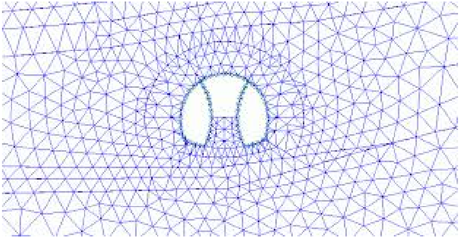
Problemas resueltos de Elementos Finitos

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Eva García, Juan R. Torregrosa

unir
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA



Contenido

Problema 1

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned} &-y'' + 4y = 4x(1 - e^{-2}), \qquad x \in [0,1] \\ &y(0) = 0, \;\; y(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

a) Utiliza la técnica de elementos finitos lineales para aproximar la solución de este problema en los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, donde $h = \dfrac{1}{10}$.

b) Sabiendo que la solución exacta del problema es

$$y(x) = \frac{1}{1+e^2} e^{-2x} - \frac{1}{1+e^2} e^{2x} + (1 - e^{-2})x$$

determina el error cometido por la aproximación obtenida en a).

$$
\begin{aligned}
-y'' + 4y = 4x(1-e^{-2}),\quad x \in [0,1]\\
y(0)=0,\; y(1)=0
\end{aligned}
$$

En este caso, $p(x) = 1 > 0$, $q(x) = 4 \geq 0$ y $f(x) = 4x(1-e^{-2})$, or lo que podemos afirmar que el problema

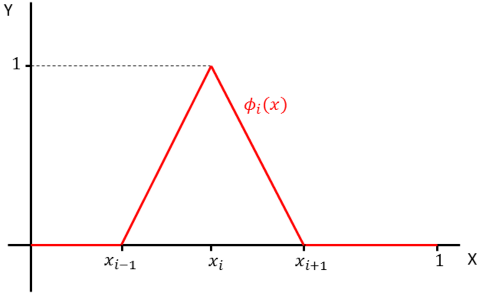
$$
-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x),\quad x \in [0,1],
$$

tiene una única solución $y(x)$
si y sólo si
$y(x)$ es la única función en $\mathcal{C}_0^2[0,1]$ que minimiza el operador definido como

$$
I(u) = \int_0^1 \left([u'(x)]^2 + 4[u(x)]^2 - 8x(1-e^{-2})u(x)\right) dx.
$$

Definimos las funciones base $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i} & \text{si} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si} \quad x_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Solución Problema 1

Sistema lineal con matriz tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 dx + 1 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-1}{h_{i-1}}\right)^2 1dx \\ &\quad +4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 (x - x_{i-1})^2 dx + 4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 (x_{i+1} - x)^2 dx \end{aligned}$$

$$a_{ii+1} = 1 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_i}\right)^2 dx + 4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 (x_{i+1} - x)(x - x_i) dx$$

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}} (x - x_{i-1}) 4x(1 - e^{-2}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} (x_{i+1} - x) 4x(1 - e^{-2}) dx$$

Solución Problema 1

Aparecen seis tipos de integrales a evaluar:

- $Q_{1i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) 4dx, \; i = 1, 2, \ldots, n-1$
- $Q_{2i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 4dx, \; i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{3i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 4dx, \; i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{4i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1dx, \; i = 1, 2, \ldots, n+1$
- $Q_{5i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) 4x(1 - e^{-2}) dx, \; i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{6i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) 4x(1 - e^{-2}) dx, \; i = 1, 2, \ldots, n$

La matriz A y el vector b contienen los elementos:

$$
\begin{aligned}
a_{ii} &= Q_{4i} + Q_{4i+1} + Q_{2i} + Q_{3i} & i = 1, 2, \ldots, n \\
a_{ii+1} &= -Q_{4i+1} + Q_{1i} & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\
b_i &= Q_{5i} + Q_{6i} & i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Solución Problema 1

```
function c=Rayleigh_lineal(p,q,f,t)

syms x
n=length(t)-1;
for i=1:n
     l=t(i); r=t(i+1);
     h=r-l;                    % Amplitud de cada intervalo

     Q1(i)=integral(q(x).*(x-l).*(r-x),l,r)/h^2;
     Q2(i)=integral(q(x).*(x-l).^2,l,r)/h^2;
     Q3(i)=integral(q(x).*(r-x).^2,l,r)/h^2;

     Q4(i)=integral(p(x),l,r)/h^2;

     Q5(i)=integral(f(x).*(x-l),l,r)/h;
     Q6(i)=integral(f(x).*(r-x),l,r)/h;
end

L=1:n-1;    R=2:n;            % Matriz de coeficientes
a=Q4(L)+Q4(R)+Q2(L)+Q3(R);   % Diagonal principal
b=Q1-Q4; b=b(2:n-1) ;        % Sub y superdiagonal
d=Q5(L)+Q6(R);               % Término independiente
c=Crout(a,b,b,d);
```

Solución Problema 1

Ejecutando la instrucción:

```
c = Rayleigh_lineal(@(x) 1+0*x,@(x) 4+0x,@(x) 4x(1-exp(-2)),0:0.1:1)
```

obtenemos el vector de coeficientes

```
c =
   0.038552051916024
   0.075174664110156
   0.107860701301233
   0.134444508409313
   0.152514702968558
   0.159317072477611
   0.151643666513626
   0.125703617520617
   0.076970488424652
```

La aproximación de la solución en el intervalo $[0,1]$ es la función $\phi(x) = \sum_{i=1}^{9} c_i\phi_i(x)$ que, evaluada sobre los puntos de la partición x_i, coincide con las componentes del vector c.

Solución Problema 1

Sabemos que la solución exacta del problema es

$$y(x) = \frac{1}{1+e^2}e^{-2x} - \frac{1}{1+e^2}e^{2x} + (1-e^{-2})x,$$

por lo que para determinar el error cometido por los elementos finitos lineales:

```
>> t=0:.1:1;
>> solex=1/(1+exp(2))*exp(-2*t)-1/(1+exp(2))*exp(2*t)+(1-exp(-2))*t;
>> abs(c-solex(2:end-1)')
ans =
   1.0e-03 *
   0.085259861986917
   0.167475683631277
   0.243220888054368
   0.308277988132516
   0.357177079307852
   0.382650908772320
   0.374971547511649
   0.321127077044070
   0.203787816300746
```

Problema 2

Consideremos el problema de frontera

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = g(x), \quad x \in [2,4] \;\; y(2) = 0, \;\; y(4) = 0$$

donde $g(x)$ es una función que se determina experimentalmente. De la función $g(x)$ se conocen los puntos

$$(2, -0.775), (2.4, -0.661), (2.8, -0.5687), (3.2, -0.4945), (3.6, -0.4341), (4, -0.3844).$$

a) Aproxima $g(x)$ por un polinomio de interpolación cúbico mediante el comando de Matlab polyfit.

b) Aproxima la solución del problema de contorno por el método de elementos finitos con funciones base lineales y $h = 0.1$. Proporciona el valor estimado de $y(x)$ para $x = 3$.

Solución problema 2

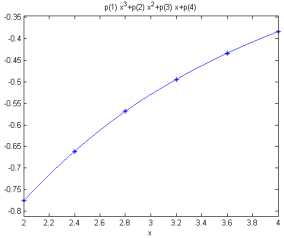
a) Introducimos la información de la forma adecuada:

```
>> x=[2,2.4,2.8,3.2,3.6,4];
>> y=[-0.775,-0.661,-0.5687,-0.4945,-0.4341,-0.3844];
>> p=polyfit(x,y,3)
p =
   0.009823495370369  -0.138534226190464   0.751455026454988  -1.80235079365075
```

obteniendo los coeficientes, de mayor a menor grado, del polinomio interpolador que se ajusta a los datos proporcionados, minimizando el error cuadrático.

Así, definimos

```
>> g = @(x) p(1).*x.^3+p(2).*x.^2+p(3).*x+p(4)
>> ezplot(g,[2,4])
>> hold on
>> plot(x,y,'*')
```



- **b)** Para aplicar elementos finitos es necesario que el problema de frontera esté definido en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, basta aplicar el cambio de variable $x = 2 + 2t$ al problema, que queda en la forma:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}(2+2t)\frac{dy}{dt}\right) + 4y = g(2+2t), \quad t \in [0,1] \;\; y(0)=0, \;\; y(1)=0,$$

ya que $t = \frac{x-2}{2}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}$. Llamando a la rutina de elementos finitos con funciones base lineales:

```
>> c=Rayleigh_lineal(@(x) 1/2*(1+x),@(x) 4+0*x,@(x) g(2+2*x),0:0.1:1)
c =
  -0.031069162067483
  -0.049001398012613
  -0.057955895503492
  -0.060539874523425
  -0.058392435557565
  -0.052528034469455
  -0.043544493625239
  -0.031751932648247
  -0.017254068540172
```

El valor estimado de $y(x)$ para $x = 3$ lo obtenemos en $t = 0.5$, y se corresponde con $c(5) = -0.058392435557565$.

a) Demuestra que el problema de frontera

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x), \quad x\in[0,1], \quad y(0)=\alpha, \; y(1)=\beta,$$

puede transfromarse con el cambio de variable $z=y-\beta x-(1-x)\alpha$ en

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)+q(x)z=F(x), \quad x\in[0,1], \quad z(0)=0, \; z(1)=0,$$

b) Aplicando el apartado anterior y la técnica de elementos finitos con funciones base lineales y $h=1$, aproxima la solución del problema de frontera

$$-y''+y=x, \quad x\in[0,1], \quad y(0)=1, \; y(1)=1+1/e,$$

c) Sabiendo que la solución exacta es $y(x)=e^{-x}+x$, calcula el error absoluto en los nodos estudiados.

Solución problema 3

a) A partir del cambio de variable tenemos:

$$y = z + \beta x + (1-x)\alpha, \quad y' = z' + \beta - \alpha.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-\frac{d}{dx}\big(p(x)(z' + \beta - \alpha)\big) + q(x)(z + \beta x + (1-x)\alpha) = f(x),$$

o equivalentemente,

$$-\frac{d}{dx}\big(p(x)z'\big) + q(x)z = f(x) + \frac{d}{dx}\left(p(x)(\beta - \alpha)\right) - q(x)(\beta x + (1-x)\alpha) = F(x).$$

Además, es fácil ver que

$$z(0) = y(0) - \alpha = 0, \quad z(1) = y(1) - \beta = 0.$$

b) Aplicando el cambio de variable del apartado anterior, $z = y - \beta x - (1-x)\alpha$, transformamos el problema de frontera

$$-y'' + y = x, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1, \; y(1) = 1 + 1/e,$$

donde $p(x) = 1$ y $q(x) = 1$, en

$$-z''+z = x+\frac{d}{dx}(1/e)-((1+1/e)x+(1-x)) = (1-1/e)x-1, \; x \in [0,1], \; z(0) = 0, \; z(1$$

Aplicando el algoritmo implementado en Matlab:

```
>> c=Rayleigh_lineal(@(x) 1+0*x,@(x) 1+0*x,@(x) (1-1/exp(1)).*x-1,0:0.1:1)
c =
  -0.031975194131691
  -0.054887155375380
  -0.069598561698947
  -0.076889948616980
  -0.077467527576566
  -0.071970259861603
  -0.060976256872772
  -0.045008570892815
  -0.024540434341464
```

Solución problema 3

Deshaciendo el cambio de variable:

```
>> t=0.1:.1:.9;y=c+(1+1/exp(1))*t'+1-t'
y =
   1.004812749985453
   1.018688732858908
   1.040765270652486
   1.070261827851597
   1.106472193009155
   1.148757404841262
   1.196539351947238
   1.249294982044338
   1.306551062712834
```

Dado que la solución exacta es $y(x) = e^{-x} + x$, el error absoluto en los nodos es:

```
>> solex = exp(-t')+t'; abs(y-solex)
ans =
   1.0e-04 *
   0.246680505062713
   0.420202190736241
   0.529500292323348
   0.582181840425022
   0.584667034784214
   0.542312527644917
   0.459518441715545
   0.339820728831874
   0.185970277648551
```

Problema 4

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$y'' + y = \cos(2x), \quad x \in [0, 4/3] \quad y(0) = 0, \; y(4/3) = \pi/2$$

a) Utiliza los cambios de variable adecuados para transformar el problema de frontera en uno equivalente donde el dominio sea $[0, 1]$ y las condiciones de contorno sean nulas.

b) Mediante la técnica de elementos finitos lineales, aproxima la solución de este problema en los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, donde $h = \frac{1}{10}$. Proporciona la solución del problema original.

c) Mejora los resultados obtenidos mendiante la extrapolación de Richardson. Utiliza para ello tres aproximaciones distintas de Rayleigh-Ritz, R_{10}, R_{20} y R_{40} (con 10, 20 y 40 subintervalos respectivamente) y el proceso de refinamiento:

$$\begin{array}{lll} R_{10} & & \\ R_{20} & \rightarrow S_{20} = \frac{4R_{20} - R_{10}}{3} & \\ R_{40} & \rightarrow S_{40} = \frac{4R_{40} - R_{20}}{3} & \rightarrow \dfrac{16S_{40} - S_{20}}{15} \end{array}$$

d) Teniendo en cuenta que la solución exacta del problema es $1/3(\cos(x) - \cos(2x)) + 1/6(3\pi - 2\cos(4/3) + 2\cos(8/3))\csc(4/3)\sin(x)$, calcula el error exacto cometido en cada nodo común de las aproximaciones del apartado anterior.

a) El cambio de variable $t = \frac{3}{4}x$ transforma el intervalo $[0, 4/3]$ en $[0, 1]$.

$$\frac{9}{16}\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos\left(\frac{8}{3}t\right), \quad t \in [0,1] \quad y(0) = 0, \; y(1) = \pi/2.$$

Posteriormente, el cambio $z = y - \frac{\pi}{2}t$ transforma el problema en:

$$\frac{9}{16}\frac{d^2z}{dt^2} + z = \cos\left(\frac{8}{3}t\right) - \frac{\pi}{2}t, \quad t \in [0,1] \quad z(0) = 0, \; z(1) = 0.$$

b)

```
>> t = 0:0.1:1;
>> c = Rayleigh_lineal(@(x) -9/16+0*x,@(x) 1+0*x,@(x) cos(8/3*x)-pi/2*x,t);
>> y = c + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';
>> [c,y]
ans =
   0.015283726262660   0.172363358942149
   0.044509934308708   0.358669199667687
   0.082551926107056   0.553790824145525
   0.123054131083904   0.751372661801863
   0.158749550486170   0.944147713883618
   0.181854703875254   1.124332499952192
   0.184516263804687   1.284073692561115
   0.159279641831649   1.415916703267566
   0.099547935683010   1.513264629798417
```

c) Utilizamos ahora el proceso de refinamiento (extrapolación de Richardson):

$$
\begin{array}{llll}
R_{10} & & & \\
R_{20} & \to S_{20} = \frac{4R_{20}-R_{10}}{3} & & \\
R_{40} & \to S_{40} = \frac{4R_{40}-R_{20}}{3} & \to & \dfrac{16S_{40}-S_{20}}{15}
\end{array}
$$

```
>> t10=0:.1:1;
>> R10 = Rayleigh_lineal(@(x) -9/16+0*x,@(x) 1+0*x,@(x) cos(8/3*x)-pi/2*x,t10);
>> t20=0:.05:1;
>> R20 = Rayleigh_lineal(@(x) -9/16+0*x,@(x) 1+0*x,@(x) cos(8/3*x)-pi/2*x,t20);
>> t40=0:.025:1;
>> R40 = Rayleigh_lineal(@(x) -9/16+0*x,@(x) 1+0*x,@(x) cos(8/3*x)-pi/2*x,t40);
>> S20=(4*R20(2:2:end)-R10)/3;
>> S40=(4*R40(4:4:end)-R20(2:2:end))/3;
>> sol_Rich=(16*S40-S20)/15
sol_Rich =
   0.015320725097161
   0.044603791808771
   0.082713925321534
   0.123284967428001
   0.159037976925631
   0.182176970417358
   0.184836437414408
   0.159550833427816
   0.099714398201167
```

d) Conociendo la solución exacta, calculamos la tabla de errores:

```
>> x=0+4/30:4/30:4/3-4/30;
>> solex=1/3*(cos(x)-cos(2*x))+1/6*(3*pi-2*cos(4/3)+2*cos(8/3))*csc(4/3)*sin(x)

>> yR10 = R10 + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';               eR10 = abs(yR10-solex');
>> yR20 = R20(2:2:end) + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';      eR20 = abs(yR20-solex');
>> yR40 = R40(4:4:end) + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';      eR40 = abs(yR40-solex');

>> yS20 = S20 + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';               eS20 = abs(yS20-solex');
>> yS40 = S40 + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';               eS40 = abs(yS40-solex');

>> y = sol_Rich + pi/2*[1/10:1/10:9/10]';             e_Rich = abs(y-solex');

>> vpa([eR10,eR20,eR40,eS20,eS40,e_Rich],3)

[  3.7e-5, 9.23e-6, 2.31e-6, 2.76e-8, 1.72e-9,  6.7e-12]
[ 9.39e-5, 2.34e-5, 5.86e-6, 2.04e-8, 1.26e-9, 1.42e-11]
[ 1.62e-4, 4.05e-5, 1.01e-5, 1.44e-8, 9.2e-10, 2.19e-11]
[ 2.31e-4, 5.78e-5, 1.44e-5, 6.62e-8, 4.16e-9, 2.87e-11]
[ 2.88e-4, 7.22e-5, 1.81e-5, 1.22e-7, 7.67e-9, 3.36e-11]
[ 3.22e-4, 8.07e-5, 2.02e-5, 1.69e-7, 1.06e-8, 3.56e-11]
[  3.2e-4, 8.02e-5, 2.01e-5, 1.92e-7,  1.2e-8, 3.39e-11]
[ 2.71e-4, 6.79e-5,  1.7e-5, 1.78e-7, 1.11e-8, 2.76e-11]
[ 1.66e-4, 4.17e-5, 1.04e-5, 1.16e-7, 7.29e-9, 1.63e-11]
```

Problema 5

Representamos por u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$, tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el potencial de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación de Laplace,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \;\; R_1 \leq r \leq R_2$$

Supongamos que $R_1 = 2\ mm$, $R_2 = 4\ mm$ y $V_1 = 110$ voltios.

a) Utiliza los cambios de variable adecuados para transformar el problema de frontera en uno equivalente donde el dominio sea $[0, 1]$ y las condiciones de contorno sean nulas.

b) Mediante la técnica de elementos finitos lineales, aproxima la solución de este problema con 20 subintervalos. Proporciona la solución del problema original en los nodos correspondientes.

c) Comprueba que la solución exacta del problema es $u(r) = \dfrac{V_1 R_1}{r}\left(\dfrac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$. Determina el error exacto cometido en la aproximación del apartado b).

Problema 6

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} ru'' + u' = -4r, & r \in [1,3] \\ u(1) = \ln(1/3) - 1, & u(3) = \frac{1}{2}\ln 3 - 9 \end{array}$$

a) Utiliza los cambios de variable adecuados para transformar el problema de frontera en uno equivalente donde el dominio sea $[0,1]$ y las condiciones de contorno sean nulas.

b) Mediante la técnica de elementos finitos lineales, aproxima la solución de este problema con 10 y 20 subintervalos. Proporciona la soluciones del problema original en los nodos correspondientes.

c) Teniendo en cuenta que la solución exacta es $u(r) = \ln\dfrac{r}{3} + \dfrac{1}{2}\ln r - r^2$, determina el error cometido en las aproximaciones del apartado anterior.

Problema 7

Aproxima la solución de los siguientes problemas de valor de frontera, utilizando el método de elementos finitos lineales. Toma en todos los casos 10 subintervalos y compara los resultados obtenidos con la solución exacta del problema

a) $y'' = 2y' - y + xe^x - x$, $0 \leq x \leq 2$
$y(0) = 0$, $y(2) = -4$
Solución exacta: $y(x) = \dfrac{1}{6}x^3e^x - \dfrac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$

b) $y'' = 4(y - x)$, $0 \leq x \leq 1$
$y(0) = 0$, $y(1) = 2$
Solución exacta: $y(x) = \dfrac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$

Problema 8

Aproxima la solución del siguiente problemas de frontera, utilizando el método de elementos finitos lineales.

$$y'' + 4y = \cos x,\ \ 0 \leq x \leq \pi/4 \ \ y(0) = y(\pi/4) = 0.$$

Emplea una partición de 10 subintervalos y compara los resultados obtenidos con la solución exacta del problema:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6}\mathsf{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos x,$$

calculando el error exacto en cada nodo y el máximo error cometido. Repite el problema con 20 y 40 subintervalos. Aplica la técnica de extrapolación de Richardson para refinar las aproximaciones obtenidas y comprueba que las nuevas aproximaciones están mas cerca de la solución exacta.