Métodos Numéricos Aplicados I

Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación

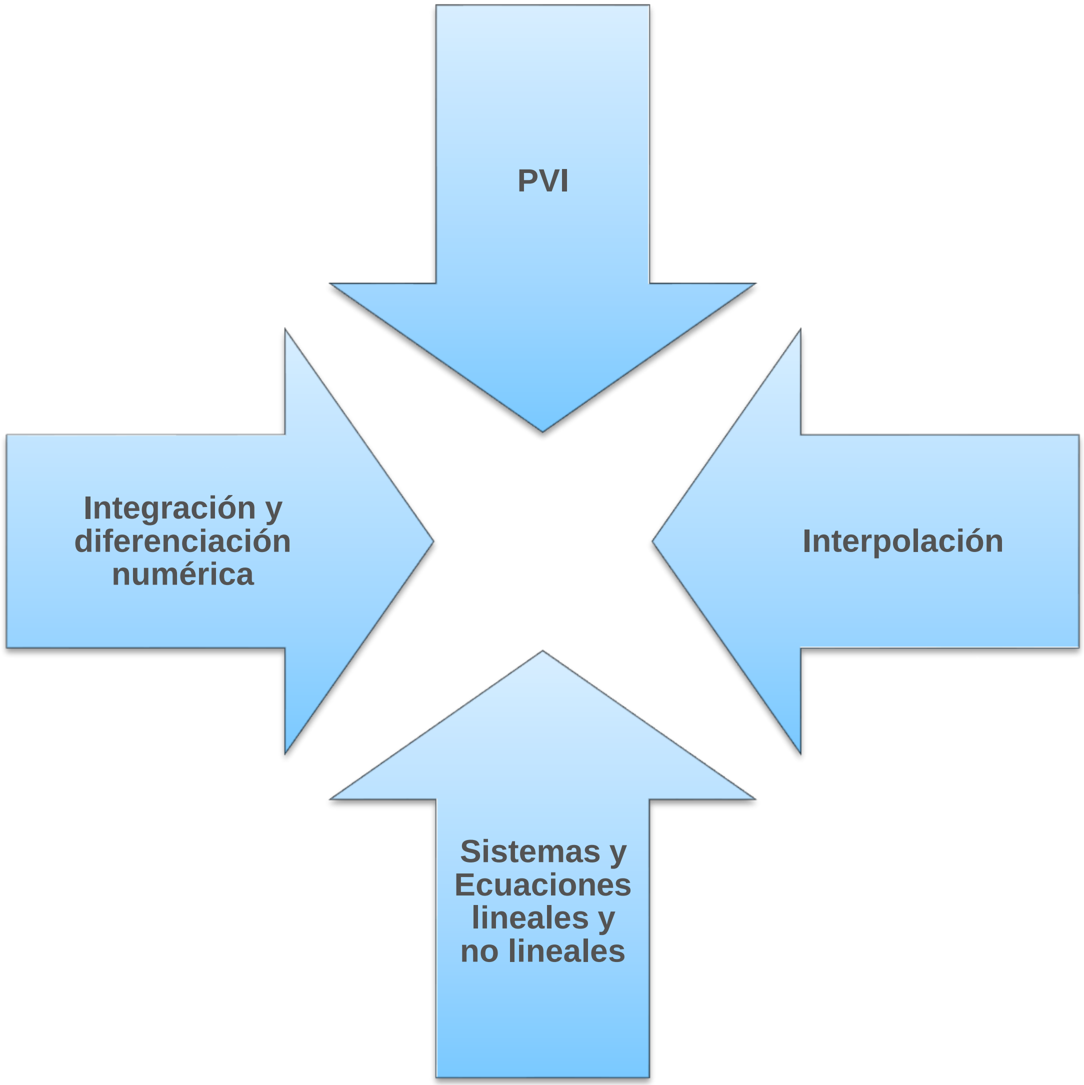
⇢ Dra. Paula Triguero Navarro

Sesión examen

Instrucciones del examen

2 horas	Bolígrafo negro/azul
DNI/PAS	Se permite ordenador, memorias, etc
No internet ni comunicación	6 cifras decimales

¿Qué llevar preparado?



¿Qué llevar preparado?

