Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

→ Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 3. Procesos estocásticos

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

Universidad Internacional de La Rioja

Índice

Contenidos

Tema 3

Contenidos - Esquema

Procesos estocásticos

Discretos

Continuos

Proceso estocástico de Wiener, Proceso estocástico de Poisson

- N-función de masa de probabilidad
- N-función de distribución

•N-función de densidad de probabilidad
•N-función de distribución

• **Características:** media, varianza, covarianza, momentos, y correlación.
• **Propiedades:** estrictamente estacionario, debilmente estacionario, incrementos estacionarios, incrementos independientes.

Definición 1: Proceso estocástico

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico (PE) es una familia de VAs indexadas, que generalmente representa el tiempo, t. Sea $T \subseteq \mathbb{R}$, se dice que $X \equiv X(t) \equiv \{X(t)(\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ es un PE si $X(t)$ es una VA para cada $t \in T$.

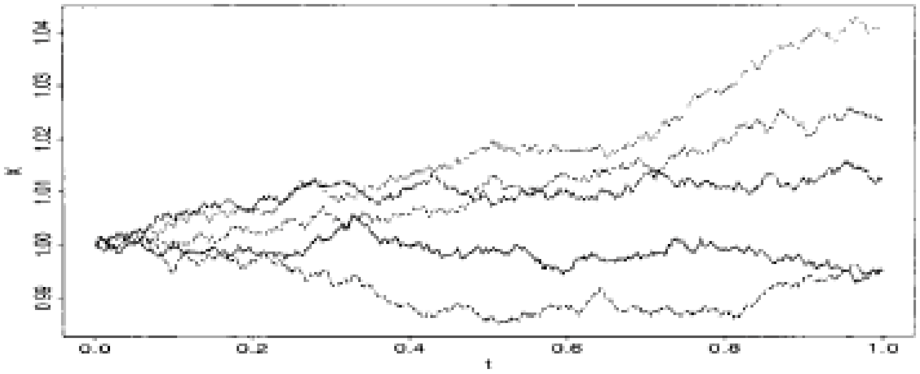
Procesos estocásticos

Discretos y continuos

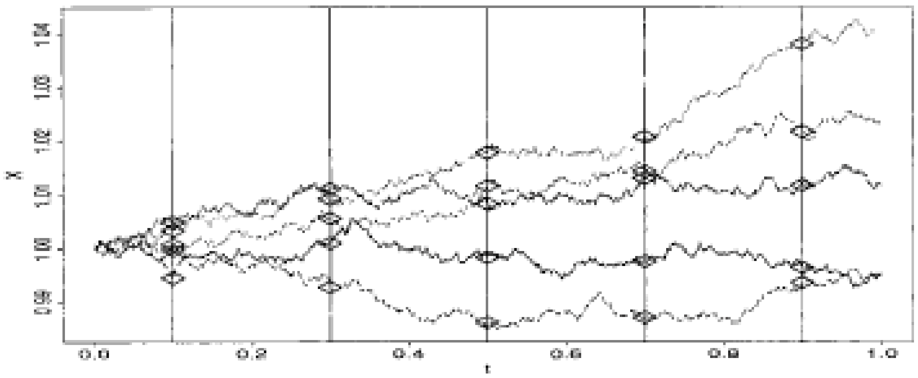
T	$X(t)$	Clasificación de $\{X(t)\}_{t\in T}$	Ejemplo $X(t) = At$
Discreto	Discreto	PE discreto con índice t discreto	$A \sim Bi(n;p), t = 1, 2, \ldots$.
Discreto	Continuo	PE continuo con índice t discreto	$A \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma^2), t = 1, 2, \ldots$.
Continuo	Discreto	PE discreto con índice t continuo	$A \sim Bi(n;p), t \geq 0.$
Continuo	Continuo	PE continuo con índice t continuo	$A \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma), t \geq 0.$

Procesos estocásticos

Representación visual



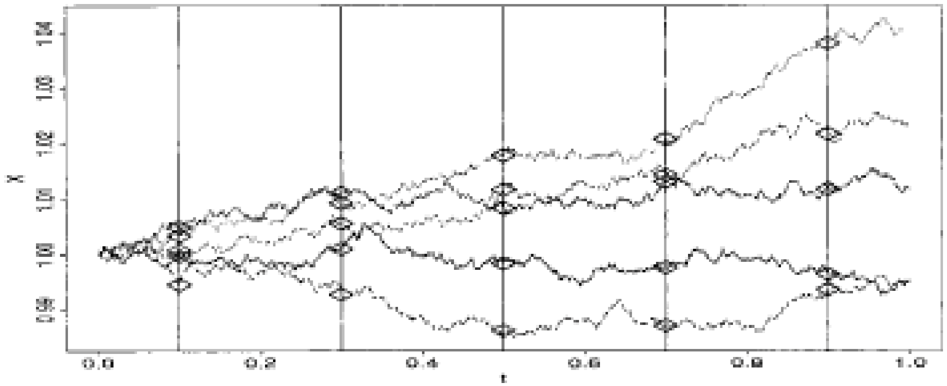
trayectorias



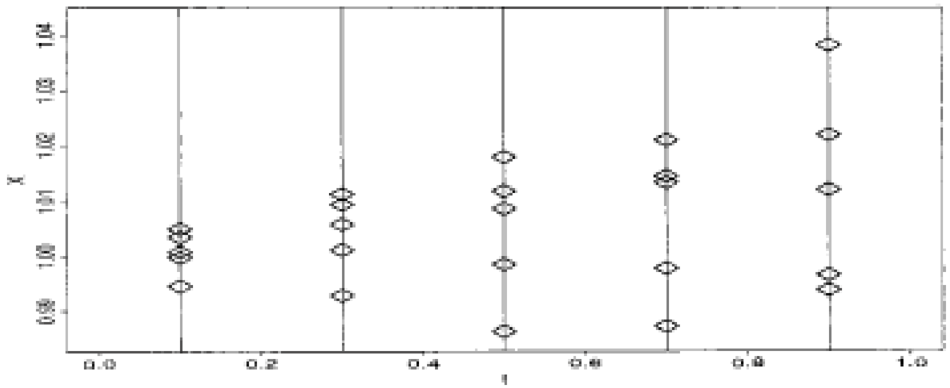
trayectorias + vs.as

Procesos estocásticos

Representación visual



trayectorias + vs.as



vs.as

Procesos estocásticos

N-función de densidad de probabilidad

Definición 2: n-función de densidad de probabilidad para PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$ $t \in T$ un PE. Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un conjunto de índices $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada t_i, $i = 1, \ldots, n$, se define la VA $X_i = X(t_i)$. La *n-función de densidad de probabilidad del PE, f_n,* viene dada por la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Procesos estocásticos

N-función de distribución de probabilidad

Definición 3: n-función de distribución de probabilidad para un PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$ $t \in T$ un PE. Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un conjunto de índices $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada t_i, $i = 1, \ldots, n$, se define la VA $X_i = X(t_i)$. La *n-función de distribución de probabilidad para un PE*, F_n, viene dada por la función de distribución de probabilidad conjunta del vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

$$
\begin{aligned}
F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \mathbb{P}[X_1 \le x_1 \wedge X_2 \le x_2 \wedge \ldots \wedge X_n \le x_n].
\end{aligned} \tag{2}
$$

Características PE

Esperanza de un PE

Definición 4: Esperanza de un PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se define la *esperanza de un PE* como una función $\mu_X : T \to \mathbb{R}$ de modo que

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]. \tag{3}$$

La esperanza de un PE se interpreta como una función que representa la trayectoria media del PE X(t).

Características PE

Varianza y covarianza de un PE

Definición 5: Varianza de un PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se define la *varianza de un PE* como una función $\sigma_X^2 : T \to \mathbb{R}^+$ de modo que

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{V}[X(t)]. \tag{4}$$

Definición 6: Covarianza de un PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se define la *covarianza de un PE* como una función $\mathbb{C}ov_X : T \times T \to \mathbb{R}$, de modo que

$$\mathbb{C}ov_X(t_1, t_2) = \mathbb{C}ov[X(t_1), X(t_2)], \quad t_1, t_2 \in T. \tag{5}$$

Características PE

Correlación de un PE

Definición 7: Función de correlación de un PE

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se define la *función de correlación de un PE* como una función $\Gamma_X : T \times T \to \mathbb{R}$ de modo que

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]. \tag{6}$$

$$\mathbb{C}ov(t_1, t_2) = \Gamma_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2), \quad t_1, t_2 \in T.$$

- **Simetría**: $\Gamma_X(t_1, t_2) = \Gamma_X(t_2, t_1), \quad t_1, t_2 \in T.$
- **Cota inferior**: $\Gamma_X(t_1, t_2) \leq \Gamma_X(t_1, t_1)\Gamma_X(t_2, t_2)$, $t_1, t_2 \in T$.
- **Definida positiva**: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_X(t_i, t_j) f(t_i) f(t_j) \geq 0$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, siendo f una función arbitraria.

Momentos de un PE
Definidos a partir de su 1-fdp

Definición 8: Momentos de un PE definidos a partir de su 1-fdp

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Sea f_1 su correspondiente 1-función de densidad.

- El *momento respecto del origen* de $X(t)$ de orden $k = 0, 1, \ldots, \infty$, viene definido por

$$\alpha_k(t) = \mathbb{E}[X(t)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_1(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

- El *momento respecto de la media* de $X(t)$ de orden $k = 0, 1, \ldots, \infty$, viene definido por

$$\mu_k(t) = \mathbb{E}[(X(t) - \mu_X(t))^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X(t))^k f_1(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Momentos de un PE
Definidos a partir de su 2-fdp

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t), t \in T$, un PE. Sea f_2 su correspondiente 2-función de densidad.

- El *momento respecto del origen* de $X(t)$ de orden $k, l = 0, 1, \ldots, \infty$, viene definido por

$$\alpha_{k,l}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)^k X(t_2)^l] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^l f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2. \quad (9)$$

- El *momento respecto de la media* de $X(t)$ de orden $k, l = 0, 1, \ldots, \infty$, viene definido por

$$\begin{aligned}\mu_{k,l}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(X(t_1) - \mu_X(t_1))^k (X(t_2) - \mu_X(t_2))^k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_X(t_1))^k (x_2 - \mu_X(t_2))^k f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Propiedades de los PE

Definición 10: Igualdad en distribución

Sean **X** e **Y** dos vectores aleatorios con la misma dimensión, n. Decimos que **X** e **Y** son iguales en distribución, $\mathbf{X} \overset{d}{=} \mathbf{Y}$, si tienen la misma distribución.

Propiedades de los PE

Definición 11: Proceso estocástico estrictamente estacionario

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se dice que es un PE estrictamente estacionario si para todo $t_1, \ldots, t_n \in T$, para todo $n \geq 1$, y para todo $h > 0$, tal que $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$, se tiene que

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \stackrel{d}{=} (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h))\,.$$

Definición 12: Proceso estocástico débilmente estacionario

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se dice que es un PE débilmente estacionario si $\mu_X(t) = \mu_X$ es constante y $\mathbb{C}ov_X(t_1, t_2) = \mathbb{C}ov_X(\tau) = \mathbb{C}ov_X(|t_1 - t_2|)$, i.e. solo depende de la diferencia $\tau = |t_1 - t_2|$.

Propiedades de los PE

Definición 13: Proceso estocástico con incrementos estacionarios

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t), t \in T$, un PE. Se dice que $X(t)$ tiene incrementos estacionario si para todo $s, t \in T$, y para todo $h > 0$, tal que $s+h, t+h \in T$, se tiene que

$$X(s) - X(t) \stackrel{d}{=} X(s+h) - X(t+h).$$

Definición 14: Proceso estocástico con incrementos independientes

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(t)$, $t \in T$, un PE. Se dice que $X(t)$ tiene incrementos independientes si para todo $t_1, \ldots, t_n \in T$ con $t_i \in T$, $1 \leq i \leq n$, se tiene que $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), X(t_n) - X(t_{n-1})$ son VAs independientes.

PE de Wiener o movimiento Browniano

Definición 15: Proceso estocástico de Wiener

Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ un PE. Decimos que es un PE de Wiener o un movimiento Browniano si cumple las siguientes condiciones:

- **Condición 1:** Empieza en 0 con probabilidad 1. Es decir, en el instante $t = 0$ la probabilidad de que el PE valga 0 es 1. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : W(0)(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}[\{W(0) = 0\}] = 1.$$

PE de Wiener o movimiento Browniano

- **Condición 2:** Tiene incrementos estacionarios. Según la Definición 13, esto quiere decir que para todo $h > 0$, tal que $s, t, s+h, t+h \in [0, +\infty[$ se tiene que

$$W(s) - W(t) \stackrel{d}{=} W(s+h) - W(t+h).$$

- **Condición 3:** Tiene incrementos independientes. Según la Definición 14, matemáticamente significa que para todo $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, las VAs $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes.

- **Condición 4:** Tiene incrementos gausianos con media 0 y con varianza la diferencia de la ventana temporal del incremento. Matemáticamente esta condición quiere decir que para todo $t, s \geq 0$ se tiene que

$$W(t) - W(s) \sim \mathrm{N}(0, |t-s|).$$

PE de Wiener o movimiento Browniano

- Movimiento Browniano
  https://www.youtube.com/watch?v=ygiCHALySmM

- Simulación del proceso de Wiener en Mathematica
  https://unir.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/embed.aspx?id=e3d267c1-9b1b-4d4f-b6bd-ad5e00f769e9

Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento Browniano geométrico viene dado por la expresión

$$X(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)}, \quad t \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

Este PE tiene como media

$$\mu_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

Su covarianza para $0 \leq t_1 \leq t_2$ viene dada por

$$\mathbb{C}ov(t_1, t_2) = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1 + t_2)}(e^{\sigma^2 t_1} - 1),$$

y consecuentemente, su varianza

$$\sigma_X^2(t) = e^{(2\mu + \sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

PE de Poisson

Sea $\{P(t) : t \geq 0\}$ un PE. Decimos que es un *PE de Poisson homogéneo* si satisface las siguientes condiciones:

- **Condición 1:** Empieza en 0 con probabilidad 1. Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : P(0)(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}[\{P(0) = 0\}] = 1.$$

- **Condición 2:** Tiene incrementos estacionarios, es decir para todo $h > 0$ tal que $s, t, s+h, t+h \in [0, +\infty[$ se tiene que

$$P(s) - P(t) \stackrel{d}{=} P(s+h) - P(t+h).$$

PE de Poisson

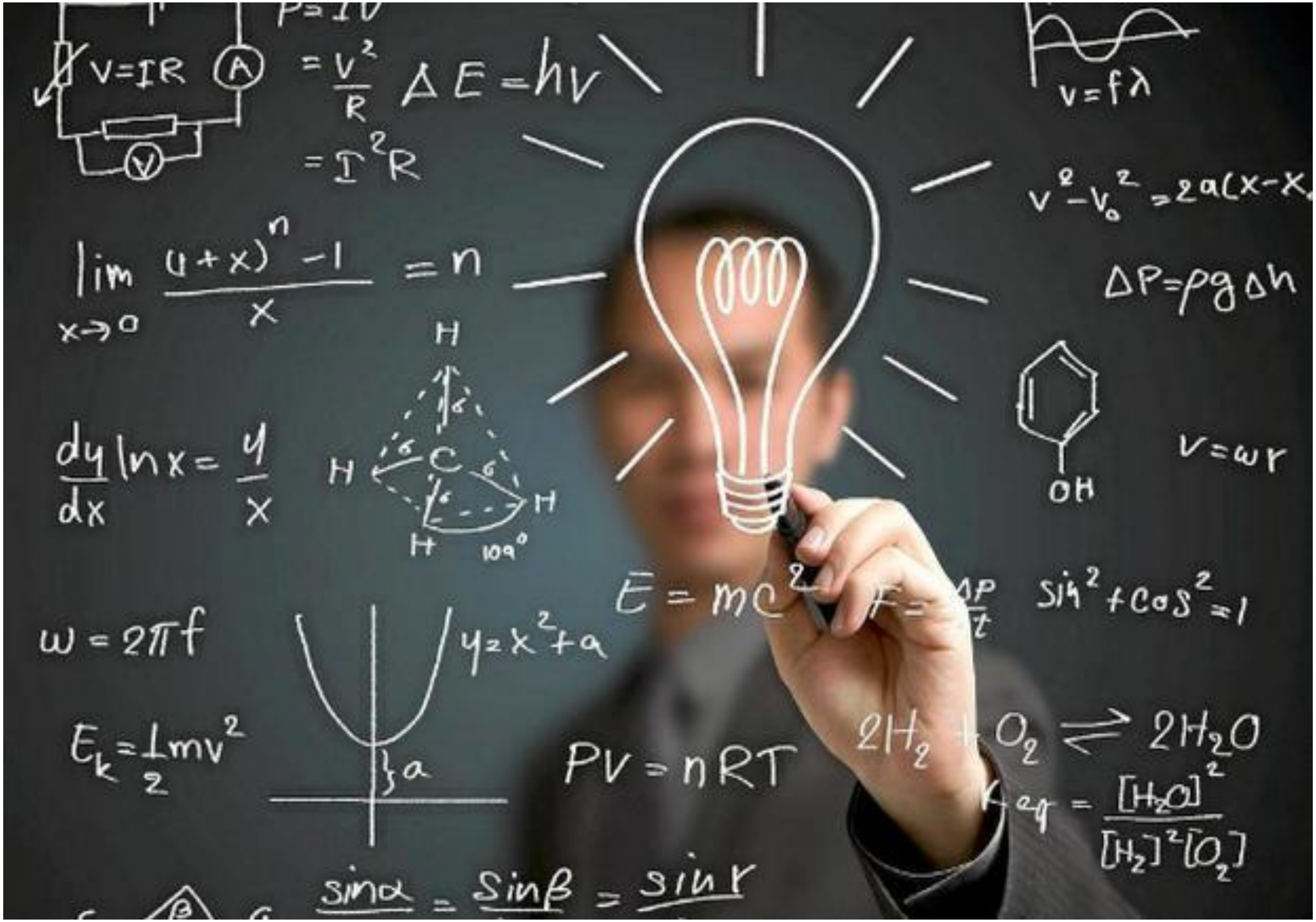
- **Condición 3:** Tiene incrementos independientes. Es decir, para todo $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ las VAs $P(t_2) - P(t_1)$, $P(t_3) - P(t_2)$, ..., $P(t_n) - P(t_{n-1})$ son independientes.
- **Condición 4:** Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, $P(t) \sim$ Po(λt).

Es importante subrayar el significado de la palabra homogéneo en esta definición. Si en la **Condición 4** $\lambda \geq 0$ entonces el PE anteriormente descrito se considera homogéneo. En caso que λ sea una función dependiente del tiempo, el PE anteriormente definido es un PE de Poisson no-homogéneo.

PE de Poisson
Características

- **Función media:** $\mu_P(t) = \mathbb{E}[P(t)] = \lambda t.$
- **Función covarianza:** $\mathbb{C}ov_P(t_1, t_2) = \lambda \text{ mín}(t_1, t_2).$
- **Función varianza:** $\sigma_P^2(t) = \mathbb{V}[P(t)] = \lambda t.$

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net