1 Systemy liniowe pierwszego rzędu

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z prostymi systemami dynamicznymi opisywanymi liniowymi równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Przedstawione zostaną proste przykłady w postaci obwodów elektrycznych i zbiornika wodnego. Ponadto podany zostanie jeden ze sposobów modelowania systemów dynamicznych w Matlabie.

1.1 Wprowadzenie

Pewne systemy dynamiczne można opisać liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym następującej postaci (zob. np. Mitkowski, 1996, s. 21, 40)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

przy czym $x(t) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **stanem** systemu w chwili t, gdzie n jest nazywane rzędem sytemu. $u(t) \in \mathbb{R}^r$ będziemy nazywać **sterowaniem** w chwili t. A i B są rzeczywistymi macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n$ i $n \times r$. Dla $r = n = 1$ A i B są liczbami rzeczywistymi. Jeżeli $\forall t \geq 0 \quad u(t) \equiv 0$ system nazywać będziemy **autonomicznym**.

Szczególne rozwiązanie równania (1.1), dla warunku początkowego $x(0) = x_0$, dla dowolnego $t \geq 0$ wyraża się równością (zob. np. Mitkowski, 2007, s. 127)

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2}$$

która dla systemów autonomicznych przyjmuje postać (zob. np. Mitkowski, 2007, s. 126)

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0 \tag{1.3}$$

W przypadku liniowych systemów autonomicznych pierwszego rzędu $x(t)$ jest funkcją wykładniczą.

Równania różniczkowe zwyczajne są najczęściej spotykanym typem modelu matematycznego układu fizycznego o stałych skupionych. Równania te są formułowane w oparciu o podstawowe prawa mechaniki, prawa obwodów elektrycznych, równania bilansu (np. masy, ciepła i pędu) itp. W przypadku układów złożonych lub różnorodnych (np. elektromechanicznych) prawem ogólnym, z którego wynikają równania dynamiki są wywodzące się z rachunku wariacyjnego *zasada Hamiltona* (zasada ekstremum działania) i *formalizm Eulera-Lagrange'a* (zob. np. Szklarski et al., 1996; Pułaczewski et al., 1974, s. 35)

1.2 Przykłady systemów

Poniżej przedstawione zostaną trzy przykłady systemów liniowych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi rzędu pierwszego.

Obwody elektryczne

Korzystając z podstawowych praw fizyki, napięcia na kondensatorach i prądy w cewkach można opisać równaniami różniczkowymi. Wykorzystywane będą następujące związki i oznaczenia (zob. Bolkowski, 1995?, str. 26):

1. Prawo Ohma $U_R = R \cdot i_R$

2. Zależność pomiędzy prądem a napięciem dla kondesatora
$$i_c = C\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

3. Zależnośc pomiędzy prądem a napięciem dla cewki
$$U_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

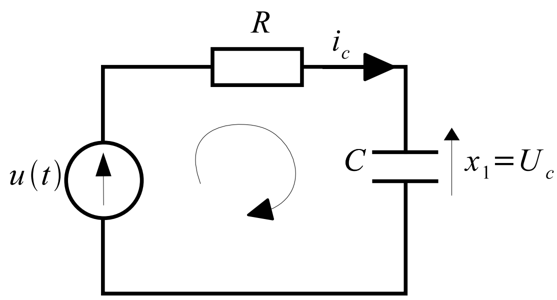
4. Prądowe prawo Kirchoffa - "Suma prądów wpływających do węzła i wypływających z niego jest równa 0"

5. Napięciowe prawo Kirchoffa - "Suma napięć w oczku jest równa 0"

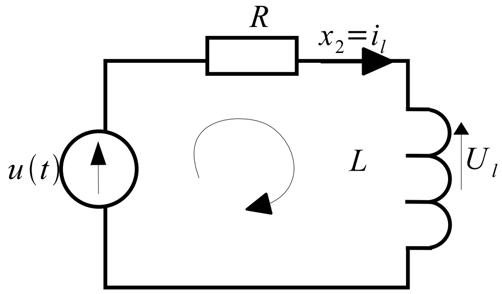
6. U - napięcie, i - prad, R - opór, C - pojemność kondensatora, L - indukcyjność cewki