Interpolación (Tema 3)

Tipos de ejercicios:

- Interpolación de Newton
- Interpolación de Lagrange
- Interpolación de Hermite
- Splines cúbicos naturales
- Algoritmo de Crout

¿Qué llevar preparado?

Diferenciación e integración numérica

Tipos de ejercicios:

- Estimación de funciones derivadas
- Extrapolación de Richardson
- Cuadratura numérica:
  - Integración simple
  - Integración múltiple

Métodos:

- Diferencias finitas progresivas, regresivas y centrales
- Fórmulas cerradas de Newton-Cotes: trapecios, Simpson, Simpson 3/8, Milne,…
- Fórmulas abiertas de Newton-Cotes: punto medio,…
- Fórmulas de cuadratura: G-Legendre, G-Chebyshev, G-Laguerre, G-Hermite

¿Qué llevar preparado?

Problemas de valor inicial

Tipos de ejercicios:

- Ecuación diferencial de primer grado
- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado
- Ecuación diferencial de grado superior

Métodos:

- Euler
- Heun
- Runge-Kutta
- Adams-Bashforth (orden 2 y 4)
- Adams-Moulton (orden 2 y 4)
- Adams-Bashforth-Moulton

¿Qué llevar preparado?

Ecuaciones y sistemas lineales y no lineales

Tipos de ejercicios:

- Sistema de ecuaciones lineales
- Ecuación no lineal
- Sistema de ecuaciones no lineales

Métodos:

- SEL: Jacobi, GS, SOR
- ENL: Newton, Steffensen, Halley, Chebyshev, Super-Halley, Trapecios, Punto Medio, Simpson, GL, Traub, ...
- SENL: Newton, Trapecios, composiciones, GR, NA,

Examen tipo

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Examen tipo

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función PVI.m que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en la hoja de respuestas del examen.

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función PVI.m que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en la hoja de respuestas del examen.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2\sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{array}$$

PVI.m

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

```
>> a=0; b=2*pi; h=pi/8;
>> n=(b-a)/h;
>> y0=[0 1]';
>> [x,y] = RK4('PVI',a,b,n,y0)
>> plot(x,y(:,1))
>> table(x(1:4:17), y(1:4:17,1))
```

Problema 1

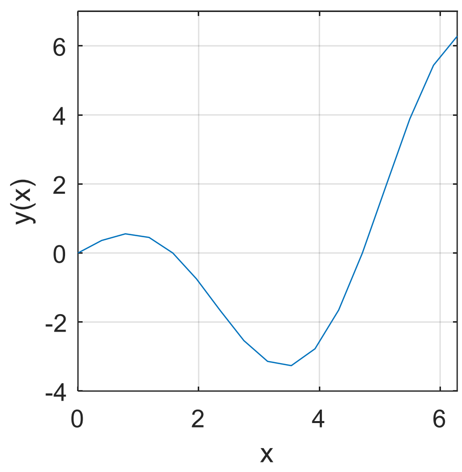
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.



x	$y(x)$
0	0
$\pi/2$	$-0{,}000236$
π	$-3{,}139908$
$3\pi/2$	$-0{,}001066$
2π	$6{,}279187$

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

```
>> a=0; b=2*pi; h=pi/8;
>> n=(b-a)/h;
>> y0=[0 1]’;
>> [x,y] = AB4(‘PVI’,a,b,n,y0)
>> plot(x,y(:,1))
>> table(x(1:4:17), y(1:4:17,1))
```

Problema 1

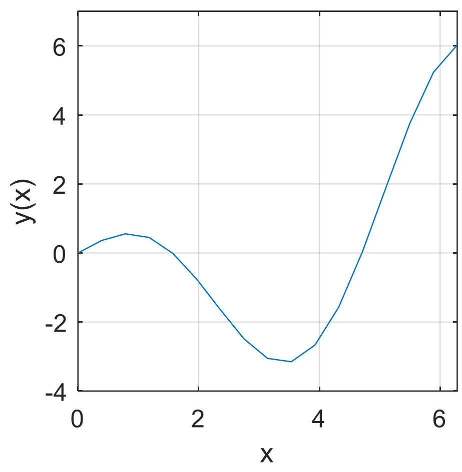
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.



x	$y(x)$
0	0
$\pi/2$	$-0{,}009901$
π	$-3{,}053501$
$3\pi/2$	$0{,}033012$
2π	$6{,}024980$

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

```
>> [x,yR1] = RK4('PVI',a,b,n,y0);
>> [x,yR2] = RK4('PVI',a,b,2*n,y0);
>> yR2=yR2(1:2:end);
>> [x,yR3] = RK4('PVI',a,b,4*n,y0);
>> yR3=yR3(1:4:end);
>> [x,yR4] = RK4('PVI',a,b,8*n,y0);
>> yR4=yR4(1:8:end);
>> [x,yR5] = RK4('PVI',a,b,16*n,y0);
>> yR5=yR5(1:16:end);
>> [x,yR6] = RK4('PVI',a,b,32*n,y0)
>> yR6=yR6(1:32:end);
```

```
>> eR1=norm(yR2-yR1);
>> eR2=norm(yR3-yR2);
>> eR3=norm(yR4-yR3);
>> eR4=norm(yR5-yR4);
>> eR5=norm(yR6-yR5);
>> eRi=[eR1 eR2 eR3 eR4 eR5 eR6];
>> eR=log2(eRi(1:end-1)./...
eRi(2:end));
```

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

eR=[3,544460 3,523554 3,512077 3,506113]

No alcanza el orden 4

eAB=[3,217690 3,393531 3,453519 3,478143]

No alcanza el orden 4

Examen tipo

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 2

El sistema no lineal definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + \cos(yz) = 1/2 \\ x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \sin(z) = -1{,}06 \\ e^{-xy} + 20z = \dfrac{3 - 10\pi}{3} \end{cases}$$

tiene una solución que queremos obtener. Para ello, vamos a utilizar dos métodos de resolución de ecuaciones no lineales: Newton y Jarratt.

El método de Jarratt tiene la expresión

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3}\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\left[3F'\left(y^{(k)}\right) - F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}\left[3F'\left(y^{(k)}\right) + F'\left(x^{(k)}\right)\right]\left[F\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Para ambos métodos utilizaremos como criterio de parada

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| + \left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\| < 10^{-12}.$$

Para resolver el sistema no lineal, sigue los siguientes pasos. Recuerda dar todos los resultados con 6 decimales.

Problema 2

a) Obtén la solución a partir del método de Newton, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC
b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.
c) Obtén la solución a partir del método de Jarratt, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.
d) Establece una comparativa entre los métodos de Jarratt y Newton a partir de los resultados obtenidos.

Problema 2

$$\begin{cases} 3x + \cos(yz) = 1/2 \\ x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \sin(z) = -1{,}06 \\ e^{-xy} + 20z = \dfrac{3 - 10\pi}{3} \end{cases}$$

`SENL.m`

Problema 2

a) Obtén la solución a partir del método de Newton, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.

```
>> sol0=[.1 .1 -.1]';
>> [solN1,iterN1,~,~,ACOCN1] = Newton('SENL',vpa(sol0),1e-12,40)


solN1 =
 -0.166656
 -0.014807
 -0.523475
iterN1 =
     6
ACOCN1 =
[ 0.647499, 1.975826, 1.999733, 2.000000]
```

Problema 2

b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.

```matlab
function [sol,iter,i1,i2,ACOC] = Newton(fun,x0,tol,maxiter)
iter=0; incr1=tol+1;
[fx0,dfx0]=feval(fun,x0);
incr2=norm(fx0);
I=[]; x0=x0(:);
while iter<maxiter && (incr1+incr2)>tol
    x=x0-dfx0\fx0;
    [fx,dfx]=feval(fun,x);
    incr1=norm(x-x0);
    I=[I,incr1];
    incr2=norm(fx);
    iter=iter+1;
    x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
    end
sol=x;
i1=vpa(incr1,4);
i2=vpa(incr2,4);
ACOC=vpa(log(I(3:end)./I(2:end-1))./log(I(2:end-1)./I(1:end-2)));
end
```


```matlab
x=x0-dfx0\fx0;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0);
I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);
iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

Problema 2

b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.

$$y^k = x^k - \frac{2}{3}\underbrace{\left[F'\left(x^k\right)\right]^{-1}F\left(x^k\right)}_{v},$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{2}\underbrace{\left[3F'\left(y^k\right) - F'\left(x^k\right)\right]^{-1}\left[3F'\left(y^k\right) + F'\left(x^k\right)\right]}_{z}\underbrace{\left[F\left(x^k\right)\right]^{-1}F\left(x^k\right)}_{v}.$$

```
x=x0-dfx0\fx0;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0);
I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);
iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

```
v=dfx0\fx0;
y=x0-2/3*v;
[fy,dfy]=feval(fun,y);
z=(3*dfy-dfx)\(3*dfy+dfx);
x=x0-1/2*z*v;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0); I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

Problema 2

c) Obtén la solución a partir del método de Jarratt, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.

```
>> sol0=[.1 .1 -.1]';
>> [solJ1,iterJ1,~,~,ACOCJ1] = Jarratt('SENL',vpa(sol0),1e-12,40)


solJ1 =
 -0.166656
 -0.014807
 -0.523475
iterJ1 =
     4
ACOCJ1 =
[ 2.340865, 3.991914]
```

Problema 2

d) Establece una comparativa entre los métodos de Jarratt y Newton a partir de los resultados obtenidos.

Parámetro	Newton		Jarratt
Solución	x=-0.166656 y=-0.014807 z=-0.523475	=	x=-0.166656 y=-0.014807 z=-0.523475
Número de iteraciones	6	⇒	4
ACOC	2.000000	⇒	3.991914

Examen tipo

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 3

Como resultado de la administración de un nuevo fármaco, se mide la evolución de la temperatura corporal de un paciente en función del tiempo transcurrido desde su toma, obteniendo los resultados:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (º)	36,8	37,2	38,3	37,9	37,7	37,1

a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de mayor grado posible para estimar la temperatura del paciente en cualquier instante de tiempo inferior a las 5 horas.

b) Representa el polinomio de Lagrange obtenido así como los puntos utilizados para la interpolación. Sitúa en la gráfica el tiempo en el eje de abscisas y la temperatura en el eje de ordenadas.

c) Utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange para determinar la temperatura corporal aproximada transcurridas 2 horas y 45 minutos desde la administración del fármaco.

Problema 3

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (º)	36,8	37,2	38,3	37,9	37,7	37,1

a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de mayor grado posible para estimar la temperatura del paciente en cualquier instante de tiempo inferior a las 5 horas.

Polinomio de grado 5:

$$p_5(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_4(x)f(x_4) + L_5(x)f(x_5)$$

donde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{5} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0,1,\ldots,5$$

`PolinomioLagrange.m`

Problema 3

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (º)	36,8	37,2	38,3	37,9	37,7	37,1

a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de mayor grado posible para estimar la temperatura del paciente en cualquier instante de tiempo inferior a las 5 horas.

```
>> xi=[0; 1; 2; 3; 4; 5];
>> fi=[36.8; 37.2; 38.3; 37.9; 37.7; 37.1];
>> p=polinomioLagrange(xi,fi);
>> pretty(p)
```

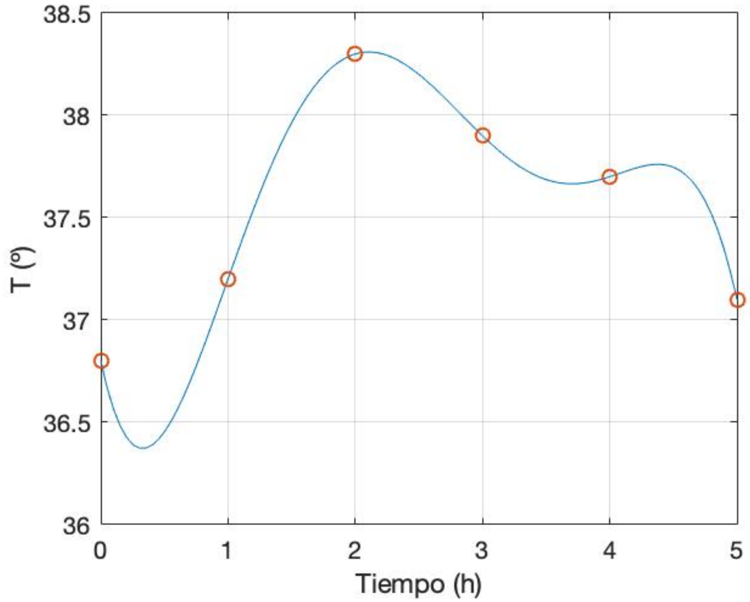
```
371 x (x - 1) (x - 2) (x - 3) (x - 4)   377 x (x - 1) (x - 2) (x - 3) (x - 5)
------------------------------------- - -------------------------------------
                1200                                     240

     379 x (x - 1) (x - 2) (x - 4) (x - 5)   383 x (x - 1) (x - 3) (x - 4) (x - 5)
   + ------------------------------------- - -------------------------------------
                      120                                     120

     31 x (x - 2) (x - 3) (x - 4) (x - 5)   23 (x - 1) (x - 2) (x - 3) (x - 4) (x - 5)
   + ------------------------------------ - ------------------------------------------
                      20                                         75
```

Problema 3

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (º)	36,8	37,2	38,3	37,9	37,7	37,1

b) Representa el polinomio de Lagrange obtenido así como los puntos utilizados para la interpolación. Sitúa en la gráfica el tiempo en el eje de abscisas y la temperatura en el eje de ordenadas.

```
>> p=polinomioLagrange(xi,fi);
>> syms x
>> t=linspace(0,5);
>> f=double(subs(p,x,t));
>> plot(t,f)
>> hold on, grid on
>> plot(xi,fi,‘o’)
```



Problema 3

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (º)	36,8	37,2	38,3	37,9	37,7	37,1

c) Utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange para determinar la temperatura corporal aproximada transcurridas 2 horas y 45 minutos desde la administración del fármaco.

2h 45’ → 2.75 h

```
>> p=polinomioLagrange(xi,fi);
>> syms x
>> T=double(subs(p,x,2.75));
T =

  38.05603027343750
```

Examen tipo

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 4

Consideremos la siguiente integral indefinida:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\wedge}2} \cos(x)\, dx$$

Determina una aproximación al valor de la integral utilizando la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre. Para ello, responde razonadamente a los siguientes apartados:

a) Indica y desarrolla el cambio de variable necesario para aplicar el método de Gauss-Laguerre.

b) Implementa una función GaussLaguerre.m en la que programes dicho método. Copia el código de la función en la hoja del examen.

c) Aproxima numéricamente el valor de la integral con la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre para n = 8. Escribe las líneas que has ejecutado en Matlab para obtener esta aproximación.

d) Calcula el error exacto cometido con dicha aproximación con respecto a la solución exacta obtenida en Matlab. Copia las líneas de código que has necesitado ejecutar en Matlab para obtener el resultado.

Problema 4

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\wedge}2} \cos(x)\, dx$$

a) Indica y desarrolla el cambio de variable necesario para aplicar el método de Gauss-Laguerre.

Forma Gauss-Laguerre: $\int_0^{\infty} e^{-x}\, \mathrm{f}(x)\, dx$

Cambio de variable $y = x^2$, entonces $dy = 2x\, dx$

Entonces $\int_0^{\infty} e^{-x^{\wedge}2} \cos(x)\, dx$= $\int_0^{\infty} e^{-y} \cos\left(\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$

`GaussLaguerre.m`

Problema 4

b) Implementa una función GaussLaguerre.m en la que programes dicho método. Copia el código de la función en la hoja del examen.

`GaussLaguerre.m`

Lo podemos encontrar en el foro.
Si tenemos preparados los códigos para las distintas cuadraturas de Gauss y para trapecios, Simpson, etc.., simplemente tendremos que buscar el código y aplicarlo.

Problema 4

c) Aproxima numéricamente el valor de la integral con la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre para n = 8. Escribe las líneas que has ejecutado en Matlab para obtener esta aproximación.

```
[ci, xi] = Coeficientes_Nodos_Gauss_Laguerre(8);

syms y
f=@(y)(cos(sqrt(y))./(2.*sqrt(y)));

I=sum(f(xi).*ci)

I=0.5376
```

Problema 4

d) Calcula el error exacto cometido con dicha aproximación con respecto a la solución exacta obtenida en Matlab. Copia las líneas de código que has necesitado ejecutar en Matlab para obtener el resultado

```
syms x

g=@(x)(exp(-x.^2).*cos(x));
I_exact=integral(g , 0, Inf)

I_exact=0.6902

Abs(I-I_exact)= 0.1526
```

Si aumentamos hasta n=80, la aproximación es 0.6416

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net