}{r} [p(b-c+c-a+a-b) + a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)] = 0 \end{aligned}$$

**336.**  $6 \cdot (6 \text{ determinantes de } 5^{\text{a}} \text{ ordem}) =$   
 $= 6 \cdot 5 \cdot (5 \text{ determinantes de } 4^{\text{a}} \text{ ordem}) =$   
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (4 \text{ determinantes de } 3^{\text{a}} \text{ ordem}) =$   
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (3 \text{ determinantes de } 2^{\text{a}} \text{ ordem}) =$   
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \text{ termos}) = 6! = 720 \text{ termos}$

**337.**  $\begin{vmatrix} \frac{m!}{(m-2)!} & \frac{m!}{(m-1)!} & 1 \\ \frac{m!}{2!(m-2)!} & m & 6 \\ m(m-1) & \frac{m!}{(m-1)!} & 0 \end{vmatrix} = -10m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m(m-1) & m & 1 \\ \frac{m(m-1)}{2} & m & 6 \\ m(m-1) & m & 0 \end{vmatrix} = -10m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \quad m \Rightarrow m(m-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(m-1)}{-2} = -10 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ \text{ou} \\ m = -4 \quad (\text{rejeitado}) \end{cases}$$

- 338.** Seja  $M$  uma matriz antissimétrica de ordem  $2n - 1$  (ímpar). Por ser antissimétrica,  $M = -M^t$ .

Então:

$$\det M = \det (-M^t) = (-1)^{2n-1} \cdot \det M^t = -\det M^t = -\det M$$

e daí

$$2 \cdot \det M = 0$$

portanto:

$$\det M = 0.$$

## CAPÍTULO VI — Sistemas lineares

- 357.** Admitindo que  $-3t - 1 \neq 0, z - 2t \neq 0, t - y \neq 0$  e  $2z - y \neq 0$ , temos:

$$\frac{x+2y}{-3t-1} = 1 \Rightarrow x + 2y + 3t = -1$$

$$\frac{2x-y}{z-2t} = 1 \Rightarrow 2x - y - z + 2t = 0$$

$$\frac{x-2z}{t-y} = 2 \Rightarrow x + 2y - 2z - 2t = 0$$

$$\frac{3t-1}{2z-y} = 2 \Rightarrow 2y - 4z + 3t = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = -1 \\ 2x - y - z + 2t = 0 \\ x + 2y - 2z - 2t = 0 \\ 2y - 4z + 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 124 \text{ e}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{124} = \frac{-9}{31}$$

**358.** Fazendo  $\frac{1}{x} = x'$ ,  $\frac{1}{y} = y'$  e  $\frac{1}{z} = z'$ , temos:

$$\begin{cases} 2x' - y' - z' = -1 \\ x' + y' + z' = 0 \\ 3x' - 2y' + z' = 4 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_{x'} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x' = \frac{D_{x'}}{D} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = -3$$

$$D_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow y' = \frac{D_{y'}}{D} = \frac{-14}{9} \Rightarrow y = -\frac{9}{14}$$

$$D_{z'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow z' = \frac{D_{z'}}{D} = \frac{17}{9} \Rightarrow z = \frac{9}{17}$$

$$S = \left\{ \left( -3, -\frac{9}{14}, \frac{9}{17} \right) \right\}.$$

**360.**  $D = \begin{vmatrix} \sin a & -\cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} -\cos 2a & -\cos a \\ \sin 2a & \sin a \end{vmatrix} = -\sin a \cdot \cos 2a + \sin 2a \cdot \cos a = \\ = \sin(2a - a) = \sin a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sin a & -\cos 2a \\ \cos a & \sin 2a \end{vmatrix} = \sin a \cdot \sin 2a + \cos a \cdot \cos 2a = \\ = \cos(2a - a) = \cos a$$

Assim:  $x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \sin a$   
 $y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \cos a$

**361.**  $D = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ a+1 & 2b \end{vmatrix} = b(a-3)$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & 2b \end{vmatrix} = -3b \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{3}{3-a} \quad \left. \begin{array}{l} x=1 \\ a=0 \end{array} \right\} \Rightarrow a=0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a+1 & 5 \end{vmatrix} = 2(2a-3) \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{2(2a-3)}{b(a-3)} \quad \left. \begin{array}{l} y=2 \\ a=0 \end{array} \right\} \Rightarrow b=1$$

