Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 5: El modelo estocástico log-normal para la dinámica de activos financieros cotizados

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Solución, media y varianza del modelo log-normal

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Hoy calcularemos la solución, media y varianza del modelo log-normal.
Además notaremos que las expresiones son similares a las del movimiento Browniano geométrico descrito en la clase anterior.
Para poder establecer los resultados, necesitamos del siguiente Lema.

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Lema: Lema de Itô (versión general)(1)

Sea $f(t,x)$ una función de clase $C^{1,2}$ y $X(t)$ un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A^{(1)}(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} A^{(2)}(t, X(s))dW(s).$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Lema: Lema de Itô (versión general)(2)

Entonces

$$f(t,X(t)) - f(s,X(s)) = \int_s^t \left\{ f_1(y,X(y)) + A^{(1)}(y,X(y)) f_2(y,X(y)) \right\} dy +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_s^t \left\{ \left[A^{(2)}(y,X(y)) \right]^2 f_{22}(y,X(y)) \right\} dy +$$
$$+ \int_s^t A^{(2)}(y,X(y)) f_2(y,X(y)) dW(s),$$

con $f_1 = f_t(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}$, $f_2 = f_x(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_{22} = f_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Lema: Lema de Itô (versión integral)

Sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica tipo Itô con condición inicial determinista x_0:

$$\begin{cases} dX(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \\ X(0) &= x_0, \end{cases}$$

Sea $F(t, x)$ una función $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas. Entonces para $t > 0$, se cumple

$$F(t, X(t)) - F(0, x_0) = \int_0^t \left(F_1 + fF_2 + \frac{1}{2} g^2 F_{22} \right) ds + \int_0^t gF_2 dB(s),$$

con $F_1 = F_t(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}$, $F_2 = F_x(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $F_{22} = F_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Descripción del modelo estocástico log-normal para describir la dinámica de subyacentes de activos financieros

Recordemos que el modelo log-normal puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(t) & = & s_0, \end{array} \right.$$

donde $S(t)$ representa el valor de la inversión en el instante de tiempo t cuando se invierte una cantidad inicial s_0, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ la intensidad de la perturbación, $W(t) \sim N(0, t)$ es un PE de Wiener.

Solución, media y varianza del modelo log-normal (Lemma de Itô version general)

Notamos que podemos considerar

$$A^{(1)}(t, S(t)) = \mu S(t),\ A^{(2)}(t, S(t)) = \sigma S(t) \text{ y } S(0) = s_0.$$

Además,

$$f(t, s) = \ln(s),\ f_1(t, s) = 0,\ f_2(t, s) = \frac{1}{s} \text{ y } f_{22}(t, s) = -\frac{1}{s^2}.$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal (Lemma de Itô version general)

Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \ln(S(t)) - \ln(S(0)) &= \int_0^t \left\{0 + \mu S(y)\left(\frac{1}{S(y)}\right)\right\} dy + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \left\{[\sigma S(y)]^2 \left(-\frac{1}{S(y)^2}\right)\right\} dy + \\
&+ \int_0^t \sigma S(y)\left(\frac{1}{S(y)}\right) dW(s) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma\left(W(t) - W(0)\right).
\end{aligned}
$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal (Lemma de Itô version integral)

Como $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, $S(0) = s_0$, sea $F(t,x) = \ln x$, $f(t,S(t)) = \mu S(t)$ y $g(t,S(t)) = \sigma S(t)$, tenemos

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial t} = 0,\ F_2 = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x},\ F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

De donde

$$\ln S(t) - \ln s_0 = \int_0^t \left(0 + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t dW(s),$$

es decir

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma\left(W(t) - W(0)\right).$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Como $W(0) = 0$, se tiene

$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)},\ t \geq 0.$$

Proposición

Sea $S(t)$ un PE de modelo log-normal con $s_0 = S(0)$, entonces

$$E\left(S(t)\right) = \mu_S(t) = s_0 e^{\mu t} \text{ y } V\left(S(t)\right) = \sigma_S^2(t) = s_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal

Demostración(1).

