

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

---> Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 4. Simulación numérica utilizando MMC

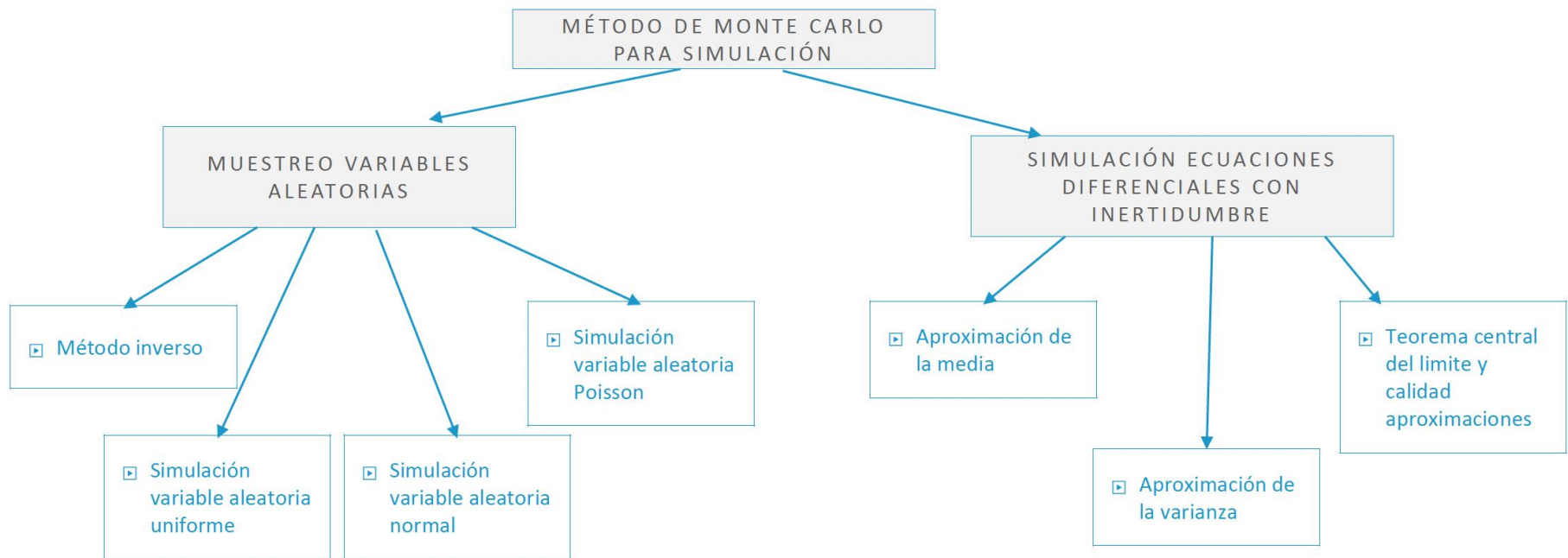
Índice

Contenidos

- ▶ Introducción y objetivos.
- ▶ Muestreo de VAs con MMC.
- ▶ Resolución numérica de EDAs con MMC.
- ▶ Bibliografía.

Tema 4

Contenidos - Esquema



Muestreo de VAs con MMC

Pasos

1. **Método inverso para muestrear VAs:** Muestrear VAs a partir de simulaciones de una VA uniforme.

Si X es una VA continua con Función de distribución F_X .

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \quad \lambda > 0. \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$$

Si U es una VA uniforme en $[0,1]$ entonces $F^{-1}(U)$ tiene función de distribución F_X .

$$F_X^{-1}(u) = \frac{-1}{\lambda} \log(1 - u), \quad u \in]0, 1[.$$
$$X = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U), \quad U \sim U([0, 1]).$$

2. **Muestreo de una VA uniforme:** Existen varias fórmulas para obtener una secuencia de números aleatorios, una de las más sencillas es la denominada fórmula de congruencia.

Muestreo de una VA Uniforme

Proposición 1

El periodo de una congruencia lineal, como la que se ha definido en la expresión (3), es m si y solo se se verifican las siguientes condiciones

$$X_{n+1} \equiv (aX_n + c) \bmod(m), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

- ▶ Máximo común divisor de c y m es 1.
- ▶ Cada factor primo de m divide a $a - 1$.
- ▶ Si 4 divide a m , entonces 4 divide a $a - 1$.

$$U_n = \frac{X_n}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq U_n \leq 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Ejemplo: $a = 7^5 = 16807$, $c = 0$, $m = 2^{31} - 1$.

$$X_{n+1} = 16807X_n \bmod(2^{31} - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Muestreo de una VA Normal

No siempre es posible obtener la inversa de la función de distribución o la propia función de distribución

Se han desarrollado métodos para aproximar la inversa de la función de distribución

definimos $y = \sqrt{-2 \log(1 - u)}$, entonces para $u \sim U([0, 0.5])$, se tiene

$$F_X^{-1}(u) \approx \frac{p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4}{q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4},$$

p_0	$=$	$-0.322232431088,$	q_0	$=$	$0.099348462606,$
p_1	$=$	$-1,$	q_1	$=$	$0.588581570495,$
p_2	$=$	$-0.342242088547,$	q_2	$=$	$0.531103462366,$
p_3	$=$	$-0.0204231210245,$	q_3	$=$	$0.10353775285,$
p_4	$=$	$-0.0000453642210148,$	q_4	$=$	$0.0038560700634.$

Muestreo de una VA Poisson

No siempre es posible obtener la inversa de la función de distribución o la propia función de distribución

Se han desarrollado métodos para aproximar la inversa de la función de distribución

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}[Y_n \leq y] = \sum_{\substack{i=1 \\ y_i \leq y}}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = y_i) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!}, \quad m \leq y < m+1.$$

$$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} < U_n \leq e^{-\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!}, \quad U_n \sim U([0, 1]).$$

Si definimos $Y_n = m$ tendríamos un muestreo de la VA $X \sim \text{Po}(\lambda)$.

Resolución numérica de EDAs con MMC

PVIA:

$$X'(t) = -AX(t),$$

$$X(0) = B,$$

A, B VAs independientes

f_{A,B}: Función de densidad

F_{A,B}: Función de distribución conjunta

Solución: X PE

Usar **MMC** para aproximar la solución X del PVIA

MMC para aproximar la solución X PE de un PVIA

- ✓ A partir de la función de distribución conjunta, $F_{A,B}$ y utilizando métodos de simulación de VAs generamos M simulaciones i.i.d.

$$Z^{(i)} = (a^i, b^i), \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

- ✓ Para cada uno de los muestreos, $i = 1, \dots, M$, resolvemos cada uno de los PVI deterministas

$$(X^{(i)})(t) = -a^{(i)} X^{(i)}(t),$$

$$X^{(i)}(0) = b^{(i)}.$$

- ✓ A partir de $X(t, Z(i))$, $i = 1, \dots, M$, podemos obtener información estadística aproximada del PE solución, como la media del PE, $E[X(t)]$, o la varianza $V[X(t)]$

$$\bar{X}_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X(t, Z^{(i)}) \approx \mathbb{E}[X(t)], \quad \sigma^2[X_M(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X(t, Z^{(i)}) - \bar{X}_M(t))^2 \approx \mathbb{V}[X(t)]$$

MMC para aproximar la solución X PE de un PVIA

Ejemplo

- ✓ $A = 1$, B es $U([0,1])$, a partir de su $F_{A,B}$ y utilizando métodos de simulación de VAs generamos 20 simulaciones i.i.d.

$$Z^{(i)} = (a^i, b^i), \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

- ✓ Para cada uno de los muestreos, $i = 1, \dots, 20$, resolvemos cada uno de los PVI deterministas

$$(X^{(i)})(t) = -a^{(i)} X^{(i)}(t),$$

$$X^{(i)}(0) = b^{(i)}.$$

- ✓ A partir de $X(t, Z(i))$, $i = 1, \dots, M$, podemos obtener información estadística aproximada del PE solución, como la media del PE, $E[X(t)]$, o la varianza $V[X(t)]$

$$\bar{X}_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X(t, Z^{(i)}) \approx \mathbb{E}[X(t)], \quad \sigma^2[X_M(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X(t, Z^{(i)}) - \bar{X}_M(t))^2 \approx \mathbb{V}[X(t)]$$

MMC para aproximar la solución X PE de un PVIA

Ejemplo - Resultados

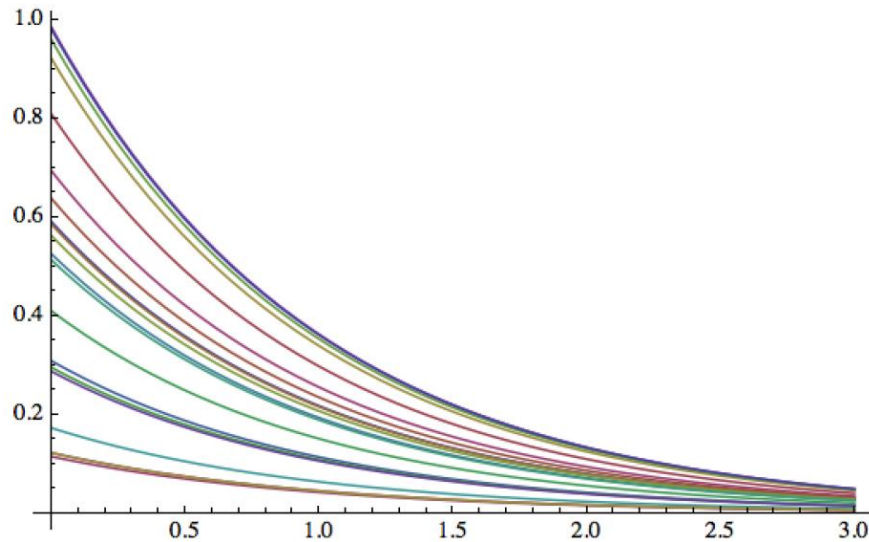


Figura 1: Trayectorias deterministas del PVIA para cada una de las simulaciones

$$X(t) = Be^{-t}$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[Be^{-t}] = \mathbb{E}[B]e^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

$M = 20$	$M = 50$	$M = 100$	$M = 1000$
$0.534086e^{-t}$	$0.487041e^{-t}$	$0.520565e^{-t}$	$0.484646e^{-t}$

Tabla 1: Aproximaciones de la media en el contexto del Ejemplo 2 para distintos M .

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{V}[X(t)] = \frac{e^{-2t}}{12}$$

$$\sigma_X(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}.$$

$M = 20$	$M = 50$	$M = 100$	$M = 1000$
$0.280843e^{-t}$	$0.303476e^{-t}$	$0.307459e^{-t}$	$0.285814e^{-t}$

Tabla 2: Aproximaciones de la desviación típica en el contexto del Ejemplo 2 para distintos M .

Calidad de las aproximaciones

Teorema Central del Límite

Teorema 2: Teorema central del límite

Sean X_1, X_2, \dots, X_M VAs independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Definimos

$$\bar{X}_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i, \quad U_M = \sqrt{M} \left(\frac{\bar{X}_M(t) - \mu}{\sigma} \right).$$

Entonces, la función de distribución U_M converge a $N(0; 1)$, es decir

$$U_M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{d} Z, \quad Z \sim N(0; 1),$$

donde $\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{d}$ indica la convergencia en distribución.

Calidad de las aproximaciones

Teorema Central del Límite

$$\overline{X}_M(t) = \frac{\sigma(U_M + \mu)}{\sqrt{M}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma^2}{M}\right).$$

$$\overline{X}_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X^{(i)}(t, Z^{(i)}) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X(t)]; \frac{\mathbb{V}[X(t)]}{M}\right)$$

Ejercicio 2. Consideremos el siguiente PVIA

$$\begin{aligned}y'(t) &= ay(t) + b, \\ y(t_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{10}$$

Simular en Mathematica la solución para distintos instantes de tiempo t considerando que

► $t_0 = 0$, $y_0 = 2$, $a \sim \text{Exp}(5)$ y $b \sim U(0, 1)$.

Ejercicio 1. Consideramos el siguiente PVIA

$$\begin{aligned}X'(t) &= -AX^2(t), \\X(0) &= X_0,\end{aligned}\tag{9}$$

donde $t > 0$, $a > 0$ y $X_0 \sim \text{Exp}(1)$. Se pide lo siguiente:

1. Calcula el PE solución analíticamente.
2. Calcula la media y varianza del PE obtenido en el apartado anterior.
3. Aplicar el método de Monte Carlo para aproximar la media y la varianza de la solución PE del siguiente PVIA utilizando $M = 10^2$ y $M = 10^4$ simulaciones.

Bibliografía

Devroye, L. (2006). Nonuniform random variate generation. *Handbooks in operations research and management science*, 13:83–121.

Kroese, D. P., Taimre, T., and Botev, Z. I. (2013). *Handbook of monte carlo methods*, volume 706. John Wiley & Sons.

Ross, S. M. (1990). *A course in simulation*. Number 04; QA273, R6.

¿Dudas / Aportaciones?





www.unir.net