Глава 4. Колебания

§16. Гармонические колебания. Свободные колебания.
§17. Затухающие и вынужденные колебания.
Лирическое отступление: колебания бывают полезными (радиотехника) и вредными (вибрация).

§16. Гармонические колебания. Свободные колебания.

Мы знаем два вида движения: поступательное и вращательное. Эти виды описываются кинетическими характеристиками: перемещение, скорость и ускорение.

$\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{w};$

$\varphi, \omega, \beta.$

Есть и третий вид движения – колебательное. Колебательными характеристиками будут являться:

1. Закон, по $j_{ому}$ повторяется движение;
2. Время, через j_{oe} система приходит в исходное состояние;
3. Наибольшее отклонение тела от положения устойчивого равновесия (ПУР).

Опр. Период – минимальный промежуток времени, за который система приходит в исходное положение.
Опр. Амплитуда – модуль наибольшего отклонения тела от ПУР.

Опр. Линейная частота колебаний – количество полных колебаний, совершаемых за единицу времени (открыл Генрих Герц).

a.) Амплитуда: $[A] = м.$

b.) Период: $T = \frac{1}{\nu}$, $[T] = c.$

c.) Линейная частота колебаний: $\nu = \frac{1}{T}$, $[\nu] = Гц$ или c^{-1}.

Только гармонические колебания выполняются по законам **sin** или **cos**.
Характеристики колебательной системы:
1. Колебательная система имеет положение устойчивого равновесия (ПУР);
2. Система может толчком выводиться из этого положения при $t=0$;
3. Система проходит ПУР по инерции.

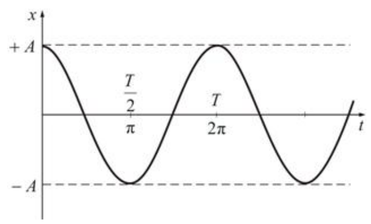
Для возникновения колебаний необходимо наличие двух условий – возвращающая сила и отсутствие (или очень малое) трение.

I. Гармонические колебания (кинематическое описание)
<u>**Опр.**</u> <u>**Гармонические колебания**</u> – колебания, происходящие по закону синуса или косинуса с течением времени.
Общим решением такого уравнения является сумма гармонических функций
$x(t) \ = A_1 \cdot sin\omega_0 t + A_2 \cdot cos\omega_0 t = A \cdot cos(\omega_0 t + \alpha)$.

Смещение частицы из положения равновесия (**уравнение движения**) можно записать так:
$x(t) \ = A \cdot cos(\omega_0 t + \alpha)$ **(1).**

В этом уравнении величина A называется амплитудой колебаний, ω – циклической (круговой) частотой, величина α – начальной фазой, а $(\omega_0 t + \alpha)$ – фазой колебаний.

<u>*Примечание:*</u> *ω_0 была угловой скоростью в механике. В гармонических колебаниях* [ω_0] = c^{-1} - это циклическая частота.
Построим график зависимости *x* от *t* при $\alpha = 0$.



Вычислим скорость и ускорение МТ при колебательном движении:
1.) Скорость при колебательном движении – это производная по *dt*:
$\dot{x} = \upsilon = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$, отсюда $\upsilon_{\max} = \omega_0 \cdot A$.
Найдем $\left|\upsilon_{ср}\right|$ не интегрируя υ :
$$\left|\upsilon_{ср}\right| = \frac{4A}{T} = \frac{4A \cdot \omega}{2\pi} = \frac{2A \cdot \omega}{\pi};$$

2.) Ускорение при колебательном движении:
$\ddot{x} = \dot{\upsilon} = W = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha),$ отсюда $W_{\max} = A \cdot \omega_0^2$.
Давайте в последней формуле заменим $A \cdot cos(\omega_0 t + \alpha)$ на $x(t)$, тогда уравнение $\ddot{x} = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$ будет иметь вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$.
Это **уравнение гармонического осциллятора:** $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ **(2).**

Иногда удобно задавать уравнение $x(t) \ = Acos(\omega_0 t + \alpha)$ не в общем виде, а выбрать начало отсчета в какой-либо точки. Давайте рассмотрим два случая.

1. В начальный момент МТ отвели на расстояние *А* от вертикали и свободно отпустили, тогда $x|_{t=0} = A$. В этом случае уравнение колебаний выглядит так:

$v|_{t=0} = 0$;

$x(t) = ACos\omega_0 t$.

2. В начальный момент МТ из положения равновесия толчком сообщают скорость v_0, тогда $x|_{t=0} = 0$. В этом случае $\varphi_0 = 0$ и $v|_{t=0} = v_0$,

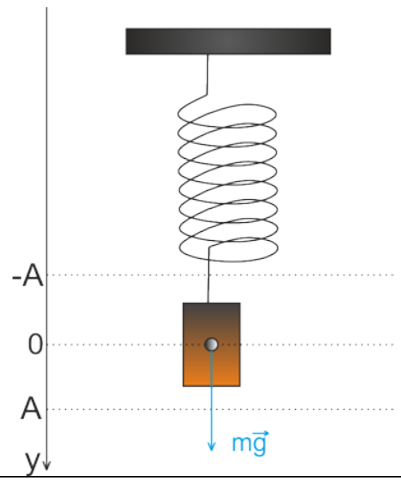
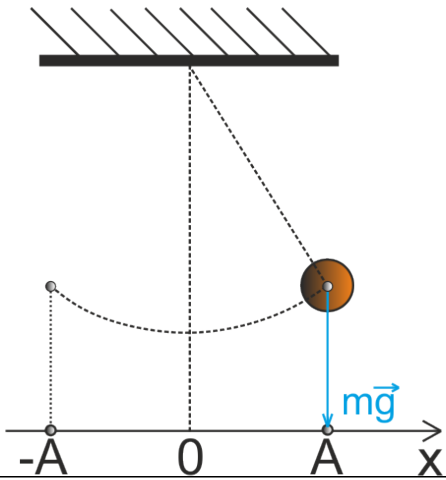
$x(t) = v_0 \omega_0 Sin\omega_0 t$.

<u>II. Свободные колебания (динамическое описание)</u>

<u>Опр.</u> <u>Свободные колебания</u> – это колебания системы под действием только внутренних сил в системе без влияния всяких внешних воздействий.

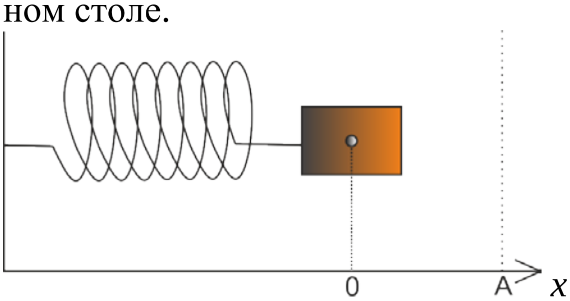
Для всех колебательных систем будем рассматривать малые колебания, то есть такие, для которых $x \ll 1$.

Основными примерами свободных колебаний являются математический и пружинный маятники.

Пружинный маятник	Математический маятник
	

Давайте выведем уравнение гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, исследуя пружинный и математический маятник.

1.) Рассмотрим колебания груза на пружине, расположенные на горизонтальном столе.



Колебания, как и любое механическое движение, подчиняются II закону Ньютона. Для колеблющейся частицы массы m это уравнение выглядит так:

$mW = F$, где F – возвращающая сила.

$OX:\ mW = -kx$;

$m\ddot{x} = -kx$;

$m\ddot{x} + kx = 0.$

Разделим оба слагаемых на m: $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0.$

Введем снова ω_0 – круговую (циклическую) частоту, [ω_0] = c^{-1}.

Если обозначить $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, то размерность позволяет нам выполнить такое преобразование: $\left[\dfrac{k}{m}\right] = \dfrac{H}{м \cdot кг}$, где $\dfrac{H}{кг} = \dfrac{м}{c^2}$,

тогда $\left[\omega_o^2\right] = \left[\dfrac{k}{m}\right] = c^{-2}$.

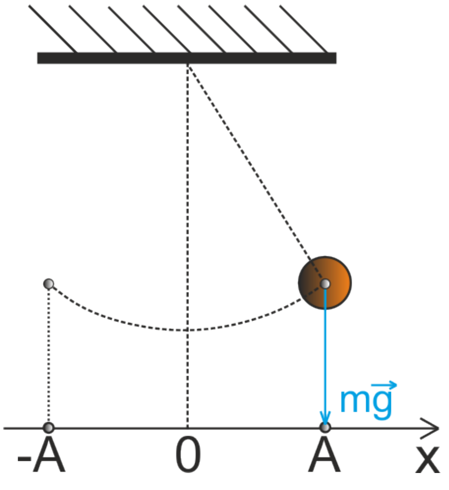
Из преобразований видно, что $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, тогда можно найти период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Само уравнение принимает вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Итак, мы снова приходим к уравнению гармонического осциллографа **(2)**, а, значит, колебания пружинного маятника являются гармоническими.

2.) Рассмотрим теперь математический маятник.



МТ на невесомой нити в поле силы тяжести (трения нет). Запишем общее выражение для II закона Ньютона колеблющегося маятника, а затем спроектируем его на касательную к траектории ось, которую назовем *x*:

1. $mW = F$;

2. *OX*: $mW = -mg\sin\alpha$;

3. *x*-смещение МТ вдоль оси *x*;

4. *l*-длина нити.

5. $\frac{x}{l} = \sin\alpha.$

5. Так как *x <<1*, то и угол отклонения маятника от вертикали мал, $\frac{x}{l} = \sin\alpha \approx \alpha$.

6. Тогда $W = -g\sin\alpha = -g\cdot\frac{x}{l}$. Учитывая, что $W = \ddot{x}$, получаем уравнение $\ddot{x} + \frac{g}{l}\cdot x = 0$.

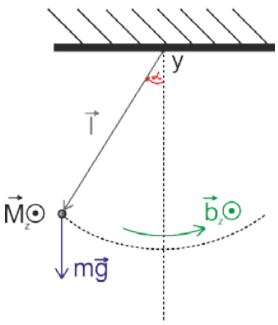
Давайте, как и для пружинного маятника, введем ω_0 – круговую (циклическую) частоту свободных колебаний математического маятника: [ω_0] = c^{-1} .

Если обозначить $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, то размерность $\left[\frac{g}{l}\right] = c^{-2}$, тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Зная, что $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тогда можно найти период: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Само уравнение принимает вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Итак, мы снова приходим к уравнению гармонического осциллографа **(2)**, а значит колебания математического маятника являются гармоническими.



1.) Основное уравнение динамики для АТТ: $I\cdot\beta_z = M_z$. Направим ось Z за доску.

2.) Пусть маятник движется в данный момент (см. рис.) - влево.

3.) Момент силы направлен на нас $\left(M_z = \left[\vec{l}\times m\vec{g}\right]\right)$, значит, $M_z < 0$.

4.) Тогда $\beta_z < 0$ – движение ТТ – замедленное.

5.) АТТ – МТ, следовательно, $I = ml^2$.

6.) Угловое ускорение равно второй производной углового перемещения по *dt*: $\beta_z = \ddot{\alpha}$.

7.) $M_z = -mgl\sin\alpha$.

8.) $\ddot{\alpha}\cdot ml^2 = -mgl\sin\alpha$.

9.) $\ddot{\alpha}\cdot = -\dfrac{g}{l}\sin\alpha$.

10.) $\ddot{\alpha}\cdot + \dfrac{g}{l}\sin\alpha = 0$.

11.). Рассматриваем только малые колебания.

12.) Вблизи окрестности нуля $\sin\alpha \approx \alpha$, следовательно,

$\ddot{\alpha}\cdot + \dfrac{g}{l}\alpha = 0$.

α – угловое перемещение (ТОЧНАЯ КООРДИНАТА).

III. Энергия малых колебаний (энергетическое описание гарм. колеб)

$$W = W_{пот} + W_{кин} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} .$$

Рассмотрим граничные положения системы:

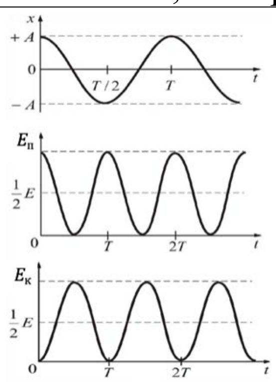
1.) $W_{пот(\max)} = \dfrac{k \cdot A^2}{2}$. Система выведена в крайнее (амплитудное) положение.

2.) $W_{кин(\max)} = \dfrac{m \cdot A^2 \cdot \omega_0^2}{2}$. Система проходит положение равновесия.

Проверим ЗСЭ: $\dfrac{k \cdot A^2}{2} = \dfrac{m \cdot A^2 \cdot \omega_0^2}{2}$

Упругая сила является консервативной, поэтому полная механическая энергия сохраняется.

Энергия системы, совершающей малые колебания, не зависит от времени. Такое возможно, если работа сил трения пренебрежимо мала.

	1. $W_{кин}$ и $W_{пот}$ изменяются в противофазе Энергия изменяется с удвоенной частотой

	2. Изменяются с частотой $2\omega_0$, то есть в 2 раза больше, чем частота колебаний.
	3.) Среднее значение за период колебаний обоих видов энергии равен $\frac{E}{2}$, (так как $\langle \sin^2\alpha \rangle = \langle \cos^2\alpha \rangle = \frac{1}{2}$).

§17. Затухающие и вынужденные механические колебания

I. Затухающие механические колебания

В реальной природе всегда действуют силы трения, поэтому реальные свободные колебания при этом будут затухающими. Со временем уменьшается их энергия и амплитуда. Кроме того, так как сила трения действует против возвращающей силы, то и частота затухающих колебаний должна быть меньше, чем у таких же свободных. В качестве сил трения рассмотрим так называемое «жидкое трение», то есть трение, величина которого зависит от скорости относительного движения трущихся объектов.

$F = -\beta v = -\beta\dot{x}$ **(6)**.

Где β - некий коэффициент трения (или коэффициент сопротивления).

1.) Запишем II закон Ньютона в этом случае:

$ma = -kx - \beta v$ или $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{\beta}{m}\dot{x}$.

2.) Обозначим : $\gamma = \frac{\beta}{2m}$ (коэффициент затухания); $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$;

4.) Тогда уравнение колебаний будет иметь вид:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ **(3)**.

5.) Решение этого уравнения по-прежнему будет иметь периодический характер, но ясно, что амплитуда колебаний будет убывать. Ищем решение в виде

$x(t) \ = x_0 e^{-\gamma t} cos\omega t$ **(4)**.

После подстановки (4) в (3) решаем уравнение и получим (без вывода):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \ .$$

8.) Таким образом, решение уравнения для затухающих колебаний будет выглядеть так:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right) t \ \textbf{(5)}.$$

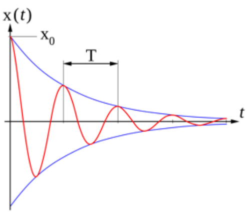
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ (ω зависит от γ)

Из этого вытекает следствие: частота затухающих колебаний меньше частоты свободных колебаний.

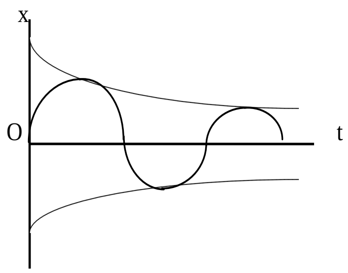
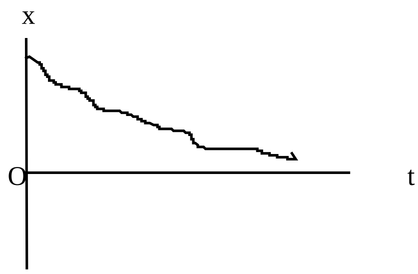
9.) Энергия затухающих колебаний уменьшается со временем. Она диссипирует и переходит в тепло.

Величина γ называется коэффициентом затухания.

На рисунке надо читать $e^{-\gamma t}$

	Логарифмический декремент затухания: $\lambda = \ln \dfrac{A}{A(t+T)} = \gamma T$

На рисунках изображены графики зависимости смещения тела из положения равновесия.

при малых величинах декремента затухания	при больших величинах декремента затухания
	

При очень большом трении в системе колебаний вообще не будет, а будет более или менее плавное приближение колебательной системы к положению устойчивого равновесия.

II. Вынужденные механические колебания

<u>Опр.</u> **<u>Вынужденные колебания</u>** – колебания, которые совершаются под влиянием внешних сил.

В данном случае будут изучаться механические колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Уравнение II закона Ньютона в этом случае примет вид:

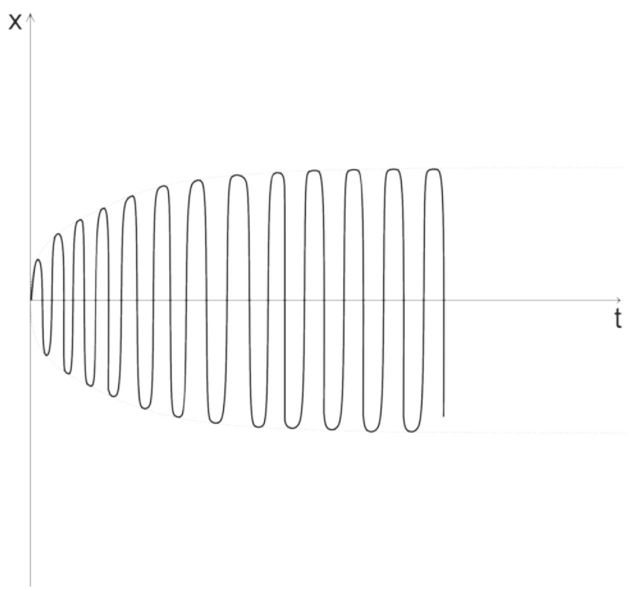
$ma = -kx - 2\gamma\, m\dot{x} + F_0 cos\omega t$ **(5)** или

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \dfrac{F_0}{m} cos\omega t$ **(6)**.

Примечание: в уравнениях ***(5)*** *и* ***(6)*** *как и для свободных колебаний снова выполнили замену:* $\gamma = \dfrac{\beta}{2m}$.

Процесс установления колебаний будет проходить так. Сначала в течение некоторого времени *t* будет происходить увеличение амплитуды колебаний (так называемый переходный процесс), а затем начнется установившийся процесс колебаний с постоянной амплитудой, зависящей от величины вынуждающей силы и ее частоты. Рассматривать будем **только** установившийся процесс, поэтому решение будем искать на частоте вынуждающей силы в виде: $x(t) = x_0 cos(\omega t + \varphi)$ **(7)**.

Рассмотрим график зависимости смещения частицы от времени.



Вынужденные колебания отстают по фазе от вынужденной силы на величину φ.

$$x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

При частотах, близких к собственной частоте колебаний системы, происходит резонанс вынужденных колебаний.

<u>**Опр.**</u> <u>**резонанс**</u> – резкое увеличение амплитуды. Тогда частоту принято называть **резонансной**.

Найдем значение резонансной частоты, продифференцировав амплитуду по частоте, и приравняв производную к нулю.

Продифференцируем $\frac{dx_0}{d\omega}$ $\quad \dfrac{x_0}{d\omega}=\dfrac{\dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}}{d\omega}=0$.

1. Константы $-F$ и m не равны нулю, следовательно, их можно опустить:

$$\frac{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\omega}=0;$$

$$\frac{2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cdot 2\omega+8\gamma^2\omega}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

2. Знаменатель не равен нулю по опр., следовательно,

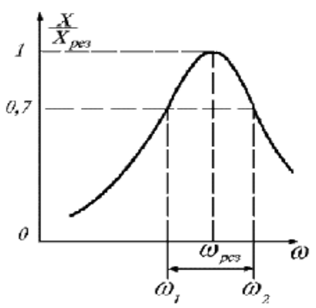
$$2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cdot 2\omega+8\gamma^2\omega=0;$$

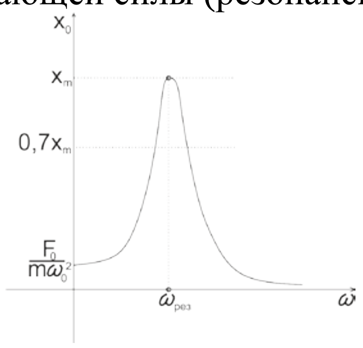
$$\left(\omega^2-\omega_0^2\right)+2\gamma^2=0;$$

$$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2;$$

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$ **(8)**.

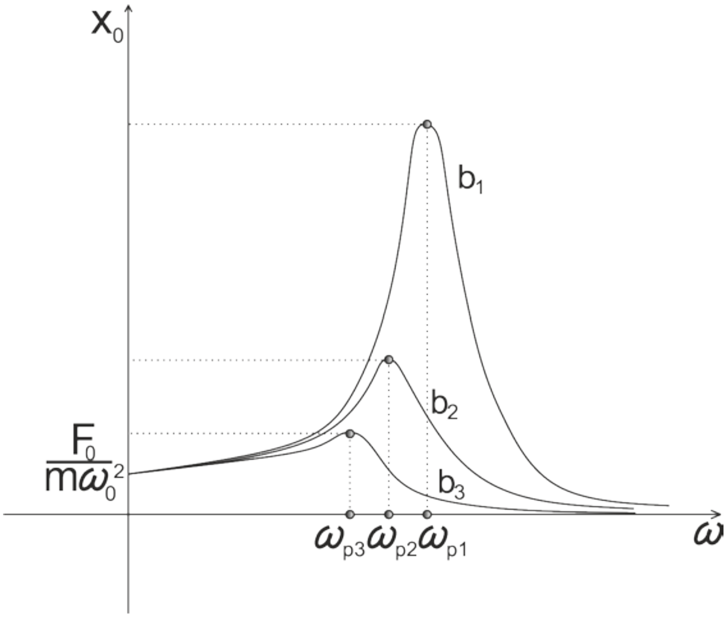
Построим график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы (резонансная кривая) $x_0 = f(\omega)$.





$\Delta\omega$ – полоса пропускания, ширина области, на высоте $0{,}7x_0$

Вспомним замену: $\gamma = \dfrac{\beta}{2m}$. Давайте рассмотрим зависимость графиков функций от коэффициента β.



$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$.

Чем меньше коэффициент β, тем больше $x_{\max}$, и левая ветка ведет себя круче.

III. Добротность

Важной характеристикой колебательной системы является добротность Q. Она характеризует ширину резонансной кривой. Чем больше добротность, тем уже резонансная кривая.

Добротность: $Q = \dfrac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}$ **(9)**.

Под Δω понимается ширина области, где амплитуда колебаний не меньше 0.7 от амплитуды колебаний при резонансе (см. на графике).

Пример: Чем больше добротность, тем лучше приемник (колебательный контур) выделяет сигналы из эфира.