Aufgabe 1: Ableitungen von Vektoren $\boxed{\textbf{4P}}$

Gegeben sind zwei zeitabhängige Vektoren $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ und $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie mit Hilfe der Komponentendarstellung der Vektoren, dass gilt

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\dot{\vec{b}}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t).$$

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Nutzen Sie diese Produktregeln und die Kenntnisse von Übungsblatt 1, Aufgabe 3 um zu zeigen, dass weiter gilt

$$(i)\ \frac{d}{dt}[\vec{x}(t)\cdot\vec{x}(t)] = 2\vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t), \qquad (ii)\ \frac{d}{dt}[\vec{x}(t)\times\dot{\vec{x}}(t)] = \vec{x}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t),$$

$$(iii)\ \frac{d}{dt}|\vec{x}(t)| = \frac{\vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)}{|\vec{x}(t)|}, \qquad (iv)\ \frac{d}{dt}\frac{\vec{x}(t)}{|\vec{x}(t)|} = -\frac{\vec{x}(t)\times[\vec{x}\times\dot{\vec{x}}(t)]}{|\vec{x}(t)|^3}.$$

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie damit: Für jeden Vektor $\vec{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal zu $\vec{x}(t)$, d.h.: $\quad |\vec{x}(t)| = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) \perp \vec{x}(t)$.

Aufgabe 2: Abrollkurve $\boxed{\textbf{5P}}$

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes P, der im Abstand a von der Drehachse mit einem auf der Straße ($y = 0$) rollenden Rad mit Radius R fest verbunden ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehachse bei $x = 0$ und der Punkt P genau darunter. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunkts sei konstant gleich $\vec{v}_M = (v{,}0)$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie: Falls $a = R$ ist, gibt es Zeitpunkte t_n, bei denen die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ des Punktes P verschwindet, die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der Bahnkurve aber unendlich ist.
Hinweis: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Falls $\lim_{t\to t_n}\frac{f(t)}{g(t)}$ einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt, so ist $\lim_{t\to t_n}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to t_n}\frac{f'(t)}{g'(t)}$ (Regel von L'Hôpital)

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Skizzieren Sie die Bahnkurve

(i) für $a < R$,

(ii) für $a = R$,

(iii) für $a > R$.

Aufgabe 3: Begleitendes Dreibein $\boxed{\textbf{7P}}$

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Massepunktes durch ein konstantes Magnetfeld ist gegeben durch die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad r,\omega,v_z = \text{const.}$$

(a) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ des Massepunktes.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Weg $s(t)$, den der Massepunkt zwischen den Zeiten $t' = 0$ und $t' = t$ zurücklegt.

(c) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}(t)$.

(d) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(t)$, der durch die Eigenschaften $\vec{n}(t) \parallel \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ und $|\vec{n}(t)| = 1$ bestimmt ist.

(e) $\boxed{1\text{P}}$ Nutzen Sie den Zusammenhang[1]

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\vec{n}(t),$$

mit $v(t) = |\vec{v}(t)|$, um den Krümmungsradius $R(t)$ zu bestimmen.
Hinweis: Sie können hierbei nutzen, dass $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ und $|\vec{n}| = 1$.

(f) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Binormaleneinheitsvektor $\vec{b}(t)$.

(g) $\boxed{1\text{P}}$ Skizzieren Sie die Bahnkurve und zeichnen Sie an einem Punkt das Dreibein ein.

Aufgabe 4: Rettungsschwimmer $\boxed{\textbf{4P}}$

Ein Rettungsschwimmer befinde sich im Abstand d_1 vom Wasser. Er entdeckt einen in Not geratenen Schwimmer im Abstand L zu seiner Linken und in einem Abstand d_2 zum Ufer. Der Rettungsschwimmer bewege sich an Land mit der Geschwindigkeit v_1 und im Wasser mit der Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 > v_2$. Bestimmen Sie die Trajektorie, die den Rettungsschwimmer in der kürzesten Zeit zum in Not geratenen Schwimmer führt.

Hinweis: Mit geeignet gewählten Winkeln lässt sich das Ergebnis in kompakter Form schreiben. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Trajekorie eindeutig bestimmt. Das Lösen dieser Gleichung ist nicht erforderlich.

---

[1] Diese Beziehung folgt aus $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(v(t)\vec{\tau}(t)) = \dot{v}(t)\vec{\tau}(t) + v(t)\dot{\vec{\tau}}(t) = \dot{v}(t)\vec{\tau}(t) + v(t)\vec{n}\,|\dot{\vec{\tau}}(t)|$, wobei im letzten Schritt $\dot{\vec{\tau}}$ durch dessen Betrag und Richtung ausgedrückt wurde. $|\dot{\vec{\tau}}(t)|$ ist gegeben durch $|\frac{d\vec{\tau}}{dt}| = |\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}| = \frac{1}{R(t)}v(t)$.