

# 1 Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

Celem ćwiczenia jest przybliżenie analizy częstotliwościowej systemów dynamicznych. Jest to równoważny sposób opisu układów, który w wielu zastosowaniach jest wygodniejszy niż postać czasowa. Jednym z ważnych obszarów zastosowań jest elektronika związana z sygnałami akustycznymi - różnego rodzaju wzmacniacze i equalizery, gdzie analiza częstotliwości sygnału jest bardziej intuicyjna. Kolejnym przykładem zastosowania analizy częstotliwościowej jest energetyka, gdzie kluczowe jest zapewnienie odpowiedniej częstotliwości napięcia sieciowego - w Polsce 50 Hz.

## 1.1 Transmitancja

Jednym ze sposobów opisu systemów dynamicznych jest przedstawienie ich w postaci transmitancji  $G(s)$ , inaczej nazywanej funkcją przejścia. Ta funkcja przedstawia zależność między transformatą Laplace'a wyjścia układu a transformatą Laplace'a wejścia przy założeniu zerowych warunków początkowych:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (1.1)$$

Takie przedstawienie układu jest równoważne z opisem w postaci równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) \quad (1.3)$$

$$x(0) = 0. \quad (1.4)$$

Można pokazać, że dla układu w postaci (1.2-1.4) transmitancja wyraża się wzorem:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.5)$$

Dla układu, gdzie wejście i wyjście są jednowymiarowe (SISO) to znaczy  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$  transmitancję można przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów  $L(s)$  i  $M(s)$ :

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1.6)$$

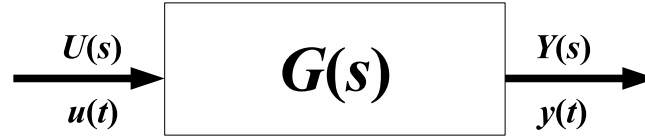
Relację między wejściem a wyjściem systemu oznacza się jak na rysunku 1.1.

Transmitancja operatorowa jest stosowana m.in. do wyznaczania odpowiedzi układu na zadane wymuszenie.

**Przykład 1.** Rozważmy układ opisany równaniem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Niech sterowanie będzie skokiem jednostkowym, czyli funkcją postaci



Rysunek 1.1: Układ opisany transmitancją

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Transmitancja operatorowa układu ma postać:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (1.8)$$

Transformata Laplace'a skoku jednostkowego to  $U(s) = \frac{1}{s}$ . Korzystając ze wzoru (1.1) dostajemy zależność

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \quad (1.9)$$

Rozkładając prawą stronę równania (1.9) na ułamki proste oraz biorąc transformatę odwrotną dostajemy odpowiedź układu w następującej postaci:

$$y(t) = e^{-t} + 1 \quad (1.10)$$

Identyczny wynik można otrzymać rozwiązując równanie różniczkowe (1.26).

## 1.2 Transmitancja widmowa

Transmitancję widmową uzyskuje się przez podstawienie w transmitancji  $G(s)$  za  $s$  liczby urojone  $j\omega$ . Parametr  $\omega$  jest nazywany częstotliwością kołową (pulsacją układu)<sup>1</sup>.

Transmitancja widmowa jest liczbą zespoloną, wprowadźmy oznaczenia:

$$P(\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) \quad (1.11)$$

$$Q(\omega) = \text{Im}(G(j\omega)) \quad (1.12)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad (1.13)$$

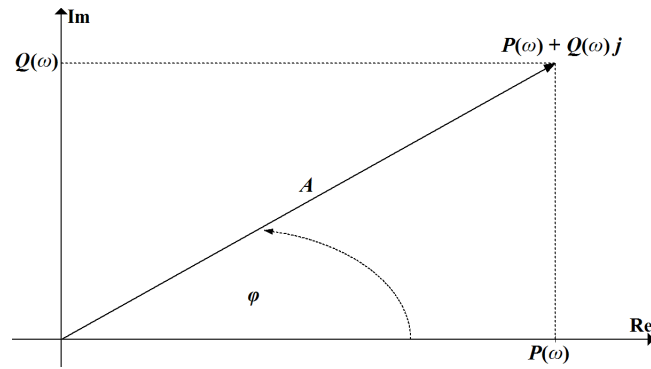
$$\phi(\omega) = \arg(G(j\omega)) \quad (1.14)$$

Wtedy  $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$ .

Postać związana z parametrami (1.14) ma czytelną interpretację fizyczną. Załóżmy, że wejście układu o transmitancji  $G(j\omega)$  ma postać sygnału sinusoidalnego  $u(t) = A_u \sin(\omega t + \varphi_u)$ . Wtedy odpowiedź ustalona po ustaniu stanów przejściowych ma postać sygnału sinusoidalnego  $y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y)$ . Sygnał na wyjściu będzie miał identyczną pulsację, co wejściowy, jednak zmienia się jego amplituda i faza, które będą wyrażone następującymi zależnościami:

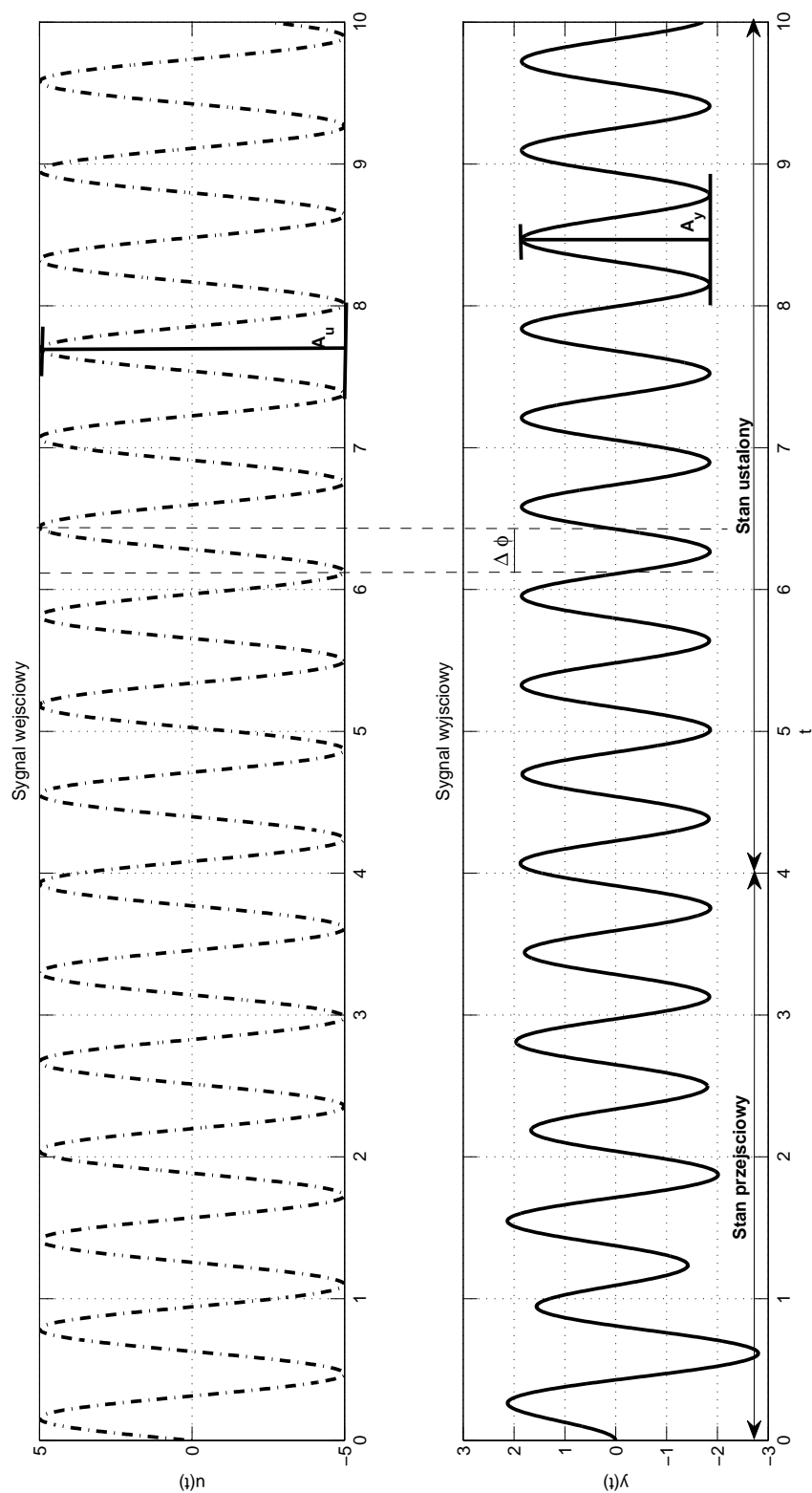
$$\begin{aligned} A_y &= A(\omega) \cdot A_u \\ \varphi_y &= \phi(\omega) + \varphi_u \end{aligned} \quad (1.15)$$

<sup>1</sup> Częstotliwość jest związana z częstotliwością zależnością  $f = \frac{\omega}{2\pi}$



Rysunek 1.2: Ilustracja na płaszczyźnie zespolonej

Zależności (1.15) są nazywane charakterystyką częstotliwościową. Dla układów asymptotycznie stabilnych mogą być również wyznaczone doświadczalnie na podstawie zmierzonych przebiegów na wejściu i wyjściu układu (dla różnych wartości  $\omega$ ). Przyjmuje się, że ustalenie sygnału na wyjściu następuje po upływie czasu między  $3T$  a  $5T$ , gdzie parametr  $T$  jest nazywany stałą czasową i można go wyrazić jako odwrotność największej wartości własnej macierzy  $A$  w układzie,  $T = \frac{1}{\max \lambda(A)}$ .



