Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 10: Minimización del riesgo de una cartera pura en riesgo a través de una cartera mixta en riesgo. Teoría del modelo de Precios de Activos Capitales

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Construcción de una cartera mixta en riesgo y obtención del rendimiento y del riesgo
- Representación geométrica del rendimiento
- Cálculo del vector de pesos

Introducción y objetivos

Se estudiará una estrategia para mejorar la relación riesgo vs rendimiento esperado. La idea consiste en construir una parte de la cartera con activos sin riesgo, en lugar de formarla únicamente con activos con riesgo. Este tipo de carteras se denominan carteras mixtas en riesgo.

Los objetivos son:

- Construir una cartera mixta en riesgo.
- Obtención de las expresiones de riesgo y rendimiento esperado.
- Cálculo del vector de pesos que minimice el riesgo.
- Obtención y análisis del riesgo y rendimiento de un activo en función de un mercado completo.

Construcción de una cartera mixta en riesgo y obtención del rendimiento y del riesgo

Consideremos la siguiente cartera mixta en riesgo:

- 1 activo libre de riesgo, rf $\equiv$ *risk free*, que denotaremos por a_{rf}. Su peso es w_{rf}, su rendimiento μ_{rf} y su riesgo $R_{\text{rf}} = 0$.
- n activos $a_1, \ldots, a_n$ con riesgo y pesos $w_1, \ldots, w_n$, respectivamente, y rendimiento μ_{risky}.

Se cumple que

$$\underbrace{w_{\text{rf}} + \sum_{r=1}^{n} w_i}_{w_{\text{risky}}} = 1, \qquad w_{\text{risky}} = \sum_{r=1}^{n} w_i \leq 1.$$

Construcción de una cartera mixta en riesgo y obtención del rendimiento y del riesgo

Por tanto, el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera pueden expresarse en términos de $\{\mu_{\mathsf{rf}}, w_{\mathsf{rf}}\}$ y $\{\mu_{\mathsf{risky}}, \sigma^2_{\mathsf{risky}}\}$:

$$\begin{aligned}
\mu &= w_{\mathsf{rf}}\mu_{\mathsf{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i = w_{\mathsf{rf}}\mu_{\mathsf{rf}} + \mu_{\mathsf{risky}}, \\
\sigma^2 &= V\left(w_{\mathsf{rf}}R_{\mathsf{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = \sigma^2_{\mathsf{risky}},
\end{aligned}$$

por tanto $V(C + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$ siendo $C = w_{\mathsf{rf}}R_{\mathsf{rf}} = 0$.

Construcción de una cartera mixta en riesgo y obtención del rendimiento y del riesgo

Considerar la cartera sin el activo a_{rf}, y reescalamos de modo que los pesos de los activos con riesgos sumen el total 1, es decir $\tilde{w}$,

$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_{\text{risky}}}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

De donde

$$\begin{aligned} \mu &= w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i \mu_i = w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}\mu_{\text{der}}, \\ \sigma^2 &= V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = w_{\text{risky}}^2 V\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i R_i\right) = w_{\text{risky}}^2 \sigma_{\text{der}}^2, \end{aligned}$$

y μ_{der} y σ_{der}^2 representan el rendimiento esperado y el riesgo de cartera "derivada" de la inicial.

Construcción de una cartera mixta en riesgo y obtención del rendimiento y del riesgo

Por tanto, como $w_{\text{rf}} + w_{\text{risky}} = 1$ se tiene

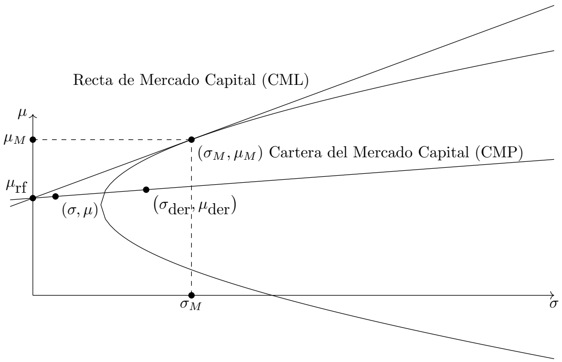
$$\begin{aligned}\mu =& \mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}(\mu_{\text{der}} - \mu_{\text{rf}}),\\ \sigma =& w_{\text{risky}}\sigma_{\text{der}}.\end{aligned}$$

Donde, si tratamos w_{risky} como un parámetro que varía en $\mathbb{R}$, tenemos

$$\mu = \left(\frac{\mu_{\text{der}} - \mu_{\text{rf}}}{\sigma_{\text{der}}}\right)\sigma + \mu_{\text{rf}}.$$

Representación geométrica del rendimiento

Representamos la recta en la siguiente figura



Representación geométrica del rendimiento

A partir de la figura observamos:

1. Si

$$w_{\text{risky}} = \begin{cases} 0 \text{ la cartera no tiene activos con riesgo} & \Longrightarrow \quad (0, \mu_{\text{rf}}) \\ 1 \text{ la cartera solo tiene activos con riesgo} & \Longrightarrow \quad (\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}}) \end{cases}$$

   con $(\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}}) \in$ **bala de Markowitz**.

Representación geométrica del rendimiento

2. Un inversor que invierte en una cartera mixta en riesgo formada por un activo libre de riesgo junto con algunos activos con riesgo construirá una cartera cuyo punto, (σ, μ), que indica la relación riesgo-rendimiento esperado estará situado entre los puntos $(0, \mu_{\text{rf}})$ y $(\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}})$.

Nota

Entre todas las rectas que unen el punto $(0, \mu_{\text{rf}})$ y varios puntos $(\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}})$ de la bala de Markowitz, la recta que genera los puntos con mayor rendimiento esperado para un riesgo dado es la recta tangente a la parte superior de la bala de Markowitz. A esta recta se le denomina **Recta de Mercado Capital** (*Capital Market Line* $\equiv$ *CML*) y a la cartera que determina el punto (σ_M, μ_M), **Cartera del Mercado Capital** (*Capital Market Portfolio* $\equiv$ *CMP*).

Representación geométrica del rendimiento

La figura ilustra la construcción de una cartera que busca maximizar el rendimiento esperado para un riesgo dado. Se asume que existe un rendimiento del activo libre de riesgo que permite la existencia de la línea recta tangente a la Bala de Markowitz (CML), ya que si el rendimiento libre de riesgo es muy alto, dicha recta no existirá debido a la falta de incentivos para invertir en activos de riesgo.

Representación geométrica del rendimiento

A partir de una cartera mixta en riesgo, se puede determinar una cartera derivada (cartera pura en riesgo y reescalada) que se encuentra dentro de la Bala de Markowitz y tiene un riesgo aceptable. Esto permite determinar un punto que define una cartera inversora mixta en riesgo que mantiene el riesgo aceptable pero mejora el rendimiento esperado. Este punto se encuentra en la CML y se alcanza ajustando la proporción entre el activo libre de riesgo y los activos con riesgo de la cartera mixta.

Representación geométrica del rendimiento

En resumen, para maximizar el rendimiento esperado dado un nivel de riesgo aceptable, se recomienda invertir en una cartera que consista en el activo libre de riesgo y la Cartera del Mercado. La proporción entre estos activos está determinada por el nivel de riesgo establecido.
Luego, la fórmula explícita para determinar los pesos de los activos que forman la Cartera de Activos Capitales del Mercado (CAMP), por el razonamiento anterior, la Recta del Mercado Capital (CML) debe pasar por los puntos $(0, \mu_{\text{rf}})$ y (σ_M, μ_M), por tanto su ecuación es

$$\text{CML:}\mu = \left(\frac{\mu_M - \mu_{\text{rf}}}{\sigma_M}\right)\sigma + \mu_{\text{rf}}.$$

Representación geométrica del rendimiento

Entonces para cualquier punto (σ_M, μ_M) sobre CML, el valor

$$\mu_M - \mu_{\mathsf{rf}} = \left(\frac{\mu_M - \mu_{\mathsf{rf}}}{\sigma_M}\right)\sigma_M > 0,$$

puede interpretarse como el rendimiento esperado adicional al rendimiento libre de riesgo, μ_{rf}. A este valor se le denomina **prima de riesgo** (*risk premium*). Es el valor adicional del rendimiento de la cartera híbrida en riesgo que podemos "esperar" asumiendo un riesgo (cuando decimos "esperar", significa que el inversor puede no ver en la práctica real materializada la ganancia).

Cálculo del vector de pesos

Vamos a determinar los pesos $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de los activos con riesgo de la cartera derivada (es decir, de la cartera de riesgo puro que resulta de reescalar la cartera mixta en riesgo) que determinan el punto (σ_M, μ_M) que indica el riesgo de la cartera que une el punto $(0, \mu_{\mathsf{rf}})$ y un punto (σ, μ) de la bala de Markowitz

$$S = \frac{\mu - \mu_{\mathsf{rf}}}{\sigma} = \frac{mw^T - \mu_{\mathsf{rf}}}{\sqrt{wCw^T}},$$

donde $m = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Cálculo del vector de pesos

Entonces

$$\begin{cases} \text{máx} & S = S(w) = \frac{mw^\top - \mu_{\mathsf{rf}}}{\sqrt{wCw^\top}} \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} w_i = \vec{1}w^\top = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$Z(\lambda, w) = \frac{mw^T - \mu_{\mathsf{rf}}}{\sqrt{wCw^T}} + \lambda\left(1 - \vec{1}w^T\right).$$

De donde

$$\nabla_\lambda Z = 1 - \vec{1}w^T,$$

$$\nabla_w Z = \frac{\left(wCw^T\right)m - \left(mw^T - \mu_{\mathsf{rf}}\right)wC}{(wCw^T)^{\frac{3}{2}}} - \lambda\vec{1}.$$

Cálculo del vector de pesos

Luego, dado que $\sigma^2 = wCw^T$ y $\mu = mw^T$, para $\nabla_w Z = 0$, tenemos que

$$\frac{\mu_{\mathsf{rf}}}{\sigma} = \frac{\left(wCw^T\right) mw^T - \left(mw^T - \mu_{\mathsf{rf}}\right) wCw^T}{(wCw^T)^{\frac{3}{2}}} = \lambda^* \vec{1} w^T,$$

como $\vec{1} w^T = 1$, obtenemos

$$\lambda^* = \frac{\mu_{\mathsf{rf}}}{\sigma},$$

y luego mediante operaciones algebraicas, deducimos que

$$w^* = \frac{(m - \mu_{\mathsf{rf}}\vec{1})C^{-1}}{(m - \mu_{\mathsf{rf}}\vec{1})C^{-1}\vec{1}^T}.$$

Nota

$$w^* \vec{1}^T = \frac{(m - \mu_{\mathsf{rf}}\vec{1})C^{-1}\vec{1}^T}{(m - \mu_{\mathsf{rf}}\vec{1})C^{-1}\vec{1}^T} = 1.$$

Cálculo del vector de pesos

Las conclusiones anteriores se resumen en el siguiente teorema

Teorema

Para cualquier rendimiento libre de riesgo esperado, μ_{rf}, la cartera del Mercado Capital (CMP) tiene pesos,

$$w^* = \frac{(m - \mu_{rf}\vec{1})C^{-1}}{(m - \mu_{rf}\vec{1})C^{-1}\vec{1}^T}$$

siendo m el vector de rendimientos esperados de los activos con riesgo del Mercado Capital, C su matriz de varianzas-covarianzas y $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$.

Determinación del riesgo-rendimiento esperado de la Cartera del Mercado Capital a partir de varias tasas libre de riesgo

Ejemplo

Consideramos una cartera formada por tres activos cuyos rendimientos medios esperados, $\mu_i = E(R_i)$, son

$$m = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Además, para estos rendimientos se conocen sus desviaciones típicas:

$$\sigma_1 = 0.15,\ \sigma_2 = 0.02,\ \sigma_3 = 0.3$$

y sus coeficientes de correlación:

$$\rho_{12} = \rho_{21} = -0.07\,, \quad \rho_{13} = \rho_{31} = 0.02\,, \qquad \rho_{23} = \rho_{32} = 0.2.$$

Determinación del riesgo-rendimiento esperado de la Cartera del Mercado Capital a partir de varias tasas libre de riesgo

Ejemplo

Además, consideramos las siguientes tasas libres de riesgo.

$$\mu_{\mathsf{rf}}^1 = 0.01, \quad \mu_{\mathsf{rf}}^2 = 0.02, \quad \mu_{\mathsf{rf}}^3 = 0.03.$$

A continuación, calcularemos el par (σ_M, μ_M) que determina la Cartera del Mercado Capital (CMP). En primer lugar necesitaremos calcular los pesos de dicha cartera aplicando el teorema.

A continuación, realizamos el cálculo para cada tasa utilizando Python.