Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas
"Problemas tipo examen"

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

19 de junio de 2024

Problema 1

Se desea minimizar el riesgo de una cartera inversora sujeta a ciertas restricciones utilizando los multiplicadores de Lagrange. La cartera está compuesta por dos activos: acciones (A) y bonos (B). Las acciones tienen un rendimiento promedio del 10 % anual y una volatilidad del 15 %, mientras que los bonos tienen un rendimiento promedio del 5 % anual y una volatilidad del 5 %. Las restricciones son las siguientes:

1. El cliente no quiere invertir más del 90 % de su dinero en bonos.
2. El cliente no quiere invertir más del 95 % de su dinero en bonos.

Encuentra la combinación óptima de acciones y bonos que minimice el riesgo de la cartera.

Solución

Denotemos por w_A y w_B las proporciones de inversión en acciones y bonos respectivamente, además como no se menciona la covarianza o correlación entre A y B, consideramos

$$C_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.$$

Por otro lado, como

$$\mu_A = 0.1,\ \sigma_A = 0.15 \text{ (volatilidad } A),\ \mu_B = 0.05 \text{ y } \sigma_B = 0.05 \text{ (volatilidad } B),$$

Se plantea el problema de la siguiente manera

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \sigma^2 = wCw^T = \begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0.05^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a} \\ \qquad w_A + w_B = 1 \quad \text{(Restricción de inversión total)}, \\ \qquad w_B \leq 0.9 \quad \text{(Caso 1: Restricción de inversión máxima en bonos)}, \\ \qquad w_B \leq 0.95 \quad \text{(Caso 2: Restricción de inversión máxima en bonos)}. \end{cases}$$

Resolvemos el problema con las notas de clases sin considerar $w_B \leq 0.9$, por lo tanto

$$\lambda^* = \frac{2}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} \text{ y } w^* = \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T},$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0.05^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\lambda^* = \frac{2}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} = \frac{2}{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.15^{-2} & 0\\ 0 & 0.05^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$
$$= \frac{2}{0.15^{-2}+0.05^{-2}} = 0.0045$$

y

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} \\ &= \frac{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.15^{-2} & 0\\ 0 & 0.05^{-2}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.15^{-2} & 0\\ 0 & 0.05^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{0.15^{-2}}{0.15^{-2}+0.05^{-2}} & \frac{0.05^{-2}}{0.15^{-2}+0.05^{-2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.1 & 0.9\end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Finalmente, como $w_A^* = 0.1$ y $w_B^* = 0.9$, la solución cumple con las restricciones del caso 1.
Para el caso 2, como

$$\begin{aligned} f(w_B) &= wCw^T = 0.15^2 w_A^2 + 0.05^2 w_B^2 = 0.15^2(1-w_B)^2 + 0.05^2 w_B^2 \\ &= 0.025w_B^2 - 0.045w_B + 0.0225, \end{aligned}$$

de donde

$$f'(w_B) = 0.05w_B - 0.045 = 0.5\,(w_B - 0.9) \leq 0,\ \forall w_B \leq 0.9,$$

y

$$f'(w_B) = 0.05w_B - 0.045 = 0.5\,(w_B - 0.9) \geq 0,\ \forall 0.9 \leq w_B \leq 0.95,$$

es decir, es creciente para $0.9 \leq w_B \leq 0.95$, por lo tanto

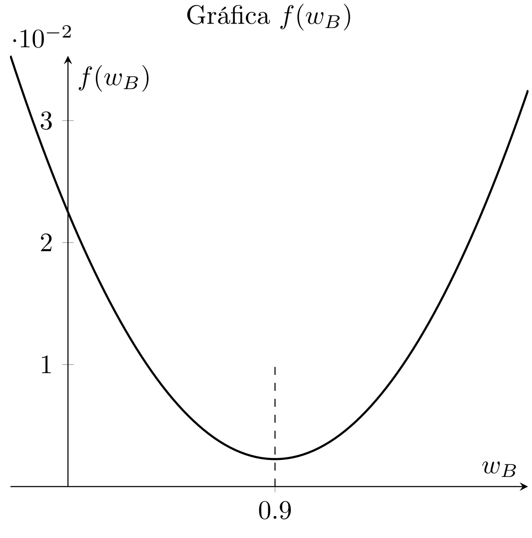
$$f(0.95) \geq f(w_B) \geq f(0.9),\ \forall 0.9 \leq w_B \leq 0.95,$$

por lo tanto

$$w^* = \begin{pmatrix}0.1 & 0.9\end{pmatrix}$$

es el vector de mínimo riesgo en ambos casos.

Gráfica $f(w_B)$



Pregunta 2

Suponga que desea minimizar el riesgo de una cartera con tres activos: acciones (A), bonos (B), y un activo de mercado (C) con los siguientes datos:

- Activo A: rendimiento promedio 10 % y volatilidad 18 %.
- Activo B: rendimiento promedio 5 % y volatilidad 10 %.
- Activo C: rendimiento promedio 7 % y volatilidad 15 %.

Además, suponga que la correlación entre los activos es:

$$\rho_{AB} = 0.3,\ \rho_{AC} = 0.5 \text{ y } \rho_{BC} = 0.2.$$

Se pide:

- Encontrar los pesos óptimos de cada activo que minimicen el riesgo de la cartera.
- Calcular el rendimiento esperado y la varianza de la cartera óptima.

Solución

Se plantea el problema de la siguiente manera

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \sigma^2 = wCw^T = \begin{pmatrix} w_A & w_B & w_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B & \rho_{AC}\sigma_A\sigma_C \\ \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B & \sigma_B^2 & \rho_{BC}\sigma_B\sigma_C \\ \rho_{AC}\sigma_A\sigma_C & \rho_{BC}\sigma_B\sigma_C & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a} \\ \qquad w_A + w_B + w_C = 1 \quad \text{(Restricción de inversión total).} \end{cases}$$

Donde

$$\rho_{AB} = 0.3,\ \rho_{AC} = 0.5 \text{ y } \rho_{BC} = 0.2,$$

y

- Activo A: $\mu_A = 0.10$ y $\sigma_A = 0.18$.
- Activo B: $\mu_B = 0.05$ y $\sigma_B = 0.1$.
- Activo C: $\mu_C = 0.07$ y $\sigma_C = 0.15$.

Luego, como

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B & \rho_{AC}\sigma_A\sigma_C \\ \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B & \sigma_B^2 & \rho_{BC}\sigma_B\sigma_C \\ \rho_{AC}\sigma_A\sigma_C & \rho_{BC}\sigma_B\sigma_C & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0324 & 0.0054 & 0.0135 \\ 0.0054 & 0.01 & 0.003 \\ 0.0135 & 0.003 & 0.0225 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
C^{-1} &= \frac{1}{\rho_{BC}^2+\rho_{AC}^2+\rho_{AB}^2-2\rho_{AB}\rho_{AC}\rho_{BC}-1}\begin{pmatrix} \frac{(\rho_{BC}-1)(\rho_{BC}+1)}{\sigma_A^2} & -\frac{\rho_{AC}\rho_{BC}-\rho_{AB}}{\sigma_A\sigma_B} & -\frac{\rho_{AB}\rho_{BC}-\rho_{AC}}{\sigma_A\sigma_C} \\ -\frac{\rho_{AC}\rho_{BC}-\rho_{AB}}{\sigma_A\sigma_B} & \frac{(\rho_{AC}-1)(\rho_{AC}+1)}{\sigma_B^2} & \frac{\rho_{BC}-\rho_{AB}\rho_{AC}}{\sigma_B\sigma_C} \\ -\frac{\rho_{AB}\rho_{BC}-\rho_{AC}}{\sigma_A\sigma_C} & \frac{\rho_{BC}-\rho_{AB}\rho_{AC}}{\sigma_B\sigma_C} & \frac{(\rho_{AB}-1)(\rho_{AB}+1)}{\sigma_C^2} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{0.68}\begin{pmatrix} -29.63 & 11.11 & 16.3 \\ 11.11 & -75 & 3.33 \\ 16.3 & 3.33 & -40.44 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 43.58 & -16.34 & -23.97 \\ -16.34 & 110.29 & -4.90 \\ -23.97 & -4.90 & 59.48 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\vec{1}C^{-1} &= \begin{pmatrix} 3.27 & 89.05 & 30.61 \end{pmatrix}, \\
\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T &= 122.93.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\lambda^* = \frac{2}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} = 0.016,$$

y

$$
\begin{aligned}
w^* &= \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} \\
&= \begin{pmatrix} 0.03 & 0.72 & 0.25 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De donde el riego mínimo y el rendimiento de la inversión son

$$\sigma^{*2} = w^* C w^{*T} = 0.0081,\ \mu^* = m w^{*T} = 0.0563.$$

Problema 3

Se desea minimizar el riesgo de una cartera financiera pura en riesgo con cuatro activos: acciones (A), bonos (B), tercer activo (C) y cuarto activo (D) no correlacionados. Los rendimientos promedio y las volatilidades de los activos son los siguientes:

- Activo A: rendimiento promedio de 10 % y volatilidad de 20 %.
- Activo B: rendimiento promedio de 5 % y volatilidad de 5 %.
- Activo C: rendimiento promedio de 7 % y volatilidad de 15 %.
- Activo D: rendimiento promedio de 5 % y volatilidad de 15 %.

Se pide:

- Encontrar el riesgo mínimo y el rendimiento de la inversión.
- Considerando que $w_A + w_B + w_C = 0.8$ y $w_A + w_C = 0.4$, donde w_A, w_B y w_C corresponden a los pesos de los activos A, B y C respectivamente. Encontrar el riesgo mínimo y el rendimiento de la inversión.

Solución

Denotemos por w_A, w_B, w_C y w_D las proporciones de inversión en acciones, bonos, tercer y cuarto activo respectivamente, además como no se menciona la covarianza o correlación entre A y B, consideramos

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0 = \rho_{AD} = \rho_{BC} = \rho_{BD} = \rho_{CD} = 0$$

Por otro lado, como

- Activo A: $\mu_A = 0.1$ y $\sigma_A = 0.2$.
- Activo B: $\mu_B = 0.05$ y $\sigma_B = 0.05$.
- Activo C: $\mu_C = 0.07$ y $\sigma_C = 0.15$.
- Activo D: $\mu_D = 0.05$ y $\sigma_D = 0.15$.

Se plantea el problema de la siguiente manera

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \sigma^2 = wCw^T = \begin{pmatrix} w_A & w_B & w_C & w_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \\ w_D \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a} \\ \qquad w_A + w_B + w_C + w_D = 1 \quad \text{(Restricción de inversión total)}, \\ \qquad w_A + w_B + w_C = 0.8 \quad \text{(Caso 1)}, \\ \qquad w_A + w_C = 0.4 \quad \text{(Caso 2)}. \end{cases}$$

Desde los apuntes de clases, tenemos que

$$\lambda^* = \frac{2}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} \text{ y } w^* = \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T},$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{2}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{2}{\sum\limits_{i\in\{A,B,C,D\}} \sigma_i^{-2}} = \frac{2}{0.2^{-2} + 0.05^{-2} + 0.15^{-2} + 0.15^{-2}} = 0.0039 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\vec{1}C^{-1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}^T} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^{-2} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_A^{-2}}{\sum\limits_{i\in\{A,B,C,D\}} \sigma_i^{-2}} & \frac{\sigma_B^{-2}}{\sum\limits_{i\in\{A,B,C,D\}} \sigma_i^{-2}} & \frac{\sigma_C^{-2}}{\sum\limits_{i\in\{A,B,C,D\}} \sigma_i^{-2}} & \frac{\sigma_D^{-2}}{\sum\limits_{i\in\{A,B,C,D\}} \sigma_i^{-2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0486 & 0.7784 & 0.0865 & 0.0865 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De donde el riego mínimo y el rendimiento de la inversión son

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= w^* C w^{*T} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0486 & 0.7784 & 0.0865 & 0.0865 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0486 \\ 0.7784 \\ 0.0865 \\ 0.0865 \end{pmatrix} \\ &= 0.0019, \end{aligned}$$

y

$$\mu^* = m w^{*T} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0486 \\ 0.7784 \\ 0.0865 \\ 0.0865 \end{pmatrix} = 0.0542.$$

Luego para el caso 1, como

$$w_A + w_B + w_C + w_D = 0.8270 > 0.8,$$

debemos estudiar cada caso. Entonces, como

$$\begin{cases} w_A + w_B + w_C + w_D = 1 \\ w_A + w_B + w_C = 0.8 \end{cases} \Rightarrow w_D = 0.2,$$

y

$$\begin{cases} w_A + w_B + w_C = 0.8 \\ w_A + w_C = 0.4 \end{cases} \Rightarrow w_B = 0.4,$$

de donde, el problema a resolver es

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \sigma^2 = wCw^T = \begin{pmatrix} w_A & 0.4 & w_C & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ 0.4 \\ w_C \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a} \\ \qquad w_A + w_C = 0.4. \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} f(w_A) &= \begin{pmatrix} w_A & 0.4 & 0.4 - w_A & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ 0.4 \\ 0.4 - w_A \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_C^2 (0.4 - w_A)^2 + 0.05^2 0.4^2 + 0.15^2 0.2^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$f'(w_A) = 2\sigma_A^2 w_A + 2\sigma_C^2 (w_A - 0.4) = 0 \Rightarrow w_A = \frac{0.4\sigma_C^2}{\sigma_A^2 + \sigma_C^2},$$

es decir

$$w_A = 0.144 \text{ y } w_C = 0.256.$$

Por lo tanto

$$w^* = \begin{pmatrix} 0.144 & 0.4 & 0.256 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

De donde el riego mínimo y el rendimiento de la inversión son

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= w^* C w^{*T} \\ &= \begin{pmatrix} 0.144 & 0.4 & 0.256 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.4 \\ 0.256 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= 0.0036, \end{aligned}$$

y

$$\mu^* = mw^{*T} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.4 \\ 0.256 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 0.0623.$$