

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

→ Dra. Noèlia Viles Cuadros

## Tema 9. Resolución de EDEs y cálculo de momentos.

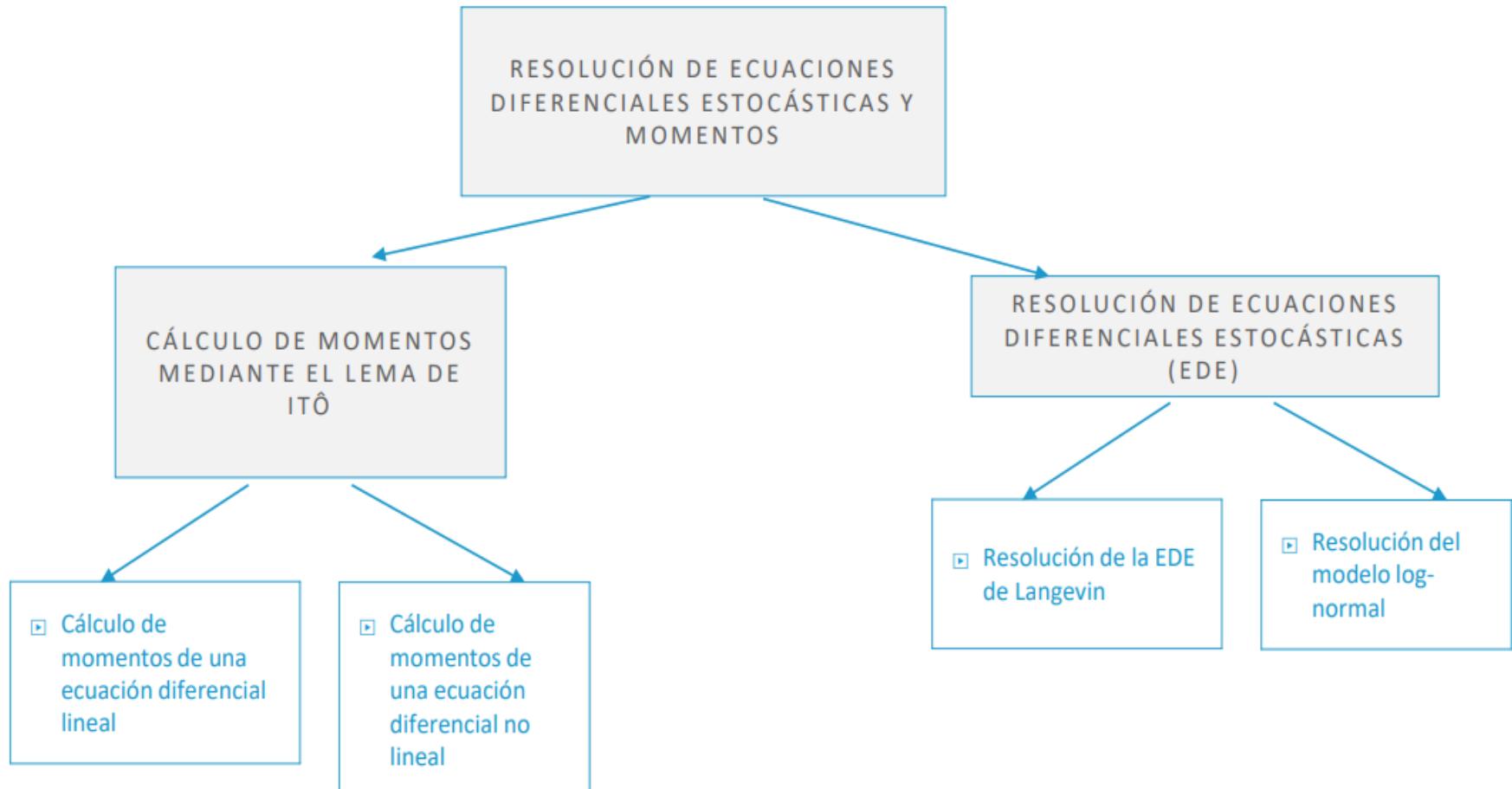
# Índice

## Contenidos

- ▶ Introducción y objetivos
- ▶ Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una ecuación diferencial estocástica (EDEs)

# Tema 9

## Contenidos - Esquema



# Objetivos

- ▶ Lema de Itô.
- ▶ Obtención de los momentos de la solución de una EDE utilizando el Lema de Itô.
- ▶ Obtención de la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante el Lema de Itô.
- ▶ Bibliografía.

# Integral de Itô

## Lema Itô (versión general)

Sea  $f(t, x)$  una función de clase  $C^{1,2}$  y  $X(t)$  un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A^{(1)}(s, X(s)) \, ds + \int_{t_0}^t A^{(2)}(s, X(s)) \, dW(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(s, X(s)) &= \int_s^t \left\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y))f_2(y, X(y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \right\} dy \\ &\quad + \int_s^t A^{(2)}(y, X(y))f_2(y, X(y)) \, dW(y). \end{aligned}$$

# Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una EDE

**Cálculo de los primeros tres momentos de una ecuación diferencial lineal**

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t) &= \mathrm{d}t + X(t)\mathrm{d}W(t), \\ X(0) &= 0.\end{aligned}$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A^{(1)}(s, X(s)) \, \mathrm{d}s + \int_0^t A^{(2)}(s, X(s)) \, \mathrm{d}W(s). \quad (4)$$

Si identificamos  $A^{(1)}(t, X(t)) = 1$ ,  $A^{(2)}(t, X(t)) = X(t)$  y  $X_0 = 0$ , la EDE (2) se puede escribir de la siguiente manera

$$X(t) = \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^t X(s) \, \mathrm{d}W(s) = t + \int_0^t X(s) \, \mathrm{d}W(s). \quad (5)$$

# Momento de orden 1

$$\mathbb{E} [X(t)] = t + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t X(s) \, dW(s) \right) \right]}_{=0} = t.$$

# Momento de orden 2

Lema de Itô para  $f(t,x) = x^2$ .

$$(X(t))^2 = 2 \int_0^t X(y) \, dy + \int_0^t (X(y))^2 \, dy + 2 \int_0^t (X(y))^2 \, dW(y).$$

$$\mathbb{E} [(X(t))^2] = 2 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E}[X(y)] \, dy}_{y} + \int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^2] \, dy + \underbrace{2 \int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^2] \, dW(y)}_{=0},$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2]$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2t + m_2(t),$$

$$m_2(0) = 0, \quad m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2] = 2e^t - 2t - 2.$$

# Momento de orden 3

Lema de Itô para  $f(t, x) = x^3$ .

$$(X(t))^3 = 3 \int_0^t (X(y))^2 \, dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 \, dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 \, dW(y).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(t))^3] &= 3 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^2] \, dy}_{2e^y - 2y - 2} + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] \, dy \\ &\quad + 3 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] \, dW(y)}_{=0}. \end{aligned}$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3]$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = 3(2e^t - 2t - 2) + 3m_3(t),$$

$$m_3(0) = 0,$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3] = 2t + \frac{8}{3} - 3e^t + \frac{1}{3}e^{3t}.$$

# Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una EDE

**Cálculo de los primeros tres momentos de una ecuación diferencial no lineal**

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= -\frac{1}{4}(X(t))^3 dt + \frac{1}{2}(X(t))^2 dW(t), \\ X(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

$$A^{(1)}(t, X(t)) = -\frac{1}{4} (X(t))^3, \quad A^{(2)}(t, X(t)) = \frac{1}{2} (X(t))^2 \quad \text{y} \quad X_0 = \frac{1}{2}.$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t -\frac{1}{4} (X(y))^3 dy + \int_0^t \frac{1}{2} (X(y))^2 dW(y).$$

# Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2\right] dW(y)}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy.\end{aligned}$$

# Momento de orden 3

$$\begin{aligned}(X(t))^3 - (X(0))^3 &= -\frac{3}{4} \int_0^t (X(y))^3 (X(y))^2 \, dy \\&\quad + \frac{6}{8} \int_0^t (X(y))^4 (X(y)) \, dy \\&\quad + \frac{3}{2} \int_0^t (X(y))^2 (X(y))^2 \, dW(y).\end{aligned}$$

$$(X(t))^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \int_0^t (X(y))^4 \, dW(y).$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^t (X(y))^4 \, dW(y) \right]}_{=0} = \frac{1}{8}.$$

# Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2 dW(y)\right]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^4 dW(y)\right]}_{=0} = \frac{1}{8}.}$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{8} dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} t.$$

# Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2 dW(y)\right]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] dy.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^4 dW(y)\right]}_{=0} = \frac{1}{8}.}$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{8} dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} t.$$

# PRESENTACIÓN ACTIVIDAD

# Actividad

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales estocástico:

$$dX(t) = \frac{X(t)}{2} dt + X(t)dW(t), X(0) = 1$$

Se pide calcular la **solución PE** utilizando el lema de Itô, considerando la función  $f(t, x) = e^x$ .

Supongamos que  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener con  $\underline{W}(0)=0$  y supongamos que el proceso estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$ , con  $X(0)=a>0$  satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \frac{1}{X(t)} dt + X(t)dW(t)$$

Si  $f(t, x) = t^2 x^2$ , determina  $df(\underline{t}, \underline{X}(t))$ .

# Actividad

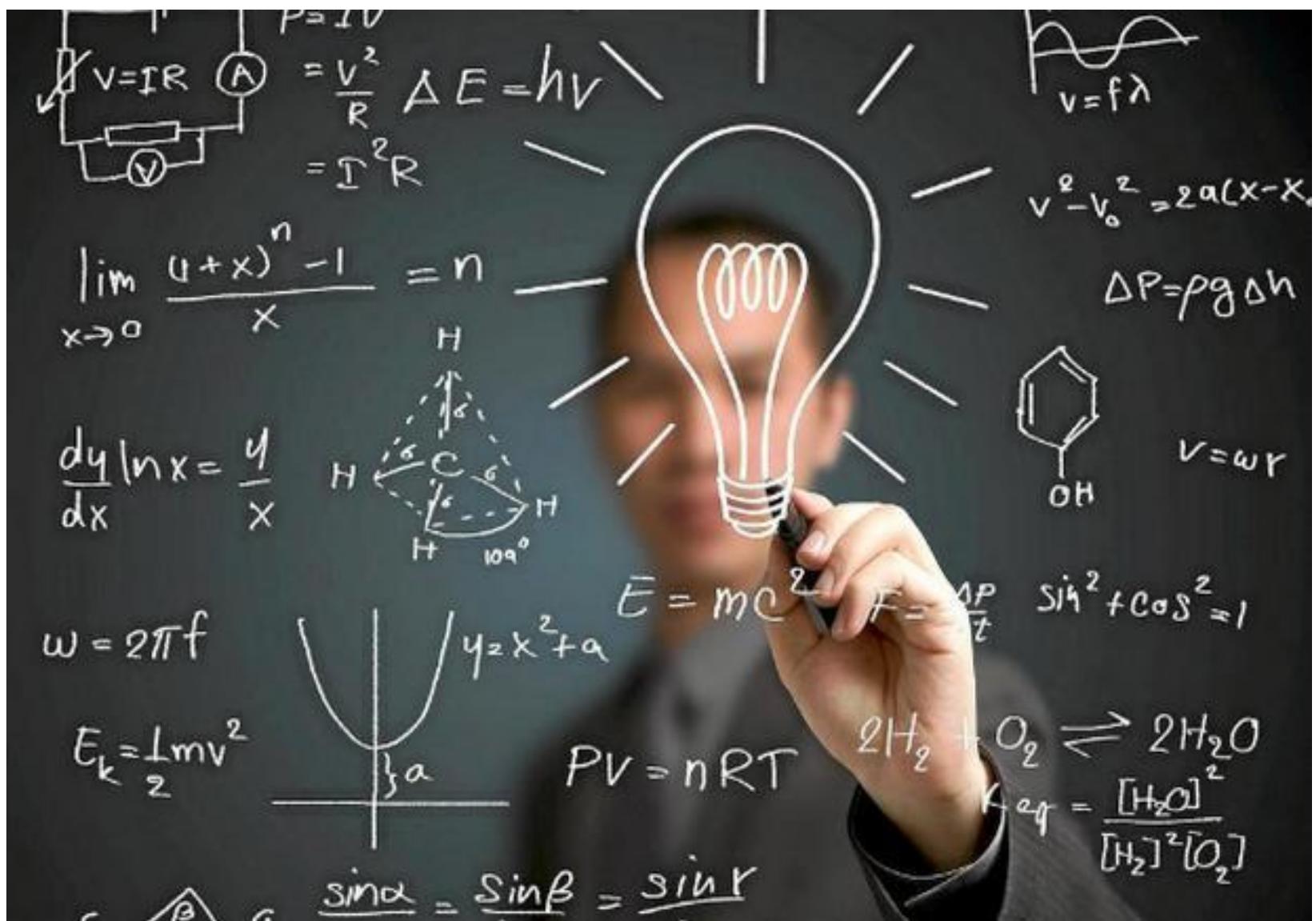
## Rúbrica

Resolución de una ecuación diferencial...	Descripción	Puntuación máxima (puntos)	Peso %
Criterio 1	Ejercicio 1 - Derivadas correctas de $f(t, x)$ .	1	10 %
Criterio 2	Ejercicio 1 - Aplicación del Lema de Itô.	2	20 %
Criterio 3	Ejercicio 1 - Despejar correctamente la solución.	2	20 %
Criterio 4	Ejercicio 2 - Derivadas correctas de $f(t, x)$ .	2	20 %
Criterio 5	Ejercicio 2 - Aplicación del Lema de Itô.	3	30 %
		<b>10</b>	<b>100 %</b>

# Bibliografía

Oksendal, B. K. (2004). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, Berlin.

# ¿Dudas / Aportaciones?



**unir**  
LA UNIVERSIDAD  
EN INTERNET

[www.unir.net](http://www.unir.net)