Dla przypomnienia $\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Przykład 1 (Obwód RC)**.** Rozważany jest obwód elektryczny na rysunku 1.1, składający się ze źródła napięcia, oporności i kondensatora.
Przyjmijmy jako stan systemu napięcie na kondensatorze U_c oznaczając je jako x_1. Z zależności (1.4) mamy
$$i_c(t) = C \cdot \dot{x}_1(t),$$
zaś z prawa napięciowego Kirchoffa uzyskujemy równanie
$$u(t) - Ri_c(t) - x_1(t) = 0$$
podstawiamy:
$$RC\dot{x}_1(t) + x_1(t) = u(t)$$
i dalej:
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{RC}x_1(t) + \frac{1}{RC}u(t) \tag{1.6}$$
czyli równanie różniczkowe opisujące układ. Jest to typowe równanie liniowe 1 rzędu, więc jego rozwiązanie uzyskamy ze wzoru (1.2)
$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \cdot x_1(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\frac{1}{RC}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$
Warto zwrócić uwagę, że równanie (1.6) jest równoważne równaniu (1.1) gdy $A = \frac{-1}{RC}$ i $B = \frac{1}{RC}$.



Rysunek 1.1: Obwód RC



Rysunek 1.2: Obwód RL

Przykład 2 (Obwód RL)**.** Drugim rozważanym obwodem, będzie obwód elektryczny na rysunku 2, składający się ze źródła napięcia, oporności i cewki.

Przyjmijmy prąd cewki i_l jako zmienną stanu, oznaczając go x_2. Z zależności 1.5 mamy

$$U_l(t) = L\dot{x}_2(t),$$

napięciowe prawo Kirchoffa daje zaś

$$u(t) - Rx_2(t) - L\dot{x}_2(t) = 0$$

równanie opisujące układ ma więc postać:

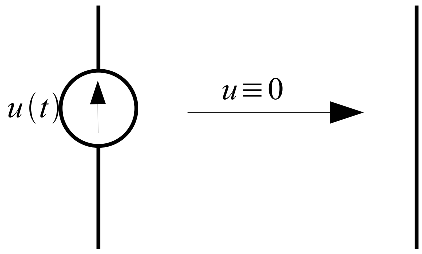
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \tag{1.7}$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, rozwiązanie ma postać

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \cdot x_2(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Analogicznie jak w obwodzie RC, równanie obwodu RL (1.7) jest równoważne równaniu (1.1) gdy $A = -\frac{R}{L}$ i $B = \frac{1}{L}$.

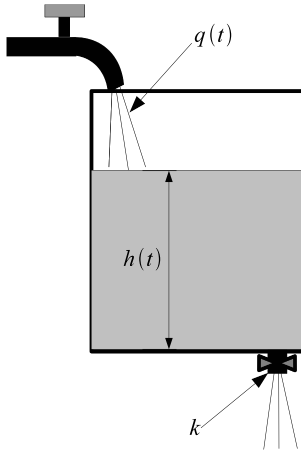
Uwaga 1.1. Jeżeli zakładamy, że obwód jest autonomiczny ($u \equiv 0$) to oznacza to, że źródło zastępujemy zwarciem (zob. rysunek 1.3)



Rysunek 1.3: źródło napięcia przy obwodzie autonomicznym traktujemy jako zwarcie

Przykład 3 (Zbiornik wodny)**.** Rozważmy prostopadłościenny zbiornik, do którego wpływa strumień wody, zaś przez otwór w dnie wypływa w tym samym czasie pewne jej ilość (np. nalewanie wody do odetkanej wanny, zob. rysunek 1.4). Załóżmy, że prędkość wypływu wody jest proporcjonalna do wysokości wody w zbiorniku.

Oznaczmy strumień wpływającej wody przez q, współczynnik wypływu przez k, zaś wysokość cieczy w zbiorniku przez h. Warto zwrócić uwagę, że objętość cieczy w prostopadłościennym



Rysunek 1.4: Zbiornik wodny

zbiorniku jest wprost proporcjonalna do wysokości tej cieczy w zbiorniku. Oznaczmy powierzchnię swobodną cieczy w zbiorniku przez S, czyli $V = Sh$. Dla małych zmian h można przyjąć, że wypływ wody ze zbiornika zależy w sposób proporcjonalny od h.

Zmiana objętości cieczy w czasie jest równa różnicy ilości wody wpływającej i wypływającej w tym czasie. Z bilansu masy wynika więc równanie różniczkowe

$$\dot{V}(t) = q(t) - k \cdot h(t)$$

ponieważ zaś powierzchnia swobodna cieczy S jest stała, to równanie możemy zapisać w następujący sposób

$$\dot{h}(t) = \frac{q(t) - k \cdot h(t)}{S} \tag{1.8}$$

Dla tego równania $h(t)$ jest stanem w chwili t, zaś $q(t)$ jest sterowaniem w chwili t. Rozwiązanie tego równania jest określone w sposób następujący

$$h(t) = \mathrm{e}^{-kt} \cdot h(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-k(t-\tau)} q(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach równanie zbiornika (1.8) jest równoważne równaniu (1.1) gdy $A = -k$ i $B = 1$.

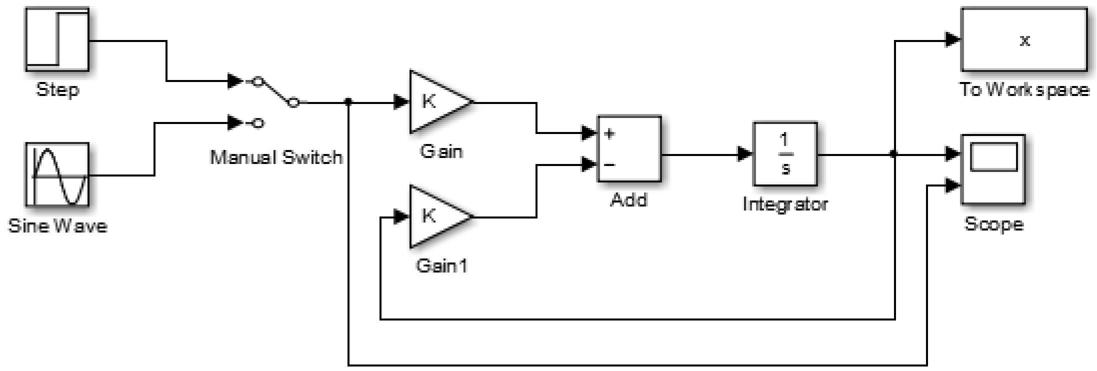
Uwaga 1.2. Założenie o proporcjonalności wypływu wody ze zbiornika do wysokości cieczy jest pewnego rodzaju uproszczeniem. Faktyczną zależność opisuje prawo Torricellego (zob. np. `https://pl.wikipedia.org/wiki/Prawo_Torricellego`). Zastosowanie tego prawa wprost, zaowocowałoby nieliniowym równaniem różniczkowym i wykracza poza zakres tego ćwiczenia. Sposób przybliżania równań zostanie szczegółowo omówiony w ćwiczeniu poświęconym linearyzacji układów dynamicznych.

1.3 Modelowanie układu pierwszego rzędu z wykorzystaniem Matlaba

Przedstawiony zostanie teraz jeden ze sposobów w jaki możemy w Matlabie dokonać symulacji układu opisanego równaniem różniczkowym.

1.3.1 Utworzenie modelu w Simulinku

Utworzymy teraz model obwodu RC z możliwością wyboru sygnału sterującego.



Rysunek 1.5: Schemat do symulacji

1. Uruchomić MATLAB-a
2. Wpisać w oknie głównym `simulink`
3. Utworzyć nowy pusty model.
4. Ustawianie parametróW symulacji. W oknie modelu w menu Simulation znajduje się polecenie (w zależności od wersji) Simulation parameters, configuration parameters lub Model configuration parameters.
   - W zakładce Solver
     - Ustawić Solver options→Type na 'Fixed step', a w menu obok 'ode4 (Runge-Kutta)',
     - Fixed step size ustawiamy na 1e-2 (czyli 0.01)
   - W zakładce Data Import/Export (lub Workspace I/O)
     - W polu 'Save options' odznaczyć opcję 'limit data points to last:' (może być ukryte jako additional parameters)
5. Z menu View, lub klikając na odpowiedniej ikonie otwieramy 'Simulink Library Browser'. Z okna 'Simulink Library Browser' do okna naszego modelu metodą 'drag & drop' przeciągnąć następujące bloczki:
   - Simulink→Continous→Integrator, po przeciągnięciu kliknąć na nim dwukrotnie i w polu 'Initial condition' wpisać 'WPC'
   - Simulink→Sinks→To Workspace, w nim w polu 'Variable name' wpisać 'x' a w polu 'Save Format' wybrać 'Array'
   - Simulink→Sinks→Scope. Następnie klikając dwukrotnie na nim, odnaleźć na górnej belce ikonę w kształcie zębatki i ją przycisnąć. W oknie "Scope' parameters"ustaw zmienną 'Number of axes' na 2.
   - dwa razy Simulink→Math Operations→Gain, w nim wpisać 'K'.
   - Simulink→Math→Add. Ten bloczek funkcyjny służy do sumowania lub odejmowania sygnałów od siebie. Żeby ustawić znaki wejścia i ilość sygnałów wchodzących do bloczka należy dwukrotnie na niego kliknąć. W oknie które się pojawiło należy w polu 'List of signs' wpisać '+-'.

- Simulink→Signal Routing→Manual Switch. Bloczek umożliwia zmianę przepływów sygnałów bez konieczności zmieniania struktury symulacji. Zmiany przepływu dokonujemy przez dwukrotne naciśnięcie bloczka. Na początek powinien być on po stronie bloczka Step.
- Simulink→Source→Step. Bloczek funkcyjny służy do wygenerowania sygnału skokowego. Sygnałem skokowym będziemy nazywać każdy sygnał który w przedziale $t \in [0, t_s]$ będzie przyjmował wartość $s_1 \in \mathbb{R}$ a dla $t > t_s$ będzie przyjmować wartość $s_2 \in \mathbb{R}$. W celu ustawienia w bloczku Step wartości wystąpienia trwania skoku t_s należy w polu 'Step time' wpisać interesującą nas wartość. W 'Initial value' ustawiamy wartość s_1 trwającą do t_s a w polu 'Final value' ustawiamy wartość s_2. Na początku Initial i Final value należy ustawić na wartość 0.
- Simulink→Source→Sine Wave. Bloczek ten pozwala nam na generowanie sygnału o przebiegu sinusoidalnym, określonego przy pomocy amplitudy (pole 'Amplitude') i częstotliwości (pole 'Frequency').

6. Połączyć ze sobą bloczki jak na rysunku 1.5. Wskazówka: Do wejść bloczków można podłączyć tylko wyjścia innych. Nie można łączyć wejść z wejściami i wyjść z wyjściami. Jeżeli istnieje konieczność, żeby wyjście bloczka łączyło się z wejściami dwóch innych bloczków można wyłączyć dodatkowe połączenie z już istniejącego przeciągając z wciśniętym prawym klawiszem myszy.

7. Zapisać model pod wybraną przez siebie nazwą.

1.3.2 Ustawianie parametrów modelu

W modelu wykorzystane były zmienne (K,WPC), które jak na razie nie mają żadnej przypisanej wartości. Wartości te można przypisać za pomocą zmiennych globalnych.

1. W oknie głównym MATLAB-a wpisać `WPC=4` i wcisnąć Enter - w ten sposób dokonuje się przypisania wartości zmiennej globalnej WPC. W menu po lewej, w zakładce Workspace, pojawia się pozycja WPC, przy dwukrotnym kliknięciu na pozycji pokazana zostanie jej wartość. Można również zauważyć, że w oknie głównym Matlab wyświetlił jaką wartość ma teraz zmienna WPC.

2. Wprowadzić dwie zmienne pomocnicze R i C (odpowiadające oporowi i pojemności). Wpisując `R=10;` i Enter, można zauważyć, że wpisanie średnika po instrukcji zapobiega wyświetleniu się wartości w oknie głównym.

3. Przypisać zmiennej C wartość 0.1.

4. Teraz należy wykozystać zadeklarowane zmienne pomocnicze do określenia wartości K. Należy tego dokonać wpisując `K=1/(R*C);`

1.3.3 Przeprowadzenie symulacji

Ponieważ model ma przypisane parametry można przeprowadzić symulację. Można tego dokonać na jeden z dwóch sposobów:

1. Otworzyć model i z menu Simulation wybrać Start, (tą samą funkcje spełni wciśnięcie ikony przypominającej przycisk 'play')

2. Wpisać w oknie głównym MATLAB-a `sim('nazwa_modelu')` aby przeprowadzić symulację. Jeżeli dodatkowo chcemy otworzyć schemat simulinkowy modelu należy wpisać `open('nazwa_modelu')`.

Aby zobaczyć wynik symulacji należy kliknąć na bloczku Scope, w którym przedstawiony zostanie wykres trajektorii stanu, na ustawionym w parametrach symulacji odcinku czasu (orginalnie jest to $t \in [0; 10]$). Ponadto jak można zauważyć w menu Workspace pojawiły się dwie nowe zmienne - `x` oraz `tout`. `x` to wartości trajektorii stanu w danych chwilach czasu a `tout` to właśnie ten czas.

Dane te możemy również wykorzystać do przedstawienia wyników symulacji. Służy do tego funkcja `plot`. Aby narysować wykres trajektorii w funkcji czasu wpisujemy `plot(tout,x)`. Otworzy się okno oznaczone jako Figure No. 1. Takie okna, można tworzyć aby umieszczać w nich wykresy m.in. właśnie z instrukcji `plot`. Służy do tego funkcja `figure` (bez argumentow stworzy okno o najniższym niewykorzystanym numerze) lub `figure(z)` (stworzy okno o numerze `z`).

Uwagi
Wykresy w oknach figure można formatować, służą do tego m.in. funkcje `xlabel`, `ylabel`, `title`, `grid`, `axis` aby uzyskac informacje o nich należy wpisać `help nazwa_funkcji`. Ponadto `help plot` dostarczy informacji o tym jak można ustawiać kolory rysowanych wykresów oraz rysować je za pomocą specjalnych znaczników. Oprócz tego menu *edit* w oknie figure daje spore możliwości modyfikacji wykresu a menu *file* pozwala zapisać wykres lub wyeksportować go do pliku graficznego.

1.3.4 Skrypty

Wszystkie podane funkcje można również wykorzystywać w skryptach, zwyczajowo nazywanych m-plikami. Aby utworzyć m-file należy w oknie głównym Matlaba kliknąć na odpowiedniej ikonie ze wstążki New→Script. Wpisanie wszystkich funkcji tak samo jak w command window pozwoli utworzy skrypt realizujący te same funkcje. Aby wykonać wszystkie instrukcje w m-filu i jednocześnie go zapisać należy wcisnąć F5 (Run z menu Simulation). Aby Matlab wykonał tylko, niektóre instrukcje należy je zaznaczyć i wcisnąć F9. Komentarze w m-filach umieszcza się na końcu linii poprzedzając je znakiem %.

1.4 Przebieg ćwiczenia

W ramach ćwiczenia należy:

1. Analizując układ ze sterowaniem równym 0 (układ autonomiczny) zbadać wpływ parametrów R, C, WPC na zachowanie się układu.
2. Dla WPC=0 przeanalizować zachowanie się układu dla różnych wartości stałego sterowania rozpoczynającego się w chwili t=0.
3. Dla sterowania równego 1 rozpoczynającego się w chwili t=0 przeanalizować zachowanie się układu dla różnych wartości WPC.
4. Przeanalizować zachowanie się układu dla sygnału skokowego postaci:
$$s = \begin{cases} 3, & t \in [0,5] \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$
i różnych wartości R i C oraz WPC=0.
5. Przy pomocy bloczka Sine Wave zbadać zachowanie układu gdy sygnał sterujący przyjmuje postać sinusoidy o amplitudzie 1 oraz częstotliwości 10 Hz dla różnych wartości parametrów R i C. Analizę przeprowadzić dla czasu symulacji większego niż 5 razy największy rozpatrywany iloczyn R*C.
6. (Zadanie dodatkowe) Rozwiązać z wykorzystaniem Matlaba i Simulinka zadania 1.4, 1.10 i 1.11.

1.5 Sprawozdanie

Z ćwiczenia tego wymagane jest sprawozdanie, powinno ono zawierać:

- Skrypt ustawiający parametry, przeprowadzającym symulację i rysującym wykresy oraz model simulinkowy zmodyfikowany tak, aby w skrypcie na jednym wykresie były rysowane sterowanie i stan.
- Skrypt ma po uruchomieniu przeprowadzić symulację dla pewnego zestawu parametrów i narysować wykres który ma mieć tytuł, opisane osie i siatkę. Skrypt ma zawierać komentarze opisujące działanie programu.
- Pilk tekstowy zawierający wnioski wynikające z każdego z podpunktów w przebiegu ćwiczenia.

1.6 Przykładowe zadania na kolokwium

Zadanie 1.1. Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$$

dla $x(0) = 1$, $t \geq 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_3 = -1$$

Zadanie 1.2. Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u_i$$

dla $x(0) = 1$, $t \geq 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 1, \qquad u_3 = 2$$

Zadanie 1.3. Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego

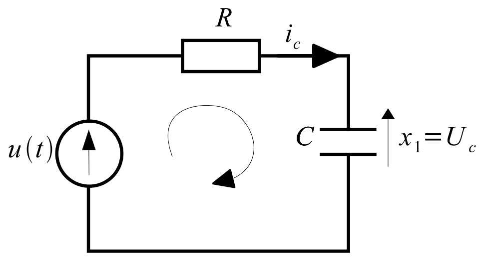
$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$$

dla $x(0) = x_i$, $t \geq 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 2$$

Zadanie 1.4. Dany jest obwód elektryczny jak na rysunku poniżej.

$R = 1000\ [K\Omega]$
$U_c(0) = -1.72\ [V]$
$C = 1\ [\mu F]$

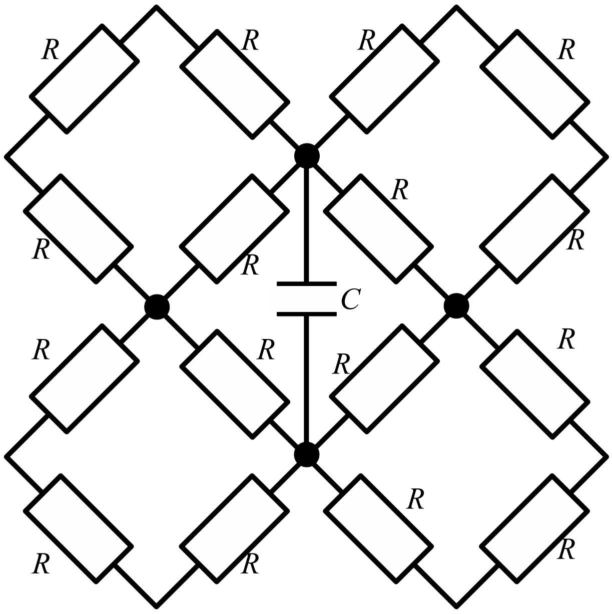


Źródło napięcia przez jedną sekundę podawało napięcie 1 $[V]$, a następnie przestało podawać dalej napięcie (przyjąć 0 $[V]$). Zamodelować obwód w postaci równania różniczkowego, wyliczyć wartość napięcia w chwili $T = 2\ [s]$ i naszkicować przebieg napięcia w funkcji czasu.

Zadanie 1.5. Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

gdzie $x(0) = 0$, $t \geq 0$. Znaleźć takie sterowanie $u(t)$, że $x(t) = t$ dla $t \geq 0$.



Zadanie 1.6. Zamodelować poniższy obwód elektryczny za pomocą równania różniczkowego przy czym $R = 4.7\text{k}\Omega$ zaś $C = 2\mu\text{F}$.

Zadanie 1.7. Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2$$

gdzie $x(0) = 0$, $t \geq 0$. Po jakim czasie t_k zachodzi $x(t_k) = 1$.

Zadanie 1.8. Na system opisany równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

gdzie $x(0) = 0$, $t \geq 0$ podano sterowanie $u(t) \equiv 1$. Wiedząc, że $x(1) = 0.37$ oraz, że

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$$

obliczyć parametry a i b.

Zadanie 1.9. Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 3\sin(5t)$$

gdzie $x(0) = 7$, $t \geq 0$ ma postać

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-2t} + A\sin(5t + \varphi)$$

Obliczyć A i φ. Wskazówka: Odpowiedź nie jest zależna od parametru a.

Zadanie 1.10. Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

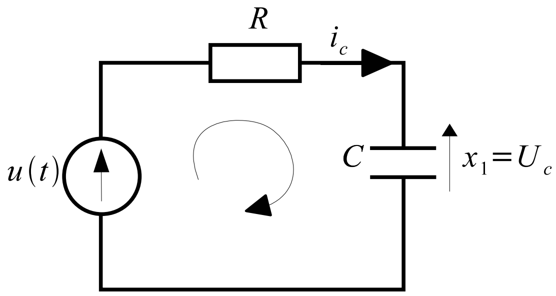
gdzie $x(0) = 0$, $t \geq 0$ zaś sterowanie ma postać sygnału PWM o amplitudzie 10, okresie 1 s i współczynniku wypełnienia $\theta \in (0, 1]$, tzn.

$$u(t) = \begin{cases} 10 & \text{dla} \quad t \in [n, n+\theta] \\ 0 & \text{dla} \quad t \in (n+\theta, n+1) \end{cases}$$

Wiedząc, że $x(3) = 2$ obliczyć θ.

Zadanie 1.11. Dany jest obwód elektryczny jak na rysunku poniżej.

$R = 1000\ [K\Omega]$
$U_c(0) = 1\ [V]$
$C = 1\ [\mu F]$



Źródło napięcia podaje sygnał będący dodatnią częścią sinusoidy o amplitudzie $A = 20$ V, częstości $\omega = \frac{4}{3}\pi$ i przesunięciu fazowym $\pi/3$. Obliczyć napięcie na kondensatorze w chwili $t = 2$ s.

Bibliografia

S. Bolkowski. *Teoria obwodów elektrycznych.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1995?

W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych.* Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.

W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania.* Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.

J. Pułaczewski, K. Szacka, and A. Manitius. *Zasady automatyki.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1974.

L. Szklarski, A. Dziadecki, J. Strycharz, and K. Jaracz. *Automatyka Napędu Elektrycznego.* Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.