



$$\text{Cov}(t_1, t_2) = \mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) - \underbrace{\mathbb{E}(X(t_1))}_{e^{t_1}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X(t_2))}_{e^{t_2}} = \underbrace{e^{t_1+t_2}}_{e^{t_1+t_2}}$$

$$X(t_1) \cdot X(t_2) = e^{\frac{1}{2}(t_1+t_2) - (W(t_1) + W(t_2))}$$

luego:

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)} \mathbb{E}(e^{-(W(t_1) + W(t_2))})$$

(debes saber que...

$$W(t_1) + W(t_2) \stackrel{d}{=} 2X_1 + X_2$$

$$\text{con } \begin{cases} X_1 \sim N(0, \min(t_1, t_2)) \\ X_2 \sim N(0, |t_1 - t_2|) \end{cases}$$

y como  $X_1, X_2$  independientes y normales  
y sabiendo que si  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$\text{entonces } \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2\right)$$

con  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

es decir la combinación lineal de normales  
es una normal de media la misma  
combinación lineal de las medias y  
de varianzas la misma combinación de  
coeficientes di al cuadrado de las varianzas

$$\text{luego } W(t_1) + W(t_2) \sim N(0, 4\min(t_1, t_2) + |t_1 - t_2|)$$

→

Como  $\min(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|}{2}$

entonces  $4 \min(t_1, t_2) + |t_1 - t_2| = \underline{\underline{2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|}}$

por tanto,

$$W(t_1) + W(t_2) \sim N(0, 2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|)$$

*para aprenderse...*

y sabiendo esto, y volviendo a...

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot \mathbb{E}\left(e^{-(W(t_1) + W(t_2))}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot e^{\frac{1}{2}(2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot e^{(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}|t_1 - t_2|}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}|t_1 - t_2|} \cdot e^{t_1 + t_2}$$


$$= e^{\frac{t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|}{2}} \cdot e^{t_1 + t_2}$$

$$= e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2}, \text{ luego}$$

$$\text{Cov}(t_1, t_2) = e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2} - e^{t_1 + t_2} = e^{t_1 + t_2} (e^{\min(t_1, t_2)} - 1)$$

*y esto es la correlación entre  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$*

 ¡uola!