Karlsruher Institut für Technologie

**Klassische Theoretische Physik I**
**Übungsblatt 2**
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 28.10.24
Abgabe: Mo, 4.11.24
Besprechung: Fr, 8.11.24

## Aufgabe 1: Hyperbelfunktionen $\boxed{\textbf{8P}}$

Die Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

heißen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus. Tangens und Kotangens Hyperbolicus folgen gemäß $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ und $\coth x = (\tanh x)^{-1}$.

(a) $\boxed{3\text{P}}$ Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \text{und} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

und skizzieren Sie die beiden Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ im Interval $x \in [-2{,}2]$.

(b) $\boxed{3\text{P}}$ Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$. Schränken Sie dabei den Definitionsbereich von $\cosh x$ auf die reelle Achse ($x \geq 0$) ein.

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale für $t > a > 0$, indem Sie geschickt substituieren:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt$$

*Hinweis*: Die Ableitungen der Umkehrfunktionen sind hilfreich.

## Lösung der Aufgabe 1

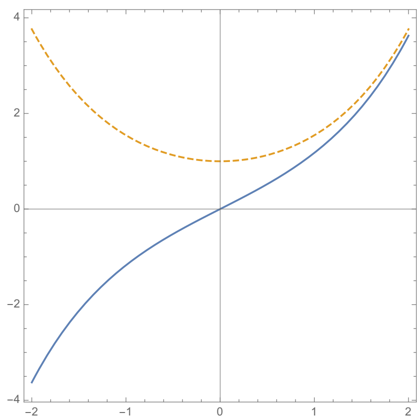
(a) Die angegebenen Relationen sind einfach zu zeigen:

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = 1$$




Die beiden Funktionen sind nebenstehend skizziert.

(b) Wir starten mit der Umkehrfunktion des $\sinh x$. Es gilt

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x - e^{-x} - 2y = 0 \qquad \text{Multiplikation mit } e^x$$

$$(e^x)^2 - 1 - 2ye^x = 0$$

Diese quadratische Gleichung löst sich nach

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \tag{1}$$

Umkehren der Argumente und Anwendung des Logarithmus liefert

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \tag{2}$$

Die Minuslösung entfällt, da der Logarithmus wegen $x < \sqrt{x^2 + 1}$ ein negatives Argument hätte. Beim $\cosh x$ folgt analog

$$\begin{aligned}
&y = \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&e^x + e^{-x} - 2y = 0 \qquad \text{Multiplikation mit } e^x \\
&(e^x)^2 + 1 - 2ye^x = 0
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Offenbar darf man in die Umkehrfunktion des $\operatorname{arcosh} x$ nur Werte $x \geq 1$ einsetzen, weil der Wertebereich des $\cosh x$ nur $[1,\infty]$ ist.

(c) Gemäß dem Hinweis berechnen wir die Ableitung der Umkehrfunktionen:

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}.$$

Damit sind die Stammfunktionen der angegebenen Integrale schon gefunden. Man nehme noch ein $a$ aus der Wurzel und substituiere mit $g = \frac{t}{a}$, also $dt = dga$ und erhält

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{g^2 + 1}} adg = \ln(g + \sqrt{g^2 + 1}) + C \\
&= \ln(\tfrac{1}{a}(t + \sqrt{t^2 + a^2})) + C = \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C'
\end{aligned}$$

Genauso folgt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt = \ln(t + \sqrt{t^2 - a^2}) + C'$$

## Aufgabe 2: Kardioide **7P**

Gegeben ist die Herzkurve oder Kardioide (im $\mathbb{R}^2$) in Parameterform

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)(1 - \cos(t)) \\ \sin(t)(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0,2\pi]$. *Hinweise:* Hilfreich sind $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ und $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(a) $\boxed{2\text{P}}$ Skizzieren Sie die Kurve. Wo könnte es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen geben?

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$.

(c) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

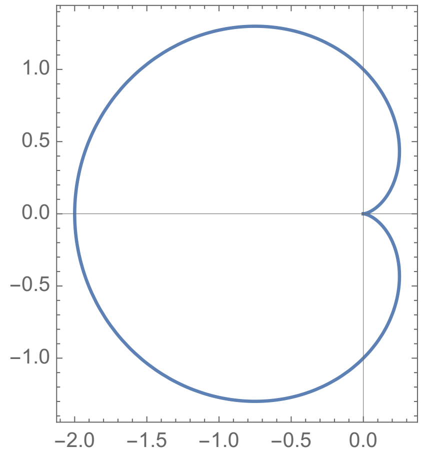
(d) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

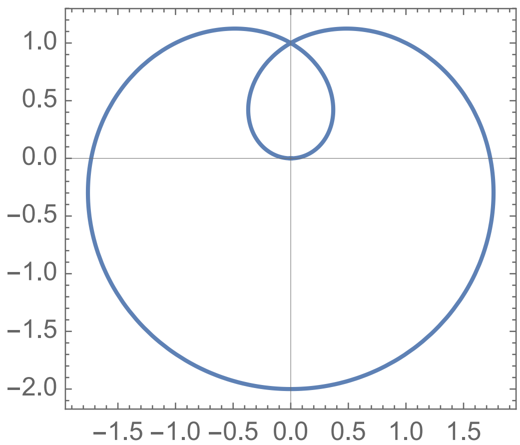
(e) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

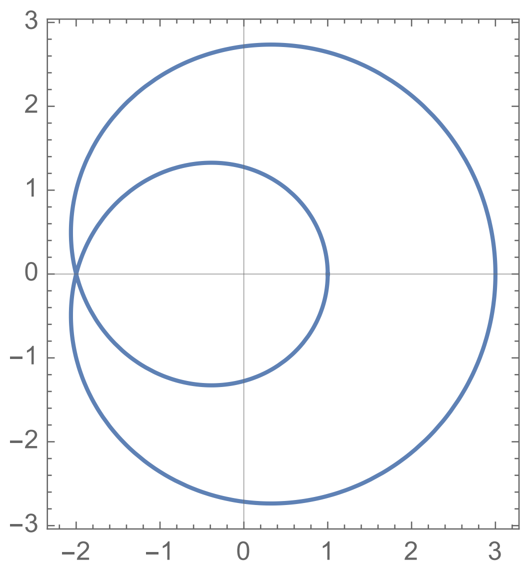
(f) $\boxed{1\text{P}}$ Berechnen Sie die Länge der Kurve $s$ nach einem Umlauf, $0 \le t \le 2\pi$.
*Hinweis:* Motivieren Sie $s = \int_0^{2\pi} v(t)dt$ (ohne Bepunktung).
Nutzen Sie $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$ bei der Integration über $v(t)$.

**Lösung der Aufgabe 2**

(a) Nebenstehend zeigen wir die durch $\vec{r}(t)$ beschriebene Bahnkurve. Im Definitionsbereich von $t$ ist die Kurve stetig und differenzierbar. Zur Beantwortung der Frage ob es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen gibt: Nachfolgend zeigen wir (nicht gefordert!) die aus den Ausdrücken der nachfolgenden Teilaufgaben folgenden Abhängigkeiten der Geschwindigkeit (links, beginnend in (0,0)) und der Beschleunigung (rechts, beginnend in (1,0)). Die Geschwindigkeit verschwindet bei $t = 0$ und $2\pi$, die Beschleunigung hat keine $y$-Komponente zu diesen Zeitpunkten. Beide haben keine Unstetigkeiten, auch über das angegebene Interval hinaus.



(b) Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung nach der Zeit, also

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t(1-\cos t) + \cos t \sin t \\ \cos t(1-\cos t) + \sin t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+2\cos t)\sin t \\ \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sin t + \sin(2t) \\ \cos t - \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Man beachte $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ und $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$.

(c) Die Beschleinigung folgt als zweite Ableitung nach der Zeit, somit

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin t \sin t + (-1+2\cos t)\cos t \\ -\sin t + 2\cos t \sin t + 2\sin t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t + 2\cos(2t) \\ -\sin t + 2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

(d) Der Betrag der Geschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| =& \sqrt{(-1+2\cos t)^2 \sin^2 t + (\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t)^2} \\ =& \big[(1 - 4\cos t + 4\cos^2 t)\sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos^3 t \\ & + \cos^4 t + 2\cos t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t\big]^{1/2} \\ =& \big[1 - 2\cos t \sin^2 t + 2\cos^2 t \sin^2 t - 2\cos^3 t + \cos^4 t + \sin^4 t\big]^{1/2} \\ =& \big[1 - 2\cos t \sin^2 t - 2\cos^3 t + 1\big]^{1/2} = \sqrt{2 - 2\cos t} \end{aligned}$$

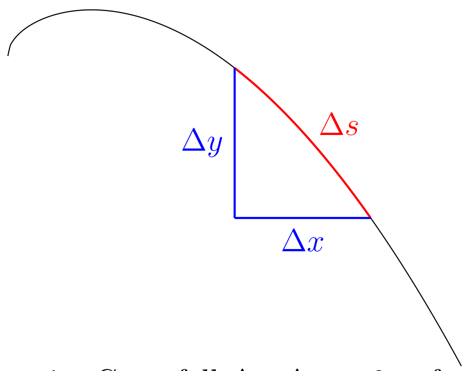
Hierbei wurden nur $\sin^4 t = \sin^2 t(1-\cos^2 t)$ und entsprechendes für $\cos^4 t$ verwendet.

(e) Für den Betrag der Beschleunigung folgt

$$\begin{aligned} |\vec{a}(t)| =& \sqrt{(-\cos t + 2\cos(2t))^2 + (-\sin t + 2\sin(2t))^2} \\ =& \sqrt{5 - 4\cos t} \qquad \text{nach ähnlichen Umformungen wie zuvor} \end{aligned}$$

(f) Die Formel für die Bogenlänge kann man intuitiv erklären, indem wir die Bahnkurve in kleine Segmente $\Delta s$ unterteilen, die jeweils in einem Zeitintervall $\Delta t$ zurückgelegt werden. Wählen wir diese Segmente klein genug gilt:

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}}_{=v(t)} \Delta t \end{aligned}$$




Summation über alle Wegelemente $\Delta s$ führt dann im Grenzfall $\Delta s, \Delta t \to 0$ auf

$$s = \int ds = \int v(t)\, dt,$$

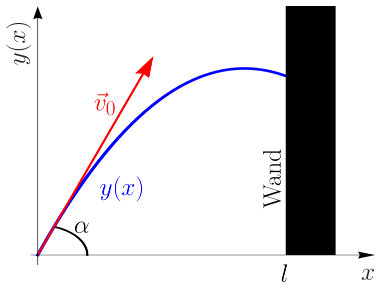
wobei die Integrationsgrenzen durch Anfangs- und Endpunkt der Bahnkurve bestimmt sind.
Mit der hier gegebenen Bahnkurve erhalten wir

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} dt == \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(\tfrac{t}{2})} \\
&= \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac{t}{2})| dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(\tfrac{t}{2}) dt = -4\cos(\tfrac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4+4 = 8
\end{aligned}
$$

Bei der Berechnung des Betrags in der 2. Zeile wurde benutzt, dass $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$.

## Aufgabe 3: Wasserstrahl **5P**

Bei einer Feuerwehrübung kommt eine Wasserspritze zum Einsatz, aus welcher der Wasserstrahl mit fester Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$ austritt. Ziel der Aufgabe ist es, den Winkel $\alpha$ zwischen Boden und Wasserspritze so zu bestimmen, dass eine Wand in der Entfernung $l$ möglichst weit oben getroffen wird. Dazu wähle man ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem der Wasserstrahl bei (0,0) gemäß der Abbildung austritt.




(a) $\boxed{1P}$ In $x$-Richtung bewegt sich der Wasserstrahl mit konstanter Geschwindigkeit, in $y$-Richtung kommt zusätzlich der freie Fall hinzu, so dass gilt:

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)t, \qquad y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Stellen Sie den Zusammenhang $y(x)$ auf, indem Sie die Zeitabhängigkeit $t$ eliminieren. Es ergibt sich eine Parabel (Wurfparabel) als Bahnkurve.

(b) $\boxed{2P}$ Berechnen Sie nun die Höhe $h = y(l)$ bei der Wand, und fassen Sie $h$ als Funktion des Winkels $\alpha$ auf, also $h(\alpha)$. Es gilt nun das Maximum der Funktion $h(\alpha)$ zu bestimmen. Berechnen Sie hierzu die Ableitung $h'(\alpha) = \frac{dh(\alpha)}{d\alpha}$ bezüglich des Winkels $\alpha$, für die Sie erhalten sollten:

$$h'(\alpha) = \frac{l}{v_0^2}\frac{v_0^2\cos(\alpha) - gl\sin(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}\,.$$

(c) $\boxed{2P}$ Bestimmen Sie den Winkel $\alpha_0$, für den die Höhe $h(\alpha)$ maximal wird, und zeigen Sie $h_{max} = h(\alpha_0) = \frac{v_0^4 - g^2l^2}{2gv_0^2}$. Geben Sie für $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $l = 15\mathrm{m}$ und $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Größen $\alpha_0$ und $h_{max}$ an.

### Lösung der Aufgabe 3

(a) Aus den beiden Beziehungen

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)t, \qquad y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

folgt durch Umstellen von $x(t)$ nach $t$ der Zusammenhang:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \qquad \text{und damit} \quad y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \quad ,$$

was einer Wurfparabel wie angegeben entspricht.

(b) In der Entfernung $x = l$ gilt damit

$$h = y(x = l) = l \tan(\alpha) - \frac{gl^2}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = l \tan(\alpha) - \frac{gl^2}{2v_0^2} (\cos(\alpha))^{-2}$$

Dies kann nun als Funktion von $\alpha$ in der Form $h(\alpha)$ aufgefasst werden und diesbezüglich maximiert werden. Dazu berechnet man die Ableitung:

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= l \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + 2 \frac{gl^2}{2v_0^2} (\cos(\alpha))^{-3} (-\sin(\alpha)) \\ &= \frac{l}{v_0^2} \frac{v_0^2 \cos(\alpha) - gl \sin(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem angegebenen Ergebnis.

(c) Setzt man $h'(\alpha) = 0$, so ist der Zähler Null zu setzen und es ergibt sich:

$$v_0^2 \cos(\alpha) - gl \sin(\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{v_0^2}{gl} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = \arctan\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)$$

Setzt man diesen Wert in $h(\alpha)$ ein, so folgt weiter:

$$\begin{aligned} h_{max} = h(\alpha_0) &= l \tan(\alpha_0) - \frac{gl^2}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2(\alpha_0)} = l \tan(\alpha_0) - \frac{gl^2}{2v_0^2} \left(1 + \tan^2(\alpha_0)\right) \\ &= l \frac{v_0^2}{gl} - \frac{gl^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 l^2}\right) = \frac{v_0^4 - g^2 l^2}{2g v_0^2} \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Höhe $h$ in Abhängigkeit von $\alpha$ maximiert wurde. Dies bedeutet nicht, dass das Maximum des Parabelwurfes bei $l$ liegt! Der Wasserstrahl kann auch vor der Mauer eine bereits höhere Position erreicht haben! Das Maximum liegt logischerweise stets vor der Wand und kommt dieser näher, je kleiner $l$ und je größer $v_0$ ist. Interessant anzumerken ist, dass offenbar $h_{max} > 0$ nur erfüllt ist für $v_0 > \sqrt{gl}$. Anderenfalls trifft der Wasserstrahl schon vor der Mauer wieder auf den Boden.
Für das Zahlenbeispiel $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $l = 15\text{m}$, $v_0 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ folgt für den Winkel $\alpha_0 \approx 69{,}80°$ und für die maximale Höhe $h_{max} \approx 17.63\text{m}$.