

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

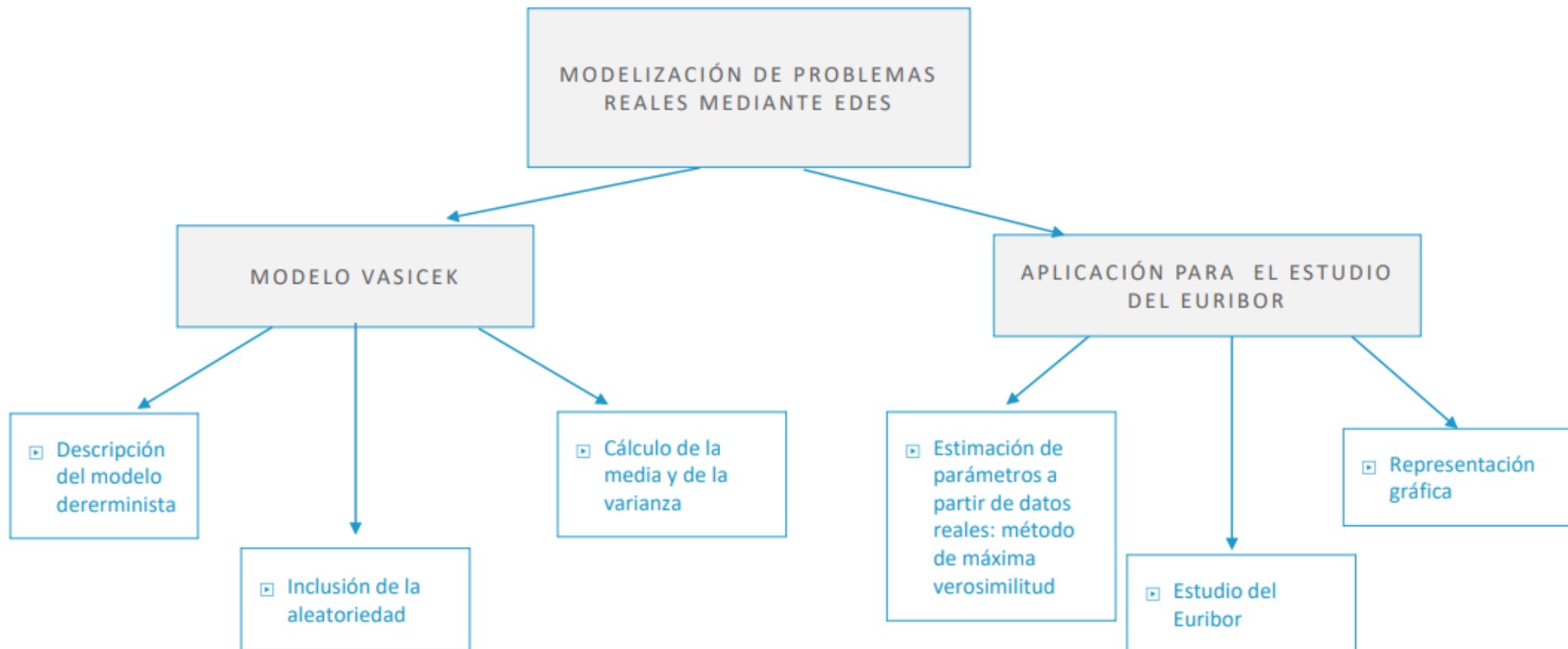
Máster en Ingeniería Matemática y Computación

---> Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 10. Modelización de un problema real mediante EDE

Tema 10

Contenidos - Esquema



Objetivos

- ▶ Descripción y motivación del modelo de Vasicek desde un punto de vista determinista
- ▶ Aleatorización del modelo de Vasicek.
- ▶ **Resolución, cálculo de la media y de la varianza utilizando el lema de Itô (Tema 9).**
- ▶ **Métodos de estimación de parámetros. Método de máxima verosimilitud.**

