Tema 4
Diferenciación numérica

Dra. Paula Triguero Navarro

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Introducción

Diferenciación numérica

La diferenciación numérica consiste en la estimación de las funciones derivadas sin el conocimiento de ésta.

Diferenciación numérica

La diferenciación numérica consiste en la estimación de las funciones derivadas sin el conocimiento de ésta.

Podemos disponer de:

- un conjunto de datos
- una función f cuyas sucesivas derivadas no conozcamos

Diferenciación numérica

La diferenciación numérica consiste en la estimación de las funciones derivadas sin el conocimiento de ésta.

Podemos disponer de:

- un conjunto de datos
  - podremos obtener su variación o sus derivadas a partir del desarrollo en serie de Taylor
- una función f cuyas sucesivas derivadas no conozcamos

Diferenciación numérica

La diferenciación numérica consiste en la estimación de las funciones derivadas sin el conocimiento de ésta.
Podemos disponer de:

- un conjunto de datos
  - ➔ podremos obtener su variación o sus derivadas a partir del desarrollo en serie de Taylor
- una función f cuyas sucesivas derivadas no conozcamos
  - ➔ desarrollo en serie de Taylor o la técnica de la extrapolación de Richardson

Introducción

DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

TAYLOR		RICHARDSON	
Datos o f conocidos		f conocida	
Aproximaciones de las derivadas	**Orden del error**	**Error con todos los términos del orden**	**Error con los términos pares**

Objetivos

- Conocer las diferencias finitas progresivas, regresivas y centrales de diversos órdenes
- Estimar las funciones derivadas a partir del polinomio de Taylor
- Conocer la extrapolación de Richardson

2

Diferenciación de alta precisión

Teorema 1 (Teorema de Taylor)

Sea la función f y sus primeras $n+1$ derivadas continuas en un intervalo que contiene a y x. Entonces, el valor de la función f en x viene dada por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

donde a R_n se le denomina residuo, y viene dado por

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a,x).$$

Contenidos

Diferenciación de alta precisión

Diferencias finitas

- Aproximaciones que se realizan de las derivadas de las funciones
- Tienen su origen en el desarrollo en serie de Taylor

Diferencias finitas para aproximar $f'(x)$

- Progresiva:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

- Regresiva:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

- Central:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén una aproximación de $f'(x)$ tomando nodos equiespaciados en $x \in [0, 1]$

Aproximaremos la derivada de la función utilizando las diferencias finitas centrales:

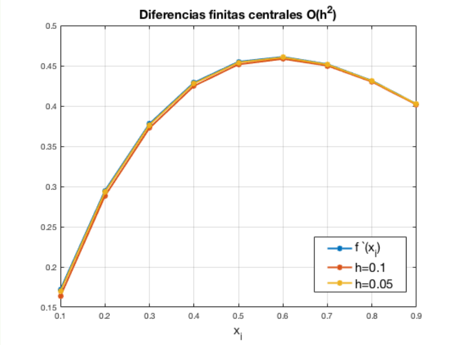
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén una aproximación de $f'(x)$ tomando nodos equiespaciados en $x \in [0, 1]$

Aproximaremos la derivada de la función utilizando las diferencias finitas centrales:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

	$f'(x_i)$	
x_i	$h = 0.1$	$h = 0.05$
0	-	-
0.1	0.1637	0.1699
0.2	0.2881	0.2931
0.3	0.3725	0.3765
0.4	0.4248	0.4279
0.5	0.4516	0.4541
0.6	0.4584	0.4604
0.7	0.4499	0.4514
0.8	0.4299	0.4310
0.9	0.4015	0.4023
1	-	-

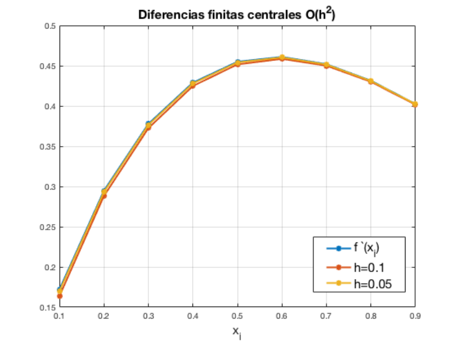


Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén una aproximación de $f'(x)$ tomando nodos equiespaciados en $x \in [0, 1]$