Rysunek 1.3: Przykładowy przebieg na wejściu i wyjściu układu

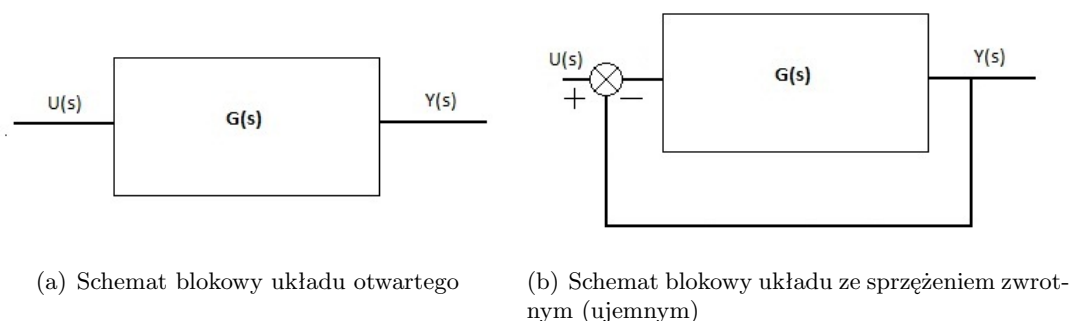
Takie podejście uzasadnia nazwę współczynnik wzmocnienia dla modułu  $A$  oraz przesunięcia fazowego dla  $\phi$ .

### 1.3 Charakterystyki częstotliwościowe

Z transmitancją częstotliwościową związane są dwa rodzaje charakterystyk: charakterystyka amplitudowo-fazowa (charakterystyka Nyquista) oraz charakterystyka rozbita na dwie części - amplitudową i fazową (charakterystyka Bodego). Zostaną omówione oba typy charakterystyk ze szczególnym uwzględnieniem zastosowań.

Charakterystyka Nyquista jest bezpośrednio związana z kryterium Nyquista, które służy do badania stabilności asymptotycznej systemów.

Schemat blokowy, który odpowiada systemowi opisanemu przez transmitancję  $G(s)$  znajduje się na rysunku (1.4a).



Rysunek 1.4: Schemat blokowy układu z transmitancją  $G(s)$

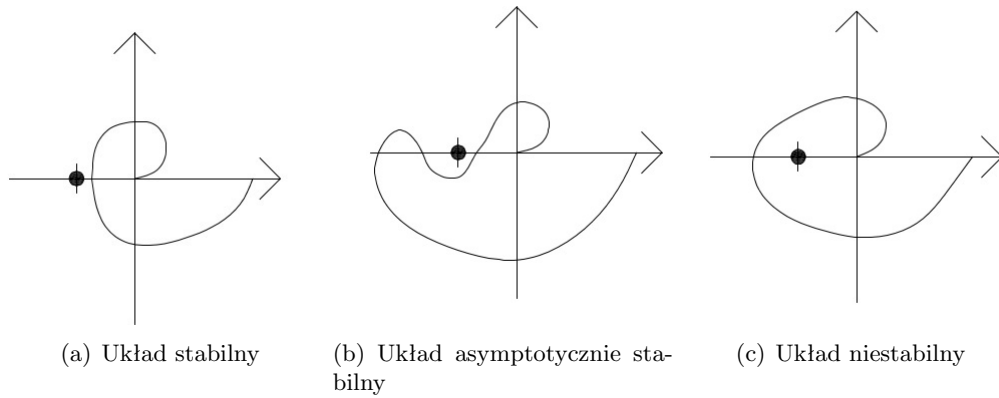
Część 1.4(a) odpowiada układowi otwartemu - sygnał wejściowy nie zależy tu od sygnału wyjściowego. Natomiast 1.4(b) przedstawia podstawowy układ sterowania, czyli system ze sprzężeniem zwrotnym.

