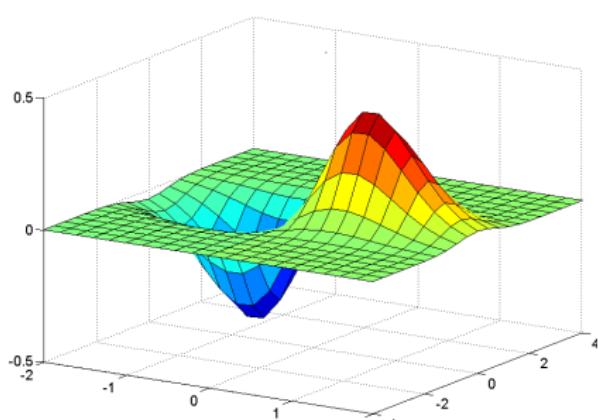


Tema 7: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs hiperbólicas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Eva García Villalba



1 Problemas de contorno hiperbólicos

- Método explícito
- Método implícito

2 Ejercicios propuestos

3 Referencias

El ejemplo característico de un problema de contorno hiperbólico es la [ecuación de ondas](#) con numerosas aplicaciones en Física e Ingeniería. Una de las descripciones más simples es la dada por

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

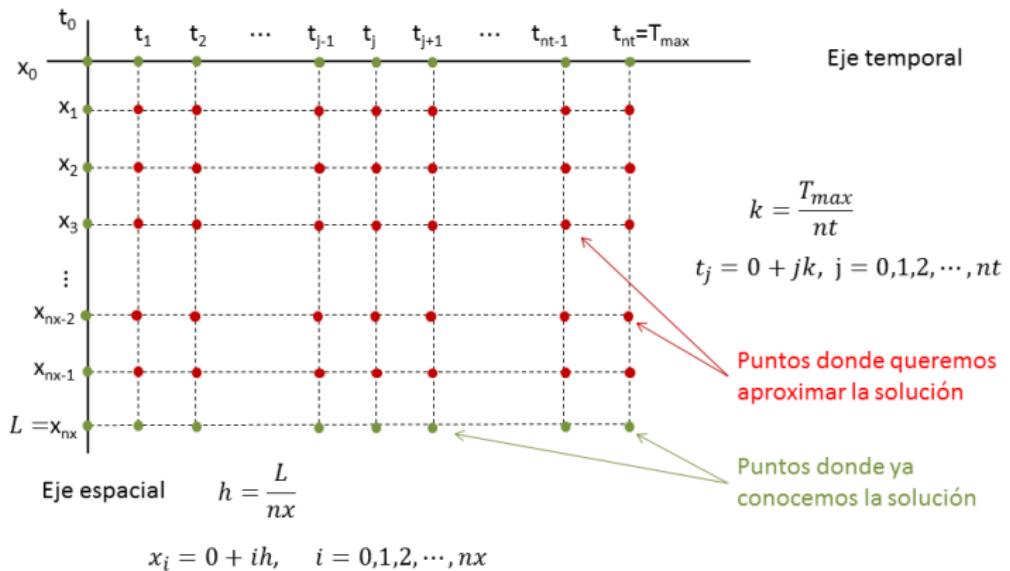
donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

Dependiendo del tipo de diferencias finitas que utilicemos para aproximar las parciales segundas de la ecuación, obtendremos dos tipos de métodos numéricos:

- Métodos explícitos
- Métodos implícitos

Problemas hiperbólicos

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante **diferencias finitas**, en **sistemas de ecuaciones** lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

Diferencias centrales en u_{tt} y u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} = \alpha^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, nx-1$, $j = 1, \dots, nt-1$,

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, nx-1, \quad j = 1, \dots, nt-1.$$

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 1, \dots, nx-1, \quad j = 1, \dots, nt-1.$$

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

Fijando el índice j y variando el índice i , $i = 1, \dots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)}, \quad j = 1, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2(1 - \lambda^2) & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1 - \lambda^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(1 - \lambda^2) \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

¿Cómo calculamos $u^{(1)}$, es decir, $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \dots, nx - 1$?

- Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(x_i) \Rightarrow u_{i,1} = f(x_i) + kg(x_i), i = 1, 2, \dots, nx - 1$$

aproximación de orden 1, $O(k + h^2)$.

- Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) &\approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} = f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x, 0) \\ &= f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x), \end{aligned}$$

Como $f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, evaluando en x_i , resulta

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + kg(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1$$

aproximación de orden 2, $O(k^2 + h^2)$.

