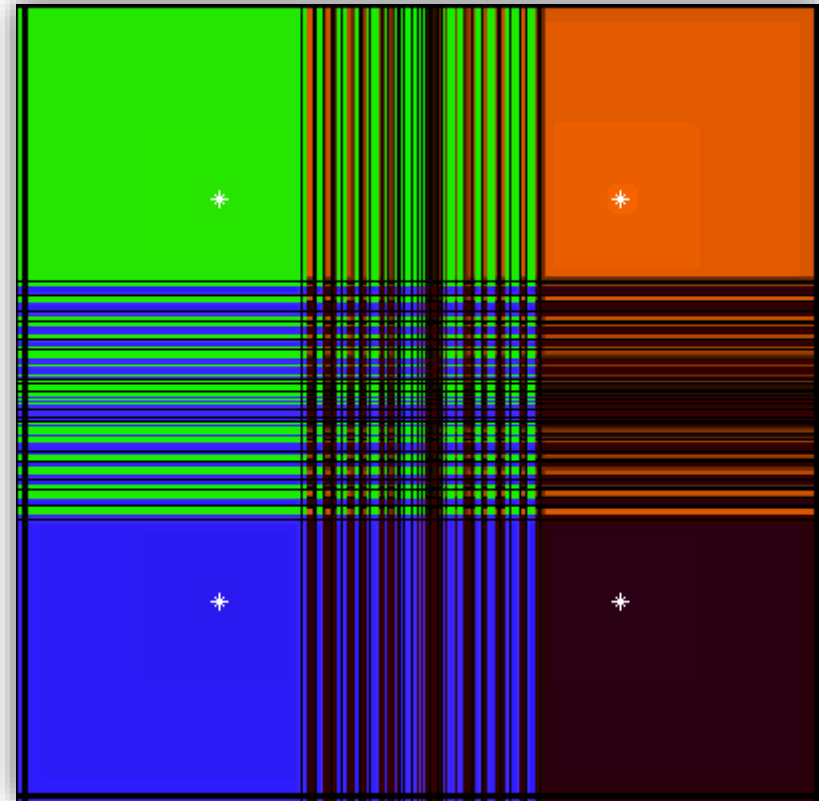


Métodos Numéricos Aplicados 1

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Dra. Paula Triguero Navarro



Tema 9: Ecuaciones no lineales

Ecuaciones no lineales

- ▶ ¿Qué problema queremos resolver?
- ▶ Métodos clásicos: Newton y Steffensen
- ▶ Conceptos previos y resultados
- ▶ ¿Cómo probamos el orden de convergencia?
- ▶ Métodos de un punto o punto a punto
- ▶ Limitaciones de los métodos de un punto
- ▶ Métodos multipunto
- ▶ Implementación computacional
- ▶ Resultados numéricos

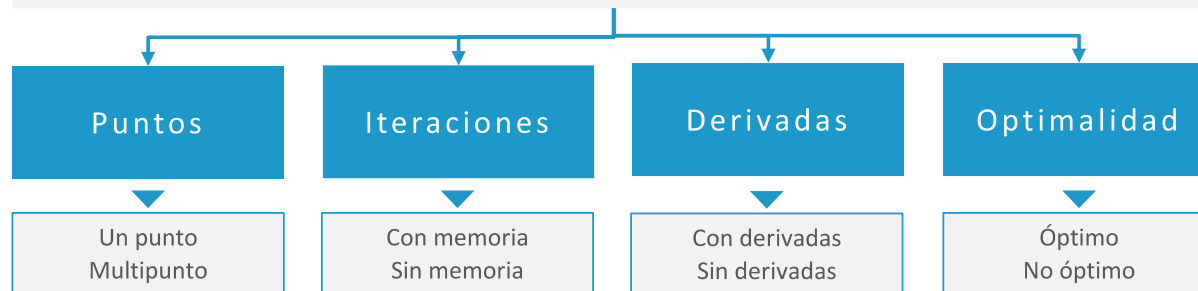
ECUACIONES NO LINEALES

$$f(x) = 0, \quad f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

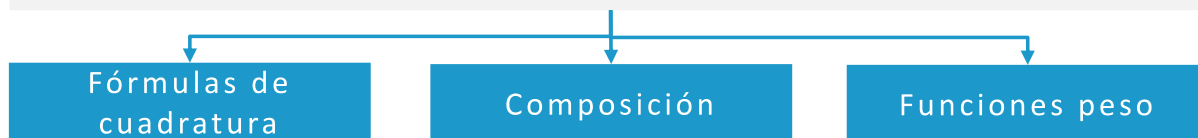
MÉTODOS ITERATIVOS

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

CLASIFICACIÓN



DISEÑO DE MÉTODOS ITERATIVOS



IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA



$$f(x) = 0$$

Métodos iterativos // Raíces simples

Métodos sin memoria

Punto a punto
 $x_{k+1} = \phi(x_k)$

Con
derivadas

Libres de
derivadas

Multipunto

$$\begin{cases} y_k = \psi(x_k) \\ x_{k+1} = \phi(x_k, y_k) \end{cases}$$

Optimo

No óptimo

Métodos con memoria

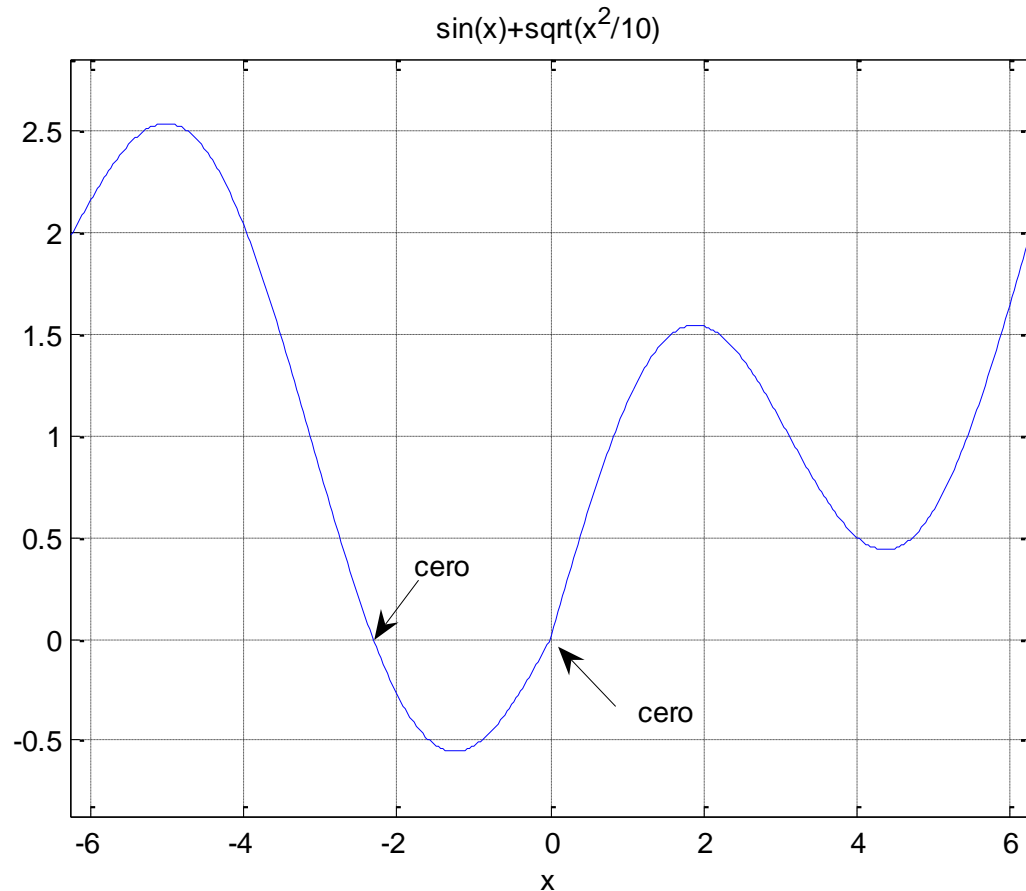
Punto a punto
 $x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i})$
 $i \leq k$

Con
derivadas

Libres de
derivadas

Objetivo

Encontrar una raíz simple α de la función f , es decir, una solución de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Estimación visual: x_0 ←

PASO 0

Objetivo

Encontrar una raíz simple α de la función f , es decir, una solución de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- α es una raíz simple de la función f si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$
- α es una raíz de la función f con multiplicidad m si

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

- ✓ Escasez de métodos analíticos para encontrar la solución.
- ✓ Aproximación de la solución mediante **métodos iterativos**.
- ✓ Métodos iterativos de **punto fijo**

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

- ✓ Generación de una sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ que, bajo ciertas condiciones de f y de la aproximación inicial x_0 , converge a la solución α

El esquema iterativo mas conocido es el **método de Newton**, cuya expresión iterativa es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

¿Cómo se diseña?

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$


$$x = \alpha$$

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0)$$

$$\alpha \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \longrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Se trata de un **método de punto fijo**

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad \text{donde} \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

Paso a paso

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

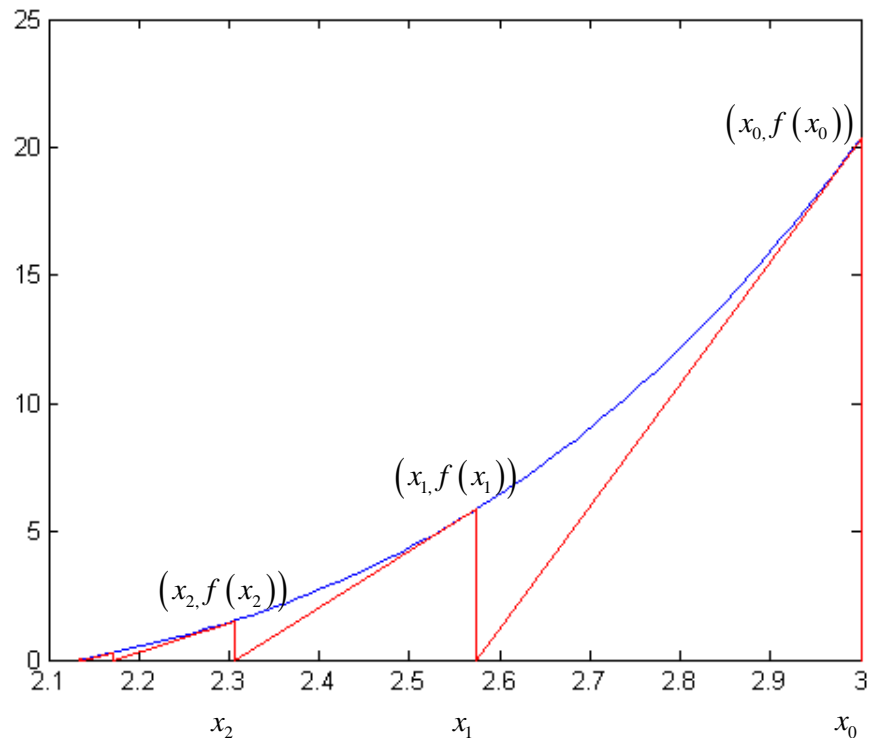
Método de
Newton

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Condiciones para la convergencia:

- f suficientemente continua y derivable
- x_0 próximo al cero buscado
- $f'(\alpha) \neq 0$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Newton

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Steffensen

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, x_{k-1}]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Secante

Conceptos básicos

- ✓ **Orden de convergencia.** La sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$, generada por un método iterativo, tiene orden de convergencia local p , si encontramos constantes C y p tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = C$$

- $p=1$ y $0 < C < 1$: convergencia lineal
- $p > 1$ y $C > 0$: convergencia de orden p (cuadrática, cúbica,...)

- ✓ **Índice de eficiencia**

$$I = p^{1/d}$$

- ✓ **Índice de eficiencia computacional**

$$IC = p^{1/(d+op)}$$

d número de evaluaciones funcionales por iteración

op número de (productos/cocientes) por iteración

Conceptos básicos

✓ Método de un punto ó Método multipunto

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \begin{cases} y_k = \psi(x_k) \\ x_{k+1} = \phi(x_k, y_k) \end{cases} \quad \text{Predictor-corrector}$$

✓ Método con derivadas ó Método libre de derivadas



✓ Método sin memoria ó Método con memoria

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots)$$

✓ Orden de convergencia computacional aproximado

$$p \approx ACOC = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k| / |x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}| / |x_{k-1} - x_{k-2}|)}$$

✓ Conjetura de Kung y Traub

El orden de convergencia de un método iterativo sin memoria, con d evaluaciones funcionales por iteración, no puede superar la cota de 2^{d-1} . Cuando esta cota es alcanzada, al método se le llama óptimo



Método óptimo

- ¿Existe una cota de este tipo para métodos iterativos con memoria?
- ¿Cómo podemos definir una cota similar para métodos iterativos para sistemas?
- ¿Los métodos libres de derivadas son mejores que los métodos con derivadas? ¿En qué contexto?

¿Cómo se demuestra la convergencia de un método?

✓ Teorema

Sea g una función de punto fijo tal que $g^{(p)}$ es continua en un entorno de la solución α . El método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ es de orden p si y solo si

$$g(\alpha) = \alpha, g^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p-1, \quad y \quad g^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

✓ Desarrollo de Taylor y manipulaciones algebraicas

Denotando $e_k = x_k - \alpha$, el método iterativo tiene orden p si y solo si se cumple la relación

$$e_{k+1} = C e_k^p + O(e_k^{p+1})$$

Ecuación del error

✓ Teorema

Sea α un cero simple de una función suficientemente diferenciable $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un conjunto convexo D . Si la estimación inicial x_0 es suficientemente próxima a α , *el método de Newton alcanza orden de convergencia cuadrático, siendo su ecuación del error*

$$e_{k+1} = c_2 e_k^2 + O(e_k^3),$$

donde $c_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \dots$ y $e_k = x_k - \alpha$.

Prueba: Desarrollando en serie de Taylor en torno a α , tenemos

$$f(x_k) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_k - \alpha)^2 + O((x_k - \alpha)^3) = f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2] + O(e_k^3)$$

$$f'(x_k) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_k - \alpha) + O((x_k - \alpha)^2) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_k] + O(e_k^2)$$

Así,

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - c_2 e_k^2 + O(e_k^3)$$

Y la ecuación del error es:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = c_2 e_k^2 + O(e_k^3).$$

Métodos de un punto

Método de Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[1 + \frac{L_f(x_k)}{2 - L_f(x_k)} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$



Grado de convexidad logarítmica

- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+6)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Método de Chebyshev

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[1 + \frac{L_f(x_k)}{2} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+5)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Método Super-Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{L_f(x_k) - 2}{2(L_f(x_k) - 1)} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$


- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+6)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Familia de métodos Chebyshev-Halley

$$x_{k+1} = x_k - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(x_k)}{1 - \beta L_f(x_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

- Métodos de orden 3 para cualquier β
- 
- $\beta = 0$: Método de Chebyshev
 - $\beta = 1/2$: Método de Halley
 - $\beta = 1$: Método Super-Halley
 - $\beta \rightarrow \infty$: Método de Newton

Limitaciones de los métodos de un punto

✓ Teorema

Sea $x_{k+1} = g(x_k)$ un método iterativo de un punto, que utiliza p evaluaciones funcionales por iteración. Entonces, su orden de convergencia es como máximo p .

✓ Teorema

Para diseñar un método iterativo de un punto de orden p , su expresión iterativa debe contener derivadas al menos hasta orden $p-1$

Los métodos de un punto no son una buena alternativa para incrementar el orden de convergencia y el índice de eficiencia.

¿Cómo podemos incrementar el orden de convergencia manteniendo la optimalidad del método?

Métodos multipunto

- ✓ Utilizando diferentes fórmulas de cuadratura para aproximar la integral

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

- Nodos equiespaciados,
- Cuadratura de Gauss, ...

- ✓ Teorema

Sean $g_1(x)$, $g_2(x)$ dos funciones de punto fijo para $f(x) = 0$.

Consideremos los esquemas iterativos $x_{k+1} = g_1(x_k)$ y $x_{k+1} = g_2(x_k)$ de órdenes p_1 y p_2 , respectivamente. Entonces, el orden de convergencia del método iterativo asociado a la función de punto fijo

$$g(x) = g_2(g_1(x))$$

es $p_1 p_2$.

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \approx f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{2} (f'(x) + f'(x_0))$$

Regla trapecios

$$x = \alpha$$

$$0 \approx f(x_0) + (f'(\alpha) + f'(x_0)) \frac{(\alpha - x_0)}{2}$$

$$\alpha \approx x_0 - \frac{2f(x_0)}{f'(\alpha) + f'(x_0)} \longrightarrow y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{predictor}$$

Orden 3
No óptimo

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(y_k) + f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de
trapecios

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \approx f(x_0) + (x - x_0) f' \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

Regla punto medio

Orden 3
No óptimo

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f' \left(\frac{x_k + y_k}{2} \right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de
punto medio

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \approx f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{6} \left(f'(x) + 4f'\left(\frac{x + x_0}{2}\right) + f'(x_0) \right)$$

Regla de Simpson

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{6f(x_k)}{f'(x_k) + 4f'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) + f'(y_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de Simpson

Orden 3
No óptimo

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

Los métodos iterativos diseñados utilizando fórmulas de cuadratura tienen las siguientes características:

- ✓ El orden de convergencia no depende del número de nodos utilizados en la fórmula de cuadratura.
- ✓ Cuando se utiliza el método de Newton como predictor, el orden de convergencia es siempre tres.
- ✓ Ninguno de estos métodos es óptimo.
- ✓ Muchos métodos pueden ser diseñados utilizando otros esquemas como predictores.

Métodos multipunto por composición

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Newton+Newton

Orden 4, No óptimo

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)} \\x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Orden 8, No óptimo

¡ Este procedimiento no es eficiente puesto que utiliza demasiadas evaluaciones funcionales por iteración !

Composición eficiente

✓ Derivada “congelada”

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)},$$

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de
Traub

ó

Potra-Pták

El índice de eficiencia del método de Traub es mayor que el del esquema Newton+Newton, pero todavía no es óptimo

Procedimiento de funciones peso

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - H(\mu_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$H(\mu)$ es una función peso real, donde $\mu = \frac{f(y)}{f(x)}$

Teorema

Sea $\alpha \in I$ un cero simple de una función suficientemente diferenciable $f(x)$, y x_0 una estimación inicial próxima a α . Si elegimos una función H tal que $H(0)=1$, $H'(0)=2$ y $|H''(0)| < \infty$, entonces (2) tiene orden de convergencia 4 y su ecuación del error es

$$e_{k+1} = \left[\left(5 - \frac{H''(0)}{2} \right) c_2^3 - c_2 c_3 \right] e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde $c_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \dots$; $e_k = x_k - \alpha$

Procedimiento de funciones peso

Caso especial: $H(\mu) = \frac{1 + \beta\mu}{1 + (\beta - 2)\mu}$



$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Familia de
King

Métodos óptimos de orden 4 para cualquier valor del parámetro

$\beta = 0$

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de
Ostrowski

Procedimiento de funciones peso

$$y_k = x_k - \gamma \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - H(\mu_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$\mu_k = \mu(x_k) = \frac{f'(y_k)}{f'(x_k)}$$

$$\mu_k = \mu(x_k) = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$$

Orden 4
Óptimo

$$y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{6f'(y_k) - 2f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Método de
Jarratt

Estas ideas pueden extenderse para diseñar métodos óptimos de orden 8, 16, 24, ...

Implementación computacional

En un algoritmo iterativo es necesario fijar un criterio de parada:

- Los dos últimos iterados están muy próximos:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

- Se ha alcanzado un valor muy próximo a la solución:

$$|f(x_{k+1})| < \varepsilon$$

- Máximo número de iteraciones.

$\varepsilon \Rightarrow$ tolerancia

Implementación en Matlab

Entrada: $f, x_0, \text{tol}, \text{maxiter}$

Proceso:

- Iniciar contador de iteraciones: $\text{iter}=1$
- Evaluar la función y sus derivadas en x_0
- $\text{CriterioParada}=0$
- Mientras $\text{CriterioParada}=0$
 - Cálculo de x_1 aplicando la expresión del método: $x_1 = \phi(x_0)$
 - Actualizar CriterioParada
 - Actualización de la estimación inicial: $x_0 = x_1$
 - Actualización de valores
 - $\text{iter}=\text{iter}+1$
- Cálculo de ACOC

Salida: solución, iteraciones (iter), ACOC

Resultados numéricos

- ❑ Métodos implementados en Matlab.
- ❑ Aritmética de precisión variable con 200 dígitos
- ❑ Criterio de parada

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-100} \quad \text{ó} \quad |f(x_k)| < 10^{-100}$$

- ❑ Orden de convergencia computacional (ACOC) ([CT])

$$\rho \approx \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k| / |x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}| / |x_{k-1} - x_{k-2}|)}$$

Funciones test

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) - x^2 + 1, \quad \alpha \approx 1.404492$

(b) $f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \quad \alpha \approx 0.257530$

(c) $f(x) = \cos(x) - x, \quad \alpha \approx 0.739085$

(d) $f(x) = (x-1)^3 - 1, \quad \alpha = 2$

Resultados numéricos

		Newton	Halley	Ostrowski	Traub	Punto Medio	Newton+Newton
(a) $x_0 = 1$	Iter	8	5	4	18	6	4
	ρ	2.0000	3.0000	3.9951	3.0001	3.0000	3.9915
	$ x_{k+1}-x_k $	4.2076e-051	1.0180e-038	5.6401e-028	1.0553e-61	2.7029e-097	7.3279e-026
	$ f(x_{k+1}) $	3.4438e-101	1.3785e-114	1.0359e-109	3.5827e-183	0	3.4438e-101
(b) $x_0=0.7$	Iter	6	5	4	4	4	3
	ρ	2.0000	3.0000	4.0000	3.0001	3.0000	3.8301
	$ x_{k+1}-x_k $	9.1363e-051	1.1648e-075	9.0394e-077	3.0475e-39	2.3767e-035	3.1267e-025
	$ f(x_{k+1}) $	2.9477e-101	7.7869e-208	0	1.8682e-117	2.8063e-106	2.9477e-101
(c) $x_0=1$	Iter	7	5	4	5	5	4
	ρ	2.0000	3.0000	4.0000	3.0000	3.0000	4.0000
	$ x_{k+1}-x_k $	1.7955e-083	4.4217e-087	3.5827e-074	7.6007e-95	5.8956e-099	1.7955e-083
	$ f(x_{k+1}) $	1.1913e-166	1.9467e-208	0	0	0	0
(d) $x_0=1.5$	Iter	10	6	5	57	6	5
	ρ	2.0000	3.0000	4.0000	3.0000	3.0000	4.0000
	$ x_{k+1}-x_k $	1.7506e-090	6.4453e-072	3.2401e-060	1.4402e-44	4.6610e-045	1.3231e-045
	$ f(x_{k+1}) $	9.1937e-180	0	0	1.7925e-131	2.7847e-133	9.1937e-180

¿Dudas?

- Lecciones magistrales
- Material complementario: A fondo
- 🌐 Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!



www.unir.net