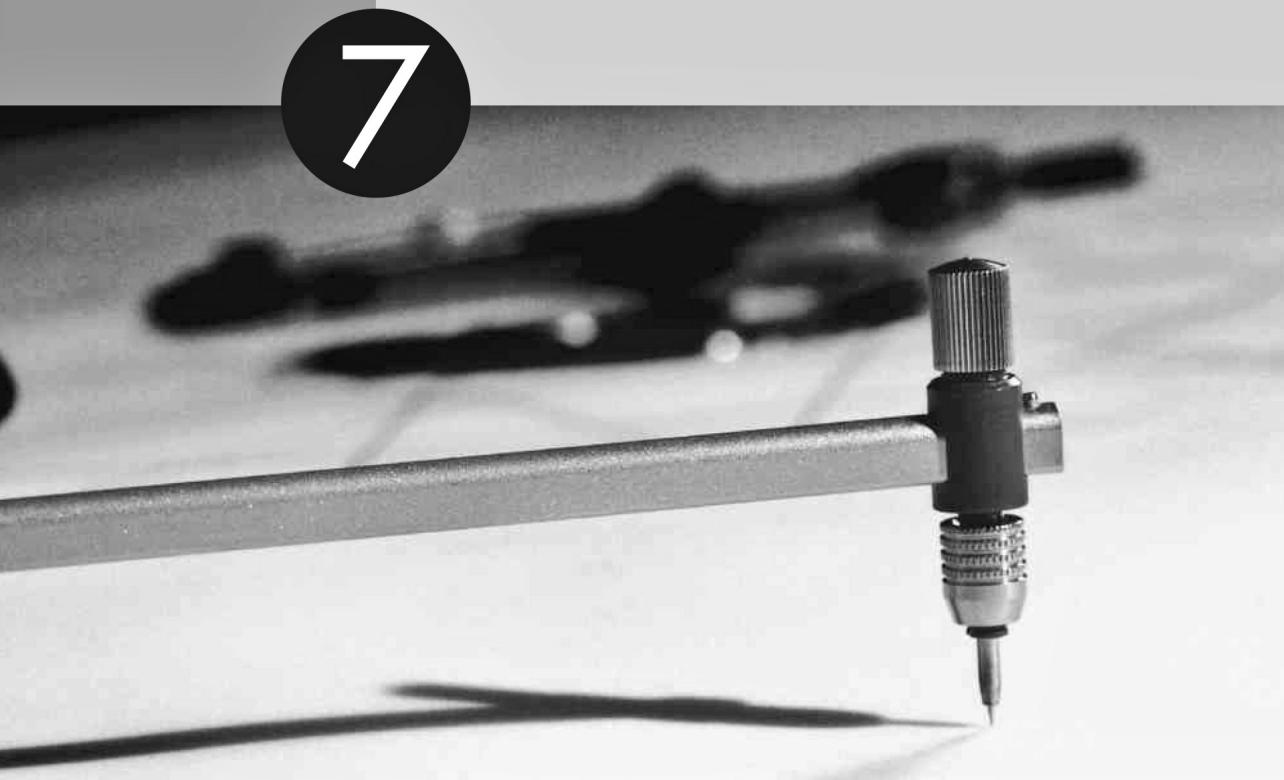


GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria analítica

7



GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria analítica

7

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

6^a edição | São Paulo – 2013

Copyright desta edição:

SARAIVA S. A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 7 : geometria analítica / Gelson Iezzi. — 6. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1754-9 (aluno)

ISBN 978-85-357-1755-6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios, etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Título. II. Título: Geometria analítica.

13-01116

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática: Ensino médio 510.7

Complemento para o professor — Fundamentos de matemática elementar — vol. 7

Gerente editorial: Lauri Cericato

Editor: José Luiz Carvalho da Cruz

Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Alexandre da Silva Sanchez/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar/Livio A. D'Ottaviantonio

Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçalho Ramos/Vanderlei Aparecido Orso

Digitação de originais: Elillyane Kaori Kamimura

Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes

Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Aline Araújo/Patricia Cordeiro/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Maura Loria/Renata Palermo

Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa

Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan

Projeto gráfico: Carlos Magno

Capa: Homem & Tróia Design

Imagem de capa: Medioimages/Photodisc/Getty Images

Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira

Ilustrações: Conceitograf/Mario Yoshida

Diagramação: TPG

Encarregada de produção e arte: Grace Alves

Coordenadora de edição eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves

Impressão e acabamento:

731.331.006.003



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875

De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30

www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 — Cerqueira César — São Paulo/SP — 05413-909

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 7, Geometria Analítica, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores

Sumário

CAPÍTULO I — Coordenadas cartesianas no plano	1
CAPÍTULO II — Equação da reta	7
CAPÍTULO III — Teoria angular	15
CAPÍTULO IV — Distância de ponto a reta	31
CAPÍTULO V — Circunferências	40
CAPÍTULO VI — Problemas sobre circunferências	48
CAPÍTULO VII — Cônicas	68
CAPÍTULO VIII — Lugares geométricos	85
APÊNDICE — Demonstração de teoremas de Geometria Plana	100

CAPÍTULO I — Coordenadas cartesianas no plano

- 2.** Calculando as medidas dos lados, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{26}; d_{BC} = \sqrt{72}; d_{AC} = \sqrt{26}.$$

Como $d_{AB} = d_{AC}$, o triângulo é isósceles.

Como $(\sqrt{72})^2 > (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{26})^2$, o triângulo é obtusângulo.

- 8.** Para o $\triangle ABC$ ser retângulo em B, devemos ter:

$$d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2.$$

$$5^2 + (x - 5)^2 = 4^2 + (-6)^2 + 1^2 + (x + 1)^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

- 10.** A é equidistante de B e C se, e somente se, $d_{AB} = d_{AC}$.

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + 1^2} \Rightarrow x = 2$$

- 11.** P pertence ao eixo das abscissas, portanto $P(x, 0)$.

P é equidistante de A e B, então $d_{PA} = d_{PB}$.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + 1^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (-5)^2} \Rightarrow x = \frac{29}{2}$$

Portanto: $P\left(\frac{29}{2}, 0\right)$.

- 12.** P pertence à bissetriz b_{24} , então $P(x, -x)$.

P é equidistante de A e B, portanto $d_{PA} = d_{PB}$.

$$\sqrt{x^2 + (-x - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (-x - 3)^2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Portanto: $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

- 14.** M(a, 0); N(0, a); P(x, y)

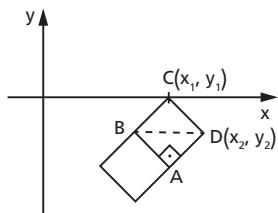
$\triangle MNP$ é equilátero se, e somente se, $d_{PM} \stackrel{(1)}{=} d_{PN} \stackrel{(2)}{=} d_{MN}$.

$$(1) d_{PM} = d_{PN} \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \Rightarrow x = y$$

$$(2) d_{PN} = d_{MN} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = \sqrt{(-a)^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{a \pm a\sqrt{3}}{2}$$

Há, portanto, duas possibilidades:

$$P\left(\frac{a + a\sqrt{3}}{2}, \frac{a + a\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } P\left(\frac{a - a\sqrt{3}}{2}, \frac{a - a\sqrt{3}}{2}\right).$$

16.Calculamos, inicialmente, o valor de d_{AB} :

$$d_{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Calculemos d_{AD} :

$$d_{AD} = \sqrt{(x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2}.$$

Como $d_{AD} = d_{AB}$ (os lados de um quadrado têm medidas iguais), vem:

$$\sqrt{(x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - 10x_2 + 4y_2 + 27 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Aplicando o teorema de Pitágoras no } \triangle ABD, \text{ vem: } d_{BD}^2 = d_{AB}^2 + d_{AD}^2. \\ (x_2 - 4)^2 + (y_2 + 1)^2 = 2 + (x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2$$

$$\text{De onde vem: } x_2 - y_2 = 7, \text{ ou seja, } x_2 = y_2 + 7 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$y_2^2 + 14y_2 + 49 + y_2^2 - 10(y_2 + 7) + 4y_2 + 27 = 0$$

$$\text{ou seja: } y_2^2 + 4y_2 + 3 = 0 \Rightarrow (y_2 = -1 \text{ ou } y_2 = -3) \Rightarrow (x_2 = 6 \text{ ou } x_2 = 4).$$

Portanto, $D(x_2, y_2) = D(6, -1)$ ou $D(x_2, y_2) = (4, -3)$.

Analogamente, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2.$$

$$(x_1 - 5)^2 + (y_1 + 2)^2 = 2 + (x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 5 \quad (3)$$

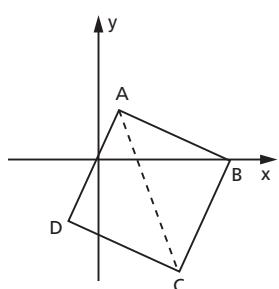
$$\text{Como } d_{BC} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 2y_1 + 15 = 0 \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4), temos:

$$y_1^2 + 2y_1 = 0 \Rightarrow (y_1 = 0 \text{ ou } y_1 = -2) \Rightarrow (x_1 = 5 \text{ ou } x_1 = 3)$$

Portanto: $C(x_1, y_1) = (5, 0)$ ou $C(x_1, y_1) = (3, -2)$.

17.

$$A(1, 2); C(3, -4)$$

$$x_B > x_D$$

AC é diagonal do $\square ABCD$.

Aplicamos o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$.

$$d_{AC}^2 = d_{BC}^2 + d_{AB}^2 \quad (1)$$

Utilizamos a condição de igualdade das medidas dos lados do quadrado:

$$d_{BC} = d_{BA} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2^2 + (-6)^2 = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 10 = 0 \quad (3)$$

$$(2) \quad \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

$$x - 3y = 5 \Rightarrow x = 3y + 5 \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), vem:

$$2(9y^2 + 30y + 25) + 2y^2 - 8(3y + 5) + 4y - 10 = 0$$

$$y^2 + 2y = 0 \Rightarrow (y = 0 \text{ ou } y = -2) \Rightarrow (x = 5 \text{ ou } x = -1)$$

Portanto, temos os pontos: (5, 0) e (-1, -2).

Como $x_B > x_D$, então B(5, 0) e D(-1, -2).

- 19.** A(5, 3); B(-1, -3); C(x, 0)

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$$

$$\text{Utilizando a coordenada } y, \text{ vem: } r = \frac{0 - 3}{-3 - 0} = 1.$$

- 22.** A(4, -2); B($\frac{2}{3}$, -1)



B é ponto médio de AC. Então:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{4 + x_1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{8}{3} \\ -1 = \frac{-2 + y_1}{2} \Rightarrow y_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ ponto } C\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$$

C é ponto médio de BD. Assim:

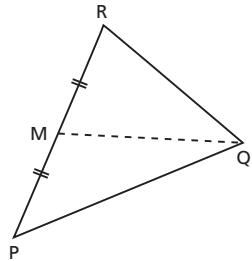
$$\left. \begin{array}{l} -\frac{8}{3} = \frac{x + \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow x = -6 \\ 0 = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ ponto } D(-6, 1)$$

O segmento deve ser prolongado até o ponto D(-6, 1).

24. M é ponto médio de PR.

$$\left. \begin{array}{l} x_M = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \\ y_M = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Portanto: } d_{QM} = \sqrt{(x_Q - x_M)^2 + (y_Q - y_M)^2} = \\ = \sqrt{(5)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{221}}{2}.$$



25. As diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio. Assim: E é ponto médio de AC:

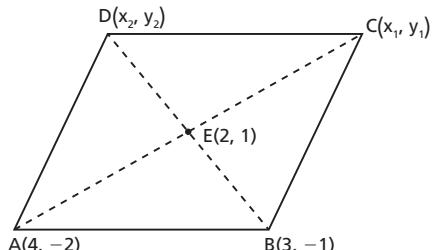
$$\left. \begin{array}{l} 2 = \frac{x_1 + 4}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 = \frac{y_1 - 2}{2} \Rightarrow y_1 = 4 \end{array} \right\}$$

Então, C(0, 4).

E é ponto médio de BD:

$$\left. \begin{array}{l} 2 = \frac{x_2 + 3}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \\ 1 = \frac{y_2 - 1}{2} \Rightarrow y_2 = 3 \end{array} \right\}$$

Então, D(1, 3).

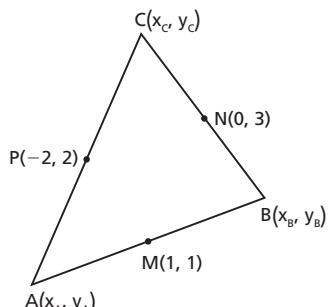


27. M é ponto médio de AB:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 2 \\ 1 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 2 \end{array} \right\}$$

N é ponto médio de BC:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 0 \\ 3 = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 6 \end{array} \right\}$$



P é ponto médio de AC:

$$\left. \begin{array}{l} -2 = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = -4 \\ 2 = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = 4 \end{array} \right\}$$

Temos, então, dois sistemas:

$$(1) \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_B + x_C = 0 \\ x_A + x_C = -4 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \begin{cases} y_A + y_B = 2 \\ y_B + y_C = 6 \\ y_A + y_C = 4 \end{cases}$$

Resolvendo (1), vem: $x_A = -1$, $x_B = 3$ e $x_C = -3$.

Resolvendo (2), vem: $y_A = 0$, $y_B = 2$ e $y_C = 4$.

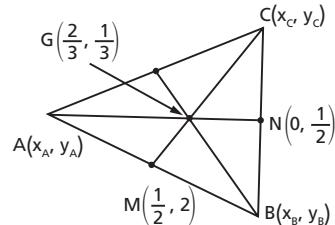
Portanto: A($-1, 0$), B($3, 2$) e C($-3, 4$).

- 30.** G($\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$) é baricentro.

Então G divide \overrightarrow{AN} na razão 2.

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GN}} = 2 \text{ e daí:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_A - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 0} = 2 \Rightarrow x_A = 2 \\ \frac{y_A - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y_A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(2, 0)$$



M é ponto médio de AB, então:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -1 \\ 2 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow B(-1, 4)$$

N é ponto médio de BC, então:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{-1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{4 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow C(1, -3)$$

- 32.** Mé ponto médio de AB, então:

$$\left. \begin{array}{l} -4 = \frac{-4 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -4 \\ 6 = \frac{3 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow B(-4, 9)$$

Temos, ainda:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C + 4)^2 + (y_C - 9)^2} = 10 \quad (1)$$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_C + 4)^2 + (y_C - 3)^2} = 8 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) x_C^2 + 8x_C + 16 + y_C^2 - 18y_C + 81 = 100 \\ (2) x_C^2 + 8x_C + 16 + y_C^2 - 6y_C + 9 = 64 \end{array} \right.$$

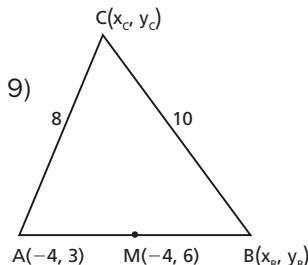
Multiplicando (2) por -1 e adicionando membro a membro, vem:

$$-12y_C + 72 = 36 \Rightarrow y_C = 3$$

Substituindo $y_C = 3$ em (2), vem:

$$x_C^2 + 8x_C - 48 = 0 \Rightarrow x_C = 4 \text{ ou } x_C = -12$$

Então: C(4, 3) ou C(-12, 3).



- 34.** Com a teoria dada até aqui é possível resolver a questão de duas maneiras:

Solução 1

Calcular as medidas dos quatro lados e verificar se lados opostos têm medidas iguais.

Usando a fórmula da distância, encontramos:

$$d_{AB} = \sqrt{10}, \quad d_{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad d_{CD} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{e} \quad d_{DA} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

e constatamos que $d_{AB} \neq d_{CD}$ e $d_{BC} \neq d_{DA}$.

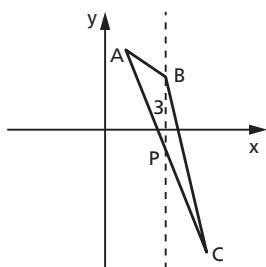
Solução 2

Calcular os pontos médios das diagonais e verificar se coincidem. Usando a fórmula do ponto médio, encontramos:

$$M = \left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ (médio de AC)} \text{ e } N = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ (médio de BD)}$$

constatamos que $M \neq N$.

Conclusão: usando qualquer um dos dois processos, verificamos que ABCD não é paralelogramo.

41.

Tendo abscissa 3, igual à de B, P só poderá ser interior ao lado AC.

Impondo P, A e C colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e daí } m = -1.$$

49.

Chamemos de $P(a, b)$ um ponto da reta AB que é equidistante dos eixos cartesianos. P está obrigado às seguintes condições:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } |a| = |b|$$

e daí vem:

$$2a - 7b + 17 = 0 \quad (1) \text{ e } a = \pm b \quad (2)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$a = b = \frac{17}{5} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{17}{9} = -b$$

$$\text{e, portanto, } P\left(\frac{17}{5}, \frac{17}{5}\right) \text{ ou } P\left(-\frac{17}{9}, \frac{17}{9}\right).$$

CAPÍTULO II — Equação da reta

59.

A reta \overleftrightarrow{AO} é a bissetriz dos quadrantes pares; portanto, $y_A = -x_A$. (1)

$$d_{AO} = \sqrt{2} \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = 2 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem $A(-1, 1)$.

A reta \overleftrightarrow{BO} é a bissetriz dos quadrantes ímpares; portanto, $y_B = x_B$. (3)

$$d_{BO} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_B^2 + y_B^2 = 8 \quad (4)$$

Resolvendo o sistema formado por (3) e (4), vem $B(2, 2)$.

Portanto, a reta que passa pelos pontos A e B é:

$$x - 3y + 4 = 0$$

- 62.** A reta r passa pelos pontos $(4, 0)$ e $(0, 2)$; então, $r: x + 2y - 4 = 0$. (1)
A reta s passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 4)$; então, $s: 4x + y - 4 = 0$. (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem $x = \frac{4}{7}$ e $y = \frac{12}{7}$.
Portanto, $r \cap s = \left\{ \left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7} \right) \right\}$.

- 64.** Resolvendo o sistema formado pelas equações de duas retas, temos:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = ax + 2a \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2(1-a)}{a+1} \Rightarrow y = \frac{4a}{a+1}$$

Para que $P\left(\frac{2(1-a)}{a+1}, \frac{4a}{a+1}\right)$ esteja no primeiro quadrante, devemos ter:

$$\frac{2(1-a)}{a+1} \geq 0 \text{ (1)} \quad \text{e} \quad \frac{4a}{a+1} \geq 0 \text{ (2)}$$

De (1) vem $-1 < a \leq 1$ e de (2) vem $a \leq -1$ ou $a \geq 0$.

Fazendo a interseção, temos $0 \leq a \leq 1$.

- 69.** Escolhemos duas dentre as três equações e calculamos os valores de x e y . Tais valores devem satisfazer a terceira equação.

$$\begin{cases} 3x - 3y = -2a \\ 3x + 3y = 4a \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{3} \Rightarrow y = a$$

$\left(\frac{a}{3}, a \right)$ deve pertencer à reta $ax - y = 0$, então:

$$a \cdot \frac{a}{3} - a = 0 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 3$$

Obs.: Para $a = 0$, o ponto de interseção é $(0, 0)$. As três retas são:
 $y = x$ (bissetriz b_{13}); $y = -x$ (bissetriz b_{24}) e $y = 0$ (eixo x).

Para $a = 3$, o ponto de interseção é $(1, 3)$. As três retas são:

$$x - y + 2 = 0, \quad x + y - 4 = 0 \quad \text{e} \quad 3x - y = 0$$

- 71.** Consideremos os sistemas de retas, tomadas duas a duas:

$$\begin{cases} s: 3x + 2y = 5 \\ t: x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = -5$$

$$\begin{cases} r: x - 2y = -m \\ s: 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-m + 5}{4} \text{ e } y = \frac{5 + 3m}{8}$$

$$\begin{cases} r: x - 2y = -m \\ t: x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-m - 5}{2} \text{ e } y = \frac{-5 + m}{4}$$

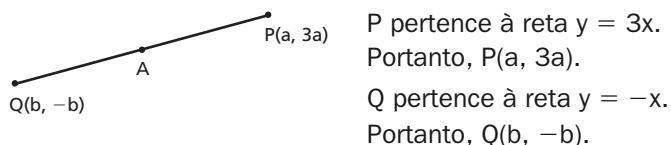
As três interseções obtidas, sendo vértices de um triângulo, não podem ser colineares, então:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ \frac{5-m}{4} & \frac{3m+5}{8} & 1 \\ \frac{-m-5}{2} & \frac{m-5}{4} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5(m+15)}{8} + \frac{5(m+15)}{4} + \frac{2m^2 + 30m}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + 30m + 225 \neq 0 \Rightarrow m \neq -15$$

73.



P pertence à reta $y = 3x$.
Portanto, $P(a, 3a)$.

Q pertence à reta $y = -x$.
Portanto, $Q(b, -b)$.

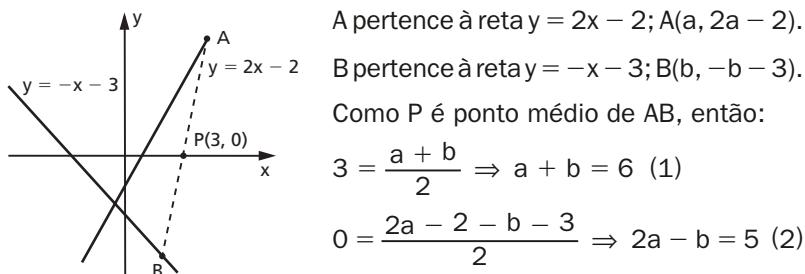
Como A(-2, 4) é ponto médio de PQ, então:

$$-2 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b=-4 \quad (1)$$

$$4 = \frac{3a-b}{2} \Rightarrow 3a-b=8 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem: $a=1$ e $b=-5$.
Portanto, os pontos são $P(1, 3)$ e $Q(-5, 5)$.

74.



A pertence à reta $y = 2x - 2$; $A(a, 2a - 2)$.

B pertence à reta $y = -x - 3$; $B(b, -b - 3)$.

Como P é ponto médio de AB, então:

$$3 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b=6 \quad (1)$$

$$0 = \frac{2a-2-b-3}{2} \Rightarrow 2a-b=5 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos:

$$a = \frac{11}{3} \text{ e } b = \frac{7}{3}, \text{ de onde vem } A\left(\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right) \text{ e } B\left(\frac{7}{3}, -\frac{16}{3}\right).$$

Para determinar a resposta procurada, podemos considerar quaisquer dois pontos entre A, P e B.

A equação da reta é: $8x - y - 24 = 0$.

- 75.** A reta r : $2x - y + 3 = 0$ pode ser escrita $y = 2x + 3$.

O ponto M pertence a r . Então, $M(a, 2a + 3)$.

O ponto B pertence à bissetriz b_{24} . Então $B(b, -b)$.

Como M é ponto médio de AB , temos:

$$a = \frac{b + 5}{2} \Rightarrow 2a - b = 5 \quad (1)$$

$$2a + 3 = \frac{-b + 4}{2} \Rightarrow 4a + b = -2 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem:

$$a = \frac{1}{2} \text{ e } b = -4.$$

Então, o ponto procurado é $B(-4, 4)$.

- 76.** r : $3x - y = 0 \Rightarrow r$: $y = 3x$

$C \in r \Rightarrow C(a, 3a)$

$$s$$
: $x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 2$

$$B \in s \Rightarrow B\left(b, \frac{b}{2} + 2\right)$$

Considerando $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a + 1}{b - a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3a - b = -2 \quad (1)$$

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3a - 6}{\frac{b}{2} + 2 - 3a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 18a - b = 28 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), resulta: $a = 2$ e $b = 8$.

Portanto, o ponto procurado é $B(8, 6)$.

- 78.** I. $A(x_A, 0)$

II. $B(x_B, x_B)$

III. $A \in (\overleftrightarrow{AC})$: $x + y - 4 = 0$

Portanto, $x_A + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x_A = 4 \Rightarrow A(4, 0)$.

IV. $B \in (\overleftrightarrow{BC})$: $2x - 3y + 7 = 0$

$$2x_B - 3x_B + 7 = 0$$

$$x_B = 7 \Rightarrow B(7, 7)$$

III e IV.

C é ponto de interseção de \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} .

$$\begin{cases} x_C + y_C = 4 \\ 2x_C - 3y_C = -7 \end{cases} \Rightarrow x_C = 1 \text{ e } y_C = 3 \Rightarrow C(1, 3)$$

Assim, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{58}; d_{BC} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ e } d_{AC} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

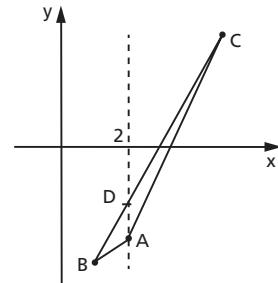
Portanto, o perímetro do $\triangle ABC$ é: $\sqrt{58} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$.

79. $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, -3)$

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 10x - 3y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1, -5)$$

$$\begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \\ 10x - 3y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4, 5)$$

$D \in \overrightarrow{BC}$: $10x - 3y - 25 = 0$ e D tem a mesma abscissa que P.



