Klassische Theoretische Physik I
Übungsblatt 2
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 28.10.24
Abgabe: Mo, 4.11.24
Besprechung: Fr, 8.11.24

Aufgabe 1: Hyperbelfunktionen $\boxed{\textbf{8P}}$

Die Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

heißen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus. Tangens und Kotangens Hyperbolicus folgen gemäß $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ und $\coth x = (\tanh x)^{-1}$.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \text{und} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

und skizzieren Sie die beiden Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ im Interval $x \in [-2{,}2]$.

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$. Schränken Sie dabei den Definitionsbereich von $\cosh x$ auf die reelle Achse ($x \geq 0$) ein.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale für $t > a > 0$, indem Sie geschickt substituieren:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt$$

Hinweis: Die Ableitungen der Umkehrfunktionen sind hilfreich.

Aufgabe 2: Kardioide $\boxed{\textbf{7P}}$

Gegeben ist die Herzkurve oder Kardioide (im $\mathbb{R}^2$) in Parameterform

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)(1 - \cos(t)) \\ \sin(t)(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0{,}2\pi]$. *Hinweise:* Hilfreich sind $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ und $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie die Kurve. Wo könnte es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen geben?

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

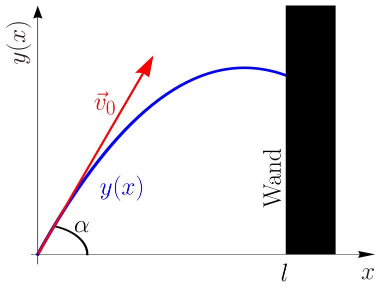
(d) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

(e) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

(f) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Länge der Kurve s nach einem Umlauf, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Hinweis: Motivieren Sie $s = \int_0^{2\pi} v(t)dt$ (ohne Bepunktung).
Nutzen Sie $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$ bei der Integration über $v(t)$.

Aufgabe 3: Wasserstrahl $\boxed{\textbf{5P}}$

Bei einer Feuerwehrübung kommt eine Wasserspritze zum Einsatz, aus welcher der Wasserstrahl mit fester Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$ austritt. Ziel der Aufgabe ist es, den Winkel α zwischen Boden und Wasserspritze so zu bestimmen, dass eine Wand in der Entfernung l möglichst weit oben getroffen wird. Dazu wähle man ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem der Wasserstrahl bei (0,0) gemäß der Abbildung austritt.



(a) $\boxed{\text{1P}}$ In x-Richtung bewegt sich der Wasserstrahl mit konstanter Geschwindigkeit, in y-Richtung kommt zusätzlich der freie Fall hinzu, so dass gilt:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t, \qquad y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Stellen Sie den Zusammenhang $y(x)$ auf, indem Sie die Zeitabhängigkeit t eliminieren. Es ergibt sich eine Parabel (Wurfparabel) als Bahnkurve.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun die Höhe $h = y(l)$ bei der Wand, und fassen Sie h als Funktion des Winkels α auf, also $h(\alpha)$. Es gilt nun das Maximum der Funktion $h(\alpha)$ zu bestimmen. Berechnen Sie hierzu die Ableitung $h'(\alpha) = \frac{dh(\alpha)}{d\alpha}$ bezüglich des Winkels α, für die Sie erhalten sollten:

$$h'(\alpha) = \frac{l}{v_0^2} \frac{v_0^2 \cos(\alpha) - gl \sin(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} \,.$$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie den Winkel α_0, für den die Höhe $h(\alpha)$ maximal wird, und zeigen Sie $h_{max} = h(\alpha_0) = \frac{v_0^4 - g^2 l^2}{2 g v_0^2}$. Geben Sie für $g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $l = 15\mathrm{m}$ und $v_0 = 20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Größen α_0 und h_{max} an.