Aproximaremos la derivada de la función utilizando las diferencias finitas centrales:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

	ϵ	
x_i	$h = 0.1$	$h = 0.05$
0	-	-
0.1	0.0082	0.0020
0.2	0.0066	0.0017
0.3	0.0053	0.0013
0.4	0.0042	0.0011
0.5	0.0033	0.0008
0.6	0.0025	0.0006
0.7	0.0019	0.0005
0.8	0.0014	0.0003
0.9	0.0010	0.0002
1	-	-



Ejemplo 2. Diferencias finitas progresivas de orden 2 para aproximar $f'(x)$

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de f en x_{i+1} y en x_{i+2} alrededor de x_i:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + R_2, \tag{1}$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + R_2. \tag{2}$$

Obtenemos (2)$-$2(1):

$$\begin{aligned} f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) &= -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \mathcal{O}(h^3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f''(x_i) &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \end{aligned} \tag{3}$$

Reemplazamos (3) en (1)

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} + \mathcal{O}(h^3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Diferenciación de alta precisión

Diferencias finitas de mayor orden para aproximar $f'(x)$

- Progresiva:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Regresiva:

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Central:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} + \mathcal{O}(h^4)$$

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas

- Tomamos 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$:
```
>> h=(1-0)/10;
>> x=0:h:1;
```
- $x_i = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$, $h = 0.1$

Diferenciación de alta precisión

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas

- Tomamos 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$:

```
>> h=(1-0)/10;
>> x=0:h:1;
```

- $x_i = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$, $h = 0.1$
- Aproximación de f' con diferencias finitas progresivas:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

```
>> dph=1/h*(f(2:end)-f(1:end-1));
>> dph2=1/(2*h)*(-f(3:end)+4*f(2:end-1)-3*f(1:end-2));
```

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas

- Tomamos 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$:

```
>> h=(1-0)/10;
>> x=0:h:1;
```

- $x_i = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$, $h = 0.1$
- Aproximación de f' con diferencias finitas progresivas:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

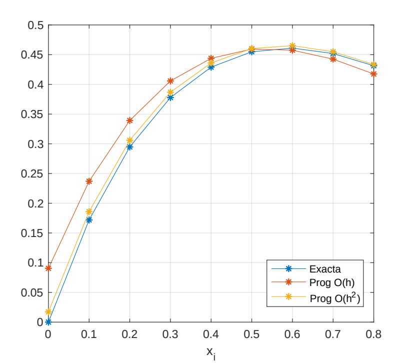
```
>> dph=1/h*(f(2:end)-f(1:end-1));
>> dph2=1/(2*h)*(-f(3:end)+4*f(2:end-1)-3*f(1:end-2));
```

- Aproximación de f' con diferencias finitas regresivas:

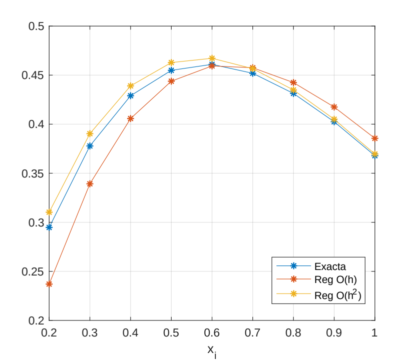
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h), \quad f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

```
>> drh=[1/h*(f(2:end)-f(1:end-1))];
>> drh2=1/(2*h)*(3*f(3:end)-4*f(2:end-1)+f(1:end -2));
```

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas



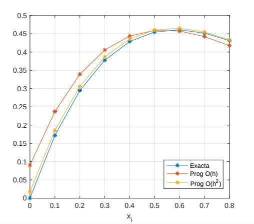
(a) Diferencias finitas progresivas

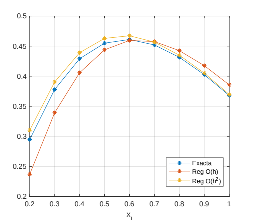


(b) Diferencias finitas regresivas

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas

x_i	P $\mathcal{O}(h)$	P $\mathcal{O}(h^2)$	R $\mathcal{O}(h)$	R $\mathcal{O}(h^2)$
0	0.0905	0.0712	-	-
0.1	0.2370	0.1859	0.0905	-
0.2	0.3392	0.3060	0.2370	0.3103
0.3	0.4058	0.3868	0.3392	0.3904
0.4	0.4438	0.4360	0.4058	0.4390
0.5	0.4594	0.4603	0.4438	0.4628
0.6	0.4575	0.4651	0.4594	0.4672
0.7	0.4424	0.4549	0.4575	0.4566
0.8	0.4175	0.4335	0.4424	0.4349
0.9	0.3856	-	0.4175	0.4050
1	-	-	0.3856	0.3696

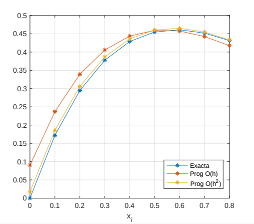


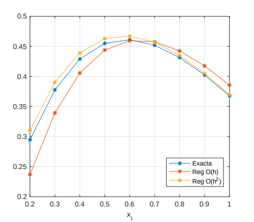


Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtén el valor de $f'(0.5)$ a partir de 11 nodos equiespaciados en $[0, 1]$ y el valor de f en dichos nodos utilizando la aproximación de las derivadas

x_i	P $\mathcal{O}(h)$	P $\mathcal{O}(h^2)$	R $\mathcal{O}(h)$	R $\mathcal{O}(h^2)$
0	0.0905	0.0712	-	-
0.1	0.2370	0.1859	0.0905	-
0.2	0.3392	0.3060	0.2370	0.3103
0.3	0.4058	0.3868	0.3392	0.3904
0.4	0.4438	0.4360	0.4058	0.4390
0.5	0.4594	0.4603	0.4438	0.4628
0.6	0.4575	0.4651	0.4594	0.4672
0.7	0.4424	0.4549	0.4575	0.4566
0.8	0.4175	0.4335	0.4424	0.4349
0.9	0.3856	-	0.4175	0.4050
1	-	-	0.3856	0.3696

	P $\mathcal{O}(h)$	P $\mathcal{O}(h^2)$	R $\mathcal{O}(h)$	R $\mathcal{O}(h^2)$
$f'(0.5)$	0.4594	0.4603	0.4438	0.4628
ϵ	0.0045	0.0054	0.0111	0.0079





Contenidos

Aproximaciones de la derivada de orden dos

Progresivas

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Regresivas

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Centrales

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Aproximaciones de la derivada de orden tres

Progresivas

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} + \mathcal{O}(h)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

Regresivas

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3} + \mathcal{O}(h)$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) - 3f(x_{i-4})}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

Centrales

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3} + \mathcal{O}(h^4)$$

3

Extrapolación de Richardson

Extrapolación de Richardson

Mejora de la precisión en la aproximación de la derivada

- Reducir el tamaño de paso h
- Utilizar más terminos del desarrollo en serie de Taylor
- Extrapolación de Richardson

Extrapolación de Richardson

Mejora de la precisión en la aproximación de la derivada

- Reducir el tamaño de paso h
- Utilizar más terminos del desarrollo en serie de Taylor
- Extrapolación de Richardson

Extrapolación de Richardson

Se utiliza cuando se dispone de una expresión del error del tipo

$$\sum_{i=1}^{p-1} k_i h^{q_i} + \mathcal{O}(h^{q_p}), \qquad k_i = cte, \quad q_1 < q_2 < \cdots < q_p$$

Extrapolación de Richardson

Mejora de la precisión en la aproximación de la derivada

- Reducir el tamaño de paso h
- Utilizar más terminos del desarrollo en serie de Taylor
- Extrapolación de Richardson

Extrapolación de Richardson

Se utiliza cuando se dispone de una expresión del error del tipo

$$\sum_{i=1}^{p-1} k_i h^{q_i} + \mathcal{O}(h^{q_p}), \qquad k_i = cte, \quad q_1 < q_2 < \cdots < q_p$$

Supongamos que $M \approx N_1(h)$. Estudiaremos dos situaciones para el error de truncamiento cometido con la aproximación:

