Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

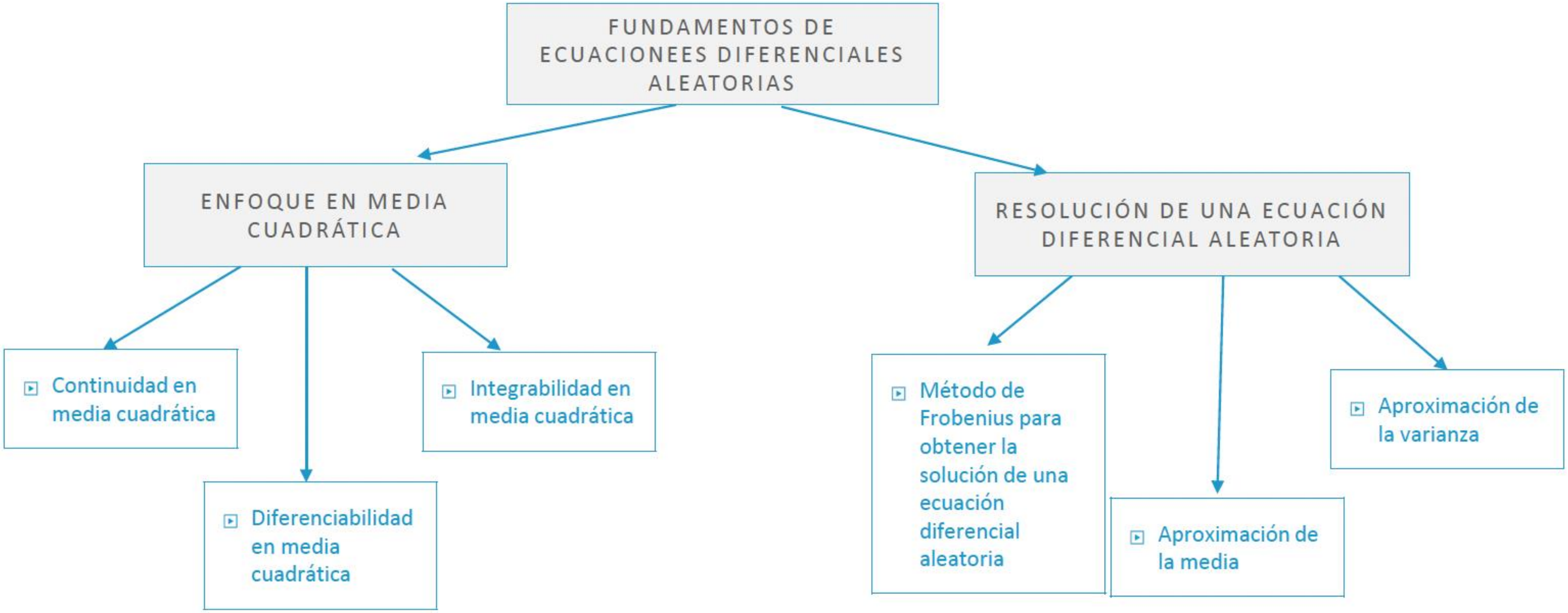
→ Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 5. Fundamentos de EDAs

Índice

Contenidos

Tema 5
Contenidos - Esquema



Convergencia en media cuadrática (MC)

Variables Aleatorias

Definición 1: p-norma de una VA

Sea A una VA definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$y $p > 0$, definimos la norma p ó p-norma de A como

$$\|A\|_p = (\mathbb{E}[A^p])^{\frac{1}{p}} .$$

Definición 2: Convergencia en MC

Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de VAs. Decimos que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge en MC (mc) a la VA X, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} X$, si

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = \mathbb{E}[|X_n - X|^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Convergencia en media cuadrática (MC)
Variables Aleatorias

Proposición 1

Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Y_m\}_{m=0}^{\infty}$ dos sucesiones de 2-VAs tales que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{MC}} X$ e $Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{MC}} Y$, entonces

$$\mathbb{E}[X_n Y_m] \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \mathbb{E}[XY].$$

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X],$$

$$\mathbb{V}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{V}[X],$$

$$\Gamma_{X_n,X_n}(t,s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma_{X,X}(t,s)$$

$$\mathbb{C}ov[X_n, Y_m] \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \mathbb{C}ov[X,Y].$$

Continuidad de un PE de 2º orden

Definición 3: Continuidad de un proceso estocástico de segundo orden

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE. Decimos que es un PE continuo en $t \in \mathcal{T}$ si

$$\lim_{\tau\to 0} \|X(t+\tau) - X(t)\|_2 = 0.$$

Proposición 2

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE. Entonces $X(t)$ es continuo en MC para $t \in \mathcal{T}$ si y solamente si su función de correlación, $\Gamma_X(t_1, t_2)$, es continua en el punto (t, t).

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden

Definición 4: Diferenciabilidad de un proceso estocástico de segundo orden

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE. Decimos que es un PE diferenciable en MC para $t \in \mathcal{T}$, con derivada $\dot{X}(t)$, si

$$\frac{X(t+\tau)-X(t)}{\tau} \xrightarrow[MC]{\tau\to 0} \dot{X}(t) \leftrightarrow \lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{X(t+\tau)-X(t)}{\tau}-\dot{X}(t)\right\|_2 = 0. \quad \text{(1)}$$

Proposición 3

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$. Entonces, $X(t)$ es diferenciable en $t \in \mathcal{T}$, si y solamente si, el siguiente límite determinista existe y es finito en (t,t)

$$\lim_{\tau,\tau'\to 0} \frac{\Gamma_X(t+\tau,s+\tau')-\Gamma_X(t+\tau,s)-\Gamma_X(t,s+\tau')+\Gamma_X(t,s)}{\tau\tau'}.$$

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden

Definición 4: Diferenciabilidad de un proceso estocástico de segundo orden

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE. Decimos que es un PE diferenciable en MC para $t \in \mathcal{T}$, con derivada $\dot{X}(t)$, si

$$\frac{X(t+\tau)-X(t)}{\tau} \xrightarrow[MC]{\tau\to 0} \dot{X}(t) \leftrightarrow \lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{X(t+\tau)-X(t)}{\tau} - \dot{X}(t)\right\|_2 = 0. \qquad (1)$$

Proposición 3

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$. Entonces, $X(t)$ es diferenciable en $t \in \mathcal{T}$, si y solamente si, el siguiente límite determinista existe y es finito en (t,t)

$$\lim_{\tau,\tau'\to 0} \frac{\Gamma_X(t+\tau, s+\tau') - \Gamma_X(t+\tau, s) - \Gamma_X(t, s+\tau') + \Gamma_X(t,s)}{\tau\tau'}.$$

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden
Propiedades

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ e $\{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ dos 2-PEs diferenciables en MC

- $\dot{X}(t)$ es único.
- $X(t)$ es continuo para todo $t \in \mathcal{T}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, el 2-PE $aX(t) + bY(t)$ es diferenciable en MC y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(aX(t) + bY(t)\right) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X(t)\right) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t)\right).$$

- El 2-PE, $f(t)X(t)$, es diferenciable en MC y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t)X(t)\right) = f'(t)X(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X(t)\right).$$

f(t) función determinista

- Si $X(t)$ e $Y(t)$ son independientes, entonces $X(t)Y(t)$ es diferenciable en MC

  y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X(t)Y(t)\right) = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t).$$

Regla de la cadena

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden
Propiedades

Proposición 5

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ e $\{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ dos 4-PEs diferenciables en MC. Entonces $X(t)Y(t)$ es diferenciable en MC y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X(t)Y(t)\right) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}Y(t) + X(t)\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Regla de la cadena

Momentos de las derivadas de un PE

Proposición 6

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE que es $n \in \mathbb{N}$ veces diferenciable en $\mathcal{T}$. Entonces $\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(X(t)\right)\right] = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\mathbb{E}\left[X(t)\right]\right)$.

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden
Propiedades

Proposición 7

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$. Consideramos que existe su derivada de segundo orden en $(t,t)\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}$. Entonces, las derivadas

$$\frac{\partial\Gamma_X(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial\Gamma_X(t,s)}{\partial s} \text{ y } \frac{\partial^2\Gamma_X(t,s)}{\partial t\partial s}$$

existen y son finitas, y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)\dot{X}(s)] &= \frac{\partial\Gamma_X(t,s)}{\partial s} \equiv \Gamma_{X,\dot{X}}(t,s)\\
\mathbb{E}[\dot{X}(t)X(s)] &= \frac{\partial\Gamma_X(t,s)}{\partial t} \equiv \Gamma_{\dot{X},X}(t,s)\\
\mathbb{E}[\dot{X}(t)\dot{X}(s)] &= \frac{\partial^2\Gamma_X(t,s)}{\partial t\partial s} \equiv \Gamma_{\dot{X},\dot{X}}(t,s)
\end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Diferenciabilidad de un PE de 2º orden
Propiedades

Proposición 8

Sea $\{X(t)\}_{t\in T}$ un 2-PE que es k veces diferenciable, $k \in \mathbb{N}$. Sea $\Gamma_X(t,s)$ su función de correlación. Entonces, la función de correlación entre la n-ésima y de la m-ésima derivada en MC del PE viene dada por

$$\mathbb{E}[X^{(n)}(t)X^{(m)}(s)] = \Gamma_{X^{(n)},X^{(m)}}(t,s) = \frac{\partial^{n+m}\Gamma_X(t,s)}{\partial t^n \partial s^m}, \quad k \geq n+m.$$

Proposición 9

Sea $\{X(t)\}_{t\in T}$ un 2-PE gaussiano diferenciable en MC. Entonces la derivada en MC del proceso $\dot{X}(t)$ es también gaussiano. Como consecuencia si $X(t)$ es k veces diferenciable entonces, $X^{(k)}(t)$ también es un PE gaussiano.

Integrabilidad de un PE

Definición 5

Sea $u \in \mathcal{U}$, si existe $p_n \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que el límite

$$Y_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} Y(u), \tag{5}$$

entonces se dice que $f(t,u)X(t)$ es Riemann integrable en MC en $[a,b]$. Se denota mediante

$$Y(u) = \int_a^b f(t,u)X(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} Y_n(u) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t'_j,u)X(t'_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{6}$$

Integrabilidad de un PE

Proposición 10

Sea $\{X(t)\}_{t\in T}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$. Sea $f(t,u)$ una función determinista integrable Riemann para cada $u \in \mathcal{U}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe $Y(u) = \int_a^b f(t,u)X(t)\mathrm{d}t, \quad u \in \mathcal{U}$ en el sentido de MC.
- La siguiente doble integral existe y es finita

$$\int_a^b \int_a^b f(t,u)f(s,u)\Gamma_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

Integrabilidad de un PE

Ejemplo 2. Integrabilidad de un 2-PE

Veamos que el PE de Wiener es integrable Riemann en MC en un intervalo acotado $[0, T]$. Para ello utilizaremos la caracterización dada por la Proposición 10 estudiando la integrabilidad de su función de correlación asociada.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^T \Gamma_X(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_0^T \min(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left(\int_0^T \min(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_0^T \left(\int_0^t s\mathrm{d}s + \int_t^T t\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3}T^3 < \infty
\end{aligned} \tag{7}$$

Integrabilidad de un PE
Propiedades

- Si $X(t)$ es continuo en MC, entonces $X(t)$ es integrable Riemann y

$$\left\| \int_a^b X(t)\mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_a^b \|X(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \leq M(b-a), \quad M = \max_{a \leq t \leq b} \|X(t)\|_2 \,.$$

- El operador integral Riemann es lineal, es decir, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_a^b (\alpha X(t) + \beta Y(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b X(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b Y(t)\mathrm{d}t.$$

- Dado $c \in [a, b]$, se tiene que

$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}t = \int_a^c X(t)\mathrm{d}t + \int_c^b X(t)\mathrm{d}t.$$

- Si $X(t)$ es continuo en MC, entonces

$$Y(t) = \int_a^t X(s)\mathrm{d}s$$

es continuo en $[a, b]$, $Y(t)$ es diferenciable en MC en $[a, b]$ y $Y'(t) = X(t)$.

Proposición 12

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$. Asumimos que la siguiente integral de Riemann existe,

$$Y(u) = \int_a^b f(t,u)X(t)\mathrm{d}t, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y(u)] &= \int_a^b f(t,u)\mathbb{E}[X(t)]\mathrm{d}t \\
\Gamma_Y(u,v) &= \int_a^b \int_a^b f(t,u)f(s,v)\Gamma_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{8}$$

Integrabilidad de un PE
Propiedades

Proposición 13

Sea $\{X(t)\}_{t \in T}$ un 2-PE gaussiano. Entonces

$$Y(u) = \int_a^b f(t,u)X)t\mathrm{d}t \tag{9}$$

es también un PE gaussiano.

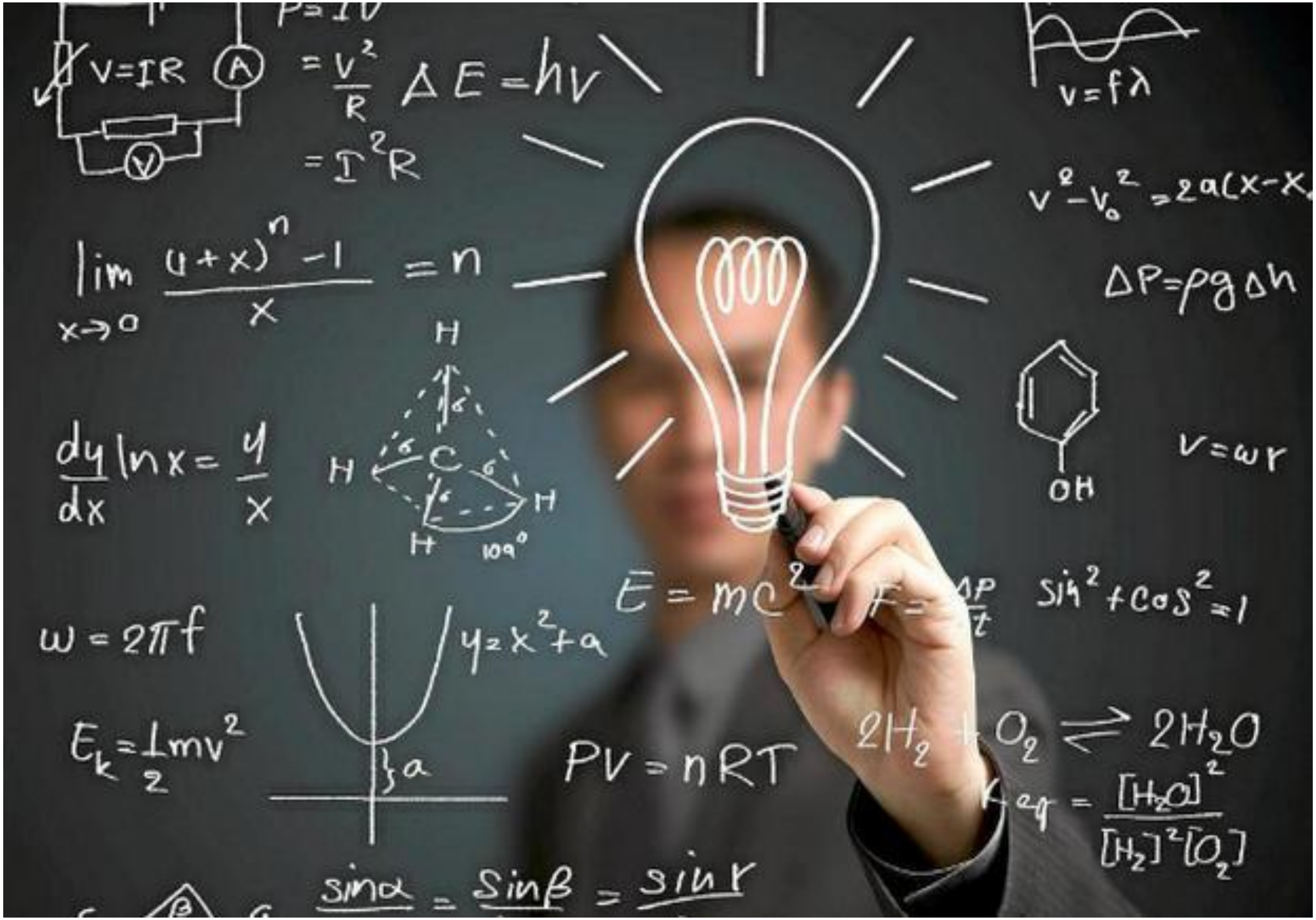
Bibliografía

Devroye, L. (2006). Nonuniform random variate generation. *Handbooks in operations research and management science*, 13:83–121.

Kroese, D. P., Taimre, T., and Botev, Z. I. (2013). *Handbook of monte carlo methods*, volume 706. John Wiley & Sons.

Ross, S. M. (1990). *A course in simulation*. Number 04; QA273, R6.

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net