Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 4: Valoración de opciones financieras con árboles binomiales (Parte II).

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d
- Referencias bibliográficas

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

En la sección anterior hemos adelantado que aunque los valores u y d hayan sido dados, generalmente se estiman a partir del histórico del subyacente. Esta sección está dedicada a explicar el algoritmo de Hull-White, un método que nos permitirá estimar los valores de estas variables. Supongamos que tenemos un valor inicial de un subyacente S_0 que es conocido.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Al cabo de un incremento de tiempo, que denotaremos mediante Δt, el valor del subyacente es S, será aleatorio, ya que, no se conoce de antemano de forma cierta.

$$
\begin{tikzcd}
t_0 & t = t_0 + \Delta t \\
S_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[r, bend left, mapsto] & S = S_0 + \Delta S
\end{tikzcd}
$$

El rendimiento de la acción viene definido mediante

$$\text{Rendimiento relativo} = \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{S - S_0}{S_0} = \frac{S}{S_0} - 1.$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Como S es una variable aleatoria, el rendimiento relativo también lo será. Por tanto, tendrá una media y una varianza. Supongamos que la media viene dada por

$$E\,(\text{Rendimiento relativo}) = E\left(\frac{\Delta S}{S_0}\right) = E\left(\frac{S}{S_0} - 1\right) = \mu \Delta t,$$

y

$$\begin{aligned} V\,(\text{Rendimiento relativo}) &= V\left(\frac{\Delta S}{S_0}\right) = V\left(\frac{S}{S_0} - 1\right) \\ &= E\left(\left(\frac{S}{S_0} - 1 - \mu \Delta t\right)^2\right) = \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

El parámetro μ mide en el intervalo temporal de longitud Δt, el cambio porcentual medio del precio de la acción. El parámetro σ, volatilidad, mide la dispersión del rendimiento relativo, en el intervalo temporal de longitud Δt.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Consideramos un árbol multi-periodo y estudiamos dentro de El un árbol mono-periodo arbitrario. Supongamos que en el periodo $t = k$ el precio del subyacente es S_k. En el periodo siguiente $t = k + 1$ el precio del subyacente en un escenario favorable puede ser $S_{k+1} = uS_k$, con probabilidad p y en un escenario desfavorable $S_{k+1} = dS_k$ con probabilidad $1 - p$.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Del mismo modo que habíamos definido el rendimiento relativo como el cociente entre S y S_0, que correspondía al cociente entre el subyacente en el periodo actual y en el anterior, haremos ahora lo mismo. Definimos la variable aleatoria que viene definida mediante S_{k+1}/S_k. Esta variable aleatoria puede tomar dos valores u ó d con las siguientes probabilidades

$$P\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} = u\right) = p \text{ y } P\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} = d\right) = 1 - p.$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Por tanto, podemos definir esta variable como una variable aleatoria de tipo Bernoulli de parámetro p. La media y la varianza de este tipo de variables aleatorias vienen definidas mediante

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) &= uP\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} = u\right) + dP\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} = d\right) \\ &= pu + (1-p)d = 1 + \mu\Delta t, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) &= E\left(\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)\right)^2 \\ &= pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 \\ &= p(1-p)(u-d)^2 = \sigma^2\Delta t. \end{aligned}$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

De donde

$$u - d = \sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{p(1-p)}},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\mu\Delta t \\ \sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{p(1-p)}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1+\mu\Delta t \\ \sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{p(1-p)}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\mu\Delta t \\ \sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{p(1-p)}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Es decir

$$u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\frac{(1-p)\Delta t}{p}},$$
$$d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\frac{p\Delta t}{1-p}},$$

y podemos concluir que para poder calcular u y d sería suficiente poder estimar μ y σ.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Para realizar las estimaciones, utilizamos el modelo de Hull-White, que consiste en primer lugar en fijar la p. Según Hull-White se considera que $p = 0.5$, es decir

$$u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t},$$
$$d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Recordar

Propiedades

Sea X una v.a. y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Dem.

$$
\begin{aligned}
V(aX+b) &= E\left(\left(aX + b - E(aX+b)\right)^2\right) = E\left(\left(aX + b - aE(X) - b\right)^2\right) \\
&= a^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 V(X).
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Definiciones

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. entonces

- $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- $S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Luego, se estiman los parámetros μ y σ a partir de datos observados sobre el precio del subyacente S_0, S_1, S_2, ..., S_n, de la siguiente manera

$$\mu\Delta t = E\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) - 1 = E\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} - 1\right) \approx \overline{U}$$

y

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{V\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)} = \sqrt{V\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} - 1\right)} \approx S_U,$$

donde $U_k = S_{k+1}/S_k - 1$.

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Por tanto, podemos estimar los valores de μ y de σ, con $\Delta t = 1$, para estimar los valores de u y d, tenemos que $\mu = \overline{U}$ y $\sigma = S_U$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
u &= 1 + \mu + \sigma = 1 + \overline{U} + S_U, \\
d &= 1 + \mu - \sigma = 1 + \overline{U} - S_U.
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Ejemplo:

Fecha (k)	Precio S_k	Razón S_{k+1}/S_k	$U_k = S_{k+1}/S_k - 1$
0	29.560	1.019	0.019
1	30.125	0.948	-0.052
2	28.560	0.963	-0.037
3	27.500	1.023	0.023
4	28.125	0.976	-0.024
5	27.440	0.986	-0.014
6	27.060	1.002	0.002
7	27.125	1.058	0.058
8	28.690	0.974	-0.026
9	27.940	0.975	-0.025
10	27.250		

Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Ejemplo: Como $n = 10$, se tiene

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} U_k = \frac{1}{10}\left(0.019 + \cdots + (-0.025)\right) = -0.008$$

y

$$\begin{aligned} S_U &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(U_k - \overline{U}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{9}\left(U_k - \overline{U}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}\left((0.019 - (-0.008))^2 + \cdots + (-0.025 - (-0.008))^2\right)} \\ &= 0.035. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u &= 1 + (-0.008) + 0.035 = 1.027, \\ d &= 1 + (-0.008) - 0.035 = 0.957. \end{aligned}$$

4.4 Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Dado que $\Delta t = 1$, utilizando el siguiente código de GNU Octave o Matlab, se tiene

```
S=[29.56,30.125,28.56,27.50,28.125,27.44,...
27.06,27.125,28.69,27.94,27.25];
U=S(2:end)./S(1:end-1)-1;
mu=mean(U);
sigma=std(U);
u=1+mu+sigma;
d=1+mu-sigma;

printf('\n u=%.16f y d=%.16f\n',u,d)
u=1.025361846724285\mbox{ y }d=0.9594003287283817
```

4.4 Algoritmo de Hull-White para calibrar u y d

Dado que $\Delta t = 1$, utilizando el siguiente código de Python, se tiene

```
import numpy as np

S=np.array([29.56,30.125,28.56,27.50,28.125,27.44,
27.06,27.125,28.69,27.94,27.25])
U=S[1:]/S[:-1]-1
mu=np.mean(U)
sigma=np.std(U,ddof=1)#S con N-1=N-ddof
u=1+mu+sigma
d=1+mu-sigma

print(f'u={u:0.5f} y d={d:0.5f}')
u= 1.0253661846724285 y d= 0.9594003287283817
```

Referencias bibliográficas

- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016a). Estrategias financieras sintéticas con opciones de compra y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016b). Estrategias financieras sintéticas con opciones de venta y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Cortés, J. C. and Navarro-Quiles, A. (2016). Fundamentos sobre opciones financieras: Una revisión desde una perspectiva matemática. Colección de objetos docentes ADE-UPV.

Actividad 1

Esta estrategia se crea comprando una call de prima C sobre acciones a un cierto precio de ejercicio E, y comprando una opción de venta de prima P sobre las mismas acciones al mismo precio de ejercicio E. Supondremos que ambas opciones tendrán la misma fecha de vencimiento y que S_T denota el precio de la acción en la fecha de vencimiento T de las opciones.

Actividad 1

a) Inicialmente para adoptar esta estrategia, ¿realizará algún desembolso el inversor o por el contrario se embolsará cierta cantidad? Especifica la cantidad correspondiente.

b) Escribe la expresión algebraica de cada una de las dos posiciones que se adquieren, así como de la posición final. Representa gráficamente la situación, indicando los puntos de corte con el eje horizontal. Este inversor, ¿cómo espera que se comporte el precio del subyacente a vencimiento?

c) Completa la siguiente tabla de beneficios netos de la posición a vencimiento para el siguiente caso particular: $C = 5€$, $E = 100€$ y $P = 4€$.

Rango de precios de las acciones	Beneficio neto total
$0 \leq S_T \leq 90$	
$90 < S_T < 110$	
$S_T \geq 110$	

Actividad 1
Solución

a) Para esta estrategia de inversión, el inversionista tiene primeramente en mente la adquisición de una opción de compra sobre un subyacente, en este caso acciones de una empresa, adoptando una posición de call larga (CL), por lo que debe pagar una prima C, por tener este derecho de compra de acciones en el futuro. Seguidamente el inversor tiene en mente la compra de una opción de venta o put, por lo que entra en una posición de una put larga (PL), por lo cual debe pagar ahora una prima P por tener este nuevo derecho.

Actividad 1
Solución

Por lo tanto, en principio el inversor debe desembolsar una cantidad aditiva de mas P, para obtener tanto el derecho de compra como de venta, entonces al tiempo , el inversor debe pagar o desembolsa una cantidad acumulada de $C + P$.

b)

- Compra de una opción de compra (CL): Se toma una posición de CL, debido que adquiere una opción de compra de las acciones de la empresa que espera que suban en el futuro para ejecutar su opción o derecho. Por lo tanto, el modelo beneficio/pérdida que describe esta estrategia a la fecha de vencimiento T es:

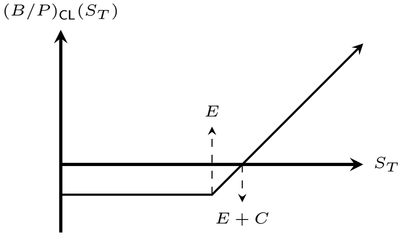
$$(B/P)_{CL}(S_T) = \text{máx}\{S_T - E, 0\} - C.$$

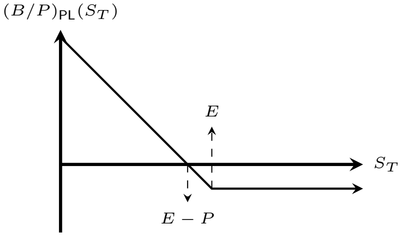
Actividad 1
Solución

- Compra de una opción de venta (PL): Al comprar una opción de venta o put, el inversor se pone en una posición de put larga, por lo que trata de minimizar las pérdidas en caso de que el precio de las acciones sea menor al precio de ejercicio E. En este caso la idea del inversor es que, si el precio de las acciones cae, poder de alguna manera limitar las pérdidas. Por lo tanto, el modelo beneficio/pérdida que describe esta estrategia a la fecha de vencimiento T es:

$$(B/P)_{PL}(S_T) = \text{máx}\{E - S_T, 0\} - P.$$

Actividad 1
Solución





Actividad 1
Solución

Recordemos que: $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(x)^+ + (-x)^+ = \max\{x, 0\} + \max\{-x, 0\} = |x| \, .$$

Dem.

Consideremos $x \leq 0$, ya que la propiedad es comutativa, es decir

$$(x)^+ + (-x)^+ = (-x)^+ + (x)^+ = (-x)^+ + (-(-x))^+ .$$

Entonces

$$(x)^+ + (-x)^+ = 0 + (-x) = |x| \, .$$

Luego podemos obtener el resultado de usar ambas estrategias a la vez, sumando las expresiones descritas anteriormente, obteniéndose como resultado:

$$
\begin{aligned}
(B/P)_{\mathsf{TOTAL}}(S_T) &= \text{máx}\{S_T - E, 0\} + \text{máx}\{E - S_T, 0\} - C - P \\
&= \begin{cases} -S_T + E - C - P & \text{si } S_T \in [0, E], \\ S_T - E - C - P & \text{si } S_T > E, \end{cases} \\
&= |S_T - E| - C - P.
\end{aligned}
$$

El beneficio neto total viene dado por:

$$
(B)_{\mathsf{NT}}(S_T) = \left((B/P)_{\mathsf{TOTAL}}(S_T)\right)^{+}.
$$

Actividad 1

Solución

$$
\begin{aligned}
(B)_{\textsf{NT}}(S_T) &= ((B/P)_{\textsf{TOTAL}}(S_T))^+ \\
&= \max\{|S_T - E| - C - P, 0\},
\end{aligned}
$$

es decir

$$
(B)_{\textsf{NT}}(S_T) = \begin{cases} |S_T - E| - C - P & \textsf{si} \;\; |S_T - E| > C + P, \\ 0 & \textsf{si} \;\; |S_T - E| \leq C + P. \end{cases}
$$

Nota

$$
|S_T - E| = C + P \Leftrightarrow S_T = E - C - P \vee S_T = E + C + P.
$$

Actividad 1
Solución

Sea

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \left\{ S_T \in \mathbb{R}_0^+ : S_T < E - C - P \right\}, \\
R_2 &= \left\{ S_T \in \mathbb{R}_0^+ : E - C - P \leq S_T \leq E + C + P \right\}, \\
R_3 &= \left\{ S_T \in \mathbb{R}_0^+ : S_T > E + C + P \right\},
\end{aligned}
$$

Actividad 1
Solución

Por lo que podemos expresar lo anterior como:

$$(B)_{\mathsf{NT}}(S_T) = \begin{cases} -S_T + E - C - P & \text{si } S_T \in [0, E - C - P), \\ 0 & \text{si } |S_T - E| \leq C + P, \\ S_T - E - C - P & \text{si } S_T > E + C + P. \end{cases}$$

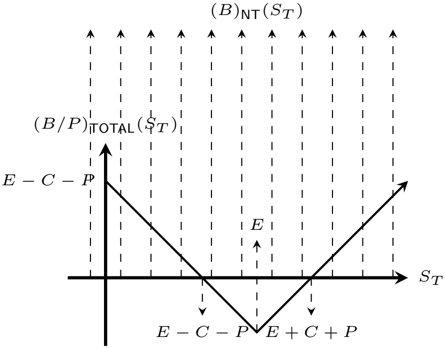
Nota

Para poder describir el beneficio neto de la forma anterior, es necesario que $E > C + P$, para que tenga sentido el primer intervalo.

Actividad 1

Solución

Cuya gráfica es:



Actividad 1
Solución

c) Como $E = 100€$, $C = 5€$ y $P = 4€$.

$$E - C - P = 91,$$
$$E + C + P = 109.$$

Tenemos que

	$(B/P)_{\mathsf{TOTAL}}(S_T)$	$(B/P)_{\mathsf{NT}}(S_T)$
$0 \leq S_T \leq 90 < 91$	$91 - S_T \in [1, 91]$	$91 - S_T \in [1, 91]$
$90 < S_T \leq 91$	$91 - S_T \in [0, 1)$	$91 - S_T \in [0, 1)$
$91 < S_T < 109$	$(B/P)_{\mathsf{TOTAL}}(S_T) \in (-9, 0)$	0
$109 \leq S_T < 110$	$S_T - 109 \in [0, 1)$	$S_T - 109 \in [0, 1)$
$S_T \geq 110 > 109$	$S_T - 109 \geq 1$	$S_T - 109 \geq 1$

Actividad 1
Solución

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def BP(s,e,c,p):#np.maximum(s-e,0)+np.maximum(e-s,0)-c-p
        return np.abs(s-e)-c-p

e,c,p=100,5,4
s=np.linspace(0,2*e,101)
```

Actividad 1

Solución

```
plt.figure(figsize=(10,3))
plt.subplot(1,3,1)
plt.plot(s,BP(s,e,c,p))
plt.axhline(0,color='green',linestyle='--',linewidth=0.4)
plt.axhline(-9,color='green',linestyle='--',linewidth=0.4)
plt.xlabel('S_T')
plt.title('(B/P)_TOTAL')
plt.subplot(1,3,2)
plt.plot(s,np.maximum(BP(s,e,c,p),0))
plt.axhline(0,color='green',linestyle='--',linewidth=0.4)
plt.xlabel('S_T')
plt.title('(B)_NETO TOTAL')
plt.subplot(1,3,3)
plt.plot(s,np.minimum(BP(s,e,c,p),0))
plt.xlabel('S_T')
plt.title('(P)_NETA TOTAL')
plt.axhline(-9,color='green',linestyle='--',linewidth=0.4)
plt.show()
```

Actividad 1

Solución