Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 9. Resolución de EDEs y cálculo de momentos.

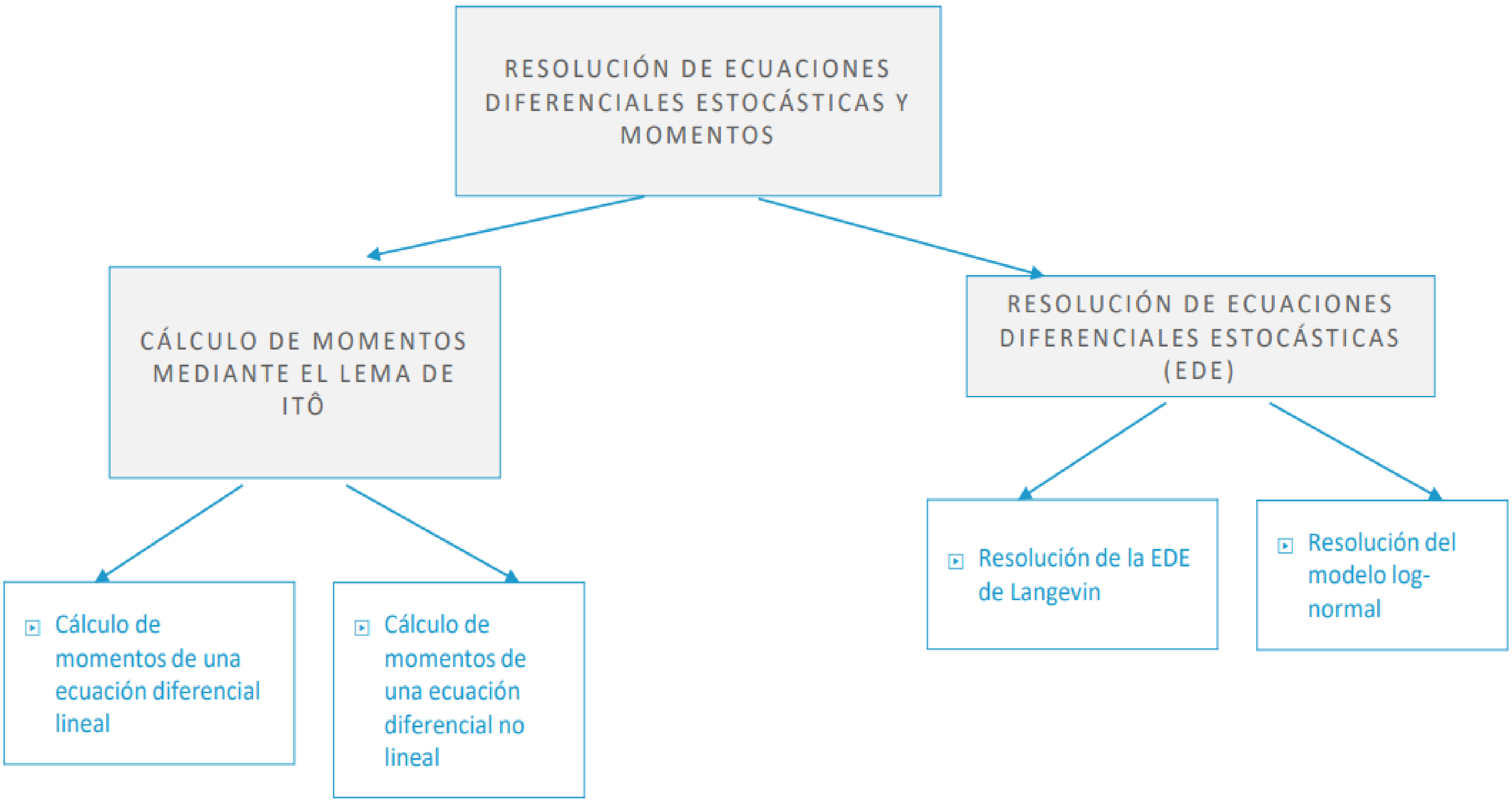
LA UNIVERSIDAD EN INTERNET
Universidad Internacional de La Rioja

Índice

Contenidos

- Introducción y objetivos
- Aplicación del lema de Itô para el cálculo de momentos de la solución de una ecuación diferencial estocástica (EDEs)
- **Aplicación del lema de Itô para la obtención explícita de EDEs**

Contenidos - Esquema



Objetivos

- Lema de Itô.
- Obtención de los momentos de la solución de una EDE utilizando el Lema de Itô.
- **Obtención de la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante el Lema de Itô.**
- Bibliografía.

Integral de Itô
Lema Itô (versión general)

Sea $f(t,x)$ una función de clase $C^{1,2}$ y $X(t)$ un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A^{(1)}(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} A^{(2)}(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(s, X(s)) = & \int_s^t \Big\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \\ & + \frac{1}{2}(A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \Big\}\,\mathrm{d}y \\ & + \int_s^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y))\,\mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Ecuación de Langevin

En física se usa para estudiar la aceleración X(t) de una partícula en el instante de tiempo t>0 con una velocidad inicial x_0.

Consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= \alpha\, X(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \qquad \sigma > 0 \\ X(0) &= x_0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

donde α denota el coeficiente de fricción y σ la intensidad de la incertidumbre que afecta a la aceleración.

Ecuación de Langevin
Calculamos la solución

Encontramos los coeficientes A$^{(1)}$, A$^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= \alpha\, X(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \qquad \sigma > 0 \\ X(0) &= x_0. \end{aligned}\right\}$$

$$A^{(1)}(t, X(t)) = \alpha X(t), \quad A^{(2)}(t, X(t)) = \sigma \quad \text{y} \quad X_0 = x_0$$

Aplicamos el Lema de Itô con $s = 0$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t \Big\{ & f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \\ & + \frac{1}{2}(A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \Big\}\,\mathrm{d}y \\ & + \int_0^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y))\,\mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

$$\boxed{f(t, x) = e^{-\alpha t} x}$$

Ecuación de Langevin
Calculamos la solución

Calculamos las derivadas parciales de f:

$$f_1(t,x) = -\alpha e^{-\alpha t}x, \quad f_2(t,x) = e^{-\alpha t}, \quad f_{22}(t,x) = 0$$

Y substituiéndolas en:

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) - f(0,X(0)) = \int_0^t & \Big\{ f_1(y,X(y)) + A^{(1)}(y,X(y)) f_2(y,X(y)) \\ & + \frac{1}{2}(A^{(2)}(y,X(y)))^2 f_{22}(y,X(y)) \Big\} \, \mathrm{d}y \\ & + \int_0^t A^{(2)}(y,X(y)) f_2(y,X(y)) \, \mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$e^{-\alpha t}X(t) - x_0 = \underbrace{-\alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y)\, \mathrm{d}y + \alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y)\, \mathrm{d}y}_{=0} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}W(y)$$

Calculamos las derivadas parciales de f:

$$f_1(t,x) = -\alpha e^{-\alpha t} x, \quad f_2(t,x) = e^{-\alpha t}, \quad f_{22}(t,x) = 0$$

Y substituiéndolas en:

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t \Big\{ & f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \\ & + \frac{1}{2} (A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \Big\} \, \mathrm{d}y \\ & + \int_0^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \, \mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$e^{-\alpha t} X(t) - x_0 = \underbrace{-\alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y) \, \mathrm{d}y + \alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y) \, \mathrm{d}y}_{=0} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha y} \, \mathrm{d}W(y)$$

Ecuación de Langevin
Calculamos la solución

$$e^{-\alpha t}X(t) - x_0 = \underbrace{-\alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y)\,\mathrm{d}y + \alpha \int_0^t e^{-\alpha y} X(y)\,\mathrm{d}y}_{=0} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)$$

$$\Downarrow$$

$$X(t) = e^{\alpha t} x_0 + \sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)$$

Media – Momento 1 de la solución y Estabilidad de la solución

$$\mathbb{E}[X(t)] = e^{\alpha\, t} x_0 + \sigma e^{\alpha\, t} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathtt{d}W(y)\right]}_{=0} = e^{\alpha\, t} x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{\alpha<0} 0$$

Ecuación de Langevin
Varianza – Momento 2 de la solución

$$\mathbb{V}[X(t)] = \mathbb{E}[(X(t))^2] - (\mathbb{E}[X(t)])^2 = \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\alpha<0} -\frac{\sigma^2}{2\alpha} > 0.$$

Ecuación de Langevin

Varianza – Momento 2 de la solución

$$X(t)^2 = \left(e^{\alpha t} x_0\right)^2 + 2e^{\alpha t} x_0 \sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathtt{d}W(y) + \left(\sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathtt{d}W(y)\right)^2$$

Ecuación de Langevin
Varianza – Momento 2 de la solución

$$X(t)^2 = \left(e^{\alpha t} x_0\right)^2 + 2e^{\alpha t} x_0 \sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}W(y) + \left(\sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}W(y)\right)^2$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = e^{2\alpha t}(x_0)^2 + 2x_0 \sigma e^{2\alpha t} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}W(y)\right]}_{=0}$$

$$+ \sigma^2 e^{2\alpha t} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}W(y)\right)^2\right]}_{= \int_0^t e^{-2\alpha y}\, \mathrm{d}y}$$

x	dWt	dt
dWt	dt	0
dt	0	0

Ecuación de Langevin
Varianza – Momento 2 de la solución

$$X(t)^2 = \left(e^{\alpha t}x_0\right)^2 + 2e^{\alpha t}x_0\sigma e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y) + \left(\sigma e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right)^2$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = e^{2\alpha t}(x_0)^2 + 2x_0\sigma e^{2\alpha t}\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right]}_{=0}$$

$$+\sigma^2 e^{2\alpha t}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right)^2\right]}_{=\int_0^t e^{-2\alpha y}\,\mathrm{d}y} = e^{2\alpha t}(x_0)^2 + \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)$$

x	**dWt**	**dt**
dWt	dt	0
dt	0	0

Ecuación de Langevin
Varianza – Momento 2 de la solución

$$X(t)^2 = \left(e^{\alpha t}x_0\right)^2 + 2e^{\alpha t}x_0\sigma e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y) + \left(\sigma e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right)^2$$

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = e^{2\alpha t}(x_0)^2 + 2x_0\sigma e^{2\alpha t}\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right]}_{=0}$$

$$+\sigma^2 e^{2\alpha t}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}W(y)\right)^2\right]}_{=\int_0^t e^{-2\alpha y}\,\mathrm{d}y} = e^{2\alpha t}(x_0)^2 + \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha t}\right)$$

x	dWt	dt
dWt	dt	0
dt	0	0

$$\mathbb{V}[X(t)] = \mathbb{E}[(X(t))^2] - (\mathbb{E}[X(t)])^2 = \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\alpha<0} -\frac{\sigma^2}{2\alpha} > 0$$

Modelo Log-Normal

Consideramos la siguiente EDE

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{d}S(t) &= \mu S(t)\mathsf{d}t + \sigma S(t)\mathsf{d}W(t), \\ S(0) &= s_0. \end{aligned}\right\}$$

Modelo Log-Normal
Calculamos la solución

Encontramos los coeficientes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t), \\ S(0) &= s_0. \end{aligned}\right\}$$

$$A^{(1)}(t, S(t)) = \mu S(t),\ A^{(2)}(t, S(t)) = \sigma S(t) \text{ y } S_0 = s_0$$

Aplicamos el Lema de Itô con $s = 0$

$$\boxed{f(t,s) = \ln(s)}$$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t &\Big\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \\ &+ \frac{1}{2}(A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \Big\}\, \mathrm{d}y \\ &+ \int_0^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y))\, \mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Modelo Log-Normal
Calculamos la solución

Calculamos las derivadas parciales de f:

$$f_1(t,s) = 0, \qquad f_2(t,s) = \frac{1}{s}, \quad \text{y}, \quad f_{22}(t,s) = -\frac{1}{s^2}$$

Y substituiéndolas en:

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) - \ln(S(0)) &= \int_0^t \mu S(y) \frac{1}{S(y)} \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 (S(y))^2 \left(-\frac{1}{S(y)^2}\right) \mathrm{d}y \\ &+ \int_0^t \sigma^2 (S(y))^2 \left(-\frac{1}{S(y)^2}\right) \mathrm{d}W(y) \\ &= \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma^2 \left(W(t) - W(0)\right). \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t) \quad \Rightarrow \quad S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}.$$

Modelo Log-Normal
Media – Momento 1 de la solución

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(t)] &= \mathbb{E}\left[s_0 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)}\right] \\
&= s_0 \mathbb{E}\left[e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)}\right] \\
&= s_0 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \mathbb{E}\left[e^{\sigma W(t)}\right] \\
&= s_0 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} e^{\frac{\sigma^2}{2}t} \\
&= s_0 e^{\mu t}.
\end{aligned}
$$

Modelo Log-Normal

Varianza – Momento 2 de la solución

$$\mathbb{V}[S(t)] = \mathbb{E}[S(t)^2] - \mathbb{E}[S(t)]^2 = (s_0)^2 e^{2\mu t} e^{\sigma^2 t} - (s_0)^2 e^{2\mu t} = (s_0)^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

Modelo Log-Normal

Varianza – Momento 2 de la solución

$$(S(t))^2 = s_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{2\sigma W(t)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(t)^2] &= s_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{2\sigma W(t)}] \\
&= s_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{t}Z}] \\
&= s_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{\frac{(2\sigma\sqrt{t})^2}{2}}] \\
&= s_0^2 e^{2\mu t} e^{-\sigma^2 t} e^{2\sigma^2 t} \\
&= s_0^2 e^{2\mu t} e^{\sigma^2 t}.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}[S(t)] = \mathbb{E}[S(t)^2] - \mathbb{E}[S(t)]^2 = (s_0)^2 e^{2\mu t} e^{\sigma^2 t} - (s_0)^2 e^{2\mu t} = (s_0)^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

EDE lineal homogénea no autónoma

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= a(t)X(t)\mathrm{d}t + b(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \\ X(0) &= x_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}\right\}$$

EDE lineal homogénea no autónoma
Calculamos la solución

Encontramos los coeficientes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= a(t)X(t)\mathrm{d}t + b(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \\ X(0) &= x_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}\right\}$$

$A^{(1)}(t, X(t)) = a(t)X(t)$, $A^{(2)}(t, X(t)) = b(t)X(t)$ y $X(0) = x_0$

Aplicamos el Lema de Itô con $s = 0$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t & \left\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \right\} \mathrm{d}y \\ & + \int_0^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \, \mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

$$\boxed{f(t, x) = \ln(x)}$$

EDE lineal homogénea no autónoma
Calculamos la solución

Calculamos las derivadas parciales de f:

$$f_1(t,x) = 0, \qquad f_2(t,x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f_{22}(t,x) = -\frac{1}{x^2}$$

Y substituiéndolas en:

$$\begin{aligned}
\ln(X(t)) - \ln(X(0)) &= \int_0^t a(y)X(y)\frac{1}{X(y)}\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t (b(y))^2(X(y))^2\left(-\frac{1}{X(y)^2}\right)\mathrm{d}y \\
&+ \int_0^t b(y)(X(y))\left(\frac{1}{X(y)}\right)\mathrm{d}W(y) \\
&= \int_0^t a(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^t (b(y))^2\mathrm{d}y + \int_0^t b(y)\mathrm{d}W(y)
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\ln\left(\frac{X(t)}{x_0}\right) = \int_0^t a(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^t (b(y))^2\mathrm{d}y + \int_0^t b(y)\mathrm{d}W(y)$$

$$X(t) = x_0 e^{\int_0^t a(y) - \frac{1}{2}(b(y)^2)\mathrm{d}y + \int_0^t b(y)dW(y)}$$

EDE lineal homogénea no autónoma

Media – Momento 1 de la solución

$$\mathbb{E}[X(t)] = x_0 + \int_0^t a(s)\mathbb{E}[X(s)]\mathrm{d}s.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m_1(t) = \mathbb{E}[X(t)]}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1'(t) &= a(t)m_1(t), \\ m_1(0) &= x_0, \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1(t) = \mathbb{E}[X(t)] = x_0 e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$$

EDE lineal homogénea no autónoma
Varianza – Momento 2 de la solución

Para calcular la varianza calculamos el momento de segundo orden de $X(t)$. Para ello aplicamos el Lema 0 con la función $f(t,x) = x^2$. Las siguientes derivadas parciales son continuas,

$$f_1(t,x) = 0, \quad f_2(t,x) = 2x, \quad f_{22}(t,x) = 2. \tag{48}$$

Aplicando el Lema 0 se tiene que

$$\begin{aligned}(X(t))^2 - (X(0))^2 = 2\int_0^t a(y)\,(X(y))^2\,\mathrm{d}y + \int_0^t (b(y))^2\,(X(y))^2\,\mathrm{d}y \\ + 2\int_0^t b(y)\,(X(y))^2\,\mathrm{d}W(y).\end{aligned} \tag{49}$$

EDE lineal homogénea no autónoma

Varianza – Momento 2 de la solución

$$\mathbb{E}[X(t)^2] = (x_0)^2 + 2\int_0^t a(y)\mathbb{E}[(X(y))^2]\mathrm{d}y + \int_0^t (b(y))^2\,\mathbb{E}[(X(y))^2]\mathrm{d}y$$

$$= (x_0)^2 + 2\int_0^t \left(a(y) + b(y)^2\right)\mathbb{E}[(X(y))^2]\mathrm{d}y,$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2]$$

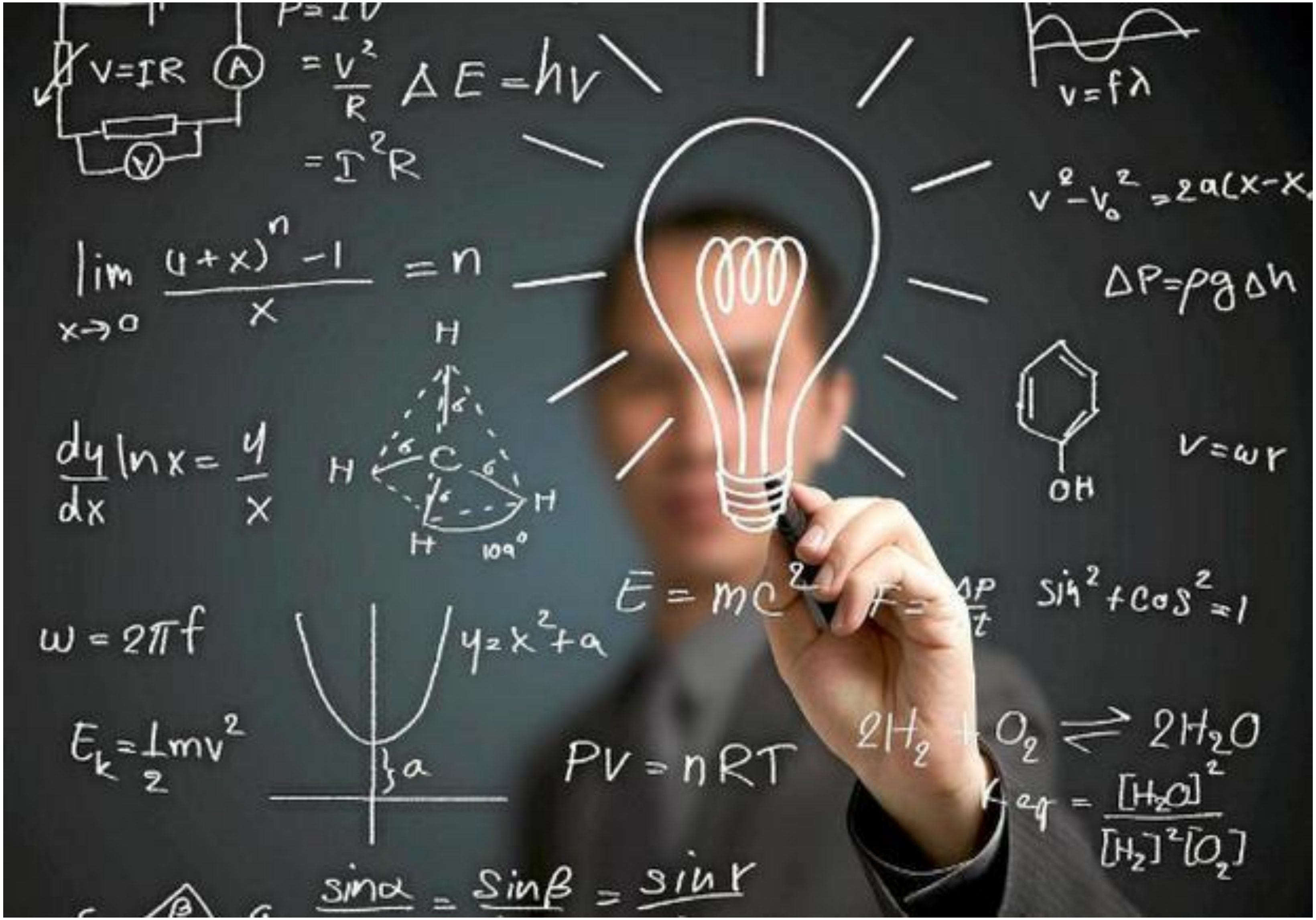
$$\left.\begin{aligned} m_2'(t) &= 2(a(t) + b(t)^2)m_2(t), \\ m_2(0) &= (x_0)^2, \end{aligned}\right\}$$

$$m_2(t) = \mathbb{E}[X(t)^2] = x_0^2 e^{2\int_0^t (a(s)+b(s)^2)\mathrm{d}s}$$

Bibliografía

Oksendal, B. K. (2004). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, Berlin.

¿Dudas / Aportaciones?



unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net