Klassische Theoretische Physik I
Übungsblatt 1
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

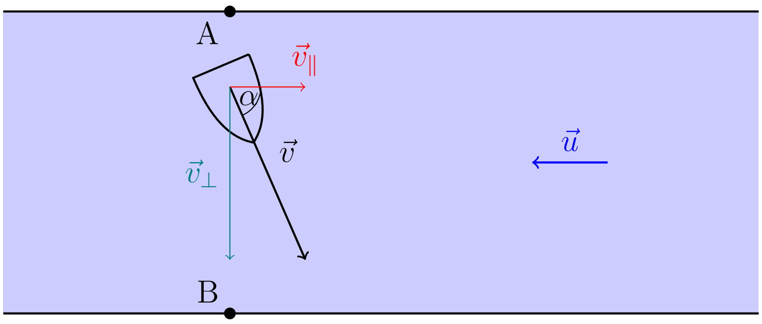
Ausgabe: Mo, 21.10.24
Abgabe: Mo, 28.10.24
Besprechung: Fr, 8.11.24

Aufgabe 1: Vektoren - Über den Fluss **4P**

Sie möchten mit einem Boot der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = 5\,\text{m/s}$ einen 50 Meter breiten Fluss so überqueren, dass Sie genau am Fähranleger gegenüber ankommen. Der Fluss fließt überall mit der Geschwindigkeit $|\vec{u}| = 2\,\text{m/s}$. In welche Richtung müssen Sie steuern und wie lange dauert die Überfahrt.

Lösung der Aufgabe 1

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Bootes lässt sich in einen Beitrag $\vec{v}_\parallel$, der der Strömung des Flusses entgegenwirkt, sowie einen dazu senkrechten Beitrag $\vec{v}_\perp$ zerlegen. Dies ist in folgender Abbildung dargestellt.



Damit wir uns nicht entlang des Flusses bewegen muss gelten $\vec{v}_\parallel = -\vec{u}$ und somit $|\vec{v}_\parallel| = |\vec{u}| = 2\text{m/s}$. Die Richtung, in die wir steuern müssen, ist gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_\parallel|}{|\vec{v}|} = \frac{v_\parallel}{v} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{v_\parallel}{v} = \arccos\frac{2}{5} = 66{,}4°,$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{v}_\parallel$ ist. $v_\perp$ ist die Geschwindigkeit, mit der wir den Fluss überqueren. Für den Betrag dieser Geschwindigkeit gilt:

$$|\vec{v}_\perp| = v_\perp = v \cdot \sin\alpha = \sqrt{v^2 - v_\parallel^2} = 4{,}58\,\text{m/s}.$$

Die benötlgte Zeit T, um die Distanz $d = 50$ m zwischen den beiden Ufern zurückzulegen ist dann gegeben durch

$$d = v_\perp T \quad \rightarrow \quad T = \frac{d}{v_\perp} = \frac{50\text{m}}{4{,}58\,\text{m/s}} = 10{,}9\,\text{s}.$$

Aufgabe 2: Vektoren - Spatprodukt **4P**

Mit Hilfe des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ lässt sich das Volumen des von drei Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats (Parallelepipeds[1]) berechnen.

[1] Unter einem Parallelepiped versteht man einen geometrischen Körper, der von sechs paarweise kongruenten (=deckungsgleichen) in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Die Bezeichnung Spat rührt vom Kalkspat ($CaCO_3$) her, dessen Kristalle die Form eines Parallelepipeds aufweisen.

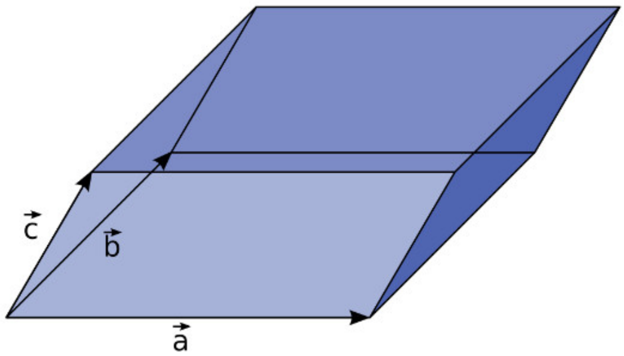


Abbildung 1: Von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespanntes Parallelepiped.

(a) $\boxed{2P}$ Überlegen Sie sich anschaulich, warum das Spatprodukt das Volumen des Spats wiedergibt. Berechnen Sie das Volumen des Spats für $\vec{a} = (3{,}0{,}4)$, $\vec{b} = (-1{,}5,-2)$ und $\vec{c} = (2{,}1{,}2)$. Worauf ist bei der Berechnung des Spatprodukts zu achten?

(b) $\boxed{2P}$ Zeigen Sie, dass die vier Punkte $A = (2{,}1,-1)$, $B = (3{,}5{,}1)$, $C = (2{,}0{,}2)$ und $D = (4{,}6{,}12)$ in einer Ebene liegen.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Das Volumen V eines Spats errechnet sich aus dem Produkt seiner Grundfläche A und seiner Höhe h nach $V = A \cdot h$. Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt den Normalenvektor auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Grundfläche A, der mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein rechtshändiges Koordinatensystem bildet und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt dieser Fläche ist, also $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Die Höhe des Spats ist die Projektion des Vektors $\vec{c}$ auf den Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}}$ des Normalenvektors. Wenn diese den Winkel α einschließen, gilt nach der Definition des Skalarprodukts

$$h = |\vec{c}| \cos\alpha = \vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}} \cdot \vec{c}.$$

Es folgt für das orientierte Volumen

$$V_o = A \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}|(\vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Das Volumen ist Null für α gleich 90°, wenn also die Vektoren in einer Ebene liegen. Sie heißen dann komplanar und linear abhängig. Das orientierte Volumen ist negativ, falls α größer ist als 90°. Dann zeigen Vektorprodukt und projizierte Höhe in entgegengesetzte Richtungen, weil die Vektoren ein Linkssystem bilden. Will man das physikalische Volumen V berechnen, muss man daher den Betrag des Spatprodukts nehmen, d.h. $V = |V_o|$. Für die vorliegenden Vektoren heißt dies

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 \\ &= -40 - 4 + 6 + 30 = -8 \\ V &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 8\end{aligned}$$

(b) Aus den vier Punkten berechnet man zunächst drei Vektoren. Man zeigt dann, dass das Spatprodukt aus diesen drei Vektoren verschwindet, d.h. das Volumen des Spats 0 ist. Dies ist wie oben diskutiert nur möglich, wenn alle Vektoren in einer Ebene liegen.

$$\vec{a} = B - A = (1, 4, 2), \quad \vec{b} = C - A = (0, -1, 3), \quad \vec{c} = D - A = (2, 5, 13)$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 14 + 14 - 15 - 13 = 0$$

Aufgabe 3: Vektoren - Levi-Civita-Symbol $\boxed{\textbf{8P}}$

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$ gegeben. Hierbei wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretetende Indizes $i \in \{1,2,3\}$ wird summiert. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ hat folgende Komponenten $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Hierbei kommt das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i,j,k \in \{1,2,3\}$ zur Anwendung, für welches gilt $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ mit $\epsilon_{123} = +1$.

(a) $\boxed{\text{4P}}$ Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ gilt. Hierbei ist das Kronecker-Symbol definiert durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die Beziehung
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die BAC-CAB-Regel
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Lösung der Aufgabe 3

(a) Für das Levi-Civita-Symbol gilt

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1, & \text{falls} \quad (i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \\ 0, & \text{falls} \quad i = j, j = k \text{ oder } i = k. \end{cases}$$

Dies folgt unmittelbar aus $\epsilon_{123} = +1$ und der Antisymmetrie unter Vertauschung von Indizes, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$. Das Kronecker-Symbol ist symmetrisch unter Vertauschen der Indizes, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.
Damit lässt sich die Relation

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{1}$$

durch explizites Betrachten der verschiedenen Kombinationen von j,k,l,m zeigen:

- $j = k$:
  In diesem Fall können wir in Gleichung (1) k durch j ersetzten und erhalten

$$\sum_i \underbrace{\epsilon_{ijj}}_{=0} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{jl} = 0$$

- $l = m$: Analog zu $j = k$.
- $j \neq k$ und $l \neq m$: Hier müssen wir weitere Fälle unterscheiden:
  - $j = l$, $k = m$, also z.B. $(j,k,l,m) = (2,3,2,3)$:
    Wir können l durch j und m durch k ersetzen und erhalten

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \underbrace{\sum_i (\epsilon_{ijk})^2}_{=1} = \underbrace{\delta_{jj}}_{=1}\underbrace{\delta_{kk}}_{=1} - \underbrace{\delta_{jk}}_{=0}\underbrace{\delta_{kj}}_{=0} = 1. \tag{2}$$

    Hier haben wir auf der rechten Seite ausgenutzt, dass $j \neq k$. In der Summe auf der linken Seite ist stets ein Summand 1, die anderen beiden Summanden sind 0.
    Z.B. für $(j,k) = (2,3)$: $\sum_i (\epsilon_{ijk})^2 = (\epsilon_{123})^2 + (\epsilon_{223})^2 + (\epsilon_{323})^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$.
  - $j = m$, $k = l$, also z.B. $(j,k,l,m) = (2,3,3,2)$:
    Wir ersetzen m durch j und l durch k:

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ikj} = \sum_i \epsilon_{ijk}(-\epsilon_{ijk}) = -\underbrace{\sum_i (\epsilon_{ijk})^2}_{=1} = \underbrace{\delta_{jk}}_{=0}\underbrace{\delta_{kj}}_{=0} - \underbrace{\delta_{jj}}_{=1}\underbrace{\delta_{kk}}_{=1} = -1, \tag{3}$$

    wobei wir im ersten Schritt die Antisymmetrie von ϵ benutzt haben.
  - Nur 2 Indizes sind gleich:
    Diesen Fall betrachten wir explizit für das Beispiel $(j,k,l,m) = (1,2,2,3)$:

$$\epsilon_{i12}\epsilon_{i23} = \underbrace{\epsilon_{112}}_{=0}\underbrace{\epsilon_{123}}_{=1} + \underbrace{\epsilon_{212}}_{=0}\underbrace{\epsilon_{223}}_{=0} + \underbrace{\epsilon_{312}}_{=1}\underbrace{\epsilon_{323}}_{=0} = \underbrace{\delta_{12}}_{=0}\underbrace{\delta_{23}}_{=0} - \underbrace{\delta_{13}}_{=0}\underbrace{\delta_{22}}_{=1} = 0$$

    Auf beiden Seiten ist also in jedem Summanden mindestens einer der Faktoren Null. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies auch bei allen weiteren Kombinationen der Fall ist.

(b) In der Indexschreibweise dürfen wir die Reihenfolge der Faktoren (nicht der Indizes!) beliebig vertauschen. Zusammen mit der Symmetrie von ϵ_{ijk} unter zyklischer Vertauschung der Indizes (was eine gerade Permutation gibt) erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i(\epsilon_{ijk} b_j c_k) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \\ &= b_j(\epsilon_{jki} c_k a_i) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ &= c_k(\epsilon_{kij} a_i b_j) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{=\epsilon_{kij}} a_j(\epsilon_{klm} b_l c_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= a_m b_i c_m - a_l b_l c_i = b_i(a_m c_m) - c_i(a_l b_l) = (\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}))_i\end{aligned} \tag{4}$$

Aufgabe 4: Differentiation - Fall mit Luftwiderstand $\boxed{\textbf{4P}}$

Wird beim freien Fall der Luftwiderstand in Form einer dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgende funktionale Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s:

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} \qquad \text{mit} \quad s \geq 0\,.$$

Hierbei bezeichnet m die Masse des fallenden Körpers, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche, und k sei ein Reibungskoeffizient.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Aufgrund der Abhängigkeit $s(t)$, also dem Zusammenhang zwischen Weg s und Zeit t, lässt sich die obige Funktion auch als Funktion von der Zeit t in der Form $v(s(t))$ darstellen. Zeigen Sie für die Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt}$ dann die Beziehung $a(s) = v\frac{dv}{ds}$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Kettenregel.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun $\frac{dv}{ds}$, und bestimmen Sie so $a(s)$. Fertigen Sie eine Skizze der Ortsabhängigkeit $a(s)$ an.

Lösung der Aufgabe 4

(a) Definitionsgemäß gilt $a(t) = \frac{dv}{dt}$. Mit dem Zusammenhang $v(s(t))$ folgt dann nach Kettenregel:

$$a = \frac{dv(s(t))}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

(b) Bildet man die geforderte Ableitung, so ist:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}}\frac{mg}{k}\frac{2k}{m}e^{-\frac{2ks}{m}} = \frac{g}{v}e^{-\frac{2ks}{m}}$$

Damit gilt insbesondere für $s \geq 0$:

$$a(s) = v\frac{dv}{ds} = v\frac{g}{v}e^{-\frac{2ks}{m}} = ge^{-\frac{2ks}{m}}$$

Setzen wir zum Beispiel $m = 80\text{kg}$, $k = 0{,}05\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ und $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ergibt sich:

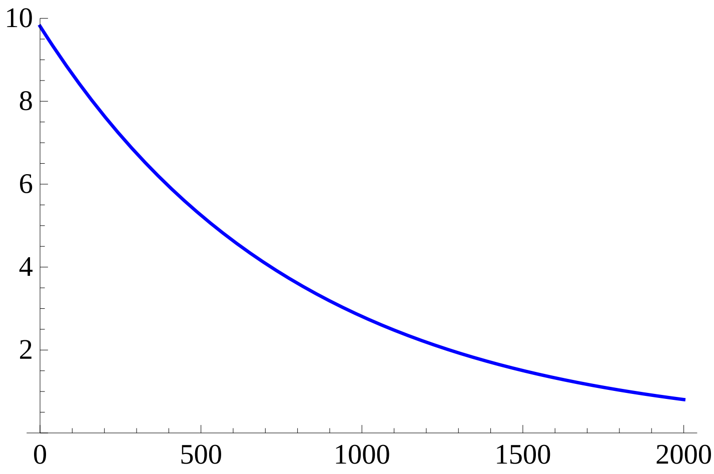


Abbildung 4: $\alpha(s)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und s in m für $m = 80\mathrm{kg}$, $k = 0{,}05\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ und $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, Wert $\alpha(0) = g$.

Nicht gefordert ist die nachfolgende Zeichnung, nur zum Verständnis die Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit $v(s)$ vom Weg s:

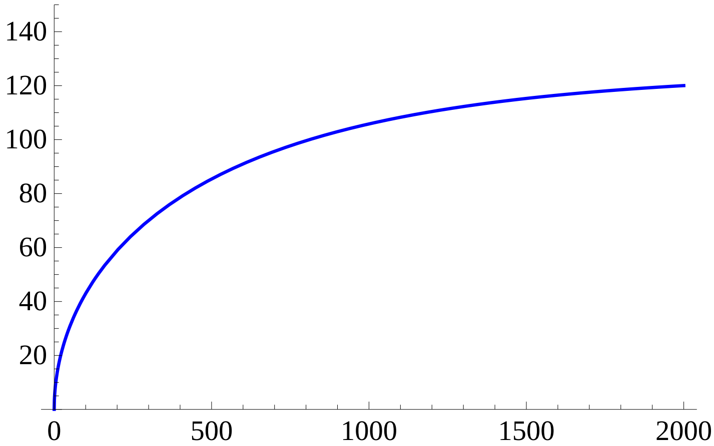


Abbildung 5: $v(s)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und s in m für $m = 80\mathrm{kg}$, $k = 0{,}05\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ und $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, Wert $v(0) = 0$.

Die Geschwindigkeit $v(s)$ nähert sich hierbei asymptotisch an den Wert $v_{\mathrm{end}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} = 125{,}3\frac{m}{s}$ an.