Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 9: Minimización de una cartera financiera pura en riesgo

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Planteamiento del problema
- Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Introducción y objetivos

Nos centraremos en formar una cartera de mínimo riesgo, para ello, se buscará un vector de pesos que minimice el riesgo de la cartera (riesgo de una cartera se define a través de su varianza).
También, dado un rendimiento prefijado μ, se estudiará cómo hallar el vector de pesos equivalente minimizando el riesgo de la cartera.
Los objetivos de este tema son:

- Construir una cartera de mínimo riesgo sin rendimiento prefijado.
- Construir una cartera de mínimo riesgo con rendimiento prefijado utilizando la Teoría de la frontera eficiente de Markowitz.

Planteamiento del problema

Determinaremos los pesos w_i para $i \in \{1, \ldots, n\}$ de una cartera formada por n activos. Suponemos conocida la matriz de varianzas-covarianzas C (m.v.c) que nos define los rendimientos de los activos.

Nota

- Pesos cartera: $w = (w_1, \ldots, w_n)_{1\times n}$
- Vector de unos: $\vec{1} = (1, \ldots, 1)_{1\times n}$
- Condición de pesos: $\vec{1} w^T = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$
- Retorno del activo a_i: $R_i = \ln\left(\frac{\nu_{i,T}}{\nu_{i,0}}\right), \quad 1 \leq i \leq n$
- Retorno esperado de a_i: $\mu_i = E(R_i), \quad 1 \leq i \leq n$
- Vector de retornos esperados: $m = (\mu_1, \ldots, \mu_n)_{1\times n}$
- Matriz de varianzas y covarianzas (m.v.c) (simétrica): $C = (c_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j)_{n\times n}$

Planteamiento del problema

Recordar que

$$\rho_{ii} = \frac{\mathsf{Cov}(R_i, R_i)}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1.$$

Luego, el programa de optimización que queremos resolver es

$$\begin{cases} \text{minimizar} \quad \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j = wCw^T, \\ \text{s.a.} \\ \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = \vec{1} w^T = 1. \end{cases}$$

Debemos de determinar los pesos, w_i de cada uno de los n activos que forman la cartera de modo que el riesgo global de la cartera sea mínimo (se supone conocida la m.v.c).

Planteamiento del problema

Teorema

Sea el problema

$$\begin{cases} \textit{Optimizar} & f(x_1,\ldots,x_n),\ (x_1,\ldots,x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \textit{s.a.} & \\ & h_1(x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ & \vdots \\ & h_m(x_1,\ldots,x_n) = 0, \end{cases}$$

donde $m < n$ *(menos restricciones que variables),*

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto y convexo (a* D *se le denomina conjunto factible),*
- $f \in C^1(D)$ *y es convexa (cóncava) en* D, h_i *para todo* $i \in \{1,\ldots,m\}$, *son lineales.*

Entonces, los puntos críticos o estacionarios del problema son mínimos (máximos) globales.

Planteamiento del problema

La correspondencia con nuestro problema viene dada por:

- $x_i = w_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $f = \sigma^2 = wCw^T$.
- $m = 1$ y $h = h_1 = \vec{1}w^T - 1$.

Podemos observar que se cumplen todas las condiciones del teorema. Luego, siguiendo el tema anterior, tenemos

$$Z(w, \lambda) = wCw^T + \lambda\left(1 - \vec{1}w^T\right),$$

de donde

$$\nabla_w Z = 2wC - \lambda\vec{1},\ \nabla_\lambda Z = 1 - \vec{1}w^T,\ H_w Z = 2C.$$

Planteamiento del problema

Nota

Dado que la m.v.c C es

- Simétrica.
- Semidefinida positiva (s.d.p).

Entonces, el punto crítico o estacionario del problema es un mínimos global.

S.D.P

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0 \leq E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (R_i - u_i)\right)^2\right) = E\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (R_i - u_i)(R_j - u_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j E\left((R_i - u_i)(R_j - u_j)\right) = aCa^T.$$

Planteamiento del problema

Entonces, se (w^*, λ^*) tal que:

$$\nabla_w Z(w^*, \lambda^*) = 2w^* C - \lambda^* \vec{1} = 0,$$
$$\nabla_\lambda Z(w^*, \lambda^*) = 1 - \vec{1} {w^*}^T = 0.$$

desde donde tenemos

$$w^* = \frac{1}{2}\lambda^* \vec{1} C^{-1} \text{ y } w^* \vec{1}^T = (\vec{1} {w^*}^T)^T = 1.$$

es decir

$$\lambda^* = \frac{2}{\vec{1} C^{-1} \vec{1}^T} \text{ y } w^* = \frac{\vec{1} C^{-1}}{\vec{1} C^{-1} \vec{1}^T}.$$

Planteamiento del problema

Teorema (Resultado principal)

El vector de pesos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n), \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ *que minimiza el riesgo de una cartera formada por* n *activos cuya matriz de varianzas-covarianzas* C *es invertible está dado por:*

$$w^* = \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T},$$

siendo $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)_{1\times n}$.
El riesgo mínimo está dado por $\sigma^2_{\text{mín}} = w^* C w^{*T}$. *El rendimiento de la inversión es* $\mu^* = m w^*$, *donde* m *son los rendimientos esperados de cada activo.*

Planteamiento del problema

- $\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T$ corresponde a $(1 \times n) \cdot (n \times n) \cdot (n \times 1) = 1 \times 1 = 1$, es decir, es un número o escalar que representa la suma de las componentes del vector de tamaño $1 \times n$ del numerador. Esto garantiza que las componentes $w_1^*, \dots w_n^*$ sumen 1.
- El resultado es intuitivo ya que los pesos que determinan el riesgo mínimo de la cartera no dependen del rendimiento de cada activo que forma la cartera, sino de sus volatilidades individuales (σ_i o raíces de la diagonal de la matriz C, ver descripción UNIR) y de las covarianzas entre cada uno de los activos (resto de elementos de la matriz C) .

Planteamiento del problema
Ejemplo

Consideramos una cartera formada por tres activos cuyos rendimientos medios esperados, $\mu_i = E(R_i)$, son

$$m = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0.3, 0.2, 0.5).$$

Además, para estos rendimientos se conocen sus desviaciones típicas:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0.15, 0.02, 0.3)$$

y sus coeficientes de correlación:

$$\rho_{12} = \rho_{21} = -0.07\,, \quad \rho_{13} = \rho_{31} = 0.02\,, \qquad \rho_{23} = \rho_{32} = 0.2.$$

Planteamiento del problema
Ejemplo

De donde obtenemos la m.v.c:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{31}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{32}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0225 & -0.00021 & 0.0009 \\ -0.00021 & 0.0004 & 0.0012 \\ 0.0009 & 0.0012 & 0.09 \end{pmatrix},$$

y

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 44.7174 & 25.8523 & -0.7919 \\ 25.8523 & 2619.11 & -35.18 \\ -0.7919 & -35.18 & 11.5881 \end{pmatrix}.$$

Planteamiento del problema
Ejemplo

Así

$$
\begin{aligned}
w^* &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44.7174 & 25.8523 & -0.7919 \\ 25.8523 & 2619.11 & -35.18 \\ -0.7919 & -35.18 & 11.5881 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44.7174 & 25.8523 & -0.7919 \\ 25.8523 & 2619.11 & -35.18 \\ -0.7919 & -35.18 & 11.5881 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 0.0262799, & 0.982904, & -0.00918349 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Planteamiento del problema

Ejemplo

Luego, determinamos el rendimiento y el riesgo mínimo de la cartera

$$\mu^* = m{w^*}^T = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0262799 \\ 0.982904 \\ -0.00918349 \end{pmatrix} = 0.199873 = 19.99\,\%.$$

$$\begin{aligned} \sigma^* &= w^* C {w^*}^T = \begin{pmatrix} 0.0263 & 0.9829 & -0.0092 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0.0225 & -0.00021 & 0.0009 \\ -0.00021 & 0.0004 & 0.0012 \\ 0.0009 & 0.0012 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0263 \\ 0.9829 \\ -0.0092 \end{pmatrix} \\ &= 0.0003766 = 0.038\,\%. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos un rendimiento del $19.99\,\%$ y un riesgo del $0.038\,\%$.

Ejemplo

Ejemplo Python

```
import numpy as np

C=np.array([[0.0225,-0.00021,0.0009],
            [-0.00021,0.0004,0.0012],
            [0.0009,0.0012,0.09]])
m=np.array([0.3,0.2,0.5])
n=len(C)
v1=np.ones(n)
iC=np.linalg.inv(C)
a1=v1@iC
wc=a1/(a1@v1.T)
uc=m@wc.T
sc=wc@C@wc.T
print('Vector de pesos=',np.round(wc,3))
print('Rendimiento=','{:.2%}'.format(uc))
print('Riesgo=','{:.3%}'.format(sc))
```

Ejemplo

Ejemplo Python

```
Vector de pesos= [ 0.026  0.983 -0.009]
Rendimiento= 19.99%
Riesgo= 0.038%
```

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

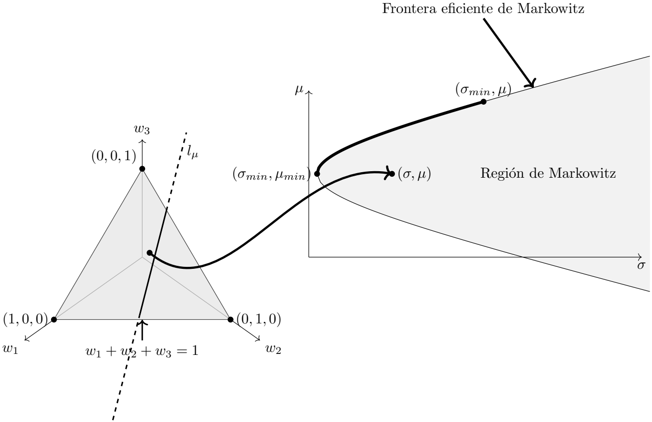
Hasta ahora, se ha estudiado cómo obtener los pesos de una cartera financiera de modo que se minimice el riesgo σ^2 sin tener en consideración el rendimiento. Supongamos ahora que queremos conseguir además un rendimiento esperado prefijado μ.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Nos centramos la relación entre los pesos $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de una cartera financiera y el punto correspondiente (σ, μ) del riesgo-rendimiento esperado de la cartera. En lo sucesivo el concepto de riesgo se identifica con la desviación típica, σ.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

En la siguiente figura, se muestra geométricamente la conclusión final para una cartera formada por $n = 3$ activos.



Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

En la parte izquierda, se ha representado la porción del plano $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ en el octante positivo y un punto (w_1, w_2, w_3) de esta porción se transforma en un punto (σ, μ) en el plano riesgo-rendimiento esperado Como a continuación probaremos, la relación funcional entre σ^2 y μ (¡ojo σ^2, no σ!) es cuadrática, y por tanto entre σ y μ es de tipo "raíz cuadrada" (¡que es "parecida" a una parábola, pero matemáticamente no es una parábola!). A esta curva se le llama **curva o bala de Markowitz**.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Nota

En la gráfica de la izquierda al considerar $w_i \in]0, 1[$, $1 \leq i \leq 3$, asumimos que la cartera no tiene activos en corto o con venta en corto (*short selling*), aunque en la práctica esto no tiene porqué ser así, es decir, en nuestro problema de optimización, solo nos restringiremos a que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, pero no a que $w_i \in]0, 1[$, $1 \leq i \leq 3$, por lo que la solución óptima puede corresponder a que uno o varios valores sean negativos.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Para realizar el estudio matemático, veremos cómo se transforma una línea recta (cuya ecuación se escribirá por conveniencia en forma paramétrica) del hiperplano de pesos al plano de riesgo-rendimiento relativo:

1. Tomamos dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios del hiperplano de pesos y formamos la recta l que los une en forma paramétrica:

$$l(t) = at + b = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n).$$

2. Consideramos la transformación:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty[\times\mathbb{R} \text{ tal que } f(w_1, \ldots, w_n) = (\sigma, \mu) = (wCw^T, mw^T).$$

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Cuando dicha transformación actúa sobre un vector de pesos que es una recta paramétrica como hemos visto antes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu &= m(at+b)^T = ma^T t + mb^T, \\
\sigma^2 &= (at+b)C(at+b)^T = \\
&= \left(aCa^T\right)t^2 + \left(bCa^T + aCb^T\right)t + bCb^T.
\end{aligned}$$

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Organizando esta expresión se llega a que

$$\sigma^2 = \gamma(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta(\alpha\mu + \beta) + \epsilon,$$

donde:

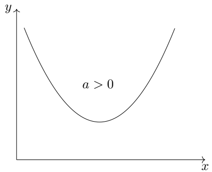
$$\alpha = \frac{1}{ma^T}, \; \beta = -\frac{mb^T}{ma^T}, \; \gamma = aCa^T, \; \delta = bCa^T + aCb^T \text{ y } \epsilon = bCb^T.$$

Esto nos indica que efectivamente σ^2 es una función cuadrática de μ, al variar t y movernos sobre la recta l del hiperplano de pesos, en el plano de riesgo-rendimiento esperado se obtiene una "parábola". Esto sucede para todas las rectas del hiperplano y así se "rellena" el plano de "parábolas", llamado **región de Makowitz** o por su forma **bala de Markowitz**.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

Vamos a estudiar con algo más de detalle, la forma de la curva de Markowitz.

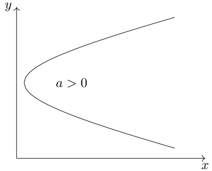
- Parábola
  - Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$.
  - Gráfica:



  - Pendiente de la recta tangente: $y' = 2ax + b$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} y' = +\infty$.

Fórmula geométrica del riesgo-rendimiento esperado de una cartera financiera pura en riesgo

- Curva de Markowitz
  - Ecuación: $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$.
  - Gráfica:



  - Pendiente de la recta tangente: $y' = \pm\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} y' = \pm\sqrt{a}$.

Por tanto, si $x \to +\infty$, la pendiente de la recta tangente a una parábola crece sin cota, mientras que para una curva Markowitz es finita.

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET