

Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 7: Fórmula de Black-Scholes para opciones europeas

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- ▶ Introducción y objetivos
- ▶ Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas
- ▶ Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas
- ▶ Fórmula de Black Scholes para opciones de venta europeas

Introducción y objetivos

Primero, a través de árboles binomiales, se ha podido establecer el precio de la prima de una opción usando un modelo discreto (árboles binomiales) para el subyacente.

En lo que sigue, el objetivo de este tema es establecer el precio de la prima de una opción europea utilizando la fórmula de Black-Scholes utilizando el modelo log-normal para el subyacente.

Introducción y objetivos

Los objetivos de este tema son:

- ▶ Obtención de la fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas.
- ▶ Deducción de la fórmula de paridad entre opciones de compra y de venta europeas.
- ▶ Demostración de la fórmula de Black-Scholes para opciones de venta europeas.

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

En lo que sigue describiremos la fórmula de Black-Scholes que nos permite conocer el precio de la prima de una opción europea, para ello primero recordemos el modelo log-normal

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, t \geq 0 \text{ y } W(t) \sim N(0, t).$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Luego para comprender con mayor facilidad la fórmula de Black-Scholes seguiremos los siguientes pasos:

1. Mostramos la fórmula de Black-Scholes.
2. Damos un ejemplo.
3. Deducción de la fórmula.

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Fórmula de Black-Scholes

Supongamos que tenemos una acción o subyacente cuyo valor en un tiempo inicial t_0 es S_0 , y cuyo valor en el transcurso del tiempo se modeliza mediante el movimiento log-normal. Luego sobre dicho subyacente se emite una opción de compra europea con las siguientes características del contrato. La fecha de vencimiento es T , el precio de ejercicio es K y denotaremos por C al precio de la opción call (prima).

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Fórmula de Black-Scholes

Según la fórmula de Black-Scholes el precio de la call viene dado por

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{r(T-t_0)} N(d_2),$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo, $N(x) = P(Z \leq x)$ con $Z \sim N(0, 1)$, d_1 y d_2 vienen dadas por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t_0}.$$

Nota

El valor de la prima solo depende del parámetro σ del modelo log-normal que hemos llamado volatilidad o riesgo, pero no depende de μ .

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Ejemplo: Aplicación de la fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Supongamos que tenemos una opción con precio inicial $S_0 = 74.625$, el precio de ejercicio $K = 100$. La fecha de vencimiento es 1.6 años, el tipo de interés libre de riesgo es $r = 0.05$ anual y el riesgo $\sigma = 0.375$ anual. Entonces desde las fórmulas anteriores tenemos

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{74.625}{100}\right) + \left(0.05 + \frac{0.375^2}{2}\right)(1.6)}{0.375\sqrt{1.6}} \approx -0.2112287935946991,$$

$$d_2 = d_1 - 0.375\sqrt{1.6} \approx -0.685570442619956.$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Ejemplo: Aplicación de la fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

De donde utilizando el software R, tenemos

$$N(d_1) \approx 0.4163544 \text{ y } N(d_2) \approx 0.246492.$$

Por lo tanto el valor de la call es

$$C = 74.625 \cdot 0.4164 - 100e^{-0.05 \cdot 1.646} \cdot 0.2465 \approx 8.371308002450832.$$

Nota

Si quisiésemos describir una opción en el mercado financiero, los valores de S_0 , K , T , r y σ se calibran a partir del histórico del subyacente.

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Deducción de la fórmula

Supongamos que tenemos una call con precio de ejercicio K , vencimiento T , siendo S_T el valor de la misma en el instante de tiempo T y r es el tipo de interés anual libre de riesgo. Como se vio anteriormente (Tema 4), el valor de la prima de una opción de compra europea resulta de actualizar el valor esperado (o media) del pay-off de la opción, es decir:

$$C = \underbrace{e^{-rT}}_{\text{actualización}} E \left(\underbrace{(S_T - K)^+}_{\text{pay off}} \right).$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Deducción de la fórmula

Luego, según del modelo log-normal

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

Tenemos

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (S_T - K)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Deducción de la fórmula

Así, cuando se ejecuta la opción, es decir existe x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ se tiene que $S_T - K > 0$, corresponde a

$$S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K > 0, \forall x \geq x_0,$$

con

$$x_0 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Luego

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} (S_T - K) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-rT} (C_1 - C_2).$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Deducción de la fórmula

Como

$$C_2 = \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Ke^{-rT} P(Z > x_0) = Ke^{-rT} N(-x_0).$$

Además, dado que

$$\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2} = -\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}.$$

Se tiene que

$$C_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dx = S_0 P(Z > x_0 - \sigma\sqrt{T}) = S_0 N(\sigma\sqrt{T} - x_0).$$

Fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas

Deducción de la fórmula

Por lo tanto

$$C = S_0 N(\sigma\sqrt{T} - x_0) - Ke^{-rT} N(-x_0).$$

Finalmente considerando $d_2 = -x_0$ y

$$d_1 = \sigma\sqrt{T} - x_0 = \sigma\sqrt{T} - \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

de donde

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2).$$

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Se establece una relación matemática, denominada fórmula de paridad put-call. Esta expresión relaciona las primas de una call y de una put europeas sobre un mismo activo subyacente con misma fecha de vencimiento y mismo precio de ejercicio.

Nota

Es importante destacar que al tratarse de una opción europea, la opción solo se puede ejercer en el instante T del contrato.

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Para la deducción de la fórmula de paridad se distinguirán dos casos: si el subyacente paga o no paga dividendos durante el período de vida.

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Subyacente no paga dividendos

Para la deducción de la fórmula de paridad vamos a construir dos carteras financieras que se denotarán por A y B .

► Cartera A :

- Posición larga en la Put (se paga una prima P en el instante t_0).
- Posición corta en la Call (se recibe una prima C en t_0)

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Subyacente no paga dividendos

Es decir

- ▶ Cartera $A(t = t_0) = P - C$.
- ▶ Cartera $A(t = T) = (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = K - S_T$.

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Subyacente no paga dividendos

► Cartera B :

- Posición corta en la acción (venderá el subyacente en el instante T), cuyo valor inicial en el instante t_0 es S_0 .
- Se invierte la cantidad de efectivo Kt_0 , valor resultante de actualizar el valor inicial del subyacente al instante t_0 y al tipo de interés libre de riesgo r , el precio de ejercicio de la Call.

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Subyacente no paga dividendos

Es decir

- ▶ Cartera $B(t = t_0) = Ke^{-r(T-t_0)} - S_0$.
- ▶ Cartera $B(t = T) = (Ke^{-r(T-t_0)})e^{r(T-t_0)} - S_T = K - S_T$.

Finalmente, Como los valores finales de ambas carteras son iguales, haciendo uso del Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje, los valores iniciales deberían de ser el mismo. Así, se deduce que

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} - S_0.$$

Fórmula de paridad entre opciones de compra y opciones de venta europeas

Subyacente paga dividendos

Resultado teórico

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} + d_0 - S_0.$$

Nota

Ver creación de la cartera B' en los apuntes para una explicación más detallada.

Fórmula de Black Scholes para opciones de venta europeas

La demostración fórmula de Black Scholes para opciones de venta europeas, se sigue desde la relación

- Fórmula de paridad.

$$P - C = Ke^{-rT} - S_0.$$

- Razonamiento para obtener la expresión de la fórmula de Black-Scholes para una call europea.

$$C = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2).$$

Fórmula de Black Scholes para opciones de venta europeas

Como $N(-x) = P(Z \leq -x) = 1 - P(Z \leq x) = 1 - N(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}P &= Ke^{-rT} - S_0 + S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\&= -S_0(1 - N(d_1)) + Ke^{-rT}(1 - N(d_2)) \\&= -S_0N(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2).\end{aligned}$$

Fórmula de Black Scholes para opciones de venta europeas

Ejemplo: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para opciones de compra y venta

Con los siguientes datos $S_0 = 74.625$, $K = 100$, $T = 1.6$, $r = 0.05$ y $\sigma = 0.375$, calcular el precio para la opción de compra y venta.

- ▶ Utilizando la tabla Normal para calcular $N(x) = P(Z \leq x)$.
- ▶ Utilizando la siguiente aproximación:

$$N(x) = 0.5 + \frac{x}{6\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + 1 \right).$$



www.unir.net