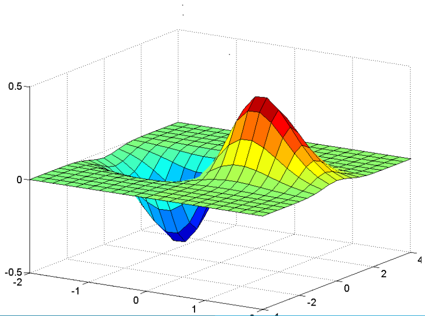
Tema 3: Problemas de contorno unidimensionales. Diferencias finitas

Métodos Numéricos II

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Eva García Villalba



Contenido

A partir de la definición de derivada o del desarrollo de Taylor de una función $f(x)$, podemos deducir las siguientes aproximaciones de la derivada:

Diferencia progresiva

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{o bien} \quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h).$$

Diferencia regresiva

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad \text{o bien} \quad f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h).$$

Diferencia central

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad \text{o bien} \quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Análogamente, para la segunda derivada podemos obtener:

Diferencias finitas

Diferencia progresiva

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}, \quad \text{ó} \quad f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h).$$

Diferencia regresiva

$$f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}, \quad \text{ó} \quad f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + O(h).$$

Diferencia central

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad \text{ó} \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

¡Diferentes aproximaciones de $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... pueden obtenerse a partir del desarrollo de Taylor, polinomios de interpolación, etc.!

Problema de contorno

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

El método consiste en transformar nuestro problema en un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son los valores aproximados de $y(x)$ en los nodos elegidos de $[a,b]$.

- Transformación del problema

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = p(x)\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + q(x)y(x) + r(x) + O(h^2),$$

- Discretización y aproximación

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N+1, \qquad y_i \approx y(x_i)$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i + r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

o equivalentemente

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))y_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i+1} = -h^2 r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

- Forma matricial y resolución

$$Ay = d,$$

Método de diferencias finitas lineal

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_3) & 2+h^2q(x_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+h^2q(x_{N-1}) & -1+\frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{pmatrix}$$

Términos independientes

$$\begin{pmatrix} -h^2r(x_1)+(1+\frac{h}{2}p(x_1))\alpha \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N)+(1-\frac{h}{2}p(x_N))\beta \end{pmatrix},$$

Incógnitas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}$$

Método de diferencias finitas lineal: Algoritmo

- ENTRADA funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de puntos N.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$.

- Paso 1 $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a + h$;
  $dp_1 = 2 + h^2 q(x)$, $ds_1 = -1 + \dfrac{h}{2} p(x)$, $d_1 = -h^2 r(x) + (1 + \dfrac{h}{2} p(x))\alpha$,
- Paso 2 Para $i = 2, 3, \ldots, N-1$, tomar $x = a + ih$;
  $dp_i = 2 + h^2 q(x)$, $ds_i = -1 + \dfrac{h}{2} p(x)$, $di_{i-1} = -1 - \dfrac{h}{2} p(x)$, $d_i = -h^2 r(x)$,
- Paso 3 Tomar $x = b - h$,
  $dp_N = 2 + h^2 q(x)$, $di_{N-1} = -1 - \dfrac{h}{2} p(x)$, $d_N = -h^2 r(x) + (1 - \dfrac{h}{2} p(x))\beta$,
- Paso 4 Llamada al algoritmo de Crout para resolver el sistema,
  $y = Crout(dp, ds, di, d)$.

Método de Crout

Permite resolver sistemas lineales $Ax = d$, con A matriz tridiagonal, de manera óptima en cuanto al número de operaciones. Se basa en la factorización de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término los elementos de A y los de LU, obtenemos:

Igualando término a término los elementos de A y los de LU, obtenemos:

- $i = 1$ $\qquad l_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}/l_{11},$
- $i = 2, 3, \ldots, n-1$
$$l_{ii-1} = a_{ii-1},$$
$$l_{ii} = a_{ii} - l_{ii-1}u_{i-1i},$$
$$u_{ii+1} = a_{ii+1}/l_{ii},$$
- $i = n$ $\qquad l_{nn-1} = a_{nn-1}, \quad l_{nn} = a_{nn} - l_{nn-1}u_{n-1n},$

Transformación del sistema

$$Ax = d \Leftrightarrow LUx = d \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} Lz = d \\ Ux = z \end{array}\right\}$$

$Lz = d \quad \leftarrow \quad$ Sustitución directa

$Ux = z \quad \leftarrow \quad$ Sustitución inversa

- function sol=Crout(a,b,c,d)
  n=length(a);
- % Obtención de las matrices L y U tales que $A = LU$
  ```
  l(1)=a(1);
  u(1)=b(1)/l(1);
  for i=2:n-1
          l(i)=a(i)-c(i-1)*u(i-1);
          u(i)=b(i)/l(i);
  end
  l(n)=a(n)-c(n-1)*u(n-1);
  ```
- % Solución del sistema $Lz = d$
  ```
  z(1)=d(1)/l(1);
  for i=2:n
          z(i)=(1/l(i))*(d(i)-c(i-1)*z(i-1));
  end
  ```
- % Solución del sistema $Ux = z$
  ```
  x(n)=z(n);
  for i=n-1:-1:1
          x(i)=z(i)-u(i)*x(i+1);
  end
  sol=x(:);
  ```

¿Y el método de Gauss?

Resolvemos el siguiente sistema por Gauss y por Crout:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{29} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Algoritmo de Gauss $\rightarrow$ 9890 productos-cocientes.
  Recordemos que el número de productos-cocientes que requiere el método de Gauss para resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$ es $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$.

- Algoritmo de Crout $\rightarrow$ 523 productos-cocientes.
  El coste computacional de resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$ con el método de Crout es de $5n - 4$ productos-cocientes.

Ejemplo con condiciones Dirichlet

Ejemplo

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y(2) = 2.$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.0	1.0000	1.0000	-
1.1	1.0926	1.0926	2.88e-5
1.2	1.1870	1.1870	4.17e-5
1.3	1.2833	1.2833	4.55e-5
1.4	1.3814	1.3814	4.39e-5
1.5	1.4811	1.4811	3.92e-5
1.6	1.5823	1.5823	3.26e-5
1.7	1.5850	1.5850	2.49e-5
1.8	1.7888	1.7888	1.68e-5
1.9	1.8939	1.8939	8.41e-6
2.0	2.0000	2.0000	-

¡ El error máximo está alrededor de 10^{-5} !

Ejemplo

$$\begin{aligned} & ru'' + u' = 0 && r \in [1,3] \\ & u(1) + u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln 3}, && u(3) + u'(3) = 0.5 - \frac{1}{6\ln 3} \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicamos diferencias finitas de orden 2 al problema de contorno:

$$\left(r - \frac{h}{2}\right) u(r-h) - 2ru(r) + \left(r + \frac{h}{2}\right) u(r+h) = 0$$

Tomamos los nodos $r_i = 1 + ih$, $h = \frac{2}{10}$ e $i = 0, 1, \ldots, 10$ y reemplazamos en la ecuación anterior r por r_i. Además, denotamos $u_i = u(r_i)$:

$$\left(r_i - \frac{h}{2}\right) u_{i-1} - 2r_i u_i + \left(r_i + \frac{h}{2}\right) u_{i+1} = 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, 10 \tag{2}$$

La expresión anterior describe un sistema lineal de tamaño 11×11, con incógnitas $u_0, u_1, \ldots, u_9, u_{10}$. Para determinar la expresión matricial del sistema, vamos a analizar con cuidado las ecuaciones correspondientes a $i = 0$ e $i = 10$.

Ejemplo con condiciones NO Dirichlet

- $i = 0$

$$\left(r_0 - \frac{h}{2}\right) u_{-1} - 2r_0 u_0 + \left(r_0 + \frac{h}{2}\right) u_1 = 0,$$

Obtenemos u_{-1} usando $u(1) + u'(1) = \alpha$ y aplicamos diferencias finitas de $O(h^2)$:

$$u_0 + \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha \qquad \longrightarrow \qquad u_{-1} = 2hu_0 + u_1 - 2h\alpha$$

Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema, tenemos

$$(2hr_0 - h^2 - 2r_0)u_0 + 2r_0 u_1 = 2h\alpha \left(r_0 - \frac{h}{2}\right).$$

- $i = 10$

$$\left(r_{10} - \frac{h}{2}\right) u_9 - 2r_{10} u_{10} + \left(r_{10} + \frac{h}{2}\right) u_{11} = 0.$$

Obtenemos u_{11} a partir de $u(3) + u'(3) = \beta$ y aplicamos diferencias finitas de $O(h^2)$:

$$u_{10} + \frac{u_{11} - u_9}{2h} = \beta \qquad \longrightarrow \qquad u_{11} = u_9 - 2hu_{10} + 2h\beta$$

Llevando esta expresión a la última ecuación del sistema, tenemos

$$2r_{10}u_9 - (2r_{10} + 2hr_{10} + h^2)u_{10} = -2h\beta \left(r_{10} + \frac{h}{2}\right).$$

Con todo ello, el sistema (2) se puede expresar en forma matricial $Au = d$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2hr_0 - h^2 - 2r_0 & 2r_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 - \frac{h}{2} & -2r_1 & r_1 + \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 - \frac{h}{2} & -2r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 - \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_9 - \frac{h}{2} & -2r_9 & r_9 + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2r_{10} & -h^2 - 2hr_{10} - 2r_{10} \end{pmatrix}$$

y

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 2h\alpha\left(r_0 - \frac{h}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2h\beta\left(r_{10} + \frac{h}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Ejemplo con condiciones NO Dirichlet

Vamos a resolver el sistema aplicando el algoritmo de Crout.

$alfa = 1 - 1/(2 * log(3));$
$beta = 0.5 - 1/(6 * log(3));$
$h = 2/10;$
$r = 1 : h : 3;$
$b = r(1 : 10) + h/2; \; b(1) = 2 * r(1);$ % superdiagonal de A
$c = r(2 : 11) - h/2; \; c(10) = 2 * r(11);$ % subdiagonal de A
$a = -2 * r(1 : 11);$ % diagonal principal de A
$a(1) = 2 * h * r(1) - h^2 - 2 * r(1);$
$a(11) = -h^2 - 2 * h * r(11) - 2 * r(11);$
$d = zeros(11, 1);$ % términos independientes
$d(1) = 2 * h * alfa * (r(1) - h/2);$
$d(11) = -2 * h * beta * (r(11) + h/2);$
$u = Crout(a, b, c, d)$

Los resultados obtenidos son

$$u = [1.016835; 0.931883; 0.860001; 0.797703; 0.742734; 0.693551; 0.649053; 0.608424; 0.571045; 0.536435; 0.504212]$$

Problemas no lineales de segundo orden

Problemas descritos por una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b]$$

y condiciones tipo Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. La función f no lineal en y ó y'.

Métodos para aproximar la solución del problema:

- Método de disparo no lineal
- Método de diferencias finitas no lineal

Problema

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$$

- Transformación del problema

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = f\left(x, y(x), \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}\right) + O(h^2)$$

- Discretización y aproximación del problema

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \qquad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1,$$

$$y_i \approx y(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1,$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta$$

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

- Sistema no lineal $N \times N$

$$\left.\begin{array}{ll}
i=1 & 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2-\alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\
i=2 & -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \frac{y_3-y_1}{2h}\right) = 0 \\
\vdots & \vdots \\
i=N-1 & -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N-y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\
i=N & -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \frac{\beta-y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0
\end{array}\right\}$$

Método de Newton para resolver sistemas no lineales $F(y) = 0$.

- Aproximación inicial $y^{(0)}$
- Fórmula iterativa

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  ó equivalentemente

  $y^{(k+1)} = y^{(k)} + z$, donde z es la solución del sistema lineal $F'(y^{(k)})z = -F(y^{(k)})$,

  donde F' es la matriz jacobiana de la función F que describe el sistema.
- Criterio de parada

$$\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| < tol \quad \text{o bien} \quad \|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| + \|F(y^{(k+1)})\| < tol$$

Método de diferencias finitas no lineal

En nuestro caso, la matriz jacobiana es la matriz tridiagonal $F'(y)$:

$$\begin{array}{ll}
 & \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_N} \end{matrix} \\
\begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ \vdots \\ i=N-1 \\ i=N \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
2+h^2 f_y & -1+\frac{h}{2} f_{y'} & 0 & \cdots & 0 \\
-1-\frac{h}{2} f_{y'} & 2+h^2 f_y & -1+\frac{h}{2} f_{y'} & \cdots & 0 \\
0 & -1-\frac{h}{2} f_{y'} & 2+h^2 f_y & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1+\frac{h}{2} f_{y'} \\
\cdots & \cdots & 0 & -1-\frac{h}{2} f_{y'} & 2+h^2 f_y
\end{pmatrix}
\end{array}$$

mientras que, en cada iteración debemos resolver el sistema lineal

$$F'(y^{(k)})z = -\begin{pmatrix}
2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2-\alpha}{2h}\right) - \alpha \\
-y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3-y_1}{2h}\right) \\
\vdots \\
-y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) \\
-y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta
\end{pmatrix}$$

- ENTRADA funciones f, f_y, $f_{y'}$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de puntos N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, N$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Aproximación inicial, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; $y_i = \alpha + i\frac{\beta-\alpha}{b-a}h$, $i = 1, 2, \ldots, N$
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
- Paso 3 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos siguientes:
  - Paso 4 Tomar $x_1 = a + h$; $z_1 = (y_2 - \alpha)/2h$;
    $a_1 = 2 + h^2 f_y(x_1, y_1, z_1)$;
    $b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x_1, y_1, z_1)$; $d_1 = -(2y_1 - y_2 + h^2 f(x_1, y_1, z_1) - \alpha)$;
  - Paso 5 Para $i = 2, 3, \ldots, N-1$, tomar $x_i = a + ih$, $z_i = (y_{i+1} - y_{i-1})/2h$.
    $a_i = 2 + h^2 f_y(x_i, y_i, z_i)$; $b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x_i, y_i, z_i)$;
    $c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x_i, y_i, z_i)$;
    $d_i = -(2y_i - y_{i+1} - y_{i-1} + h^2 f(x_i, y_i, z_i))$;
  - Paso 6 Tomar $x_N = b - h$; $z_N = (\beta - y_{N-1})/2h$;
    $a_N = 2 + h^2 f_y(x_N, y_N, z_N)$;
    $c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x_N, y_N, z_N)$;
    $d_N = -(2y_N - y_{N-1} + h^2 f(x_N, y_N, z_N) - \beta)$;
  - Paso 7 $z = Crout(a, b, c, d)$;
  - Paso 8 $y = y + z$;
  - Paso 9 $incre = \|z\|$; $iter = iter + 1$;
- Paso 10 Analizar por qué el programa se ha salido del bucle.

Ejemplo con condiciones Dirichlet

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.0	17.000000	17.000000	-
1.1	15.754503	15.755455	9.52e-4
1.2	14.771740	14.773333	1.59e-3
1.3	13.995677	13.997692	2.02e-3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.9	12.028814	12.031053	2.24e-3
2.0	11.997915	12.000000	2.09e-3
2.1	12.027142	12.029048	1.91e-3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.8	13.553885	13.554286	4.01e-4
2.9	13.927046	13.927241	1.95e-4
3.0	14.333333	14.333333	-

¡Mediante la extrapolación de Richardson, se pueden refinar los resultados hasta obtener un error máximo de 10^{-10}

Ejemplo con condiciones NO Dirichlet

$$
\begin{aligned}
&y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin(x) = 0 \qquad x \in [0,\pi] \\
&y(0) + y'(0) = 1, \\
&y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.
\end{aligned}
$$

- Transformación del problema

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = f\left(x, y(x), \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}\right) + O(h^2)$$

- Discretización y aproximación del problema
  - $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\left[-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1} + h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0,\right]$$

  - $i = 0$

$$-y_1 + 2y_0 - y_{-1} + h^2 f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}\right) = 0,$$

Usamos la condición de contorno $y(0) + y'(0) = 1$:

$$y_0 + y_0' = 1 \;\longrightarrow\; y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \alpha \;\longrightarrow\; y_{-1} = 2hy_0 - 2h\alpha + y_1.$$

Sustituyendo y_{-1} en la ecuación del sistema, obtenemos:

$$\left[(2-2h)y_0 - 2y_1 + h^2 f\left(x_0, y_0, -y_0 \cancel{-}\alpha\right) + 2h\alpha = 0.\right]$$

Ejemplo con condiciones NO Dirichlet

- Discretización y aproximación del problema
  - $i = N+1$

$$-y_{N+2} + 2y_{N+1} - y_N + h^2 f\left(x_{N+1}, y_{N+1}, \frac{y_{N+2} - y_N}{2h}\right) = 0,$$

Usamos la condición de contorno $y(\pi) - 2y'(\pi) = 2$:

$$y_{N+1} - 2y'_{N+1} = 2 \longrightarrow y_{N+1} - 2\frac{y_{N+2} - y_N}{2h} = \beta \longrightarrow y_{N+2} = hy_{N+1} - h\beta + y_N.$$

Sustituyendo y_{N+2} en la ecuación del sistema, obtenemos:

$$\left[-2y_N + (2-h)y_{N+1} + h^2 f\left(x_{N+1}, y_{N+1}, \frac{y_{N+1} - \beta}{2}\right) + h\beta = 0.\right]$$

- Sistema no lineal $N \times N$

$$F(y^{(k)}) = \begin{pmatrix} (2-2h)y_0 - 2y_1 + h^2 f\left(x_0, y_0, -y_0 - \alpha\right) + 2h\alpha \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right) \\ \vdots \\ -y_{N-1} + 2y_N - y_{N+1} + h^2 f\left(x_N, y_N, \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h}\right) \\ -2y_N + (2-h)y_{N+1} + h^2 f\left(x_{N+1}, y_{N+1}, \frac{y_{N+1} - \beta}{2}\right) + h\beta \end{pmatrix}$$

- Matriz Jacobiana

$$F'(y^{(k)}) = \begin{pmatrix} (2-2h)+h^2 f_y - h^2 f_{y'} & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}f_{y'} & 2+h^2 f_y & -1+\frac{h}{2}f_{y'} & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1+\frac{h}{2}f_{y'} \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & (2-h)+h^2 f_y + \frac{h^2}{2} f_{y'} \end{pmatrix}$$

- Resolvemos el sistema

$$F'(y^{(k)})z = -F(y^{(k)})$$

Ejemplo con condiciones NO Dirichlet

$$y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin(x) = 0 \qquad x \in [0, \pi]$$
$$y(0) + y'(0) = 1,$$
$$y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\|y(x_i) - y_i\|$
0.000000	0.007259	0.000000	0.007259
0.314159	0.319138	0.309017	0.010121
0.628319	0.600449	0.587785	0.012664
0.942478	0.823514	0.809017	0.014497
1.256640	0.966311	0.951057	0.015255
1.570800	1.014670	1.000000	0.014670
1.884960	0.963671	0.951057	0.012614
2.199110	0.818127	0.809017	0.009110
2.513270	0.592099	0.587785	0.004313
2.827430	0.307525	0.309017	0.001492
3.141590	-0.007876	0.000000	0.007876

- Problema 1 Representamos por u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$, tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [R_1, R_2], \quad u(R_1) = V_1, u(R_2) = 0.$$

Supongamos que $R_1 = 2mm$, $R_2 = 4mm$ y $V_1 = 110$ voltios.

(a) Aproxima el valor $u(3)$ utilizando el algoritmo de disparo lineal con $N = 20$ y $N = 40$.

(b) Transforma el problema de frontera en un sistema lineal de tamaño 9×9 y encuentra su solución.

(c) Compara los resultados de (a) y (b) con la solución exacta del problema

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

- Problema 2 Consideremos el problema de contorno

$$y''' = f(x, y, y', y''), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = \beta, y''(b) = \gamma.$$

  (a) Diseña un método de disparo para resolver este problema aplicando el método de la secante.
  (b) Programa el método diseñado en Matlab.
  (c) Aplica el método construido al problema de contorno

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x, \quad x \in [1, 2], \quad y(1) = y'(1) = 0, y''(2) = 1.$$

- Problema 3 Consideremos el problema de contorno

$$y'' - yy' = e^{-x/2}, \quad x \in [1, 2], \quad y'(1) = 1, y'(2) = 1.$$

  (a) Transforma el problema en un sistema de ecuaciones no lineales de tamaño 11×11, teniendo en cuenta que en este problema $y(1)$ e $y(2)$ son incógnitas.
  (b) Resuelve el sistema anterior por el método de Newton.
  (c) Diseña, implementa en Matlab y aplica a este problema un método de disparo que se ajuste a las condiciones de contorno naturales del mismo.

- Problema 4 Consideremos el problema de contorno,

$$y'' = -yy' - 2\sin x - x\cos x + x\cos 2x - \frac{x^2 \sin 2x}{2}, x \in [0, 2],$$

con las condiciones mixtas $y(0) = 0$ e $y'(2) = \cos 2 - 2\sin 2$.

(a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con $N = 40$.

(b) Transforma el problema de contorno en un sistema no lineal de 10 ecuaciones con 10 incógnitas. Resuélvelo mediante el método de Newton.

(c) Compara los resultados obtenidos con el método de disparo y con diferencias finitas con la solución exacta $y(x) = x\cos x$.

(d) Representa el error exacto cometido en los apartados (a) y (b).

- Problema 5 Consideremos el problema de contorno,

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad x \in [2,4], \quad y(2) = 0, y'(4) = 8\sqrt{2}.$$

(a) Comprueba que la función $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$ es solución del problema de contorno.
(b) Aplica el método de disparo, utilizando $N = 40$ y el método de Newton, para aproximar la solución del problema de contorno.
(c) Representa el error exacto que cometemos en el apartado (b).

- Problema 6 Aproxima, mediante el método de disparo con secante y $N = 40$, la solución del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = x + z \end{array}\right\}, \qquad t \in [0,1], \qquad x(0) = 1, y(0) = 2, z(1) = -2 + 4e$$

Referencias

- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.