Transmitancja zastępcza  $G_z(s)$ , która opisuje przypadek 1.4(b) wyraża się wzorem (1.16).

$$G_z(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.16)$$

**Twierdzenie 1** (Kryterium Nyquista). *Jeżeli układ otwarty opisany transmitancją  $G(s)$  jest asymptotycznie stabilny, to układ ze sprzężeniem zwrotnym, opisany za pomocą transmitancji  $G_z(s)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej transmitancji  $G(s)$  nie obejmuje punktu  $(-1, 0)$  na płaszczyźnie zespolonej.*

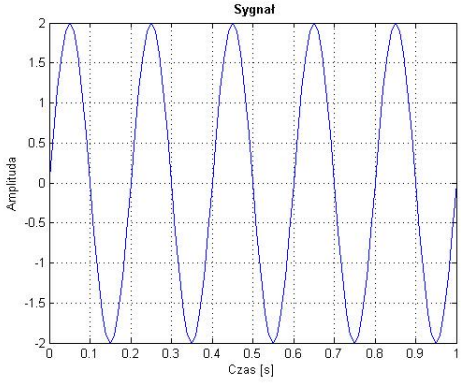
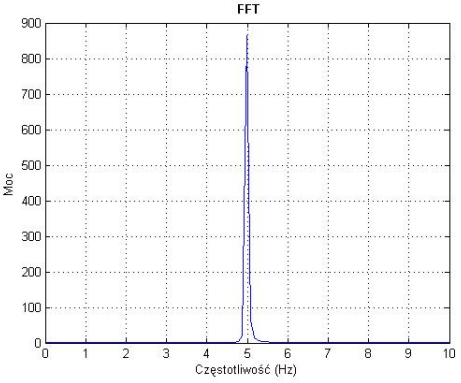
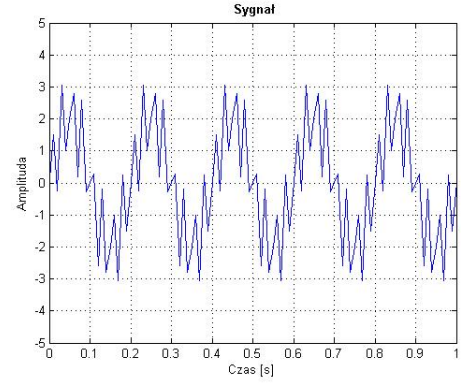
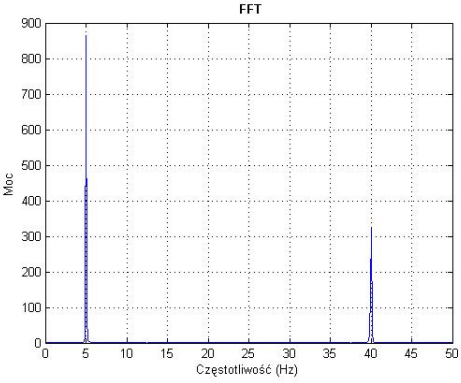
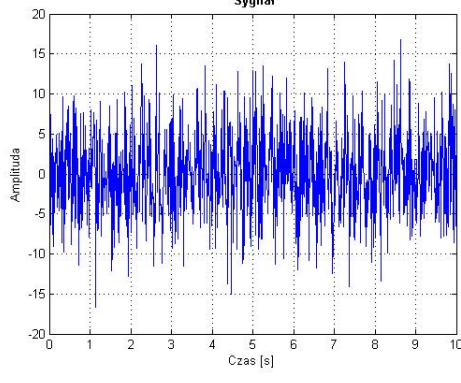
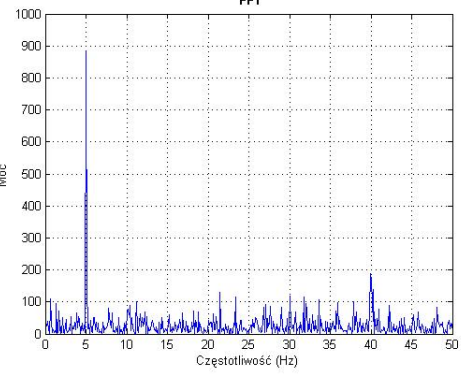
Przykłady charakterystyk znajdują się na rysunku (1.5).



Rysunek 1.5: Przykłady charakterystyk Nyquista

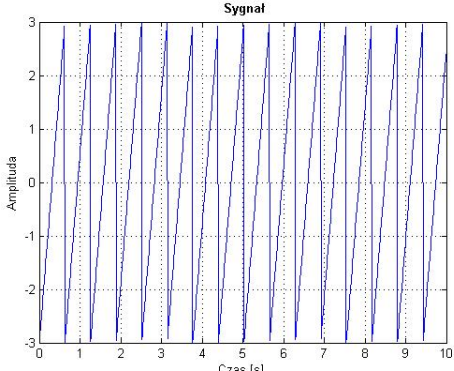
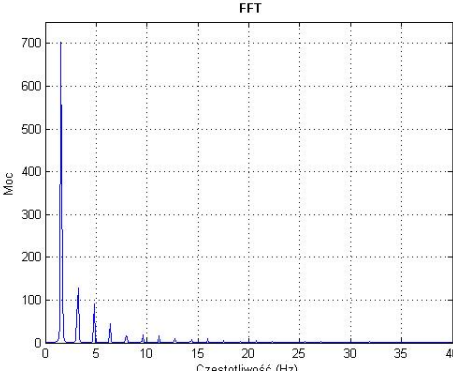
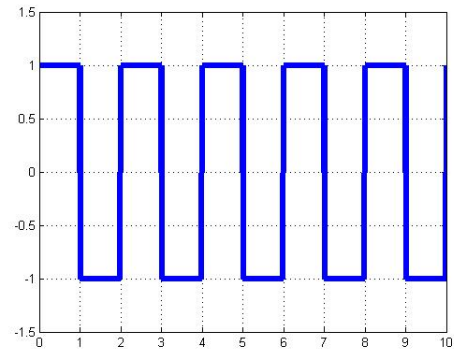
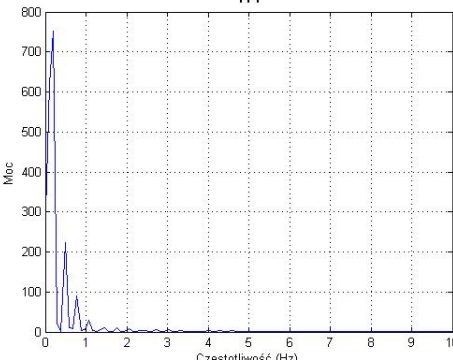
Zanim przejdziemy do omawiania drugiego typu charakterystyk, przybliżone zostaną pojęcia związane z analizą widmową sygnału. Wiadome jest (Osiowski, 1972), że każdy sygnał okresowy można przedstawić w postaci sumy sinusów o różnych częstotliwościach. W rzeczywistości jednak nie trzeba ograniczać się do sygnałów okresowych - teoria ma zastosowanie także w sytuacji, gdy to założenie nie jest spełnione. W tym celu stosuje się transformatę Fouriera, a przy obliczeniach komputerowych tzw. szybką transformatę Fouriera (FFT), która pozwala przedstawić sygnał w dziedzinie częstotliwości. Prezentacja częstotliwości nazywa się widmem sygnału. W tabelach 1.1 oraz 1.2 przedstawiono kilka transformat dla często spotykanych sygnałów.

# 1 Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

Sygnal	Widmo sygnału	Wzór
 <p>The plot shows a pure sine wave with an amplitude of 2 and a frequency of 5 Hz, plotted over a time interval from 0 to 1 second. The y-axis is labeled 'Amplituda' and ranges from -2 to 2. The x-axis is labeled 'Czas [s]' and ranges from 0 to 1.</p>	 <p>The FFT plot shows a single sharp peak at 5 Hz, indicating a pure sine wave. The y-axis is labeled 'Moc' and ranges from 0 to 900. The x-axis is labeled 'Częstotliwość (Hz)' and ranges from 0 to 10.</p>	$2 \sin(5t)$
 <p>The plot shows a signal with a primary component at 5 Hz and a smaller component at 40 Hz, plotted over a time interval from 0 to 1 second. The y-axis is labeled 'Amplituda' and ranges from -5 to 5. The x-axis is labeled 'Czas [s]' and ranges from 0 to 1.</p>	 <p>The FFT plot shows two distinct peaks: a large one at 5 Hz and a smaller one at 40 Hz. The y-axis is labeled 'Moc' and ranges from 0 to 900. The x-axis is labeled 'Częstotliwość (Hz)' and ranges from 0 to 50.</p>	$2 \sin(5t) + 1.5 \sin(40t - 80)$
 <p>The plot shows a noisy signal with a primary component at 5 Hz, plotted over a time interval from 0 to 10 seconds. The y-axis is labeled 'Amplituda' and ranges from -20 to 20. The x-axis is labeled 'Czas [s]' and ranges from 0 to 10.</p>	 <p>The FFT plot shows a peak at 5 Hz with a noisy background across the frequency spectrum. The y-axis is labeled 'Moc' and ranges from 0 to 1000. The x-axis is labeled 'Częstotliwość (Hz)' and ranges from 0 to 50.</p>	$2 \sin(5t) + 1.5 \sin(40t - 80) + \text{noise}$

Tablica 1.1: Przykładowe sygnały i ich transformaty Fouriera

# 1 Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

Sygnal	Widmo sygnału	Wzór
		Fala trójkątna
		Fala prostokątna

Tablica 1.2: Przykładowe sygnały i ich transformaty Fouriera - część druga

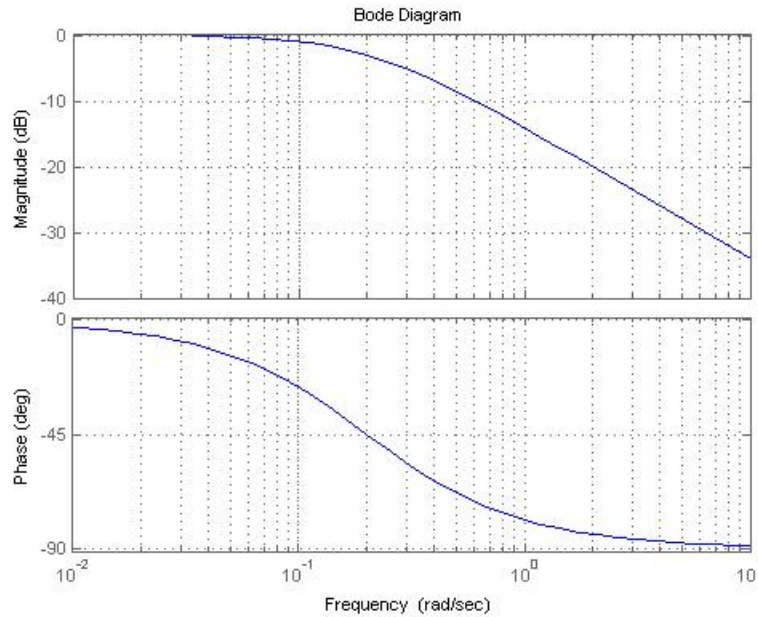


Kolejnym rodzajem charakterystyk są charakterystyki Bodego. Składają się one z dwóch części - amplitudowej i fazowej. Wiadomo, że moduł transmitancji  $A$  jest zależny od częstości  $\omega$ . Z interpretacji fizycznej wnioskujemy więc, że współczynnik wzmocnienia zależy dokładniej od częstości sygnału wejściowego. Charakterystyka amplitudowa pozwala zobaczyć, który zakres częstotliwości jest wzmocniony, który przechodzi przez układ bez zmian, a który jest tłumiony. Charakterystyka fazowa natomiast informuje, jak zmieni się przesunięcie fazowe na wyjściu w stanie ustalonym po przejściu przez system.

W celu przedstawienia graficznego, charakterystykę amplitudową należy przeliczyć według wzoru

$$A_w = 20 \log_{10}(A(\omega)) \quad (1.17)$$

Wzór (1.17) wywodzi się z elektrotechniki - pierwotnie był podobna zależność była stosowana dla określenia wzmocnienia mocy napięcia. Współczynnik 20 przed logarytmem wziął się z faktu, że moc jest zależna od kwadratu napięcia - wykorzystując odpowiednie własności funkcji logarytmicznej dostaje się wzór (1.17). Jednostką w takim przedstawieniu są decybele. Podejście logarytmiczne jest również przydatne, jeśli mamy transmitancję  $G(s)$  wyrażoną w postaci iloczynu transmitancji  $G_1(s), \dots, G_n(s)$ . Korzystając z funkcji logarytmicznej zamieniamy iloczyn, który może być trudny do analizy, na sumę.



Rysunek 1.6: Charakterystyki Bodego

$$\begin{aligned} G(s) = G_1(s) \cdots G_n(s) &\Leftrightarrow G(s) = A_1 \omega \dots A_n(\omega) e^{j\phi_1(\omega)} \dots e^{j\phi_n(\omega)} \Leftrightarrow \\ \log G(j\omega) &= \log A_1 \omega \dots \log A_n(\omega) + \log e^{j\phi_1(\omega)} + \dots + \log e^{j\phi_n(\omega)} \Leftrightarrow \\ \log G(j\omega) &= \log A_1 \omega + \dots + \log A_n(\omega) + j(\phi_1(\omega) + \dots + \phi_n(\omega)) \end{aligned} \quad (1.18)$$

