Planteamiento Para EDP Parabólica

Actividad Laboratorio 3

Métodos Numéricos Aplicados II

UNIR

Sea la siguiente EDP de segundo orden:

$$u_t = u_{xx} + t^2 u + x cos(xt) \quad x \in [0,1];\ t > 0$$

Tenemos la CI:

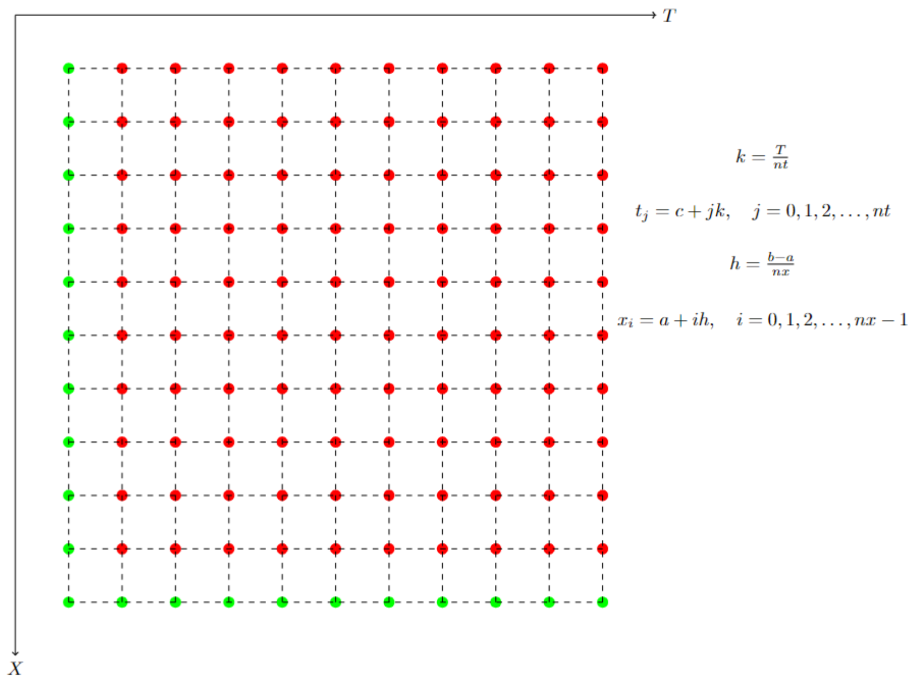
$$u(x,0) = 0$$

Y las condiciones de contorno mixtas:

$$u_x(0,t) = t;\ u(1,t) = sin(t)$$

Planteamiento Inicial:

Dadas las condiciones de contorno y la condición inicial podemos dibujar las zonas del mallado donde tenemos incógnitas:



Así, los puntos rojos representan aquellos puntos donde no conocemos la solución del problema.

Método Explícito

Para el método explicito discretizaremos la EDP aplicando diferencias finitas progresivas en u_t y centradas en u_{xx} para $i = 0,1,2...nx-1$ y $j = 1,2,3...nt$

La discretización del problema queda de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j+1})} - \mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{i+1,j})} - 2\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} + \mathrm{u}_{(\mathrm{i-1,j})}}{\mathrm{h}^2} + \mathrm{t}_\mathrm{j}^2 u_{(i,j)} + x_i cos(x_i t_j)$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por k, establecemos $\lambda = \frac{k}{h^2}$ y despejamos $u_{(i,j+1)}$ quedando la siguiente expresión general:

$$\boldsymbol{u_{(i,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(i,j)} + \lambda(u_{(i+1,j)} + u_{(i-1,j)}) + kx_i cos(x_i t_j)}$$

Seguidamente particularizamos para i=0, i=nx-1 para i=1 con una posición arbitraria de j

Para i = 0

$$u_{(i,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(i,j)} + \lambda(u_{(i+1,j)} + u_{(i-1,j)}) + kx_i cos(x_i t_j)$$

$$u_{(0,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(0,j)} + \lambda(u_{(1,j)} + u_{(-1,j)}) + kx_1 cos(x_1 t_j)$$

El término $u_{(-1,j)}$ se sale del dominio de trabajo por lo que optamos por usar la primera condición de contorno (CC1)

$$u_x(0,t) = t$$

Discretizando con diferencias centradas y despejan $u_{(-1,j)}$ obtenemos:

$$\mathrm{u}_{(-1,\mathrm{j})} = \mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} - 2\mathrm{ht}_\mathrm{j}$$

Reemplazando en la formula general se obtiene

$$u_{(0,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(0,j)} + \lambda(u_{(1,j)} + \mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} - 2\mathrm{ht}_\mathrm{j}) + kx_0 cos(x_0 t_j)$$

Operando y reordenando se obtiene:

$$u_{(0,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(0,j)} + \lambda(2u_{(1,j)} - 2\mathrm{ht}_\mathrm{j}) + kx_1 cos(x_1 t_j)$$

Para i = 1

$$u_{(1,j+1)} = (1 - 2\lambda + kt_j^2)u_{(1,j)} + \lambda(u_{(2,j)} + u_{(0,j)}) + kx_1 cos(x_1 t_j)$$

Para i = nx-1

$$u_{(nx-1,j+1)} = CC2 = sin(t_{j+1})$$

Método Implícito

Se trata de un método incondicionalmente estable con orden convergencia $O(k + h^2)$. Para discretizar aplicaremos diferencias finitas regresivas en u_t y centradas en u_{xx}. La aplicación de este método implica la resolución del sistema lineal:

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)} + d_j$$

Con la discretización de la EDP siguiendo el método implícito se obtiene:

$$\frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} - \mathrm{u}_{(\mathrm{i,j-1})}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{i+1,j})} - 2\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} + \mathrm{u}_{(\mathrm{i-1,j})}}{\mathrm{h}^2} + \mathrm{t}_\mathrm{j}^2 u_{(i,j)} + x_i cos(x_i t_j)$$

Tras seguir las mismas operaciones del método anterior (estableciendo expresión de λ) y agrupando incógnitas en el lado izquierdo de la igualdad y términos conocidos en el lado derecho, se obtiene la siguiente expresión general

$$\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} - \mathrm{u}_{(\mathrm{i,j-1})} = \lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i+1,j})} - 2\lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} + \lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i-1,j})} + \mathrm{kt}_\mathrm{j}^2 u_{(i,j)} + \mathrm{k}x_i cos(x_i t_j)$$

$$- \lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i+1,j})} + 2\lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} + \mathrm{u}_{(\mathrm{i,j})} - \mathrm{kt}_\mathrm{j}^2 u_{(i,j)} - \lambda\mathrm{u}_{(\mathrm{i-1,j})} = \mathrm{u}_{(\mathrm{i,j-1})} + \mathrm{k}x_i cos(x_i t_j)$$

$$\mathbf{- \lambda u_{(i+1,j)} + (1 + 2\lambda - kt_j^2)u_{(i,j)} - \lambda u_{(i-1,j)} = u_{(i,j-1)} + kx_i cos(x_i t_j)}$$

Particularizando se tiene:

Para i = 0

$$- \lambda\mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} + (1 + 2\lambda - \mathrm{kt}_\mathrm{j}^2)\mathrm{u}_{(0,\mathrm{j})} - \lambda\mathrm{u}_{(-1,\mathrm{j})} = \mathrm{u}_{(0,\mathrm{j-1})} + \mathrm{kx}_0\cos(\mathrm{x}_0\mathrm{t}_\mathrm{j})$$

De la CC1 se sabe se obtiene la expresión de $\mathrm{u}_{(-1,\mathrm{j})}$

Por tanto:

$$\mathrm{u}_{(-1,\mathrm{j})} = \mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} - 2\mathrm{ht}_\mathrm{j}$$

Así:

$$- \lambda\mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} + (1 + 2\lambda - \mathrm{kt}_\mathrm{j}^2)\mathrm{u}_{(0,\mathrm{j})} - \lambda\mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} + 2\lambda\mathrm{ht}_\mathrm{j} = \mathrm{u}_{(0,\mathrm{j-1})} + \mathrm{kx}_0\cos(\mathrm{x}_0\mathrm{t}_\mathrm{j})$$

Reordenando

$$\mathbf{- \lambda u_{(1,j)} + (1 + 2\lambda - kt_j^2)u_{(0,j)} - \lambda u_{(1,j)} = u_{(0,j-1)} - 2\lambda ht_j + kx_0 cos(x_0 t_j)}$$

Para i = 1

$$- \lambda\mathrm{u}_{(2,\mathrm{j})} + (1 + 2\lambda - \mathrm{kt}_\mathrm{j}^2)\mathrm{u}_{(1,\mathrm{j})} - \lambda\mathrm{u}_{(0,\mathrm{j})} = \mathrm{u}_{(1,\mathrm{j-1})} + \mathrm{kx}_1\cos(\mathrm{x}_1\mathrm{t}_\mathrm{j})$$

Para i = nx-1

$$\mathbf{- \lambda u_{(nx,j)} + (1 + 2\lambda - kt_j^2)u_{(nx-1,j)} - \lambda u_{(nx-2,j)} = u_{(nx-1,j-1)} + kx_{nx-1} cos(x_{nx-1} t_j)}$$

Con la CC2 se sabe que:

$$\mathrm{u}_{(\mathrm{nx,j})} = sin(t_j)$$

Con los términos conocidos al lado derecho de la igualdad se tiene:

$$\mathbf{- \lambda u_{(nx-2,j)} + (1 + 2\lambda - kt_j^2)u_{(nx-1,j)} = u_{(nx-1,j-1)} + \lambda sin(t_j) + kx_{nx-1} cos(x_{nx-1} t_j)}$$

Las matrices $A, u^{(j)}, u^{(j-1)} y\ d_j$ para este EDP quedan de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda - kt_j^2 & -2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda - kt_j^2 & -\lambda & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1+2\lambda - kt_j^2 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda - kt_j^2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{(0,j)} \\ u_{(1,j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(nx-1,j)} \end{bmatrix}$$

$$u^{(j-1)} = \begin{bmatrix} u_{(0,j-1)} \\ u_{(1,j-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(nx-1,j-1)} \end{bmatrix}$$

$$d_j = \begin{bmatrix} -2\lambda h t_j + k x_0 \cos(x_0 t_j) \\ k x_1 \cos(x_1 t_j) \\ \vdots \\ k x_{nx-2} \cos(x_{nx-2} t_j) \\ \lambda \sin(t_j) + k x_{nx-1} \cos(x_{nx-1} t_j) \end{bmatrix}$$

Método de Crank-Nicholson

Queremos resolver la ecuación matricial:

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d_j$$

Aplicamos diferencias progresivas en u_t para t_j y regresivas para t_{j+1}. Aplicaremos diferencias centradas para u_{xx} y luego haremos una media aritmética

Para t_j:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + t_j^2 u_{i,j} + x_i cos(x_i t_j)$$

Para $t_j + 1$:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + t_j^2 u_{i,j+1} + x_i cos(x_i t_{j+1})$$

La media aritmética entre ambas expresiones resulta en:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + t_j^2 u_{i,j} + t_j^2 u_{i,j+1} + x_i cos(x_i t_j) + x_i cos(x_i t_{j+1})]$$

Para simplificar expresiones diremos que:

$$D = x_i cos(x_i t_j) + x_i cos(x_i t_{j+1})$$

Por tanto:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + t_j^2 u_{i,j} + t_j^2 u_{i,j+1} + D]$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por k y tenemos

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{k}{2}[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + t_j^2 u_{i,j} + t_j^2 u_{i,j+1} + D]$$

Decimos también que:

$$\lambda = \frac{k}{h^2}$$

Por tanto:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{k}{2}t_j^2 u_{i,j} + \frac{k}{2}t_j^2 u_{i,j+1} + \frac{k}{2}D$$

Posicionando los términos de $j + 1$ al lado izquierdo de la igualdad, agrupando y aplicando factor común nos queda:

$$(1 + \lambda - \frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{k}{2}D$$

Para i = 0

$$-\frac{\lambda}{2}u_{i+1,j+1} + (1 + \lambda - \frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2} u_{i-1,j} + \frac{k}{2}D$$

$$-\frac{\lambda}{2}u_{1,j+1} + (1 + \lambda - \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{-1,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j} + \frac{\lambda}{2} u_{-1,j} + \frac{k}{2}D$$

Términos $u_{-1,j}$ y $u_{-1,j+1}$se salen del dominio por tanto recurrimos a condiciones de contorno:

$$u_x(0,t) = t$$

$$\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} = t$$

$$u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j+1} - 2ht_{j+1}$$

$$u_{i-1,j} = u_{i+1,j} - 2ht_j$$

Reemplazamos ambas expresiones en la ecuación anterior:

$$-\frac{\lambda}{2}u_{1,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{1,j+1} - 2ht_{j+1}) = \frac{\lambda}{2}u_{1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{1,j} - 2ht_j) + \frac{k}{2}D$$

Luego:

$$-\frac{\lambda}{2}u_{1,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{1,j+1} + \lambda ht_{j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j} + \frac{\lambda}{2}u_{1,j} - \lambda ht_j + \frac{k}{2}D$$

$$-\lambda u_{1,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j+1} = \lambda u_{1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j} - \lambda ht_j - \lambda ht_{j+1} + \frac{k}{2}D$$

Reordenando:

$$\mathbf{(1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} = (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} - \lambda ht_j - \lambda ht_{j+1} + \frac{k}{2}D}$$

Para i = 1:

$$-\frac{\lambda}{2}u_{2,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{1,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{0,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{2,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{1,j} + \frac{\lambda}{2}u_{0,j} + \frac{k}{2}D$$

Reordenando:

$$\mathbf{-\frac{\lambda}{2}u_{0,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{1,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{2,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{0,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{1,j} + \frac{\lambda}{2}u_{2,j} + \frac{k}{2}D}$$

Para i = nx-1

$$-\frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j} + \frac{k}{2}D$$

$$-\frac{\lambda}{2}u_{nx-2,j+1} + (1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{nx-1,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{nx,j+1} = \frac{\lambda}{2}u_{nx-2,j} + (1 - \lambda + \frac{k}{2}t_j^2)u_{nx-1,j} + \frac{\lambda}{2}u_{nx,j} + \frac{k}{2}D$$

Los valores de $\mathrm{u}_{\mathrm{nx,j+1}}$ y $\mathrm{u}_{\mathrm{nx,j}}$ son conocidos:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{nx,j+1}} = sin(t_{j+1})$$

$$\mathrm{u}_{\mathrm{nx,j}} = sin(t_j)$$

Por tanto:

$$-\frac{\lambda}{2}\mathrm{u}_{\mathrm{nx-2,j+1}} + (1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2)\mathrm{u}_{\mathrm{nx-1,j+1}} - \frac{\lambda}{2}(sin(t_{j+1})) = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{u}_{\mathrm{nx-2,j}} + (1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2)\mathrm{u}_{\mathrm{nx-1,j}} + \frac{\lambda}{2}(sin(t_j)) + \frac{\mathrm{k}}{2}\mathrm{D}$$

Términos conocidos se agrupan a la derecha de la igualdad, por tanto:

$$\boldsymbol{(1+\lambda-\frac{k}{2}t_j^2)u_{nx-1,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{nx-2,j+1} = (1\,-\,\lambda+\frac{k}{2}t_j^2)u_{nx-1,j} + \frac{\lambda}{2}\,u_{nx-2,j} + \frac{\lambda}{2}(\sin(t_j)) + \frac{\lambda}{2}(\sin(t_{j+1})) + \frac{k}{2}D}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & -\frac{\lambda}{2} & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda-\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & 1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & \frac{\lambda}{2} & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1\,-\,\lambda+\frac{\mathrm{k}}{2}t_j^2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(j+1)} = \begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{nx-1,j+1} \end{bmatrix}$$

$$u^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix}$$

$$d_j = \begin{bmatrix} -\lambda \mathrm{h}(\mathrm{t_j} + \mathrm{t_{j+1}}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{2}(\sin(\mathrm{t_j})) + \frac{\lambda}{2}(\sin(\mathrm{t_{j+1}})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{2}((x_0 cos(x_0 t_j) + x_0 cos(x_0 t_{j+1})) \\ \frac{k}{2}((x_1 cos(x_1 t_j) + x_1 cos(x_1 t_{j+1})) \\ \frac{k}{2}((x_2 cos(x_2 t_j) + x_2 cos(x_2 t_{j+1})) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{k}{2}((x_{nx-1} cos(x_{nx-1} t_j) + x_{nx-1} cos(x_{nx-1} t_{j+1})) \end{bmatrix}$$