

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

---> Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 9. Resolución de EDEs y cálculo de momentos.

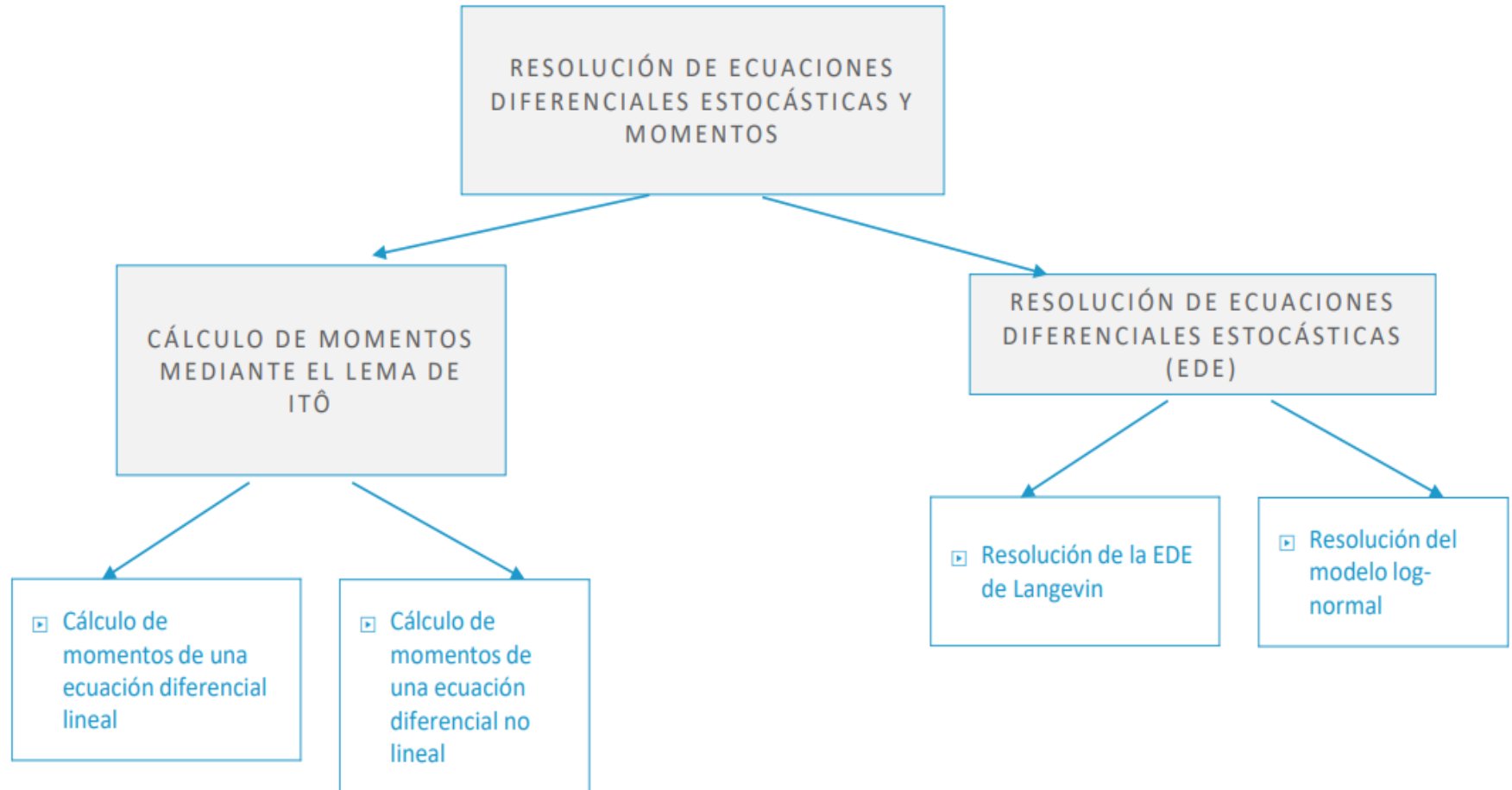
Índice

Contenidos

- ▶ Introducción y objetivos
- ▶ Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una ecuación diferencial estocástica (EDEs)

Tema 9

Contenidos - Esquema



Objetivos

- ▶ Lema de Itô.
- ▶ Obtención de los momentos de la solución de una EDE utilizando el Lema de Itô.
- ▶ Obtención de la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante el Lema de Itô.
- ▶ Bibliografía.

Integral de Itô

Lema Itô (versión general)

Sea $f(t, x)$ una función de clase $C^{1,2}$ y $X(t)$ un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A^{(1)}(s, X(s)) \, ds + \int_{t_0}^t A^{(2)}(s, X(s)) \, dW(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(s, X(s)) &= \int_s^t \left\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \right\} dy \\ &\quad + \int_s^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \, dW(y). \end{aligned}$$

Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una EDE

Cálculo de los primeros tres momentos de una ecuación diferencial lineal

$$\begin{aligned}dX(t) &= dt + X(t)dW(t), \\ X(0) &= 0.\end{aligned}$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A^{(1)}(s, X(s)) ds + \int_0^t A^{(2)}(s, X(s)) dW(s). \quad (4)$$

Si identificamos $A^{(1)}(t, X(t)) = 1$, $A^{(2)}(t, X(t)) = X(t)$ y $X_0 = 0$, la EDE (2) se puede escribir de la siguiente manera

$$X(t) = \int_0^t ds + \int_0^t X(s) dW(s) = t + \int_0^t X(s) dW(s). \quad (5)$$

Momento de orden 1

$$\mathbb{E}[X(t)] = t + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s) \, dW(s)\right)\right]}_{=0} = t.$$

Momento de orden 2

Lema de Itô para $f(t,x) = x^2$.

$$(X(t))^2 = 2 \int_0^t X(y) \, dy + \int_0^t (X(y))^2 \, dy + 2 \int_0^t (X(y))^2 \, dW(y).$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = 2 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}[X(y)]}_y \, dy + \int_0^t \mathbb{E}[(X(y))^2] \, dy + 2 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E}[(X(y))^2] \, dW(y)}_{=0},$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2]$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2t + m_2(t),$$

$$m_2(0) = 0,$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2] = 2e^t - 2t - 2.$$

Momento de orden 3

Lema de Itô para $f(t,x) = x^3$.

$$(X(t))^3 = 3 \int_0^t (X(y))^2 dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 dy + 3 \int_0^t (X(y))^3 dW(y).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(t))^3] &= 3 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E} [(X(y))^2]}_{2e^y - 2y - 2} dy + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] dy \\ &\quad + 3 \underbrace{\int_0^t \mathbb{E} [(X(y))^3] dW(y)}_{=0}. \end{aligned}$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3]$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = 3(2e^t - 2t - 2) + 3m_3(t),$$

$$m_3(0) = 0,$$

$$m_3(t) = \mathbb{E} [(X(t))^3] = 2t + \frac{8}{3} - 3e^t + \frac{1}{3}e^{3t}.$$

Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una EDE

Cálculo de los primeros tres momentos de una ecuación diferencial no lineal

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= -\frac{1}{4}(X(t))^3 dt + \frac{1}{2}(X(t))^2 dW(t), \\ X(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

$$A^{(1)}(t, X(t)) = -\frac{1}{4} (X(t))^3, \quad A^{(2)}(t, X(t)) = \frac{1}{2} (X(t))^2 \quad \text{y} \quad X_0 = \frac{1}{2}.$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t -\frac{1}{4} (X(y))^3 dy + \int_0^t \frac{1}{2} (X(y))^2 dW(y).$$

Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2 \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Momento de orden 3

$$\begin{aligned}(X(t))^3 - (X(0))^3 &= -\frac{3}{4} \int_0^t (X(y))^3 (X(y))^2 \, dy \\ &\quad + \frac{6}{8} \int_0^t (X(y))^4 (X(y)) \, dy \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_0^t (X(y))^2 (X(y))^2 \, dW(y).\end{aligned}$$

$$(X(t))^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \int_0^t (X(y))^4 \, dW(y).$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_0^t (X(y))^4 \, dW(y) \right]}_{=0} = \frac{1}{8}.$$

Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2 \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{3}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^4 \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0} = \frac{1}{8}.$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{8} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}t.$$

Momento de orden 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^2 \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \mathbb{E}[X(y)^3] \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^3] = \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{3}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X(y))^4 \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0} = \frac{1}{8}.$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{8} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}t.$$

PRESENTACIÓN ACTIVIDAD

Actividad

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales estocástico:

$$dX(t) = \frac{X(t)}{2} dt + X(t)dW(t), X(0) = 1$$

Se pide calcular la **solución PE** utilizando el lema de Itô, considerando la función $f(t, x) = e^x$.

Supongamos que $\{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener con $W(0)=0$ y supongamos que el proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con $X(0)=a>0$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \frac{1}{X(t)} dt + X(t)dW(t)$$

Si $f(t, x) = t^2 x^2$, determina $df(\underline{t}, \underline{X}(t))$.

Actividad

Rúbrica

Resolución de una ecuación diferencial...	Descripción	Puntuación máxima (puntos)	Peso %
Criterio 1	Ejercicio 1 - Derivadas correctas de $f(t, x)$.	1	10 %
Criterio 2	Ejercicio 1 - Aplicación del Lema de <u>Itô</u> .	2	20 %
Criterio 3	Ejercicio 1 - Despejar correctamente la solución.	2	20 %
Criterio 4	Ejercicio 2 - Derivadas correctas de $f(t, x)$.	2	20 %
Criterio 5	Ejercicio 2 - Aplicación del Lema de <u>Itô</u> .	3	30 %
		10	100 %

Bibliografía

Oksendal, B. K. (2004). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, Berlin.

¿Dudas / Aportaciones?





www.unir.net