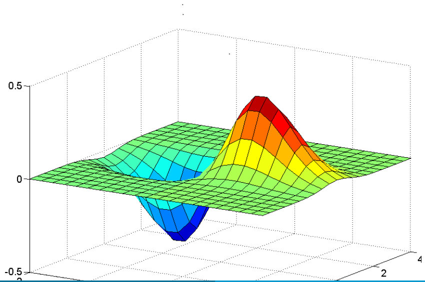
Tema 4, 5, 6: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs parabólicas.

Métodos Numéricos II

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Eva García Villalba



Contenido

¿Qué es un problema de contorno?

¡Debemos distinguir entre el contexto de una y varias variables independientes!.

Los temas anteriores estuvieron dedicados a problemas de frontera en una variable (EDOs), mientras que en este abordaremos los problemas de contorno en varias variables (EDPs).

Distribución de temperatura en una varilla de longitud L

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

Condiciones de contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t > 0$,
Condición inicial $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0, L]$.

(a)	$u_{xx}(x,t) = (1/c^2)u_{tt}(x,t),$	Ecuación de ondas unidimensional
(b)	$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),$	Ecuación de difusión unidimensional
(c)	$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,$	Ecuación de Laplace

Las EDPs descritas mediante la expresión

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_{yy}(x,y)$$
$$+a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = \phi(x,y),$$

definidas en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se pueden clasificar en:

- Hiperbólicas en D si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en D.
- Parabólicas en D si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en D.
- Elipticas en D si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en D.

Ejemplos:

(a)	$u_{xx}(x,t) = (1/c^2)u_{tt}(x,t)$,	Ecuación de ondas unidimensional
(b)	$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t)$,	Ecuación de difusión unidimensional
(c)	$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$,	Ecuación de Laplace

Tipos de condiciones de contorno

- Condiciones de Dirichlet
  - Homogéneas: $u(a,t) = u(b,t) = 0$, $t > 0$,
  - No homogéneas: $u(a,t) = \alpha, \quad u(b,t) = \beta$,
- Condiciones naturales

$$
\begin{aligned}
\alpha_a u_x(a,t) + \beta_a u(a,t) &= \gamma_a, \\
\alpha_b u_x(b,t) + \beta_b u(b,t) &= \gamma_b,
\end{aligned}
$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a,\ \alpha_b \neq 0$.

- Condiciones mixtas

$$
\begin{aligned}
\alpha_a u_x(a,t) + \beta_a u(a,t) &= \gamma_a, \\
u(b,t) = \beta,
\end{aligned}
$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

Problemas parabólicos

Distribución de temperatura en un cuerpo isotrópico, es decir, en el que la conductividad térmica en cada punto es independiente de la dirección del flujo de calor, $u = u(x, y, z, t)$. Problema modelizado por la ecuación parabólica

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial u}{\partial z}\right) = cg\frac{\partial u}{\partial t},$$

donde f, g y c son funciones de x, y y z.

- $h(x, y, z)$ denota la conductividad térmica en (x, y, z),
- $g(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo en (x, y, z),
- $c(x, y, z)$ calor específico

Una ecuación parabólica con condiciones iniciales $(t = 0)$ y de contorno recibe el nombre de Problema Parabólico.

El problema concreto en el que vamos a iniciar el estudio numérico es

Distribución de temperatura en una varilla de longitud L

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, t \ge 0,$$

Condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $t > 0$,
Condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in [0, L]$.

Diferencias finitas

Discretización

Proceso por el que cualquier ecuación en derivadas parciales se convierte en una ecuación en diferencias. Éstas suelen ser sistemas lineales o no lineales.

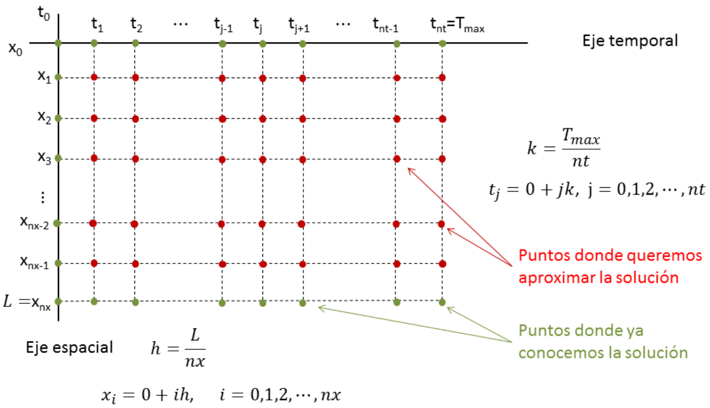
Los métodos en diferencias finitas suelen ser de dos tipos:

- Métodos explícitos
  - Sencillos y fáciles de implementar
  - Inestables
  - Requieren condiciones de convergencia
- Métodos implícitos
  - Más complejos
  - Estables
  - Sin condiciones de convergencia

Cuando trabajamos en un dominio regular (en general, rectángulo, cubo, ...) los resultados proporcionados por los métodos en diferencias finitas son satisfactorios.

Problemas parabólicos

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante diferencias finitas, en sistemas de ecuaciones lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



Es sencillo extender las diferencias finitas de una variable a varias variables.

- Diferencia progresiva $u_x(x,t) \approx \dfrac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}$, $u_t(x,t) \approx \dfrac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}$
- Diferencia regresiva $u_x(x,t) \approx \dfrac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}$, $u_t(x,t) \approx \dfrac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}$
- Diferencia central $u_x(x,t) \approx \dfrac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}$
- Diferencia central $u_{xx}(x,t) \approx \dfrac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$

Si denotamos por $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, $i = 0,1,2,\ldots,nx$, $j = 0,1,2,\ldots,nt$, entonces

- Diferencia progresiva $u_x(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}$, $u_t(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}$
- Diferencia regresiva $u_x(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i,j})-u_{i-1,j}}{h}$, $u_t(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}$
- Diferencia central $u_x(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$
- Diferencia central $u_x(x_i,t_j) \approx \dfrac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$

Método explícito con condiciones Dirichlet

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, t \ge 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

Diferencias progresivas en u_t y centrales en u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 0, 1, \ldots, nt-1$, $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 0, 1, \ldots, nt-1.$$

Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha^2}{h^2}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 0, 1, \ldots, nt-1.$$

Para $j = 0$

$$u_{i,1} = (1-2\lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}), \quad i = 1, 2, \dots, nx-1,$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$

$$u_{i,2} = (1-2\lambda)u_{i,1} + \lambda(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}), \quad i = 1, 2, \dots, nx-1,$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

En general:

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, \; u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}$$

Método explícito ya que calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de la solución en el instante t_j, directamente, sin resolver ningún sistema

CARACTERISTICAS: El orden de convergencia es $O(k + h^2)$,

A priori, no sabemos si la estabilidad está garantizada.

Método explícito: convergencia y estabilidad

Recordemos que hay tres conceptos clave en los métodos de diferencias finitas:

- Convergencia

$$\tilde{u}_{h,k}(x_i, y_j) \to u(x_i, y_j), \quad \text{cuando} \quad h, k \to 0$$

- Consistencia: El error de truncamiento local tiende a cero cuando h y k tienden a cero
- Estabilidad: Control del error de redondeo

CONSISTENCIA + ESTABILIDAD $\Rightarrow$ CONVERGENCIA

En el método explícito para las EDPs parabólicas el esquema es consistente y

- es estable cuando $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$, los errores no crecen, pero oscilan;
- si $\lambda \leq \dfrac{1}{4}$, la solución no oscilará;
- si $\lambda = \dfrac{1}{6}$, se tiende a minimizar los errores de truncamiento, pero el coste computacional puede no ser asumible.

Ejemplo

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, \quad x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método explícito con:
(a) $h = 0.1$, $k = 0.0005$
(b) $h = 0.1$, $k = 0.01$.

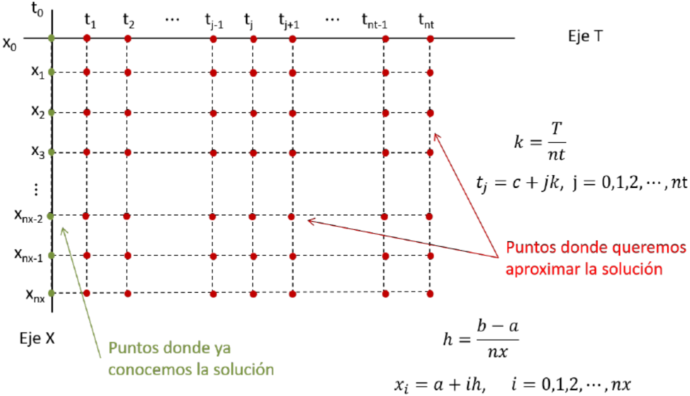
x_i	$u_{i,1000}$	$\lvert u(x_i,0.5) - u_{i,1000}\rvert$	$u_{i,50}$	$\lvert u(x_i,0.5) - u_{i,50}\rvert$
0.0	0	-	-	-
0.1	0.002287	6.41e-5	8.20e+7	8.20e+7
0.2	0.004349	1.22e-4	-1.56e+8	1.56e+8
0.3	0.005986	1.68e-4	2.14e+8	2.14e+8
0.4	0.007037	1.97e-4	-2.51e+8	2.51e+8
0.5	0.007399	2.08e-4	2.63e+8	2.63e+8
0.6	0.007037	1.97e-4	-2.49e+8	2.49e+8
0.7	0.005986	1.68e-4	2.11e+8	2.11e+8
0.8	0.004349	1.22e-4	-1.53e+8	1.53e+8
0.9	0.002287	6.51e-5	8.04e+7	8.04e+7
1.0	0	-	0	-

Método explícito con condiciones NO Dirichlet

El problema parabólico con condiciones de contorno no Dirichlet, tiene la forma

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = \gamma, \qquad \beta_1 u(L,t) + \beta_1 u_x(L,t) = \delta, \qquad \alpha_2, \beta_2 \neq 0$$

El hecho de que las condiciones sean NO Dirichlet implica un aumento de las incógnitas:



$$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 0, 1, \ldots, nx, j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

- $i = 0$

$$u_{0,j+1} = (1-2\lambda)u_{0,j} + \lambda(u_{1,j} + u_{-1,j}), \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

  - Para obtener $u_{-1,j}$, usamos:

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = \gamma \qquad \longrightarrow \qquad u_{-1,j} = \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2} u_{0,j} + u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2}$$

  - Sustituyendo en la ecuación para calcular $u_{0,j+1}$, se obtiene una expresión que solo depende de valores conocidos.

- $i = nx$

$$u_{nx,j+1} = (1-2\lambda)u_{nx,j} + \lambda(u_{nx+1,j} + u_{nx-1,j}), \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

Usamos $\beta_1 u(L,t) + \beta_2 u_x(0,t) = \delta$ para obtener $u_{nx+1,j}$ y sustituirlo en la ecuación anterior.

Ejemplo

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1 - x, \quad u_x(0,1) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 0, \quad x \in [0,1], t > 0.$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

- Consideramos $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = 0, \ldots, nx$, $j = 0, \ldots, nt$.
- Aplicando diferencias progresivas en u_t y simétricas en u_{xx}, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, \quad \lambda = \frac{k}{h^2}$$

- Deducimos de las condiciones de contorno:

$$0 = u_x(0,t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} \longrightarrow u_{-1,j} \approx u_{1,j},$$

$$0 = u_x(1,t_j) + u(1,t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} + u_{nx,j} \longrightarrow u_{nx+1,j} \approx u_{nx-1,j} - 2hu_{nx,j}.$$

- Sustituyendo estas aproximaciones, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} + ke^{-t_j}, \\ u_{i,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, \\ u_{nx,j+1} &= (1 - 2\lambda - 2\lambda h)u_{nx,j} + 2\lambda u_{nx-1,j} + ke^{-t_j}. \end{aligned}$$

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

Diferencias regresivas en u_t y centrales en u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 1, \ldots, nt$,

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 1, 2, \ldots, nt.$$

Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor

$$(1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 1, 2, \ldots, nt.$$

Para encontrar la solución en el instante t_j debemos resolver un sistema lineal

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt,$$

donde los términos independientes son la solución en el instante anterior y la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}.$$

CARACTERISTICAS: El proceso no necesita condiciones de convergencia,

El orden de convergencia es $O(k + h^2)$.

Algoritmo del Método implícito con condiciones Dirichlet

- ENTRADA función f; extremo L; constante α; números enteros nx, nt; tiempo máximo T.
- SALIDA aproximaciones $U_{i,j}$ de $u(x_i, t_j)$ para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt$.
- Paso 1 Tomamos, $h = \dfrac{L}{nx}$; $k = \dfrac{T}{nt}$; $\lambda = \dfrac{\alpha^2 k}{h^2}$.
- Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ tomar $U_{i,0} = f(ih)$ (Condición inicial).
- Paso 3 Para $j = 1, 2, \ldots, nt$ hacer los pasos 4 - 6:
  - Paso 4 Tomar $t = jk$.
  - Paso 5 Resolver el sistema tridiagonal $Az = u^{j-1}$.
  - Paso 6 Para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ tomar $U_{i,j} = z_i$.
- Paso 8 Parar. SALIDA x, t, U

Programa del Método implícito con condiciones Dirichlet

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$
$$u(a,t) = C1(t), u(b,t) = C2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [a,b]$$

$function U = impcalor1(funcionCC1, funcionCC2, funcionCI, x0, xf, nx, Tmax, nt, alfa)$
$h = (xf - x0)/nx;$
$x = x0 : h : xf;$
$k = Tmax/nt;$
$t = 0 : k : Tmax;$
$U = zeros(nx + 1, nt + 1);$
$U(1, :) = feval(funcionCC1, t);$
$U(end, :) = feval(funcionCC2, t);$
$U(:, 1) = feval(funcionCI, x);$
$lambda = alfa^2 * k/h^2;$
$dp = (1 + 2 * lambda) * ones(nx - 1, 1);$
$ds = -lambda * ones(nx - 2, 1);$
$di = ds;$
$for j = 2 : nt + 1$
$\quad d = U(2 : nx, j - 1);$
$\quad d(1) = d(1) + lambda * U(1, j - 1);$
$\quad d(end) = d(end) + lambda * U(nx + 1, j - 1);$
$\quad z = Crout(dp, ds, di, d);$
$\quad U(2 : nx, j) = z;$
end

Ejemplo

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

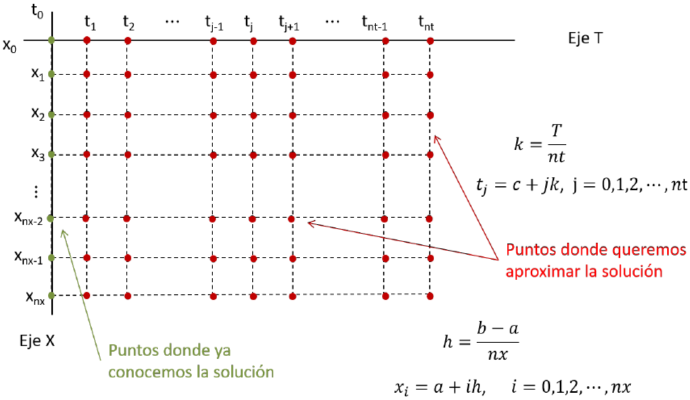
Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método implícito con:
(a) $h = 0.1$, $k = 0.01$.

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$\|u(x_i, 0.5) - u_{i,50}\|$
0.0	0	0	-
0.1	0.002898	0.002222	6.76e-4
0.2	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.3	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.4	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.5	0.009378	0.007192	2.19e-3
0.6	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.7	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.8	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.9	0.002898	0.002222	6.76e-4
1.0	0	0	-

Las condiciones no Dirichlet, tienen la forma

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = \gamma, \qquad \beta_1 u(L,t) + \beta_1 u_x(L,t) = \delta, \qquad \alpha_2, \beta_2 \neq 0$$

El hecho de que las condiciones sean NO Dirichlet implica un aumento de las incógnitas:



$$(1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, nx, j = 1, 2, \ldots, nt.$$

- $i = 0$

$$(1+2\lambda)u_{0,j} - \lambda u_{1,j} - \lambda u_{-1,j} = u_{i,j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt,$$

  - Para obtener $u_{-1,j}$, usamos:

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = \gamma \qquad \longrightarrow \qquad u_{-1,j} = \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2} u_{0,j} + u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2}$$

  - Sustituyendo en la ecuación para calcular $u_{0,j+1}$, se obtiene una expresión que solo depende de valores conocidos.

- $i = nx$

$$(1+2\lambda)u_{nx,j} - \lambda u_{nx+1,j} - \lambda u_{nx-1,j} = u_{i,j-1}, \quad j = 1, \ldots, nt,$$

Usamos $\beta_1 u(L,t) + \beta_2 u_x(0,t) = \delta$ para obtener $u_{nx+1,j}$ y sustituirlo en la ecuación anterior.

Método implícito con condiciones NO Dirichlet

Ejemplo

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1 - x, \quad u_x(0,1) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 0, \quad x \in [0,1], t > 0.$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

- Consideramos $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = 0, \ldots, nx$, $j = 0, \ldots, nt$.
- Aplicando diferencias progresivas en u_t y simétricas en u_{xx}, obtenemos:

$$u_{i,j-1} = (1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, \quad \lambda = \frac{k}{h^2}$$

- Deducimos de las condiciones de contorno:

$$0 = u_x(0,t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} \longrightarrow u_{-1,j} \approx u_{1,j},$$

$$0 = u_x(1,t_j) + u(1,t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} + u_{nx,j} \longrightarrow u_{nx+1,j} \approx u_{nx-1,j} - 2hu_{nx,j}.$$

- Sustituyendo estas aproximaciones, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
(1+2\lambda)u_{0,j} - 2\lambda u_{1,j} &= u_{0,j-1} + ke^{-t_j},\\
(1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) &= u_{i,j-1} + ke^{-t_j},\\
(1+2\lambda+2\lambda h)u_{nx,j} - 2\lambda u_{nx-1,j} &= u_{nx,j-1} + ke^{-t_j}.
\end{aligned}$$

Tenemos el siguiente sistema

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)} + d^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt.$$

Expresado de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -2\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\lambda & 1+2\lambda+2\lambda h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{0,j-1} \\ u_{1,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \\ u_{nx,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ke^{t_j} \\ ke^{t_j} \\ \vdots \\ ke^{t_j} \\ ke^{t_j} \end{pmatrix}.$$

Método de Crank-Nicholson con condiciones Dirichlet

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

¿Cómo aumentar el orden de convergencia?

u_t $\rightarrow$ Diferencia central

u_{xx} $\rightarrow$ Diferencia central

Se obtiene

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

Orden $O(k^2 + h^2)$, pero:

- El instante t_{j+1} está en función de t_j y de t_{j-1}
- Importantes problemas de estabilidad

Método de Crank-Nicholson con condiciones Dirichlet

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

El método de Crank-Nicholson es un método en diferencias implícito que se obtiene al hacer la media aritmética entre el método de diferencia progresiva en el instante t_j

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

y el método de diferencia regresiva en el instante t_{j+1}

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

obteniendo la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \ldots, nt - 1$

Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando las variables correspondientes a instantes más altos a la izquierda, obtenemos el método implícito

$$(1+\lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1-\lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$ y $j = 0, 1, \ldots, nt-1$

Fijando el índice j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$ obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda/2 & 1+\lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1+\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda \end{pmatrix}, u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, \ u^{(0)} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2 & 1-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

siendo tanto la matriz A como B tridiagonales.

Para encontrar la solución en el instante t_{j+1} resuelvo el sistema lineal en el que A es la matriz de coeficientes y $Bu^{(j)}$ los términos independientes.

Las características del método son:

- No necesita condiciones de convergencia
- El orden de convergencia es $O(k^2 + h^2)$

Algoritmo del Método de Crank-Nicholson con condiciones Dirichlet

- Definir los elementos $h = \dfrac{L}{nx}$, $k = \dfrac{T}{nt}$, $\lambda = \dfrac{\alpha^2 k}{h^2}$
- Construimos la matriz B de tamaño $nx - 1$:
  $dp = (1-\lambda) ones(nx-1, 1)$
  $dps = (\lambda/2) ones(nx-2, 1)$
  $B = diag(dp) + diag(dps, 1) + diag(dps, -1)$
- Solución en el instante inicial t_0
  $u^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{nx-1}))^T$
- Construcción de los vectores de la matriz A:
  $a = (1+\lambda) ones(nx-1, 1)$
  $b = (-\lambda/2) ones(nx-2, 1)$
  $c = b$
- Para $j = 0, 1, 2, \ldots, nt-1$
  $d = Bu^{(j)}$
  $u^{(j+1)} = Crout(a, b, c, d)$
  $\uparrow$
  aproximación de la solución $u(x,t)$ en los puntos
  $(x_1, t_{j+1}), (x_2, t_{j+1}), \ldots, (x_{nx-1}, t_{j+1})$

Ejemplo

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

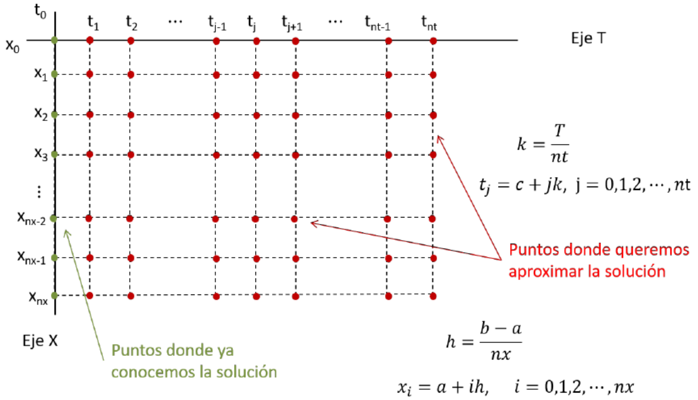
Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método de Crank-Nicholson con:
(a) $h = 0.1$, $k = 0.01$.

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$\lvert u(x_i, 0.5) - u_{i,50} \rvert$
0.0	0	0	-
0.1	0.002305	0.002222	8.27e-5
0.2	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.3	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.4	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.5	0.007495	0.007192	2.68e-4
0.6	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.7	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.8	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.9	0.002305	0.002222	8.27e-5
1.0	0	0	-

Las condiciones no Dirichlet, tienen la forma

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = \gamma, \qquad \beta_1 u(L,t) + \beta_1 u_x(L,t) = \delta, \qquad \alpha_2, \beta_2 \neq 0$$

El hecho de que las condiciones sean NO Dirichlet implica un aumento de las incógnitas:



$$(1+\lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1-\lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

donde $i = 0, 1, \ldots, nx$ y $j = 0, 1, \ldots, nt-1$.

- $i = 0$

$$(1+\lambda)u_{0,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{1,j+1} + u_{-1,j+1}) = (1-\lambda)u_{0,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{1,j} + u_{-1,j}).$$

Para obtener $u_{-1,j}$ y $u_{-1,j+1}$, usamos las condiciones de contorno. Después, sustituimos en la ecuación y obtenemos:

$$\left(1+\lambda-\frac{\lambda h \alpha_1}{\alpha_2}\right)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} = \left(1-\lambda+\frac{\lambda h \alpha_1}{\alpha_2}\right)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} - 2\frac{\lambda h \gamma}{\alpha_2}.$$

- $i = nx$

Gestionamos la ecuación correspondiente a $i = nx$, donde el índice $nx+1$ está fuera de rango. Utilizando la segunda condición de contorno no Dirichlet, obtenemos:

$$\left(1+\lambda+\frac{\lambda h \beta_1}{\beta_2}\right)u_{nx,j+1} - \lambda u_{nx-1,j+1} = \left(1-\lambda-\frac{\lambda h \beta_1}{\beta_2}\right)u_{nx,j} + \lambda u_{nx-1,j} + 2\frac{\lambda h \delta}{\beta_2}.$$

Así, el sistema de ecuaciones que hemos de resolver para calcular la columna $j+1$ es:

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d_j, \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda-\frac{\lambda h \alpha_1}{\alpha_2} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda/2 & 1+\lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1+\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 & 1+\lambda & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+\lambda+\frac{\lambda h \beta_1}{\beta_2} \end{pmatrix}, u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda+\frac{\lambda h \alpha_1}{\alpha_2} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2 & 1-\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-\lambda-\frac{\lambda h \beta_1}{\beta_2} \end{pmatrix}, u^{(0)} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}) \\ f(x_{nx}) \end{pmatrix},$$

y el vector de términos independientes es

$$d_j = \left(-2\frac{\lambda h \gamma}{\alpha_2}, 0, 0 \ldots, 0, 2\frac{\lambda h \delta}{\beta_2}\right)^T.$$

Ejemplo

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1 - x, \quad u_x(0,1) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 0, \quad x \in [0,1], t > 0.$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

- Consideramos $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = 0, \ldots, nx$, $j = 0, \ldots, nt$.
- Aplicando diferencias progresivas en u_t y simétricas en u_{xx}, obtenemos:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} - u_{i,j} &= \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \\ &+ \frac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right). \end{aligned}$$

- Deducimos de las condiciones de contorno:

$$0 = u_x(0,t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} \longrightarrow u_{-1,j} \approx u_{1,j},$$

$$0 = u_x(1,t_j) + u(1,t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} + u_{nx,j} \longrightarrow u_{nx+1,j} \approx u_{nx-1,j} - 2hu_{nx,j}.$$

- Al despejar los términos en t_{j+1} y sustituir $u_{-1,j}$ y $u_{nx+1,j}$, nos quedaría:

$$(1+\lambda)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} = (1-\lambda)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right),$$

$$(1+\lambda)u_{i,j+1} - \tfrac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1-\lambda)u_{i,j} + \tfrac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right),$$

$$(1+\lambda+h\lambda)u_{nx,j+1} - \lambda u_{nx-1,j+1} = (1-\lambda-h\lambda)u_{nx,j} + \lambda u_{nx-1,j} + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right).$$

- Así pues, en cada paso j hay que resolver el sistema lineal tridiagonal:

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d^{(j)},$$

donde $u^{(j)}$ representa la solución en el instante t_j.

Método de Crank-Nicholson con condiciones NO Dirichlet

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+\lambda+h\lambda \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1-\lambda-h\lambda \end{pmatrix}$$

y

$$d_j = \frac{k}{2}(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}})(1, 1, \ldots, 1)^T.$$

- Problema 1 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t, \quad u(x,0) = \sin \pi x + x(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Sabiendo que la solución exacta es

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1-x),$$

se pide:

  - Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando (a) $h = 0.1$, $k = 0.05$; (b) $nx = 10$ $nt = 10000$. Determina el error exacto y representa dicho error.
  - Aproxima, mediante el método de Crank-Nicholson, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$, $k = 0.05$. Escribe en una tabla los resultados, y el error en cada caso, para los instantes $t = 0.4$, $t = 0.8$ y $T = 1$. Representa la solución en los tres instantes

- Problema 2 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - t^2 u(x,t) = x \cos xt, \quad x \in [0,1], \ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0,t) = t, \quad u(1,t) = \sin t, \forall t, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1].$$

  - Describe los método explícito e implícito de orden $O(k+h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, siendo T el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
  - A partir de los esquemas anteriores, determina la solución aproximada del problema en el instante $T=1$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa, para cada método, la solución en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.
  - Sabiendo que la solución exacta es $u(x,t) = \sin xt$, calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.
  - ¿Es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema? En caso afirmativo, describe el esquema en diferencias que obtendríamos.

Referencias

- S Larsson, V Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.
- T. Myint-U, L. Debnath, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.
- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- S.C. Chapra, R.P. Canale, *Métodos numméricos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.
- L. Lapidus, G. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.