Método explícito ya que calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de las soluciones en los instantes t_j y t_{j-1} , directamente, sin resolver ningún sistema

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente si $\lambda \leq 1$,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Algoritmo del método explícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

- Definir los elementos $h = \frac{L}{nx}$, $k = \frac{T}{nt}$, $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$.
- Introducimos la matriz tridiagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Construimos la matriz $A = 2(I - \lambda^2 M)$
- Introducimos las soluciones para t_0 , $u^{(0)}$ y para t_1 , $u^{(1)}$
- Para $j = 1, 2, \dots, nt - 1$
$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} + u^{(j-1)}$$

Ejemplo

$$u_{tt}(x, t) - 4u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad x \in [0, 1]$$

Solución exacta: $u(x, t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método explícito con:

- (a) $h = 0.1, k = 0.05$
- (b) $h = 0.1, k = 0.1$.

x_i	$u_{i,20}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,20} $	$u_{i,10}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,10} $
0.0	0	0	0	0
0.1	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0140e-03
0.2	5.8779e-01	0	5.8585e-01	1.9308e-03
0.3	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6555e-03
0.4	9.5106e-01	1.1102e-16	9.4793e-01	3.1226e-03
0.5	1.0000e+00	0	9.9672e-01	3.2845e-03
0.6	9.5106e-01	3.3307e-16	9.4794e-01	3.1204e-03
0.7	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6590e-03
0.8	5.8779e-01	2.2204e-16	5.8586e-01	1.9274e-03
0.9	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0161e-03
1.0	0	1.2246e-16	0	1.2246e-16

Método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), x \in [0, L]$$

Aproximamos u_{tt} mediante una diferencia central

$$u_{tt}(x_i, t_j) \rightarrow \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Aproximamos u_{xx} mediante la media entre la diferencia central en t_{j+1}

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

y la diferencia central en t_{j-1}

$$\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

El esquema en diferencias que se obtiene es el siguiente:

Método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\ + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})],$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,

o bien, llamando $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ y llevando a la izquierda las variables correspondientes al instante más alto

$$(1 + \lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = \\ = 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1 + \lambda^2)u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, nt - 1,$$

donde

Método implícito para la ecuación de ondas

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1 + \lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1 + \lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -(1 + \lambda^2) \end{pmatrix}$$

Método implícito con el que calculamos la solución en el instante t_{j+1} resolviendo un sistema lineal que tiene como matriz de coeficientes A y cuyo término independiente es $2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$, que depende de la solución en los instantes t_j y t_{j-1}

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente sin necesidad de condiciones,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.
- $u^{(1)}$ se calcula como en el método explícito.

Algoritmo del método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

- Definir los elementos $h = \frac{L}{nx}$, $k = \frac{T}{nt}$, $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$.
- Introducimos la matriz tridiagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Construimos la matriz $B = -I - \lambda^2 M$
- Introducimos las soluciones para t_0 , $u^{(0)}$ y para t_1 , $u^{(1)}$
- Construimos los vectores

$$dp = (1 + \lambda^2) \text{ones}(nx - 1, 1)$$

$$ds = -\frac{\lambda^2}{2} \text{ones}(nx - 2, 1)$$
$$di = ds$$

- Para $j = 1, 2, \dots, nt - 1$

$$d = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$$

$$u^{(j+1)} = \text{Crout}(dp, ds, di, d)$$

Ejemplo

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 2 - |x - 2|, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad x \in [0, 4]$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 4$ mediante el método implícito con $h = 1$ y $k = 0.5$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$t=0$	0.0	1.0000	2.0000	1.0000	0.0
$t=0.5$	0.0	1.0000	1.7500	1.0000	0.0
$t=1$	0.0	0.9184	1.1837	0.9184	0.0
$t=1.5$	0.0	0.6926	0.4824	0.6926	0.0
$t=2$	0.0	0.2912	-0.1699	0.2912	0.0
$t=2.5$	0.0	-0.2449	-0.6647	-0.2449	0.0
$t=3$	0.0	-0.7996	-0.9953	-0.7996	0.0
$t=3.5$	0.0	-1.2231	-1.2214	-1.2231	0.0
$t=4$	0.0	-1.3966	-1.3981	-1.3966	0.0

- **Problema 1** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t, \quad u(x, 0) = 3 \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

El instante máximo que nos interesa es $T = 2$ y la solución exacta es $u(x, t) = 3 \cos t \sin x$. Se pide:

- Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante T , tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.
- Aproxima, mediante el método implícito, la solución del problema en el instante T , tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.

- **Problema 2** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + xu_t(x, t) - u(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales
 $u(x, 0) = \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 0$, $x \in [0, 1]$.

- Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, 1]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, donde T denota el instante máximo.
- A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 1000 en el temporal.
- Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

- **Problema 3** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x, t) + 2u_{xt} - 3u_{tt}(x, t) = \cos \pi x 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 2t$, $\forall t$ y la condición inicial

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x - 2x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Se pide:

- Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.
- Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k + h^2)$. Describe la expresión matricial de dicho esquema.
- Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.
- Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.

- **Problema 4** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx} + e^{-t}, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = e^{-t}$, $u_x(\pi, t) = -3 \cos t$, $\forall t$ y la condición inicial

$$u(x, 0) = 3 \sin x + 1, \quad u_t(x, 0) = -1, \quad x \in [0, 1].$$

Se pide:

- Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, \pi]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, donde T denota el instante máximo.
- A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el temporal.
- Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

Solución Problema 4

Método explícito

- Consideremos $h = \pi/nx$ y $k = T_{\text{max}}/nt$ tal que

$$x_i = 0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, nx - 1, nx, \quad t_j = 0 + jk, \quad j = 0, 1, \dots, nt - 1, nt.$$

- Diferencias finitas centrales para ambas derivadas parciales:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + e^{-t_j},$$

$$i = 1, \dots, nx - 1, nx; \quad j = 1, \dots, nt - 1.$$

- Llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

$$i = 1, \dots, nx - 1, nx; \quad j = 1, \dots, nt - 1.$$

- Modificamos la expresión para $i = nx$:

$$u_{nx,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{nx,j} + \lambda^2(\textcolor{red}{u_{nx+1,j}} + u_{nx-1,j}) - u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j}$$

con la segunda condición inicial

$$u_x(\pi, t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} = -3 \cos t_j \rightarrow \textcolor{red}{u_{nx+1,j}} = u_{nx-1,j} - 6h \cos t_j.$$

Solución Problema 4

- Por tanto,

$$u_{nx,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{nx,j} + 2\lambda^2 u_{nx-1,j} - u_{nx,j-1} - 6h\lambda^2 \cos t_j + k^2 e^{-t_j}.$$

- Como en cualquier problema hiperbólico, completamos la solución en el instante t_1 para obtener orden $O(k^2 + h^2)$:

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + kg(x_i) + e^{-t_1} \\ &= (1 - \lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + kg(x_i) + e^{-t_1} \end{aligned}$$

- Para $i = nx \rightarrow u_{nx+1,0} = u_{nx-1,0} - 6h \cos t_0$. Por tanto,

$$u_{nx,1} = (1 - \lambda^2)u_{nx,0} + \lambda^2 u_{nx-1,0} - \frac{\lambda^2}{2}6h \cos t_0 + kg(x_{nx}) + e^{-t_1}.$$

Método implícito

- Utilizando diferencias centradas para u_{tt} y la media de las diferencias centradas para u_{xx} en los instantes t_{j+1} y t_{j-1} , obtenemos:

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\ + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})] + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1, nx$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,

- Llamando $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ y llevando a la izquierda las variables en el instante más alto:

$$(1 + \lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = \\ = 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1 + \lambda^2)u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1, nx$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,

Solución Problema 4

- Para $i = nx$:

$$\begin{aligned}(1 + \lambda^2)u_{nx,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j+1} + u_{nx-1,j+1}) &= \\ = 2u_{nx,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j-1} + u_{nx-1,j-1}) - (1 + \lambda^2)u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j},\end{aligned}$$

Pero,

$$u_{nx+1,j+1} = u_{nx-1,j+1} - 6h \cos t_{j+1} \quad \text{y} \quad u_{nx+1,j-1} = u_{nx-1,j-1} - 6h \cos t_{j-1}.$$

- La última ecuación resulta:

$$\begin{aligned}(1 + \lambda^2)u_{nx,j+1} - \lambda^2 u_{nx-1,j+1} &= \\ = 2u_{nx,j} + \lambda^2 u_{nx-1,j-1} - (1 + \lambda^2)u_{nx,j-1} - 3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1}) + k^2 e^{-t_j}.\end{aligned}$$

- Matricialmente:

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} + b_j + c_j$$

Método implícito para la ecuación de ondas

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1 + \lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1 + \lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1 + \lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & -(1 + \lambda^2) \end{pmatrix},$$

$$b_j = ke^{-t_j} [1, 1, 1, \dots, 1, 1]^T,$$

$$c_j = \left[\frac{\lambda^2}{2} (e^{-t_{j+1}} + e^{-t_{j-1}}), 0, 0, \dots, 0, -3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1}) \right]^T$$

Referencias

-  S LARSSON, V THOMÉE, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.
-  T. MYINT-U, L. DEBNATH, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.
-  R. BURDEN, J. FAIRES, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
-  S.C. CHAPRA, R.P. CANALE, *Métodos numéricos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.
-  L. LAPIDUS, G. PINDER, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.
-  A. CORDERO, J.L. HUESO, E. MARTÍNEZ, J.R. TORREGROSA, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
-  J. MATHEWS, K. FINK, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.