- Error de orden $\mathcal{O}(h)$ con todos los términos:
$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots$$
- Error de orden $\mathcal{O}(h^2)$ con los términos de potencias pares:
$$M = N_1(h) + k_2 h^2 + k_4 h^4 + k_6 h^6 + \cdots$$

Contenidos

Obtención de error $\mathcal{O}(h^2)$

A partir de

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots , \tag{4}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 \frac{h}{2} + k_2 \frac{h^2}{4} + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \tag{5}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^2)$

A partir de

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots, \tag{4}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1\frac{h}{2} + k_2\frac{h^2}{4} + k_3\frac{h^3}{8} + \cdots \tag{5}$$

Operando 2(5)$-$(4),

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_2\frac{h^2}{2} - k_3\frac{3h^3}{4} + \cdots$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^2)$

A partir de

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots , \tag{4}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 \frac{h}{2} + k_2 \frac{h^2}{4} + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \tag{5}$$

Operando 2(5)−(4),

$$\begin{aligned} M &= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + \cdots \\ &= N_2(h) - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + \cdots \end{aligned}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^2)$

A partir de

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots , \tag{4}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1\frac{h}{2} + k_2\frac{h^2}{4} + k_3\frac{h^3}{8} + \cdots \tag{5}$$

Operando 2(5)−(4),

$$\begin{aligned} M &= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_2\frac{h^2}{2} - k_3\frac{3h^3}{4} + \cdots \\ &= N_2(h) - k_2\frac{h^2}{2} - k_3\frac{3h^3}{4} + \cdots \end{aligned}$$

$$M = N_2(h) + \mathcal{O}(h^2)$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^3)$

A partir de

$$N_2(h) - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + \cdots \tag{6}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2 \frac{h^2}{8} - k_3 \frac{3h^3}{32} + \cdots \tag{7}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^3)$

A partir de

$$N_2(h) - k_2\frac{h^2}{2} - k_3\frac{3h^3}{4} + \cdots \tag{6}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2\frac{h^2}{8} - k_3\frac{3h^3}{32} + \cdots \tag{7}$$

Operando $\frac{4(7)-(6)}{3}$,

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + k_3\frac{h^3}{8} + \cdots$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^3)$

A partir de

$$N_2(h) - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + \cdots \tag{6}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2 \frac{h^2}{8} - k_3 \frac{3h^3}{32} + \cdots \tag{7}$$

Operando $\frac{4(7)-(6)}{3}$,

$$\begin{aligned} M &= N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \\ &= N_3(h) + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^3)$

A partir de

$$N_2(h) - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + \cdots \tag{6}$$

dividimos el paso por 2:

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2 \frac{h^2}{8} - k_3 \frac{3h^3}{32} + \cdots \tag{7}$$

Operando $\frac{4(7)-(6)}{3}$,

$$\begin{aligned} M &= N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \\ &= N_3(h) + k_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \end{aligned}$$

$$M = N_3(h) + \mathcal{O}(h^3)$$

Ejemplo 4. Desarrolla la aproximación de diferencias progresivas de $\mathcal{O}(h)$ hasta obtener una expresión de $\mathcal{O}(h^3)$.

Diferencias progresivas con la notación de la extrapolación de Richardson:

$$N_1(h) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} N_2(h) &= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left(-f(x_i + h) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - 3f(x_i)\right). \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} N_3(h) &= N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] \\ &= \frac{1}{3h}\left(f(x_i + h) - 12f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 32f\left(x_i + \frac{h}{4}\right) - 21f(x_i)\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Desarrolla la aproximación de diferencias progresivas de $\mathcal{O}(h)$ hasta obtener una expresión de $\mathcal{O}(h^3)$.