Modelo de Vasicek determinista

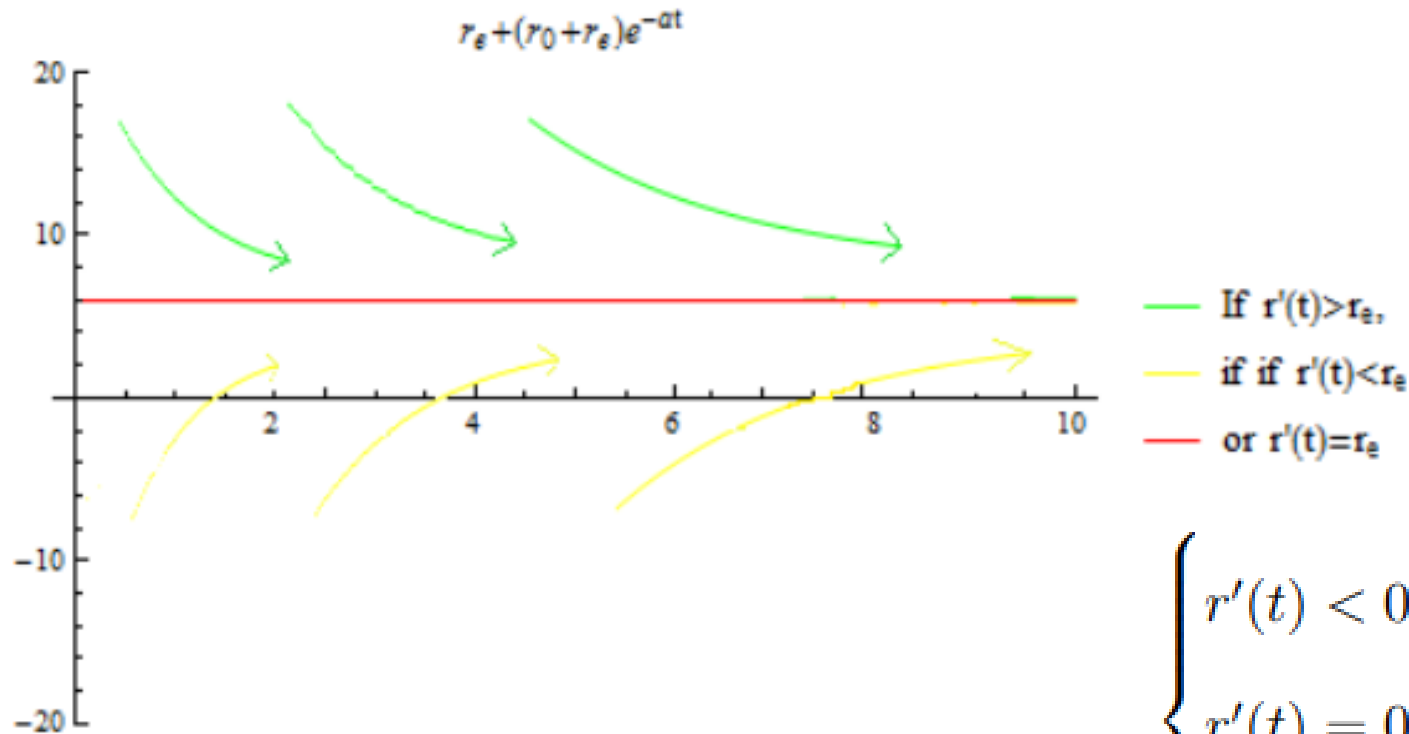
El modelo Vasicek es un modelo de equilibrio y se utiliza para predecir los tipos de interés a largo plazo mediante la simulación de tipos de interés a corto plazo. Además, tiene en cuenta que los tipos de interés son distintos en diferentes períodos de tiempo (estructura temporal de los tipos de interés).

$$\begin{cases} r'(t) = \alpha(r_e - r(t)), \\ r(0) = r_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $r(t)$ es la tasa de interés instantáneo durante el periodo de tiempo $[0, T]$, con $T > 0$, α es el factor de velocidad relativa de convergencia de $r(t)$ hacia r_e , siendo r_e la tasa de interés a largo plazo. Este modelo es fácil de entender si pensamos que la tasa de variación de interés es directamente proporcional a la diferencia entre r_e y la tasa de interés, $r(t)$, en este momento.

Modelo de Vasicek determinista

Representación gráfica del modelo

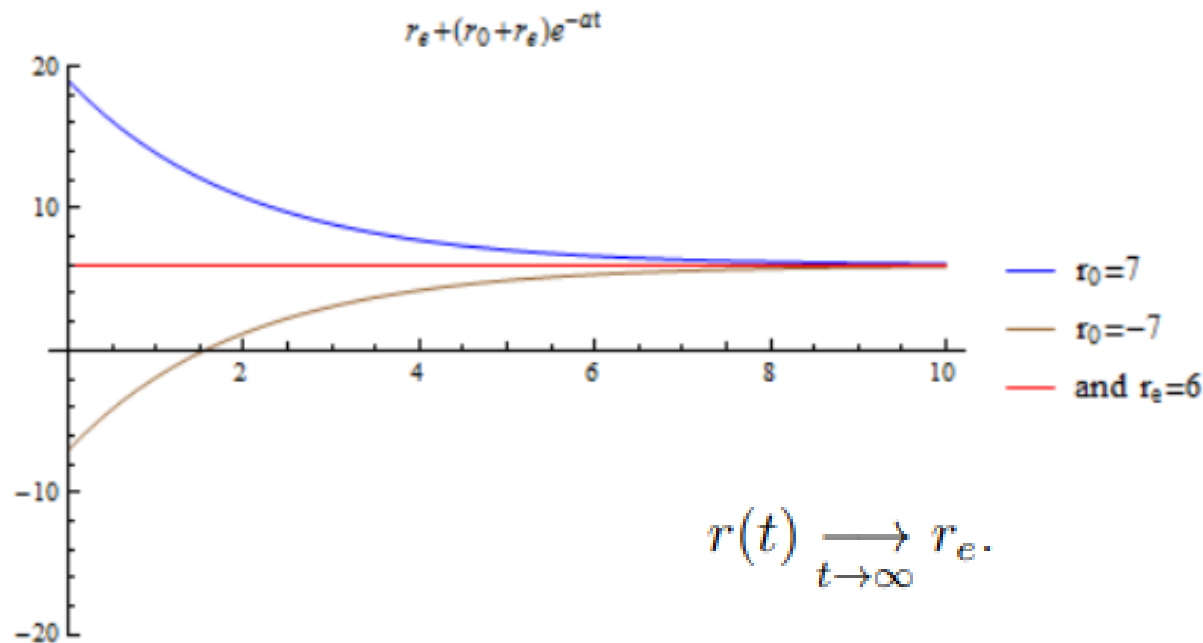


$$\begin{cases} r'(t) < 0 & \text{si } r_e < r(t), \\ r'(t) = 0 & \text{si } r_e = r(t), \\ r'(t) > 0 & \text{si } r_e > r(t). \end{cases}$$

Modelo de Vasicek determinista

Representación gráfica de la solución del modelo $r(t)$

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-\alpha(t-0)} \left(r_0 - \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \alpha r_e ds \right) = e^{-\alpha t} \left(r_0 + \frac{\alpha r_e}{\alpha} [e^{\alpha s}]_{s=0}^{s=t} \right) \\ &= e^{-t\alpha} (r_0 + r_e e^{t\alpha} - r_e) = r_e + (r_0 - r_e) e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$



Modelo de Vasicek con incertidumbre

¿Cómo aleatorizamos el modelo de Vasicek?

Consideraremos que la tasa de interés en el futuro viene definida por

$$r_e + \lambda W'(t),$$

Tipo de modelo	Tasa de interés en el equilibrio
Determinístico	r_e es fijo y conocido $\forall t \in [0, T]$
Estocástico	$r_e \longrightarrow r_e + \lambda W'(t), \lambda > 0$

Sea $\lambda > 0$ la intensidad del ruido, entonces formalmente se tiene,

$$r'(t) = \alpha[r_e - r(t)],$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha[r_e + \lambda W'(t) - r(t)],$$

$$dr(t) = \alpha(r_e - r(t))dt + \alpha \lambda W'(t)dt,$$

$$dr(t) = \alpha(r_e - r(t))dt + \alpha \lambda dW(t),$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Calculamos la solución aplicando Lema de Itô

Encontramos los coeficientes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$:

$$\begin{cases} dr(t) = \alpha(r_e - r(t))dt + \sigma dW(t), & \alpha, \sigma > 0, \\ r(0) = r_0. \end{cases}$$

$$A^{(1)}(t, r(t)) = \alpha[r_e - r(t)] \text{ y } A^{(2)}(t, r(t)) = \sigma$$

$$f(t, r) = e^{\alpha t} r$$

$$f_1(t, r) = \alpha e^{\alpha t} r = \frac{\partial f(t, r)}{\partial t},$$

$$f_2(t, r) = e^{\alpha t} = \frac{\partial f(t, r)}{\partial r},$$

$$f_{22}(t, r) = 0 = \frac{\partial^2 f(t, r)}{\partial r^2}.$$

$$e^{\alpha t} r(t) - r_0 = \int_0^t \left(\alpha e^{\alpha y} r(y) + \alpha[r_e - r(y)]e^{\alpha y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0 \right) dy + \int_0^t \sigma e^{\alpha y} dW(y),$$

$$e^{\alpha t} r(t) = r_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha y} [r(y) + r_e - r(y)] dy + \sigma \int_0^t e^{\alpha y} dW(y),$$

$$r(t) = e^{-\alpha t} \left(r_0 + r_e \int_0^t \alpha e^{\alpha y} dy + \sigma \int_0^t e^{\alpha y} dW(y) \right),$$

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha y} dW(y).$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Media – Aplicando lema de Itô

Aplicando el Lema de Itô tenemos que

$$f(t, r) = r \Rightarrow \begin{cases} f_1(t, r) = 0, \\ f_2(t, r) = 1, \\ f_{22}(t, r) = 0. \end{cases}$$
$$r(t) - r_0 = \int_0^t \alpha[r_e - r(y)] \cdot 1 dy + \int_0^t \sigma dW(y)$$
$$r(t) = r_0 + \alpha \int_0^t [r_e - r(y)] dy + \sigma \int_0^t dW(y).$$

Considerando el operador media, tenemos

$$\mathbb{E}[r(t)] = r_0 + \alpha \int_0^t (r_e - \mathbb{E}[r(y)]) dy + \sigma \mathbb{E} \left[\int_0^t dW(y) \right].$$

Denotamos por $m_1(t) = \mathbb{E}[r(t)]$, y sustituimos en (6).

$$m_1(t) = r_0 + \alpha \int_0^t (r_e - m_1(y)) dy.$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Varianza – Aplicando lema de Itô

Encontramos los coeficientes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}r(t) = \alpha(r_e - r(t))\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t), & \alpha, \sigma > 0, \\ r(0) = r_0. \end{cases}$$

Aplicando Lema de Itô: $A^{(1)}(t, r(t)) = \alpha[r_e - r(t)]$ y $A^{(2)}(t, r(t)) = \sigma$

$$f(t, r) = r^2$$

$$\begin{cases} f_1(t, r) = 0, \\ f_2(t, r) = 2r, \\ f_{22}(t, r) = 2. \end{cases} \quad \begin{aligned} r^2(t) - r_0^2 &= \int_0^t \left(\alpha[r_e - r(y)] 2r(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 2 \right) \mathrm{d}y + \int_0^t \sigma 2r(y) \mathrm{d}W(y), \\ r^2(t) &= r_0^2 + \int_0^t (\sigma^2 + 2\alpha r_e r(y) - 2\alpha r^2(y)) \mathrm{d}y + 2\sigma \int_0^t r(y) \mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Varianza – Aplicando lema de Itô

$$r^2(t) - r_0^2 = \int_0^t \left(\alpha[r_e - r(y)] 2r(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 2 \right) dy + \int_0^t \sigma 2r(y) dW(y),$$

$$r^2(t) = r_0^2 + \int_0^t (\sigma^2 + 2\alpha r_e r(y) - 2\alpha r^2(y)) dy + 2\sigma \int_0^t r(y) dW(y).$$

$$\mathbb{E}[r^2(t)] = r_0^2 + \int_0^t (\sigma^2 + 2\alpha r_e \mathbb{E}[r(y)] - 2\alpha \mathbb{E}[r^2(y)]) dy + 2\sigma \mathbb{E}\left[\int_0^t r(y) dW(y)\right],$$

$$m_2(t) = r_0^2 + \int_0^t (\sigma^2 + 2\alpha r_e m_1(y) - 2\alpha m_2(y)) dy.$$

$$m_2'(t) = \sigma^2 + 2\alpha r_e m_1(t) - 2\alpha m_2(t).$$

$$\begin{cases} m_2'(t) = \sigma^2 + 2\alpha r_e (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}) - 2\alpha m_2(t), \\ m_2(0) = r_0^2, \end{cases}$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Varianza – Aplicando lema de Itô

$$m_2'(t) = \sigma^2 + 2\alpha r_e (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}) - 2\alpha m_2(t),$$

$$m_2(0) = r_0^2,$$

$$m_2(t) = \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} [2\alpha (r_0 - r_e)^2 + 4r_e\alpha (r_0 - r_e) e^{t\alpha} + (2r_e^2\alpha + \sigma^2) e^{2t\alpha}]$$

$$\mathbb{V}[r(t)] = \mathbb{E}[(r(t))^2] - (\mathbb{E}[r(t)])^2 = m_2(t) - (m_1(t))^2$$

$$= \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} [2\alpha (r_0 - r_e)^2 + 4r_e\alpha (r_0 - r_e) e^{t\alpha} - \sigma^2 + (2r_e^2\alpha + \sigma^2) e^{2t\alpha}]$$

$$- [r_e^2 + 2r_e (r_0 - r_e) e^{-\alpha t} + (r_0 - r_e)^2 e^{-2\alpha t}]$$

$$= 2r_e (r_0 - r_e) e^{-t\alpha} + \frac{2r_e^2\alpha + \sigma^2}{2\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} - r_e^2 - 2r_e (r_0 - r_e) e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Cálculo de la Media y la Varianza sin el lema de Itô

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha y} dW(y),$$

como $e^{\alpha y}$ es determinista, tenemos que la integral estocástica está definida en el sentido de Riemann-Stieljes. Se sabe que si $h(s) = e^{\alpha s}$ es una función determinista, entonces $\int_0^t h(s) dW(s) \sim N\left(0; \int_0^t h(s)^2 ds\right)$. Aplicando este resultado en nuestro caso tenemos que

$$\int_0^t e^{\alpha y} dW(y) \sim N\left(0; \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right),$$

ya que

$$\int_0^t h(s)^2 ds = \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha s}]_{s=0}^{s=t} = \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}.$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Cálculo de la Media y la Varianza sin el lema de Itô

También sabemos que $W(t) \sim N(0; t)$, por tanto,

$$\int_0^t e^{\alpha y} dW(y) \sim W\left(\frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right).$$

Utilizando la propiedad de $\frac{1}{2}$ -autosemejanza del proceso de Wiener introducida en el Tema 3, se tiene que

$$\int_0^t e^{\alpha y} dW(y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} W(e^{2\alpha t} - 1) \sim \frac{\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z,$$

donde $Z \sim N(0; 1)$. Por tanto,

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z.$$

Modelo de Vasicek con incertidumbre

Cálculo de la Media y la Varianza sin el lema de Itô

Consecuentemente, se tiene que

$$r(t) \sim N \left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \sigma^2 e^{-2\alpha t} \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} \right),$$

que simplificando queda,

$$r(t) \sim N \left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \right).$$

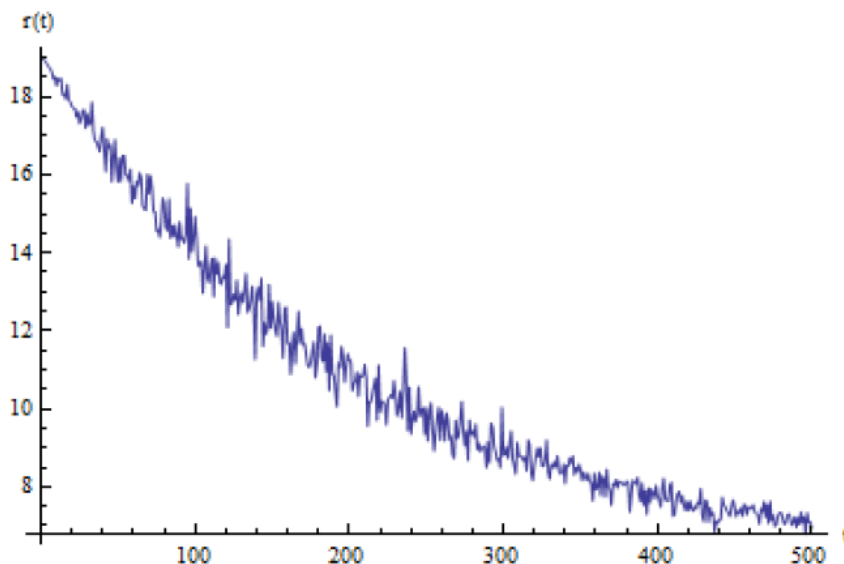


Figura 3: Representación gráfica de $r(t)$.

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

Dados unos valores de los parámetros se ha simulado $r(t)$. Para conocer y predecir el valor futuro del Euribor utilizando el modelo de Vasicek es necesario estimar los parámetros del modelo (α, r_e, σ) de tal manera que las trayectorias resultantes representen los datos.

Existen diversos métodos de estimación de parámetros como el método de momentos, el método no paramétrico o el método de máxima verosimilitud. Como su nombre bien indica consiste en maximizar una función que se denomina función de verosimilitud.

Para poder estimar los parámetros del modelo (α, r_e, σ) , es necesario partir de datos reales del Euribor. Se ha considerado una muestra de 134 valores que corresponden a la tasa del interés de Euribor mensual desde el 2 de Enero del 2013 al 11 de Julio del 2013. Estos datos han sido obtenidos de (EMMI, 2016).

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

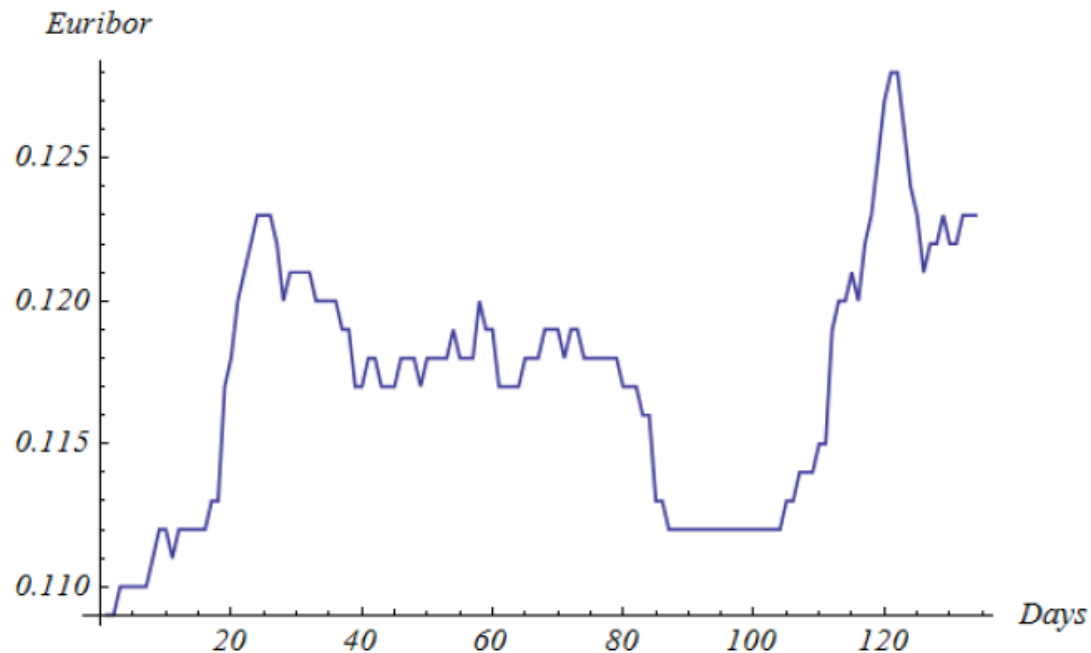


Figura 4: Tasas de interés del Euribor mensuales desde el 2 de enero del 2013 al 11 de julio del 2013.

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

Sea $\mathcal{S} = \{r_0, r_1, \dots, r_N\}$ una muestra de las tasas de interés correspondiente a los tiempos $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_0 + N\Delta t, \Delta t > 0$, respectivamente. Por la ley de probabilidad total tenemos que la función de densidad conjunta viene dada por

$$\begin{aligned} p(r_0, \dots, r_N; \alpha, r_e, \sigma) &= p(r_0; \vec{\theta}) p(r_1 | r_0; \vec{\theta}) p(r_2 | r_0, r_1; \vec{\theta}) \cdots p(r_N | r_0, \dots, r_N; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} \\ &= (\alpha, r_e, \sigma), \end{aligned} \tag{12}$$

donde r_i representa los datos reales, en nuestro caso los mostrados en la Figura 4, $r(t_i)$ es la estimación del modelo para cada $0 \leq i \leq N$, y $\vec{\theta} = (r_e, \alpha, \sigma)$ denota el vector paramétrico que debe ser estimado. Asumiendo que nuestros datos son inde-

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

Sea $\mathcal{S} = \{r_0, r_1, \dots, r_N\}$ una muestra de las tasas de interés correspondiente a los tiempos $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_0 + N\Delta t$, $\Delta t > 0$, respectivamente. Por la ley de probabilidad total tenemos que la función de densidad conjunta viene dada por

$$\begin{aligned} p(r_0, \dots, r_N; \alpha, r_e, \sigma) &= p(r_0; \vec{\theta}) p(r_1 | r_0; \vec{\theta}) p(r_2 | r_0, r_1; \vec{\theta}) \cdots p(r_N | r_0, \dots, r_N; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} \\ &= (\alpha, r_e, \sigma), \end{aligned} \tag{12}$$

donde r_i representa los datos reales, en nuestro caso los mostrados en la Figura 4, $r(t_i)$ es la estimación del modelo para cada $0 \leq i \leq N$, y $\vec{\theta} = (r_e, \alpha, \sigma)$ denota el vector paramétrico que debe ser estimado. Asumiendo que nuestros datos son inde-

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

pendientes e idénticamente distribuidos. Podemos escribir (12) como

$$\begin{aligned} p(r_0, \dots, r_N; \alpha, r_e, \sigma) &= p(r_0) p(r_1|r_0; \vec{\theta}) p(r_2|r_1; \vec{\theta}) \cdots p(r_N|r_{N-1}; \vec{\theta}) \\ &= p(r_0) \prod_{i=1}^N p(r_i|r_{i-1}; \vec{\theta}). \end{aligned}$$

Se define la función de verosimilitud como

$$l(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N) = p(r_0) \prod_{i=1}^N p(r_i|r_{i-1}; \vec{\theta}), \quad \text{donde } \vec{\theta} = (r_e, \alpha, \sigma). \quad (13)$$

Nuestro objetivo es maximizar $l(\vec{\theta})$ para obtener la mejor estimación de parámetros. Desde un punto de vista numérico, es más conveniente trabajar con la siguiente función objetivo equivalente,

$$\min_{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3} L(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N), \quad \text{donde } L(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N) = -\ln \left(l(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N) \right). \quad (14)$$

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

Para calcular la expresión de la función de verosimilitud de r_i dado r_{i-1} , para $1 \leq i \leq N$, es importante saber que de la expresión (11), se tiene que

$$r_i | r_{i-1} \sim N \left(r_e + (r_{i-1} - r_e) e^{-\alpha \Delta t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \Delta t}) \right), \quad \Delta t = t_i - t_{i-1}. \quad (15)$$

Esta expresión se obtiene representando el desarrollo anterior (11) que se hizo sobre el intervalo $[0, t]$, pero ahora en el intervalo $[t_{i-1}, t_i] = [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$. Nótese que la aproximación de la VA $r_i | r_{i-1}$ puede ser construida utilizando un método numérico estocástico como el de Euler Maruyama ¹

$$r_i \approx r_{i-1} + \alpha(r_e - r_{i-1})\Delta t + \sigma(W_i - W_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

siendo

$$W_i - W_{i-1} = W(t_i) - W(t_{i-1}) = W(i \Delta t) - W((i-1)\Delta t) \sim N(0; \Delta t).$$

Estimación de parámetros

Método de Euler Maruyama

¹El método de Euler Maruyama consiste en dada la ecuación

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t) \text{ con } X(0) = X_0 \text{ and } 0 \leq t \leq T,$$

discretizar el intervalo $[0, T]$ en incrementos $\tau_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, L$ siendo $\Delta t = T/L$ con L un entero positivo fijo. El esquema numérico se denota mediante X_j , y viene definido por

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})),$$

con $j = 1, 2, \dots, L$. Como sabemos $(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})) \sim N(0; \Delta t)$, podemos simular la solución

Estimación de parámetros

Método de máxima verosimilitud

Por tanto la función de densidad de probabilidad de la VA r_i con r_{i-1} conocido viene dada por

$$p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{(r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (16)$$

Sustituyendo esta expresión en (14), se tiene la siguiente representación para la función de verosimilitud asociada a la muestra \mathcal{S} ,

$$\begin{aligned} L(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N) &= -\ln \left(l(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N) \right) = -\ln \left(p(r_0) \prod_{i=1}^N p(r_i|r_{i-1};\vec{\theta}) \right) \\ &= -\ln(1) - \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{(r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} \ln \left(\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) - \frac{(r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \ln \left(\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) + \frac{(r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \\ &= \frac{N}{2} \ln \left(\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t}))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}. \end{aligned}$$

Estimación de parámetros

Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

A partir de la expresión (17), podemos obtener los parámetros α , r_e , σ que minimiza la función $L(\vec{\theta}; r_0, \dots, r_N)$. Estos cálculos se pueden llevar a cabo utilizando el software Mathematica. Los resultados se muestran en la Tabla 2.

Parametros	Método de máxima verosimilitud
α	0.032227
r_e	0.120379
σ	0.000965

Tabla 2: Parámetros estimados del modelo de Vasicek utilizando el método de máxima verosimilitud utilizando las tasas de interés de Euribor mensuales desde el 2 de enero del 2013 al 11 de julio del 2013.

Estimación de parámetros

Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

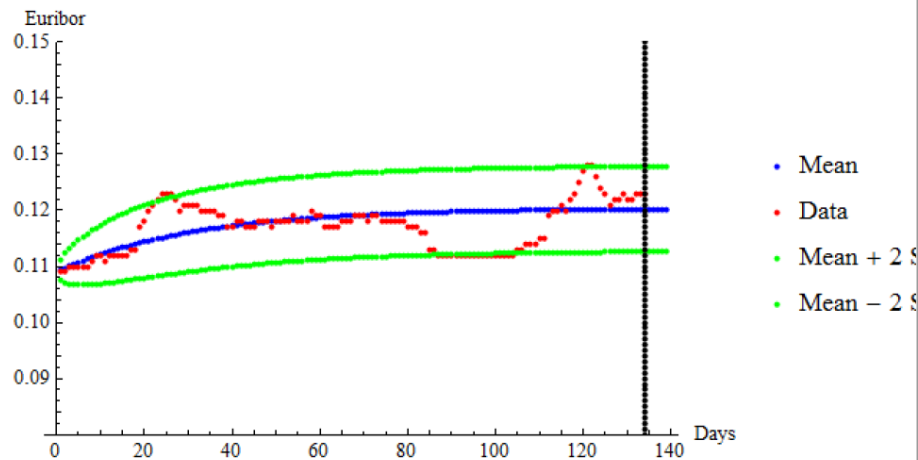


Figura 5: Comparativa gráfica entre la salida del modelo y los datos reales. Las líneas verdes representan el intervalo de confianza. Las líneas azules la media y los puntos rojos los datos reales del Eurobor desde el 2 de Enero del 2013 hasta el 11 de Julio del 2013.

Se muestra una comparativa de los datos reales con la salida del modelo.

Los puntos rojos representan los datos mostrados en la Figura 4, la línea azul representa la media obtenida en la expresión (7), las líneas verdes representan el intervalo de confianza que viene definido como la media mas/menos dos desviaciones típicas.

Estimación de parámetros

Ajuste y predicción del modelo de Vasicek

Para poder tomar decisiones futuras es necesario predecir el valor del Euribor en los próximos días. Realizando el mismo procedimiento que se ha utilizado para dibujar las gráficas, pero considerando más instantes temporales, podremos predecir el valor del Euribor.

Fecha	Predicción puntual	95 % Intervalo de confianza
12 Jul 2013	0.120228	[0.112623, 0.127832]
15 Jul 2013	0.120232	[0.112628, 0.127837]
16 Jul 2013	0.120237	[0.112632, 0.127842]
17 Jul 2013	0.120241	[0.112637, 0.127846]
18 Jul 2013	0.120246	[0.112641, 0.127851]

Tabla 3: Predicciones utilizando el modelo de Vasicek en los próximos días utilizando el método de máxima verosimilitud.

Bibliografía

EMMI (2016). European Money Markets Institute (EMMI).

Kloeden, P. E. and Platen, E. (1992). Stochastic differential equations. In *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, pages 103–160. Springer.

Rodó, P. (2020). Modelo de vasicek.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188.

Zeytun, S. and Gupta, A. (2007). A comparative study of the vasicek and the cir model of the short rate.

¿Dudas / Aportaciones?





www.unir.net