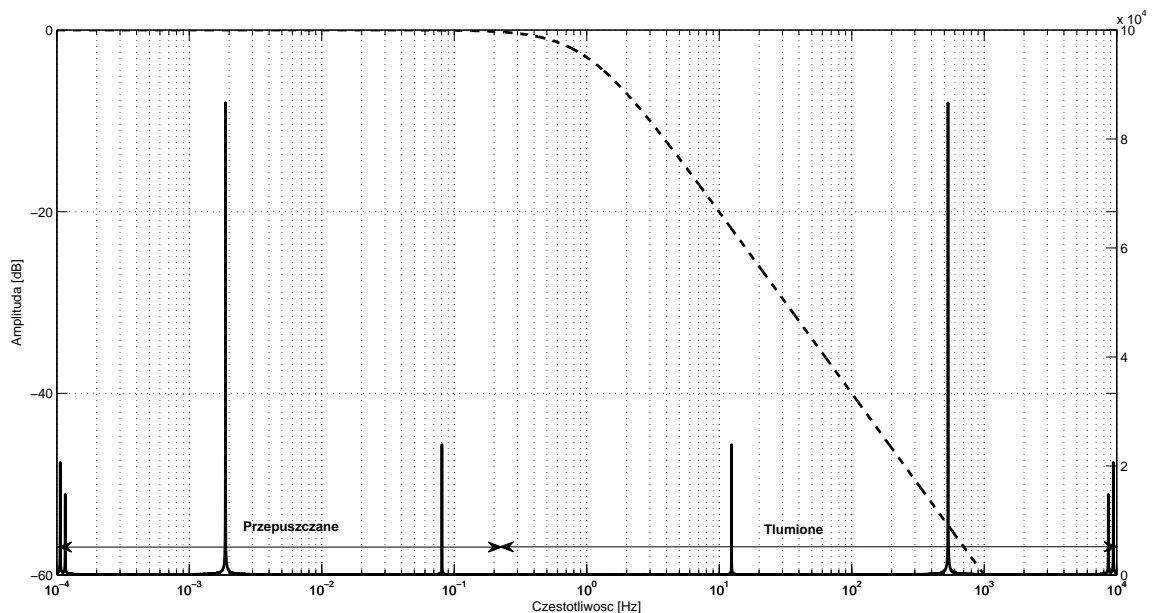
Wartość charakterystyki logarytmicznej należy interpretować w następujący sposób - każdy spadek o 6 dB oznacza osłabienie wzmocnienia o połowę (spadek o 20 dB - osłabienie dziesięciokrotne). Innymi słowy, jeżeli dla danej częstotliwości charakterystyka przyjmuje wartość  $-20$  dB, to sygnał o tej częstotliwości będzie osłabiony dziesięciokrotnie - współczynnik wzmocnienia wynosi 0.1 (dla  $-40$  stukrotnie, dla  $-60$  tysiąckrotnie).

Przykładowa charakterystyka Bodego znajduje się na rysunku 1.6.

## 1.4 Filtry

Filtry są podstawowym narzędziem do przetwarzania sygnałów. Ich głównym zadaniem jest wyłumienie niepożądanych częstotliwości występujących w sygnale przetwarzanym. Podstawowymi typami filtrów są filtry:

- dolnoprzepustowy - przepuszcza częstotliwości **poniżej** częstotliwości granicznej, natomiast tłumi wszystkie wyższe,
- górnoprzepustowy - przepuszcza częstotliwości **powyżej** częstotliwości granicznej, tłumi wszystkie poniżej,
- pasmowoprzepustowy - przepuszcza częstotliwości w **określonym paśmie**,
- pasmowozaporowy - przepuszcza częstotliwości **spoza określonego pasma**.



Rysunek 1.7: Idea działania filtra

Ideę działania filtrów prezentuje wykres 1.7 na którym przerywaną linią wykreślona została charakterystyka amplitudowa filtra dolnoprzepustowego, ciągłą natomiast wykres FFT sygnału, który zostanie poddany filtracji. Jak łatwo zauważyć po procesie filtracji częstotliwości sygnału większe niż 0.1Hz zostaną przytłumione, natomiast niższe częstotliwości nie zostaną zmienione.

## 1.5 Sprawozdanie

1. Dla układu opisanego przy pomocy transmitancji:

$$G(s) = \frac{3s + 3}{s^2 + 2s + 21} \quad (1.19)$$

wyznaczyć symulacyjnie odpowiedzi układu na różne wymuszenia sinusoidalne i je przeanalizować. Do zamodelowania obiektu przy pomocy opisu jego transmitancji należy posłużyć się blokiem Simulinka o nazwie **Transfer Fcn**. Wnioski z obserwacji zapisać w sprawozdaniu.

2. Zbadać stabilność systemów otwartych opisanych przy pomocy transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2} \quad (1.20)$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 0.1s + 1} \quad (1.21)$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układy po zamknięciu będą stabilne. W sprawozdaniu zanotować wyniki eksperymentu.

System opisany przy pomocy transmitancji operatorowych możemy wprowadzić do Matlaba używając funkcji **tf** natomiast charakterystykę Nyquista można uzyskać wywołując funkcję **nyquist**.

3. Dla zadanych filtrów danych transmitancjami:

- Dolnoprzepustowy

$$G_D(s) = \frac{1}{4s + 1} \quad (1.22)$$

- Górnoprzepustowy

$$G_G(s) = \frac{0.4s}{0.4s + 1} \quad (1.23)$$

- Pasmoprzepustowy

$$G_P(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \quad (1.24)$$

- Filtr drugiego rzędu

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1} \quad (1.25)$$

przy pomocy funkcji **bode** narysować ich charakterystyk i je przeanalizować. Następnie zamodelować wszystkie filtry w Simulinku. Za pomocą uzyskanych filtrów przefiltrować sygnały o parametrach:

- $A = 2, \omega = 0.001, \varphi = 1,$
- $A = 3, \omega = 1, \varphi = 5,$
- $A = 1, \omega = 30, \varphi = 2,$
- $A = 2, \omega = 0.01, \varphi = 1,$
- $A = 4, \omega = 5, \varphi = 0.$

Następnie przepuścić przez filtry sumę podanych sygnałów sinusoidalnych. Przeanalizować otrzymane wyniki i opisać wnioski w sprawozdaniu.

4. Dla filtru dolnoprzepustowego typu RC dobrać tak wartości parametrów  $R$  i  $C$  by tłumił on o co najmniej 20dB częstotliwości wyższe niż częstotliwość graniczna podana przez prowadzącego.

## 1.6 Przykładowe zadania

**Zadanie 1.1.** Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych  $x(0) = 0$ .

**Zadanie 1.2.** Mając daną transmitancję  $G(s) = \frac{30}{s+2}$  określić amplitudę sygnału wyjściowego, jeśli na wejście podano:

- $\sin(t + \frac{2\pi}{3})$
- $0.5 \sin(2t)$
- $8 \cos(3t + \frac{2\pi}{3})$

**Zadanie 1.3.** Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1.26 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że  $x(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x(t) - 3u(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \tag{1.26}$$

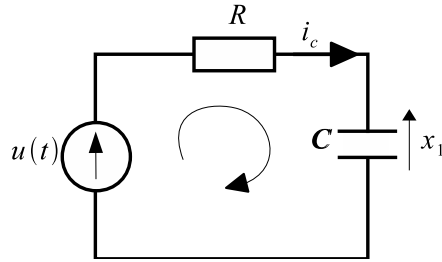
**Zadanie 1.4.** Na układ o transmitancji operatorowej  $G(s) = \frac{400}{s+30}$  podano sygnał sinusoidalny  $5 \sin(2t + \frac{\pi}{3})$ . Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

**Zadanie 1.5.** Narysować charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{2s}{3s^2+3s}$$

Podać wzór na transmitancję widmową tego układu (w postaci rozbitcia na część urojoną i rzeczywistą).

**Zadanie 1.6.** Przeanalizować układ z rysunku 1.6 i znaleźć równania opisujące ten układ. Za wyjście przyjąć napięcie na kondensatorze. Znaleźć transmitancję operatorową i widmową układu. Zakładamy, że  $R = 1\text{M}\Omega$  a  $C = 1\text{pF}$ .

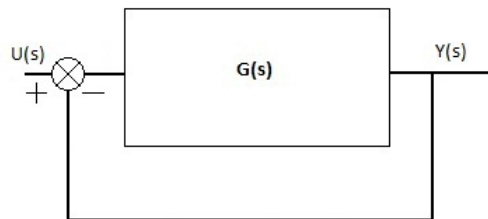


Rysunek 1.8: RC - filtr dolnoprzepustowy

**Zadanie 1.7.** Niech będzie dany układ opisany transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 - s^2 + 2s - 2}$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamknięty postaci 1.7 będzie asymptotycznie stabilny.



Rysunek 1.9: Układ zamknięty

**Zadanie 1.8.** Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 10 \sin(5t + \frac{\pi}{3})$$

gdzie  $x(0) = 0$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = ae^{-t} + A \sin(5t + \varphi)$$

Obliczyć  $A$  i  $\varphi$ .

**Zadanie 1.9.** Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -5x(t) + 15 \sin(\omega t)$$

gdzie  $x(0) = 0$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = f(t) + A \sin(\omega t + \varphi)$$

Znaleźć takie  $\omega$  dla, którego  $A$  jest największe.

**Zadanie 1.10.** Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3-s^2+2s-2}$$

## **Bibliografia**