**362.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$D_x = \begin{vmatrix} 28-z & 1 \\ 32 & -1 \end{vmatrix} = z - 60 \Rightarrow x = \frac{z-60}{-3}$$

Como  $x > 0$  e  $z > 0$ , vem:  $0 < z < 60$  (1)

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 28-z \\ 2 & 32 \end{vmatrix} = 2z - 24 \Rightarrow y = \frac{2z-24}{-3} \Rightarrow z = \frac{3y-24}{-2} \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2), vem: } 0 < \frac{3y-24}{-3} < 60 \Rightarrow 0 < y < 8 \quad (3)$$

$$\text{Mas } 2x - y = 32 \Rightarrow y = 2x - 32 \quad (4)$$

$$\text{De (3) e (4), vem: } 0 < 2x - 32 < 8 \Rightarrow 16 < x < 20$$

Então, as condições são:  $16 < x < 20$ ,  $0 < y < 8$  e  $0 < z < 60$ .

**367.**

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ -5y = -10 \\ -5y = -10 \end{array} \right.$$

Somamos e substituímos a 2ª equação multiplicada por  $-2$  com a 3ª equação multiplicada por  $3$ . Do mesmo modo, somamos e substituímos a 3ª equação multiplicada por  $3$  com a 2ª equação multiplicada por  $-2$ .

A 2ª e a 3ª linhas do sistema são a mesma equação e, então, podemos suprimir uma delas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 5y = 10 \end{array} \right. \Rightarrow y = 2 \text{ e, portanto, } x = 3 - y \Rightarrow x = 1$$

$S = \{(1, 2)\}$ , sistema possível determinado.

**368. b)**

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \oplus}} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 1 \\ y - 4z + 3t = 4 \\ -y - z - 2t = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\oplus} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 1 \\ y - 4z + 3t = 4 \\ -5z - t = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 1 \quad (1) \\ y - 4z + 3t = 4 \quad (2) \\ -5z - t = 5 \quad (3) \end{array} \right.$$

Em (3), fazendo  $z = \alpha$ , vem:  $-5\alpha + t = 5 \Rightarrow t = 5 + 5\alpha$ .

Em (2), substituindo  $z$  e  $t$ , temos:

$$y - 4\alpha + 3(5 + 5\alpha) = 4 \Rightarrow y = -11 - 11\alpha$$

Em (1), substituindo  $y$  e  $z$ , temos:

$$-x + (-11 - 11\alpha) - 2\alpha = 1 \Rightarrow x = -12 - 13\alpha$$

O sistema é possível e indeterminado:

$$S = \{(-12 - 13\alpha, -11 - 11\alpha, \alpha, 5 + 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

c)

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) \times (-3) \\ (2) \end{array}} \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} (2) \times (-3) \\ (3) \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -2 \\ -4y - 2z = -2 \\ -12y - 6z = -20 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} (2) \times (-3) \\ (3) \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ 0 + 0 = -14 \text{ (falso)} \end{cases}$$

O sistema é impossível. Então,  $S = \emptyset$ .

**375.**

$$\begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2 - 1)y = (2a+1)^2 \\ (4a^2 - 1)x + (2a+1)y = (4a^2 - 1) \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) \times \frac{-(2a+1)}{2a-1} \\ (2) \end{array}} \begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2 - 1)y = (2a+1)^2 \\ (2a+1)(-2a)y = \frac{(-8a)(2a+1)}{2a-1} \end{cases} \xrightleftharpoons{\begin{array}{l} \text{se } a \neq \frac{1}{2} \\ a \neq 0 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2} \end{array}} y = \frac{4}{2a-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2 - 1)y = (2a+1)^2 \\ (2a+1)(-2a)y = \frac{(-8a)(2a+1)}{2a-1} \end{cases} \xrightleftharpoons{\begin{array}{l} a \neq 0 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{2a-1} \end{array}}$$

Portanto, se  $a \neq \frac{1}{2}$ ,  $a \neq 0$  e  $a \neq -\frac{1}{2}$ , o sistema é possível e determinado.

