Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 1. Preliminares: VA

Índice

Contenidos

- Introducción y objetivos.
- Variables aleatorias discretas.
- Variables aleatorias continuas.
- Momentos de una variable aleatoria.
- Variables aleatorias truncadas.
- Método de transformación de variables para una VA
- Bibliografía.

Tema 1

Contenidos - Esquema

Variables aleatorias

Discretas

- Función de masa de probabilidad
- Función de distribución

Continuas

- Función de densidad de probabilidad
- Función de distribución

- Caracterización: momentos v.a.s
- Método de transformación de v.a.s

Variables Aleatorias (VA)

Definición y tipos

Definición 1: Variable Aleatoria

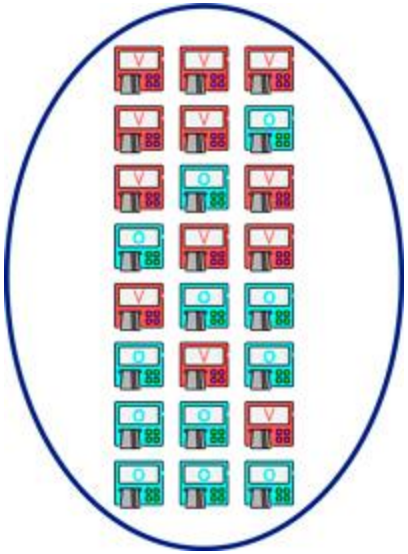
Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una *variable aleatoria* (VA) es una función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ asociada a un suceso aleatorio.

- *Discretas:* toman un número finito o infinito numerable de valores.
- *Continuas:* toman cualquier valor real y por tanto un número infinito no numrable de posibles valores.

VA discretas

Ejemplos

Ejemplo 1: En un banco hay 3 cajeros automáticos. Vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en ir al banco a una hora al azar del día y ver qué cajeros están ocupados y qué cajeros están vacíos.



Ejemplo 2: Se quiere describir mediante una VA, X, el número de caras obtenidas al lanzar dos monedas.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{c, c\} \longrightarrow 2,$$

$$\{c, x\} \longrightarrow 1,$$

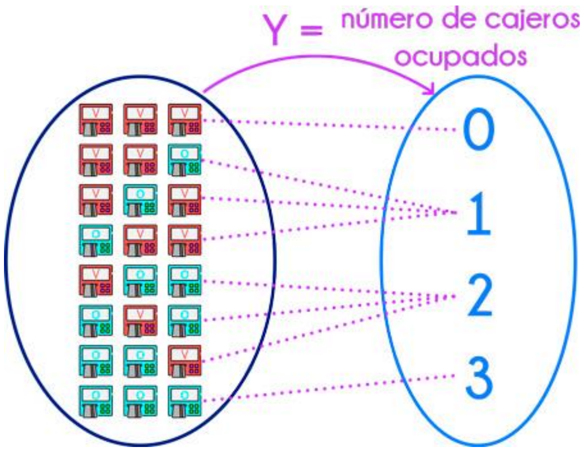
$$\{x, c\} \longrightarrow 1,$$

$$\{x, x\} \longrightarrow 0.$$

VA discretas

Ejemplos

Ejemplo 1: En un banco hay 3 cajeros automáticos. Vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en ir al banco a una hora al azar del día y ver qué cajeros están ocupados y qué cajeros están vacíos.



Ejemplo 2: Se quiere describir mediante una VA, X, el número de caras obtenidas al lanzar dos monedas.

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\{c, c\} &\longrightarrow 2, \\
\{c, x\} &\longrightarrow 1, \\
\{x, c\} &\longrightarrow 1, \\
\{x, x\} &\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

VA discretas

Función de masa de probabilidad

Definición 2: Función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una VA discreta que toma los valores $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. La *función de masa de probabilidad* de X es una función, $p_X : \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to [0, 1]$, que determina la probabilidad de que ocurra cada valor de X, es decir

$$p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq \infty.$$

Para que la *función de masa de probabilidad* esté bien definida, se debe verificar $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

VA discretas

Función de masa de probabilidad - Ejemplo 2

Si

$$X = \{\text{ número de caras obtenidas al lanzar dos monedas }\},$$

por el Ejemplo 1, X toma valores 0, 1 y 2.

Recordemos la Regla de Laplace que define la probabilidad de un suceso:

$$\mathbb{P}(\text{Suceso}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}.$$

Aplicándola tenemos que

$$p_1 = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \qquad p_2 = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4}, \qquad p_3 = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

VA discretas

Función de distribución

Definición 3: Función de distribución de una variable aleatoria discreta

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una VA discreta que toma valores x_i con una probabilidad p_i, $(1 \leq i \leq \infty)$. La *función de distribución* de X es una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ que determina la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que un valor dado, $x \in \mathbb{R}$, es decir

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq x}}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq x}}^{\infty} p_i.$$

VA discretas

Función de distribución - Ejemplo 2

- $F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$.
- $F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
- $F(1.5) = \mathbb{P}(X \leq 1.5) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
- $F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.
- $F(3) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = 1$.

