Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

→ Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 2. Preliminares: VA

unir LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

Universidad Internacional de La Rioja

Índice

Contenidos

- Introducción y objetivos.
- Vectores aleatorios.
- Características de un vector aleatorio: marginalidad, independencia y momentos
- Método de transformación de vectores aleatorios
- Bibliografía.

Tema 2

Contenidos - Esquema

Vectores aleatorios

Discretos

- Función de masa de probabilidad conjunta
- Función de distribución conjunta

Continuos

- Función de densidad de probabilidad conjunta
- Función de distribución conjunta

- Caracterización: momentos vectores aleatorios
- Método de transformación de vectores aleatorios

Definición 1: Vector Aleatorio de dimensión n

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un *vector aleatorio* de dimensión n es una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ que está asociada a un suceso aleatorio.

Una definición alternativa más perceptible es que $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ es un *vector aleatorio* de dimensión n, si todas sus componentes X_i, $1 \leq i \leq n$ son VAs.

VA discretos

Función de masa de probabilidad conjunta

Definición 2: Función de masa de probabilidad conjunta de un vector aleatorio discreto

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio discreto que toma valores en el conjunto $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$, donde $X_i = X_i(\omega) \in \mathcal{D}_i = \{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $1 \leq i \leq n$ y $\omega \in \Omega$. La *función de masa de probabilidad conjunta* es una función $p_{\mathbf{X}} : \mathcal{D} \to [0, 1]$ que determina la probabilidad de que ocurra cada suceso $\{(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})\}$, $1 \leq j \leq \infty$, es decir

$$p_{\mathbf{X}}(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}) = \mathbb{P}(X_1 = x_{1,j} \wedge X_2 = x_{2,j} \wedge \ldots \wedge X_n = x_{n,j}) = p_j.$$

Es importante mencionar que para que la *función masa de probabilidad conjunta* esté bien definida se debe verificar que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

VA discretas

Función de distribución conjunta

Definición 3: Función de distribución conjunta de un vector aleatorio discreto

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio discreto que toma valores en el conjunto $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$, donde $X_i = X_i(\omega) \in \mathcal{D}_i = \{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $1 \leq i \leq n$ y $\omega \in \Omega$. La *función de distribución conjunta* de $\mathbf{X}$ es una función $F_\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ que determina la probabilidad de que cada componente de $\mathbf{X}$ sea menor que cada componente de un vector dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$\begin{aligned} F_\mathbf{X}(\mathbf{x}) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (x_{1,j},\ldots,x_{n,j}) \in \mathcal{D} \\ t.q\ (x_{1,j},\ldots,x_{n,j}) \leq \mathbf{x}}}^{\infty} p_\mathbf{X}(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}). \end{aligned}$$

VA continuos

Función de densidad conjunta

Definición 4: Función de densidad conjunta de un vector aleatorio continuo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio continuo y $\mathcal{D}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbb{R}^n$ el dominio de $\mathbf{X}$, es decir un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^n$ donde está definido $\mathbf{X}$. La *función de densidad conjunta* de $\mathbf{X}$ es una función, $f_\mathbf{X} : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$, que verifica las siguientes propiedades:

- $f_\mathbf{X}(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- $\int_{\mathcal{D}(\mathbf{X})} f_\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$.

La probabilidad de que $\mathbf{X}$ pertenezca a $\mathbf{I} \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{X})$ está dada como:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} \in \mathbf{I}] = \int_I f_\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

VA continuos

Función de distribución conjunta

Definición 5: Función de distribución conjunta de un vector aleatorio continuo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y **X** un vector aleatorio continuo definido en $\mathcal{D}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbb{R}^n$ siendo $f_\mathbf{X}$ su función de densidad conjunta. La *función de distribución conjunta* de **X** es una función continua $F_\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ que determina la probabilidad de que **X** sea menor o igual que un vector dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$F_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}[\mathbf{X} \leq \mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} f_\mathbf{X}(s)\mathrm{d}s.$$

Distribución marginal de un VA

Definición 6: Distribución marginal de un vector aleatorio

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio. Las *distribuciones marginales* de un vector aleatorio son las distribuciones de probabilidad, por separado, de cada una de las VAs que lo componen.

