

# 1 Dyskretne systemy dynamiczne

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z istotnymi własnościami systemów dyskretnych w czasie oraz konsekwencjami wynikającymi z dyskretnego podejścia do systemów dynamicznych.

## 1.1 Równanie różnicowe jako model systemu dynamicznego

Jednym z modeli określającym zachowanie się systemu dynamicznego jest równanie różnicowe

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{1.1}$$

przy czym  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Równanie to, określa nam wartość zmiennej  $x$  w następnej iteracji w sposób rekurencyjny w oparciu o wartość zmiennej  $x$  i wejścia  $u$  w obecnej iteracji. Innymi słowy, rozwiązaniem równania różniczkowego jest ciąg o indeksach  $i$ , zadany w sposób rekurencyjny.

Rozwiązanie jawne równania różnicowego (1.1) wyraża się wzorem (zob. np. Kaczorek, 1977)

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

*Uwaga 1.1.* Przy wykorzystaniu zmiany zmiennych, jak przy korzystaniu z postaci Jordana, macierz  $A$  można wyrazić w sposób

$$A = PJP^{-1}$$

Wykorzystywane było to przy obliczaniu  $e^{At}$ . Warto zwrócić uwagę, że

$$\begin{aligned}A^n &= (PJP^{-1})^n = \\ &= \underbrace{(PJP^{-1}) \cdot (PJP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PJP^{-1})}_{n \text{ razy}} = \\ &= PJ^n P^{-1}\end{aligned}$$

Dodatkowo przy wykorzystywaniu powyższych zależności należy zwrócić uwagę na następujące związki:

1. Jeżeli macierz Jordana  $J$  zawiera klatki Jordana o wymiarze  $m > 1$  tzn. klatki o postaci:

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

to ich potęgi wyrażają się wzorem (wynika to z dwumianu Newtona)

$$J_m^s = \begin{cases} \lambda^s I + s\lambda^{s-1}N_m + \binom{s}{2}\lambda^{s-2}N_m^2 + \dots + \binom{s}{s-1}\lambda N_m^{s-1} + N_m^s & \text{dla } s < m \\ \lambda^{s-m} \left( \lambda^m I + m\lambda^{m-1}N_m + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N_m^2 + \dots + \binom{m}{m-1}\lambda N_m^{m-1} \right) & \text{dla } s \geq m \end{cases}$$

przy czym  $N_m$  to tzw. macierz nilpotentna o wymiarze  $m$ , której elementy  $n_{ij}$  są równe

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j + 1 \\ 0 & \text{gdy } i \neq j + 1 \end{cases}$$

tzn. wszystkie elementy poza tymi bezpośrednio nad główną są równe jeden a pozostałe zero. W przypadku potęgi macierzy  $N_m^s$ , przy  $s < m$  jej elementy te przyjmują postać

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j + s \\ 0 & \text{gdy } i \neq j + s \end{cases}$$

zaś dla  $s \geq m$  macierz  $N_m^s$  jest macierzą zerową.

Na przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

2. Jeżeli wśród wartości własnych macierzy występują pary sprzężone zespolonych wartości własnych o rzeczywistych kłatkach Jordana postaci

$$J_* = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

to ich potęgi wyrażają się wzorem (wynika to ze wzoru de Moivre'a i postaci trygonometrycznej liczby zespolonej)

$$J_*^n = \left( \sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix}$$

przy czym  $\phi$  jest rozwiązaniem równania

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}$$

lub równoważnie układu równań

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \phi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{4} & \sin n\frac{\pi}{4} \\ -\sin n\frac{\pi}{4} & \cos n\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

jest tak ponieważ rozwiązaniem równania  $\operatorname{tg} \phi = 1$  jest  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

### 1.1.1 Równania różnicowe wyższych rzędów

Innym popularnym modelem systemu dyskretnego analogicznym jest skalarne równanie różnicowe (rekurencyjne) rzędu  $n$  tzn.

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k) \quad (1.2)$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad \dots, \quad y(n-1) = y_{n-1} \quad (1.3)$$

Jest ono równoważne równaniu macierzowemu (1.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

i warunkami początkowymi

$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ciekawym szczególnym przypadkiem równania różnicowego jest autonomiczne równanie rzędu 2

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \quad (1.4)$$

Można je łatwo rozwiązać analizując jego równanie charakterystyczne postaci

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

którego pierwiastki  $z_1$  i  $z_2$  określają nam postać rozwiązania ogólnego:

1. Jeżeli  $z_1 \neq z_2$  i są one rzeczywiste to rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

2. Jeżeli  $z_1 = z_2$  to rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k$$

3. Jeżeli  $z_1 = z_2^*$  (są liczbami sprzężonymi) to rozwiązanie ma postać

$$y(k) = c_1 |z_1|^k \cos k\phi + c_2 |z_1|^k \sin k\phi$$

przy czym  $|z_1|$  oznacza moduł z liczby zespolonej  $z_1$  zaś  $\phi$  to jej argument tzn.

$$|z_1| = \sqrt{\operatorname{Re} z_1^2 + \operatorname{Im} z_1^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{Im} z_1}{\operatorname{Re} z_1}$$

Parametry  $c_1$  i  $c_2$  wyznaczamy z wykorzystaniem warunków początkowych.

*Uwaga 1.2.* Równania różnicowe można wykorzystać np. do obliczania wyższych potęg macierzy  $2 \times 2$ . Wykorzystujemy do tego tw. Hamiltona-Cayleya. Niech macierz  $A$  ma wielomian charakterystyczny

$$W(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

z twierdzenia Hamiltona-Cayleya (zob. Turowicz, 1995, s. 131) wiemy, że

$$A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

czyli dla  $A^n$  mamy co następuje (pomnożyliśmy obie strony równania przez  $A^n$ )

$$A^{n+2} + a_1 A^{n+1} + a_0 A^n = 0$$

Wprowadźmy teraz oznaczenie

$$Y(k) = A^k$$

mamy więc równanie rekurencyjne

$$Y(k+2) + a_1 Y(k+1) + a_2 Y(k) = 0$$

w którym zmienna jest macierzą. Rozwiązujemy te równania tak samo jak zwykle równania rekurencyjne, z tym że stałe są macierzami tj. (dla przypadku rzeczywistego)

$$Y(n) = \lambda_1^n C_1 + \lambda_2^n C_n$$

Warto zauważyć, że wielomian charakterystyczny tego równania jest taki sam jak macierzy, więc jego pierwiastki to wartości własne macierzy  $A$ . Warunkami początkowymi dla tego równania są

$$Y(0) = I, \quad Y(1) = A$$

## 1.2 Stabilność systemów dyskretnych

Rozważania w tej sekcji dotyczą przypadku, gdy  $u(k) = 0$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots$  czyli innymi słowy gdy system (1.1) jest autonomiczny.

### 1.2.1 Asymptotyczna stabilność

Liniowy dyskretny system dynamiczny, nazwiemy **asymptotycznie stabilnym**, jeżeli dla każdego  $x(0)$ ,  $x(k) = A^k x(0) \rightarrow 0$  gdy  $k \rightarrow \infty$ .

**Twierdzenie 1.** *Liniowy dyskretny system dynamiczny, opisany równaniem różnicowym (1.1), jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wartości własne macierzy  $A$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.*

### Zastosowanie twierdzeń o lokalizacji pierwiastków wielomianu dla systemów dyskretnych

Niech  $W(\lambda)$  będzie wielomianem charakterystycznym macierzy  $A$ , oraz niech

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1} \tag{1.5}$$

Można dokonać podstawienia (1.5) do  $W(\lambda)$ , otrzymamy funkcję wymierną  $W(z) = \frac{L(z)}{M(z)}$ , której licznik i mianownik będą wielomianami. Wartości własne macierzy  $A$  znajdują się w kole jednostkowym wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastki wielomianu  $L(z)$  będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Do weryfikacji czy pierwiastki wielomianu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej można zastosować np. kryterium Hurwitza (zob. Mitkowski, 2007, s. 134).

## 1.3 Własności dynamiki dyskretniej

W liniowych systemach dyskretnych występują pewne zjawiska dynamiczne, które albo nie mają odpowiedników w zachowaniach systemów ciągłych, lub też mają odpowiedniki dopiero w systemach wyższych rzędów. Na przykład, dyskretny system pierwszego rzędu, może generować rozwiązania okresowe lub oscylacyjne, co w systemach ciągłych występuje dopiero w drugim rzędzie.

**1.3.1 Analiza liniowego równania różnicowego przy  $n = 1$** 

Należy przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego

$$x(k+1) = \lambda x(k)$$

w zależności od wartości parametru  $\lambda$ , należy rozpatrzeć:

- $\lambda < -1$
- $\lambda = -1$
- $\lambda \in (-1; 0)$
- $\lambda = 0$
- $\lambda \in (0; 1)$
- $\lambda = 1$
- $\lambda > 1$

Porównać wyniki z rozwiązaniami równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{y} = \alpha y$$

dla różnych wartości parametru  $\alpha$ .

**1.3.2 Równanie różnicowe z osobliwą macierzą  $A$** 

Rozważany jest dyskretny układ autonomiczny opisany równaniem różnicowym

$$x(i+1) = Ax(i) \tag{1.6}$$

Wartość  $x$  w  $k$ -tym kroku wynosi

$$x(k) = A^k x(0)$$

niech wartości własne macierzy  $A$  będą wszystkie równe zero. W takim przypadku wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  ma postać

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n$$

Znane jest twierdzenie Hamiltona-Cayleya (zob. Turowicz, 1995, s. 131), które mówi, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny. W tym przypadku oznacza to, że

$$A^n = 0$$

Oznacza to, że wartość  $x$  w  $n$ -tym kroku jest równa

$$x(n) = A^n x(0) = 0$$

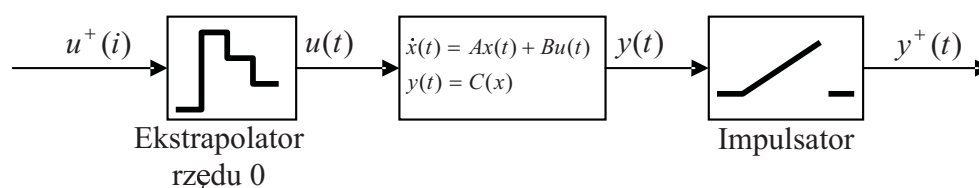
niezależnie od wartości  $x(0)$ . Innymi słowy, rozwiązanie równania różnicowego (1.6), z macierzą  $A$  o zerowych wartościach własnych staje się zerem w co najwyżej  $n$  krokach, niezależnie od warunku początkowego. Zjawisko to znalazło zastosowanie w sterowaniu przy tzw. regulatorze dead-beat. Regulator ten, ma za zadanie umieścić wartości własne dyskretnego systemu zamkniętego w zerze, tak aby stan systemu osiągnął zero w liczbie kroków mniejszej bądź równej rzędowi systemu.

## 1.4 Układ dyskretno ciągły

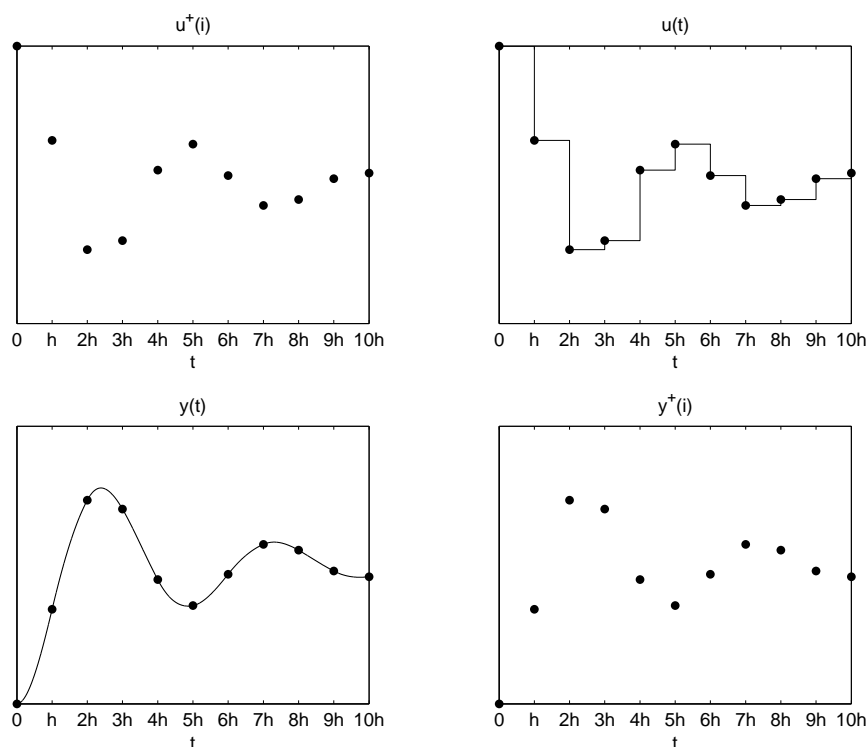
Przetwornik cyfrowo-analogowy (ekstrapolator rzędu zerowego) działa w następujący sposób: na wejście przetwornika podawany jest ciąg elementów  $u^+(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , a na wyjściu otrzymujemy funkcję  $u(t) = u^+(i)$  dla  $t \in [ih, (i+1)h)$ , ogólnie  $h > 0$  jest okresem pracy przetwornika (okresem próbkowania). Na wyjściu z przetwornika analogowo-cyfrowego (impulsatora) mamy ciąg elementów  $y^+(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h > 0$  (okres pracy impulsatora).

Połączenie szeregowo ekstrapolatora, systemu ciągłego w czasie i impulsatora jest pokazane na rys. 1.1 i stanowi układ dyskretno ciągły (przy pracy synchronicznej ekstrapolatora i impulsatora z okresem  $h > 0$ ).

*Uwaga 1.3.* Ekstrapolator rzędu zerowego w Matlabie występuje jako *zero-order hold*. W literaturze można również spotkać skrót od angielskiej nazwy tj. *“zoh”*.



Rysunek 1.1: Układ dyskretno-ciągły



Rysunek 1.2: Sygnały w układzie dyskretno-ciągłym

Rozważamy przypadek szczególny, a mianowicie liniowy dynamiczny układ stacjonarny z czasem ciągłym

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

gdzie  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $t \geq 0$ , a  $A$ ,  $B$  i  $C$  są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

W tym przypadku zależność  $y^+(i)$  od  $u^+(i)$  (zob. rysunek 1.1) można opisać następującym równaniem rekurencyjnym (różnicowym)

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+x^+(i) \end{aligned} \quad (1.8)$$

gdzie  $x^+(i) = x(ih)$ ,  $u^+(i) = u(ih)$ ,  $y(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , przy czym  $h > 0$  oznacza okres próbkowania,  $A^+$ ,  $B^+$  i  $C^+$  są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami

$$\begin{aligned} A^+ &= e^{hA} \\ B^+ &= \int_0^h e^{tA} B dt \\ C^+ &= C \end{aligned} \quad (1.9)$$

Na rysunku 1.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnałów w układzie dyskretno ciągłym.

### Wyprowadzenie zależności (1.9)

Macierze  $A^+$  i  $B^+$  otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego (1.7), o postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

po podstawieniu  $t = (i+1)h$  i  $t_0 = ih$  oraz  $u(t) = u^+(i)$  na odcinkach  $t \in [ih, (i+1)h)$ , mamy

$$x((i+1)h) = e^{((i+1)h-ih)A}x(ih) + \int_{ih}^{(i+1)h} e^{((i+1)h-\tau)A}Bd\tau u(ih) = \underbrace{e^{hA}}_{A^+}x^+(i) + \underbrace{\int_0^h e^{tA}Bdt}_{B^+}u^+(i)$$

## 1.5 Przykłady systemów dyskretnych

Podane powyżej przykłady zastosowania systemów dyskretnych nie wyczerpują tematyki. Równania różnicowe wykorzystywane są do opisu zjawisk w biologii, ekonomii, socjologii i wielu innych dziedzinach wiedzy.

Podamy teraz kilka przykładów systemów dynamicznych, które mają charakter dyskretny.

### 1.5.1 Kapitalizacja odsetek

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku bankowym. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk.

W systemach bankowych na lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę  $n$  miesięczną, to po czasie  $n$  miesięcy bank obliczy należne odsetki i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem.

W przypadku oprocentowania składanego wartość końcowa kapitału, otrzymanego w wyniku kapitalizacji odsetek dla zainwestowanego kapitału, można wyrazić wzorem:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn},$$

gdzie:

- $K_0$  - kapitał początkowy,

- $K$  - kapitał końcowy,
- $m$  - liczba kapitalizacji w roku,
- $n$  - czas trwania inwestycji (zakładamy, że jest wielokrotnością okresów kapitalizacji),
- $r$  - nominalna stopa procentowa.

### 1.5.2 Metoda Newtona-Raphsona (Metoda Stycznych)

Metoda Newtona-Raphsona to iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastków funkcji.

Założmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalną funkcją z wartościami rzeczywistymi na przedziale  $[a, b]$ . Zadaniem jest znalezienie takiego  $x^* \in [a, b]$ , które spełnia równanie

$$f(x^*) = 0$$

W przedziale poszukiwań pierwiastka funkcja musi spełniać następujące warunki:

- funkcja  $f$  oraz jej pierwsza pochodna są ciągłe i określone w badanym przedziale,
- wewnątrz  $[a, b]$  znajduje się dokładnie jeden pierwiastek,
- funkcja  $f$  na krańcach przedziału  $[a, b]$  przyjmuje różne znaki,
- pierwsza pochodna ma stały znak w badanym przedziale.

