Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 8: Fundamentos sobre carteras financieras de mínimo riesgo

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo
- Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Introducción y objetivos

Cuando queremos invertir en más de un activo, estaríamos interesados en saber cuánto debemos de invertir de cada uno de modo que el riesgo total de la inversión sea mínimo.

Se denomina cartera financiera a la combinación de dos o más activos. Por ejemplo, la combinación de las acciones de Mediaset y Ferrovial, forman una cartera.

El objetivo es aprender a formar una cartera de riesgo mínimo. Se estudiará el porcentaje que se debe de invertir en cada uno de los activos.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

Supongamos que tenemos una cartera compuesta por n activos a_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada i denotamos como $\nu_{i,T}$ el valor del activo i en el instante de tiempo T. Luego, sea $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ el vector de activos de la cartera, donde θ_i indica el número de unidades del activo para cada i. Dentro de la cartera, cada activo viene determinado por el signo de θ_i

- Si $\theta_i > 0$ entonces que estamos en una posición larga del activo a_i, es decir se adquieren/compran θ_i unidades del activo a_i.
- Si $\theta_i < 0$ estaríamos en una posición corta del subyacente, es decir, que se han vendido θ_i unidades del mismo.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

Nota

Una posición corta significa que el activo no se posee porque se ha pedido prestado o se ha vendido en corto. Mientras que en una posición larga sí se posee el activo.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

Asumiremos que las carteras financieras están formadas únicamente por activos con riesgo (que cotizan en la bolsa llamadas cartera pura en riesgo o *risk management*).
El objetivo es conocer en un instante de tiempo T, qué porcentaje de cada activo se debe de invertir para minimizar el riesgo de la cartera.
Definimos el vector de pesos de la cartera en el instante inicial como $w = (w_1, \ldots, w_n)$ donde

$$w_i = \frac{\theta_i \nu_{i,0}}{\sum_{i=1}^{n} \theta_i \nu_{i,0}} \text{ y } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

El valor de w_i representa el porcentaje del activo a_i en la composición total de la cartera.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

El retorno o rentabilidad o rendimiento continuo de un activo, a_i que no paga dividendos en el período $[0, T]$, se define por:

$$R_i = \ln\left(\frac{\nu_{i,T}}{\nu_{i,0}}\right),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$ (Ver para definición de los log-retornos.).

Nota

Como en ambiente de incertidumbre (la bolsa), no se conoce de antemano el valor futuro de un activo, $\nu_{i,T}$ se trata como una variable aleatoria, y por tanto R_i también es una variable aleatoria.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

El retorno esperado μ_i corresponde a:

$$\mu_i = E(R_i).$$

El riesgo σ_i^2 (o σ_i), se define como la varianza de R_i, es decir

$$\sigma_i^2 = V(R_i) \text{ o } \sigma_i = \sqrt{V(R_i)}.$$

Nota

Si $\sigma^2 > 0$ el activo a_i posee riesgo (por ejemplo, una acción). En cambio si $\sigma^2 = 0$ el activo a_i no posee riesgo (por ejemplo, un bono).

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

Se define el rendimiento de la cartera como:

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i,$$

de donde, el rendimiento medio de la cartera se define como

$$\mu = E(R) = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i.$$

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

El riesgo de la cartera se define como:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= V(R) = V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)\right)^2\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j E\left((R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))\right) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \mathsf{Cov}(R_i, R_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j .
\end{aligned}
$$

donde

$$
\rho_{ij} = \frac{\mathsf{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}.
$$

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

Es importante destacar que el riesgo se puede clasificar en sistemático y no sistemático.

- Riesgo sistemático: está asociado a las fuerzas macroeconómicas del mercado global y no a ningún activo particular. Es el riesgo derivado, por ejemplo, de una bajada del tipo de interés de la Reserva Federal de EEUU o del Banco Central Europeo que afectará a la financiación de las grandes compañías, y por tanto a los activos subyacentes cotizados. El riesgo de una guerra, del terrorismo, del calentamiento global, etc., también son riesgos sistemáticos que afectan a los mercados. Este riesgo no se puede reducir mediante estrategias de diversificación de carteras.

Conceptos básicos y notación sobre carteras financieras y riesgo

- Riesgo no sistemático: está asociado a un activo particular. Por ejemplo, si una empresa se dedica a fabricar muebles de bambú y los árboles de bambú están en peligro de extinción, puede reducir su riesgo diversificando su producción, fabricando muebles de otro tipo de madera.

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Los multiplicadores de Lagrange juegan un papel fundamental a la hora de conocer el vector de pesos de la cartera con riesgo mínimo.
Dado el siguiente problema

$$\left\{\begin{array}{llcl} \text{opt.} & f(x) & & \\ \text{s.a.} & g^1(x) & = & c_1 \\ & g^2(x) & = & c_2 \\ & & \vdots & \\ & g^p(x) & = & c_p \end{array}\right.$$

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

La esencia del método de multiplicadores de Lagrange es convertir el problema de optimización con restricciones de igualdad en un problema de optimización libre donde la función a minimizar incluye las condiciones de primer orden (derivada igual a cero) y una variación de segundo orden (segunda derivada positiva). Como trabajamos en más de una variable, de conocer el signo de la segunda derivada (para saber si es máximo o mínimo) se traduce en estudiar el signo de los determinantes principales de la matriz hessiana.

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Sea

$$Z(\lambda, x) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(c_k - g^k(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Luego aplicamos la condición de primer orden (derivadas iguales a cero) para obtener el sistema siguiente.

$$\nabla_\lambda Z(\lambda, x^*) = 0 \text{ y } \nabla_x Z(\lambda, x^*) = 0,$$

Es decir

$$Z_{\lambda_k} = c_k - g^k(x), \forall k \in \{1, \ldots, p\},$$

$$\nabla_x Z = \nabla_x f(x) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \nabla_x g^k(x).$$

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Recordando que donde

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ y } F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

La hessiana de $Z(\lambda, x)$ corresponde a

$$H_Z(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} Z_{\lambda_1\lambda_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{\lambda_1\lambda_p}(\mathbf{x}) & Z_{\lambda_1 x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{\lambda_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{\lambda_p\lambda_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{\lambda_p\lambda_p}(\mathbf{x}) & Z_{\lambda_p x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{\lambda_p x_n}(\mathbf{x}) \\ \hline Z_{x_1\lambda_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{x_1\lambda_p}(\mathbf{x}) & Z_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{x_n\lambda_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{x_n\lambda_p}(\mathbf{x}) & Z_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & Z_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{array}\right).$$

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Es decir

$$H_Z(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A(x) \\ A^T(x) & H_f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k H_{g^k}(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right),$$

$$A(x) = -\left(\begin{array}{c} \nabla_x g^1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \nabla_x g^p(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right).$$

Luego para analizar el punto $\mathbf{x}^*$, solo estudiamos la matriz (ver Tema para detalles).

$$\left(H_x\right)_Z(\mathbf{x}^*) = H_f(x_1^*, \ldots, x_n^*) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^* H_{g^k}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

donde $\mathbf{x}^* = \left(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*, x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$.

Aplicación de los multiplicadores de Lagrange para el estudio de carteras inversoras de mínimo riesgo

Nota

En el Caso General se puede dar también una interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

$$\frac{\partial Z(\mathbf{x}^*)}{\partial c_k} = \lambda_k^*, \ \forall k \in \{1, \ldots, p\}.$$

Por tanto, el k-ésimo multiplicador de Lagrange nos da la tasa marginal del cambio de valor óptimo de la función objetivo ante una variación unitaria en el término independiente c_k de la k-ésima restricción. Esto es, nos da una medida de cómo cambia la solución óptima si cambian los valores de las restricciones.

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo

En este ejemplo se introduce, mediante un ejemplo sencillo, uno de los problemas centrales de este tema y del siguiente: la determinación de los pesos de cada uno de los activos que forman una cartera de inversión de modo que se minimice el riesgo de la inversión según un criterio previamente establecido. La respuesta al problema se obtiene utilizando la técnica de optimización de los multiplicadores de Lagrange.

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo

Supongamos que un individuo dispone de M unidades monetarias (u.m.) y que quiere invertirlas en n títulos mobiliarios. Sean

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ y } \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n),$$

cuyas componentes representan

$$x_i = \text{cantidad de u.m. que invierte en el título } i$$

y

$$\mu_i = \text{rentabilidad esperada por invertir una u.m. en el título} i,\ i \in \{1, \dots, n\}.$$

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

El riesgo en el que incurre un inversor al elegir una cartera viene medido por la función cuadrática

$$R(x) = x^T Ax$$

donde x^T denota el transpuesto de x (considerando vectores columnas), y A es una matriz de tamaño $n \times n$ definida positiva, es decir, con todos sus valores propios positivos. Como veremos en el tema siguiente el riesgo también se puede definir como una función matricial. El inversor es conservador y su objetivo es minimizar el riesgo para una rentabilidad total prefijada μ.

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

Se pide:

(a) Plantear y resolver el programa matemático correspondiente.

(b) Determinar la cartera óptima en el caso particular en que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = (5, 10, 15), \quad \mu = 150 \quad \text{y} \quad M = 14,$$

(prescíndase de las restricciones de no negatividad).

(c) ¿Qué resultará más arriesgado, invertir una unidad adicional o conformarse con una rentabilidad total de 145 u.m.? es decir, ¿qué le conviene invertir al individuo, más o menos?

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

(a) El programa de minimización es

$$\begin{cases} \text{mín} & R(x) = x^T A x \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} x_i = M, \\ & \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu, \\ & x_i \geq 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

ya que la función objetivo es minimizar el riesgo, la primera restricción es la presupuestaria, la segunda restricción impone la condición del rendimiento esperado y la tercera la no negatividad de las cantidades adquiridas de cada uno de los títulos mobiliarios (acciones).

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

De manera matricial el problema corresponde a:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{mín} & x^T A x \\ \text{s.a.} & Bx = b, \\ & x \geq 0, \end{array}\right.$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} M \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo

La función de Lagrange para este caso es

$$Z(x, \lambda) = x^T Ax + (b - Bx)^T \lambda, \text{ con } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{aligned} \nabla_x Z(x, \lambda) &= 2Ax - B^T \lambda = 0, \\ \nabla_\lambda Z(x, \lambda) &= b - Bx = 0. \end{aligned}$$

De donde, dado que A es invertible, se tiene

$$x = \frac{1}{2} A^{-1} B^T \lambda.$$

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo

Multiplicando por B y como $b = Bx$, se deduce que

$$\lambda^* = 2(BA^{-1}B^T)^{-1}b$$

Por lo tanto

$$x^* = \frac{1}{2}A^{-1}B^T\lambda^*.$$

Como la función objetivo es convexa porque es una forma cuadrática definida positiva, pues la matriz hessiana de la función objetivo es definida positiva

$$(H_x)_Z(x^*, \lambda^*) = 2A,$$

por serlo la matriz A y las restricciones del programa son lineales, los valores x^* y λ^* obtenidos, determinan el mínimo global.

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

(b) El programa de minimización es

$$\begin{cases} \text{mín} & f(x) = x^T A x = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ & 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 150, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Utilizando la notación del apartado a), tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 14 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

De donde

$$BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} & \frac{375}{2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^* = 2 \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} & \frac{375}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 \\ 150 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 & -\frac{7}{15} \\ -\frac{7}{15} & \frac{11}{225} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix},$$

$$x^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

es un mínimo global. Este valor nos indica que se deben adquirir 2, 8 y 4 u.m. en los títulos mobiliarios 1, 2 y 3, respectivamente, para minimizar el riesgo de la inversión con las condiciones, con λ^* como su vector de multiplicadores de Lagrange asociado.

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

(c) Analicemos las dos cuestiones que se plantean, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*,\ i = 1, 2.$$

En primer lugar, si se invierte una unidad mas, se pasa de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14$$

a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15.$$

Por tanto,

$$\Delta Z_{\mathsf{min.}} \approx Z(x(0 + \Delta b)) - Z(x(0)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

Esto nos indica que no hay una variación importante en el riesgo por invertir una unidad mas. Observese que

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_1} = \lambda_1^* = 0.$$

De hecho, como el multiplicador de Lagrange asociado a la solución óptima que corresponde a la primera restricción es nulo, el inversor incurrirá, aproximadamente, en el mismo riesgo invirtiendo una u.m. más o menos.

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo

Por otra parte, si el inversor se conformara con una rentabilidad de 145 u.m., entonces la restriccion inicial

$$5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 150,$$

pasaría a ser

$$5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 145.$$

Por tanto,

$$\Delta b^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta Z_{\mathsf{min}} \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -8.$$

Cartera inversora de mínimo riesgo

Ejemplo

Notar que

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_2} = \lambda_2^* = \frac{8}{5}$$

es la variación del óptimo por unidad de variación del término independiente en la segunda restricción, es decir,

$$\frac{8}{5} \cdot (-5) = -8.$$

Esto nos indica que al fijar la rentabilidad en 145 u.m., el riesgo disminuye aproximadamente en 8 u.m., siendo por tanto menos arriesgado esperar una rentabilidad menor.

Cartera inversora de mínimo riesgo
Ejemplo Python

```
import numpy as np

A=np.array([[2,0,0],[0,1,0],[0,0,3]])
B=np.array([[1,1,1],[5,10,15]])
b=np.array([[14],[150]])

iA=np.linalg.inv(A)
last=2*np.linalg.inv(B@iA@B.T)@b
xast=iA@B.T@last/2

print('lambda_op:',np.round(last.T,5))
print('x_op:',np.round(xast.T,5))

lambda_op: [[0.  1.6]]
x_op: [[2. 8. 4.]]
```

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET