Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 4: Valoración de opciones financieras con árboles binomiales (Parte II).

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Árboles binomiales multi-periodo
- Prima de una opción europea con árboles multi-periodo
- Referencias bibliográficas

Introducción y objetivos

Hay veces que nos interesa poder conocer el comportamiento del activo en varios peridos consecutivos. En este tema nos centraremos en árboles multi-periodo y los aplicaremos para determinar el precio de la prima de una opción sobre un subyacente.

Los objetivos a tratar son:

- Definición de árboles multi-periodo y simplificación
- Cálculo del precio de la prima de una opción en árboles multi-periodo

Árboles binomiales multi-periodo

Consideramos el siguiente árbol mono-periodo para un periodo $t = 1$.

$$
\begin{tikzcd}
t = 0 & t = 1 \\
 & S_1 = uS_0 \\
S_0 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & S_1 = dS_0
\end{tikzcd}
$$

Donde $0 < q < 1$ indica la probabilidad de que el subyacente tome el valor optimista S_u y $1 - q$ la probabilidad de que el subyacente tome el valor pesimista S_d. El valor u indica el factor optimista revalorización (si $u > 1$), es decir, al cabo de un periodo, el subyacente valdrá uS_0 en el mejor de los casos. La variable d indica el coeficiente de pesimista de devaluación si $(0 < d < 1)$, es decir, al cabo de un periodo el subyacente valdrá dS_0 en el peor de los casos.

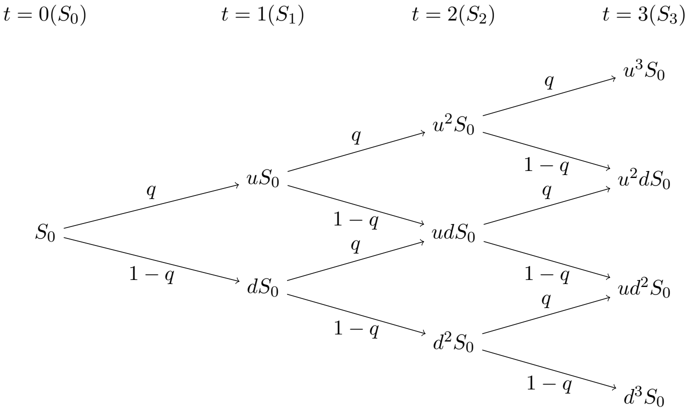
Árboles binomiales multi-periodo

Supongamos ahora que tenemos un segundo y tercer periodo periodo con el mismo comportamiento, es decir

- Desde un escenario favorable: $S_2 = uS_1 = u^2 S_0$ o $S_2 = dS_1 = udS_0$ con probabilidad q y $1 - q$.
- Desde un escenario desfavorable: $S_2 = uS_1 = udS_0$ o $S_2 = dS_1 = d^2 S_0$ con probabilidad q y $1 - q$.

Árboles binomiales multi-periodo

Continuamos de la misma manera para $t = 3$, de donde tenemos como resumen el siguiente árbol binario:



Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Definido y simplificado el concepto de árbol binomial con más de un periodo. Parece lógico preguntarse si sería posible poder calcular el precio de la prima de una opción en árboles multi-periodo.

Supongamos que tenemos una acción con precio inicial $S_0 = 100$, sobre la cual construiremos una opción, y precio de ejercicio $K = 105$.

Supongamos que el vencimiento es al cabo de tres periodos ($T = 3$).

Consideramos un tipo de interés libre de riesgo $r = 0.05$ con un régimen de capitalización a interés compuesto.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

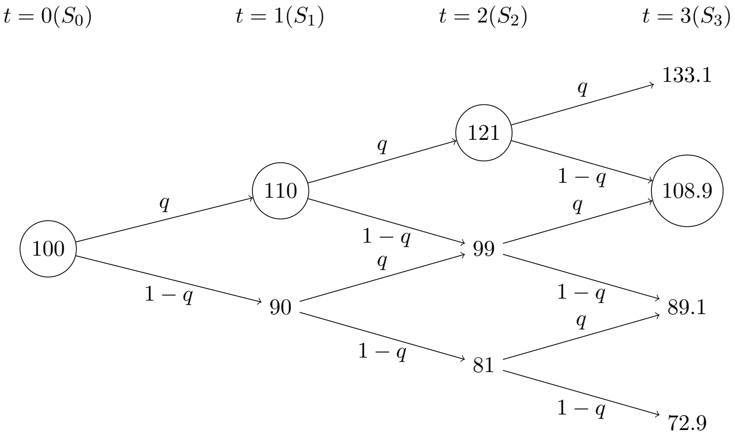
Sea $u = 1.1$ el factor de revalorización del subyacente en cada uno de los periodos. Esto quiere decir que si en el periodo $t = 0$ el precio de la acción es $S_0 = 100$, en el primer periodo su precio, en el entorno favorable, será $S_1 = uS_0 = 1.1 \cdot 100 = 110$. Del mismo modo, consideramos el factor de devaluación, considerando un escenario pesimista, de $d = 0.9$. Al cabo de un periodo, en un escenario desfavorable, el precio de la opción sería de $S_1 = dS_0 = 0.9 \cdot 100 = 90$.

Nota

Destacar que no es necesario que $u > 1$ y $d < 1$, solo se cumple con certeza $u > d$. Aunque en este ejemplo los valores de u y d vienen dados, generalmente se estiman. En la siguiente clase nos centraremos en estimar estos valores a través del algoritmo de Hull-White.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

El siguiente árbol binomial simplificado del subyacente correspon diente a los datos que hemos detallado anteriormente.



Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

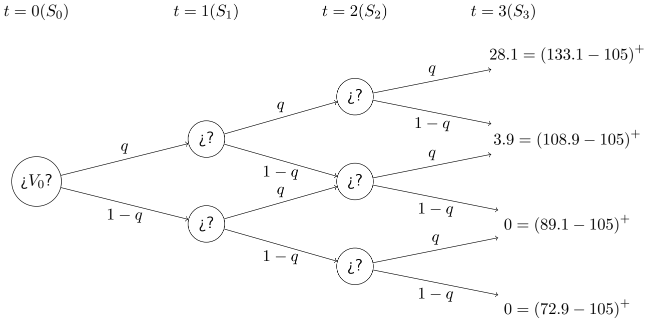
Es importante destacar que el precio del subyacente en un periodo dado, por ejemplo

- $S_2 = 99$, puede venir dado considerando dos caminos diferentes (devaluando en t_1 el subyacente y luego revalorizandolo o al revés, en t_1 revalorizándolo y luego devaluándolo).
- $S_3 = 108.9$, puede venir dado considerando tres caminos diferentes.

Consideramos un camino posible, por ejemplo que en el primer periodo, la acción sube a $110 = uS_0$, en el segundo se vuelve a revalorizar a $121 = uS_1$, y en el tercer y último periodo se devalúa a $108.9 = dS_1$. Este camino queda indicado en la con circulos.

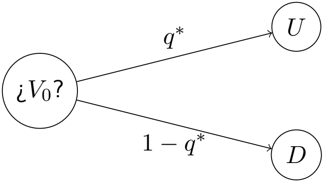
Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Consideramos una opción de compra árbol de la opción de compra. Como vemos los valores del pay-off de la opción en $T = 3$ son conocidos. Para una opción de compra recordemos que el pay-off vale $(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ siendo K el precio de ejercicio.



Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Antes de continuar, primero observemos que desde el siguiente árbol mono-periodo



Tenemos que:

$$V_0 = e^{-r\tau}\left(q^*U + (1-q^*)\,D\right),$$

donde $q^* = \frac{e^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d}$ y por construcción tenemos $S_u = uS_0$ y $S_d = dS_0$, entonces

$$q^* = \frac{e^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}.$$

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Luego, para nuestro caso

$$q^* = \frac{e^{0.05 \cdot 1} - 0.9}{1.1 - 0.9} \approx 0.7564 \text{ y } 1 - q^* \approx 0.2436.$$

De donde se sigue que:

- Para $t = 2$:
  - Dado $U = 28.1$ y $D = 3.9$, el valor del nodo superior es:

  $$e^{-0.05} (0.7564 \cdot 28.1 + 0.2436 \cdot 3.9) = 21.12.$$

  - Dado $U = 3.9$ y $D = 0$, el valor del nodo intermedio es:

  $$e^{-0.05} (0.7564 \cdot 3.9 + 0.2436 \cdot 0) = 2.81.$$

  - Dado $U = D = 0$, el valor del nodo inferior es 0.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

- Para $t = 1$:
  - Dado $U = 21.12$ y $D = 2.81$, el valor del nodo superior es:

$$e^{-0.05}(0.7564 \cdot 21.12 + 0.2436 \cdot 2.81) = 15.85.$$

  - Dado $U = 2.81$ y $D = 0$, el valor del nodo inferior es:

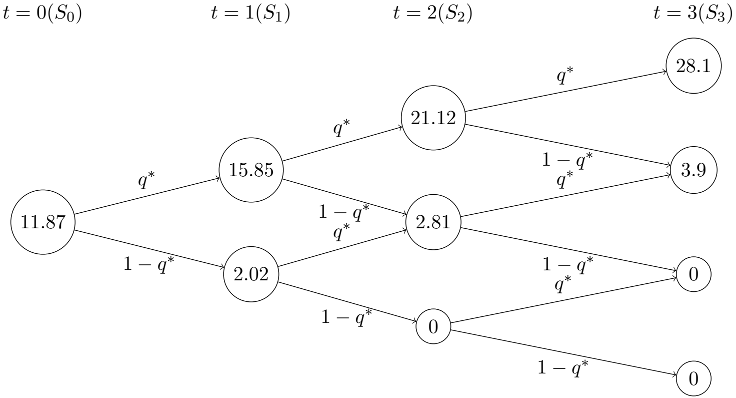
$$e^{-0.05}(0.7564 \cdot 2.81 + 0.2436 \cdot 0) = 2.02.$$

- Para $t = 0$, dado que $U = 15.85$ y $D = 2.02$, el valor de la prima es:

$$e^{-0.05}(0.7564 \cdot 15.85 + 0.2436 \cdot 2.02) = 11.87.$$

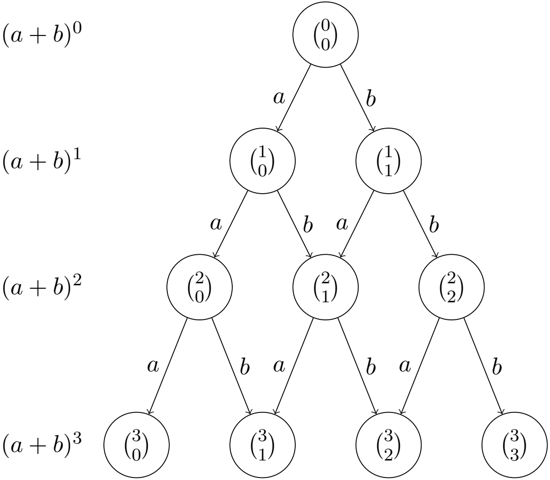
Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Finalmente el árbol resultante es:

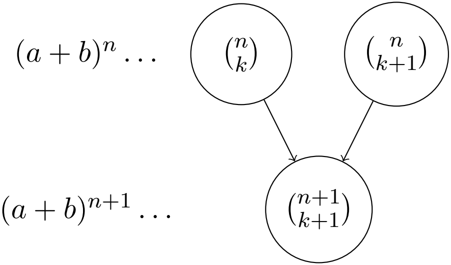


Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Recordando la formulación del binomio:



Prima de una opción europea con árboles multi-periodo



- Propiedad coeficiente binomial para todo $0 \leq k \leq n-1$ y $n > 0$, se tiene

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- Generalización, Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Desde donde deducimos que

$$V_0 = e^{-rn} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1 - q^*)^{n-j} (q^*)^j \operatorname{máx}\{u^{n-j} d^j S_0 - K, 0\}.$$

Dado que $u^{n-j} d^j S_0 - K < 0$,para todo

$$j > \left\lceil \frac{\log\left(\frac{K}{u^n S_0}\right)}{\log\left(\frac{d}{u}\right)} \right\rceil = j^*,$$

donde $\lceil x \rceil = \operatorname{mín}\{k \in \mathbb{Z} : x \leq k\}$.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Entonces $\max\{u^{n-j}d^jS_0 - K, 0\} = 0$ para todo $j > j^*$, de donde

$$V_0 = e^{-rn} \sum_{j=0}^{j^*} \binom{n}{j} (1-q^*)^{n-j} (q^*)^j \max\{u^{n-j}d^jS_0 - K, 0\}.$$

Por otro lado, para una put europea, la fórmula generalizada viene dada por

$$V_0 = e^{-rn} \sum_{j=0}^{j^*} \binom{n}{j} (1-q^*)^{n-j} (q^*)^j \max\{K - u^{n-j}d^jS_0, 0\}.$$

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo
NOTA

Sea

$$x = \frac{\log\left(\frac{K}{u^n S_0}\right)}{\log\left(\frac{d}{u}\right)}.$$

Se tienen dos casos

- Si $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo
NOTA

Entonces

- Si $\max\{u^{n-j}d^jS_0 - K, 0\} = u^{n-j}d^jS_0 - K$, entonces

$$j \leq \begin{cases} j^* & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ j^* - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Si $\max\{K - u^{n-j}d^jS_0, 0\} = K - u^{n-j}d^jS_0$, entonces

$$j \geq j^*.$$

Código Python

Ejemplo solución: V_0 y $T = 3$

```
import numpy as np
from scipy.special import comb

def calculate_j_star(u, d, K, S_0, n, r):
    if d >= u:
        raise ValueError("d debe ser menor que u para que la fórmula tenga sentido.")
    j_star = np.ceil(np.log(K / (u**n * S_0)) / np.log(d / u))
    return int(j_star)

def calculate_V0(u, d, K, S_0, n, r):
    q_star = (np.exp(r) - d) / (u - d)
    j_star = calculate_j_star(u, d, K, S_0, n, r)
    V_0 = np.exp(-r * n) * np.sum([comb(n, j) * (q_star ** (n - j)) * ((1 - q_star) ** j) *
            np.maximum((u ** (n - j)) * (d ** j) * S_0 - K, 0) for j in range(j_star + 1)])
    return V_0
```

```
# Ejemplo
u, d = 1.1, 0.9
S_0, K = 100, 105
n = 3 #T=n
r = 0.05
V_0 = calculate_V0(u, d, K, S_0, n, r)
print(f'El valor de la opción V_0 es: {V_0:0.2f}')
```

```
El valor de la opción V_0 es: 11.87
```

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Análisis de sensibilidad: Impacto de Variables

Variable	Opción de compra	Opción de venta
Precio del subyacente	$+$	$-$
Precio de ejercicio	$-$	$+$
Tiempo hasta el vencimiento	?	?
Volatilidad	$+$	$+$
Tipo de interés libre de riesgo	$+$	$-$
Dividendos	$-$	$+$

Nota: $+$ indica un aumento en el valor de la prima si la variable aumenta; $-$ indica una disminución.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Análisis de sensibilidad: Precio del Subyacente y Ejercicio

- **Call Options:** La prima aumenta con el precio del subyacente ya que el potencial de ganancia (pay-off) aumenta. Un precio de ejercicio más alto reduce la prima debido al umbral más alto para obtener ganancias.
- **Put Options:** La prima disminuye con un aumento en el precio del subyacente y aumenta con un mayor precio de ejercicio, ya que el potencial de beneficio aumenta si el subyacente cae por debajo del precio de ejercicio.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Análisis de sensibilidad: Volatilidad

- Una mayor volatilidad aumenta la prima tanto para opciones de compra como de venta, dado que amplifica la incertidumbre y el potencial de variación significativa en el precio del subyacente.

Prima de una opción europea con árboles multi-periodo

Análisis de sensibilidad: Tipos de Interés y Dividendos

- **Tipos de Interés:** Las tasas más altas aumentan la prima de opciones de compra y disminuyen la de las de venta debido al efecto del valor temporal del dinero en los flujos de efectivo futuros esperados.
- **Dividendos:** Los dividendos reducen el precio del subyacente cuando se pagan, afectando negativamente la prima de las opciones de compra y positivamente las de venta.

Referencias bibliográficas

- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016a). Estrategias financieras sintéticas con opciones de compra y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016b). Estrategias financieras sintéticas con opciones de venta y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Cortés, J. C. and Navarro-Quiles, A. (2016). Fundamentos sobre opciones financieras: Una revisión desde una perspectiva matemática. Colección de objetos docentes ADE-UPV.

unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

www.unir.net