Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

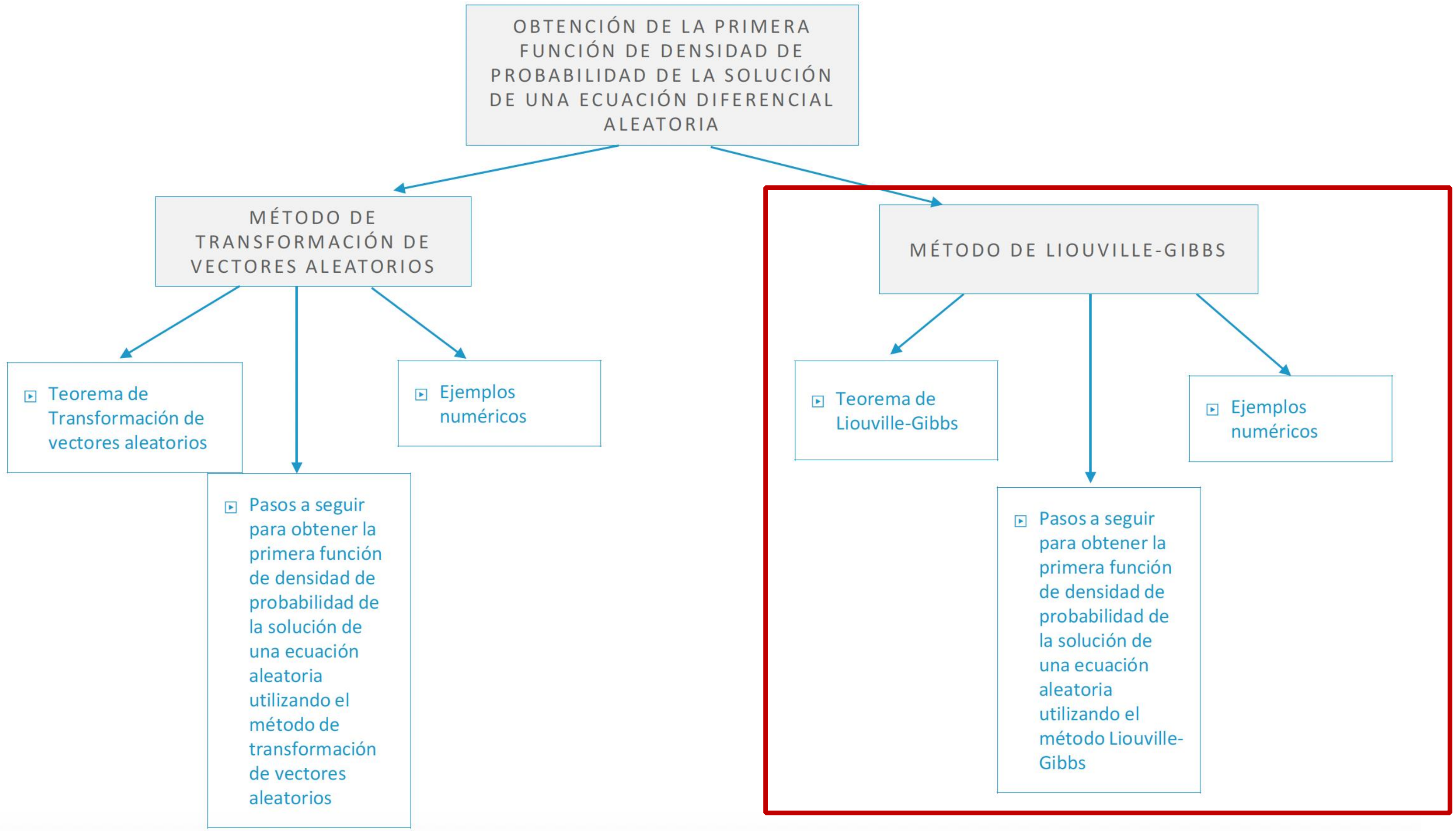
⇢ Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 6. Cálculo de la densidad de una EDA (II).

Índice

Contenidos

Tema 6
Contenidos - Esquema



Objetivos

OBJETIVOS TEMA 6:

- Obtención de la 1-FDP de un problema de valores iniciales aleatorio (PVIA) mediante el método de transformación de vectores aleatorios.
- **Obtención de la 1-FDP de un PVIA mediante el teorema de Liouville-Gibbs.**

1-FDP de una EDA
Teorema de Liouville-Gibbs

Consideremos el siguiente PVIA

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{g}(t, \mathbf{X}(\mathbf{t})), \qquad t > t_0, \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X_0}, \end{aligned} \tag{14}$$

siendo $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [t_0, \infty[\times \mathrm{L}_2^n(\Omega) \to \mathrm{L}_2^n(\Omega)$ una función continua diferenciable, $\mathbf{X}_0$ un vector aleatorio absolutamente continuo en $\mathrm{L}_2^n(\Omega)$ con FDP $f_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{X}(t)$ un 2-PE definido en $\mathrm{L}_2^n(\Omega)$ y $\dot{\mathbf{X}}(t)$ la derivada en media cuadrática respecto del tiempo del 2-PE $\mathbf{X}(t)$. Supongamos conocida la solución PE del PVIA (14), $\mathbf{X}(t)$. Consideramos también la EDP de Liouville-Gibbs que viene definida de la siguiente manera

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \left(f(t, \mathbf{x}) g_j(t, \mathbf{x})\right)}{\partial x_j} = 0, \tag{15}$$

donde $g_j = g_j(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq j \leq n$ son componentes de la aplicación $\mathbf{g}$ del PVIA (14). Entonces, la 1-FDP del PE solución $\mathbf{X}(t)$ del PVIA (14) es solución de la EDP de Liouville-Gibbs dada por (15).

1-FDP de una EDA
Teorema de Liouville-Gibbs

La solución de la EDP de Liouville, $f(t, \mathbf{X}) = f_{\mathbf{X}(t)}(x)$, es la 1-FDP de la solución del PVIA (14), y viene dada por

$$f_{\mathbf{X}(t)}(x) = \left(f_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0) \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x} = h(\tau, \mathbf{x}_0))\, \mathrm{d}\tau \right\} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0 = h^{-1}(t,\mathbf{x})}, \qquad (16)$$

siendo $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x})$ la divergencia de $\mathbf{g}(\tau, \mathbf{x})$ definida mediante

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_j}$$

y $h(\tau, \mathbf{x}_0) = \mathbf{X}(\tau)$, es decir la solución del PE solución (que sabemos que viene en función de la condición inicial $\mathbf{X_0}$).

1-FDP de una EDA
EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

Consideramos la siguiente ecuación diferencial aleatoria de tipo Riccati,

$$\begin{aligned} X'(t) &= -aX(t)^2, \qquad a > 0, \quad t \geq 0, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde X_0 es una variable aleatoria continua con FDP $f_{X_0}(x_0)$. Es fácil ver que la solución PE de este PVIA viene dada por

$$X(t) = \frac{X_0}{1 + aX_0 t}. \tag{2}$$

Nuestro propósito es determinar la 1-FDP de $X(t)$ para cada $t > 0$ fijo.

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

Observaciones:

La dimensión del problema es 1 todos los vectores y funciones vectoriales involucrados en el Teorema de Liouville-Gibbs, denotados en letra negrita, tendrán dimensión 1. Por tanto serán funciones y valores escalares, y por sencillez los escribiremos sin letra negrita.

