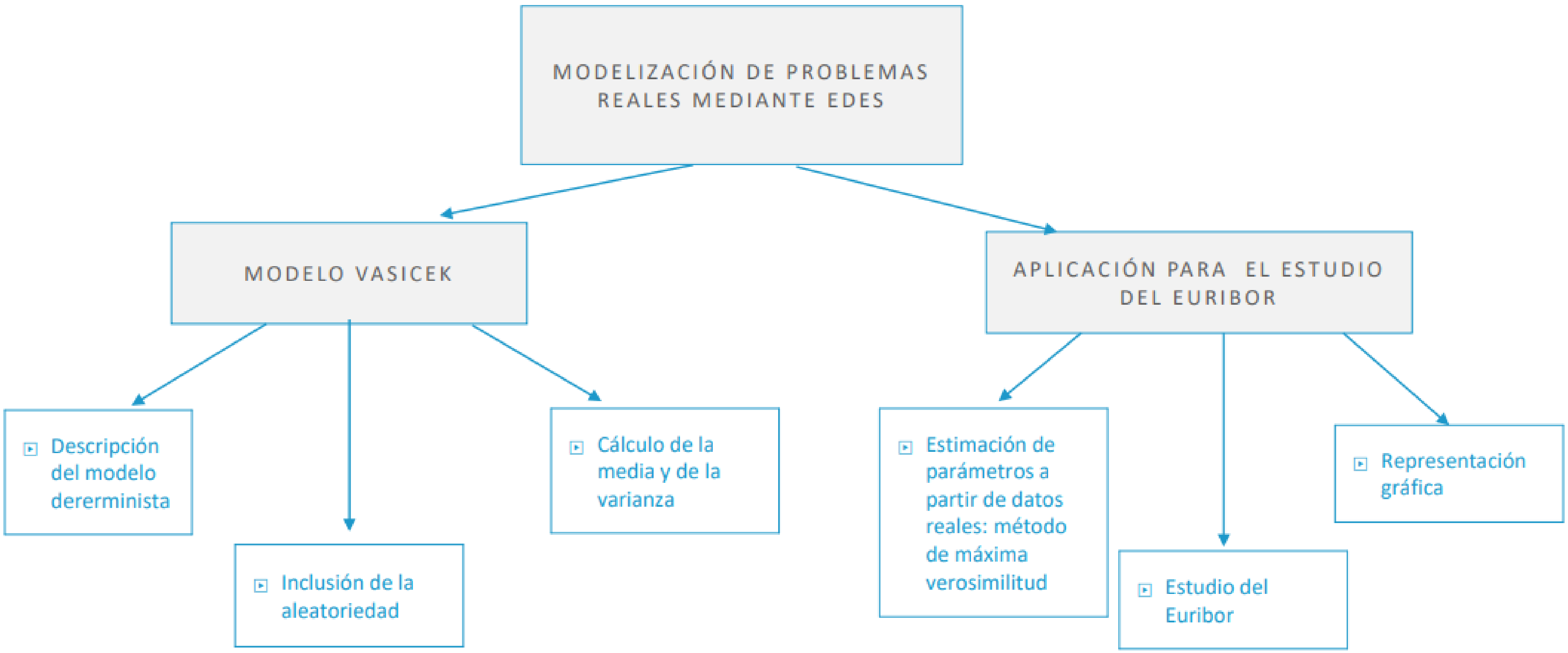
# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

→ Dra. Noèlia Viles Cuadros

## Sesión 30/06/24

# Tema 10
## Contenidos - Esquema



# Objetivos

- Descripción y motivación del modelo de Vasicek desde un punto de vista determinista
- Aleatorización del modelo de Vasicek.
- **Resolución, cálculo de la media y de la varianza utilizando sin el lema de Itô (Tema 9).**
- **Métodos de estimación de parámetros. Método de máxima verosimilitud.**

# Modelo de Vasicek con incertidumbre
## Cálculo de la Media y la Varianza sin el lema de Itô

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha y} \mathrm{d}W(y),$$

como $e^{\alpha y}$ es determinista, tenemos que la integral estocástica está definida en el sentido de Riemann-Stieljes. Se sabe que si $h(s) = e^{\alpha y}$ es una función determinista, entonces $\int_0^t h(s)\mathrm{d}W(s) \sim \mathrm{N}\left(0; \int_0^t h(s)^2 \mathrm{d}s\right)$. Aplicando este resultado en nuestro caso tenemos que

$$\int_0^t e^{\alpha y} \mathrm{d}W(y) \sim \mathrm{N}\left(0; \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right),$$

ya que

$$\int_0^t h(s)^2 \mathrm{d}s = \int_0^t e^{2\alpha y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{2\alpha y}\right]_{y=0}^{y=t} = \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}.$$

# Modelo de Vasicek con incertidumbre
## Cálculo de la Media y la Varianza sin el lema de Itô

También sabemos que $W(t) \sim \mathrm{N}(0;t)$, por tanto,

$$\int_0^t e^{\alpha\, y} \mathrm{d}W(y) \sim W\left(\frac{e^{2\alpha\, t}-1}{2\alpha}\right).$$

Utilizando la propiedad de $\frac{1}{2}$-autosemejanza del proceso de Wiener introducida en el Tema 3, se tiene que

$$\int_0^t e^{\alpha\, y} \mathrm{d}W(y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} W\left(e^{2\alpha\, t}-1\right) \sim \frac{\sqrt{e^{2\alpha\, t}-1}}{\sqrt{2\alpha}} Z,$$

donde $Z \sim \mathrm{N}(0;1)$. Por tanto,

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t}\sqrt{e^{2\alpha\, t}-1}}{\sqrt{2\alpha}} Z.$$

# Modelo de Vasicek con incertidumbre

## Cálculo de la Media y la Varianza  sin el lema de Itô

Consecuentemente, se tiene que

$$r(t) \sim \mathsf{N}\left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \sigma^2 e^{-2\alpha t}\frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right),$$

que simplificando queda,

$$r(t) \sim \mathsf{N}\left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right).$$

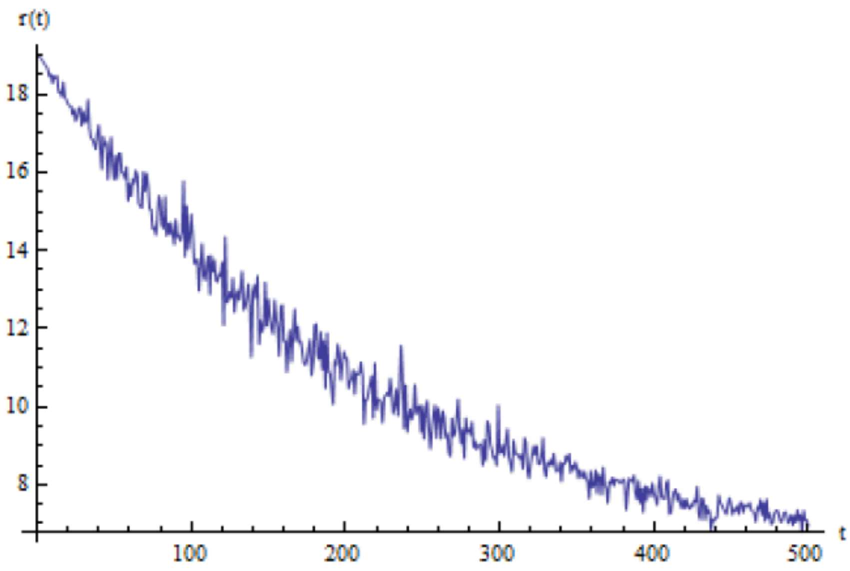



Figura 3: Representación gráfica de $r(t)$.

# Estimación de parámetros

## Método de máxima verosimilitud

Dados unos valores de los parámetros se ha simulado r(t). Para conocer y predecir el valor futuro del Euribor utilizando el modelo de Vasicek es necesario estimar los parámetros del modelo ($\alpha$, $r_e$, $\sigma$ ) de tal manera que las trayectorias resultantes representen los datos.

Existen diversos métodos de estimación de parámetros como el método de momentos, el método no paramétrico o el método de máxima verosimilitud. Como su nombre bien indica consiste en maximizar una función que se denomina función de verosimilitud.

Para poder estimar los parámetros del modelo ($\alpha$, $r_e$, $\sigma$ ) , es necesario partir de datos reales del Euribor. Se ha considerado una muestra de 134 valores que corresponden a la tasa del interes de Euribor mensual desde el 2 de Enero del 2013 al 11 de Julio del 2013. Estos datos han sido obtenidos de (EMMI, 2016).

# Estimación de parámetros
## Método de máxima verosimilitud

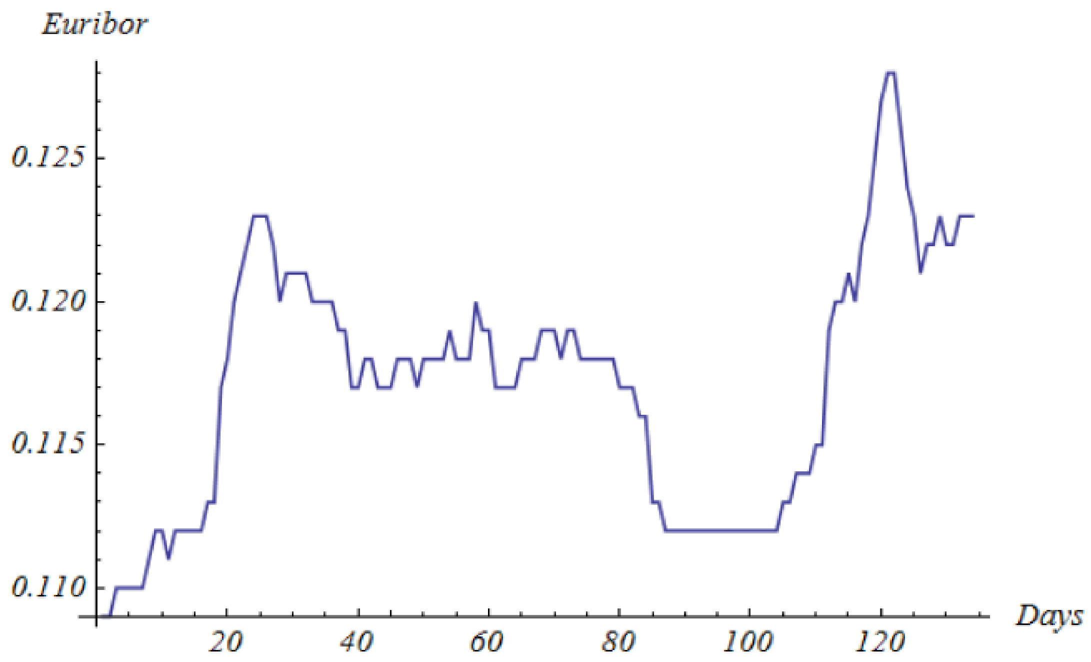



Figura 4: Tasas de interés del Euribor mensuales desde el 2 de enero del 2013 al 11 de julio del 2013.

# Estimación de parámetros
## Método de máxima verosimilitud

Sea $\mathcal{S} = \{r_0, r_1, \dots, r_N\}$ una muestra de las tasas de interés correspondiente a los tiempos $t_0, t_0+\Delta t, \dots, t_0+N\Delta t$, $\Delta t > 0$, respectivamente. Por la ley de probabilidad total tenemos que la función de densidad conjunta viene dada por

$$p(r_0, \dots, r_N; \alpha, r_e, \sigma) = p(r_0; \vec{\theta})\, p(r_1|r_0; \vec{\theta})\, p(r_2|r_0, r_1; \vec{\theta}) \cdots p(r_N|r_0, \dots, r_N; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} = (\alpha, r_e, \sigma), \tag{12}$$

donde $r_i$ representa los datos reales, en nuestro caso los mostrados en la Figura 4, $r(t_i)$ es la estimación del modelo para cada $0 \leq i \leq N$, y $\vec{\theta} = (r_e, \alpha, \sigma)$ denota el vector paramétrico que debe ser estimado. Asumiendo que nuestros datos son inde-

# Estimación de parámetros
## Método de máxima verosimilitud

Sea $\mathcal{S} = \{r_0, r_1, \ldots, r_N\}$ una muestra de las tasas de interés correspondiente a los tiempos $t_0, t_0+\Delta t, \ldots, t_0+N\Delta t$, $\Delta t > 0$, respectivamente. Por la ley de probabilidad total tenemos que la función de densidad conjunta viene dada por

$$p(r_0, \ldots, r_N; \alpha, r_e, \sigma) = p(r_0; \vec{\theta})\, p(r_1|r_0; \vec{\theta})\, p(r_2|r_0, r_1; \vec{\theta}) \cdots p(r_N|r_0, \ldots, r_N; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} = (\alpha, r_e, \sigma), \tag{12}$$

donde $r_i$ representa los datos reales, en nuestro caso los mostrados en la Figura 4, $r(t_i)$ es la estimación del modelo para cada $0 \leq i \leq N$, y $\vec{\theta} = (r_e, \alpha, \sigma)$ denota el vector paramétrico que debe ser estimado. Asumiendo que nuestros datos son independientes e idénticamente distribuidos. Podemos escribir (12) como

$$\begin{aligned} p(r_0,\ldots,r_N;\alpha,r_e,\sigma) &= p(r_0)\,p(r_1|r_0;\vec{\theta})\,p(r_2|r_1;\vec{\theta})\cdots p(r_N|r_{N-1};\vec{\theta}) \\ &= p(r_0)\prod_{i=1}^{N} p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta}). \end{aligned}$$

Se define la función de verosimilitud como

$$l(\vec{\theta};r_0,\ldots,r_N) = p(r_0)\prod_{i=1}^{N} p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta}), \quad \text{donde} \quad \vec{\theta} = (r_e,\alpha,\sigma). \tag{13}$$

Nuestro objetivo es maximizar $l(\vec{\theta})$ para obtener la mejor estimación de parámetros. Desde un punto de vista numérico, es más conveniente trabajar con la siguiente función objetivo equivalente,

$$\min_{\vec{\theta}\in\mathbb{R}^3} L(\vec{\theta};r_0,\ldots,r_N), \quad \text{donde} \quad L(\vec{\theta};r_0,\ldots,r_N) = -\ln\left(l(\vec{\theta};r_0,\ldots,r_N)\right). \tag{14}$$

# Estimación de parámetros
## Método de máxima verosimilitud

Para calcular la expresión de la función de verosimilitud de $r_i$ dado $r_{i-1}$, para $1 \leq i \leq N$, es importante saber que de la expresión (11), se tiene que

$$r_i|r_{i-1} \sim \mathrm{N}\left(r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}; \frac{\sigma^2}{2\,\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha\,\Delta t}\right)\right), \quad \Delta t = t_i - t_{i-1}. \qquad (15)$$

Esta expresión se obtiene representando el desarrollo anterior (11) que se hizo sobre el intervalo $[0,t]$, pero ahora en el intervalo $[t_{i-1}, t_i] = [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$. Nótese que la aproximación de la VA $r_i|r_{i-1}$ puede ser construida utilizando un método numérico estocástico como el de Euler Maruyama [1]

$$r_i \approx r_{i-1} + \alpha(r_e - r_{i-1})\Delta t + \sigma\left(W_i - W_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

siendo

$$W_i - W_{i-1} = W(t_i) - W(t_{i-1}) = W(i\,\Delta t) - W((i-1)\Delta t) \sim \mathrm{N}(0; \Delta t).$$

# Estimación de parámetros
## Método de Euler Maruyama

[1]El método de Euler Maruyama consiste en dada la ecuación

$$\mathrm{d}X(t) = f(t, X)\mathrm{d}t + g(t, X)\mathrm{d}W(t) \quad \text{con} \quad X(0) = X_0 \quad \text{and} \quad 0 \leq t \leq T,$$

discretizar el intervalo $[0, T]$ en incrementos $\tau_j = j\Delta t, \ j = 0, 1, \ldots, L$ siendo $\Delta t = T/L$ con $L$ un entero positivo fijo. El esquema numérico se denota mediante $X_j$, y viene definido por

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})),$$

con $j = 1, 2, \ldots, L$. Como sabemos $(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})) \sim \mathrm{N}(0; \Delta t)$, podemos simular la solución

# Estimación de parámetros
## Método de máxima verosimilitud

Por tanto la función de densidad de probabilidad de la VA $r_i$ con $r_{i-1}$ conocido viene dada por

$$p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{\left(r_i-(r_e+(r_{i-1}-r_e)e^{-\alpha\Delta t})\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})}}, \quad 1 \le i \le N. \qquad (16)$$

Sustituyendo esta expresión en (14), se tiene la siguiente representación para la función de verosimilitud asociada a la muestra $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
L(\vec{\theta}; r_0,\ldots,r_N) &= -\ln\left(l(\vec{\theta}; r_0,\ldots,r_N)\right) = -\ln\left(p(r_0)\prod_{i=1}^{N} p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta})\right) \\
&= -\ln(1) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{\left(r_i-(r_e+(r_{i-1}-r_e)e^{-\alpha\Delta t})\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})}}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2}\ln\left(\pi\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})\right) - \frac{\left(r_i-(r_e+(r_{i-1}-r_e)e^{-\alpha\Delta t})\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\ln\left(\pi\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})\right) + \frac{\left(r_i-(r_e+(r_{i-1}-r_e)e^{-\alpha\Delta t})\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})} \\
&= \frac{N}{2}\ln\left(\pi\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(r_i-(r_e+(r_{i-1}-r_e)e^{-\alpha\Delta t})\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-2\alpha\Delta t})}.
\end{aligned}$$

# Estimación de parámetros
## Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

A partir de la expresión (17), podemos obtener los parámetros $\alpha, r_e, \sigma$ que minimiza la función $L(\vec{\theta}; r_0, \ldots, r_N)$. Estos cálculos se pueden llevar a cabo utilizando el software Mathematica. Los resultados se muestran en la Tabla 2.

| Parametros | Método de máxima verosimilitud |
|---|---|
| $\alpha$ | 0.032227 |
| $r_e$ | 0.120379 |
| $\sigma$ | 0.000965 |

Tabla 2: Parámetros estimados del modelo de Vasicek utilizando el método de máxima verosimilitud utilizando las tasas de interés de Euribor mensuales desde el 2 de enero del 2013 al 11 de julio del 2013.

# Estimación de parámetros
## Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

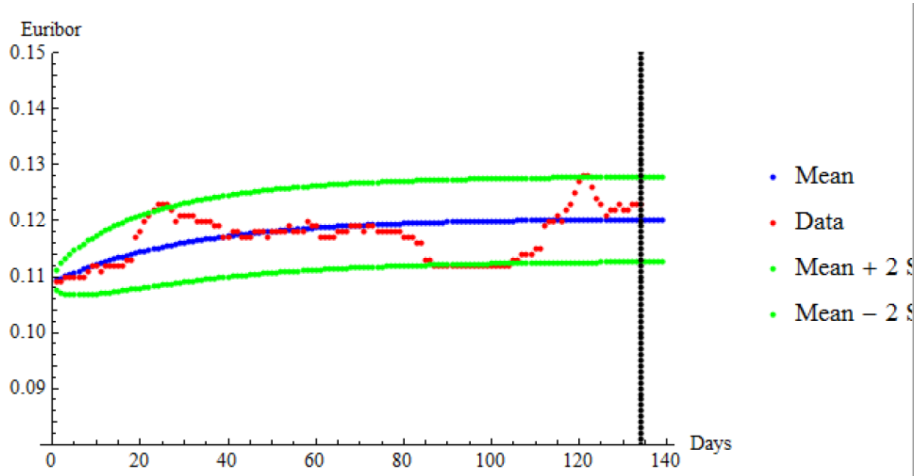



Figura 5: Comparativa gráfica entre la salida del modelo y los datos reales. Las líneas verdes representan el intervalo de confianza. Las líneas azules la media y los puntos rojos los datos reales del Eurobor desde el 2 de Enero del 2013 hasta el 11 de Julio del 2013.

Se muestra una comparativa de los datos reales con la salida del modelo.

Los puntos rojos representan los datos mostrados en la Figura 4, la linea azul representa la media obtenida en la expresión (7), las lineas verdes representan el intervalo de confianza que viene definido como la media mas/menos dos desviaciones típicas.

# Estimación de parámetros

## Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

Para poder tomar decisiones futuras es necesario predecir el valor del Euribor en los próximos días. Realizando el mismo procedimiento que se ha utilizado para dibujar las gráficas, pero considerando más instantes temporales, podremos predecir el valor del Euribor.

| Fecha | Predicción puntual | 95 % Intervalo de confianza |
|---|---|---|
| 12 Jul 2013 | 0.120228 | [0.112623, 0.127832] |
| 15 Jul 2013 | 0.120232 | [0.112628, 0.127837] |
| 16 Jul 2013 | 0.120237 | [0.112632, 0.127842] |
| 17 Jul 2013 | 0.120241 | [0.112637, 0.127846] |
| 18 Jul 2013 | 0.120246 | [0.112641, 0.127851] |

Tabla 3: Predicciones utilizando el modelo de Vasicek en los próximos días utilizando el método de máxima verosimilitud.

1. Sea $X(t) = Acos(t) + 1$, donde $A$ y $B$ son variables aleatorias no correlacionadas, con $E[A] = 1$ y $V[A] = 0.5$. Estudiar la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de X(t).

2. Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \; X_0 = x_0,$$

para $t > 0$, con $\sigma > 0$ y $\alpha < 0$. Calcula la solución de la ecuación diferencial estocástica y su media.

3. Consideramos el siguiente PVIA:

$$X_t' = -bX_t^2, X(0) = X_0,$$

donde $a > 0$, $t \geq 0$ y $X_0$ es una VA continua con FDP $f_{X_0}(x_0)$. Calcula la 1-FDP utilizando la fórmula de Liouville-Gibbs.

4. Consideramos el siguiente proceso estocástico

$$X_t = \exp\left(-W_t + \frac{1}{2}t\right), \quad t \geq 0.$$

Calcula la covarianza de $X_t$.

5. Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = 2X_t dt + 0.5X_t dW_t, \; X_0 = x_0,$$

para $t > 0$. Calcula la solución de la ecuación diferencial estocástica.

*Indicación: Usa Lema de Ito y f(x)=ln(x).*

6. Consideramos el siguiente PVIA:

$$X_t' = -X_t^2, X(0) = X_0,$$

donde $t \geq 0$ y $X_0$ es una VA continua con FDP $f_{X_0}(x_0)$. Calcula la 1-FDP utilizando la fórmula de Liouville-Gibbs.

# Corrección Actividad 3
## Ejercicio 1

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales estocás-tico:

$$dX(t) = \frac{X(t)}{2}dt + X(t)dW(t), X(0) = 1$$

Se pide calcular la **solución PE** utilizando el lema de Itô, conside-rando la función $f(t,x) = e^x$.

# Corrección Actividad 3

## Ejercicio 1

# Corrección Actividad 3

## Ejercicio 2

Supongamos que $\{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener con $W(0)=0$ y supongamos que el proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con $X(0)=a>0$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \frac{1}{X(t)} dt + X(t) dW(t)$$

Si $f(t,x) = t^2 x^2$, determina $df(t,X(t))$.

# Corrección Actividad 3

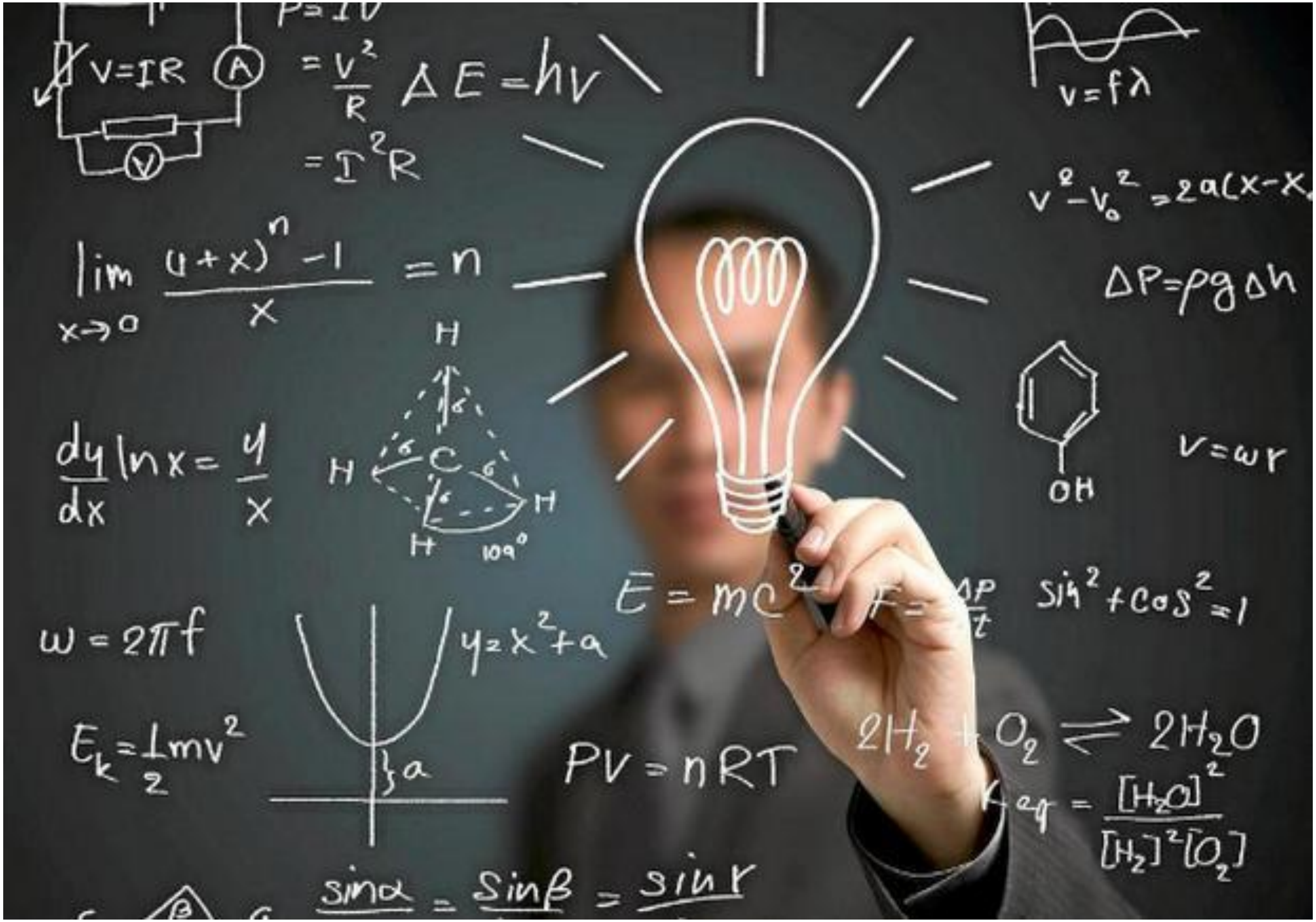
## Ejercicio 2

# Principales errores

No se aplica correctamente el Lema de Itô

- En lugar de $f(t,X(t))$ se pone $X(t)$
- Se trata $X(t)$ y $x$ como dos términos distintos.
- Falta un cuadrado a uno de los coeficientes del Lema de Itô

# ¿Dudas / Aportaciones?



unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net