Analizando as outras possibilidades, temos:

1) Se  $a = \frac{1}{2}$ , o sistema é impossível, porque na primeira equação teremos  $0x + 0y = 4$ , que é falso.

2) Se  $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 & (\text{sistema possível e} \\ x - y = 1 & \text{indeterminado}) \end{cases}$

3) Se  $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 0x = 0 \end{cases}$  (sistema possível e indeterminado)

$$\text{376. } \begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{1} \oplus} \begin{cases} x + y = a \\ (1 - a^2)y = a(1 - a^2) \end{cases}$$

1) Se  $1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ , então  $0y = 0$ , sistema possível e indeterminado.

2) Se  $a \neq 1$  e  $a \neq -1$ ,  $y = a$  e  $x = 0$ , sistema possível e determinado.

3) Não há valores para  $a$  que tornem o sistema impossível.

$$\text{377. } \begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = 1 - m \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{2} \oplus} \begin{cases} x + my = 0 \\ (1 - m^2)y = 1 - m \end{cases}$$

Se  $1 - m^2 \neq 0$ , ou seja,  $m \neq 1$  e  $m \neq -1$ , então o sistema é possível

e determinado e  $S = \left\{ \left( -\frac{m}{m+1}, \frac{1}{m+1} \right) \right\}$ .

Se  $m = 1$ , o sistema fica  $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$ , então o sistema é possível e indeterminado e  $S = \{(-\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

Se  $m = -1$ , o sistema fica  $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = -2 \end{cases}$ , então o sistema é impossível e  $S = \emptyset$ .

**378.**  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ay = b \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ (a - 6)y = (b - 3) \end{cases}$

- 1) Se  $a - 6 = 0$  e  $b - 3 = 0$ , isto é, se  $a = 6$  e  $b = 0$ ,  $0y = 0 \Rightarrow$  sistema possível e indeterminado.
- 2) Se  $a = 6$  e  $b \neq 3$ , temos  $0y = b - 3$ , sistema impossível.
- 3) Se  $a \neq 6$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ , sistema possível e determinado.

**379.**  $\begin{cases} x + 2y = b \\ 2ax + 3y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2a)} \begin{cases} x + 2y = b \\ (3 - 4a)y = 1 - 2ab \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = b \\ (4a - 3)y = 2ab - 1 \end{cases}$$

- 1) Se  $4a - 3 = 0$  e  $2ab - 1 = 0$ , isto é, se  $a = \frac{3}{4}$  e  $b = \frac{1}{2a} = \frac{2}{3}$ , sistema possível e indeterminado.

Fazendo  $y = \alpha$ , então  $x = \frac{2}{3} - 2\alpha \Rightarrow S = \left\{ \left( \frac{2}{3} - 2\alpha, \alpha \right) \right\}.$

- 2) Se  $a \neq \frac{3}{4}$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ , sistema possível e determinado.

Então,  $y = \frac{2ab - 1}{4a - 3} \Rightarrow x = \frac{2 - 3b}{4a - 3} \Rightarrow S = \left\{ \left( \frac{2 - 3b}{4a - 3}, \frac{2ab - 1}{4a - 3} \right) \right\}.$

- 3) Se  $a = \frac{3}{4}$  e  $b \neq \frac{2}{3}$ , sistema impossível.

**380.** 
$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(x-m) \\ +}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ (4-m^2)y + (m^2+2m-1)z = 3-m \end{cases}$$

Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado,  $\forall m, m \in \mathbb{R}$  (sistema compatível).

**381.** 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases} \xrightarrow{\substack{(x-m) \\ (x-1) \\ +}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (-m+1)y = -2m+1 \\ -2y = -2+m \end{cases}$$

Na 3<sup>a</sup> equação, se  $m = 0$ , vem  $y = 1$

Então, temos  $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ ; sistema possível e determinado e

$$S = \{(1, 1)\}.$$

Na 2<sup>a</sup> Equação, se  $-m + 1 = 0$ , isto é, se  $m = 1$ , temos

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2y = -2 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sistema possível e determinado}$$

$$\text{e } S = \left\{ \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Se  $m \neq 0$  e  $m \neq 1$ , o sistema é indeterminado.

**382.** 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases} \xrightarrow{\substack{(x-p) \\ a \\ +}} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ (-bp + aq)y = -cp + ad = 0 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado se  $-bp + aq = 0$  e  $-cp + ad = 0$ .

Então, vem  $\begin{cases} -bp + aq = 0 \\ -cp + ad = 0 \Rightarrow p = \frac{ad}{c} \end{cases}$

Substituindo  $p = \frac{ad}{c}$  na 1<sup>a</sup> equação, vem:  $q = \frac{bd}{c}$ .

**383.** Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

encontramos  $x = \frac{m+2}{2}$  e  $y = \frac{2-m}{2}$ , que, substituídos na equação

$mx + y = 2$ , conduzem à equação  $m^2 + m = 0$ , que é satisfeita se  $m \in \{1, -2\}$ .

Conclusão:

$m = 1$  sistema possível e determinado, com  $x = \frac{3}{2}$  e  $y = \frac{1}{2}$

$m = -2 \Rightarrow$  sistema possível e determinado, com  $x = 0$  e  $y = 2$

$m \neq 1$  e  $m \neq -2 \Rightarrow$  sistema impossível

$$\text{384. } \begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases} \xrightarrow{\left( \times -\frac{2}{3} \right) \oplus} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + ay = 12 \\ \left( 4 - \frac{2a}{3} \right)y = b - 8 \end{cases}$$

O sistema será e indeterminado somente se  $4 - \frac{2a}{3} = 0$  e  $b - 8 = 0$ , ou seja, se  $a = 6$  e  $b = 8$ .

$$\text{394. } \begin{cases} mx - y + mz = m \\ 2x + mz = 3 \Rightarrow D = m^2(1-m) \\ mx + my = 2 \end{cases}$$

1) Se  $D \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{e} \\ m \neq 1 \end{cases}$  (sistema possível e determinado)

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 3 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix} = -m(m-1)(m-2) \Rightarrow x = \frac{m-2}{m}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = m(m-4)(m-1) \Rightarrow y = \frac{4-m}{m}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \\ m & m & 2 \end{vmatrix} = -(m-1)(m+4) \Rightarrow z = \frac{m+4}{m^2}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{m-2}{m}, \frac{4-m}{m}, \frac{m+4}{m^2} \right) \right\}$$

2) Se  $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x - y + 0z = 0 \\ 2x + 0z = 3 \Rightarrow \text{sistema impossível} \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$

3) Se  $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(z = \alpha)} y = \frac{\alpha + 1}{2} \text{ e, então, } x = \frac{3 - \alpha}{2}$$

sistema possível indeterminado  $\Rightarrow S = \left\{ \left( \frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

**395.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1)$

1) Se  $D \neq 0$ , então  $m \neq 1$  e  $m \neq -1 \Rightarrow$  sistema possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & -1 & m \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = m(2m-1)(m-1) \Rightarrow x = \frac{m(2m-1)}{m+1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) \Rightarrow y = \frac{m}{m+1}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = -2m^2 \Rightarrow z = \frac{2m^2}{1-m^2}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{m(2m-1)}{m+1}, \frac{m}{m+1}, \frac{2m^2}{1-m^2} \right) \right\}.$$

2) Se  $D = 0$ , suponhamos  $m = 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{subtração}} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -2y = -1 \\ -2y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

3) Se  $D = 0$ , seja  $m = -1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{subtração}} \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \text{ (falso)} \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

$$397. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a-4)z = 0 \\ -2y - 5z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a-4)z = 0 \\ (-2a+3)z = 0 \end{array} \right. \text{ então, sistema possível indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$398. \quad D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 2z = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ -3x + 2y = 3 - k \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \times \frac{3}{4} \\ \oplus \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ 2y - \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} - k \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \times \frac{1}{2} \\ \oplus \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ 0z = 5 - k \end{array} \right.$$

Conclusão: Temos sistema possível indeterminado somente se  $5 - k = 0$ , ou seja, se  $k = 5$ .

