Ejercicio 3. Tema 2. MNAII

Problema

Consideremos el siguiente problema de frontera:

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

$$x \in [a, b]$$

$$y(a) = \alpha; y'(a) - 2y''(a) = \beta$$

$$y'(b) - y''(b) = \gamma$$

Describe el método del disparo para Newton y Secante

Solución:

<u>Condiciones</u>: *No Dirichlet*

<u>Tipo</u>: *No lineal*

Método de la secante

Establecemos que:

$$y(a) = \alpha; y'(a) = t$$

Por tanto;

$$y''(a) = \frac{1}{2} * (t + \beta)$$

Valores de t0 y t1 serán elegidos arbitrariamente.

Ahora transformamos a sistema de ecuaciones de primer orden para aplicar técnicas de resolución para PVI.

$$y_1 = \text{y};\ y_2 = y'; y_2' = y''; y_3 = y'';\ y_3' = \text{y}'''$$

Tras el cambio de variable nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} y'_1 = y2 \\ y'_2 = y3 \\ y'_3 = f(x, y, y', y'') \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ t \\ \frac{1}{2} * (t + \beta) \end{bmatrix}$$

En el caso del método de la secante queremos aproximar la función F(t) al valor de gamma (γ) por lo que el planteamiento quedaría:

$$F(t) \Rrightarrow y'(a) - 2y''(a) - \beta = 0$$

Por tanto, en caso de requerir un criterio de parada para aplicar el método del disparo se tendría que establecer:

$$incremento = |y'(a) - 2y''(a) - \beta| < Tol$$

El método de la secante quedaría planteado de la siguiente forma:

Con t0 y t1 escogidos arbitrariamente:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(t_{k-1} - t_{k-2})(y'(a, t_{k-1}) - 2y''(a, t_{k-1}) - \beta)}{[(y'(a, t_{k-1}) - 2y''(a, t_{k-1}) - \beta) - (y'(a, t_{k-2}) - 2y''(a, t_{k-2}) - \beta)]}$$

Método de Newton

Para este método partimos de las mismas condiciones iniciales propuestas con la secante, así:

$$y(a) = \alpha; y'(a) = t$$

Por tanto;

$$y''(a) = \frac{1}{2} * (t + \beta)$$

Procedemos ahora a formular el parámetro Z, necesario para el método de Newton. Al tratarse de un problema de contorno de tercer grado, tendríamos entonces:

$$z''' = \frac{\partial f}{\partial y''} z'' + \frac{\partial f}{\partial y'} z' + \frac{\partial f}{\partial y} z$$

Por tanto,

$$z''' = f(x, y, y')z'' + f(x, y, y'')z' + f(x, y', y'')z$$

Con las condiciones iniciales:

$$z(a) = 1; z'(a) = 1; z''(a) = 1 + \frac{1}{2}\beta$$

Ahora transformamos a sistema de ecuaciones de primer orden para aplicar técnicas de resolución para PVI.

$$y_1 = \mathrm{y};\ y_2 = \mathrm{y}';\ y_2' = \mathrm{y}'';\ y_3 = \mathrm{y}'';\ y_3' = \mathrm{y}''';\ y_4 = \mathrm{z};\ y'_4 = \mathrm{z}';\ y_5 = \mathrm{z}';\ y'_5 = \mathrm{z}'';\ y_6 = \mathrm{z}''$$

Tras el cambio de variable nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} y'_1 = y2 \\ y'_2 = y3 \\ y'_3 = f(x, y, y', y'') \\ y'_4 = y_5 \\ y'_5 = y_6 \\ y'_6 = f(x, y, y')y_6 + f(x, y, y'')y_5 + f(x, y', y'')y_4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ t \\ \frac{1}{2} * (t + \beta) \\ 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\beta \end{bmatrix}$$

Así pues, el método de Newton vendría dado por:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y'(a, t_k) - 2y''(a, t_k) - \beta}{z'(a, t_k) - 2z''(a, t_k) - \beta}$$