Aproximaciones para la derivada de primer orden de f:

- Orden 1:

$$f'(x_i) = N_1(h) + \mathcal{O}(h) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$$

- Orden 2:

$$f'(x_i) = N_2(h) + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{-f(x_i+h) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - 3f(x_i)}{h}$$

- Orden 3:

$$f'(x_i) = N_3(h) + \mathcal{O}(h^3) \approx \frac{f(x_i+h) - 12f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 32f\left(x_i + \frac{h}{4}\right) - 21f(x_i)}{3h}$$

Ejemplo 5. Utiliza la extrapolación de Richardson para mejorar la aproximación hasta $\mathcal{O}(h^3)$ de $f'(1.8)$ siendo $f(x) = \ln(x)$ con $h = 0.1$

Sabemos que $f'(1.8) = \frac{1}{1.8} = 0.555556$.

- Utilizando diferencias divididas progresivas de $\mathcal{O}(h)$:

$$f'(1.8) \approx N_1(h) = \frac{f(1.9) - f(1.8)}{0.1} = 0.540672$$

- Utilizando la extrapolación de Richardson:

$$f'(1.8) \approx N_2(h) = \frac{-f(1.9) + 4f\,(1.85) - 3f(1.8)}{0.1} = 0.555287$$

y

$$f'(1.8) \approx N_3(h) = \frac{f(1.9) - 12f\,(1.85) + 32f\,(1.825) - 21f(1.8)}{3 \cdot 0.1} = 0.555553$$

Error cometido con las aproximaciones:

$$\varepsilon_1 = |f'(1.8) - N_1(h)| = 0.014883, \qquad \varepsilon_2 = |f'(1.8) - N_2(h)| = 2.688007 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = |f'(1.8) - N_3(h)| = 2.758063e \cdot 10^{-6}$$

Contenidos

Obtención de error $\mathcal{O}(h^4)$ y $\mathcal{O}(h^6)$

A partir de $M = N_1(h) + k_2h^2 + k_4h^4 + k_6h^6 + \cdots$, dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_2\frac{h^2}{4} + k_4\frac{h^4}{16} + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots\,, \tag{8}$$

y de

$$M = N_1(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \cdots\,, \tag{9}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^4)$ y $\mathcal{O}(h^6)$

A partir de $M = N_1(h) + k_2 h^2 + k_4 h^4 + k_6 h^6 + \cdots$, dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_2\frac{h^2}{4} + k_4\frac{h^4}{16} + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots , \tag{8}$$

y de

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots , \tag{9}$$

operando $\frac{4(8)-(9)}{3}$,

$$M = \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^4)$ y $\mathcal{O}(h^6)$

A partir de $M = N_1(h) + k_2h^2 + k_4h^4 + k_6h^6 + \cdots$, dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_2\frac{h^2}{4} + k_4\frac{h^4}{16} + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots, \tag{8}$$

y de

$$M = N_1(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \cdots, \tag{9}$$

operando $\frac{4(8)-(9)}{3}$,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \\ &= N_2(h) - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \end{aligned}$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^4)$ y $\mathcal{O}(h^6)$

A partir de $M = N_1(h) + k_2h^2 + k_4h^4 + k_6h^6 + \cdots$, dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_2\frac{h^2}{4} + k_4\frac{h^4}{16} + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots, \tag{8}$$

y de

$$M = N_1(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \cdots, \tag{9}$$

operando $\frac{4(8)-(9)}{3}$,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \\ &= N_2(h) - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \end{aligned}$$

$$M = N_2(h) + \mathcal{O}(h^4)$$

Obtención de error $\mathcal{O}(h^4)$ y $\mathcal{O}(h^6)$

A partir de $M = N_1(h) + k_2h^2 + k_4h^4 + k_6h^6 + \cdots$, dividimos el paso por 2:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_2\frac{h^2}{4} + k_4\frac{h^4}{16} + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots , \tag{8}$$

y de

$$M = N_1(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \cdots , \tag{9}$$

operando $\frac{4(8)-(9)}{3}$,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \\ &= N_2(h) - k_4\frac{h^4}{4} - k_6\frac{5h^6}{16} + \cdots \end{aligned}$$

$$M = N_2(h) + \mathcal{O}(h^4)$$

De forma similar:

$$M = \frac{1}{15}\left[16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + k_6\frac{h^6}{64} + \cdots = N_3(h) + \mathcal{O}(h^6)$$

Para finalizar...

- Lecciones magistrales
- Material complementario: A fondo
- Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET