Laboratorio 1: Problemas de contorno unidimensionales, métodos de disparo

Métodos Numéricos Aplicados 2

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Javier Blanco Álvarez

Cuatrimestre II

Descripción

Con la presente práctica aplicaremos el método del disparo con Secante y Newton para resolver problemas de contorno (PC) de segundo orden no lineales y con condiciones No Dirichlet.

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$y'' + y'y - 2 = 2\text{xy}, \qquad x \in [1,2]$$

$$y'(1) - y(1) = \frac{1}{2}$$

$$y'(2) + y(2) = \frac{17}{2}$$

Describiremos la solución para este PC considerando el esquema de la secante y de Newton, ambos con un $t_0 = 0$, una tolerancia de $1 \,.\, 10^{-8}$ y 10 subintervalos. Ambos esquemas serán implemenados en Matlab version 2021b.

Planteamiento Secante.

El PC considerado también podemos expresarlo de ls siguiente forma:

$$y'' = 2\text{xy} - y'y + 2$$

tratándose de un problema no lineal y con condiciones no Dirichlet, hemos de transformar nuestro problema a uno de valor inicial, además añadiremos la aproximación de un parámetro t. Por consiguiente, el PC como PVI queda expresado:

$$y(1) = t,$$

$$y'(1) = \frac{1}{2} + t$$

Transformamos nuestro PVI de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primero orden mediante cambio de variable, quedando expresado de la siguiente forma:

$$y_1 = y; y_2 = y'; y_3 = y''$$

$$y'_1 = y_2; y'_2 = y''$$

El sistema de ecuaciones sería el siguiente:

$$\begin{bmatrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2xy_1 - y_2y_1 + 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2} + t \end{bmatrix}$$

Con el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden ya establecido hemos de determinar nuestro valor de t, el cual se ha de aproximar al valor de β, que en este caso es 17/2. Para ello, planteamos el siguiente criterio de parada:

$$\left| y'(2) + y(2) - \frac{17}{2} \right| \leq 1.10^{-8}$$

Así, el método de la secante vendrá expresado de la siguiente forma:

$$t_k = t_{k-1} - \left[\frac{(t_{k-1} - t_{k-2})\left(y'(b, t_{k-1}) + y(b, t_{k-1}) - \frac{17}{2} \right)}{\left(y'(b, t_{k-1}) + y(b, t_{k-1}) - \frac{17}{2} \right) - \left(y'(b, t_{k-2}) + y(b, t_{k-2}) - \frac{17}{2} \right)} \right]$$

Donde:

$t_{k-2} = t_0 = 0$

$t_{k-1} = t_1 = \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a} \right)$

Implementación Secante

El PVI ha sido definida en la función '*actividad1_s.m*'.

```
function dy = actividad1_s(x,y)
dy = [y(2);2.*x.*y(1)-y(2).*y(1)+2];
end
```

El método del disparo con Secante se ha definido en la función '*DisparoSecanteAct1.m*'

```
function [nodos,solaprox,t,iter] = DisparoSecanteAct1(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)
h=(b-a)/(n+1);
x=a:h:b;
x=x(:);

t0=0;
% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t0]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2)+t0)]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t0,((1/2)+t0)]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t0]);
yb0=Y(end,1);
yb0prima = Y(end,2);

t1=(beta - alfa)/(b-a);
% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa ,t1]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t1,((1/2)+t1)]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t1,((1/2)+t1)]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t1]);
yb1=Y(end,1);
yb1prima = Y(end,2);
iter=1;
```

```
    % incre=abs(yb1-beta);
    incre = abs(yb1prima + yb1 - beta);


    while incre > tol && iter < maxiter
    %     t=t1 -(t1 -t0)*(yb1 -beta )/(yb1 -yb0);
        t = t1 - (t1-t0)*(yb1prima + yb1 - beta)/((yb1prima + yb1 - beta) - (yb0prima + yb0 - beta));
        [x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2)+t)]);
    %     [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2)+t)]);
    %     [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t]);
    %     [x,Y]= ode45(funcion ,x ,[alfa ,0, t]');
        incre =abs(Y(end,2) + Y(end,1) - beta);
        iter= iter+1;
        t0=t1;
        yb0=yb1;
        yb0prima = yb1prima;
        t1=t;
        yb1=Y(end,1);
        yb1prima=Y(end,2);
    end

    if incre <= tol
    nodos =x;
    solaprox =Y;
    else
    disp('se necesitan mas iteraciones ')
    end
    end
```