Identificamos

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{X}) = g_1(t,X) = -aX^2.$$

Es fácil ver que la función $g_1(t,X)$ es continua y diferenciable. Por tanto, podemos aplicar el Teorema para obtener la 1-FPD de X(t) denotada como $f_{X(t}(x)$ e identificada en el Teorema como f(t, **x**) = f(t,x). Esta función satisface la EDP de Liouville-Gibbs:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \left(f(t,x)g_1(t,x)\right)}{\partial x} = 0.$$

1-FDP de una EDA
EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

Para nuestro PVIA tenemos que

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - ax^2\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + f(t,x)\left(-2ax\right) = 0$$

Resolviendo esta EDP la función $f_{X(t)}(x)$ vendrá dada por:

$$f_{X(t)}(x) = f(t,x) = \left(f_0(x_0)\, \mathsf{exp}\left\{ -\int_0^t \left(-2ah(\tau, x_0)\right) \mathsf{d}\tau \right\} \right) \Big|_{x_0 = h^{-1}(t,x)}$$

Además,

$$h(t, x_0) = \mathbf{X}(t) = \frac{x_0}{1+ax_0t}$$

Por tanto,

$$x_0 = h^{-1}(t,x) = \frac{x}{1-axt}$$

De este modo,

$$
\begin{aligned}
f_{X(t)}(x) = f(t,x) &= \left(f_{X_0}(x_0) \exp\left\{ -\int_0^t \left(-2a \frac{x_0}{1+ax_0\tau} \right) \mathrm{d}\tau \right\} \right) \Big|_{x_0=\frac{x}{1-axt}} \\
&= \left(f_{X_0}(x_0) \exp\left\{ 2Log\left(1+atx_0\right) \right\} \right) \Big|_{x_0=\frac{x}{1-axt}} \\
&= f_{X_0}\left(\frac{x}{1-axt} \right) \exp\left\{ Log\left(1+at\frac{x}{1-axt} \right)^2 \right\} \\
&= f_{X_0}\left(\frac{x}{1-axt} \right) \left(1+at\frac{x}{1-axt} \right)^2 \\
&= f_{X_0}\left(\frac{x}{1-axt} \right) \frac{1}{(1-axt)^2}.
\end{aligned}
$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Consideramos el movimiento de un oscilador linear descrito mediante el siguiente PVIA con condiciones iniciales aleatorias

$$
\begin{aligned}
X''(t) + \omega X(t) &= 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \\
X(0) &= X_0, \\
X'(0) &= X'_0,
\end{aligned} \tag{23}
$$

donde X_0 y X'_0 son variables aleatorias con FDP conjunta $f_{X_0,X'_0}(x_0, x'_0)$. La solución viene dada por

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(X_0 \sqrt{\omega} \cos(t\sqrt{\omega}) + X'_0 \sin(t\sqrt{\omega}) \right). \tag{24}$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Si consideramos el cambio de variable $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t)) = (X(t), X'(t))$.

El PVIA quedará definido como

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X_0}.$$

Identificamos X0 el vector compuesto por las 2 condiciones iniciales,

$\mathbf{X_0} := (X_0; X'_0)$ y $\mathbf{g}(t, \mathbf{X})$ como

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{X}) = (g_1(t, \mathbf{X}), g_2(t, \mathbf{X})) = A\mathbf{X} = (X_2(t), -\omega X_1(t)).$$

Por tanto,

$$(g_1(t, \mathbf{X}), g_2(t, \mathbf{X})) = (X_2(t), -\omega X_1(t))$$

La función g es continua y diferenciable.

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Para obtener la 1-PDF de **X**(t), denotada como $f_{\mathbf{X}(t)}$, como f(t,**x**).

Sabemos que esta función satisface la EDP de Liouville-Gibbs, es decir:

$$\frac{\partial f(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})g_1(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})g_2(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_2} = 0$$

Realizando las derivadas de los productos tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,\mathbf{x})}{\partial t} &+ \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_1}g_1(t,\mathbf{x}) + \frac{\partial\left(g_1(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_1}f(t,\mathbf{x}) \\ &+ \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_2}g_2(t,\mathbf{x}) + \frac{\partial\left(g_2(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_2}f(t,\mathbf{x}) = 0.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial(g_1(t,\mathbf{x}))}{\partial x_1} = \frac{\partial(g_2(t,\mathbf{x}))}{\partial x_2} = 0$$

tenemos que

$$\frac{\partial f(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_1}g_1(t,\mathbf{x}) + \frac{\partial\left(f(t,\mathbf{x})\right)}{\partial x_2}g_2(t,\mathbf{x}) = 0$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Utilizando el método de las características $f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$ vendrá dada por

$$f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) = \left(f_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0) \exp\left\{ - \int_0^t 0 \, \mathrm{d}\tau \right\} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0 = h^{-1}(t,\mathbf{x})}$$

Ya que la divergencia de la función g viene dada por

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial g_1(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2} = 0$$

La función **h**(t,**X**) es la solución de la ecuación:

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x_0}) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

y consecuentemente

$$\mathbf{h}^{-1}(t, \mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Sabemos que

$$e^{-\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega}t) & -\frac{1}{\sqrt{\omega}} sin(\sqrt{\omega}t) \\ \sqrt{\omega}\sin(\sqrt{\omega}t) & cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{-1}(t,\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega}t) & -\frac{1}{\sqrt{\omega}} sin(\sqrt{\omega}t) \\ \sqrt{\omega}\sin(\sqrt{\omega}t) & cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\sqrt{\omega}t) - x'\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin(\sqrt{\omega}t) \\ x\omega\sin(\sqrt{\omega}t) + x'\cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo la 1-FDP $f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}(t)}(x) &= f_{\mathbf{X}_0}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}) \\ &= f_{X_0,X_0'}\left(x\cos(\sqrt{\omega}t)| - x'\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin(\sqrt{\omega}t), x\sqrt{\omega}\sin(\sqrt{\omega}t) + x'\cos(\sqrt{\omega}t))\right) \end{aligned}$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Teorema de Liouville-Gibbs

Marginalizamos:

$$f_{\mathbf{x}(t)}(x) = \int_{\mathcal{D}(X_0')} f_{X_0,X_0'}\left(x\,\mathsf{cos}(\sqrt{\omega}t) - x'\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathsf{sin}(\sqrt{\omega}t)\ ,\right.$$

$$\left. x\sqrt{\omega}\,\mathsf{sin}(\sqrt{\omega}t) + x'\,\mathsf{cos}(\sqrt{\omega}t)\right)\,\mathsf{d}x'$$

1-FDP de una EDA
Pasos Teorema de Liouville-Gibbs

Consideremos el siguiente PVIA

$$X'(t) = f(X(t), t), \qquad X(0) = X_0, \tag{37}$$

con solución $X(t)$ conocida. Los pasos a seguir son:

1. Obtenemos la solución del PVIA aleatorio, $X(t) = h(t, \mathbf{X}_0)$.
2. Describimos el PVIA (37) de la misma manera que en el Teorema 2 e identificamos los elementos X_0, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, y $\mathbf{g}(t, \mathbf{X}(t)) = \mathbf{g}(t, \mathbf{X})$.
3. Aplicamos el Teorema de Liouville-Gibbs, (Teorema 2), y formulamos la ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de Liouville-Gibbs.
4. Resolvemos la EDP utilizando la ecuación (16). La solución será la 1-FDP de la solución al PVIA que buscamos.
5. Marginalizamos si fuese necesario para obtener la 1-FDP de la solución del PVIA $X(t)$.

Bibliografía

Soong, T. T. (1973). Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York. Ecuaciones

Actividad grupal: Obtención de la 1-PDF de un PVIA utilizando RVT y Liouville Gibbs

Objetivos

El objetivo de esta actividad es, por parejas, calcular la 1-FDP de un PVIA utilizando un método diferente RVT o Liouville-Gibbs. Se deberán poner en común sus resultados y deben de coincidir.

Descripción

Consideramos el siguiente PVIA logístico:

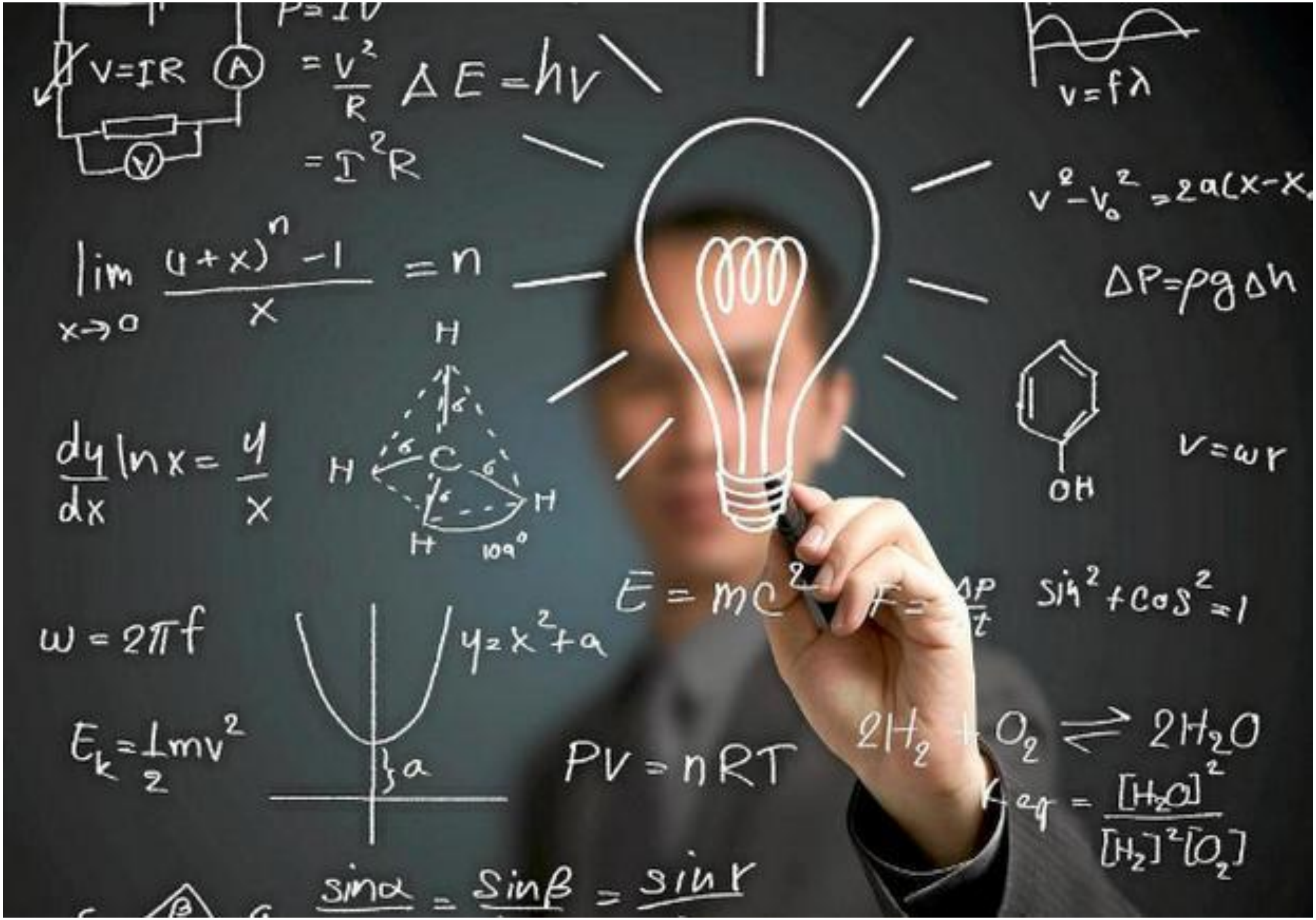
$$X'(t) = a\big(b - X(t)\big), X(0) = X_0$$

Donde $a, b \in R$ y X_0 es una VA. Se pide calcular la 1-FDP utilizando los dos métodos Liouville-Gibbs y RVT.

Actividad grupal: Obtención de la 1-PDF de un PVIA utilizando RVT y Liouville Gibbs

Obtención de la 1-PDF de un PVIA utilizando RVT y Liouville Gibbs	Descripción	Puntuación máxima (puntos)	Peso %
Criterio 1	1-PDF con RVT.	4	40 %
Criterio 2	1-PDF con Liouville Gibbs.	4	40 %
Criterio 3	Deben coincidir.	2	20 %
		10	**100 %**

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net