**399.** a) 
$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 4x + 10y + 2z = 5 \\ 6x + 15y - z = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \\ 8z = k - 3 \end{cases}$$

O sistema tem solução (é possível) se  $k - 3 = 3$ , ou seja,  $k = 6$ .

b) Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Fazendo  $y = \alpha$ , na 1ª equação, temos:

$$2x + 5\alpha - \frac{9}{8} = 1 \Rightarrow x = \frac{17 - 40\alpha}{16}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{17 - 40\alpha}{16}, \alpha, \frac{3}{8} \right), \forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

**401.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m-1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 6m^2 + 6m =$   
 $= 2m(m^2 - 3m + 3)$

$D = 0 \Leftrightarrow m = 0$ , considerando que  $m^2 - 3m + 3 > 0, \forall m, m \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $\forall m, m \in \mathbb{R}^*, D \neq 0$  e o sistema é determinado.

**402.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -m \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10m + 6$

$$D \neq 0 \text{ (sistema determinado)} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{5}$$

Então, será indeterminado se  $m = \frac{3}{5}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \times -3 \\ \times 2 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -7y + \frac{14}{5}z = 7 \\ 8y - \frac{16}{5}z = k - 2 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \times 8 \\ \times 7 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -y + \frac{2}{5}z = 1 \\ 0z = k + 6 \end{array} \right.$$

O sistema será indeterminado se  $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$ .

Então,  $m = \frac{3}{5}$  e  $k = -6$ .

**403.**  $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -a \\ a & -a & 6 \end{vmatrix} = (a + 6)(a - 3)$

1) sistema possível e determinado  $\Leftrightarrow D \neq 0 \Rightarrow a \neq -6$  e  $a \neq 3$

2) Se  $a = -6$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = -6 \\ -x + 2y + 6z = b \\ -6x + 6y + 6z = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 6z = -b \\ 2x - y + 3z = -6 \\ 3x - 3y - 3z = -1 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \textcircled{x-2} \\ \oplus \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{x-3} \\ \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 6z = -b \\ 3y + 15z = 2b - 6 \\ 3y + 15z = 3b - 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b - 6 = 3b - 1 \Rightarrow b = -5$$

E, então, sistema impossível se  $a = -6$  e  $b \neq -5$ .

3) Se  $a = 3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y - 3z = b \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = -b \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \textcircled{x-2} \\ \oplus \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{x-3} \\ \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 3z = -b \\ 3y - 3z = 2b + 3 \\ 3y - 3z = 3b + 2 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b + 3 = 3b + 2 \Rightarrow b = 1$$

E, então, sistema impossível se  $a = 3$  e  $b \neq 1$ .

**404.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Então, o sistema é possível e determinado, quaisquer que sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais.

**408.**  $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -1 \text{ e, portanto, } \lambda_1 + \lambda_2 = 4.$$

**409.**  $\begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ 2x - (1+\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \times \frac{-2}{1-\lambda} \\ \oplus \end{array} \quad (\lambda \neq 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ \frac{\lambda^2 - 11}{1-\lambda}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{11}$$

**415.** a)  $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2m$

$$6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ e, então, } \begin{cases} m \neq 3, \text{ sistema determinado} \\ m = 3, \text{ sistema indeterminado} \end{cases}$$

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3-m)(5-m)(5-3) = 2(m-3)(m-5)$

Se  $m \neq 3$  e  $m \neq 5$ , sistema determinado.

Se  $m = 3$  e  $m = 5$ , sistema indeterminado.

**416.**  $\begin{cases} kx + ky + z = 0 \\ x + ky + kz = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 2k^3 - 3k^2 + 1 = (k - 1)(k - 1)(2k + 1)$$

Portanto, para  $k \neq 1$  e  $k \neq -\frac{1}{2}$ , sistema determinado e para  $k = 1$

ou  $k = -\frac{1}{2}$ , sistema indeterminado.

**417.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{vmatrix} = 8m^2 + 20m + 12$

$$D = 0 \Rightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ ou } m = -\frac{3}{2}$$

1) Se  $m \neq -1$  e  $m \neq -\frac{3}{2}$ , sistema determinado.

2) Se  $m = -1$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} (x-4) \\ \oplus \\ (x-2) \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{(z=\alpha)} y = -\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{e, então, } x = -\frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \left( -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) Se  $m = \frac{-3}{2}$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{× -4} \\ \oplus \\ \text{× -1} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (z = \alpha) \\ \Rightarrow y = -\alpha \end{array}$$

e, então,  $x = 0$

Portanto,  $S = \{(0, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

**419.**  $\begin{cases} kx + 2y + z = 0 \\ -2kx - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -2k & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9k + 14 \Rightarrow 9k + 14 = 0 \Rightarrow k = -\frac{14}{9}$$

$$\begin{cases} -\frac{14}{9}x + 2y + z = 0 \\ \frac{28}{9}x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -14x + 18y + 9z = 0 \\ 28x - 9y + 27z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{× 7} \\ \oplus \\ \text{× -14} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -3y - 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (z = \alpha) \\ \Rightarrow y = -\frac{5\alpha}{3} \end{array}$$

e, então,  $x = -\frac{3\alpha}{2}$ .

$$S = \left\{ \left( -\frac{3\alpha}{2}, -\frac{5\alpha}{3}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$423. \quad D = \begin{vmatrix} -(m+1)^3 & (-m-1)^2 & (-m-1) & 1 \\ -(m+2)^3 & (-m-2)^2 & (-m-2) & 1 \\ (m+1)^3 & (m+1)^2 & (m+1) & 1 \\ (m^2+1)^3 & (m^2+1)^2 & (m^2+1) & 1 \end{vmatrix}$$

Considerando que  $-(m+1)^3 = (-m-1)^3$  e  $-(-m-2)^3$ , então  $D$  é determinante de Vandermonde.

$$D = [(-m-2) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (-m-1)] \cdot [(m^2+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (m+1)] \Rightarrow D = [-1] \cdot [2m+2] \cdot [2m+3] \cdot [m^2+m+2] \cdot [m^2+m+3] \cdot [m^2-m]$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2=0 \Rightarrow m=-1 \\ \text{ou} \\ 2m+3=0 \Rightarrow m=-\frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ m^2-m=0 \Rightarrow m=0 \text{ ou } m=1 \end{cases}$$

porque  $m^2 + m + 2 > 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$  e  $m^2 + m + 3 > 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $m \in \left\{-\frac{3}{2}, -1, 0, 1\right\}$ .

$$428. \quad D = \begin{vmatrix} (\operatorname{sen} \alpha - 1) & 2 & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 3 \operatorname{sen} \alpha & 4 \\ 3 & 7 \operatorname{sen} \alpha & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \operatorname{sen}^2 \alpha - 10 \operatorname{sen} \alpha - 24 = 0$$

Então,  $\operatorname{sen} \alpha = 12$  ou  $\operatorname{sen} \alpha = -2$ .

Ambas as soluções rejeitadas porque  $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$  e, portanto, não existem valores  $\alpha$  que satisfaçam a condição do problema.

**430.** b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

característica = 3

**431.**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A característica é 2, porque a 3<sup>a</sup> linha é igual à soma das duas primeiras.

**433.** a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & -(a-1) & (a-1) \\ 0 & -(a-1) & -(a+1)(a-1) & a(a-1) \end{bmatrix}$$

Se  $a \neq 1$ ,  $\rho = 3$

Se  $a = 1$ ,  $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\rho = 1$ .

b) 
$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{array} \right] \xrightarrow[\oplus]{\times -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{array} \right]$$

Se  $a \neq 2$ ,  $\rho = 3$ .

Se  $a = 2$ ,  $\rho = 2$ .

Ou, ainda:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{array} \right] \xrightarrow[\oplus]{\times -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-3 & a^2-9 & a^3-27 \end{array} \right]$$

Se  $a \neq 3$ ,  $\rho = 3$ .

Se  $a = 3$ ,  $\rho = 2$ .

Em síntese:  $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2 \text{ e } a \neq 3, \rho = 3. \\ \text{Se } a = 2 \text{ ou } a = 3, \rho = 2. \end{cases}$

**438.** a) 
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$  sistema possível e determinado

Portanto:

$$-6z = -8 \Rightarrow z = \frac{4}{3}$$

$$y - z = -2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$

$$x + y + 2z = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \left\{ \left( 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

b)

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$  sistema possível e indeterminado  
Fazendo  $z = \alpha$ , vem:

$$-y + 3\alpha = 0 \Rightarrow y = 3\alpha - 1$$

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow x = 1 - 2\alpha$$

$$S = \{(1 - 2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

439. a)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 0 \end{array}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 4 \Rightarrow$  sistema possível e indeterminado

b)

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}$$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$  sistema impossível

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 3 & -1 & -2 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 5 & -5 & | & -12 \\ 0 & 1 & -2 & | & -5 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$  sistema possível e determinado

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 1 & 2 & -3 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ -1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 2 & -1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 0 & 5 & -5 & | & 10 \\ 0 & -5 & 5 & | & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 0 & 5 & -5 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < n \Rightarrow$  sistema possível e indeterminado

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & | & 2 \\ -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 2 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$  sistema possível e indeterminado

$$\text{f)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 3 & -3 & 2 & | & 1 \\ 2 & -4 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 2 & -4 & 1 & | & -3 \\ 3 & -3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -6 & -1 & | & 1 \\ 0 & -6 & -1 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -6 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$  sistema impossível

**440.**  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & (3-a) & b^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 1-a & b^2-2 \end{bmatrix}$

a) Para  $a \neq 1$ , temos  $p(A) = p(B) = 3$  e sistema possível e determinado.

b) Para  $a = 1$  e  $b \neq \sqrt{2}$  e  $b \neq -\sqrt{2}$ , temos  $p(A) = p(B) = 2$  e sistema possível e indeterminado, com indeterminação simples.

c) Para  $a = 1$  e  $b = \pm\sqrt{2}$ , temos  $p(A) = p(B) = 1$  e sistema possível e indeterminado, com dupla indeterminação.

$$442. \quad D = \left| \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ad+bd & ab+ac+bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} a-b & a-c & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-c)(b+d) & (a-d)(b+c) \\ (a-b)cd & (a-c)bd & (a-d)bc \end{array} \right| =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline c+d & b+d & b+c \\ cd & bd & bc \end{array} \right| =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \left| \begin{array}{cc} b-c & b-d \\ (b-c)d & (b-d)c \end{array} \right| =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$D_3 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline b+c+d & a+c+d & 0 & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & 0 & ab+ac+bc \\ bcd & acd & B & abc \end{array} \right| =$$

$$= -B \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline b+c+d & a+c+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ac+bc \end{array} \right| =$$

$$= -B \left| \begin{array}{cc} a-b & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-d)(b+c) \end{array} \right| = -B(a-b)(a-d)(b-d)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-B}{(a-c)(b-c)(c-d)}$$

- 443.** O segundo sistema deve ter uma única solução ( $x = 1$  e  $y = 1$ ). Notemos que  $(1, 1)$  é solução do segundo sistema, qualquer que seja  $a$ . Para que não exista outra solução, a condição é

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.$$

**444.**  $\begin{cases} 2^{x+y+z} = 2^3 \\ 3^{x+z} = 3^9 + 2y \\ 5^{3+x} = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \\ x - z = -3 \end{cases}$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right]$$

$$\text{Então: } -2z = -8 \Rightarrow z = 4$$

$$-3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \{(1, -2, 4)\}.$$

**445.**  $D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \cos^2 C & -\cos A - \cos B \cdot \cos C \\ -\cos A - \cos B \cdot \cos C & 1 - \cos^2 B \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \cos^2 C)(1 - \cos^2 B) - (\cos A + \cos B \cdot \cos C)^2 =$$

$$= 1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

pois para ângulos de um triângulo vale a relação  
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$  (conforme se prova no volume 3 desta coleção).

Sendo  $D = 0$ , o sistema linear homogêneo dado é indeterminado.

Fazendo  $z = \alpha$ , temos:

$$\begin{cases} x - y \cdot \cos C = \alpha \cdot \cos B \\ -x \cdot \cos C + y = \alpha \cdot \cos A \end{cases}$$

em que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C \\ -\cos C & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \cos B & -\cos C \\ \alpha \cdot \cos A & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos B + \cos A \cdot \cos C)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \cdot \cos B \\ -\cos C & \alpha \cdot \cos A \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

e daí:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\alpha(\cos B + \cos A \cdot \cos C)}{\sin^2 C}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha(\cos A + \cos B \cdot \cos C)}{\sin^2 C}$$

**446.**  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array} \right]$$

Então:  $-4z = -2 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$$-2y = -1 \Rightarrow -y = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 - y - z \Rightarrow x = 0$$

Então,  $S = \emptyset$ , porque  $\log_3 x$  deve ter  $x > 0$ .

**447.** Vamos atribuir à variável a três valores distintos:  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$

$$\begin{cases} x + a_1y = 1 - a_1^2 \\ x + a_2y = 1 - a_2^2 \\ x + a_3y = 1 - a_3^2 \end{cases}$$

Tomando duas a duas, temos:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & 1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_2 & 1 & (1-a_2^2) \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & a_2 - a_1 & a_1^2 - a_2^2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & a_1 - a_2 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(1 + a_1a_2); -(a_1 + a_2)\}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2) \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & -(a_1 + a_3) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(1 + a_1a_3); -(a_1 + a_3)\}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2) \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 0 & 1 & -(a_2 - a_3) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(1 + a_2a_3); -(a_2 + a_3)\}$$

Verifica-se que as retas encontram-se duas a duas.

Tomando as três retas:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & 1 - a_1^2 \\ 1 & a_2 & 1 - a_2^2 \\ 1 & a_3 & 1 - a_3^2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_1^2 - a_2^2) \\ 0 & (a_3 - a_1) & (a_1^2 - a_3^2) \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3) \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1-a_2) \\ 0 & 0 & a_2-a_3 \end{array} \right]$$

em que se verifica que  $\rho(A) \neq \rho(B)$ , o que significa que o sistema é impossível, ou seja, as três retas não têm um ponto em comum.

- 448.** Chamemos de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$  os valores de  $x$  que anulam  $P(x)$ . Calculemos os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  de  $P(x)$ . Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^n a_0 + \alpha_1^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_2^n a_0 + \alpha_2^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_2 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_3^n a_0 + \alpha_3^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_3 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n+1}^n a_0 + \alpha_{n+1}^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_{n+1} a_{n-1} + a_n = 0 \end{array} \right.$$

O determinante  $D$  desse sistema é um determinante de Vandermonde cujos elementos característicos são  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$ , então:

$$D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1)$$

$$D \neq 0 \text{ (pois } \alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j).$$

Logo, o sistema só admite a solução trivial  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ ; portanto,  $P(x) \equiv 0$ .

- 449.** Fazendo  $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , temos:

$$\begin{aligned} P(1-x) &= a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e = \\ &= ax^4 - (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 - (4a+3b+2x+d)x + \\ &\quad + (a+b+c+d+e). \end{aligned}$$

Impondo  $P(x) = P(1-x)$ , vem:

$$\sim \left\{ \begin{array}{lcl} 4a + b & = -b \\ 6a + 3b + c & = c \\ 4a + 3b + 2c + d & = -d \\ a + b + c + d + e & = e \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{lcl} 4a + 2b & = 0 \\ 6a + 3b & = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d & = 0 \\ a + b + c + d & = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{equivalentes} \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 4c + 4d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 4c + 4d = 0 \end{cases}$$

E daí temos  $a = c + d$ ,  $b = -(2c + 2d)$ , sendo  $c$ ,  $d$ , e quaisquer.  
Então:  $P(x) = (c + d)x^4 - (2c + 2d)x^3 + cx^2 + dx + e$

Fazendo  $c + d = a$ , temos:

$$P(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a - c)x + e.$$

- 450.** O sistema admite a solução trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero.

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 - k_3 & k_1 - k_3 \\ k_2 - k_1 & k_2 + k_3 & k_3 - k_1 \\ k_1 - k_2 & k_3 - k_2 & k_3 + k_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 2k_3 & 2k_3 \\ 2k_1 & 0 & 2k_1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha}) \\ \leftarrow (2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha}) \\ \leftarrow (1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha}) \end{array}$$

$$D = 4k_1k_3 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 8k_1k_2k_3$$

Então,  $D \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$  e  $k_3 \neq 0$ .







FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

<b>VOLUME 1</b>	conjuntos, funções
<b>VOLUME 2</b>	logaritmos
<b>VOLUME 3</b>	trigonometria
<b>VOLUME 4</b>	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
<b>VOLUME 5</b>	combinatória, probabilidade
<b>VOLUME 6</b>	complexos, polinômios, equações
<b>VOLUME 7</b>	geometria analítica
<b>VOLUME 8</b>	limites, derivadas, noções de integral
<b>VOLUME 9</b>	geometria plana
<b>VOLUME 10</b>	geometria espacial
<b>VOLUME 11</b>	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.