Portanto, para $x_D = 2 \Rightarrow y_D = -\frac{5}{3}$.

$P(2, y)$ é tal que $y_A < y < y_D$ e daí $-3 < y < -\frac{5}{3}$.

88. $S = d_{AB}^2 + d_{AO}^2 + d_{BO}^2$ deve ser mínima.

$$S = (x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 + 4) + (x_A^2 + 1) + (x_B^2 + 9) \quad (1)$$

Considerando a condição de alinhamento dos pontos A, B e P, temos:

$$x_B = 3x_A - 14 \quad (2)$$

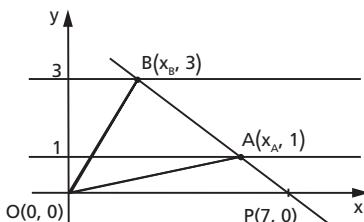
Substituindo (2) em (1):

$$S = 14x_A^2 - 140x_A + 406.$$

S é mínima para $x_{AV} = \frac{-b}{2a} = 5$.

Portanto, em (2), $x_B = 1$.

Assim: A(5, 1) e B(1, 3).



91. $(2x + 3y - 15) + k(5x - 2y + 29) = 0$

Desenvolvemos e agrupamos os termos semelhantes:

$$(2 + 5k)x + (3 - 2k)y + 29k - 15 = 0.$$

Como queremos a reta que passa pela origem, $29k - 15 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{15}{29}.$$

Substituindo k na equação original, vem $7x + 3y = 0$.

93. $3x - 2y - 6 + k(x + 2y - 2) = 0 \quad (1)$

$$3x - 3y + 4 + \ell(2x + 3y + 1) = 0 \quad (2)$$

Determinemos o centro do feixe (1):

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0 \\ k = 1 &\Rightarrow x - 2 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 0)$$

Determinemos o centro do feixe (2):

$$\begin{aligned} \ell = 0 &\Rightarrow 3x - 3y + 4 = 0 \\ \ell = 1 &\Rightarrow x + 1 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

Determinando a reta que passa pelos pontos obtidos, estaremos obtendo a reta comum aos dois feixes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 9y - 2 = 0$$

94. feixe (1):

$$\begin{aligned} k_1 = 0 &\Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0 \\ k_1 = 1 &\Rightarrow (2 + m)x - 3 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2+m}, \frac{10+8m}{3(2+m)}\right); m \neq -2$$

feixe (2):

$$\begin{aligned} k_2 = 0 &\Rightarrow 4x + 3y + 25 = 0 \\ k_2 = 1 &\Rightarrow 6x + 24 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow B(-4, -3)$$

feixe (3):

$$\begin{aligned} k_3 = 0 &\Rightarrow mx + my + 1 = 0 \\ k_3 = 1 &\Rightarrow (m - 4)y = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{m}, 0\right); m \neq 0$$

Os pontos A, B, C, centros dos feixes, devem pertencer à mesma reta. Pela condição de alinhamento, temos:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2+m} & \frac{10+8m}{3(2+m)} & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ \frac{1}{m} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ ou } m = -\frac{7}{8}$$

96. $(2+m)x + (3+2m)y - 1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0 \\ m = -2 \Rightarrow y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(2, -1)$$

Substituindo $P(2, -1)$ na equação do feixe, vem:

$$(2+m) \cdot 2 + (3+2m)(-1) - 1 = 4 + 2m - 3 - 2m - 1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

97. $(m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 2 = 0 \\ m = 1 \Rightarrow 10x - 22y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Substituindo $P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ na equação do feixe, vem:

$$\begin{aligned} (m^2 + 6m + 3)(-1) - (2m^2 + 18m + 2)\left(-\frac{1}{2}\right) - 3m + 2 = \\ = -m^2 - 6m - 3 + m^2 + 9m + 1 - 3m + 2 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

102. Verificamos, inicialmente, que $A \notin r$ e $A \notin s$.

Seja r' : $3x - 4y + c' = 0$, tal que $r' // r$ e $A \in r'$.

Então, r' : $3x - 4y - 11 = 0$.

Seja s' : $5x + 6y + c'' = 0$, tal que $s' // s$ e $A \in s'$.

Então, s' : $5x + 6y - 12 = 0$.

103. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = y + k\pi \Rightarrow x - y - k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}$

Nessa equação, o único coeficiente variável é $k\pi$, o que significa que ela é a equação de um feixe de paralelas.

104. $\operatorname{sen}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - y - k\pi = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

é a equação de um feixe de paralelas, considerando que os coeficientes a e b são fixos, variando $c = -k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

109.

$$\begin{aligned} r: \left\{ \begin{array}{l} x = 10t - 2 \Rightarrow t = \frac{x+2}{10} \\ y = 3t \Rightarrow t = \frac{y}{3} \end{array} \right. &\Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x - 10y + 6 = 0 \text{ (forma geral)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x - 10y = -6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1 \text{ (forma segmentária)} \end{aligned}$$

110.

$$\begin{aligned} r: \left\{ \begin{array}{l} 3t + 1 = x \Rightarrow t = \frac{x-1}{3} \\ -2t + 5 = y \Rightarrow t = \frac{y+5}{-2} \end{array} \right. &\Rightarrow -2x - 3y + 17 = 0 \quad (1) \\ s: \left\{ \begin{array}{l} 2u - 2 = x \Rightarrow u = \frac{x+2}{2} \\ 7 + u = y \Rightarrow u = y - 7 \end{array} \right. &\Rightarrow x - 2y + 16 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem $(-2, 7)$.

111.

$$\begin{aligned} r: \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1 &\Rightarrow y = 3x - 2 \\ s: \left\{ \begin{array}{l} x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1 \\ y = 3t - 2 \Rightarrow t = \frac{y+2}{3} \end{array} \right. &\Rightarrow y = 3x + 1 \end{aligned}$$

Portanto, r e s são paralelas e distintas.

114. A reta tem equação segmentária $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, em que p e q são variáveis.

Por hipótese, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{k} \Rightarrow q = \frac{pk}{p-k}$ ($p \neq 0$ e $p \neq k$).

Substituindo q na equação da reta, vem:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{pk}{p-k}} = 1 \Rightarrow x + \frac{p-k}{k} y = p.$$

Fazendo $p = 1 \Rightarrow r: x + \left(\frac{1-k}{k}\right)y = 1 \quad (1)$

Fazendo $p = 2 \Rightarrow s: x + \left(\frac{2-k}{k}\right)y = 2 \quad (2)$

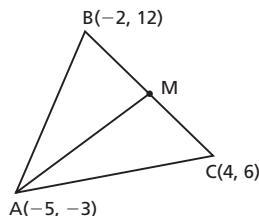
Resolvendo o sistema formado pelas retas r e s , vem $P(k, k)$.

As retas r e s são concorrentes no ponto $P(k, k)$, fixo, no plano cartesiano, pois:

$$k + \frac{p-k}{k} \cdot k = p, \forall p \in \mathbb{R}^*, p \neq k.$$

CAPÍTULO III — Teoria angular

118.

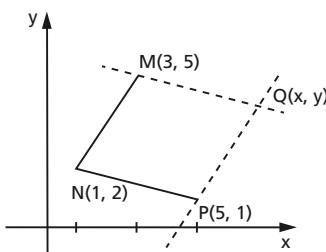


M é ponto médio de BC:

$$x_M = 1 \text{ e } y_M = 9 \Rightarrow M(1, 9)$$

$$m_{\overline{AM}} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{12 - (-3)}{6 - (-5)} = 2.$$

131.



Inicialmente calculamos:

$$m_{\overline{MN}} = \frac{3}{2} \text{ e } m_{\overline{NP}} = -\frac{1}{4}.$$

\overleftrightarrow{PQ} passa por P e é paralela a \overleftrightarrow{MN} .

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0 \quad (1)$$

\overleftrightarrow{MQ} passa por M e é paralela a \overleftrightarrow{NP} .

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow x + 4y - 23 = 0 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema (1) e (2), vem: Q(7, 4).

132. $A(-3, 4) \notin r$ e $A(-3, 4) \notin s$

$$r: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow m_r = -2$$

$$s: x + y - 2 = 0 \Rightarrow m_s = -1$$

Seja $\overleftrightarrow{AB} \parallel s$. Então, $(\overleftrightarrow{AB}): y - 4 = -1(x + 3) \Rightarrow x + y - 1 = 0$.

$$B \in \overleftrightarrow{AB} \cap r \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$$

Seja $\overleftrightarrow{AD} \parallel r$. Então $(\overleftrightarrow{AD}): y - 4 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$.

$$D \in \overleftrightarrow{AD} \cap s \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-4, 6)$$

Como $B \in r$ e $D \in s$, então necessariamente $C \in r \cap s$.

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 1)$$

Portanto: $B(2, -1)$, $C(1, 1)$ e $D(-4, 6)$.

133. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \text{ se } x \geq y & (1) \\ -x + y = 1, \text{ se } x < y & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} (1) x - y - 1 = 0 \\ (2) x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ são retas paralelas.

145. $m_{\overline{OH}} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

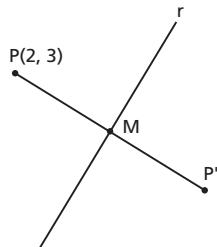
$$r: y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow r: 2x + 3y - 13 = 0$$

148. $m_r = 2$, $s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$

$$P \in s \Rightarrow s: y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow s: x + 2y = 0$$

Obtendo a interseção das retas r e s , vem:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow (8, -4)$$

150.

$$\begin{aligned} m_r &= 1, s \perp r \Rightarrow m_s = -1 \\ P \in s &\Rightarrow s: y - 3 = -1(x - 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s: y = -x + 5 \\ M \in r \cap s &\Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow M(4, 1) \\ M \text{ é ponto médio de } PP' &\Rightarrow P'(6, -1). \end{aligned}$$

151.

$$A(1, 0) \Rightarrow (\overrightarrow{AB}): 2x + y - 2 = 0 \Rightarrow m_{\overrightarrow{AB}} = -2$$

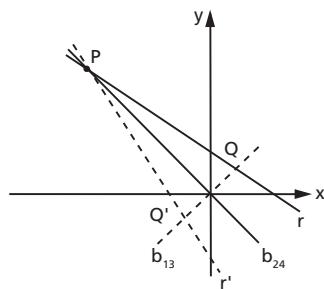
B(0, 2)

$$s \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } O(0, 0) \in s \Rightarrow s: y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow s: x - 2y = 0.$$

$$M \in \overrightarrow{AB} \cap s \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Como } M \text{ é ponto médio de } OP, \text{ vem: } P\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

153.

Seja $P \in r \cap b_{24}$.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-7, 7)$$

Consideremos a bissetriz $b_{13} \perp b_{24}$.

Seja $Q \in b_{13} \cap r$.

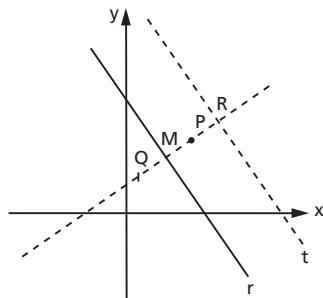
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

A origem $O(0, 0)$ é ponto médio de QQ' , $Q' \in b_{13}$.

$$0 = \frac{\frac{7}{5} + x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = -\frac{7}{5} = y_{Q'} \Rightarrow Q'\left(-\frac{7}{5}, -\frac{7}{5}\right)$$

Então, $\overrightarrow{PQ'} \equiv r'$, simétrica de r em relações a b_{24} .

$$\begin{vmatrix} -7 & 7 & 1 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

154.

$$r: 3x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

$$a) s \perp r \Rightarrow m_s = \frac{2}{3}$$

$$P \in s \Rightarrow s: y - 2 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: 2x - 3y + 2 = 0$$

b) $M \in r \cap s$

$$\begin{cases} r: 3x + 2y - 6 = 0 \\ s: 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{14}{13}, \frac{18}{13}\right)$$

c) M é ponto médio de PQ :

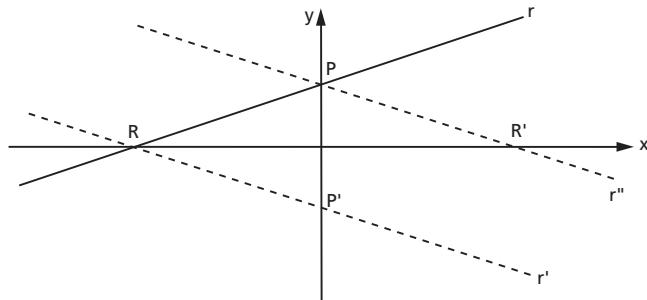
$$\begin{cases} \frac{14}{13} = \frac{2+x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{13} \\ \frac{18}{13} = \frac{2+y}{2} \Rightarrow y = \frac{10}{13} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

d) P é ponto médio de MR :

$$2 = \frac{\frac{14}{13} + x}{2} \Rightarrow x = \frac{38}{13} \Rightarrow R\left(\frac{38}{13}, \frac{34}{13}\right)$$

$$2 = \frac{\frac{18}{13} + y}{2} \Rightarrow y = \frac{34}{13}$$

$$R \in t // r \Rightarrow t: y - \frac{34}{13} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{38}{13}\right) \Rightarrow t: 3x + 2y - 14 = 0$$

155.

$$r: x - 6y + 12 = 0$$

r intercepta o eixo y no ponto $P(0, 2)$.

r intercepta o eixo x no ponto $R(-12, 0)$.

a) $P'(0, -2)$ é simétrico de P em relação ao eixo x .

$\overleftrightarrow{RP}' = r'$ é simétrica de r em relação ao eixo x .

$$\begin{vmatrix} -12 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r': x + 6y + 12 = 0$$

b) $R'(12, 0)$ é simétrico de R em relação ao eixo y .

$\overleftrightarrow{PR}' = r''$ é simétrica de r em relação ao eixo y .

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r'': x + 6y - 12 = 0$$

$$c) s: x + y - 9 = 0 \Rightarrow m_s = -1$$

Seja $T(0, 9) \in s$ e seja $t \perp s$, com $T \in t$.

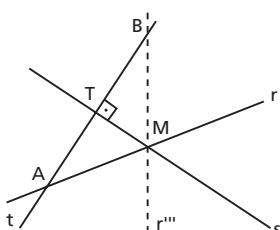
$$t: y - 9 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow t: x - y + 9 = 0$$

$$A \in t \cap r \Rightarrow \begin{cases} t: x - y + 9 = 0 \\ r: x - 6y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{42}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Sendo T ponto médio de AB , $B \in r'''$, vem:

$$0 = \frac{-\frac{42}{5} + x}{2} \Rightarrow x = \frac{42}{5}$$

$$9 = \frac{\frac{3}{5} + y}{2} \Rightarrow y = \frac{87}{5} \Rightarrow B\left(\frac{42}{5}, \frac{87}{5}\right)$$



Sendo $M(6, 3) \in r \cap s$, então $\overleftrightarrow{MB} = r'''$.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ \frac{42}{5} & \frac{87}{5} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r''': 6x - y - 33 = 0$$

157. 1^{a)} equação de h_a tal que $h_a \perp BC$ por A

$$m_{BC} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow m_{h_a} = 1$$

$$A \in h_a \Rightarrow y + 1 = 1(x - 2) \Rightarrow x - y - 3 = 0 \quad (h_a)$$

2^{a)} equação de h_b tal que $h_b \perp AC$ por B

$$m_{AC} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow m_{h_b} = \frac{1}{3}$$

$$B \in h_b \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow x - 3y + 9 = 0 \quad (h_b)$$

3^{a)} equação de h_c tal que $h_c \perp AB$ por C

$$m_{AB} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow m_{h_c} = \frac{1}{2}$$

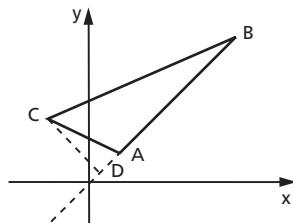
$$C \in h_c \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y + 3 = 0 \quad (h_c)$$

4^{a)} $\{H\} \in h_a \cap h_b \cap h_c$

$$\begin{cases} h_a: x - y - 3 = 0 \\ h_b: x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(9, 6)$$

$$H \in h_c \Rightarrow 9 - 2 \cdot 6 + 3 = 0 \quad (V)$$

158.



1^{a)} equação da reta \overleftrightarrow{CD} tal que $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$$m_{AB} = 1 \Rightarrow m_{CD} = -1$$

$$(\overleftrightarrow{CD}) y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

2^{a)} $\{D\} = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$3^a) \left\{ S_{ABC} = \frac{d_{AB} \cdot d_{CD}}{2} \right.$$

$$d_{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

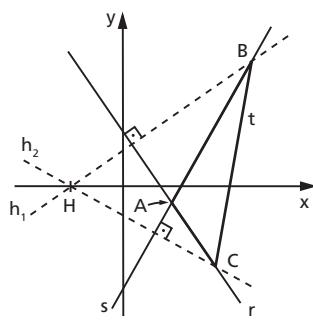
$$\left. \left\{ d_{CD} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \right\} \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{20} \right.$$

$$4^{\text{a})} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{d_{BD} \cdot d_{CD}}{2} \\ d_{BD} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \\ d_{CD} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{9\sqrt{20}}{8}$$

$$5^{\text{a})} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{\sqrt{20}}{2}}{\frac{9\sqrt{20}}{8}} = \frac{8}{9}$$

Obs.: Como d_{CD} é comum aos dois triângulos, bastaria fazer a razão entre d_{AB} e d_{BD} para obter a razão entre as áreas.

159.



$$1^{\text{a})} \quad \begin{cases} r: 2x + y - 1 = 0 \\ s: x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 1)$$

$$2^{\text{a})} \quad H \in h_1 \perp r$$

$$m_r = -2 \Rightarrow m_{h_1} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2y + 1 = 0 (h_1)$$

$$\{B\} = h_1 \cap s$$

$$\begin{cases} h_1: x - 2y + 1 = 0 \\ s: x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5, 3)$$

$$3^{\text{a})} \quad H \in h_2 \perp s; m_s = 1 \Rightarrow m_{h_2} = -1$$

$$y - 0 = -1(x + 1) \Rightarrow x + y + 1 = 0 (h_2)$$

$$\{C\} = h_2 \cap r \Rightarrow \begin{cases} h_2: x + y + 1 = 0 \\ r: 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, -3)$$

$$4^{\text{a})} \quad t = \overline{BC}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$$

1^a) $A \in \overrightarrow{AC} = r$ e $A(0, y) \Rightarrow 7 \cdot 0 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$

2^a) $E \in \overrightarrow{AC} = r$ e $E\left(x, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 7x - \frac{1}{2} - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

3^a) E é ponto médio de AC :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{x_c + 0}{2} \Rightarrow x_c = 1 \\ -\frac{1}{2} = \frac{y_c + 3}{2} \Rightarrow y_c = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1, -4)$$

4^a) $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} = r$; $m_r = -7 \Rightarrow m_{BD} = \frac{1}{7}$

$$E \in \overrightarrow{BD} \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{1}{7} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x - 7y - 4 = 0$$

5^a) $B \in$ eixo x ; $B(x, 0)$

$$B \in \overrightarrow{BD} \Rightarrow B(4, 0)$$

6^a) E é ponto médio de BD :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{x_d + 4}{2} \Rightarrow x_d = -3 \\ -\frac{1}{2} = \frac{y_d + 0}{2} \Rightarrow y_d = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-3, -1)$$

$$A(0, 3); B(4, 0); C(1, -4); D(-3, -1)$$

164. 1º) Sendo $\overline{BC} = m \cdot \overline{AB}$, temos:

$$x_c - x_b = m(x_b - x_a) \text{ e}$$

$$y_c - y_b = m(y_b - y_a)$$

e daí

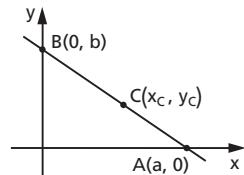
$$x_c - 0 = m(0 - a) \text{ e}$$

$$y_c - b = m(b - 0)$$

então, $x_c = -ma$ e $y_c = (m + 1)b$.

2º) As coordenadas do ponto M , médio de AC , são

$$x_M = \frac{a + (-ma)}{2} = \frac{(1 - m)a}{2} \text{ e } y_M = \frac{0 + (m + 1)b}{2} = \frac{(m + 1)b}{2}.$$



$$3º) m_{AB} = -\frac{b}{a} \text{ e } t \perp AB \Rightarrow m_t = \frac{a}{b}$$

$$M \in t \Rightarrow t: y - \frac{(m+1)b}{2} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{(1-m)a}{2} \right)$$

e daí vem:

$$t: 2ax - 2by + b^2(1+m) - a^2(1-m) = 0.$$

165. $d_{AB} = b - a = \frac{15}{2} \Rightarrow b = \frac{15+2a}{2}$ (1)

reta $(\overleftrightarrow{AP})$: $3x + (a-3)y - 3a = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AP}} = \frac{3}{3-a}$

reta $(\overleftrightarrow{BP})$: $3x + (b-3)y - 3b = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BP}} = \frac{3}{3-b}$

Como as retas \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BP} são perpendiculares, vem:

$$m_{\overleftrightarrow{AP}} = -\frac{1}{m_{\overleftrightarrow{BP}}} \Rightarrow ab + 3(a+b) + 18 = 0 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$2a^2 + 3a - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow b_1 = 9 \\ a_2 = -3 \Rightarrow b_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

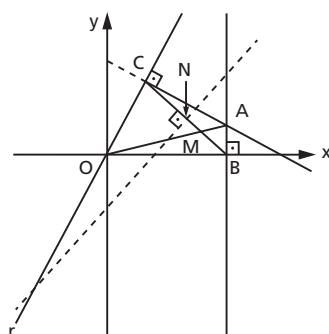
Caso (1), $a_1 = \frac{3}{2}$ e $b = 9$, vem:

$(\overleftrightarrow{AP})$: $2x - y - 3 = 0$ e $(\overleftrightarrow{BP})$: $x + 2y - 9 = 0$

Caso (2), $a_2 = -3$ e $b_2 = \frac{9}{2}$, vem:

$(\overleftrightarrow{AP})$: $x - 2y + 3 = 0$ e $(\overleftrightarrow{BP})$: $2x + y - 9 = 0$.

166.



1) $AB \perp x$ e $x_A = 3 \Rightarrow x_B = 3 \Rightarrow B(3, 0)$

2) $m_r = 2$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp r \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = -\frac{1}{2}$

$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow (\overleftrightarrow{AC}) y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$
e daí $(\overleftrightarrow{AC}) x + 2y - 5 = 0$

3) C é a interseção de r com AC, então:

$$\begin{cases} r: y = 2x \\ (\overleftrightarrow{AC}) x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 2)$$

4) M é ponto médio de OA:

$$\begin{cases} x_M = \frac{0+3}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{0+1}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5) N é ponto médio de BC:

$$\begin{cases} x_N = \frac{3+1}{2} \Rightarrow x_N = 2 \\ y_N = \frac{0+2}{2} \Rightarrow y_N = 1 \end{cases} \Rightarrow N(2, 1)$$

6) Determinemos os coeficientes angulares de \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{MN} :

$$\left. \begin{array}{l} m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 0}{1 - 3} = -1 \\ m_{\overleftrightarrow{MN}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

- 167.** a) 1) Determinemos as retas \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} e seus respectivos coeficientes angulares.

$$(\overleftrightarrow{AB}): \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2}$$

$$(\overleftrightarrow{BC}): \begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}} = -\frac{4}{3}$$

$$(\overleftrightarrow{AC}): \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = 2$$

2) Vamos determinar r_a , r_b e r_c tais que:

$P \in r_a$ e $r_a \perp \overleftrightarrow{BC}$; $P \in r_b$ e $r_b \perp \overleftrightarrow{AC}$; $P \in r_c$ e $r_c \perp \overleftrightarrow{AB}$.

$$r_a: y - 6 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 3x - 4y + 24 = 0$$

$$r_b: y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow x + 2y - 12 = 0$$

$$r_c: y - 6 = 2(x - 0) \Rightarrow 2x - y + 6 = 0$$

3) Vamos determinar os pés das perpendiculares:

$$\{R\} = r_a \cap \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 24 = 0 \\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow R\left(-\frac{48}{25}, \frac{114}{25}\right)$$

$$\{S\} = r_b \cap \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}\right)$$

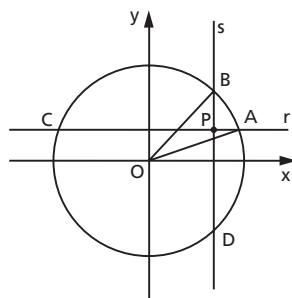
$$\{T\} = r_c \cap \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow T\left(-\frac{3}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

b) Para provar que R, S e T são colineares, podemos fixar a reta determinada por S e T e provar que R $\in \overleftrightarrow{ST}$.

$$(\overleftrightarrow{ST}): 2x - 11y + 54 = 0$$

$$2 \cdot \left(-\frac{48}{25}\right) - 11 \cdot \left(\frac{114}{25}\right) + 54 = 0 \Rightarrow R \in \overleftrightarrow{ST}$$

168.



$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \cos \beta \\ y = \sin \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_A^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow x_A = \cos \alpha \\ & \cos^2 \beta + y_B^2 = 1 \Rightarrow y_B = \sin \beta \end{aligned}$$

Então, temos:

$$A(\cos \alpha, \sin \alpha); B(\cos \beta, \sin \beta)$$

$$C(-\cos \alpha, \sin \alpha); D(\cos \beta, -\sin \beta)$$

b) M é ponto médio de AB:

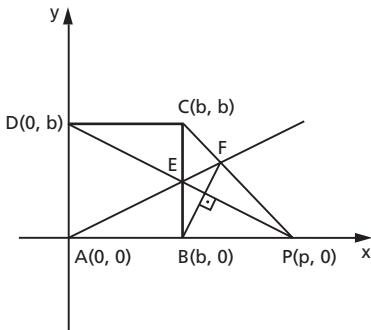
$$\begin{cases} x_M = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \\ y_M = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}, \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}\right)$$

$$\text{reta } \overrightarrow{PM}: \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \alpha & 1 \\ \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} & \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2} \cdot x + \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{2} \cdot y + \\ & + \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) m_{\overleftrightarrow{PM}} &= -\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\
 &= \cotg \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 m_{\overleftrightarrow{CD}} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{-\cos \beta - \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{-2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \\
 &= -\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 m_{\overleftrightarrow{PM}} \cdot m_{\overleftrightarrow{CD}} &= -\cotg \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{CD}
 \end{aligned}$$

- 169.** Sem perder a generalidade, vamos colocar os dados AB e AD respectivamente sobre os eixos Ox e Oy e o ponto A na origem do sistema.



1) reta \overleftrightarrow{PD} :

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow bx + py - pb = 0 \\
 m_{\overleftrightarrow{PD}} = \frac{-b}{p}$$

2) reta \overleftrightarrow{BC} : $x = b$

$$3) \{E\} = \overleftrightarrow{PD} \cap \overleftrightarrow{BC}: \begin{cases} bx + py - pb = 0 \\ x = b \end{cases} \Rightarrow E\left(b, \frac{b(p-b)}{p}\right)$$

4) reta \overleftrightarrow{AE} :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & \frac{b(p-b)}{p} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (p-b)x - py = 0$$

5) reta \overleftrightarrow{PC} :

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ b & b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bx + (p-b)y - pb = 0$$

$$6) \{F\} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{PC}: \begin{cases} (p - b)x - py = 0 \\ bx + (p - b)y - pb = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{p^2b}{p^2 - pb + b^2}, \frac{pb(p - b)}{p^2 - pb + b^2}\right)$$

7) Temos:

$$m_{\overline{PD}} = -\frac{b}{p}$$

$$m_{\overline{BF}} = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{bp(p - b)}{p^2 - pb + b^2} \cdot \frac{p^2 - pb + b^2}{p^2b - b(p^2 - pb + b^2)} =$$

$$= \frac{bp(p - b)}{b^2(p - b)} = \frac{p}{b}$$

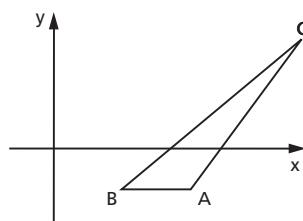
$$m_{\overline{PD}} \cdot m_{\overline{BF}} = \left(-\frac{b}{p}\right)\left(\frac{p}{b}\right) = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{BF}$$

174. A(3, 0) e B(10, 1) $\Rightarrow m_{\overline{AB}} = \frac{1}{7}$

$$A(3, 0) \text{ e } M(6, k) \Rightarrow m_{\overline{AM}} = \frac{k}{3}$$

$$\tg 45^\circ = 1 = \left| \frac{\frac{1}{7} - \frac{k}{3}}{1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{k}{3}} \right| \Rightarrow k = -\frac{9}{4} \text{ ou } k = 4$$

175.



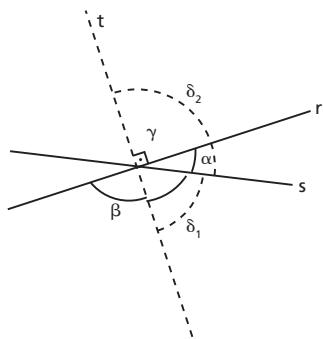
$$\hat{A}: \begin{cases} m_{\overline{AB}} = \frac{-1 + 1}{4 - 2} = 0 \\ m_{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{5 + \sqrt{3} - 4} = 1 \end{cases}$$

$$\tg \hat{A} = \left| \frac{0 - 1}{1 + 0 \cdot 1} \right| = 1 \Rightarrow \hat{A} = \frac{3\pi}{4} \text{ (pois } \hat{A} \text{ é obtuso)}$$

$$\hat{B}: \begin{cases} m_{\overline{AB}} = 0 \\ m_{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 3} \end{cases} \Rightarrow \tg \hat{B} = \left| \frac{0 - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 3}}{1 + \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 3} \cdot 0} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{então: } \hat{B} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Portanto: } \hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{12}.$$

179.

Como r e s são coplanares, $\alpha < \beta$, então $\alpha + \beta = \pi$.

A reta t forma com r um ângulo $\frac{\alpha + \beta}{2}$, ou seja, um ângulo $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Os ângulos formados pelas retas t e s são:

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

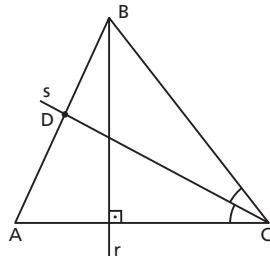
183.

1º) Verificamos que $A \notin r$ e $A \notin s$, pois suas coordenadas não satisfazem as equações dadas. Suponhamos que r contém a altura h_b e s contém a bissetriz s_c do triângulo ABC , conforme indica a figura.

2º) Equação da reta \overleftrightarrow{AC} :

$$m_r = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \overleftrightarrow{AC} \perp r \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = -\frac{4}{3}$$

$$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 2) \Rightarrow (\overleftrightarrow{AC}) 4x + 3y - 4 = 0$$



3º) Vértice C , interseção de \overleftrightarrow{AC} com s :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \quad (\overleftrightarrow{AC}) \\ 2x - y + 18 = 0 \quad (s) \end{cases} \Rightarrow x = -5 \quad \text{e} \quad y = 8 \Rightarrow C(-5, 8)$$

4º) Equação da reta \overleftrightarrow{BC} :

s é bissecriz, então $A\hat{C}D = D\hat{C}B$ e daí:

$$\operatorname{tg} A\hat{C}D = \operatorname{tg} D\hat{C}B \Rightarrow \left| \frac{m_{AC} - m_{CD}}{1 + m_{AC}m_{CD}} \right| = \left| \frac{m_{DC} - m_{CB}}{1 + m_{DC} \cdot m_{CB}} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\left(-\frac{4}{3} \right) - 2}{1 + \left(-\frac{4}{3} \right) \cdot 2} \right| = \left| \frac{2 - m_{CB}}{1 + 2 \cdot m_{CB}} \right| \Rightarrow m_{CB} = 0$$

$$C \in \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow y - 8 = 0(x + 5) \Rightarrow (\overleftrightarrow{BC}) y - 8 = 0$$

5º) Vértice B, interseção de \overleftrightarrow{BC} com r :

$$\begin{cases} y - 8 = 0 \ (\overleftrightarrow{BC}) \\ 3x - 4y + 59 = 0 \ (r) \end{cases} \Rightarrow x = -9 \text{ e } y = 8 \Rightarrow B(-9, 8)$$

6º) Equação da reta \overleftrightarrow{AB} :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\overleftrightarrow{AB}) \ 4x + 7y - 20 = 0$$

- 184.** 1) Consideremos o $\triangle OAB$ retângulo e suponhamos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ com $a \geq b$.

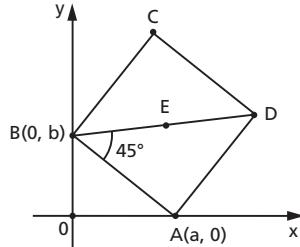
2) Equação da reta \overleftrightarrow{AD} :

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = -\frac{b}{a} \text{ e } \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AD}} = \frac{a}{b}$$

$$A \in \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow y - 0 = \frac{a}{b}(x - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overleftrightarrow{AD}) ax - by - a^2 = 0.$$



3) Equação da reta \overleftrightarrow{BD} :

$$A\hat{B}D = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} A\hat{B}D = \left| \frac{m_{\overleftrightarrow{AB}} - m_{\overleftrightarrow{BD}}}{1 + m_{\overleftrightarrow{AB}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BD}}} \right| = \left| \frac{-\frac{b}{a} - m_{\overleftrightarrow{BD}}}{1 - \frac{b}{a} \cdot m_{\overleftrightarrow{BD}}} \right| = 1$$

e daí $m_{\overleftrightarrow{BD}} = \frac{a - b}{a + b}$ (outra possibilidade deve ser descartada, pois

$$m_{\overleftrightarrow{BD}} > 0)$$

$$B \in \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow y - b = \frac{a - b}{a + b}(x - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overleftrightarrow{BD})(a - b)x - (a + b)y + b(a + b) = 0$$

4) Coordenadas de D, interseção de \overleftrightarrow{AD} com \overleftrightarrow{BD} :

$$\begin{cases} (\overleftrightarrow{AD}) ax - by = a^2 \\ (\overleftrightarrow{BD})(a - b)x - (a + b)y = -b(a + b) \end{cases}$$

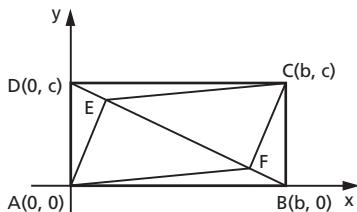
e daí $x = a + b$ e $y = a$.

5) Coordenadas de E, médio de BD:

$$x_E = \frac{0 + (a + b)}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{e} \quad y_E = \frac{b + a}{2}$$

e assim $\overleftrightarrow{OE} = b_{13}$.

185.



Vamos supor:

$$A = (0, 0)$$

$$B = (b, 0)$$

$$C = (b, c)$$

$$D = (0, c)$$

$(\overleftrightarrow{AE}) \perp (\overleftrightarrow{BD})$ e $(\overleftrightarrow{CF}) \perp (\overleftrightarrow{BD})$. Então, sendo $m_{\overleftrightarrow{BD}} = -\frac{c}{b}$,

$$m_{\overleftrightarrow{AE}} = m_{\overleftrightarrow{CF}} = \frac{b}{c}, \text{ ou seja, } \overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CF} \quad (1)$$

Determinemos os pontos E e F:

Por determinante: $(\overleftrightarrow{BD})$: $cx + by - bc = 0$.

$$\{E\} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BD}$$

$$(\overleftrightarrow{AE}): y - 0 = m_{\overleftrightarrow{AE}}(x - 0) \Rightarrow (\overleftrightarrow{AE}) bx - cy = 0$$

$$\text{Fazendo a interseção das retas, vem: } E\left(\frac{bc^2}{b^2 + c^2}, \frac{b^2c}{b^2 + c^2}\right).$$

$$\{F\} = \overleftrightarrow{CF} \cap \overleftrightarrow{BD}$$

$$(\overleftrightarrow{CF}): y - c = m_{\overleftrightarrow{CF}}(x - b) \Rightarrow (\overleftrightarrow{CF}) bx - cy + c^2 - b^2 = 0$$

$$\text{Fazendo a interseção das retas, vem: } F\left(\frac{b^3}{b^2 + c^2}, \frac{c^3}{b^2 + c^2}\right).$$

Então:

$$\left. \begin{array}{l} m_{\overleftrightarrow{CE}} = \frac{\frac{b^2c}{b^2 + c^2} - c}{\frac{bc^2}{b^2 + c^2} - b} = \frac{c^3}{b^3} \\ m_{\overleftrightarrow{AF}} = \frac{\frac{c^3}{b^2 + c^2} - 0}{\frac{b^3}{b^2 + c^2} - 0} = \frac{c^3}{b^3} \end{array} \right\} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{CE}} = m_{\overleftrightarrow{AF}} \Rightarrow \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AF} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem: AECF é paralelogramo.

186. Os pontos $B(0, y)$, $C(1, 2)$ e $A(x, 0)$ são colineares, então:

a) 1) $\begin{vmatrix} 0 & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + (1 - x)y = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{x - 1}$

2) $\ell = \sqrt{\left(\frac{2x}{x - 1}\right)^2 + (-x)^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{x - 1}$

b) Para $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(2, 0)$ e $B(0, 4)$

$$m_{\overline{OC}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$m_{\overline{AB}} = -2 \Rightarrow m_{\overline{OP}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{3}{4}$$

CAPÍTULO IV — Distância de ponto a reta

193. Temos $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}} = \frac{1}{7}$, então AB e CD são bases.

Determinemos, por exemplo, a reta r suporte do lado CD.

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 7y + 9 = 0$$

$$d_{A, CD} = \left| \frac{(-1) - 7(-3) + 9}{\sqrt{1 + 49}} \right| = \frac{29\sqrt{2}}{10}$$

194. Calculemos a distância de $P(0, 0)$ à reta r :

$$d_{P, r} = \left| \frac{5}{\sqrt{1 + 4}} \right| = \sqrt{5}$$

Essa distância é o lado do quadrado.

$$\text{Área} = \ell^2 \Rightarrow \text{Área} = 5$$

197. Seja $P \in r: y = 2x + 1 \Rightarrow P(x, 2x + 1)$.

$$\text{Então, } d_{P,s} = \left| \frac{3x_p - 2y_p + 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \right| = 2$$

$$d_{P,s} = \left| \frac{3x - 2(x+1) + 1}{\sqrt{13}} \right| = 2 \Rightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{13}$$

$$\text{Para } x = -1 + 2\sqrt{13} \Rightarrow y = -1 + 4\sqrt{13} \Rightarrow P(-1 + 2\sqrt{13}; -1 + 4\sqrt{13}).$$

$$\text{Para } x = -1 - 2\sqrt{13} \Rightarrow y = -1 - 4\sqrt{13} \Rightarrow P(-1 - 2\sqrt{13}; -1 - 4\sqrt{13}).$$

200. $m_r = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_s = \frac{4}{3}$, em que $s \perp r$

$$\text{Então, } s: y - y_0 = \frac{4}{3}(x - x_0) \Rightarrow 4x - 3y - 4x_0 + 3y_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 3y + c = 0 \text{ (s)}$$

$$\text{Assim, } d_{P,s} = \left| \frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + c}{\sqrt{16 + 9}} \right| = 4.$$

$$\left| \frac{8 + c}{5} \right| = 4 \Rightarrow c = 12 \text{ ou } c = -28 \text{ e daí}$$

$$s: 4x - 3y + 12 = 0 \text{ ou } s: 4x - 3y - 28 = 0.$$

212. A interseção da reta $r: x + y - 2 = 0$ com o eixo x é o ponto $B(2, 0)$.
Como C pertence à reta r , então $C(x, -x + 2)$.

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & -x + 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 6$$

$$\text{Seja } \frac{1}{2}|D_{ABC}| = 12 \Rightarrow |-3x + 6| = 24 \Rightarrow x = -6 \text{ ou } x = 10$$

$$\text{Sendo } x = -6, \text{ vem } y = 8 \Rightarrow C(-6, 8).$$

$$\text{Sendo } x = 10, \text{ vem } y = -8 \Rightarrow C(10, -8).$$

213. Sendo $C \in (r) y = x + 1$, então $C(x, x + 1)$.

$$\text{Sendo } A(1, 0), \text{ então } m_{AC} = \frac{x+1}{x-1} = 2 \Rightarrow x = 3.$$

Portanto, $C(3, 4)$.

$$\text{Então, } D_{ABC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$S = \frac{1}{2}|D_{ABC}| = \frac{1}{2}|-8| = 4.$$

214. I. Temos $A(3, -2)$, $B(4, -1)$ e $C(a, b)$; então:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = -a + b + 5$$

$$S = 2 \Rightarrow |D_{ABC}| = 4 \Rightarrow |-a + b + 5| = 4 \quad (1)$$

II. O baricentro do triângulo ABC é $G\left(\frac{7+a}{3}, \frac{-3+b}{3}\right)$ e está na reta $2x - y + 3 = 0$; então:

$$\frac{2(7+a)}{3} - \frac{-3+b}{3} + 3 = 0 \text{ e daí } 2a - b + 26 = 0 \quad (2)$$

III. Resolvendo o sistema (1) e (2), vem:

$$(a = -27 \text{ e } b = -28) \text{ ou } (a = -35 \text{ e } b = -44).$$

Portanto: $C(-27, -28)$ ou $C(-35, -44)$.

215. reta BC: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M \in \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow M(x, 3x + 3)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{AMC} &= \frac{1}{2} |D_{AMC}| \\ D_{AMC} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ x & 3x+3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8x + 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMC} = |4x + 4|$$

$$\left. \begin{aligned} S_{AMB} &= \frac{1}{2} |D_{AMB}| \\ D_{AMB} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ x & 3x+3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8x \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMB} = |4x|$$

$$\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|4x + 4|}{|4x|} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{4}{5} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Sendo } x = -\frac{4}{5}, y = \frac{3}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

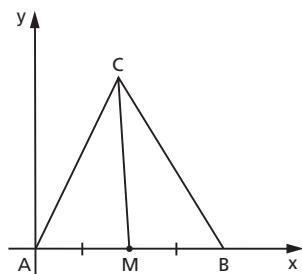
$$\text{Sendo } x = -\frac{4}{3}, y = -1 \Rightarrow M\left(-\frac{4}{3}, -1\right).$$

217. Vamos supor $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$, então $M = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Temos:

$$D_{AMC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{ac}{2}$$

$$D_{BMC} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\frac{ac}{2}$$



então:

$$S_{AMC} = S_{BMC} = \frac{ac}{4}.$$

218. Vamos supor $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$; então, temos:

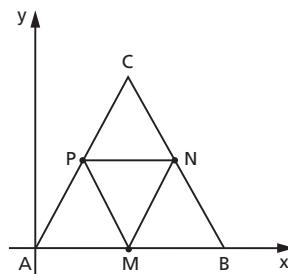
$$M = \left(\frac{a}{2}, 0\right), N = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \text{ e}$$

$$P = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = ac$$

$$D_{MNP} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{ac}{4}$$

$$\text{então: } S_{ABC} = \frac{ac}{2} = 4 \cdot \frac{ac}{8} = 4 \cdot S_{MNP}.$$



$$\mathbf{219.} \quad m_r = \frac{2}{3} \text{ e } s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{3}{2}$$

$$\text{A equação de } s \text{ é: } y - y_0 = -\frac{3}{2} (x - x_0)$$

$$3x + 2y - \underbrace{(2y_0 + 3x_0)}_c = 0 \Rightarrow 3x + 2y - c = 0$$

$$s \cap b_{13} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x + 2y - c = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{c}{5}, \frac{c}{5}\right)$$

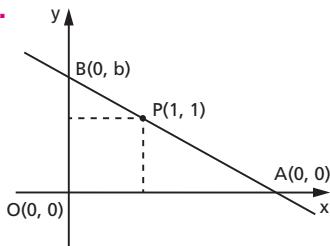
$$s \cap b_{24} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x + 2y - c = 0 \end{cases} \Rightarrow B(c, -c)$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{OAB} = \frac{1}{2} |D_{OAB}| = 20 \\ D_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{5} & \frac{c}{5} & 1 \\ c & -c & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2c^2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| -\frac{2c^2}{5} \right| = 20 \Rightarrow c = \pm 10$$

Portanto: s: $3x + 2y - 10 = 0$ ou s: $3x + 2y + 10 = 0$.

220.



$$1) \text{ área do } \triangle OAB = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{ab}{2}$$

área do $\triangle OAB = 2$, vem $ab = 4$.

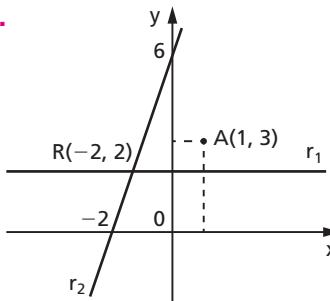
2) pela condição de alinhamento dos pontos AP e B, vem:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ab = a + b$$

3) Como $ab = 4$ e $a + b = 4$, a e b são as raízes da equação $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$, ou seja, $a = b = 2$.

$$4) \text{ reta procurada: } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

221.



1) r_2 na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

deve ser transformada para a forma geral:
 $r_2: 2x - y + 6 = 0$.

2) forma geral da reta r que passa pelo ponto $A(1, 3) \Rightarrow y - 3 = m(x - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (r) mx - y + 3 - m = 0$

3) Seja $\{P\} = r \cap r_1: \begin{cases} mx - y + 3 - m = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{m-1}{m}, 2\right)$

Seja $\{Q\} = r \cap r_2: \begin{cases} mx - y + 3 - m = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{m+3}{m-2}, \frac{8m-6}{m-2}\right)$

4) A deve ser o ponto médio de PQ, pois $A \in PQ$ e $d_{AP} = d_{AQ}$; então:

$$\frac{\frac{m-1}{m} + \frac{m+3}{m-2}}{2} = 1 \text{ e } \frac{\frac{2 + \frac{8m-6}{m-2}}{2}}{2} = 3$$

A solução para essas duas equações é $m = -\frac{1}{2}$ e então

$$r: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \text{ ou ainda } r: x + 2y - 7 = 0.$$

5) Para $m = -\frac{1}{2}$, temos $P(3, 2)$ e $Q(-1, 4)$.

A interseção de r_1 e r_2 é $R(-2, 2)$.

$$D_{PQR} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow S_{PQR} = 5$$

240. Estabelecemos as equações das bissetrizes:

$$\frac{4x + 3y}{\sqrt{16 + 9}} \pm \frac{6x + 8y + 1}{\sqrt{36 + 64}} = 0$$

$$8x + 6y \pm (6x + 8y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1: 14x + 14y + 1 = 0 \\ t_2: 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Sendo $r: 4x + 3y = 0$, então $P(0, 0) \in r$.

Calculemos as distâncias de $P \in r$ às bissetrizes t_1 e t_2 :

$$\left. \begin{aligned} d_{P, t_1} &= \left| \frac{14 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 1}{\sqrt{14^2 + 14^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{28} \\ d_{P, t_2} &= \left| \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d_{P, t_1} < d_{P, t_2}$$

Portanto, $t_1: 14x + 14y + 1 = 0$ é a bissetriz do ângulo agudo.

241. As equações das bissetrizes são:

$$\frac{3x + 4y + 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \pm \frac{3x - 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

$$3x + 4y + 1 \pm (3x - 4y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1: x = 0 \\ t_2: 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

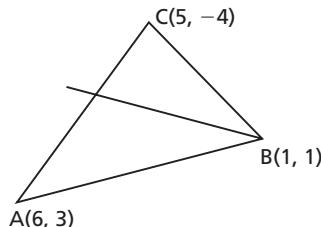
Tomemos $P(1, -1) \in r$.

Calculando as distâncias d_{P, t_1} e d_{P, t_2} , vem:

$$\left. \begin{array}{l} d_{P, t_1} = \left| \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{1}} \right| = 1 \\ d_{P, t_2} = \left| \frac{4(-1) + 1}{\sqrt{4^2}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{16}} \right| = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{P, t_2} < d_{P, t_1}$$

Então, a bissetriz do ângulo agudo é $t_2: 4y + 1 = 0$.

243.



1) retas:

$$\overrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 3 = 0$$

$$\overrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 4y - 9 = 0$$

2) bissetrizes:

$$\frac{2x - 5y + 3}{\sqrt{4 + 25}} \pm \frac{5x + 4y - 9}{\sqrt{25 + 16}} = 0$$

$$t_1: (2\sqrt{41} + 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} - 9\sqrt{29}) = 0$$

$$t_2: (2\sqrt{41} - 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} - 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} + 9\sqrt{29}) = 0$$

$$3) \text{ Seja } E_1 = (2\sqrt{41} + 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} - 9\sqrt{29})$$

Calculando E_1 nos pontos A e C, vem:

$$E_1(A) = 33\sqrt{29}$$

$$E_1(C) = 33\sqrt{41}$$

Como $E_1(A)$ e $E_1(C)$ têm sinais iguais, A e C estão no mesmo semiplano em relação a t_1 .

Portanto, $t_2: (2\sqrt{41} - 5\sqrt{29})x - (5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} + 9\sqrt{29}) = 0$ é a bissetriz interna do triângulo ABC, por B.

244. 1) retas PM e PN

$$\overleftrightarrow{PM}: \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 0$$

$$\overleftrightarrow{PN}: \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 2y = 0$$

2) bissetrizes:

$$\frac{2x + 5y}{\sqrt{4 + 25}} \pm \frac{5x + 2y}{\sqrt{25 + 4}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1: x + y = 0 \\ t_2: x - y = 0 \end{cases}$$

$$3) \text{ Sendo } E_1 = x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_1(M) = -3 \\ E_1(N) = 3 \end{cases}$$

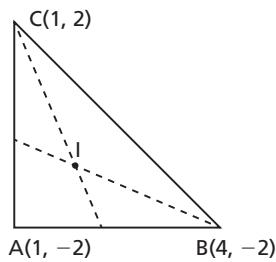
Como $E_1(M)$ e $E_1(N)$ têm sinais contrários, $t_1: x + y = 0$ é bissetriz interna, por P, do triângulo MNP.

$$4) \text{ reta } \overrightarrow{MN}: \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 7 = 0$$

$$\overleftrightarrow{MN} \cap t_1: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$5) d_{P, Q} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 0\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

245.



O incentro I, centro da circunferência inscrita no triângulo, é o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo.

1) retas:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 2 = 0$$

2) bissetrizes: $\frac{4x + 3y - 10}{\sqrt{16 + 9}} \pm \frac{y + 2}{\sqrt{1^2}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1: x + 2y = 0 \\ t_2: 2x - y - 10 = 0 \end{cases}$$

3) Seja $E_2 = 2x - y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_2(A) = -6 \\ E_2(C) = -10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1: x + 2y = 0$ é a bissetriz interna.

4) reta \overrightarrow{AC} : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

reta \overrightarrow{BC} : $4x + 3y - 10 = 0$

5) bissetrizes: $\frac{x - 1}{\sqrt{1}} \pm \frac{4x + 3y - 10}{\sqrt{16 + 9}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_3: 3x + y - 5 = 0 \\ t_4: x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

6) Seja $E_3 = 3x + y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_3(A) = -4 \\ E_3(B) = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_3: 3x + y - 5 = 0$ é a bissetriz interna.

7) incentro = {I} = $t_1 \cap t_3: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow I(2, -1)$

- 247.** 1) Por determinante, obtemos as equações das retas suportes dos lados AB, BC e AC.

$\overleftarrow{AB}: 5x - 12y - 21 = 0$

$\overleftarrow{AC}: 15x - 8y + 21 = 0$

$\overleftarrow{BC}: 5x + 2y - 49 = 0$

- 2) Vamos determinar as bissetrizes de \hat{A} :

$$\frac{5x - 12y - 21}{\sqrt{25 + 144}} \pm \frac{15x - 8y + 21}{\sqrt{225 + 64}} = 0$$

$t_1: 70x - 77y - 21 = 0$

$t_2: 11x + 10y + 63 = 0$

Fazendo $E = 11x + 10y + 63$, calculamos $E(B)$ e $E(C)$:

$E(B) = 182 > 0 \Rightarrow t_1: 70x - 77y - 21 = 0$ é a bissetriz interna.
 $E(C) = 238 > 0$

3) $\{S\} = t_1 \cap \overleftrightarrow{BC}$

$$\begin{cases} 70x - 77y - 21 = 0 \\ 5x + 2y - 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{763}{105}, \frac{665}{105}\right)$$

$$4) d_{AS} = \sqrt{\left(\frac{763}{105} + \frac{315}{105}\right)^2 + \left(\frac{665}{105} + \frac{315}{105}\right)^2} = \frac{14\sqrt{221}}{15}$$

CAPÍTULO V — Circunferências

256. $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0 \Rightarrow C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

O ponto $C_1(x_1, y_1)$, simétrico de C em relação ao eixo das ordenadas, é $C_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow D = 3$ e $E = -5$.

Portanto: $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 7 = 0$.

257. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = r^2 \Rightarrow C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) = (-1, -2)$

Para obter o simétrico O' da origem O em relação a $C(-1, -2)$, verificamos que C é ponto médio de OO' . Assim, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{0+x'}{2} = -1 \Rightarrow x' = -2 \\ \frac{0+y'}{2} = -2 \Rightarrow y' = -4 \end{array} \right\} O'(-2, -4)$$

259. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ tem centro $C(4, -3)$ e raio $r = 1$.

A ordenada máxima obtém-se partindo da ordenada do centro e adicionando o raio: $y_{\max} = (-3) + 1 = -2$.

Portanto, o ponto é $(4, -2)$.

261. 1º) $mx^2 + y^2 + 10x - 8y + k = 0$

a) Como $B = 1$, então $A = B = m = 1$.

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 100 + 64 - 4mk > 0 \Rightarrow k < 41$

2º) $mx^2 + 2y^2 + 24x + 24y - k = 0$

a) $A = B \Rightarrow m = 2$

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 576 + 576 - 4m(-k) > 0 \Rightarrow k > -144$

$$3º) 4x^2 + my^2 - 4x + 3k = 0$$

a) $A = B \Rightarrow m = 4$

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 16 + 0 - 4 \cdot 4 \cdot 3k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{3}$

262. $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$

$A = B \neq 0 \Rightarrow a = 36$

$b = 0$

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 24^2 + (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot c > 0 \Rightarrow c < 5$$

266. $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$

O centro deve pertencer às bissetrizes b_{13} ou b_{24} . Então,
 $m = n \neq 0$ ou $m = -n \neq 0 \Rightarrow |m| = |n| \neq 0$.

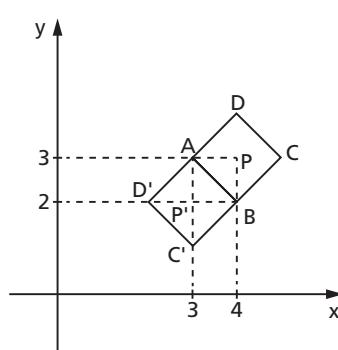
O raio deve ser igual às ordenadas do centro $C\left(\frac{|m|}{2}, \frac{|m|}{2}\right)$:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = \frac{m^2}{4} \Rightarrow m^2 = 4p.$$

267. $x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$ é tangente ao eixo dos x se a ordenada y do centro tiver o mesmo valor do raio.

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); r = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow c = \frac{a^2}{4}$$

268.

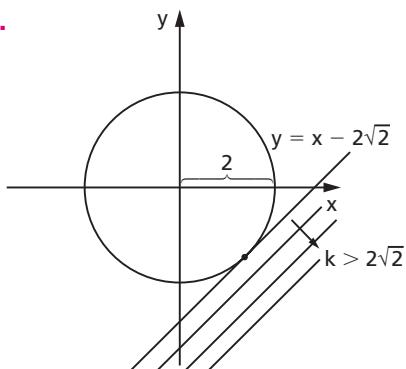


O raio é $r = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = 1$ (em que $\ell = d_{AB}$).

Verificamos que há duas possibilidades para o centro (P ou P'), em que:

$$P(4, 3) \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$P'(3, 2) \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

280.

$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ é o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 2.

$B = \{(x, y) | x - y \leq k\}$ é o semiplano situado acima da reta $y = x - k$. A figura indica a posição da reta para $k = 2\sqrt{2}$ (reta tangente ao círculo).

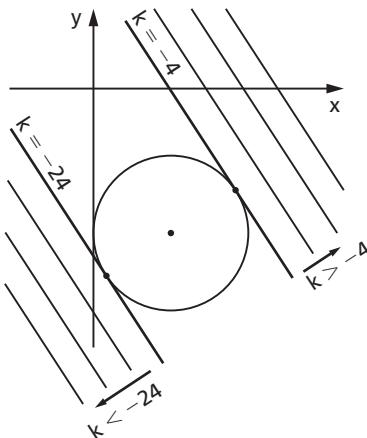
Se $k > 2\sqrt{2}$, a reta $y = x - k$ será paralela à tangente e abaixo desta.

Então, $A \subset B \Leftrightarrow k \geq 2\sqrt{2}$.

281.

$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 \leq 0\}$ é o círculo de centro $(2, -5)$ e raio $r = 2$.

$B = \{(x, y) | 3x + 4y \leq k\}$ é o semiplano situado abaixo da reta $3x + 4y = k$.



Notemos que, variando k , essa reta se desloca no plano, mas tendo sempre coeficiente angular $-\frac{3}{4}$. Determinemos k para que a reta $3x + 4y = k$ fique tangente ao círculo dado:

$$\left| \frac{3(2) + 4(-5) - k}{\sqrt{9 + 16}} \right| = 2 \Rightarrow k = -24 \text{ ou } k = -4.$$

Notemos que, se $k > -4$, a reta será exterior ao círculo e o semiplano abaixo dela conterá o círculo.

Notemos que, se $k < -24$, a reta será exterior ao círculo e o semiplano abaixo dela será disjunto com o círculo. Então:

- a) $k \geq -4$ b) $k < -24$

287.
$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Para $x = 1$, $y = -5 \Rightarrow P(1, -5)$.

Para $x = -3$, $y = 1 \Rightarrow Q(-3, 1)$.

288. O sistema

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 25 & (1) \\ x = k & (2) \end{cases}$$

deverá admitir duas soluções distintas.

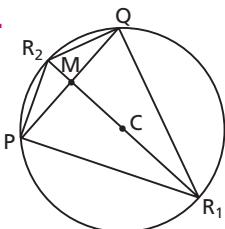
Substituindo (2) em (1), vem:

$$y^2 = 25 - (k - 3)^2 = -k^2 + 6k + 16.$$

Então, devemos ter:

$$-k^2 + 6k + 16 > 0, \text{ ou seja, } -2 < k < 8.$$

298.



1) Vamos obter os pontos P e Q, interseção da reta r com a circunferência (λ)

$$\begin{cases} (r) 3x - 4y + 19 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4} & (1) \\ (\lambda) (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 100 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$5x^2 + 26x - 171 = 0 \Rightarrow x = \frac{19}{5} \text{ ou } x = -9.$$

$$\text{Para } x = \frac{19}{5} \Rightarrow y = \frac{38}{5} \Rightarrow P\left(\frac{19}{5}, \frac{38}{5}\right).$$

$$\text{Para } x = -9 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow Q(-9, -2).$$

2) Seja M o ponto médio de PQ:

$$\begin{cases} x_M = \frac{\frac{19}{5} - 9}{2} = -\frac{13}{5} \\ y_M = \frac{\frac{38}{5} - 2}{2} = \frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Vamos passar por M a reta $s \perp r$. Como $m_r = \frac{3}{4}$, temos $m_s = -\frac{4}{3}$.

Então: (s) $y - y_M = m_s(x - x_M) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ (3).

3) Vamos obter os pontos R_1 e R_2 , interseção da reta s com a circunferência λ .

$$\begin{cases} s: y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad (3) \\ \lambda: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 200 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (2), vem: $x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -5$.

Para $x = 7 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow R_1(7, -10)$.

Para $x = -5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow R_2(-5, 6)$.

$$4) S_{PQR_1} = \frac{1}{2} |D_{PQR_1}| \quad \left. \begin{array}{l} D_{PQR_1} = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 1 \\ \frac{19}{5} & \frac{38}{5} & 1 \\ 7 & -10 & 1 \end{vmatrix} = -256 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{PQR_1} = 128$$

$$S_{PQR_2} = \frac{1}{2} |D_{PQR_2}| \quad \left. \begin{array}{l} D_{PQR_2} = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 1 \\ \frac{19}{5} & \frac{38}{5} & 1 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{PQR_2} = 32$$

- 299.**
- 1) Centro de (λ): $C(3, -1)$
 - 2) $r: 2x + y - 6 = 0 \Rightarrow m_r = -2$
 - h: hipotenusa; $h // r \Rightarrow m_h = -2$
- $C(3, -1) \in h \quad \left. \begin{array}{l} h: y = -2x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow h: y = -2x + 5$

3) $h \cap \lambda$

$$\begin{cases} h: y = -2x + 5 \\ \lambda: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2$$

Para $x = 2, y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$.

Para $x = 4, y = -3 \Rightarrow B(4, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} 4) k_1 \text{ (cateto) } // s: x - 6 = 0 \\ A(2, 1) \in k_1 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1: x - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} k_2 \text{ (cateto) } // s: x - 6 = 0 \\ B(4, -3) \in k_2 \end{array} \right\} \Rightarrow k_2: x - 4 = 0$$

$$5) k_1 \cap \lambda$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1: x - 2 = 0 \\ \lambda: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -3$$

pontos A(2, 1) e D(2, -3)

$$6) k_2 \cap \lambda$$

$$\left. \begin{array}{l} k_2: x - 4 = 0 \\ \lambda: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

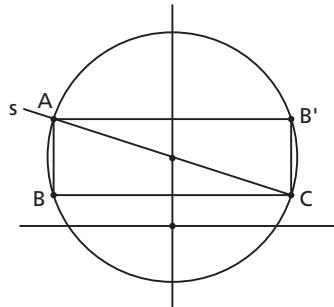
$$\Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -3$$

pontos B(4, -3) e E(4, 1)

Portanto: $\triangle ABD$: A(2, 1); B(4, -3) e D(2, -3)

$\triangle ABE$: A(2, 1); B(4, -3) e E(4, 1)

- 300.** 1) A circunferência dada tem centro $O\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$.



- 2) O triângulo procurado, por ter um lado paralelo ao eixo x e outro paralelo ao eixo y , é retângulo e, portanto, um de seus lados (a hipotenusa) passa pelo centro $O\left(0, \frac{3}{2}\right)$. A reta s , que contém a hipotenusa, tem equação $y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(x - 0)$, pois s é paralela à reta dada, cujo declive é $-\frac{3}{2}$.

3) A interseção de $s: 3x + 2y - 3 = 0$ com $\lambda: x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ são os pontos $A(-1, 3)$ e $C(1, 0)$.

4) O outro vértice do triângulo é $B = (x_A, y_C) = (-1, 0)$ ou $B' = (x_C, y_A) = (1, 3)$.

5) Área

$$S_{ABC} = S_{AB'C} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

302. 1º) $\lambda: \Rightarrow C(0, 0); r = 4$

$\lambda': \Rightarrow C'(-3, 2); r' = 3$

$$d = \sqrt{13} < \begin{cases} r + r' = 7 \\ r - r' = 1 \end{cases} \Rightarrow r - r' < d < r + r' \text{ (secantes)}$$

$$2º) \lambda: \Rightarrow C\left(0, \frac{1}{2}\right); r = 1$$

$$\lambda': \Rightarrow C'\left(0, \frac{1}{2}\right); r' = \frac{1}{2}$$

$d = 0$ (concêntricas)

3º) $\lambda: \Rightarrow C(0, 0); r = 3\sqrt{2}$

$\lambda': \Rightarrow C'(-10, 5); r' = 2$

$$d = 5\sqrt{5} < \begin{cases} r + r' = 2 + 3\sqrt{2} \\ r - r' = 3\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow d > r + r' \text{ (exterioras)}$$

4º) $\lambda: \Rightarrow C(2, 3); r = 1$

$\lambda': \Rightarrow C'(-2, 6); r' = 4$

$d = 5 = r + r'$ (tangentes exteriormente)

5º) $\lambda: \Rightarrow C(0, 0); r = 9$

$\lambda': \Rightarrow C'(3, -4); r' = 4$

$$d = 5 < \begin{cases} r + r' = 13 \\ r - r' = 5 \end{cases} \Rightarrow d = r - r'$$
 (tangentes interiormente)

305. 1) $\lambda: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0 \Rightarrow C(5, -1); r = 2\sqrt{10}$
 $\lambda': x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0 \Rightarrow C'(4, -2); r' = 2$ } $\Rightarrow r > r'$

2) Fazendo $\lambda - \lambda'$, vem: $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ (1)

Substituindo (1) em λ , temos:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2.$$

Para $x = 4, y = -4 \Rightarrow A(4, -4)$.

Para $x = 2, y = -2 \Rightarrow B(2, -2)$.

3) Reta AB: $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0$ (Observe que esta foi a reta obtida em (1).)

4) $d_{C_1, AB} = \frac{|5 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

306. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0 \Rightarrow C'(-2, 3); r' = \sqrt{13}$

$$d = d_{CC'} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = 4\sqrt{2}$$

Há duas hipóteses para a tangência de circunferências:

I) tangentes exteriormente: $d = r + r'$

$$d_{CC'} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{13} + r = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2} - \sqrt{13}$$

$$\text{Então: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2} - \sqrt{13})^2.$$

II) tangentes interiormente: $d = |r - r'|$

$$|\sqrt{13} - r| = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{13} - r = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{13} - 4\sqrt{2} < 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ \sqrt{13} - r = -4\sqrt{2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2} + \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\text{Então: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2} + \sqrt{13})^2.$$

307. 1) $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$

$$C_2: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow O_2(1, 0)$$

2) Vamos obter o ponto Q tal que $\{Q\} = C_1 \cap C_2$.

Fazendo $C_1 - C_2$, vem: $x = 0$ e $y = \pm 1 \Rightarrow A(0, -1)$ e $Q(0, 1)$.

3) Determinemos a reta $\overleftrightarrow{QO_2}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

4) $\{P\} = \overleftrightarrow{QO_2} \cap C_1$

$$\begin{cases} QO_2: y = -x + 1 \\ C_1: x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Então, para $x = 0, y = 1 \Rightarrow Q(0, 1)$ e para $x = -2, y = 3 \Rightarrow P(-2, 3)$.

CAPÍTULO VI — Problemas sobre circunferências

309. $\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O(2, 3); r = 4 \\ s: y = x \Rightarrow x - y = 0 \end{cases}$

feixe $t \parallel s$ é $t: x - y + c = 0$

Aplicando a fórmula $\left| \frac{Aa + Bb + k}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = r$, vem:

$$\left| \frac{2 - 3 + c}{\sqrt{1+1}} \right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{c-1}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow c = 4\sqrt{2} + 1 \\ \text{ou} \\ \frac{c-1}{\sqrt{2}} = -4 \Rightarrow c = -4\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Portanto: $t_1: x - y + 4\sqrt{2} + 1 = 0$

$t_2: x - y - 4\sqrt{2} + 1 = 0$

310. $\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O(1, -1); r = \sqrt{2} \\ s: x = -y \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow m_s = -1 \end{cases}$

feixe $t \perp s \Rightarrow t: x - y + c = 0$

Aplicando a fórmula, vem:

$$\left| \frac{c+2}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow c = 0 \text{ ou } c = -4$$

Portanto, $t_1: x - y = 0$; $t_2: x - y - 4 = 0$.

311. 1º) $\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 34 = 0 \Rightarrow O(-1, 1); r_\lambda = 6 \\ r: x + 3y = 0 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{3} \\ \theta = 90^\circ \Rightarrow t \perp r \Rightarrow \text{feixe } t: 3x - y + c = 0 \end{cases}$

$$d_{0,t} = \left| \frac{3(-1) - 1 + c}{\sqrt{9+1}} \right| = 6 \Rightarrow c = 4 \pm 6\sqrt{10}$$

$t: 3x - y + 4 \pm 6\sqrt{10} = 0$

$$2^{\text{o}}) \begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0 \Rightarrow 0(0, -1); r_\lambda = 5 \\ r: x - 2y = 0 \Rightarrow m_r = \frac{+1}{2} \\ \theta = 90^\circ \Rightarrow t \perp r \Rightarrow \text{feixe } t: 2x + y + c = 0 \end{cases}$$

$$d_{0,t} = \left| \frac{2 \cdot 0 - 1 + c}{\sqrt{4+1}} \right| = 5 \Rightarrow c = 1 \pm 5\sqrt{5}$$

$$t: 2x + y + 1 \pm 5\sqrt{5} = 0$$

$$3^{\text{o}}) \begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 0(0, 0); r_\lambda = 7 \\ r: 4x + y - 3 = 0 \Rightarrow m_r = -4 \\ \theta = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \end{cases}$$

Devemos inicialmente obter m_t para definir a equação do feixe.

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m_r - m_t}{1 + m_r m_t} \right| \Rightarrow \left| \frac{-4 - m_t}{1 + 4m_t} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{5}{3} \text{ ou } m_t = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Então, } t_1: y - y_0 = \frac{5}{3}(x - x_0) \Rightarrow 5x - 3y + c = 0$$

$$t_2: y - y_0 = -\frac{3}{5}(x - x_0) \Rightarrow 3x + 5y + c = 0$$

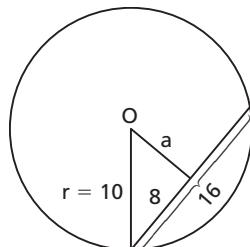
$$d_{0,t_1} = \frac{|c|}{\sqrt{34}} = 7 \Rightarrow |c| = 7\sqrt{34} \Rightarrow c = \pm 7\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1: 5x - 3y \pm 7\sqrt{34} = 0$$

$$d_{0,t_2} = \frac{|c|}{\sqrt{34}} = 7 \Rightarrow |c| = 7\sqrt{34} \Rightarrow c = \pm 7\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2: 3x + 5y \pm 7\sqrt{34} = 0$$

312. $\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 0(0, 0); r_\lambda = 10 \\ r: y = 2x \Rightarrow m_r = 2 \\ s // r \Rightarrow m_s = m_r = 2 \Rightarrow y = 2x + c \Rightarrow 2x - y + c = 0 \text{ (s)} \end{cases}$



Da figura, temos: $a^2 = r^2 - 8^2 \Rightarrow a = 6$.

Impondo a condição $d_{0,s} = a$, vem:

$$\left| \frac{2 \cdot 0 - 0 + c}{\sqrt{4+1}} \right| = 6 \Rightarrow c = \pm 6\sqrt{5}$$

$$s: 2x - y \pm 6\sqrt{5} = 0$$

314. $\lambda: x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow C(0, 0)$

$$m_{CT} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow m_t = -\frac{x_0}{y_0}$$

equação da reta tangente por (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \text{ e daí } x_0x + y_0y - (x_0^2 + y_0^2) = 0$$

Como $(x_0, y_0) \in \lambda$, vem t: $x_0x + y_0y - r^2 = 0$.

315. a) 1º) $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 + 2ay = 0 \Rightarrow O(0, -a); r = a \ (a > 0) \\ \text{feixe de retas por } P(\lambda, 0): y - 0 = m(x - \lambda) \text{ ou ainda} \\ mx - y - m\lambda = 0 \ (1) \end{cases}$

2º) Como $d_{OP} = \sqrt{\lambda^2 + a^2} > a$, temos duas soluções.

Aplicando a fórmula da distância de ponto a reta, vem:

$$\left| \frac{m \cdot 0 - (-a) - m\lambda}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 0 \Rightarrow m = \frac{2a\lambda}{\lambda^2 - a^2} \quad (2) \text{ ou } m = 0 \quad (3)$$

3º) Substituindo (2) em (1), temos:

$$t_1: \frac{2a\lambda}{\lambda^2 - a^2}x - y - \frac{2a\lambda^2}{\lambda^2 - a^2} = 0.$$

Substituindo (3) em (1), temos:

$$t_2: 0x - y - 0\lambda = 0 \Rightarrow y = 0.$$

4º) Calculando as interseções $C_1 \cap t_1$ e $C_1 \cap t_2$, vem:

$$C_1 \cap t_1 \Rightarrow x = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2} \Rightarrow y = \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2}, \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2}\right)$$

$$C_2 \cap t_2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B(0, 0).$$

b) O ponto Q com ordenada λ pertence à reta $x + a = 0$, portanto tem abscissa $-a$: $Q(-a, \lambda)$.

Provemos que os pontos A, B e Q são colineares:

$$\begin{vmatrix} \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2} & \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{2a^2\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} - \frac{2a^2\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} = 0$$

316. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \Rightarrow C(-2, 4); r = 5$

Para $x = 1 \Rightarrow y^2 - 8y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow P(1, 0) \\ \text{ou} \\ y = 8 \Rightarrow Q(1, 8) \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0) \\ C(-2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow t_1: y - y_0 = \frac{a - x_0}{y_0 - b} (x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{-2 - 1}{0 - 4} (x - 1) \Rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 8) \\ C(-2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow t_2: y - 8 = \frac{-2 - 1}{8 - 4} (x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 35 = 0$$

317. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \Rightarrow C(1, 3) \text{ e } r = \sqrt{5} \\ \lambda(2x + y + 5) + \mu(x + y + 1) = 0 \Rightarrow P(-4, 3) \text{ é o centro do feixe de retas concorrentes.} \end{cases}$

Uma reta do feixe é $y - 3 = m(x + 4)$ ou ainda $mx - y + 4m + 3 = 0$.

Aplicando a fórmula da distância de ponto a reta, temos:

$$\left| \frac{m \cdot 1 - 3 + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{5} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - y + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0 \\ -\frac{1}{2}x - y + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \end{array} \right.$$

318. $\lambda: x^2 + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow C(0, -1), r = 1$

Centro do feixe: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow P(1, 3)$ exterior a $\lambda \Rightarrow 2$ soluções

Considerando que $x_p = 1$, $x_C = 0$ e $r = 1$, então uma das tangentes t_1 : é a reta $x = 1$ ou $t_1: x - 1 = 0$.

Calculando a outra tangente, temos $y - 3 = m(x - 1)$ ou ainda $mx - y + 3 - m = 0$.

Então, vem:

$$\left| \frac{m \cdot 0 + 1 + 3 - m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 1 \Rightarrow m = \frac{15}{8} \Rightarrow 15x - 8y + 9 = 0 \text{ (t}_2\text{).}$$

319. $\lambda: x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow C(0, -1); r = \sqrt{3}$

$$d_{PC} = \sqrt{10} > r \Rightarrow P \text{ é exterior a } \lambda$$

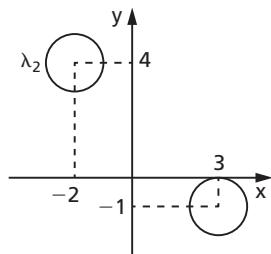
Então, feixe de retas por P: $mx - y - 3m = 0$.

Como as retas devem ser externas, a distância do centro C(0, -1) às retas deve ser maior que o raio.

$$\left| \frac{m \cdot 0 + 1 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| > \sqrt{3} \Rightarrow m < \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \text{ ou } m > \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$$

320. $\lambda_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \Rightarrow O_1(3, -1); r_1 = 1$

$$\lambda_2: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow O_2(-2, 4); r_2 = 1$$



1º) Verifica-se que $x = 0$ é uma das retas;

2º) as demais pertencem ao feixe $y = mx$.

Então, t: $mx - y = 0$.

$$3º) d_{O_1, t} = \frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \quad (1)$$

$$d_{O_2, t} = \frac{|-2m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \quad (2)$$

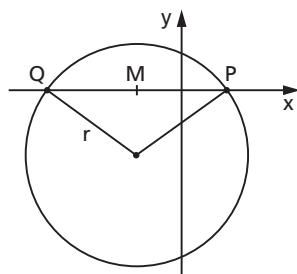
$$(1) 4m^2 + 3m > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4} \text{ ou } m > 0$$

$$(2) 3m^2 + 16m + 15 > 0 \Rightarrow m < \frac{-8 - \sqrt{19}}{3} \text{ ou } m > \frac{-8 + \sqrt{19}}{3}$$

Fazendo a interseção das soluções de (1) e (2), vem:

$$m < \frac{-8 - \sqrt{19}}{3} \text{ ou } \frac{-8 + \sqrt{19}}{3} < m < -\frac{3}{4} \text{ ou } m > 0.$$

321. $\lambda: x^2 + y^2 + 5x + 8y + a = 0 \Rightarrow C\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$



$\overline{PQ} = 9$, sendo $P(x_P, 0)$ e $Q(x_Q, 0)$.

M é ponto médio de PQ, $M\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.

$$\text{Então: } x_P = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} \Rightarrow x_P = 2$$

$$x_Q = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2} \Rightarrow x_Q = -7$$

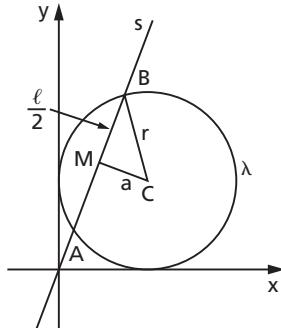
Portanto, $P(2, 0)$ e $Q(-7, 0)$.

Substituindo qualquer dos pontos (P ou Q) em λ , obtém-se $a = -14$.

322. $\lambda: (-5)^2 + (y - 5)^2 = 5 \Rightarrow C(5, 5); \lambda = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle BMC$, temos:

$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow a = \frac{7\sqrt{5}}{17}.$$



Assim, vamos impor que a distância do centro C à reta s: $mx - y = 0$ seja a:

$$d_{C,s} = \frac{|5m - 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{7\sqrt{5}}{17} \Rightarrow 18m^2 - 85m + 18 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m = \frac{2}{9} \text{ ou } m = \frac{9}{2}$$

Portanto: $2x - 9y = 0$ ou $9x - 2y = 0$.

323. 1º) $\lambda: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(4, -3)$ e $r = 3$

$P(2, 1) \in (s) \Rightarrow$

$\Rightarrow s: mx - y + 1 - 2m = 0$

$P(2, 1) \in \lambda$

2º) Aplicando o teorema de Pitágoras no

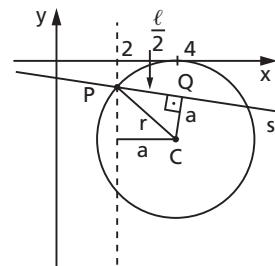
$\triangle PQC$:

$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow a = 2.$$

$$3º) d_{C,s} = \frac{|4m + 3 + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{|2m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16m + 12 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$$

4º) A outra solução é $x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$.



324. 1) r: $3x + y = 0 \Rightarrow m_r = -3$

$$\left. \begin{array}{l} s: y - y_0 = m_s(x - x_0) \\ P(0, 2) \in (s) \end{array} \right\} y - 2 = m_s(x - 0) \Rightarrow s: m_s x - y + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \text{ (rejeitado) ou } m_s = 2$$

$$\therefore s: 2x - y + 2 = 0$$

$$2) Q(x_Q, y_Q) \in s \Rightarrow Q(x_Q, 2x_Q + 2)$$

$$d_{PQ} = \sqrt{x_Q^2 + (2x_Q + 2 - 2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow x_Q = \pm 1$$

$$\text{Para } x_Q = 1 \Rightarrow y_Q = 4 \Rightarrow Q(1, 4).$$

$$\text{Para } x_Q = -1 \Rightarrow y_Q = 0 \Rightarrow Q(-1, 0).$$

3) Os pontos P(0, 2) e Q(1, 4) pertencem à circunferência λ_1 .

Os pontos P(0, 2) e Q(-1, 0) pertencem à circunferência λ_2 .

Além disso, a reta r: $3x + y = 0$ contém o diâmetro da circunferência (λ_1 ou λ_2); portanto, C(x_C, y_C) é tal que $y_C = -3x_C$.

4) Considerando a equação genérica da circunferência, vem:

$$\lambda: (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$1^{\circ}) P(0, 2) \in \lambda_1 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 4y_C + 4 - r^2 = 0 \quad (1)$$

$$Q(1, 4) \in \lambda_1 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 8y_C + 17 - r^2 = 0 \quad (2)$$

Sendo $y_C = -3x_C$ (3), resolvendo o sistema formado por (1), (2) e

$$(3), \text{ resulta: } x_C = -\frac{13}{10}, y_C = \frac{39}{10} \text{ e } r^2 = \frac{53}{10}.$$

$$\lambda_1: \left(x + \frac{13}{10} \right)^2 + \left(y - \frac{39}{10} \right)^2 = \frac{53}{10}$$

$$2^{\circ}) P(0, 2) \in \lambda_2 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 4y_C + 4 - r^2 = 0 \quad (1)$$

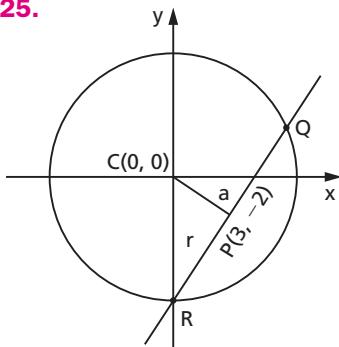
$$Q(-1, 0) \in \lambda_2 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 + 2x_C + 1 - r^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Novamente, } y_C = -3x_C. \quad (3)$$

Resolvendo o sistema de (1), (4) e (3), vem:

$$x_C = -\frac{3}{10}, y_C = \frac{9}{10} \text{ e } r^2 = \frac{13}{10}.$$

$$\lambda_2: \left(x + \frac{3}{10} \right)^2 + \left(y - \frac{9}{10} \right)^2 = \frac{13}{10}$$

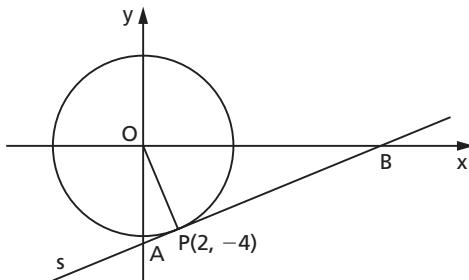
325.

1) $\overline{CP} = a = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

2) $m_a = \frac{-2}{3}$

3) Como P é ponto médio da corda, então $CP \perp QR \Rightarrow m_{QR} = \frac{3}{2}$.

4) QR passa por P(3, -2) e $m_{QR} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0$.

326.

1) $m_{OP} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

2) $m_s = \frac{1}{2}$ $P(2, -4) \in s$ } $\Rightarrow y + 4 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y - 10 = 0$ (s)

3) Interseção de s com os eixos:

$x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow A(0, -5)$

$y = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow B(10, 0)$

4) Área do $\triangle OAB$:

1ª solução: Área = $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$

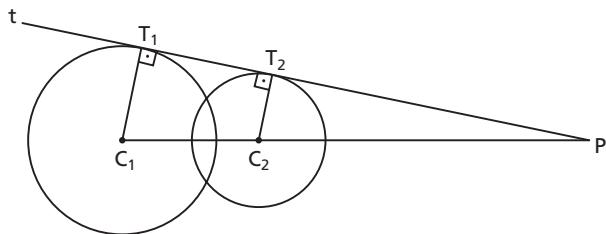
2ª solução: $S_{OAB} = \frac{1}{2} |D_{OAB}|$

$D_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 50$

327. I) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow C_1(0, 0)$ e $r_1 = 8$

$$\lambda_2: \left(x - \frac{25}{3}\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow C_2\left(\frac{25}{3}, 0\right)$$

$$d_{C_1C_2} = \frac{25}{3} \Rightarrow r_1 - r_2 < d_{C_1C_2} < r_1 + r_2 \Rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ secantes.}$$



II) Se t é tangente comum conforme a figura, então:

$$\triangle PC_1T_1 \sim \triangle PC_2T_2 \Rightarrow \frac{\overline{C_1P}}{\overline{C_2P}} = \frac{\overline{C_1T_1}}{\overline{C_2T_2}} = \frac{8}{3}.$$

Usando a teoria da razão de segmentos colineares, vem:

$$\frac{x_P - x_{C_1}}{x_P - x_{C_2}} = \frac{8}{3} \text{ e } y_{C_1} = y_{C_2} = y_P$$

e daí

$$\frac{x_P - 0}{x_P - \frac{25}{3}} = \frac{8}{3} \Rightarrow x_P = \frac{40}{3} \text{ e } y_P = 0$$

III) Equação da reta t :

$$P \in t \Rightarrow y - 0 = m\left(x - \frac{40}{3}\right) \Rightarrow 3mx - 3y - 40m = 0$$

$$d_{C_1, t} = r_1 \Rightarrow \left| \frac{3m \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 40m}{\sqrt{9m^2 + 9}} \right| = 8 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

então, t : $3x + 4y - 40 = 0$ ou t : $3x - 4y - 40 = 0$.

328. Calculando as interseções das retas, vem: $A(0, -2)$, $B(-2, 0)$ e $C(0, 0)$.

$$A \in \lambda \Rightarrow (a - 0)^2 + (b + 2)^2 = r^2$$

$$B \in \lambda \Rightarrow (a + 2)^2 + (b - 0)^2 = r^2$$

$$C \in \lambda \Rightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = r^2$$

Resolvendo esse sistema, obtemos: $a = -1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$.

Portanto, $C(-1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$.

329. $A \in \lambda \Rightarrow (a + 4)^2 + (b - 4)^2 = r^2$

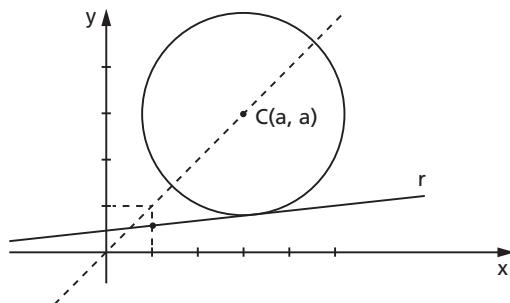
$$B \in \lambda \Rightarrow (a + 7)^2 + (b - 3)^2 = r^2$$

$$C \in \lambda \Rightarrow (a + 8)^2 + (b + 4)^2 = r^2$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = -4$, $b = -1$ e $r = 5$.

Portanto, a equação da circunferência é $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

330.



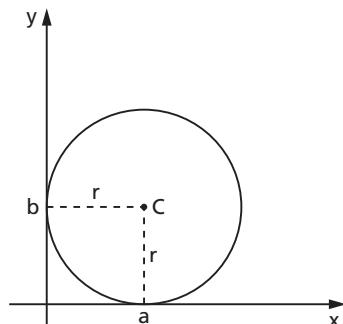
$$C(a, b) \in b_{13} \Rightarrow b = a \Rightarrow C(a, a)$$

$$d_{C, t} = r \Rightarrow \left| \frac{5a - 12a + 3}{\sqrt{25 + 144}} \right| = 4 \Rightarrow a = -7 \text{ ou } a = \frac{55}{7}$$

portanto, a circunferência é:

$$(x + 7)^2 + (y + 7)^2 = 16 \text{ ou } \left(x - \frac{55}{7} \right)^2 + \left(y - \frac{55}{7} \right)^2 = 16.$$

331.



$$\lambda \operatorname{tg} 0x \Rightarrow |b| = r \quad (1)$$

$$\lambda \operatorname{tg} 0y \Rightarrow |a| = r \quad (2)$$

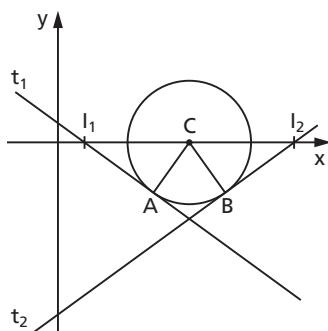
$$C \in s \Rightarrow 2a + b - 3 = 0$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$a = b = r = 1 \text{ ou } a = -b = r = 3$$

e, portanto, há duas soluções:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ ou } (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

332.

$$C \in Ox \Rightarrow b = 0 \quad (1)$$

$$\lambda \operatorname{tg} t_1 \Rightarrow \left| \frac{2a + 3b - 1}{\sqrt{13}} \right| = r \quad (2)$$

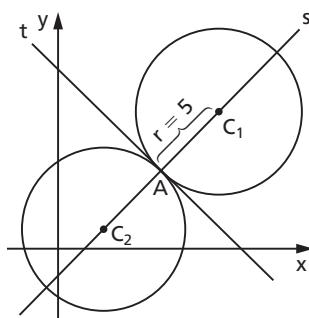
$$\lambda \operatorname{tg} t_2 \Rightarrow \left| \frac{2a - 3b - 7}{\sqrt{13}} \right| = r \quad (3)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$a = 2, b = 0 \text{ e } r = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

e, portanto, a solução é:

$$(x - 2)^2 + y^2 = \frac{9}{13}.$$

333.

$$\text{I)} \ t: 3x + 4y - 35 \Rightarrow m_t = -\frac{3}{4}$$

$$s \perp t \Rightarrow m_s = \frac{4}{3}$$

$$A \in s \Rightarrow y - 5 = \frac{4}{3}(x - 5)$$

$$s: 4x - 3y - 5 = 0$$

II) Temos, então:

$$C \in s \Rightarrow 4a - 3b - 5 = 0 \quad (1)$$

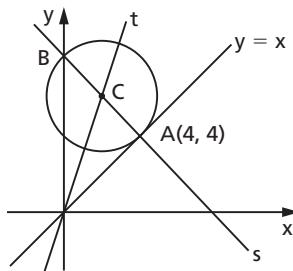
$$AC = r \Rightarrow (a - 5)^2 + (b - 5)^2 = 25 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$(a = 8 \text{ e } b = 9) \text{ ou } (a = 2 \text{ e } b = 1)$$

e, portanto, há duas soluções:

$$(x - 8)^2 + (y - 9)^2 = 25 \text{ ou } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

334.

$$C \in s \Rightarrow b = 3a \quad (1)$$

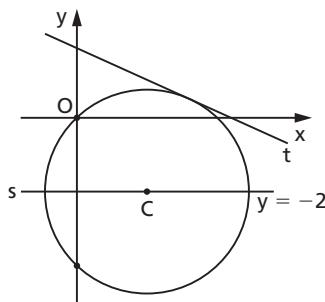
$$\lambda \operatorname{tg} b_{13} \Rightarrow \left| \frac{a - b}{\sqrt{2}} \right| = R \quad (2)$$

$$A \in \lambda \Rightarrow (a - 4)^2 + (b - 4)^2 = R^2 \quad (3)$$

Resolvendo esse sistema, vem:

$$a = 2, b = 6 \text{ e } R = 2\sqrt{2}$$

portanto, $R^2 = 8$.

335.

$$O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2 \quad (1)$$

$$C \in s \Rightarrow b = -2 \quad (2)$$

$$t \operatorname{tg} \lambda \Rightarrow \left| \frac{a + b - 4}{\sqrt{2}} \right| = r \quad (3)$$

Substituindo (2) em (1) e (3), resulta:

$$(1) \quad a^2 + 4 = r^2 \text{ e } (3) \quad \left| \frac{a - 6}{\sqrt{2}} \right| = r$$

$$\text{então } a^2 + 4 = \frac{(a - 6)^2}{2} \text{ e daí } a = 2 \text{ ou } a = -14.$$

Se $a = 2$, então $r^2 = 8$ e, se $a = -14$, então $r^2 = 200$.

Há duas soluções para o problema:

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8 \text{ ou } (x + 14)^2 + (y + 2)^2 = 200.$$

336.

$$C \in s \Rightarrow a - 3b - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\lambda \operatorname{tg} Ox \Rightarrow |b| = r \quad (2)$$

$$\lambda \operatorname{tg} Oy \Rightarrow |a| = r \quad (3)$$

Resolvendo esse sistema, temos:

$$(a = b = -3 \text{ e } r = 3) \text{ ou } \left(a = -b = \frac{3}{2} \text{ e } r = \frac{3}{2} \right)$$

portanto, as circunferências são:

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9 \text{ ou } \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}.$$

337.

$$O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = R^2 \quad (1)$$

$$r \operatorname{tg} \lambda \Rightarrow d_{C, r} = R \Rightarrow \left| \frac{4a - 3b - 25}{5} \right| = R \quad (2)$$

$$s \operatorname{tg} \lambda \Rightarrow d_{C, s} = R \Rightarrow \left| \frac{4a + 3b + 1}{5} \right| = R \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), resulta:

$$a = 3 \text{ ou } b = -\frac{13}{3}.$$

Se $a = 3$, temos:

$$9 + b^2 = R^2 \text{ e } \left| \frac{13 + 3b}{5} \right| = R \Rightarrow (b = 4 \text{ e } R = 5) \text{ ou } \left(b = \frac{7}{8} \text{ e } R = \frac{25}{8} \right).$$

Se $b = -\frac{13}{3}$, temos:

$$a^2 + \frac{169}{9} = R^2 \text{ e } \left| \frac{4a - 12}{5} \right| = R \Rightarrow \text{não existe } a, R \text{ reais.}$$

Portanto, o problema admite duas soluções:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \text{ ou } (x - 3)^2 + \left(y - \frac{7}{8} \right)^2 = \frac{625}{64}.$$

338. $A \in \lambda \Rightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = r^2 \quad (1)$ e $r \neq 1$

Ox $\operatorname{tg} \lambda \Rightarrow |b| = r \quad (2)$

Oy $\operatorname{tg} \lambda \Rightarrow |a| = r \quad (3)$

De (2) e (3) vem $|a| = |b|$, então:

1ª possibilidade: $a = b$

$$(1)(a + 1)^2 + (a - 2)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow \nexists a \in \mathbb{R}$$

2ª possibilidade: $a = -b$

$$(1)(a + 1)^2 + (-a - 2)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = -5$$

Se $a = -1$, então $r = 1$. (não convém)

Se $a = -5$, então $b = 5$ e $r = 5$.

Solução: $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

339. $A \in \lambda \Rightarrow (a - 8)^2 + b^2 = r^2 \quad (1)$

Ox $\operatorname{tg} \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2 \quad (2)$

$$\lambda \operatorname{tg} b_{13} \Rightarrow \left| \frac{a - b}{\sqrt{2}} \right| = r \quad (3)$$

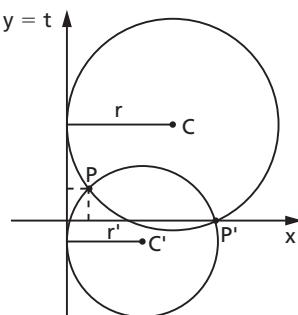
Comparando (1) e (2), vem $a = 4$, então:

$$(2) r^2 = 16 + b^2 \text{ e } (3) r = \left| \frac{4 - b}{\sqrt{2}} \right|$$

$$\text{e daí } 16 + b^2 = \frac{(4 - b)^2}{2} \Rightarrow b = -4.$$

$$r^2 = 16 + 16 = 32$$

Solução: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 32$.

340.

$$1) P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$P' \in \lambda \Leftrightarrow (a - 8)^2 + b^2 = r^2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem:
 $b = 7a - 31 \quad (3)$

$$2) t: x = 0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow d_{C,t} = \frac{|a|}{1} = r \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2), vem:

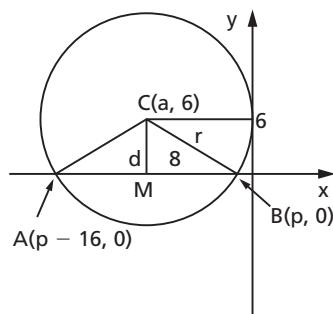
$$(r - 8)^2 + (7r - 31)^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{+205}{49} \text{ ou } r = 5.$$

Em (4) $a = \pm r$, mas, pelas condições do problema, $a > 0$.

$$\text{Então: } a = 5 \text{ ou } a = \frac{205}{49}.$$

Substituindo esses valores em (3): $b = 4$ ou $b = -\frac{12}{7}$.

$$\text{Portanto: } (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25 \text{ ou } \left(x - \frac{205}{49}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 = \left(\frac{205}{49}\right)^2.$$

341.

1^ª solução:

$$1) t: x = 0 \text{ tg } \lambda \Rightarrow \frac{|a|}{1} = r \Rightarrow a = \pm r, \text{ ou seja, } a = -r, \text{ porque } a < 0.$$

2) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CMB, temos:

$$r^2 = d^2 + \overline{MB}^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 64 \Rightarrow r = 10.$$

Portanto, $a = -10$.

$$3) (x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$$

2^a solução:

$$t: x = 0 \quad \text{tg } \lambda \Rightarrow \frac{|a|}{1} = r \Rightarrow a = \pm r \text{ ou } a = -r \quad (1), \text{ porque } a < 0$$

$$A(p - 16, 0) \in \lambda \Leftrightarrow (a - p + 16)^2 + 6^2 = r^2 \quad (2)$$

$$B(p, 0) \in \lambda \Leftrightarrow (a - p)^2 + 6^2 = r^2 \quad (3)$$

Resolvendo o sistema de (2) e (3), vem $p = a + 8$. (4)

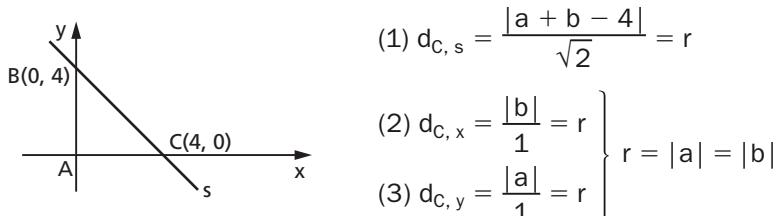
Substituindo (1) e (4) em (3), temos: $r = 10 \Rightarrow a = -10$.

Então: $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$.

342. O centro da circunferência inscrita é o incentro (ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo).

Obs.: Uma solução é obter as bissetrizes e sua interseção. No caso, vamos usar a teoria das distâncias.

Seja s a reta dos pontos B e C: $s: x + y - 4 = 0$.



Como o centro $C(a, b)$ pertence à bissetriz do primeiro quadrante, então $b = a = r$ (4).

Substituindo (4) em (1), vem:

$$|a + a - 4| = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

A solução $a = 4 + 2\sqrt{2}$ é rejeitada por estar fora do $\triangle ABC$.

Portanto:

$$(x - 4 + 2\sqrt{2})^2 + (y - 4 + 2\sqrt{2})^2 = (4 - 2\sqrt{2})^2.$$

- 343.**
- a) 1º) $r: 3x - 4y - 25 = 0 \Rightarrow m_r = \frac{3}{4}$
 - 2º) \hat{rs} é tal que $\arctg \frac{24}{7} = \hat{rs} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{rs} = \frac{24}{7}$.
 - Assim, $\operatorname{tg} \hat{rs} = \frac{24}{7} = \left| \frac{\frac{3}{4} - m_s}{1 + \frac{3}{4}m_s} \right| \Rightarrow m_s = -\frac{3}{4}$ ou $m_s = -\frac{117}{44}$.

Como $-1 < m_s < 0$, então devemos ficar com $m_s = -\frac{3}{4}$.

Como $A(-3, 5) \in s$, então $s: y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 3)$ e daí

$$s: 3x + 4y - 11 = 0$$

b) $t // s \Leftrightarrow m_t = m_s = -\frac{3}{4}$

$$B(3, -12) \in t \Rightarrow t: y + 12 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow t: 3x + 4y + 39 = 0$$

c) $\begin{cases} r: \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{3a - 4b - 25}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \quad (1) \\ s: \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{3a + 4b - 11}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \quad (2) \\ t: \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{3a + 4b + 39}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \quad (3) \end{cases}$

Desenvolvendo os quadrados e, por escalonamento, resolvendo o sistema, vem: $a = -\frac{4b}{3} - \frac{14}{3}$ em (3).

Substituindo esse valor de a em (2), vem:

$$4b^2 + 39b + 56 = 0 \Rightarrow b = -\frac{7}{4} \text{ ou } b = -8.$$

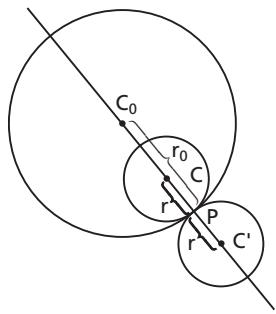
Para $b = -\frac{7}{4}$, vem $a = -\frac{7}{3}$, que em (1) dá $r^2 = 25$.

Para $b = -8$, vem $a = 6$, que em (1) dá $r^2 = 25$.

Portanto: $\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = 25$ ou $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 25$

é a solução.

344.



Usando a razão entre segmentos, temos:

$$(1) \frac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \frac{r_0 - r}{r} \Rightarrow \frac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \frac{3}{2}, \text{ então:}$$

$$\frac{x_C - x_{C_0}}{x_P - x_C} = \frac{a - 0}{3 - a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{5}$$

$$\frac{y_C - y_{C_0}}{y_P - y_C} = \frac{b - 0}{-4 - b} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{12}{5}$$

$$\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{5}\right)^2 = 4$$

$$(2) \frac{\overline{C_0C'}}{\overline{CP}} = \frac{r_0 + r'}{r'} \Rightarrow \frac{\overline{C_0C'}}{\overline{CP}} = -\frac{7}{2}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{x_{C'} - x_{C_0}}{x_P - x_{C'}} &= \frac{a' - 0}{3 - a'} = -\frac{7}{2} \Rightarrow a' = \frac{21}{5} \\ \frac{y_{C'} - y_{C_0}}{y_P - y_{C'}} &= \frac{b' - 0}{-4 - b'} = -\frac{7}{2} \Rightarrow b' = -\frac{28}{5} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{28}{5}\right)^2 &= 4 \end{aligned}$$

345. $\lambda \operatorname{tg} \lambda_0 \Leftrightarrow d_{CC_0} = r \pm r_0 \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2$

$$(-8 - 0)^2 + (6 - 0)^2 = (r \pm 6)^2$$

$$r^2 \pm 12r - 64 = 0 \Rightarrow r = \frac{\pm 12 + 20}{2} \begin{cases} r' = 4 \\ r'' = -16 \text{ (rejeitado)} \\ r''' = 16 \\ r'''' = -4 \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

$$(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 16 \text{ ou } (x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 256$$

346. Usando a razão entre os segmentos, temos:

$$(1) \frac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \frac{r_0 - r}{r} \Rightarrow \frac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = 14, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} \frac{0 - a}{a + 9} &= 14 \Rightarrow a = -\frac{42}{5} \Rightarrow \left(x + \frac{42}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{56}{5}\right)^2 = 1 \\ \frac{0 - b}{b - 12} &= 14 \Rightarrow b = \frac{56}{5} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\overline{C_0C'}}{\overline{CP}} = \frac{r_0 - r'}{r'} \Rightarrow \frac{\overline{C_0C'}}{\overline{CP}} = -16, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} \frac{0 - a'}{a' + 9} &= -16 \Rightarrow a' = -\frac{48}{5} \Rightarrow \left(x + \frac{48}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{64}{5}\right)^2 = 1 \\ \frac{0 - b'}{b' - 12} &= -16 \Rightarrow b' = \frac{64}{5} \end{aligned}$$

347. $P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 12)^2 = r^2 \quad (1)$

$$P' \in \lambda \Leftrightarrow (a - 5)^2 + (b - 7)^2 = r^2 \quad (2)$$

$$\lambda_0 \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (r + 8)^2 \quad (3)$$

Comparando as equações (1) e (2), vem:

$$a^2 + b^2 - 24b + 144 = a^2 - 10a + 25 + b^2 - 14b + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b - 7 \quad (4)$$

Comparando as equações (1) e (3), vem:

$$a^2 + b^2 - 24b + 144 - r^2 = a^2 + b^2 - r^2 - 16r - 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2}b - 13 \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (1), temos:

$$(b - 7)^2 + (b - 12)^2 = \left(\frac{3}{2}b - 13\right)^2 \Rightarrow b = 12 \text{ ou } b = -8$$

Para $b = 12$, vem $a = 5$ e $r = 5$.

Para $b = -8$, vem $a = -15$ e $r = -25$. (rejeitado)

Portanto: $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 25$.

348. $P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = r^2 \quad (1)$

$$\lambda \operatorname{tg} \lambda_0 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + b^2 = (r + 3)^2 \quad (2)$$

$$\lambda \operatorname{tg} r \Leftrightarrow \frac{|3a + 4b - 24|}{\sqrt{25}} = r \quad (3)$$

Observação: λ tangente externa a λ_0 , pois r é externa a λ_0 .

Comparando as equações (1) e (2), vem: $r = a - 1$. (4)

Substituindo (4) em (1), temos: $b = 0$. (5)

Substituindo (4) e (5) em (3) e resolvendo a equação, temos:

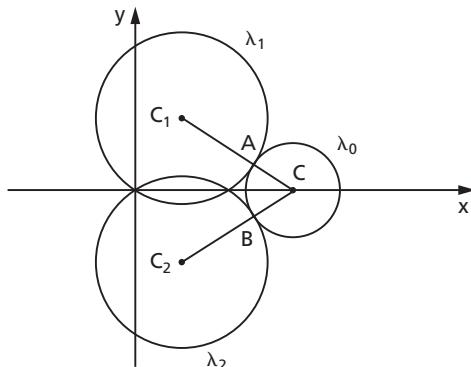
$$a = -\frac{19}{2} \text{ ou } a = \frac{29}{8}.$$

Para $a = -\frac{19}{2} \Rightarrow r = -\frac{21}{2}$. (rejeitado)

Para $a = \frac{29}{8} \Rightarrow r = \frac{21}{8} \Rightarrow r^2 = \frac{441}{64}$.

Portanto: $\left(x - \frac{29}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{441}{64}$.

349.



A circunferência λ_0 dada tem centro $(20, 0)$ e raio 4.

Condições do problema:

$$0 \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = 144 \quad (1)$$

$$\lambda \operatorname{tg} \lambda_0 \Rightarrow (a - 20)^2 + b^2 = (12 \pm 4)^2 \quad (2)$$

Tomando + em (2) e resolvendo o sistema, encontramos $a = \frac{36}{5}$ e

$b = \pm \frac{48}{5}$; portanto, os centros são $C_1\left(\frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right)$ e $C_2\left(\frac{36}{5}, -\frac{48}{5}\right)$.

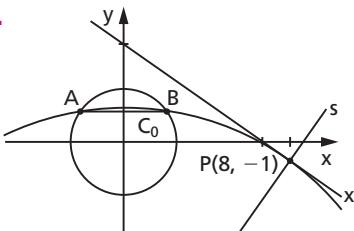
Tomando - em (2) e resolvendo o sistema, encontramos $a = 12$ e $b = 0$, que não convém, pois o centro $(12, 0)$ estaria no eixo Ox, contrariando a exigência do enunciado.

Para obter os pontos de tangência, trabalhamos com a teoria da razão entre os segmentos formados pelos centros e os pontos de tangência.

$$\frac{C_1A}{AC} = \frac{12}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A - \frac{36}{5}}{20 - x_A} = \frac{12}{4} \Rightarrow x_A = \frac{84}{5} \\ \frac{y_A - \frac{48}{5}}{0 - y_A} = \frac{12}{4} \Rightarrow y_A = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\frac{C_2A}{AC} = \frac{12}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_B - \frac{36}{5}}{20 - x_B} = \frac{12}{4} \Rightarrow x_B = \frac{84}{5} \\ \frac{y_B + \frac{48}{5}}{0 - y_B} = \frac{12}{4} \Rightarrow y_B = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

então, $A\left(\frac{84}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e $B\left(\frac{84}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

350.

1) A mediatrix m da corda AB passa pelo centro $C_0(0, 0)$ da circunferência dada e pelo centro $C(a, b)$ da circunferência procurada.

Como $AB \parallel Ox$, temos $m \parallel Oy$, ou seja, $\overleftrightarrow{C_0C} \parallel Oy$ e daí $a = 0$.

2) O ponto $P(x_p, -1)$ da reta t : $x + 2y - 6 = 0$ é tal que $x_p + 2(-1) - 6 = 0$, ou seja, $x_p = 8$ e $P = (8, -1)$.

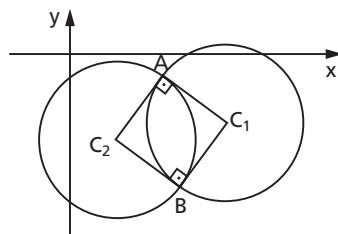
A reta $s = \overleftrightarrow{PC}$ é perpendicular a t , então:

$$\left. \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{m_t} = 2 \\ P \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: y + 1 = 2(x - 8) \Rightarrow s: 2x - y - 17 = 0$$

Como $C(0, b) \in s$, temos $2 \cdot 0 - b - 17 = 0$, isto é, $b = -17$.

$$3) r = d_{PC} = \sqrt{(0 - 8)^2 + (-17 + 1)^2} = \sqrt{320}$$

Solução: $x^2 + (y + 17)^2 = 320$.

351.

1) Determinamos os pontos A e B , interseção das circunferências:

$$\left. \begin{array}{l} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 5 \quad (1) \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(2) - (1) \Rightarrow y = -3x + 5 \quad (3)$$

$$(3) \text{ em } (1) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -4$ ou $y = -1$, então: $A = (3, -4)$ e $B(2, -1)$.

2) Calculamos os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AC_1}$ e $\overleftrightarrow{AC_2}$ e das retas $\overleftrightarrow{BC_1}$ e $\overleftrightarrow{BC_2}$:

$$\left. \begin{array}{l} m_{AC_1} = 2 \\ m_{AC_2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC_1} \perp \overleftrightarrow{AC_2} \qquad \left. \begin{array}{l} m_{BC_1} = -\frac{1}{2} \\ m_{BC_2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC_1} \perp \overleftrightarrow{BC_2}$$

O que significa que as circunferências são perpendiculares.

CAPÍTULO VII — Cônicas

- 354.** $C_0(4, 3) \Rightarrow x_0 = 4$ e $y_0 = 3$; $2a = 8$ e $2b = 6 \Rightarrow a > b$, então o semieixo maior é paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

- 355.** $\begin{cases} a = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 3$ e o eixo menor é paralelo ao eixo x.

$$\text{Portanto: } \frac{(x - 6)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{25} = 1.$$

- 356.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$

- 357.** $9x^2 + 25y^2 = 900 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow a = 10$ e $b = 6$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow 2c = 16 \text{ (distância focal)}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \text{ (excentricidade)}$$

- 358.** $\left. \begin{array}{l} c = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + \frac{2}{3} \quad (1)$

$$P \in \text{elipse} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2b^2 \quad (2)$$

$$\text{Substituindo (1) em (2), vem: } 6b^4 + b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{3}.$$

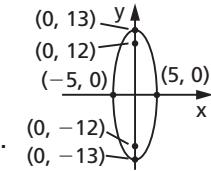
$$\text{Para } b^2 = \frac{1}{3}, \text{ vem } a^2 = 1.$$

$$\text{Portanto: } \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1.$$

359. $9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5 \text{ e } b = 3$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 4 \Rightarrow (4, 0) \text{ e } (-4, 0).$$

360. $169x^2 + 25y^2 = 4225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 13 \text{ e } b = 5$
 $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 12 \Rightarrow F_1(0, -12) \text{ e } F_2(0, 12).$



361. $\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5 \text{ e } b = 3$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 4$$

Se a elipse tivesse o centro na origem do sistema, os focos seriam $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Porém, há um deslocamento do centro para o ponto $(3, 2)$. Assim, aplicando esse deslocamento, obtemos os focos: $(-1, 2)$ e $(7, 2)$.

362. A equação já está na forma reduzida.

Fazendo a leitura: $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $a^2 = 16$ e $b^2 = 4$ (a^2 é o maior denominador). Conclusão: $C(2, 3)$, $a = 4$ e $b = 2$.

363. $\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 4 \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{100} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 100 \\ b^2 = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 8$$

Se a elipse tivesse o centro na origem do sistema, os focos seriam $(-8, 0)$ e $(8, 0)$. Como há um deslocamento para o ponto $(3, 2)$, então os focos são: $(-5, 2)$ e $(11, 2)$.

364. Como $F_1(0, -5)$ e $F_2(0, 55)$, sendo $2c$ a distância focal, então
 $2c = 60 \Rightarrow c = 30$. (1)

Como $PF_1 + PF_2 = 68 = 2a \Rightarrow a = 34$. (2)

De (1) e (2) em $a^2 = b^2 + c^2$ vem: $b^2 = 256$.

Mas, como $F_1(0, -5)$ e $c = 30$, então o centro C está deslocado no eixo y em 25 unidades, isto é, $C(0, 25)$.

Portanto, a equação da elipse é: $\frac{x^2}{256} + \frac{(y - 25)^2}{1156} = 1$.

- 365.** Sendo $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, então $2c = 16 \Rightarrow c = 8$.

Como $A(10, 0)$ pertence à elipse, então $a = 10$.

Portanto, $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$.

Como $B(-5, y)$ pertence à elipse, então: $\frac{(-5)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ e daí $y = \pm 3\sqrt{3}$.

$$d_{BF_1} = \sqrt{(-13)^2 + (\pm 3\sqrt{3})^2} = 14$$

$$d_{BF_2} = \sqrt{3^2 + (\pm 3\sqrt{3})^2} = 6$$

$$d_{F_1F_2} = 2c = 16$$

A soma das distâncias é o perímetro: 36.

- 367.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 16$ e $b^2 = 9$

Portanto, $c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow 2c = 10$.

- 368.** $36x^2 - 49y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{36}} - \frac{y^2}{\frac{1}{49}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{36}$ e $b^2 = \frac{1}{49}$

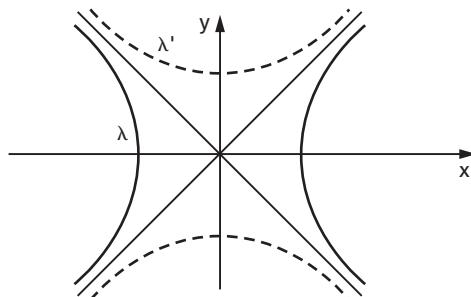
$$\text{Portanto, } c^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{49} = \frac{85}{1764} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{85}}{42}.$$

$$\text{A excentricidade é } \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{85}}{42}}{\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{85}}{7}.$$

- 369.** $\lambda: x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow$ o eixo imaginário é Oy ; $F_1(-\sqrt{2}, 0)$; $F_2(\sqrt{2}, 0)$

$\lambda': y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow$ o eixo imaginário é Ox ; $F_1(0, -\sqrt{2})$; $F_2(0, \sqrt{2})$

Não são coincidentes.



370. $144y^2 - 25x^2 = 3600 \Leftrightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ (eixo imaginário Ox)

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 144 \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 13$$

Focos: $(0, -13)$ e $(0, 13)$.

371. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$ (eixo imaginário paralelo a Oy)

Centro C(2, 2)

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 9 \\ b^2 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Se não houvesse deslocamento, os focos estariam sobre o eixo x, sendo $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Considerando o deslocamento em duas unidades para ambas as ordenadas, vem: $F_1(-2, 2)$ e $F_2(6, 2)$.

372. (1) $9x^2 - 16y^2 = -144 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ (eixo imaginário Ox)

$$\left. \begin{array}{l} a_0^2 = 9 \\ b_0^2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow c_0^2 = 25 \Rightarrow c_0 = 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{focos: } (0, -5) \text{ e } (0, 5) \\ \text{excentricidade: } \frac{c_0}{a_0} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

(2) Elipse tem por eixo menor os focos da hipérbole. Então, $b = 5$ e excentricidade inversa à da hipérbole, isto é, $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

$$\text{Portanto: } \begin{cases} b = 5 & (3) \\ \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = \frac{3a}{5} & (4) \\ a^2 = b^2 + c^2 & (5) \end{cases}$$

Substituindo (3) e (4) em (5), vem $a^2 = \frac{625}{16}$.

$$\text{Então: } \frac{x^2}{\frac{625}{16}} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 625.$$

373. $y^2 = -16x$ (foco no eixo Ox)

$$2p = -16 \Rightarrow p = -8$$

$$VF = \frac{p}{2}, \text{ isto é, } F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F(-4, 0)$$

$$\text{Diretriz: } x = -\frac{p}{2}, \text{ então } x = 4.$$

374. $(y - 5)^2 = 12(x - 3); VF // Ox; V(3, 5)$

$$2p = 12 \Rightarrow p = 6; \text{ foco } (3, 0), \text{ se não houvesse deslocamento.}$$

Como $V(3, 5)$, então $F(6, 5)$.

375. $(x - 2)^2 = (1)y \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Esta parábola tem deslocamento: $V(2, 0)$, $VF // Oy$.

$$\text{Então: } F\left(2, \frac{1}{4}\right) \text{ e a diretriz é } y = -\frac{1}{4} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = 0$$

377. $2x^2 + 4x - 4 = -3y$

$$x^2 + 2x - 2 = -\frac{3}{2}y$$

(substituímos -2 por $1 - 3$)

$$x^2 + 2x + 1 - 3 = -\frac{3}{2}y$$

$$(x + 1)^2 = -\frac{3}{2}y + 3$$

$$(x + 1)^2 = -\frac{3}{2}(y - 2) \Rightarrow V(-1, 2)$$

378. $A(0, 0) \in \text{parábola} \Leftrightarrow (0 - x_0)^2 = 2p(0 - y_0) \quad (1)$

$$B(3, 3) \in \text{parábola} \Leftrightarrow (3 - x_0)^2 = 2p(3 - y_0) \quad (2)$$

$$C(-6, 30) \in \text{parábola} \Leftrightarrow (-6 - x_0)^2 = 2p(30 - y_0) \quad (3)$$

Desenvolvendo as equações (2) e (3), nelas substituindo (1),

$$\text{vem: } \begin{cases} 9 - 6x_0 = +6p \\ 36 + 12x_0 = +60p \end{cases} \Rightarrow p = +\frac{3}{4} \text{ e } x_0 = +\frac{3}{4}.$$

$$\text{Substituindo esses valores em (1), vem: } y_0 = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Portanto, temos: } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(y + \frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3y.$$

- 379.** $d: x = 0 \Rightarrow$ eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox
 $p = \text{dist}(F, d) = 4 - 0 = 4 \Rightarrow 2p = 8$

$$\left. \begin{array}{l} x_V = \frac{p}{2} = 2 \\ y_V = y_F = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow V(2, 1)$$

$$\text{equação } (y - 1)^2 = 8(x - 2)$$

- 380.** $d: y = 3 \Rightarrow VF = \frac{3}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 3 \Rightarrow 2p = 6 \\ V\left(0, \frac{3}{2}\right) \end{array} \right\}$

O eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy e F abaixo de V $\Rightarrow 2p = 6$.

$$x^2 = -6\left(y - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x^2 = -6y + 9$$

- 381.** $y = x^2 - x$ tem por inversa $x = y^2 - y$.
 $\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x \Rightarrow y^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (1) \\ x = y^2 - y \quad (2) \end{array} \right\}$

Substituindo (1) em (2), vem: $x = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

Para $x = 0, y = 0$ e para $x = 2, y = 2$.

Então A(0, 0) e B(2, 2) são os pontos de interseção das funções $f(x)$ e $f'(x)$.

Determinando a reta \overleftrightarrow{AB} , vem $x - y = 0$.

$$d_{P, \overleftrightarrow{AB}} = \frac{|3 - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- 382.** $\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^2 = y^2 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 8y = 0 \quad (2) \end{array} \right\}$

Substituindo (1) em (2), vem: $y = 0$ ou $y = -4$.

Para $y = 0, x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$.

Para $y = -4, x = 4 \Rightarrow B(4, -4)$.

Como y é eixo de simetria da parábola e ela passa pela origem, então A(0, 0) é o vértice e $x^2 = 2py$ é a equação.

Como B(4, -4) pertence a $x^2 = 2py$, vem $p = -2$.

Então, $x^2 = -4y \Rightarrow x^2 + 4y = 0$ é a equação da parábola.

383. 1) $y = x^2 + 6x + 4$

Completando o quadrado perfeito, vem:

$$y + 5 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow y + 5 = (x + 3)^2 \Rightarrow V_1(-3, -5).$$

2) $y = x^2 - 6x + 2$

Completando o quadrado perfeito, vem:

$$y + 7 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow y + 7 = (x - 3)^2 \Rightarrow V_2(3, -7).$$

3) Ponto médio de $\overline{V_1V_2}$ é $M(0, -6)$.

4) Coeficiente angular de $\overline{V_1V_2}$ é $m = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_s = 3$.

5) Mediatriz de $\overline{V_1V_2}$: $y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$$y + 6 = 3(x - 0) \Rightarrow 3x - y - 6 = 0$$

384. $x = y^2 + 10y + 27$

Completando o quadrado perfeito, vem:

$$x - 2 = y^2 + 10y + 25 \Rightarrow x - 2 = (y + 5)^2 \Rightarrow V(2, -5).$$

393. a) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

Identificando com a equação teórica:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0, \text{ vem:}$$

$$\begin{cases} k_2 = 9 = b^2 \Rightarrow b = 3 \\ k_1 = 25 = a^2 \Rightarrow a = 5 \\ 2k_2x_0 = 36 \Rightarrow x_0 = 2 \\ 2k_1y_0 = -50 \Rightarrow y_0 = -1 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = -164 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 > k_2 \\ k_1 > 0 \\ k_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{elipse} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{com eixo maior horizontal; centro } C(2, -1) \\ \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1 \end{array} \right.$$

b) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

$$-4x = -y^2 + 6y - 13 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{13}{4}$$

Identificando com a equação teórica:

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{y_0}{p}y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}, \text{ vem:}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2p} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 2 \\ \frac{y_0}{p} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = 3 \\ \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} = \frac{13}{4} \Rightarrow x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{parábola } \begin{cases} p = 2 \\ V(1, 3) \\ F(2, 3) \end{cases}$$

c) $5x^2 - 4y^2 + 30x + 16y + 49 = 0$

equação teórica:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$$

$$\begin{cases} k_2 = 5 \\ k_1 = -4 \\ 2k_2x_0 = -30 \Rightarrow x_0 = -3 \\ 2k_1y_0 = -16 \Rightarrow y_0 = 2 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 > k_1 \\ k_1 > 0 \\ k_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hipérbole} \quad \begin{cases} \text{com eixo real horizontal; } C(-3, 2) \\ \frac{(x + 3)^2}{5} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$a = \sqrt{5}$ e $b = 2$

d) $x^2 - 4x - 12y = 32 \Rightarrow y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

equação teórica: $y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2p} = \frac{1}{12} \Rightarrow p = 6 \\ \frac{x_0}{p} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = 2 \\ \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p} = \frac{-8}{3} \Rightarrow y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{parábola } \begin{cases} p = 6 \\ V(2, -3) \\ F(2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & 289x^2 - 17183 = 2(256y - 289x - 32y^2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow 289x^2 + 64y^2 + 578x - 512y - 17183 = 0 \end{aligned}$$

equação teórica:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 = 289 = a^2 \Rightarrow a = 17 \\ k_1 = 64 = b^2 \Rightarrow b = 8 \\ 2k_2x_0 = -578 \Rightarrow x_0 = 1 \\ 2k_1y_0 = 512 \Rightarrow y_0 = 4 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = -17183 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 > k_1 \\ k_2 > 0 \\ k_1 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{elipse} \left\{ \begin{array}{l} \text{com eixo maior vertical; centro C}(-1, 4) \\ \frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{289} = 1 \end{array} \right.$$

394. $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$

equação teórica:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} k_2 = 9 = a^2 \Rightarrow a = 3 \\ k_1 = 5 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow c = 2 \text{ e } \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2k_2x_0 = -54 \Rightarrow x_0 = -3 \\ 2k_1y_0 = 30 \Rightarrow y_0 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow C(-3, 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 > k_1 \\ k_2 > 0 \\ k_1 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{elipse} \left\{ \begin{array}{l} \text{com eixo maior vertical} \\ \frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ F_1(-3, 5) \text{ e } F_2(-3, 1) \end{array} \right.$$

396. $\left\{ \begin{array}{l} \lambda: y^2 = x \quad (1) \\ \lambda': x^2 + 5y^2 = 6 \quad (2) \end{array} \right.$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = +1 \text{ ou } y = -1 \\ x = -6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-6} \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$S = \{(1, -1), (1, 1)\}.$$

397.
$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ y = x^{\frac{3}{2}} & (2) \end{cases}$$

De (1) e (2), vem: $x^2 = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^4 = x^3 \Rightarrow x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

São dois pontos de interseção: (0, 0) e (1, 1).

398. $y = -1 - \sqrt{19 - x^2 - 2x} \Rightarrow y + 1 = -\sqrt{19 - x^2 - 2x} \quad (1)$

$x = 3 - \sqrt{9 - y^2 - 4y} \Rightarrow x - 3 = -\sqrt{9 - y^2 - 4y} \quad (2)$

Elevando (1) e (2) ao quadrado, vem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 18 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 & (4) \end{cases}$$

De (3) – (4) vem $8x - 2y - 18 = 0$, isto é, $y = 4x - 9$. (5)

De (5) em (4) vem $17x^2 - 98x + 45 = 0$ e daí

$x = \frac{45}{17} \Rightarrow y = \frac{27}{17}$

ou

$x = 1 \Rightarrow y = -5$

São dois pontos de interseção: $\left(\frac{45}{17}, \frac{27}{17}\right)$ e $(1, -5)$.

399.
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vem: $y = \pm 1$. (3)

Substituindo (3) em (2), vem: $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Há 4 pontos de interseção:

$(2\sqrt{2}, 1); (-2\sqrt{2}, 1); (2\sqrt{2}, -1); (-2\sqrt{2}, -1)$

400.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 & (1) \\ 3x^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3x^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vem: $9x^4 - 5x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pm\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

Para $x = 0$, $y = 1$.

Para $x = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$, $y = \frac{8}{3}$.

Há 3 pontos de interseção: $(0, 1)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

401.
$$\begin{cases} y = x & (1) \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$34x^2 = 225 \Rightarrow x = \frac{\pm 15\sqrt{34}}{34} \Rightarrow y = \frac{\pm 15\sqrt{34}}{34}$$

$$A\left(\frac{-15\sqrt{34}}{34}, \frac{-15\sqrt{34}}{34}\right) \text{ e } B\left(\frac{15\sqrt{34}}{34}, \frac{15\sqrt{34}}{34}\right)$$

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{30\sqrt{34}}{34}\right)^2 + \left(\frac{30\sqrt{34}}{34}\right)^2} = \frac{30\sqrt{17}}{17}$$

402.
$$\begin{cases} x^2 + y = 10 & (1) \\ x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1) e resolvendo, vem:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow A(0, 10) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(1, 9) \end{cases}$$

$$d_{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

403.
$$\begin{cases} y = x + m \Rightarrow y^2 = x^2 + 2mx + m^2 & (1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$$

$\Delta = 64m^2 - 80m^2 + 80 \geq 0$ (para que haja 2 pontos ou 1 ponto de interseção)

$$16m^2 - 80 \leq 0$$

$$m^2 - 5 \leq 0$$

Portanto: $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.

404.
$$\begin{cases} y = mx + 2 \Rightarrow y^2 = m^2x^2 + 4mx + 4 & (1) \\ y^2 = 4x & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

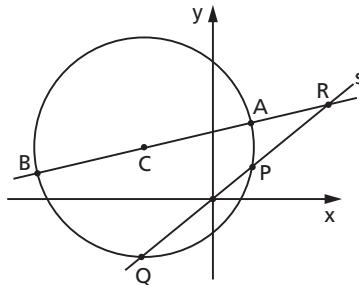
$$m^2x^2 + (4m - 4)x + 4 = 0$$

$\Delta = (4m - 4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m^2 \geq 0$ (para que haja 2 pontos ou 1 ponto de interseção)

$$-32m + 16 \geq 0$$

$$2m - 1 \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

405.



1) Analisando os dados:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \text{ é circunferência } C(-3, 2) \text{ e } r = 5.$$

R(2, 3) está em (s) $3x - 2y = 0$, pois $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$.

2) Interseção da reta com a circunferência:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{39}}{13} \text{ e } y = \pm \frac{6\sqrt{39}}{13}$$

portanto, $P = \left(\frac{4\sqrt{39}}{13}, \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)$ e $Q = \left(-\frac{4\sqrt{39}}{13}, -\frac{6\sqrt{39}}{13}\right)$.

3) Produto das distâncias:

$$d_{PR} = \sqrt{\left(2 - \frac{4\sqrt{39}}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)^2} = \sqrt{25 - 4\sqrt{39}}$$

$$d_{QR} = \sqrt{\left(2 + \frac{4\sqrt{39}}{13}\right)^2 + \left(3 + \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)^2} = \sqrt{25 + 4\sqrt{39}}$$

$$d_{PR} \cdot d_{Q,R} = \sqrt{625 - 624} = 1$$

Obs.: Uma solução menos trabalhosa é usar a Geometria:
 $d_{PR} \cdot d_{QR} = d_{AR} \cdot d_{BR} = (d_{RC} - r)(d_{RC} + r) = (d_{PC})^2 - r^2 = 26 - 25 = 1$.

406. $y = ax^2 + bx + c$ (1) ($b \neq 0, c \neq 0$)

Fazendo a mudança de x para $-x$, vem:

$$y = ax^2 - bx + c \quad (2)$$

Considerando e resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem:

$$x = 0 \Rightarrow y = c.$$

Portanto: $(0, c)$ é o ponto de interseção.

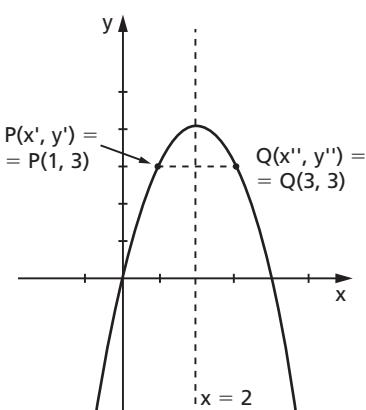
407. $f(x) = 4x - x^2$

a) $\begin{cases} y = 4x - x^2 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem:

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow A(0, 0) \text{ ou } x = 1 \text{ e } y = 3 \Rightarrow P(x', y') = P(1, 3).$$

b)



O ponto $Q(x'', y'')$ simétrico de $P(1, 3)$ em relação à reta $x = 2$ é o ponto $Q(3, 3)$. Como a reta procurada passa pelos pontos $A(0, 0)$ e $Q(3, 3)$, então ela é a bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}) $y = x$.

408. $y = x^2 + x - 12$

(1) Comparando com a equação teórica: $y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$,

temos: $\begin{cases} \frac{1}{2p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \\ \frac{x_0}{p} = -1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right) \\ \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p} = -12 \Rightarrow y_0 = -\frac{49}{4} \end{cases}$

(2) Como os outros dois vértices pertencem à parábola e ao eixo Ox, então $y = 0$.

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -4 \Rightarrow A(3, 0); B(-4, 0)$$

$$\begin{aligned} (3) S_{ABV} &= \frac{1}{2} |D_{ABV}| \\ D_{ABV} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{49}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{343}{4} \end{aligned} \Rightarrow S_{ABV} = \frac{343}{8}$$

412. $b_{13}: y = x \Rightarrow t // b_{13}$ é tal que $(t) y = x + k$

$$\begin{cases} t: y = x + k \\ \lambda: y = x^2 - x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + (5 - k) = 0$$

$$\Delta = 4k - 16 = 0 \Rightarrow k = 4$$

Portanto: $t: y = x + 4 \Rightarrow x - y + 4 = 0$

Resolvendo o sistema quando $k = 4$, vem $x = 1$ e $y = 5$.

Portanto: $T = (1, 5)$.

413. $r: x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{3}$

$t \perp r$ é tal que $m_t = 3 \Rightarrow t: y = 3x + k$

$$\begin{cases} t: y = 3x + k \\ \lambda: 6x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 6kx + k^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 36k^2 - 12(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto: $t: y = 3x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x - y \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

416. $P(0, 0) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx$

$$\begin{cases} \lambda: x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0 & (1) \\ t: y = mx & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$(1 + 4m^2)x^2 - 16mx + 12 = 0$$

$$\Delta = (-16m)^2 - 4(1 + 4m^2) \cdot 12 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Portanto: } t: y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

417. $P(0, 2) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx + 2$

$$\begin{cases} (t) y = mx + 2 & (1) \\ (\lambda) x^2 - 4y^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$(1 - 4m^2)x^2 - 16mx - 20 = 0$$

$$\Delta = (-16m)^2 - 4(1 - 4m^2)(-20) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 5 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Portanto: } t: y = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}x + 2.$$

418. $P(3, 0) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = m(x - 3)$ ou $y = mx - 3m$

$$\begin{cases} t: y = mx - 3m \Rightarrow y^2 = m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 & (1) \\ \lambda: x = -2y^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$2m^2x^2 - (12m^2 - 1)x + 18m^2 = 0$$

$$\Delta = [-(12m^2 - 1)]^2 - 4 \cdot 2m^2 \cdot 18m^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Portanto: } y = \frac{\pm\sqrt{6}}{12}(x - 3).$$

419. $9x^2 - 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sendo as assíntotas $s_1: y = \frac{b}{a}x$ e $s_2: y = -\frac{b}{a}x$, vem:

$$s_1: y = \frac{3}{2}x \text{ e } s_2: y = -\frac{3}{2}x.$$

420. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow a^2 = 16 \text{ e } b^2 = 64$

Assim: $a = 4$ e $b = 8$.

A assíntota que forma ângulo agudo tem coeficiente angular positivo

$$m = \frac{b}{a}.$$

Portanto, $s: y = 2x$.

421. 1) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a > 0$, $b > 0$ é uma elipse de equação redu-

$$\text{zida } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) Como as diagonais do quadrado passam pela origem e se interceptam formando ângulos retos, então essas diagonais são as bissetrizes:

$r: y = x$ e $s: y = -x$.

1º) Determinação dos pontos A e C, pertencentes a r :

$$\begin{cases} \lambda: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ r: y = x \end{cases} \Rightarrow (b^2 + a^2)x^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ou } x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$A\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$C\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

2º) Determinação dos pontos B e D, pertencentes a s:

$$\begin{cases} \lambda: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ s: y = -x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$B\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$D\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

422. a) $S_{ABX} = \frac{1}{2} |D_{ABX}|$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(x-a)(x-b)$$

$$\therefore S_{ABX} = \left| \frac{(b-a)(x-a)(x-b)}{2} \right|$$

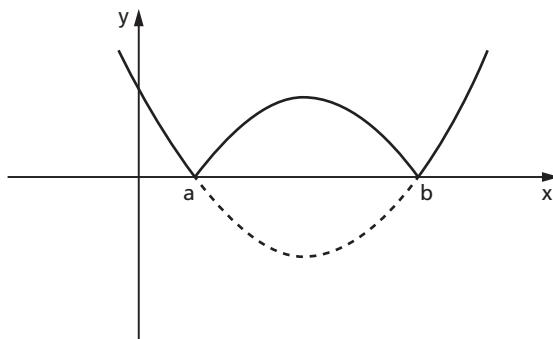
b) Considerando a função $f(x)$ da área positiva, então:

$$f(x) = \left| \frac{(b-a)(x-a)(x-b)}{2} \right|$$

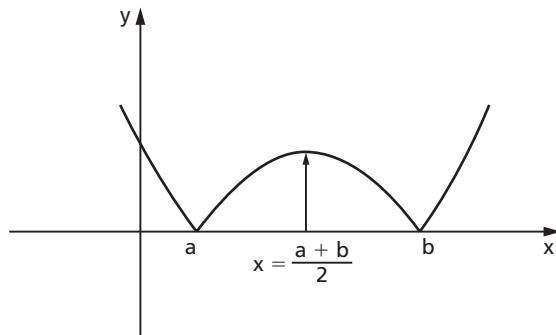
$$f(x) = \left| \frac{1}{2} [(b-a)x^2 + (a^2 - b^2)x + ab(b-a)] \right|$$

$g(x) = \frac{1}{2} [x^2 - (a+b)x + ab]$ é uma parábola que intercepta o eixo x

nos pontos a e b .



c) $f(x)$ é máximo local para $x = \frac{a+b}{2}$, isto é, x é o ponto médio.



CAPÍTULO VIII — Lugares geométricos

424. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{AP} = d_{BP} \Rightarrow (X - a)^2 + (Y - b)^2 = (X - c)^2 + (Y - d)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a - c) \cdot X + 2(b - d) \cdot Y + (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é uma reta (é a mediatrix do segmento AB).

425. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{P,r} = d_{P,s} \Rightarrow \left| \frac{aX + bY + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{aX + bY + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \Rightarrow$$

$$2aX + 2bY + (c + c') = 0,$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a reta paralela a r e a s e equidistante de ambas.

426. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{P,x} = 2 \cdot d_{P,y} \Rightarrow |Y| = 2|x| \Rightarrow Y^2 = 4X^2 \Rightarrow (Y + 2X)(Y - 2X) = 0,$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a reunião de duas retas, $Y = -2X$ e $Y = 2X$, concorrentes na origem.

427. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$\begin{aligned} d_{P,r} = 2 \cdot d_{P,s} &\Rightarrow \left| \frac{3X + 4Y - 3}{5} \right| = 2 \cdot \left| \frac{4X - 3Y + 8}{5} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3X + 4Y - 3)^2 = 4(4X - 3Y + 8)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(3X + 4Y - 3) + 2(4X - 3Y + 8)][(3X + 4Y - 3) - 2(4X - 3Y + 8)] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (5X - 10Y + 19)(11X - 2Y + 13) = 0 \end{aligned}$$

ou, então, desenvolvendo:

$$55X^2 + 20Y^2 - 120XY + 274X - 168Y + 247 = 0,$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a reunião de duas retas, $5X - 10Y + 19 = 0$ e $11X - 2Y + 13 = 0$, concorrentes com r e s na interseção de r com s .

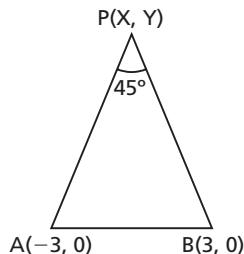
428. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$\begin{aligned} d_{P,d} = d_{PF} &\Rightarrow \left| \frac{4X - 3Y + 2}{5} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (4X - 3Y + 2)^2 = 25(X^2 + Y^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9X^2 + 16Y^2 + 24XY - 16X + 12Y - 4 = 0, \end{aligned}$$

que é a equação do l.g.

Obs.: Pode-se verificar que o l.g. é a parábola de foco F e diretriz d (ver item 179, p. 208).

430. Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Temos:



$$\begin{aligned} m_{AP} &= \frac{Y}{X + 3} \\ m_{BP} &= \frac{Y}{X - 3} \\ \hat{APB} &= 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{APB} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left| \frac{m_{AP} - m_{BP}}{1 + m_{AP} \cdot m_{BP}} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{\frac{Y}{X + 3} - \frac{Y}{X - 3}}{1 + \frac{Y}{X + 3} \cdot \frac{Y}{X - 3}} \right| = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{-6Y}{X^2 + Y^2 - 9} \right| = 1 \Rightarrow |-6Y| = |X^2 + Y^2 - 9| \end{aligned}$$

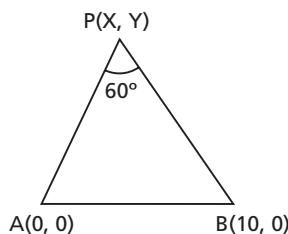
então:

$$\text{se } Y \leq 0, -6Y = X^2 + Y^2 - 9 \Rightarrow X^2 + Y^2 + 6Y - 9 = 0$$

$$\text{se } Y \geq 0, -(-6Y) = X^2 + Y^2 - 9 \Rightarrow X^2 + Y^2 - 6Y - 9 = 0.$$

Conclusão: o l.g. é a reunião de dois arcos de circunferência,
 $X^2 + Y^2 + 6Y - 9 = 0$ (no semiplano $Y \leq 0$) e
 $X^2 + Y^2 - 6Y - 9 = 0$ (no semiplano $Y \geq 0$).

- 431.** Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Temos:



$$m_{AP} = \frac{Y}{X}$$

$$m_{PB} = \frac{Y}{X - 10}$$

$$\hat{A}PB = 60^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{A}PB = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{m_{AP} - m_{BP}}{1 + m_{AP} \cdot m_{BP}} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \left| \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{X - 10}}{1 + \frac{Y}{X} \cdot \frac{Y}{X - 10}} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-10Y}{X^2 + Y^2 - 10X} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow |-10Y| = \sqrt{3} \cdot |X^2 + Y^2 - 10X|$$

então:

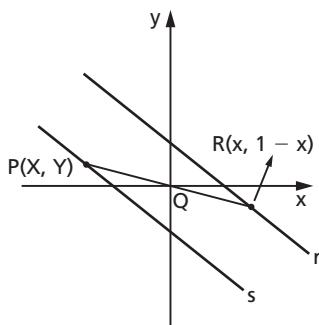
$$\text{se } Y \leq 0, -10Y = \sqrt{3}(X^2 + Y^2 - 10X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X^2 + 3Y^2 - 30X + 10\sqrt{3}Y = 0$$

$$\text{se } Y \geq 0, -(-10Y) = \sqrt{3}(X^2 + Y^2 - 10X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X^2 + 3Y^2 - 30X - 10\sqrt{3}Y = 0.$$

Conclusão: o l.g. é a reunião de dois arcos de circunferência,
 $3X^2 + 3Y^2 - 30X + 10\sqrt{3}Y = 0$ (no semiplano $Y \leq 0$) e
 $3X^2 + 3Y^2 - 30X - 10\sqrt{3}Y = 0$ (no semiplano $Y \geq 0$).

432.

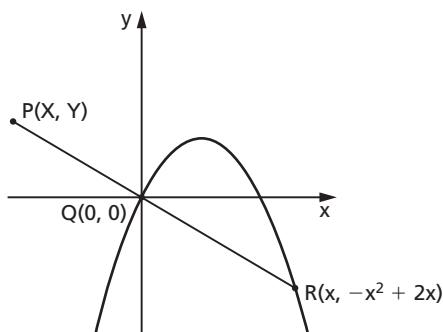
Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. O ponto P , ligado ao ponto $Q(0, 0)$, define uma reta que intercepta a reta r : $y = 1 - x$ no ponto R cujas coordenadas são $(x, 1 - x)$.

Como $\frac{PQ}{QR} = 1$, decorre que Q é ponto médio de PR ; então:

$$0 = \frac{x + X}{2} \text{ e } 0 = \frac{(1 - x) + Y}{2}$$

e daí $x = -X = 1 + Y$; portanto, $X + Y + 1 = 0$, que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a reta s de equação $X + Y + 1 = 0$ paralela à reta r e simétrica desta em relação à origem.

433.

Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. O ponto P , ligado ao ponto $Q(0, 0)$, define uma reta que intercepta a parábola λ : $y = -x^2 + 2x$ em pontos R cujas coordenadas são $(x, -x^2 + 2x)$.

Como $\frac{PQ}{QR} = 2$, temos:

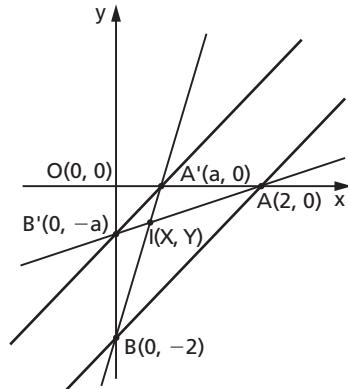
$$\frac{x_Q - x_P}{x_R - x_Q} = 2 \Rightarrow \frac{0 - X}{x - 0} = 2 \text{ e } \frac{y_Q - y_P}{y_R - y_Q} = 2 \Rightarrow \frac{0 - Y}{-x^2 + 2x - 0} = 2$$

$$\text{e daí vem } x = -\frac{X}{2} \text{ (1) e } -x^2 + 2x = -\frac{Y}{2} \text{ (2).}$$

Substituindo x de (1) em (2), vem:

$-\frac{X^2}{4} - X = -\frac{Y}{2}$ e, portanto, $X^2 + 4X - 2Y = 0$, que é a equação do I.g.

435.



A equação da reta AB é $x - y - 2 = 0$, então a equação da reta $A'B'$, paralela a AB , é $x - y + c = 0$; portanto, temos $A' = (-c, 0)$ e $B' = (0, c)$.

Seja $I(X, Y)$ pertencente ao I.g., então I é interseção das retas AB' e $A'B$.

Impondo o alinhamento de I , A e B' , resulta $cX + 2Y = 2c$. (1)

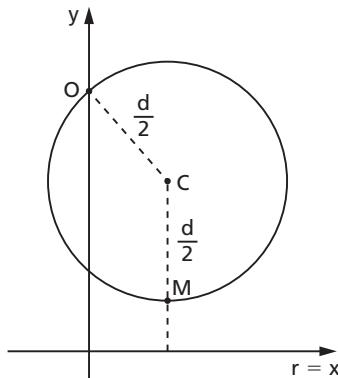
Impondo o alinhamento de I , A' e B , resulta $2X + cY = -2c$. (2)

Eliminando c entre as equações (1) e (2), vem:

$$c = \frac{2Y}{2 - X} = \frac{-2X}{2 + Y} \Rightarrow 2Y + Y^2 = X^2 - 2X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (X + Y)(X - Y - 2) = 0, \text{ que é a equação do I.g.}$$

Conclusão: variando c , o ponto I percorre a bissetriz b_{24} ($X + Y = 0$) ou pode ser qualquer ponto da reta AB ($X - Y - 2 = 0$), o que vai acontecer para $c = -2$, quando $A = A'$ e $B = B'$.

436.

Suponhamos que a reta r coincida com o eixo x e que o ponto O esteja sobre o eixo y , tendo ordenada y_0 , com $y_0 > d$.

Seja $M(X, Y)$ o ponto da circunferência de centro $C(a, b)$, variável, com diâmetro d e passando por $O(0, y)$. Temos:

$$CM \perp x \Rightarrow a = X \quad (1)$$

$$d_{C,M} = \frac{d}{2} \Rightarrow b - Y = \frac{d}{2} \quad (2)$$

$$d_{0,C} = \frac{d}{2} \Rightarrow a^2 + (b - y_0)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), vem:

$$X^2 + \left(Y + \frac{d}{2} - y_0\right)^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$\text{e daí } X^2 + Y^2 + (d - 2y_0)Y + y_0(y_0 - d) = 0,$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a circunferência de centro $\left(0, \frac{d}{2} - y_0\right)$ e raio $\frac{d}{2}$.

437.

Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Sendo $\overline{OP} = 3 \cdot \overline{AP}$, temos:

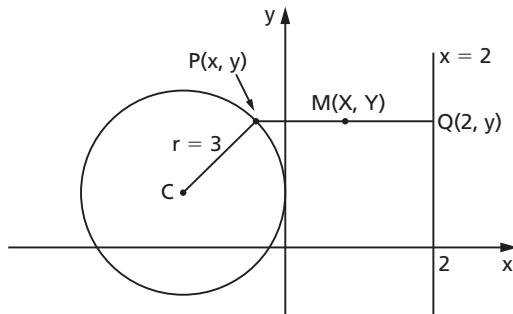
$$\overline{OP} = \sqrt{X^2 + Y^2} = 3 \cdot \sqrt{(X - 2)^2 + Y^2}$$

e daí vem

$$2X^2 + 2Y^2 - 9X + 9 = 0$$

que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a circunferência de centro $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ e raio $\frac{3}{4}$.

439.

Seja $M(X, Y)$ pertencente ao I.g. Temos que M é ponto médio do segmento PQ , então:

$$X = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{x + 2}{2} \text{ e } Y = \frac{y_P + y_Q}{2} = y$$

e daí vem:

$$x = 2X - 2 \text{ e } y = Y.$$

Como P está sobre a circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio 3, temos:

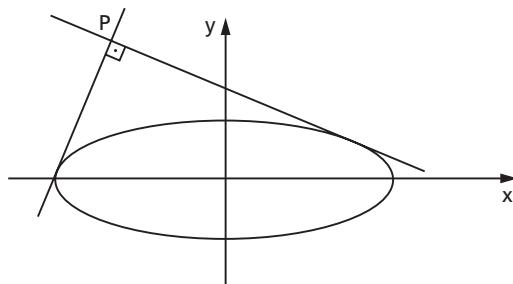
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

e daí vem:

$$(2X - 2 + 3)^2 + (Y - 1)^2 = 9$$

$$4X^2 + Y^2 + 4X - 2Y - 7 = 0,$$

que é a equação do I.g.

440.

Seja $P(X, Y)$ pertencente ao I.g.

Consideremos, por P , as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ (1). As tangentes têm equação da forma $y - Y = m(x - X)$ (2). As equações (1) e (2) devem formar um sistema que tem um só ponto comum. Substituindo y de (2) em (1), resulta:

$$x^2 + 4(Y + mx - mX)^2 = 4$$

e daí

$$(1 + 4m^2)x^2 + 8m(Y - mX)x + 4[(Y - mX)^2 - 1] = 0,$$

que deve fornecer um único valor para x .

Então:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 64m^2(Y - mX)^2 - 16(1 + 4m^2)[(Y - mX)^2 - 1] = 0$$

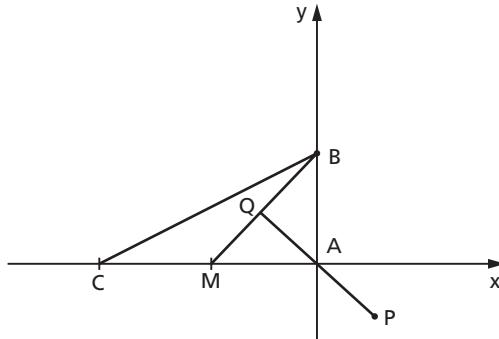
$$\text{e daí } -(Y - mX)^2 + (1 + 4m^2) = 0$$

$$\text{ou seja, } (4 - X^2)m^2 + 2XYm + (1 - Y^2) = 0.$$

Essa equação fornece os coeficientes angulares das duas tangentes por P, que são perpendiculares.

Então, o produto das raízes dessa equação é -1 , ou seja, $\frac{1 - Y^2}{4 - X^2} = -1$ e finalmente $X^2 + Y^2 = 5$, que é a equação do l.g.

441.



Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. e seja $Q(x, y)$ a interseção de AP com a mediana BM .

Como $\frac{AQ}{PQ} = \frac{1}{2}$, temos:

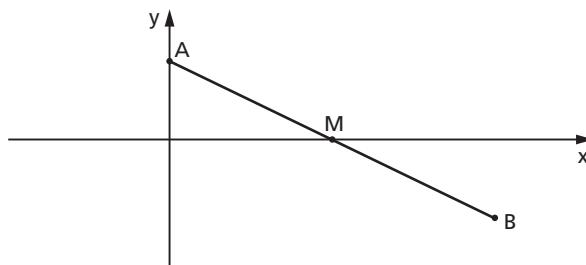
$$\frac{x_Q - x_A}{x_Q - x_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x - 0}{x - X} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -X$$

$$\frac{y_Q - y_A}{y_Q - y_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y - 0}{y - Y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -Y.$$

Como Q percorre a mediana BM cuja reta suporte tem equação $x - y + 1 = 0$, temos: $(-X) - (-Y) + 1 = 0$ e daí $-X + Y + 1 = 0$.

Notemos que $-1 \leq x \leq 0$ e $0 \leq y \leq 1$ (pois Q está entre M e B) e, então, $0 \leq X \leq 1$ e $-1 \leq Y \leq 0$.

Conclusão: o l.g. é o segmento de reta $-X + Y + 1 = 0$ de extremos $(0, -1)$ e $(1, 0)$.

442.

O ponto A, variável, tem coordenadas $(0, y)$.

O ponto M, médio de AB, tem coordenadas $(x, 0)$.

O ponto B, pertencente ao l.g., é (X, Y) .

Devemos ter:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \text{ e } d_{AM} = a$$

então:

$$x = \frac{0 + X}{2} \quad (1), \quad 0 = \frac{y + Y}{2} \quad (2) \text{ e } x^2 + y^2 = a^2 \quad (3).$$

Tirando x de (1), y de (2) e substituindo em (3), resulta:

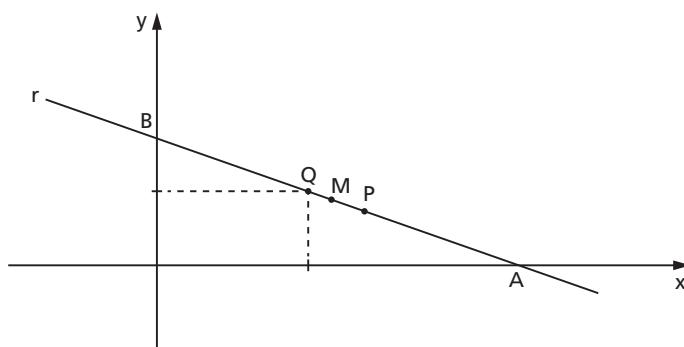
$$\left(\frac{X}{2}\right)^2 + (-Y)^2 = a^2 \text{ e daí } X^2 + 4Y^2 = 4a^2, \text{ que é a equação do l.g.}$$

Conclusão: o l.g. é a elipse de equação reduzida $\frac{X^2}{4a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$.

443.

$$d_{PP_1}^2 + d_{PP_2}^2 = 4r^2$$

$$(x - r)^2 + y^2 + (x + r)^2 + y^2 = 4r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

444.

Se $A(a, 0)$ e $B = (0, b)$, a equação segmentária de r é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Como $Q(2, 1)$ está em r , devemos ter $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$. (1)

As coordenadas de M são $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Como M é médio de PQ , então:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{X + 2}{2} \Rightarrow a = X + 2 \quad (2)$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{Y + 1}{2} \Rightarrow b = Y + 1 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), resulta:

$$\frac{2}{X+2} + \frac{1}{Y+1} = 1 \text{ e daí } XY = 2, \text{ que é a equação do l.g.}$$

Conclusão: o l.g. é uma hipérbole equilátera.

445. Seja $P(X, Y)$ a interseção de r_1 com r_2 .

Temos:

$$m_1 = \frac{Y - 0}{X - 0} = \frac{Y}{X} \text{ e}$$

$$m_2 = \frac{Y - 0}{X - 2} = \frac{Y}{X - 2}.$$

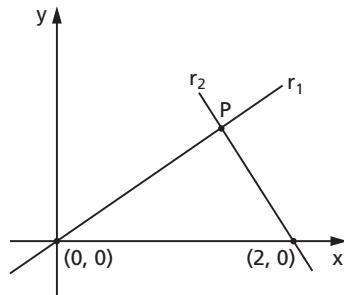
Como $m_1^2 + m_2^2 = 1$, resulta:

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X - 2}\right)^2 = 1$$

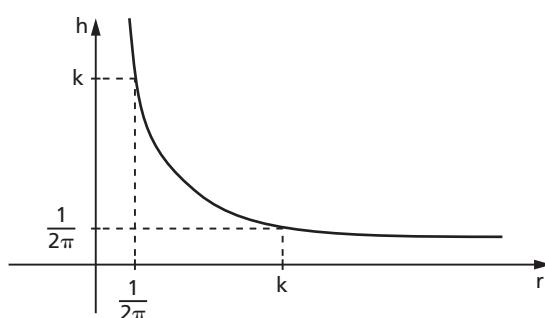
e daí

$$X^2Y^2 - (X - 2)^2(X^2 - Y^2) = 0,$$

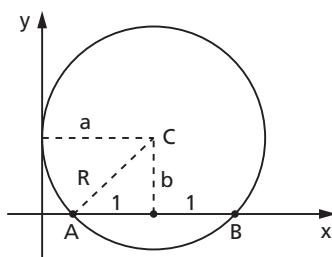
que é a equação do l.g.



446.



A área da superfície lateral de um cilindro é dada por $A_\ell = 2\pi rh$. Fixando o valor de A_ℓ em k , os cilindros que possuem área lateral igual a k têm dimensões r (raio de base) e h (altura) tais que $2\pi rh = k$, ou seja, $rh = \frac{k}{2\pi}$. Variando r e calculando h , obtemos os pontos da hipérbole equilátera da figura.

447.

a) Seja $C(a, b)$ o centro e seja R o raio de uma dessas circunferências.

Devemos ter:

$$R = a \text{ e } R^2 = b^2 + 1$$

Então:

$$a = R \quad (1) \text{ e } b = \sqrt{R^2 - 1}. \quad (2)$$

Portanto, a equação da circunferência fica sendo

$$(x - R)^2 + (y - \sqrt{R^2 - 1})^2 = R^2.$$

b) Eliminando R entre as equações (1) e (2), resulta:

$$b = \sqrt{a^2 - 1} \text{ ou ainda } a^2 - b^2 = 1.$$

448.

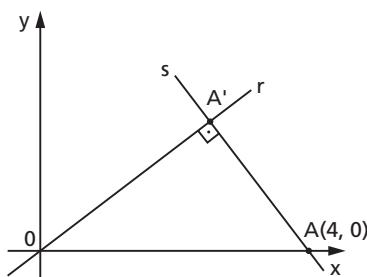
$$z = x + yi$$

$$z - 2i = x + (y - 2)i$$

$$|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$

$$|z - 2i| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

que é a equação da curva cujos pontos representa z . Trata-se da circunferência de centro $(0, 2)$ e raio 2.

449.

A equação de r é $y = mx$. A equação

$$\text{da reta } s \text{ é } y - 0 = -\frac{1}{m}(x - 4).$$

O ponto A' , interseção de r com s , está nas duas retas e, então, satisfaz as duas equações. Eliminando m entre as equações, temos:

$$y = \left(-\frac{x}{y}\right)(x - 4) \text{ e daí } x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Conclusão: o l.g. é uma circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 2.

450. $x^2 - y^2 + x + y = 0$

Fatorando, temos:

$$(x - y)(x + y) + (x + y) = 0$$

$$(x + y)(x - y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \text{ou} \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

que são duas retas concorrentes e perpendiculares.

451. $y^2 - xy - 6x^2 = 0$

Resolvendo a equação em y , vem:

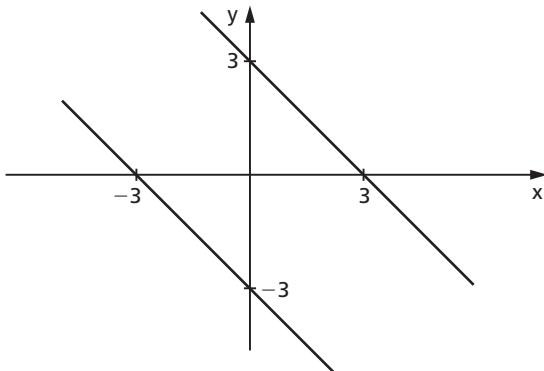
$$\Delta = x^2 + 24x^2 = 25x^2$$

$$y = \frac{x \pm 5x}{2} \Rightarrow y = 3x \text{ e } y = -2x \text{ (retas pela origem)}$$

452. $x^2 + 2xy + y^2 - 9 = 0$

Fatorando, vem:

$$(x + y)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + y - 3)(x + y + 3) = 0 \quad \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$



453. $6x^2 - 6y^2 + 5xy - 6x + 4y = 0$

Resolvendo a equação em x , vem:

$$6x^2 + (5y - 6)x - 6y^2 + 4y = 0.$$

Δ deve ser um quadrado perfeito para que a equação represente uma reunião de retas.

$$\Delta = (5y - 6)^2 - 24(-6y^2 + 4y) = (13y - 6)^2$$

Portanto:

$$x = \frac{-5y + 6 \pm (13y - 6)}{12} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ 2x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ⇒ retas perpendiculares.

454. a) $x^2 + 8x + 15 - xy - 3y = 0$

Fatorando, temos:

$$(x+3)(x+5) - y(x+3) = 0 \Rightarrow (x+3)(x-y+5) = 0$$

$$r_1: x+3=0 \Rightarrow \nparallel m_1; r_1 \perp Ox$$

$$r_2: x-y+5=0 \Rightarrow m_2 = 1$$

Então, $r_2 \parallel b_{13}$. Portanto, r_2 faz um ângulo de 45° com os eixos Ox e Oy.

Como $r_1 \parallel Oy$, então o ângulo θ entre r_1 e r_2 é $\frac{\pi}{4}$.

b) $3x^2 - 3y^2 + 6x - 2y + 8xy = 0$

Resolvendo em x , temos:

$$3x^2 + (6+8y)x - (3y^2 + 2y) = 0$$

$$\Delta = (10y+6)^2$$

$$x = \frac{-6 - 8y \pm (10y + 6)}{6} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \Rightarrow m_1 = 3 \\ \text{ou} \\ x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Como $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, as retas são perpendiculares ⇒ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) $25x^2 + y^2 - 10xy + 5x - y = 0$

Fatorando:

$$(5x-y)^2 + (5x-y) = 0$$

$$(5x-y)(5x-y+1) = 0 \quad \begin{cases} 5x - y = 0 \Rightarrow m_1 = 5 \\ \text{ou} \\ 5x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_2 = 5 \end{cases}$$

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ retas paralelas ⇒ $\theta = 0$.

455. $2x^2 + my^2 + 2xy + 10x + my + 4 = 0$

Resolvendo em x , vem:

$$2x^2 + (2y + 10)x + (my^2 + my + 4) = 0$$

$$\Delta = (2y + 10)^2 - 8(my^2 + my + 4)$$

$$\Delta = (4 - 8m)y^2 + (40 - 8m)y + 68$$

Δ é quadrado perfeito se $\Delta' = 0$.

$$\Delta' = (40 - 8m)^2 - 4 \cdot 68(4 - 8m) = 0 \Rightarrow m = -12 \pm 2\sqrt{34}$$

456. $xy = 2$

Comparando com a forma teórica $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, temos: $A = B = D = E = 0$; $C = 2$; $F = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \begin{vmatrix} 2A & C & D \\ C & 2B & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha = 4 \\ \beta = 4AB - C^2 \Rightarrow \beta = -1 \end{array} \right\} \alpha \neq 0, \beta < 0 \Rightarrow \text{hipérbole}$$

457. $x^2 - 2xy - y^2 = 0$

Resolvendo em x , temos: $x^2 - 2yx - y^2 = 0$.

$$\Delta = (-2y)^2 + 4y^2 = 8y^2$$

$$x = \frac{2y \pm 2\sqrt{2}y}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}y \\ \text{ou} \\ x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

A equação representa a reunião de duas retas.

458. $x^2 + 16y^2 + 2mxy - 1 = 0$

Comparando com a equação teórica, temos:

$$A = 1, B = 16, C = 2m, D = E = 0, F = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = -128 + 8m^2 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ se } m \neq -4 \text{ e } m \neq 4 \\ \beta = 4AB - C^2 = 64 - 4m^2 \\ \gamma = A + B = 17 \end{array} \right\}$$

Nessas condições, temos:

$$m = -4 \text{ ou } m = 4 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = 0 \Rightarrow \text{duas retas}$$

$$-4 < m < 4 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ e } \beta > 0 \Rightarrow \text{elipse}$$

$$m < -4 \text{ ou } m > 4 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ e } \beta < 0 \Rightarrow \text{hipérbole}$$

459. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2c^2} + \frac{y^2}{b^2c^2} = 1 \Rightarrow$ elipse

460. $y - 2x^2 - 7x + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 7x - 8 \Rightarrow$ parábola

461. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4+m} = 1 \quad (m \neq -4)$

A equação representa uma hipérbole se $4 + m < 0 \Rightarrow m < -4$.

462. $x^2 - y^2 + x + y = 0$

Fatorando, temos:

$$(x+y)(x-y) + (x+y) = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y+1) = 0$$

$$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow m_1=-1 \\ x-y+1=0 \Rightarrow m_2=1 \end{cases} \quad (\text{reunião de duas retas perpendiculares})$$

463. $x^2 - 6x + 8 = 0$

Fatorando, temos: $(x-4)(x-2) = 0$.

$$\begin{cases} x-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \quad (\text{são duas retas paralelas ao eixo Oy})$$

464. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

Fatorando, vem:

$$(x+y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+y-1)(x+y+1) = 0$$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \Rightarrow m_1=-1 \\ x+y+1=0 \Rightarrow m_2=-1 \end{cases} \quad (\text{são duas retas paralelas})$$

465. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

Resolvendo em x, temos:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3yx + 2y^2 = 0 \\ \Delta = y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2y \text{ ou } x = y$$

$(x-2y)(x-y) = 0$ (reunião de duas retas concorrentes na origem do sistema)

466. $4x^2 - 9y^2 = 0$

$(2x-3y)(2x+3y) = 0$ (reunião de duas retas concorrentes na origem do sistema)

467. $y^2 = 2xy - x^2$
 $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

Fatorando, vem:

$$(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \text{ (bissetriz dos quadrantes ímpares)}$$

468. $x^2 + 2ayx + y^2 = 0$
 $\Delta = 4a^2y^2 - 4y^2 = 4y^2(a^2 - 1)$

A equação representa a reunião de duas retas se Δ é quadrado perfeito.

Então, $a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a < -1$ ou $a > 1$, ou seja, $|a| > 1$.

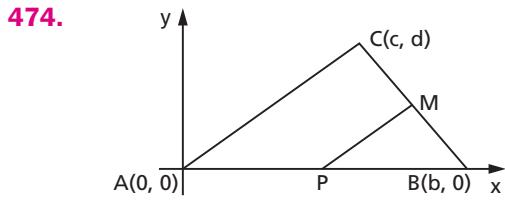
469. $f(x, y) = g(x, y) \Rightarrow f(x, y) - g(x, y) = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$, então a equação $f(x, y) = g(x, y)$ representa uma reta que contém em particular os pontos em que $f(x, y) = 0 = g(x, y)$, ou seja, os pontos de $A \cap B$.

470. $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 11 = 0$
 $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) + 3 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = -3$

Esta igualdade é impossível, pois o 1º membro é maior ou igual a zero e o 2º membro é negativo, então a equação dada representa um conjunto vazio.

471. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$
 $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0$
 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$
então só o ponto $(1, 3)$ satisfaz a equação dada.

APÊNDICE — Demonstração de teoremas de Geometria Plana



1) P é ponto médio de AB:
 $P\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.
M é ponto médio de BC:
 $M\left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

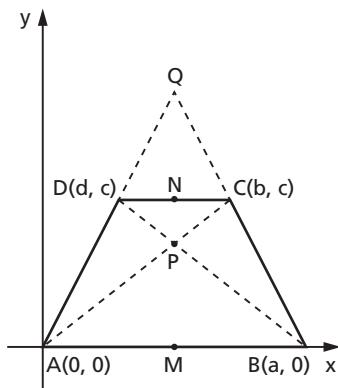
2) Vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{PM} :

$$\left. \begin{aligned} m_{\overleftrightarrow{AC}} &= \frac{d}{c} \\ m_{\overleftrightarrow{PM}} &= \frac{\frac{d}{2}}{\frac{b+c}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{d}{c} \end{aligned} \right\} m_{\overleftrightarrow{AC}} = m_{\overleftrightarrow{PM}} \Rightarrow \overleftrightarrow{PM} \parallel \overleftrightarrow{AC}$$

3) Calculemos a medida dos lados AC e PM:

$$\left. \begin{aligned} d_{AC} &= \sqrt{c^2 + d^2} \\ d_{PM} &= \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{-d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \end{aligned} \right\} d_{PM} = \frac{1}{2} d_{AC}$$

475.



1) Determinemos os pontos M e N médios das bases:

$$M = \left(\frac{a}{2}, 0\right) \text{ e } N = \left(\frac{b+d}{2}, c\right).$$

2) Determinemos o ponto P, interseção das diagonais AC e BD.

A equação da reta \overleftrightarrow{AC} é $cx - by = 0$ e a equação da reta \overleftrightarrow{BD} é $cx + (a-d)y - ac = 0$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, temos

$$P = \left(\frac{ab}{a+b-d}, \frac{ac}{a+b-d}\right).$$

3) Determinemos o ponto Q, interseção dos lados AD e BC.

A equação da reta \overleftrightarrow{AD} é $cx - dy = 0$ e a equação da reta \overleftrightarrow{BC} é $cx + (a - b)y - ac = 0$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, temos $Q = \left(\frac{ad}{a+d-b}, \frac{ac}{a+d-b} \right)$.

4) A equação da reta \overleftrightarrow{MN} é $2cx + (a - b - d)y - ac = 0$.

Provemos que P e Q estão na reta \overleftrightarrow{MN} :

$$2cx_P + (a - b - d)y_P - ac =$$

$$= 2 \cdot \frac{abc}{a+b-d} + (a - b - d) \cdot \frac{ac}{a+b-d} - ac =$$

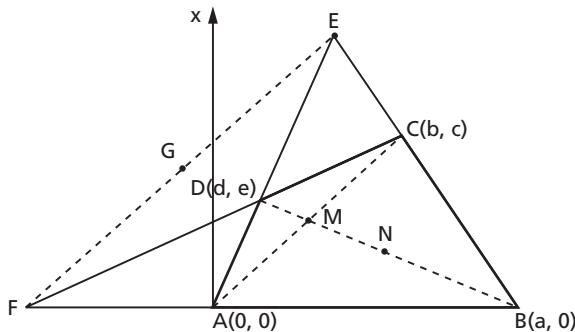
$$= \frac{1}{a+b-d} \cdot [2abc + (a - b - d)ac - (a + b - d)ac] = 0$$

$$2cx_Q + (a - b - d)y_Q - ac =$$

$$= 2 \cdot \frac{acd}{a+d-b} + (a - b - d) \cdot \frac{ac}{a+d-b} - ac =$$

$$= \frac{1}{a+d-b} \cdot [2acd + (a - b - d)ac - (a + d - b)ac] = 0.$$

476.



1) Determinemos os pontos M e N médios das diagonais:

$$M = \left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2} \right) \text{ e } N = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{e}{2} \right).$$

2) Determinemos o ponto E, interseção das retas que contêm os lados AD e BC:

equação de \overleftrightarrow{AD} : $ex - dy = 0$

equação de \overleftrightarrow{BC} : $cx + (a - b)y - ac = 0$

$$\text{solução do sistema: } E = \left(\frac{acd}{ae - be + cd}, \frac{ace}{ae - be + cd} \right)$$

3) Determinemos o ponto F, interseção das retas que contêm os lados AB e CD:

equação de \overleftrightarrow{AB} : $y = 0$

equação de \overleftrightarrow{CD} : $(c - e)x + (d - b)y + (be - cd) = 0$

$$\text{solução do sistema: } F = \left(\frac{be - cd}{e - c}, 0 \right)$$

4) Determinemos o ponto G, médio de EF:

$$x_G = \frac{1}{2}(x_E + x_F) = \frac{2bcde - ac^2d + abe^2 - b^2e^2 - c^2d^2}{2(ae - be + cd)(e - c)}$$

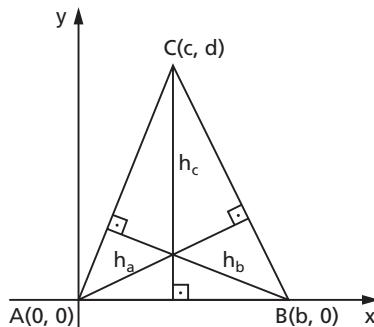
$$y_G = \frac{1}{2}(y_E + y_F) = \frac{ace}{2(ae - be + cd)}$$

5) A equação da reta \overleftrightarrow{MN} é $2(c - e)x + 2(a + d - b)y + (be - ac - cd) = 0$.

Provemos que G está em MN:

$$\begin{aligned} 2(c - e) \cdot x_G + 2(a + d - b) \cdot y_G + (be - ac - cd) &= \\ &= \frac{-2bcde + ac^2d - abe^2 + b^2e^2 + c^2d^2}{ae - be + cd} + \frac{ace(a + d - b)}{ae - be + cd} + \\ &+ \frac{(be - ac - cd)(ae - be + cd)}{ae - be + cd} = 0. \end{aligned}$$

477.



(1) Determinemos $h_a \perp BC$:

$$m_{\overline{BC}} = \frac{d}{c - b} \Rightarrow m_{h_a} = \frac{b - c}{d}$$

$$A(0, 0) \in h_a \Rightarrow y - 0 = \frac{b - c}{d} (x - 0)$$

$$h_a: y = \frac{b - c}{d} x$$

(2) Determinemos $h_b \perp AC$:

$$m_{AC} = \frac{d}{c} \Rightarrow m_{h_b} = -\frac{c}{d}$$

$$B(b, 0) \in h_b \Rightarrow y - 0 = -\frac{c}{d}(x - b) \Rightarrow (h_b) y = -\frac{c}{d}x + \frac{bc}{d}.$$

(3) Determinemos $h_c \perp AB$:

h_c é uma reta por $C(c, d)$, perpendicular a Ox .

Então, $h_c = c$.

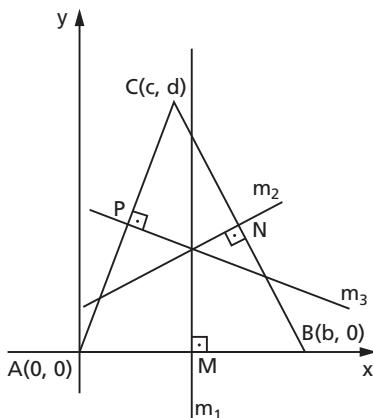
(4) Determinemos $h_a \cap h_b \cap h_c$:

$$\begin{cases} y = \frac{b-c}{d}x & (1) \\ y = -\frac{c}{d}x + \frac{bc}{d} & (2) \\ x = c & (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (1), vem: $y = \frac{c(b-c)}{d}$, que satisfaz (2).

Portanto: $I\left(c, \frac{c(b-c)}{d}\right)$ é o ponto comum das três alturas.

478.



1) Determinemos a mediatrix $m_1 \perp \overrightarrow{AB}$ em M , médio de AB :

$M\left(\frac{b}{2}, 0\right)$; m_1 é reta perpendicular ao eixo Ox , por M :

$$m_1: x = \frac{b}{2}.$$

2) Determinemos a mediatrix $m_2 \perp \overrightarrow{BC}$ em N, médio de BC:

$$N\left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right); m_{\overline{BC}} = \frac{d}{c-b} \Rightarrow m_{m_2} = \frac{b-c}{d}$$

$$m_2: y - \frac{d}{2} = \frac{b-c}{d} \left(x - \frac{b+c}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2: y = \frac{b-c}{d}x - \frac{b^2 - c^2 + d^2}{2d}$$

3) Determinemos a mediatrix $m_3 \perp \overrightarrow{AC}$ em P, médio de AC:

$$P\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{d}{c} \Rightarrow m_{m_3} = -\frac{c}{d}$$

$$m_3: y - \frac{d}{2} = -\frac{c}{d} \left(x - \frac{c}{2}\right) \Rightarrow m_3: y = -\frac{c}{d}x + \frac{c^2 + d^2}{2d}$$

4) Determinemos $m_1 \cap m_2 \cap m_3$:

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} & (1) \\ y = \frac{b-c}{d}x - \frac{b^2 - c^2 + d^2}{2d} & (2) \\ y = -\frac{c}{d}x + \frac{c^2 + d^2}{2d} & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (3), obtemos $y = \frac{c^2 + d^2 - bc}{2d}$, que satisfaz (2).

Portanto: $I\left(\frac{b}{2}, \frac{c^2 + d^2 - bc}{2d}\right)$ é o ponto comum às mediatriizes do triângulo.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.