

Tema 8

Sistemas de ecuaciones lineales

Dra. Paula Triguero Navarro

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología



1 Introducción

2 Conceptos básicos

3 Métodos iterativos

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Resultados de convergencia
- Métodos de sobre-relajación

1

Introducción

Objetivo

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ (tomaremos $m = n$).

Métodos de resolución

■ Métodos directos

- Si A es invertible, $x = A^{-1}b$
- Método de Cramer
- Método de eliminación de Gauss: pivotación parcial, factorización LU , ...

■ Métodos iterativos $x = Hx + d$, H matriz $n \times n$, $d \in \mathbb{R}^n$

- Métodos iterativos estacionarios: Jacobi, Gauss-Seidel, ...
- Métodos de direcciones alternadas
- Métodos de gradiente conjugado

■ Precondicionadores

En numerosos problemas modelizados mediante sistemas lineales $Ax = b$, la matriz A tiene al menos dos características esenciales:

- **Tamaño grande**, $n \gg \gg$
- **Matriz dispersa**, es decir, un número de elementos no nulos, $nnz(A)$, del orden $nnz(A) = cn$, con c independiente de n .

Estas características desaconsejan el uso de métodos directos, ya que

- El orden de magnitud del número de operaciones para calcular A^{-1} es $O(n^3)$, lo que en tiempo de ejecución pueden ser incluso años.
- Tanto el cálculo de A^{-1} como el método de eliminación de Gauss hace perder el carácter disperso de la matriz A , lo que se traduce en un mayor número de operaciones y en el incremento del error de redondeo.

Debemos recurrir a los MÉTODOS ITERATIVOS

Objetivos

- Conocer los conceptos básicos de convergencia de los métodos iterativos y el error cometido con la aproximación a la solución del sistema lineal.
- Comprender la expresión iterativa y programación en Matlab de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
- Determinar la convergencia de un método iterativo en función de la matriz del sistema y de la matriz de iteración.
- Estudiar los métodos de sobre-relajación como mejora de los métodos clásicos.



Algunas funciones de Matlab

- `rref`: resuelve un sistema lineal con el método de Gauss-Jordan
- `triu`, `tril`: extrae la forma triangular superior e inferior, respectivamente, de una matriz
- `cond`: calcula el número de condición de una matriz

2

Conceptos básicos

- Un **método iterativo** obtiene una solución aproximada del sistema $Ax = b$ construyendo una sucesión de vectores en \mathbb{R}^n :

$$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$$

a partir de un vector arbitrario $x^{(0)}$ que se llama **aproximación inicial**.

- Si x^* denota el vector solución del sistema, decimos que el método iterativo es **convergente** si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*.$$

- El **vector error**, en cada iteración, se define como

$$e^{(k)} = x^* - x^{(k)}.$$

- El **vector residuo**, en cada iteración, se define como

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|r^{(k)}\| = 0$$

- Los métodos directos teóricamente dan la solución exacta; pero en un ordenador se generan errores de redondeo.
 - Un método iterativo nunca da la solución exacta incluso en precisión infinita.
- ➔ Necesario establecer un criterio de parada

Error máximo permitido: Tolerancia (tol)

Habremos alcanzado la precisión deseada para la solución cuando el error absoluto o el error relativo, respectivamente, satisfacen:

$$\|e^{(k)}\| < tol \quad \text{o} \quad \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} < tol.$$

Criterio del residuo

Como no conocemos el valor de $e^{(k)}$, utilizaremos como condición de parada el criterio del residuo:

$$\|r^{(k)}\| < tol \quad \text{o} \quad \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} < tol.$$

- La relación entre el error y el residuo es:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = Ax^* - Ax^{(k)} = A(x^* - x^{(k)}) = Ae^{(k)},$$

entonces

$$r^{(k)} = Ae^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad e^{(k)} = A^{-1}r^{(k)}.$$

- Usando normas matriciales:

$$\|r^{(k)}\| \leq \|A\| \|e^{(k)}\| \quad \text{y} \quad \|e^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|r^{(k)}\|$$

- Combinando las desigualdades anteriores se tiene

$$\frac{1}{\|x^*\|} \frac{\|r^{(k)}\|}{\|A\|} \leq \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r^{(k)}\|}{\|x^*\|}. \quad (1)$$

- Como $\|b\| = \|Ax^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|$ y $\|x^*\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$, entonces

$$\frac{1}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} \leq \frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

y podemos reescribir (1) como

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}.$$

Definición 1 (Número de condición)

Definimos el **número de condición** de una matriz A en una norma matricial $\|\cdot\|$ como el valor

$$\mathcal{K}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Diremos que la matriz A está **bien condicionada** si el número de condición es un valor pequeño.

- ➔ La relación que hay entre el error relativo y el residual relativo depende directamente del número de condición de la matriz del sistema:

$$\frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}.$$

- ➔ En las matrices mal condicionadas es difícil controlar el error relativo
- ➔ El test del residuo es fiable si $\mathcal{K}(A)$ no es muy grande, es decir, si A es una matriz estable

3

Métodos iterativos

- Dado el sistema lineal $Ax = b$, podemos considerar la partición (también llamada *splitting*) de la matriz del sistema

$$A = M - N,$$

donde $M \neq A$ es una matriz invertible que denominamos **precondicionador**.

- Transformamos el sistema lineal en un sistema equivalente:

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b$$

que podemos resolver de forma iterativa como

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = Hx^{(k)} + q, \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde H es la **matriz de iteración** y $x^{(0)}$ la **aproximación inicial**.

Equivalentemente:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)}) = x^{(k)} + M^{-1}r^{(k)}.$$

Método estacionario

Se dice que un método iterativo es **estacionario** si la matriz de iteración H es constante en todo el proceso.

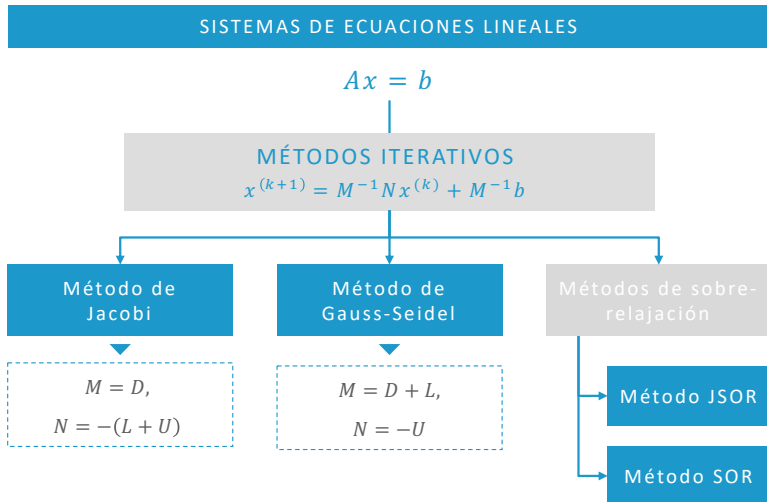
- No toda matriz M es un preconditionador adecuado
- M debe dar lugar a un sistema sencillo de resolver

Teorema 1

Consideremos un método estacionario con matriz H . Si $\|H\| < 1$, para alguna norma matricial, entonces el proceso iterativo

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + q,$$

converge hacia la solución del sistema $x = Hx + q$ que existe y es única.



1 Introducción

2 Conceptos básicos

3 Métodos iterativos

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Resultados de convergencia
- Métodos de sobre-relajación

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz del sistema lineal tal que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, y consideremos la partición de A de la forma

$$A = L + D + U,$$

donde

- L es la parte estrictamente triangular inferior de A
- D es la diagonal principal de A
- U es la parte estrictamente triangular superior de A

Método de Jacobi

El **Método de Jacobi** es un método estacionario en el que

$$M = D, \quad N = -(L + U),$$

por lo que su expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

Obtención del esquema iterativo

Dado el sistema $Ax = b$, con $a_{ii} \neq 0, \forall i$,

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right\}$$

se transforma en uno equivalente despejando la incógnita x_i de la i -ésima ecuación:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right\}$$

que coincide con la expresión

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b,$$

siendo la expresión iterativa

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

- **Entrada:** matriz A , términos independientes b , estimación inicial x_0 , tolerancia tol , máximo número de iteraciones $maxiter$
- **Proceso:**
 - Inicializar el contador de iteraciones ($iter = 1$) y las variables de control
 - Definir las matrices L , U , D y D^{-1} a partir de A
 - Cálculo de $M^{-1} = D^{-1}$ y $N = -(L + U)$
 - Mientras no se cumpla el criterio de parada ni se alcance el valor de $maxiter$:
 - Calcular $x = M^{-1}Nx_0 + M^{-1}b$
 - Actualizar criterios de parada y número de iteraciones
 - Actualizar variables: $x_0 = x$
- **Salida:** vector solución x , número de iteraciones $iter$

Ejemplo 1.

Consideremos el sistema de tamaño 4×4

$$\left. \begin{array}{rrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = & 15 \end{array} \right\}$$

Aplicando el método de Jacobi con estimación inicial $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ y el criterio de parada

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < 10^{-3}$$

se obtienen los resultados:

Solución	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	\dots	$k = 9$	$k = 10$
$x_1^{(k)}$	0	0.6000	1.0473	0.9326		1.0006	0.9997
$x_2^{(k)}$	0	2.2727	1.7159	2.0533		1.9987	2.0004
$x_3^{(k)}$	0	-1.1000	-0.8052	-1.0493		-0.9990	-1.0004
$x_4^{(k)}$	0	1.8750	0.8852	1.1309		0.9989	1.0006

Teniendo en cuenta que la solución exacta es $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$, podemos estimar el error cometido con la solución del método iterativo de Jacobi:

$$\|x^* - x^{(10)}\|_{\infty} = 6.1919 \cdot 10^{-4}.$$

1 Introducción

2 Conceptos básicos

3 Métodos iterativos

- Método de Jacobi
- **Método de Gauss-Seidel**
- Resultados de convergencia
- Métodos de sobre-relajación

Método de Gauss-Seidel

Dada la partición de la matriz del sistema $A = L + D + U$, el **método de Gauss-Seidel** es un método estacionario en el que

$$M = D + L, \quad N = -U,$$

por lo que su expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

Obtención del esquema iterativo

Dado el sistema $Ax = b$, con $a_{ii} \neq 0, \forall i$, si despejamos la incógnita x_i de la i -ésima fila,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right\}$$

El método de Gauss-Seidel propone utilizar los nuevos valores de las incógnitas a medida que se van calculando en cada iteración:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right\}$$

- ➔ En cada iteración debemos resolver el sistema $(D + L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$
- ➔ Las componentes de $x^{(k+1)}$ que ya conocemos se utilizan en la propia iteración $k + 1$

- **Entrada:** matriz A , términos independientes b , estimación inicial x_0 , tolerancia tol , máximo número de iteraciones $maxiter$
- **Proceso:**
 - Inicializar el contador de iteraciones ($iter = 1$) y las variables de control
 - Definir las matrices L , U , D y D^{-1} a partir de A
 - Cálculo de $M^{-1} = (D + L)^{-1}$ y $N = -U$
 - Mientras no se cumpla el criterio de parada ni se alcance el valor de $maxiter$:
 - Resolver $(D + L)x = b - Ux_0$
 - Actualizar criterios de parada y número de iteraciones
 - Actualizar variables: $x_0 = x$
- **Salida:** vector solución x , número de iteraciones $iter$

Ejemplo 2.

$$\left. \begin{array}{rrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = & 15 \end{array} \right\}$$

Aplicando el método de Gauss-Seidel con estimación inicial $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ y el criterio de parada

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < 10^{-3}$$

se obtienen los resultados

Solución	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$x_1^{(k)}$	0	0.6000	1.0302	1.0066	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	0	2.3273	2.0369	2.0036	2.0003	2.0000
$x_3^{(k)}$	0	-0.9873	-1.0145	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(k)}$	0	0.8789	0.9843	0.9984	0.9998	1.0000

Teniendo en cuenta que la solución exacta es $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$, obtenemos

$$\|x^* - x^{(5)}\|_{\infty} = 9.1280 \cdot 10^{-5}.$$

1 Introducción

2 Conceptos básicos

3 Métodos iterativos

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- **Resultados de convergencia**
- Métodos de sobre-relajación

Definición 2 (Radio espectral)

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de una matriz A . Definimos el radio espectral de A , denotado $\rho(A)$, como

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Teorema 2

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz invertible y $b \in \mathbb{R}^n$. Un método iterativo estacionario con expresión general

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + q, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

converge a la solución exacta del sistema lineal $Ax = b$ para cualquier aproximación inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si, y solo si, la matriz de iteración satisface

$$\rho(H) < 1.$$

Teorema 3

Consideremos el sistema lineal $Ax = b$. Si la matriz $I - A$ es invertible, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- El método iterativo $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + q$, $k \geq 0$, es convergente.
- $\rho(H) < 1$.
- $\|H\| < 1$, para alguna norma matricial subordinada.

Definición 3 (Matriz estrictamente diagonal dominante)

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de dimensión $n \times n$. Decimos que A es estrictamente diagonal dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 4

Si la matriz A es estrictamente diagonal dominante, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes.

1 Introducción

2 Conceptos básicos

3 Métodos iterativos

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Resultados de convergencia
- Métodos de sobre-relajación

En los métodos de sobre-relajación interviene un parámetro ω del que depende, en gran medida, la convergencia del método.

Método JSOR

Consideremos como generalización del método de Jacobi, el **método de Jacobi relajado**:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde se ha introducido un **parámetro de relajación** ω . Podemos escribir de forma equivalente su expresión iterativa como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el **vector residual de Jacobi**.

- Si el método de Jacobi converge, el método JSOR también converge siempre que $0 \leq \omega \leq 1$.

Método SOR

Considerando otra descomposición de la matriz A de la forma

$$\omega A = (D + \omega L) - (-\omega U + (1 - \omega)D),$$

se obtiene el **método SOR** (Successive Over Relaxation) con expresión:

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = (-\omega U + (1 - \omega)D)x^{(k)} + \omega b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Notemos que para $\omega = 1$ recuperamos el método de Gauss-Seidel.

Desarrollando escalarmente (2), podemos llegar a

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{11}} \left(-a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \right) \\ x_2^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{a_{22}} \left(-a_{21}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_n^{(k)} + \frac{\omega}{a_{nn}} \left(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n \right) \end{aligned} \right\}$$

Si $\bar{x}^{(k+1)}$ denota el iterado $k + 1$ del método de Gauss-Seidel, la **expresión iterativa vectorial del método SOR** se puede escribir como

$$x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} + \omega\bar{x}^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ejemplo 3.

Consideremos el sistema

$$\left. \begin{array}{rrcr} 4x_1 & +3x_2 & & = 24 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & = 30 \\ & -x_2 & +4x_3 & = -24 \end{array} \right\}$$

que tiene como solución exacta $x^* = (3, 4, -5)^T$. Aplicando el método de Gauss-Seidel y el criterio de parada

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-7},$$

se obtienen los resultados

Solución	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	\dots	$k = 34$
$x_1^{(k)}$	1.0000	5.2500	3.1406	3.0878	3.0549	3.0343		
$x_2^{(k)}$	1.0000	3.8125	3.8828	3.9267	3.9542	3.9713		
$x_3^{(k)}$	1.0000	-5.0468	-5.0292	-5.0183	-5.0114	-5.0071		

Para que se cumpla el criterio de parada necesitamos 34 iteraciones.

Ejemplo 3.

Aplicamos el método SOR con $w = 1.25$ y el criterio de parada

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-7}.$$

Los resultados obtenidos son:

Solución	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	\dots	$k = 14$
$x_1^{(k)}$	1.0000	6.3125	2.6223	3.1330	2.9570	3.0037		
$x_2^{(k)}$	1.0000	3.5195	3.9585	4.0102	4.0074	4.0029		
$x_3^{(k)}$	1.0000	-6.6501	-4.6004	-5.0966	-4.9734	-5.0037		

Para que se cumpla el criterio de parada necesitamos 14 iteraciones.

Teorema 5 (Ostrowski-Reich)

Si A es una matriz definida positiva y $0 < \omega < 2$, entonces el método SOR converge para cualquier elección de la estimación inicial $x^{(0)}$.

Definición 4 (Radio de convergencia)

Consideremos un método iterativo con matriz de iteración H . Definimos el radio de convergencia como

$$R = -\log_{10}(\rho(H)).$$

Cuanto más pequeño sea $\rho(H)$, mayor será la convergencia.




Teorema 6 (Young)

Si A es una matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva, entonces

$$\rho(H_{GS}) = (\rho(H_J))^2 < 1$$

y la elección óptima de ω para el método SOR es:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(H_{GS})}}.$$

-  Lecciones magistrales
-  Material complementario: A fondo
-  Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