Distribución marginal de un VA

- Si $\mathbf{X}$ es un vector discreto que toma valores en el conjunto $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$, donde $X_i = X_i(\omega) \in \mathcal{D}_i = \{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $1 \leq i \leq n$ y $\omega \in \Omega$, la *función de masa de probabilidad marginal* de cada componente X_i, $1 \leq i \leq n$, viene dada por

$$p_{X_i}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,j}, X_2 = x_{2,j}, \ldots, X_i = x, \ldots, X_n = x_{n,j})$$
$$= \sum_{\substack{j=1 \\ (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,j}, \ldots x_{i,n}) \in \mathcal{D} \\ t.q.\ x_{i,j} = x}}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,j}, \ldots x_{i,n}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Distribución marginal de un VA

- Si $\mathbf{X}$ es un vector continuo siendo $\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \mathcal{D}(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ su dominio, la *función de densidad de probabilidad marginal* de la componente X_i, $1 \leq i \leq n$, viene dada por

$$f_{X_i}(x) = \int_{\hat{\mathcal{D}}(X_i)} f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

donde

$$\hat{\mathcal{D}}(X_i) = \mathcal{D}(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

y

$$\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_{i-1}, \mathrm{d}x_{i+1}, \ldots, \mathrm{d}x_n.$$

Independencia entre VAs

Definición 7: Independencia entre VAs

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea **X** $= (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con función de masa de probabilidad conjunta, $p_{\mathbf{X}}$, o con función de densidad de probabilidad conjunta, $f_{\mathbf{X}}$. Decimos que las componentes de **X** son *independientes* si

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot p_{X_n}(x_n) \qquad (1)$$

o

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n), \qquad (2)$$

siendo **X** un vector aleatorio discreto o continuo, respectivamente. En el primer caso $p_{X_i}(x_i)$ es la función de masa de probabilidad marginal y en el segundo $f_{X_i}(x_i)$ la función de densidad de probabilidad marginal de X_i, $1 \leq i \leq n$.

Definición 8: Momentos de un vector aleatorio

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio.

- Se define la *esperanza* de $\mathbf{X}$ como

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \,.$$

- Si g es una trasformación de $\mathbf{X}$, *la esperanza de una función* g se define como

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] \begin{cases} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{X})} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), & \mathbf{X} \text{ discreta}, \\ \int_{\mathcal{D}(\mathbf{X})} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, & \mathbf{X} \text{ continua}. \end{cases}$$

Momentos de un VA

- Se define el *momento de orden* k de $\mathbf{X}$ como

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}^k] = \left(\mathbb{E}[X_1^k], \ldots, \mathbb{E}[X_n^k]\right).$$

Covarianza de un VA

Definición 9: Covarianza de un vector aleatorio

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea **X** $= (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio. Sean X_i, X_j dos componentes de **X**, se define la *covarianza* entre X_i y X_j como

$$\mathbb{C}ov[X_i, X_j] = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])].$$

La *matriz de varianzas covarianzas* del vector **X** considera todas las relaciones anteriores que hay entre las componentes de un vector aleatorio. Se define de la siguiente forma

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \mathbb{C}ov[X_1, X_2] & \ldots & \mathbb{C}ov[X_1, X_n] \\ \mathbb{C}ov[X_1, X_2] & \mathbb{V}[X_2] & \ldots & \mathbb{C}ov[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}ov[X_n, X_1] & \mathbb{C}ov[X_n, X_2] & \ldots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}.$$

Método de transformación de vectores aleatorios

Teorema 1: Teorema de transformación de vectores aleatorios

Sean $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ y $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ dos vectores aleatorios continuos de dimensión n definidos en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supongamos conocida la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $\mathbf{U}$, denotada mediante $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$. Consideramos $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación determinista que transforma el vector $\mathbf{U}$ en el $\mathbf{V}$, es decir, $(v_1, \ldots, v_n) = (r_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, r_n(u_1, \ldots, u_n))$. Se asume que $\mathbf{r}$ es continua y sus derivadas parciales respecto de cada u_i, $1 \leq i \leq n$, son continuas. Denotamos mediante

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1} = (s_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, s_n(v_1, \ldots, v_n)),$$

la inversa de $\mathbf{r}$. Entonces la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $\mathbf{V}$, denotada mediante $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})$, viene dada por

Método de transformación de vectores aleatorios

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{U}}\left(\mathbf{s}(\mathbf{v})\right)|\mathcal{J}|\,,$$

donde $|\mathcal{J}|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana de $\mathbf{s}$ definida por

$$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{v}}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial s_n(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_1(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_n} & \ldots & \frac{\partial s_n(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_n} \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Método de transformación de vectores aleatorios
Ejemplo

Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo que define las medidas corporales de una población, X_1 el peso y X_2 la estatura.

Supongamos que conocemos la función de densidad de probabilidad conjunta f_X. Sabemos que el índice de masa corporal viene dado por el peso entre el cuadrado de la altura.

Supongamos que queremos estudiar la distribución del vector aleatorio compuesto por el índice de masa corporal y la altura.

Método de transformación de vectores aleatorios
Ejemplo

Definiendo $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ como $Y_1 = \frac{X_1}{X_2^2}$ y $Y_2 = X_2$ obtenemos el vector que queremos estudiar. Aplicando el Teorema 1, calcularemos la función de densidad de probabilidad de $\mathbf{Y}$.

Es fácil ver que la aplicación $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ que buscamos para poder aplicar el Teorema 1 vendrá dada por

$$r_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2^2}, \quad r_2(x_1, x_2) = x_2.$$

Método de transformación de vectores aleatorios
Ejemplo

Sabemos que es una transformación continua y que su inversa $\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1}$, que viene dada por

$$s_1(y_1, y_2) = y_1 y_2^2, \quad s_2(x_1, x_2) = y_2,$$

tiene sus derivadas parciales continuas. Además el determinante Jacobiano de $\mathbf{s}$

$$\mathcal{J}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial s_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial s_1(y_1,y_2)}{\partial y_2} & \frac{\partial s_2(y_1,y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y_2^2 & 0 \\ 2y_1y_2 & 1 \end{pmatrix} = y_2^2,$$

es distinto de cero.

Aplicando el teorema de transformación de vectores aleatorios tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{s}(\mathbf{y})) &= f_{X_1,X_2}(s_1(y_1,y_2), s_2(y_1,y_2))\,|\mathcal{J}| \\ &= f_{X_1,X_2}(y_1y_2^2, y_2)y_2^2. \end{aligned}$$

Método de transformación de vectores aleatorios

Ejemplo

Finalizamos este ejemplo y el tema con la siguiente cuestión. Y si quisiésemos describir la distribución estadística solamente del IMC? ¿Seríamos capaces de conocerla? ¿Podríamos calcular la función de distribución de Y_1?

La respuesta es afirmativa, basta con irnos a la Definición 6 y marginalizar $f_{\mathbf{Y}}$ respecto de Y_2, de este modo

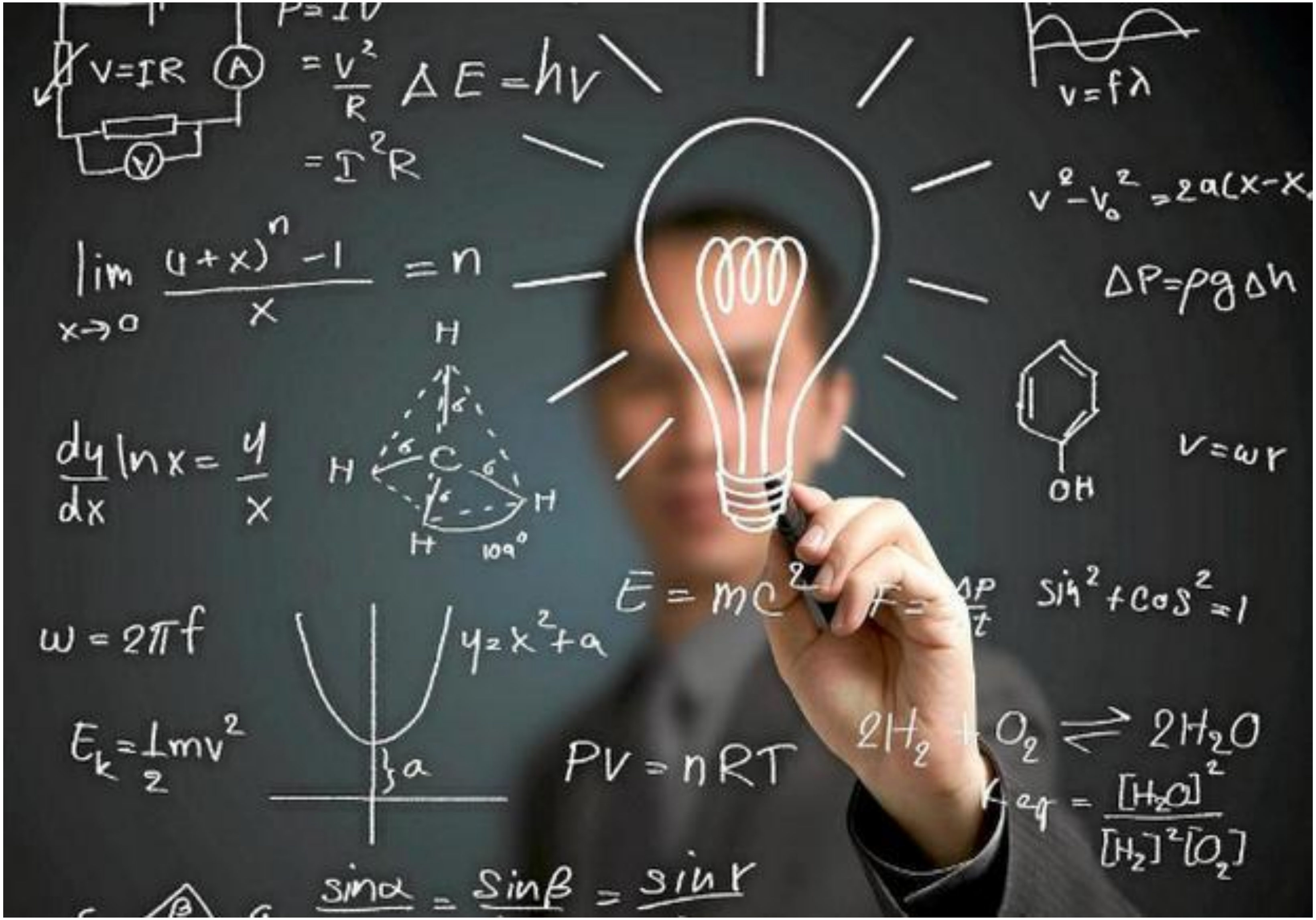
$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{\mathcal{D}(Y_2)} f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) \mathrm{d}y_2 = \int_{\mathcal{D}(Y_2)} f_{X_1, X_2}(y_1 y_2^2, y_2) \mathrm{d}y_2.$$

Bibliografía

Calatayud Gregori, J., Cortés López, J. C., Jornet Sanz, M., and Villanueva Micó, R. J. (2019). An Introduction to Random Variables, Random Vectors and Stochastic Processes. *Colección Académica*.

Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Cengage Learning.

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net