procedemos a ejecutar la solución en el siguiente script:

```
clear, clc
digits(300)
format shortG

%PARAMETERS
a = 1;
b = 2;
alfa = 1/2;
beta = 17/2;
n = 10;
tol = 1e-8;
maxiter = 100;
I = 0:1:n;

%METHODS

[xs,ys,ts,iter_s]=DisparoSecanteAct1('actividad1_s',a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter);

t = table(I', xs,vpa(ys(:,1),15),vpa(ys(:,2),15), ...
    'VariableNames',{'I','x','Y Secante', ...
    'dY Secante'});
disp(t)
```

```
  I      x        Y Secante           dY Secante
 __     ___    ________________    ________________

  0      1     1.5000000015882     2.0000000015882
  1    1.1     1.71000000173511    2.20000000135434
  2    1.2     1.94000000185896    2.4000000011302
  3    1.3     2.19000000196102    2.60000000092128
  4    1.4     2.46000000204306    2.80000000073225
  5    1.5     2.75000000210728    3.00000000056655
  6    1.6     3.06000000215614    3.20000000042601
  7    1.7     3.39000000219223    3.40000000031086
  8    1.8     3.74000000221804    3.60000000021985
  9    1.9     4.11000000223592    3.80000000015052
 10      2     4.50000000224788    4.00000000009969
```

El Resultado Gráfico:

```
hold on
plot(xs, ys(:,1),'*b')
plot(xs, ys(:,2),'-r')
grid on
legend('Y Secante', 'dY Secante')
hold off
```

Comprobamos que la solución obtenida sea correcta si evaluamos los resultados de y e y' con las condiciones de contorno, así:

```
ys(1,2) - ys(1,1)
```

```
ans =
        0.5
```

```
ys(end,2) + ys(end,1)
```

```
ans =
        8.5
```

Planteamiento Newton

por hacer

Implementación Newton

El PVI ha sido definida en la función '*actividad1_n.m*'.

```
function dy = actividad1_n(x,y)
dy = [y(2);2.*x.*y(1)-y(2).*y(1)+2;y(4);-y(1).*y(4) + 2.*x.*y(3) - y(3).*y(2)];
end
```

El método del disparo con Secante se ha definido en la función '*DisparoNewtonAct1.m*'

```
function [nodos,solaprox,t,iter] = DisparoNewtonAct1(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)

h=(b-a)/(n+1);
x=a:h:b;
% t0 =(alfa-beta)/(b-a);
t0=0;

% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t0,0,1]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2) + t0),1,1/2]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2) + t0),1,1/2]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n, [alfa,t0,0,1]);
yb1=Y(end,1);
zb1=Y(end,3);
dy1 = Y(end,2);
iter=1;
% incre=abs(Y(end,1)-beta);
incre = abs(dy1 + yb1 - beta);

while incre >tol && iter < maxiter
    t=t0-(dy1 +yb1-beta)/(zb1); %Metodo de Newton
    [x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2) + t),1,1/2]);
%     [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n, [t,((1/2) + t),1,1/2]);
%     [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t,0,1]');
%     [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n, [alfa,t,0,1]);
%     incre=abs(Y(end,1)-beta);
    incre = abs(Y(end,2) + Y(end,1) - beta);
    iter= iter+1;
    t0=t;
    yb1=Y(end,1);
    zb1=Y(end,3);
    dy1 = Y(end,2);
end
if incre <= tol
nodos =x;
solaprox=Y;
else
disp('se necesitan mas iteraciones ')
end
end
```

procedemos a ejecutar la solución en el siguiente script:

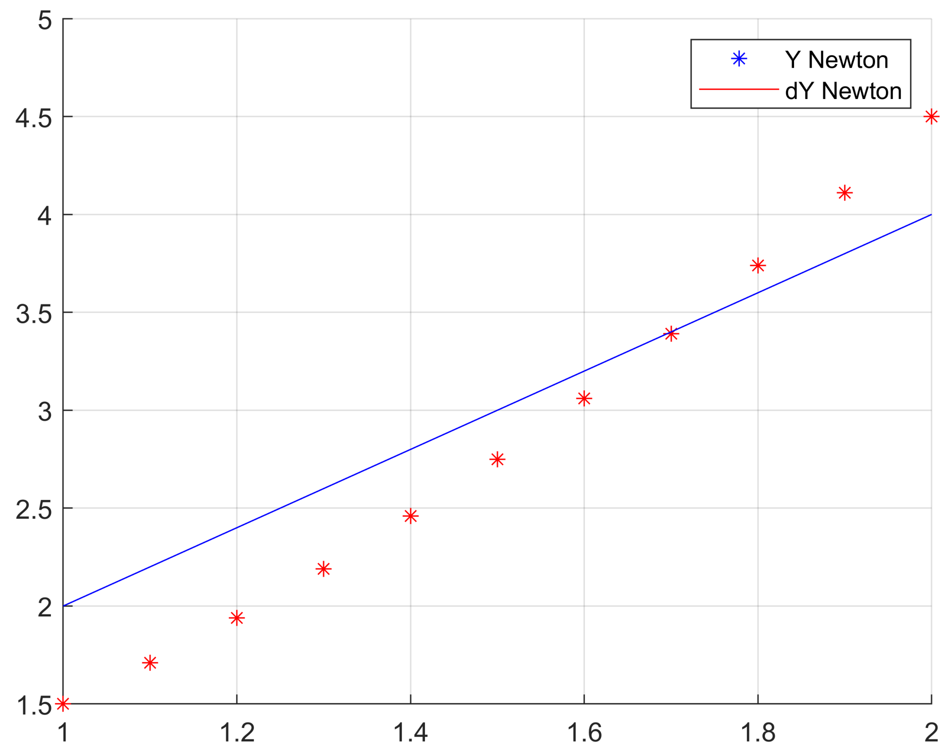
```
clear, clc
digits(300)
format shortG

%PARAMETERS
a = 1;
b = 2;
alfa = 1/2;
beta = 17/2;
n = 10;
tol = 1e-8;
maxiter = 100;
I = 0:1:n;
```

```
%METHODS

[xn,yn,tn,iter_n]=DisparoNewtonAct1('actividad1_n',a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter);

t = table(I', xn,vpa(yn(:,1),15),vpa(yn(:,2),15), ...
    'VariableNames',{'I','x','Y Newton', ...
    'dY Newton'});
disp(t)
```

I	x	Y Newton	dY Newton
0	1	1.5000000024864	2.0000000024864
1	1.1	1.71000000271639	2.20000000212027
2	1.2	1.94000000291029	2.40000000176937
3	1.3	2.19000000307006	2.6000000014423
4	1.4	2.4600000031985	2.80000000114638
5	1.5	2.75000000329904	3.00000000088695
6	1.6	3.06000000337554	3.20000000066693
7	1.7	3.39000000343202	3.40000000048667
8	1.8	3.74000000347244	3.60000000034419
9	1.9	4.11000000350042	3.80000000023565
10	2	4.50000000351915	4.00000000015607

Graficamos la solución:

```
hold on
plot(xn, yn(:,1),'*r')
plot(xn, yn(:,2),'-b')
grid on
legend('Y Newton', 'dY Newton')
hold off
```



Comparación de resultados

Conclusiones

Bibliografía

Funciones

```
function dy = actividad1_s(x,y)
dy = [y(2);2.*x.*y(1)-y(2).*y(1)+2];
end
function dy = actividad1_n(x,y)
dy = [y(2);2.*x.*y(1)-y(2).*y(1)+2;y(4);-y(1).*y(4) + 2.*x.*y(3) - y(3).*y(2)];
end
function [t, Y] = Heun_Systems(f,a,b,N,Ya)
h = (b - a) / N;
t = a:h:b;
t = t(:);
Y = zeros(N+1, length(Ya));
```

```
Y(1,:) = Ya;
for k=1:N
    k1 = h*feval(f,t(k), Y(k,:))';
    k2 = h*feval(f, t(k+1), Y(k,:) + k1)';
    Y(k+1,:) = Y(k,:) + (k1 + k2) / 2;
end
end
function [nodos,solaprox,t,iter] = DisparoSecanteAct1(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)
h=(b-a)/(n+1);
x=a:h:b;
x=x(:);

t0=0;
% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t0]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2)+t0)]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t0,((1/2)+t0)]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t0]);
yb0=Y(end,1);
yb0prima = Y(end,2);

t1=(beta - alfa)/(b-a);
% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa ,t1]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t1,((1/2)+t1)]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t1,((1/2)+t1)]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t1]);
yb1=Y(end,1);
yb1prima = Y(end,2);
iter=1;
% incre=abs(yb1-beta);
incre = abs(yb1prima + yb1 - beta);


while incre > tol && iter < maxiter
%     t=t1 -(t1 -t0)*(yb1 -beta )/(yb1 -yb0);
    t = t1 - (t1-t0)*(yb1prima + yb1 - beta)/((yb1prima + yb1 - beta) - (yb0prima + yb0 - beta)
    [x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2)+t)]);
%     [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2)+t)]);
%     [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n,[alfa,t]);
%     [x,Y]= ode45(funcion ,x ,[alfa ,0, t]');
    incre =abs(Y(end,2) + Y(end,1) - beta);
    iter= iter+1;
    t0=t1;
    yb0=yb1;
    yb0prima = yb1prima;
    t1=t;
    yb1=Y(end,1);
    yb1prima=Y(end,2);
end

if incre <= tol
nodos =x;
solaprox =Y;
else
disp('se necesitan mas iteraciones ')
```

```
end
end

function [nodos,solaprox,t,iter] = DisparoNewtonAct1(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)

h=(b-a)/(n+1);
x=a:h:b;
% t0 =(alfa-beta)/(b-a);
t0=0;

% [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t0,0,1]');
[x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2) + t0),1,1/2]);
% [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n, [t0,((1/2) + t0),1,1/2]);
% [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n, [alfa,t0,0,1]);
yb1=Y(end,1);
zb1=Y(end,3);
dy1 = Y(end,2);
iter=1;
% incre=abs(Y(end,1)-beta);
incre = abs(dy1 + yb1 - beta);

while incre >tol && iter < maxiter
    t=t0-(dy1 +yb1-beta)/(zb1); %Metodo de Newton
    [x,Y]= Heun_Systems(funcion,a,b,n,[t,((1/2) + t),1,1/2]);
%     [x,Y]= AdamsBashforth4Systems(funcion,a,b,n, [t,((1/2) + t),1,1/2]);
%     [x,Y]= ode45(funcion,x,[alfa,t,0,1]');
%     [x,Y]= ABM2Systems(funcion,a,b,n, [alfa,t,0,1]);
%     incre=abs(Y(end,1)-beta);
    incre = abs(Y(end,2) + Y(end,1) - beta);
    iter= iter+1;
    t0=t;
    yb1=Y(end,1);
    zb1=Y(end,3);
    dy1 = Y(end,2);
end
if incre <= tol
nodos =x;
solaprox=Y;
else
disp('se necesitan mas iteraciones ')
end
end
```