Tema 2
Preliminares de cálculo numérico

Dra. Paula Triguero Navarro

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

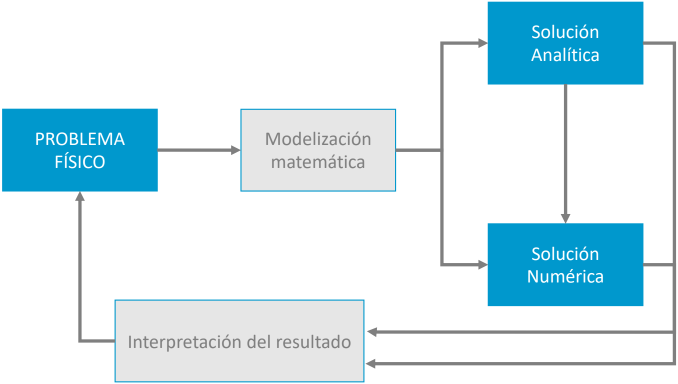
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

Introducción



Introducción

PRELIMINARES DE CÁLCULO NUMÉRICO

DEFINICIÓN DE ERRORES		ERRORES DE REDONDEO		ERRORES DE TRUNCAMIENTO	
		Debidos a la **precisión finita** de la computación		Debidos al uso de **aproximaciones matemáticas**	
Numérico	Iterativo	Cifras significativas	Errores de redondeo en Matlab	Taylor	Diferencias finitas

Objetivos

- Clasificar los diferentes tipos de errores
- Conocer los errores de redondeo
- Identificar los errores de truncamiento
- Obtener el error de truncamiento a partir de la serie de Taylor

2

Definiciones de error

Definiciones de error

Error

Discrepancia existente entre un valor verdadero y una aproximación. Los errores se dividen en dos grandes grupos:

- Errores de redondeo: cometidos cuando disponemos de un número finito de símbolos para representar un resultado
- Errores de truncamiento: originados por utilizar un método numérico en lugar de un procedimiento matemático exacto

Ejemplo 1. Error de redondeo Vs error de truncamiento

- Números irracionales en Matlab:

```
>> format long
>> sqrt(2)
ans =
1.414213562373095
```

- La solución aproximada utilizando el método iterativo de Newton a la raíz de

$$f(x) = x - e^{-x}$$

es $x \approx 0.568$.

¿Qué tipo de error encontramos en cada caso?

- La magnitud del error permite discernir si se ha realizado una aproximación adecuada o no
- Conocida la solución analítica, y, el error numérico y el error porcentual permiten estimar la bondad de la aproximación a la solución de un problema

Definición 1 (Error numérico)

Sean y e $\hat{y}$ las soluciones verdadera y aproximada, respectivamente. Se define el error numérico ϵ como

$$\epsilon = \left| y - \hat{y} \right| .$$

Definición 2 (Error porcentual)

Se define el error porcentual ϵ_r como

$$\epsilon_r [\,\%] = 100 \frac{|y - \hat{y}|}{|y|} = 100 \left| \frac{\epsilon}{y} \right| .$$

Ejemplo 2. $\sin(x) \approx x$ para valores pequeños de x

Consideremos $x = \frac{\pi}{8}$

- Solución analítica: $y = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- Solución aproximada: $\hat{y} = \frac{\pi}{8}$

Por tanto, el error numérico es

$$\epsilon = |y - \hat{y}| = \left| \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\pi}{8} \right| = 0.010016,$$

mientras que el error porcentual toma el valor:

$$\epsilon_r = 100 \left| \frac{\epsilon}{y} \right| = 100 \left| \frac{0.010016}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \right| = 2.617306\,\%.$$

- Cuando no conocemos la solución analítica y, es posible estimar el error a partir de la diferencia entre dos aproximaciones a la solución consecutivas (generalmente se da en métodos iterativos)

Definición 3 (Error iterativo)

Sean $\hat{y}_k$ e $\hat{y}_{k+1}$ las aproximaciones numéricas en las iteraciones k y $k+1$, respectivamente. Se define el error iterativo como

$$\epsilon_k = \left|\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k\right|,$$

que en su versión porcentual podemos utilizar

$$\epsilon_{k,r}[\,\%] = 100\,\frac{\epsilon_k}{\left|\hat{y}_{k+1}\right|}.$$

Ejemplo 3. Función exponencial

La función exponencial se puede expresar a partir del desarrollo de McLaurin como:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- $k = 0$: $e^{0.5} \approx 1$
- $k = 1$: $e^x \approx 1 + x \quad \Rightarrow \quad e^{0.5} \approx 1 + 0.5 = 1.5$
- $k = 2$: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{0.5} \approx 1.5 + \frac{0.5^2}{2} \approx 1.625$
- $k = 3$: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \Rightarrow \quad e^{0.5} \approx 1.625 + \frac{0.5^3}{6} \approx 1.6458$
- $k = 4$: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad \Rightarrow \quad e^{0.5} \approx 1.6458 + \frac{0.5^4}{24} \approx 1.6484$
- $k = 5$: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \quad \Rightarrow \quad e^{0.5} \approx 1.6484 + \frac{0.5^5}{120} \approx 1.6487$

Ejemplo 3. Función exponencial

La sucesión de errores iterativos es:

$$e_{0,r} = 100 \cdot \left|\frac{1.5 - 1}{1.5}\right| = 33.33\,\%$$

$$e_{1,r} = 100 \cdot \left|\frac{1.625 - 1.5}{1.625}\right| = 7.6923\,\%$$

$$e_{2,r} = 100 \cdot \left|\frac{1.6458 - 1.625}{1.6458}\right| = 1.2658\,\%$$

$$e_{3,r} = 100 \cdot \left|\frac{1.6484 - 1.6458}{1.6484}\right| = 0.1577\,\%$$

$$e_{4,r} = 100 \cdot \left|\frac{1.6487 - 1.6484}{1.6487}\right| = 0.0181\,\%$$

Con $k = 4$, el error iterativo $e_{k,r}$ ya es menor que $0.05\,\%$.

3

Error de redondeo

- Se origina por no disponer de precisión infinita para la representación de magnitudes
- Se van acumulando en las operaciones: cuantas más operaciones, mayor error de redondeo

Cifras significativas

Cantidad de cifras que coinciden con la medida de la magnitud correspondiente. Pueden cambiar su interpretación en función de la magnitud que estemos tratando de representar.

¿Cuántas cifras significativas vamos a utilizar para representar un número?
¿Cómo podemos representar un número en función de las cifras significativas?

Número	Cifras significativas	Característica
132.15000	5	Número decimal superior a 1
0.002350	3	Número decimal inferior a 1
$3 \cdot 10^8$	2	Notación científica
$2.350 \cdot 10^3$	4	Notación científica

Tabla: Ejemplos de cifras significativas

Error de redondeo

Error de redondeo en Matlab

- Matlab almacena de forma interna las variables numéricas con formato `double` (32 cifras significativas)
- Se puede utilizar un mayor número de cifras significativas con `digits(d)`, donde `d` determina el número de cifras significativas sobre las que trabajar
- Cifras almacenadas por Matlab $\neq$ Cifras que muestra Matlab por pantalla (`format`)

Ejemplo 4. Representación de π en Matlab

- `format short`, `format long`, ...
- `vpa`
- `digits`

Debido al uso de las cifras significativas, estamos cometiendo un error de redondeo cuando representamos el número π en forma decimal.

4

Error de truncamiento

Error de truncamiento

- Tiene un origen puramente matemático
- Aparece por utilizar una aproximación en lugar de un procedimiento exacto
- La formulación matemática que se utiliza ampliamente para expresar funciones de manera aproximada se basa en desarrollos en serie de Taylor

Ejemplo 5.

La función $f(x) = e^x$ está definida para cualquier $x \in \mathbb{R}$ mediante

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Si decimos que

$$e^3 = \sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k!} 3^k$$

estamos cometiendo un error de truncamiento que coincide con la suma de los infinitos términos que hemos eliminado.

Contenidos

Teorema de Taylor

Sea la función f y sus primeras $n+1$ derivadas continuas en un intervalo que contiene a los puntos a y x. Entonces, el valor de la función f en x viene dada por

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n, definido como

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

y $R_n(x)$ se denomina residuo, y viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \xi \in (a, x).$$

Desarrollo de Taylor

- Desarrollo polinómico de una función $f(x)$ alrededor de un punto a
- Permite aproximar cualquier función $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ por un polinomio de grado n
- El desarrollo es una serie infinita: al tomar solo los n primeros términos del desarrollo se comete un error de truncamiento.

Ejemplo 6. Aproximación de orden uno de la derivada de $f(x)$

Utilizando el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en el punto x_0 con un polinomio de grado 1, $P_1(x)$, resulta:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tomando $x = x_1$:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

podemos aproximar $f'(x_0)$ como

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Estamos cometiendo un error de truncamiento de orden 1:

$$f(x_1) = P_1(x_1) + R_1(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{R_1(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)$$

por lo que decimos que la aproximación de la derivada es de orden 1.

Ejemplo 7. Determina los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 4 y 6 de la función $f(x) = \sin(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad \ldots$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f^{(iv)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ldots$$

Entonces:

$$P_1(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

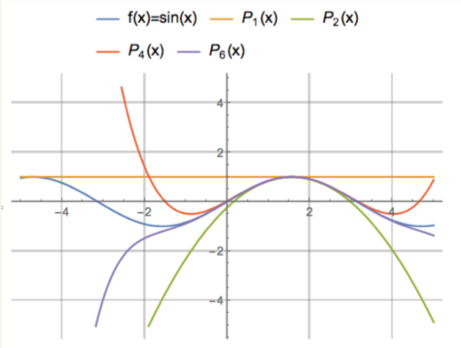
$$P_2(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6$$

Ejemplo 7. Determina los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 4 y 6 de la función $f(x) = \sin(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n$$



Contenidos

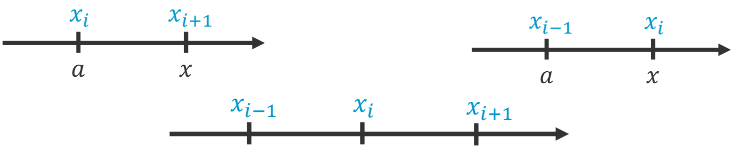
Discretización de un intervalo $[a, b]$

Discretización de la variable independiente en $n+1$ puntos en un intervalo $[a, b]$:

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

donde h se le denomina paso, y viene dado por la distancia entre dos puntos discretizados consecutivos, definido por

$$h = \frac{b-a}{n}.$$



Diferencias finitas

- Aproximaciones que se realizan de las derivadas de las funciones
- Tienen su origen en el desarrollo en serie de Taylor

Ejemplo 8. Diferencia finita progresiva

A partir del desarrollo en serie de Taylor de orden 1:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Si los nodos están equiespaciados:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Diferencias finitas para aproximar $f'(x)$

- Diferencia finita progresiva:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

- Diferencia finita regresiva:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}, \quad f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

- Diferencia finita central:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Diferencias finitas para aproximar $f''(x)$

- Diferencia finita progresiva:

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

- Diferencia finita regresiva:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

- Diferencia finita central:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejemplo 9. Discretiza la EDO $y''(x) - y'(x) + 2y(x) - x^2 = 0$, $x \in [a, b]$, utilizando diferencias finitas de orden 2

Definimos el tamaño de paso $h = \frac{b-a}{n}$ para discretizar la variable independiente:

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Por tanto, tendremos:

$$y(x_i) \approx y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Utilizando diferencias finitas centrales:

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \quad \Rightarrow \quad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \quad \Rightarrow \quad y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

La EDO discretizada es:

$$y''(x_i) - y'(x_i) + 2y(x_i) - x_i^2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i - x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{h}{2}\right) y_{i+1} + (2h^2 - 2)y_i + \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_{i-1} - h^2 x_i^2 = 0$$

Para finalizar...

- Lecciones magistrales
- Material complementario: A fondo
- Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET