Aufgrund des Feiertages am 1.11.24 wird dieses Übungsblatt zusammen mit Übungsblatt 2 am 8.11.24 besprochen. Die Musterlösung dieser zwei Übungsblätter werden wir ausnahmsweise auch online zur Verfügung stellen.

Aufgabe 1: Vektoren - Über den Fluss 4P

Sie möchten mit einem Boot der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = 5\,\mathrm{m/s}$ einen 50 Meter breiten Fluss so überqueren, dass sie genau am Fähranleger gegenüber ankommen. Der Fluss fließt überall mit der Geschwindigkeit $|\vec{u}| = 2\,\mathrm{m/s}$. In welche Richtung müssen Sie steuern und wie lange dauert die Überfahrt.

Aufgabe 2: Vektoren - Spatprodukt 4P

Mit Hilfe des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ lässt sich das Volumen des von drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats (Parallelepipeds[1]) berechnen.

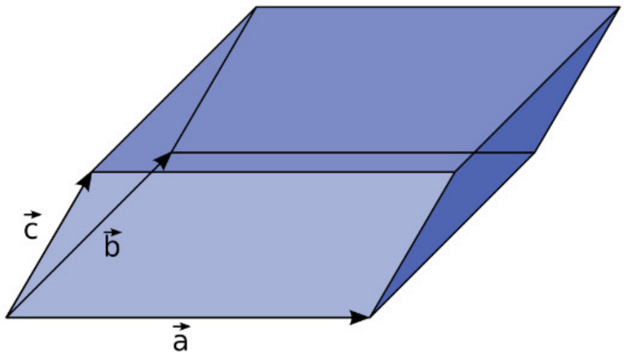

Abbildung 1: Von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespanntes Parallelepiped.

(a) 2P Überlegen Sie sich anschaulich, warum das Spatprodukt das Volumen des Spats wiedergibt. Berechnen Sie das Volumen des Spats für $\vec{a} = (3, 0, 4)$, $\vec{b} = (-1, 5, -2)$ und $\vec{c} = (2, 1, 2)$. Worauf ist bei der Berechnung des Spatprodukts zu achten?

(b) 2P Zeigen Sie, dass die vier Punkte $A = (2, 1, -1)$, $B = (3, 5, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ und $D = (4, 6, 12)$ in einer Ebene liegen.

[1] Unter einem Parallelepiped versteht man einen geometrischen Körper, der von sechs paarweise kongruenten (=deckungsgleichen) in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Die Bezeichnung Spat rührt vom Kalkspat ($CaCO_3$) her, dessen Kristalle die Form eines Parallelepipeds aufweisen.

Aufgabe 3: Vektoren - Levi-Civita-Symbol $\boxed{\textbf{8P}}$

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$ gegeben. Hierbei wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretetende Indizes $i \in \{1,2,3\}$ wird summiert. Das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ hat folgende Komponenten $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Hierbei kommt das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i,j,k \in \{1,2,3\}$ zur Anwendung, für welches gilt $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ mit $\epsilon_{123} = +1$.

(a) $\boxed{\text{4P}}$ Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ gilt. Hierbei ist das Kronecker-Symbol definiert durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die Beziehung $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die BAC-CAB-Regel $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Aufgabe 4: Differentiation - Fall mit Luftwiderstand $\boxed{\textbf{4P}}$

Wird beim freien Fall der Luftwiderstand in Form einer dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgende funktionale Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s:

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} \qquad \text{mit} \quad s \geq 0\,.$$

Hierbei bezeichnet m die Masse des fallenden Körpers, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche, und k sei ein Reibungskoeffizient.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Aufgrund der Abhängigkeit $s(t)$, also dem Zusammenhang zwischen Weg s und Zeit t, lässt sich die obige Funktion auch als Funktion von der Zeit t in der Form $v(s(t))$ darstellen. Zeigen Sie für die Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt}$ dann die Beziehung $a(s) = v\frac{dv}{ds}$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Kettenregel.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun $\frac{dv}{ds}$, und bestimmen Sie so $a(s)$. Fertigen Sie eine Skizze der Ortsabhängigkeit $a(s)$ an.