W pierwszym kroku metoda pobiera od użytkownika punkt startowy  $x_0$ , z którego następnie wyprowadzona jest styczna do punktu  $f(x_0)$ . Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem miejsca zerowego funkcji. W sposób iteracyjny możemy zapisać tę zależność w następujący sposób:

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$$

Rozwiązując podaną zależność ze względu na  $x_n$  otrzymujemy wzór rekurencyjny na kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji  $f$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

W metodzie Newtona-Raphsona oblicza się kolejne wartości przybliżeń miejsc zerowych funkcji, aż do momentu gdy ich wynik będzie spełniał zadane kryterium dokładności. W praktyce stosowane są następujące kryteria zakończenia obliczeń algorytmu:

1.  $|f(x_n)| \leq \epsilon$  - wartość funkcji w wyznaczonym miejscu jest bliska zeru z dokładnością  $\epsilon$ ,
2.  $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$  - odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami rozwiązaniami nie zmienia się więcej niż o zadaną dokładność  $\epsilon$ ,
3. przekroczono maksymalną ilość iteracji.



## 1.6 Modelowanie układów dyskretnych w Simulinku

Elementy systemów dyskretnych znajdują się w zakładce Simulink→Discrete. Istotnymi będą *Zero order hold* i *Discrete State space* należy w nich wpisać rozpatrywaną wartość kroku dyskretyzacji  $h$  np. 1.

Wejście dla układu wybrać z zakładki Simulink →Sources

Ustawienia symulacji tak jak we wcześniejszych ćwiczeniach.

Bloczek impulsator nie występuje w Simulinku i nie jest też do niczego potrzebny! Wykresy trajektorii układów dyskretnych w simulinku mają charakter wykresów schodkowych.

**Ważne!** Krok całkowania dla solvera w simulinku nie jest krokiem dyskretyzacji dla systemów dyskretnych - służy on tylko i wyłącznie do aproksymacji systemu ciągłego dlatego musi on być odpowiednio mały ( $1e-2$  powinno wystarczyć)

**Ważne!** Przy ustawianiu solvera w simulinku należy ustawić Mode na 'single tasking' (pole wyboru obok wartości kroku)

## 1.7 Sprawozdanie

Do sprawozdania należy wykonać następujące zadania:

1. Przeprowadzić analizę równania liniowego jak w sekcji 1.3.1
2. Zamodelować w simulinku układ dyskretno ciągły i pokazać, że w chwilach  $ih$  układ ciągły z wejściem poprzez 'zoh' i układ dyskretny mu równoważny przyjmują te same wartości. Aby utworzyć model należy bloczek wejścia połączyć z odpowiednim członem 'zoh' z którego wyjście należy podać na układ ciągły z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -I & -N \end{bmatrix},$$

gdzie  $I$  to liczba liter w imieniu a  $N$  liczba liter w nazwisku studenta,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Dla podanych macierzy wyznacz układ dyskretny z macierzami  $A^+$ ,  $B^+$  i  $C^+$  wyjścia z systemów zapisać do przestrzeni roboczej i porównać.

3. Zamodelować kapitalizację odsetek na koncie bankowym i udowodnić następujące twierdzenie przy pomocy odpowiednich wykresów: "W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta".
4. Zaimplementować metodę Newton-Raphson, która wykorzystuje wszystkie warunki stopu. Przetestować działanie zaimplementowanego algorytmu dla wielomianu:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12,$$

w zależności od wybranych punktów początkowych i dokładności  $\epsilon$ . Wytlumacz dlaczego dla  $x_0 = -1$  otrzymany wynik nie spełnia warunków działania algorytmu.

## 1.8 Przykładowe zadania

**Zadanie 1.1.** Narysować rozwiązanie równania różnicowego

$$x(k+1) = \lambda_i x(k)$$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$ .

**Zadanie 1.2.** Narysować rozwiązanie równania różnicowego

$$x(k+1) = -x(k) + u_i(k)$$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = -1$$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$ .

**Zadanie 1.3.** Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 1.4.** Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1$  s. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

**Zadanie 1.5.** Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$ .

**Zadanie 1.6.** Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

**Zadanie 1.7.** Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, \quad x(0) = 2, x(1) = -2.$$

**Zadanie 1.8.** Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć  $x(n)$ .

**Zadanie 1.9.** Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1$  s. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu. W układzie podtrzymującym pierwszego rzędu (ang. *first-order hold*) rekonstrukcja sygnału na podstawie ciągu elementów  $u^+(i)$  odbywa się w następujący sposób:

$$u(t) = \frac{u^+(i) - u^+(i-1)}{h} (t - ih) + u^+(i), \quad ih \leq t < (i+1)h.$$

# Bibliografia

- T. Kaczorek. *Teoria układów automatycznej regulacji*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977.
- W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.
- A. Turowicz. *Teoria macierzy*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo Dydaktyczne AGH, Kraków, 5 edition, 1995.