

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

---> Dra. Noèlia Viles Cuadros

## Preparación Examen

1. Sea  $X(t) = A\cos(t) + 1$ , donde  $A$  y  $B$  son variables aleatorias no correlacionadas, con  $E[A] = 1$  y  $V[A] = 0.5$ . Estudiar la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de  $X(t)$ .

2. Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

para  $t > 0$ , con  $\sigma > 0$  y  $\alpha < 0$ . Calcula la solución de la ecuación diferencial estocástica y su media.

3. Consideramos el siguiente PVIA:

$$X'_t = -bX_t^2, X(0) = X_0,$$

donde  $a > 0$ ,  $t \geq 0$  y  $X_0$  es una VA continua con FDP  $f_{X_0}(x_0)$ . Calcula la 1-FDP utilizando la fórmula de Liouville-Gibbs.

4. Consideramos el siguiente proceso estocástico

$$X_t = \exp \left( -W_t + \frac{1}{2}t \right), \quad t \geq 0.$$

Calcula la covarianza de  $X_t$ .

5. Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = 2X_t dt + 0.5X_t dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

para  $t > 0$ . Calcula la solución de la ecuación diferencial estocástica.

*Indicación: Usa Lema de Ito y  $f(x)=\ln(x)$ .*

6. Consideramos el siguiente PVIA:

$$X'_t = -X_t^2, X(0) = X_0,$$

donde  $t \geq 0$  y  $X_0$  es una VA continua con FDP  $f_{X_0}(x_0)$ . Calcula la 1-FDP utilizando la fórmula de Liouville-Gibbs.

# Preparación Examen

## Contenidos

### Resultados más importantes:

- Definición del proceso de Wiener y todas sus propiedades.
- El teorema de transformación de variables aleatorias.
- EDP de Liouville Gibbs.
- Definición de la integral estocástica de Riemman e Itô y las propiedades de ambas.
- El lema de Itô.
- Propiedades básicas de estadística y ecuaciones diferenciales.
- Tema 5. Apartados 5.1, 5.2 y 5.3 completos.

# Tema 5

## Continuidad, diferenciabilidad e Integrabilidad

**Ejercicio 1.** Sea  $X(t) = At + B$  e  $Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(\tau) d\tau$ ,  $t > 0$  dos 2-PEs donde  $A$  y  $B$  son 2-VAs no correlacionadas de modo que

$$\mathbb{E}[A] = m_A, \quad \mathbb{E}[B] = m_B, \quad \mathbb{V}[A] = \sigma_A^2, \quad \mathbb{V}[B] = \sigma_B^2.$$

Contestar a las siguientes cuestiones

- ▶ Estudiar la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de  $X(t)$  e  $Y(t)$ .
- ▶ Probar que la derivada en MC de  $X(t)$  es  $\dot{X}(t) = A$  y de  $Y(t)$  es  $\dot{Y}(t) = At/2 + B$ .
- ▶ Calcular  $\Gamma_{X,X}(t, s)$  y  $\Gamma_{Y,Y}(t, s)$ .

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

Consideramos la siguiente ecuación diferencial aleatoria de tipo Riccati,

$$\begin{aligned} X'(t) &= -aX(t)^2, & a > 0, \quad t \geq 0, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $X_0$  es una variable aleatoria continua con FDP  $f_{X_0}(x_0)$ . Es fácil ver que la solución PE de este PVIA viene dada por

$$X(t) = \frac{X_0}{1 + aX_0t}. \tag{2}$$

Nuestro propósito es determinar la 1-FDP de  $X(t)$  para cada  $t > 0$  fijo.

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

En primer lugar debemos determinar el vector  $\mathbf{U}$ . Recordemos que  $\mathbf{U}$  debe de tener una FDP conocida, por tanto es razonable definir  $\mathbf{U} = X_0$ .

Definimos simultáneamente el vector  $\mathbf{V}$  y la aplicación  $\mathbf{r}$ . Como  $\mathbf{U}$  tiene dimensión 1,  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbf{V}$  tendrá dimensión 1.

La solución  $X(t)$  descrita por la ecuación (2) se puede ver como una transformación de  $\mathbf{U} = X_0$ . Por tanto, se puede considerar que

$$\mathbf{V} = \mathbf{r}(\mathbf{U}) = \mathbf{r}(X_0) = \frac{X_0}{1 + aX_0t}. \quad (3)$$

La transformación  $\mathbf{r}$  es continua y con derivada continua

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

### Comprobación Hipótesis:

La transformación  $\mathbf{r}$  es continua y con derivada continua

La transformación inversa,

$$\mathbf{U} = \mathbf{s}(\mathbf{V}) = \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}) = \frac{\mathbf{V}}{1 - a\mathbf{V}t}, \quad (4)$$

tiene como jacobiano

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} = \frac{1}{(1 - a\mathbf{V}t)^2} \neq 0. \quad (5)$$

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

la 1-FPD del vector aleatorio  $\mathbb{V}$ ,

$$f_{\mathbf{V}}(x) = f_{\mathbf{U}}\left(\frac{x}{1 - axt}\right) \frac{1}{(1 - axt)^2}. \quad (6)$$

Como  $\mathbf{V} = X(t)$ , entonces la 1-FDP de  $X(t)$  viene dada por

$$f_{X(t)}(x) = f_{X_0}\left(\frac{x}{1 - axt}\right) \frac{1}{(1 - axt)^2}. \quad (7)$$

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

Consideramos la siguiente ecuación diferencial aleatoria de tipo Riccati,

$$\begin{aligned} X'(t) &= -aX(t)^2, & a > 0, \quad t \geq 0, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $X_0$  es una variable aleatoria continua con FDP  $f_{X_0}(x_0)$ . Es fácil ver que la solución PE de este PVIA viene dada por

$$X(t) = \frac{X_0}{1 + aX_0t}. \tag{2}$$

Nuestro propósito es determinar la 1-FDP de  $X(t)$  para cada  $t > 0$  fijo.

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

### Observaciones:

La dimensión del problema es 1 todos los vectores y funciones vectoriales involucrados en el Teorema de Liouville-Gibbs, denotados en letra negrita, tendrán dimensión 1. Por tanto serán funciones y valores escalares, y por sencillez los escribiremos sin letra negrita.

Identificamos

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{X}) = g_1(t, X) = -aX^2.$$

Es fácil ver que la función  $g_1(t, X)$  es continua y diferenciable. Por tanto, podemos aplicar el Teorema para obtener la 1-FPD de  $X(t)$  denotada como  $f_{X(t)}(x)$  e identificada en el Teorema como  $f(t, \mathbf{x}) = f(t, x)$ . Esta función satisface la EDP de Liouville-Gibbs:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial (f(t, x)g_1(t, x))}{\partial x} = 0.$$

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

Para nuestro PVIA tenemos que

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} - ax^2 \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + f(t, x) (-2ax) = 0$$

Resolviendo esta EDP la función  $f_{X(t)}(x)$  vendrá dada por:

$$f_{X(t)}(x) = f(t, x) = \left( f_0(x_0) \exp \left\{ - \int_0^t (-2ah(\tau, x_0)) d\tau \right\} \right) \Big|_{x_0=h^{-1}(t,x)}$$

Además,

$$, h(t, x_0) = \mathbf{X}(t) = \frac{x_0}{1+ax_0t}.$$

Por tanto,

$$x_0 = h^{-1}(t, x) = \frac{x}{1-axt}$$

# 1-FDP de una EDA

## EJEMPLO 1: Teorema de Liouville-Gibbs

De este modo,

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= f(t, x) = \left( f_{X_0}(x_0) \exp \left\{ - \int_0^t \left( -2a \frac{x_0}{1 + ax_0\tau} \right) d\tau \right\} \right) \Big|_{x_0 = \frac{x}{1-axt}} \\ &= \left( f_{X_0}(x_0) \exp \{ 2 \operatorname{Log} (1 + atx_0) \} \right) \Big|_{x_0 = \frac{x}{1-axt}} \\ &= f_{X_0} \left( \frac{x}{1-axt} \right) \exp \left\{ \operatorname{Log} \left( 1 + at \frac{x}{1-axt} \right)^2 \right\} \\ &= f_{X_0} \left( \frac{x}{1-axt} \right) \left( 1 + at \frac{x}{1-axt} \right)^2 \\ &= f_{X_0} \left( \frac{x}{1-axt} \right) \frac{1}{(1-axt)^2}. \end{aligned}$$

# Integral de Itô

## Lema Itô (versión particular)

### Lema 3: Lema de Itô (versión particular)

Sea  $f(x)$  una función determinista con la primera y segunda derivada continuas.

Entonces, para  $t_0 \leq s < t$  se tiene que,

$$f(W(t)) - f(W(s)) = \int_s^t f'(W(x)) dW(x) + \frac{1}{2} \int_s^t f''(W(x)) dx, \quad s < t.$$

### Ejemplo:

Si  $f(x) = x^2$  y  $X_t = W_t$ , obtenemos

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + t,$$

porque  $f'(x) = 2x$  y  $f''(x) = 2$ .

# Integral de Itô

## Lema Itô (versión general)

Sea  $f(t, x)$  una función de clase  $C^{1,2}$  y  $X(t)$  un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A^{(1)}(s, X(s)) \, ds + \int_{t_0}^t A^{(2)}(s, X(s)) \, dW(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(s, X(s)) &= \int_s^t \left\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \right\} dy \\ &\quad + \int_s^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \, dW(y). \end{aligned}$$

# Integral de Itô

## Lema Itô (versión general)

Si  $f(x) = x^3$  y  $X_t = W_t$ , tendremos

$$W_t^3 = 3 \int_0^t W_s^2 dW_s + 3 \int_0^t W_s ds,$$

ya que  $f'(x) = 3x^2$  y  $f''(x) = 6x$ .

Si  $n \geq 2$  es un número natural,

$$W_t^n = n \int_0^t W_s^{n-1} dW_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t W_s^{n-2} ds.$$

# Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una EDE

**Cálculo de los primeros tres momentos de una ecuación diferencial lineal**

$$\begin{aligned}dX(t) &= dt + X(t)dW(t), \\ X(0) &= 0.\end{aligned}$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A^{(1)}(s, X(s)) ds + \int_0^t A^{(2)}(s, X(s)) dW(s). \quad (4)$$

Si identificamos  $A^{(1)}(t, X(t)) = 1$ ,  $A^{(2)}(t, X(t)) = X(t)$  y  $X_0 = 0$ , la EDE (2) se puede escribir de la siguiente manera

$$X(t) = \int_0^t ds + \int_0^t X(s) dW(s) = t + \int_0^t X(s) dW(s). \quad (5)$$

# Momento de orden 1

$$\mathbb{E}[X(t)] = t + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s) \, dW(s)\right)\right]}_{=0} = t.$$

# Momento de orden 2

Lema de Itô para  $f(t,x) = x^2$ .

$$(X(t))^2 = 2 \int_0^t X(y) \, dy + \int_0^t (X(y))^2 \, dy + 2 \int_0^t (X(y))^2 \, dW(y).$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = 2 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}[X(y)]}_y \, dy + \int_0^t \mathbb{E}[(X(y))^2] \, dy + 2 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E}[(X(y))^2] \, dW(y)}_{=0},$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2]$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2t + m_2(t),$$

$$m_2(0) = 0,$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2] = 2e^t - 2t - 2.$$

# Momento de orden 3

Lema de Itô para  $f(t,x) = x^3$ .

$$(X(t))^3 = 3 \int_0^t (X(y))^2 dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 dW(y).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(t))^3] &= 3 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E} [(X(y))^2]}_{2e^y - 2y - 2} dy + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] dy \\ &\quad + 3 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] dW(y)}_{=0}. \end{aligned}$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3]$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = 3(2e^t - 2t - 2) + 3m_3(t),$$

$$m_3(0) = 0,$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3] = 2t + \frac{8}{3} - 3e^t + \frac{1}{3}e^{3t}.$$

# ¿Dudas / Aportaciones?





[www.unir.net](http://www.unir.net)