Variables Aleatorias (VA)

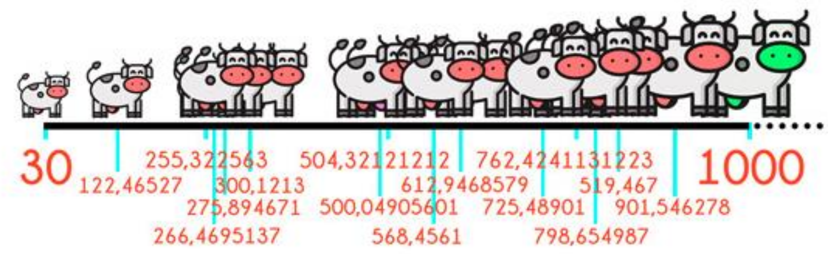
Definición y tipos

Definición 1: Variable Aleatoria

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una *variable aleatoria* (VA) es una función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ asociada a un suceso aleatorio.

- *Discretas:* toman un número finito o infinito numerable de valores.
- *Continuas:* toman cualquier valor real y por tanto un número infinito no numrable de posibles valores.

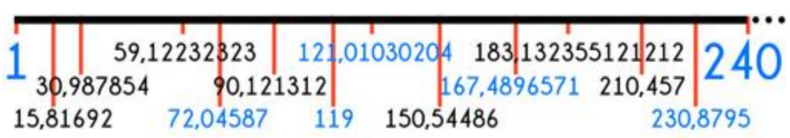
Ejemplo 3: En el caserío de Juanjo estudiamos el peso de sus vacas.



X = peso de una vaca en el caserío de Juanjo en kg

Rango: 30 <=x<=1000

Ejemplo 4: Estudiamos el tiempo de atención a los clientes del banco (en segundos).



X= el tiempo de atención a los clientes d el banco (en segundos).

Rango: 1 <=x<=240

VA continuas

Función de densidad de probabilidad

Definición 4: Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una VA continua. Denotamos mediante $\mathcal{D}(X)$ el *dominio de* X, que determina el espacio (real) donde está definida la VA. La *función de densidad de probabilidad* de X es una función $f_X : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- $\int_{\mathcal{D}(X)} f_X(x).\mathrm{d}x = 1$.

P(X=a) = 0, para todo a valor real

VA continuas

Función de densidad de probabilidad

Como se ha mencionado antes, la probabilidad de que X pertenezca a un intervalo $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(X)$ se define como

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x.$$

VA continuas

Función de densidad - Ejemplo

Ejemplo: Consideramos X una VA continua que define la estatura de los individuos de una población dada. Sabemos que la altura de una población varía entre 1.40 y 2.30 metros, por tanto D(X) = [1.40, 2.30].

Función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2.3-1.40}, & x \in \mathcal{D}(X), \\ 0, & x \notin \mathcal{D}(X). \end{cases}$$

P(1.50<X<2):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[1.50 \leq X \leq 2.00] &= \int_{1.50}^{2.00} f_X(x)\mathsf{d}x = \int_{1.50}^{2.00} \frac{1}{2.3-1.40}\mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{2.3-1.40}\int_{1.50}^{2.00} \mathsf{d}x = \frac{1}{2.3-1.40}(2.00-1.50) = \frac{0.5}{0.90} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

VA continuas

Función de distribución

Definición 5: Función de distribución de una variable aleatoria continua

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una VA continua con dominio $\mathcal{D}(X)$, siendo f_X su *función de densidad de probabilidad* asociada. La *función de distribución* de X es una función continua, $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, que determina la probabilidad de que X sea menor o igual que un valor dado $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\mathrm{d}s.$$

Es importante denotar que la función de distribución siempre existe.

Función de distribución - Ejemplo

Ejemplo: Consideramos X una VA continua que define la estatura de los individuos de una población dada. Sabemos que la altura de una población varía entre 1.40 y 2.30 metros, por tanto D(X) = [1.40, 2.30].

Función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2.3-1.40}, & x \in \mathcal{D}(X), \\ 0, & x \notin \mathcal{D}(X). \end{cases}$$

Función de distribución:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbb{P}[1.40 \leq X \leq x] &= \int_{1.40}^{x} f_X(s)\mathrm{d}s = \int_{1.50}^{x} \frac{1}{2.3-1.40}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2.3-1.40}\int_{1.40}^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2.3-1.40}(x-1.40)\,. \end{aligned}$$

Momentos de una VA
Esperanza matemática o media de una VA

La *esperanza matemática* (o media) de una VA, X, describe su valor medio. Se denota mediante $\mathbb{E}[X]$ y se calcula de la siguiente manera:

- X VA discreta, con función de probabilidad de masa p_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

- X VA continua, con función de densidad f_X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{D}(X)} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Esperanza de una VA
Propiedades

- La esperanza de una VA constante es constante, i.e. si $X = C \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[C] = C$.
- La esperanza es un operador lineal, es decir, si X, Y son VAs, y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Esperanza de una VA
Propiedades

- Si $g(X)$ es una transformación de la VA X, entonces
  - Si X es una VA discreta

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i.$$

  - Si X es una VA continua

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathcal{D}(X)} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Momentos de una VA

Varianza matemática de una VA

Definición 7: Varianza matemática de una VA

La *varianza matemática* (o varianza) de una VA, X, proporciona una medida de su dispersión respecto a su media. Se denota mediante $\mathbb{V}[X]$ y se calcula a través del operador esperanza de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \tag{4}$$

Momentos de una VA
Varianza matemática de una VA

Proposición 1

Sea X una VA, entonces

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2. \tag{5}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.
\end{aligned}$$

Varianza de una VA
Propiedades

- La varianza de una VA, X, es no negativa, i.e. $\mathbb{V}[X] \geq 0$.
- La varianza de una VA constante, $X = C \in \mathbb{R}$, es 0, i.e. $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[C] = 0$.
- Si X es una VA y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{V}[aX] = a^2\mathbb{V}[X]$.

Momentos de una VA
Definición

Definición 8: Momentos de una variable aleatoria

El *momento respecto del origen* de orden k, $k = 0, 1, \ldots, \infty$, de una VA, X, viene definido como la esperanza de X^k, i.e.

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i,$$

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = \int_{\mathcal{D}(X)} x^k f_X(x) \mathrm{d}x.$$

El *momento respecto de la media* de orden k, $k = 0, 1, \ldots, \infty$, de una VA, X, que tiene media, $\mathbb{E}[X]$, viene definido como

$$\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[X])^k p_i,$$

$$\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k] = \int_{\mathcal{D}(X)} (x - \mathbb{E}[X])^k f_X(x) \mathrm{d}x.$$

¿Quién es α_1 y μ_2 ?

VA de orden k
Definición

Definición 9: Variable aleatoria de orden k

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una VA y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que X es una *VA de orden* k (k-VA) si y solo si $\mathbb{E}[X^k] < \infty$.

VA truncada

Definición

Definición 10: Variable aleatoria truncada

Sea X una VA y sea $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(X)$. Una *VA truncada*, $\hat{X}$, sobre X en el dominio $[a, b]$ es una VA que solo toma valores en el intervalo $[a, b]$ y cuya distribución de probabilidad se obtiene normalizando la distribución de X.

VA truncada
Funciones

- Si X, y consecuentemente $\hat{X}$, es una VA discreta con función de masa de probabilidad, p_X, y función de distribución, F_X, la función de masa de probabilidad, $p_{\hat{X}}$, de la VA truncada $\hat{X}$ viene dada por

$$p_{\hat{X}}(x) := \frac{\mathbb{P}[\hat{X} = x]}{\mathbb{P}[\hat{X} \in [a,b]]} = \frac{p_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)}, \quad x \in [a,b].$$

- Si X, y consecuentemente $\hat{X}$, es una VA continua con función de densidad de probabilidad f_X y función de distribución F_X, la función de densidad de probabilidad, $f_{\hat{X}}$, de la VA truncada $\hat{X}$ viene dada por

$$f_{\hat{X}}(x) = \frac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} = \frac{f_X(x)}{\int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x}, \quad x \in [a,b]. \tag{6}$$

Método de transformación de variables

Teorema 1: Teorema transformación para variables aleatorias

Sea X una VA continua con función de densidad de probabilidad, f_X, conocida. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona de modo que la derivada de su inversa es continua, i.e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)$ continua. Sea $Y = g(X)$ una VA definida a través de la transformación g. Entonces la función de densidad de probabilidad de Y, denotada por f_Y, viene dada por

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) \right|, \quad y \in \mathcal{D}(Y).$$

Método de transformación de variables
Ejemplo

Sea X una variable aleatoria Gaussiana con media μ y desviación típica σ, i.e. $N(\mu, \sigma^2)$. Consideramos la siguiente transformación $Y = g(X) = e^X$.

Dado que $\mathcal{D}(X) =]-\infty, +\infty[$, entonces $\mathcal{D}(Y) =]0, +\infty[$.

La transformación $y = g(x) = e^x$ es una función monótona creciente, por tanto biyectiva. Su inversa es $x = g^{-1}(y) = \log(y)$. La derivada de su inversa viene dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = \frac{1}{y},$$

que es continua para todo $y > 0$.

Método de transformación de variables
Ejemplo

Sabiendo que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

y aplicando el Teorema 1, se tiene que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

que efectivamente corresponde a la función de densidad de una VA log-normal.

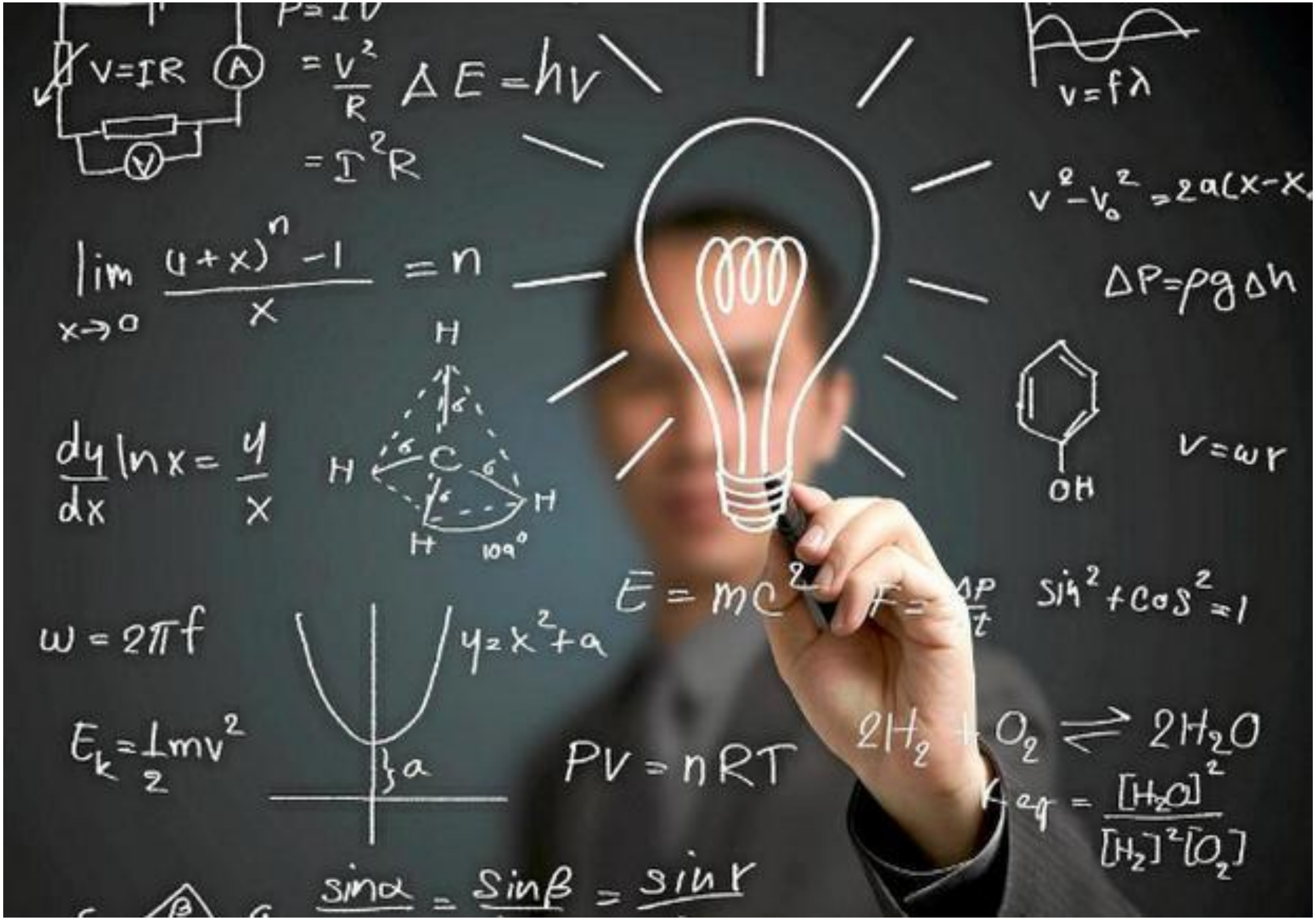
Bibliografía

Calatayud Gregori, J., Cortés López, J. C., Jornet Sanz, M., and Villanueva Micó, R. J. (2019). An Introduction to Random Variables, Random Vectors and Stochastic Processes. *Colección Académica*.

Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Cengage Learning.

Degroot, M. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Addison-Wesley Iberoamericana.

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net