Antes de continuar, recordemos que para $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, entonces

$$E\left(e^{\alpha X}\right) = e^{\frac{\alpha(2\mu_X + \alpha\sigma_X^2)}{2}}.$$

Como $W(t) \sim N(0, t)$, es decir, $\mu_W(t) = 0$ y $\sigma_W^2(t) = t$, se tiene que

$$\begin{aligned} E\left(S(t)\right) &= E\left(s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}\right) \\ &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} E\left(e^{\sigma W(t)}\right) \\ &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} e^{\frac{1}{2}\sigma\left(2\mu_W(t) + \sigma\sigma_W^2(t)\right)} \\ &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= s_0 e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Solución, media y varianza del modelo log-normal

También

Demostración(2).

$$
\begin{aligned}
E\left(S(t)^2\right) &= E\left(s_0^2 e^{2\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+2\sigma W(t)}\right) \\
&= s_0^2 e^{\left(2\mu-\sigma^2\right)t} E\left(e^{2\sigma W(t)}\right) \\
&= s_0^2 e^{\left(2\mu-\sigma^2\right)t} e^{\sigma\left(2\mu_W(t)+2\sigma\sigma_W^2(t)\right)} \\
&= s_0^2 e^{\left(2\mu-\sigma^2\right)t} e^{2\sigma^2 t} \\
&= s_0^2 e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)t}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
V\left(S(t)\right) = E\left(S(t)^2\right) - \left(E\left(S(t)\right)\right)^2 = s_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right). \qquad \square
$$

Ejercicio

Sean $t_1, t_2 \geq 0$, y $X(t)$ un PE. Como la covarianza viene definida mediante

$$\text{Cov}\left(X(t_1), X(t_2)\right) = E\left(X(t_1)X(t_2)\right) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2).$$

Calcular la covarianza para la solución del modelo log-normal.

Ejercicio
Solución

Como $W(t) \sim N(0, t)$ y

$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)},\ t \geq 0.$$

Entonces

$$S(t_1)S(t_2) = s_0^2 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1+t_2) + \sigma(W(t_1)+W(t_2))}.$$

Luego, sea $t_m = \min\{t_1, t_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} W(t_1) + W(t_2) &= 2W(t_m) + W(t_1) - W(t_m) + W(t_2) - W(t_m), \\ &= 2W(t_m) + W(t_1 - t_m) + W(t_2 - t_m), \\ &= 2X_1 + X_2, \end{aligned}$$

Donde

$$X_1 = W(t_m) \sim N(0, t_m),$$
$$X_2 = W(t_1 - t_m) + W(t_2 - t_m) \sim N(0, |t_1 - t_2|).$$

Por lo tanto, dado que para

- $t_m = t_1$, $X_1 = W(t_1)$ y $X_2 = W(t_2 - t_1)$.
- $t_m = t_2$, $X_1 = W(t_2)$ y $X_2 = W(t_1 - t_2)$.

Tenemos que X_1 y X_2 son independientes.

Ejercicio
Solución

Luego

$$\begin{aligned}
E\left(e^{\sigma(W(t_1)+W(t_2))}\right) &= E\left(e^{2\sigma X_1}\right) E\left(e^{\sigma X_2}\right) \\
&= e^{\sigma\left(2\mu_{X_1}+2\sigma\sigma^2_{X_1}\right)} e^{\frac{1}{2}\sigma\left(2\mu_{X_2}+\sigma\sigma^2_{X_2}\right)} \\
&= e^{2\sigma^2 t_m} e^{\frac{1}{2}\sigma^2|t_1-t_2|} \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(4t_m+|t_1-t_2|)}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$E\left(S(t_1)S(t_2)\right) = s_0^2 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1+t_2)+\frac{1}{2}\sigma^2(4t_m+|t_1-t_2|)}.$$

Ejercicio
Solución

Utilizando la siguiente propiedad

Propiedad

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}, \ \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Dem. Como $\min\{a,b\} = \min\{b,a\}$, basta con suponer $a \leq b$, entonces

$$a = \min\{a,b\} = \frac{a+b-(-(a-b))}{2} = \frac{a+b+(a-b)}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Ejercicio
Solución

Luego $|t_1 - t_2| = t_1 + t_2 - 2t_m$, de donde $4t_m + |t_1 - t_2| = 2t_m + t_1 + t_2$, por lo tanto se tiene

$$E\left(S(t_1)S(t_2)\right) = s_0^2 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1+t_2) + \frac{1}{2}\sigma^2(2t_m + t_1 + t_2)} = s_0^2 e^{\mu(t_1+t_2)+\sigma^2 t_m}.$$

Además, como

$$\mu_S(t_1) = s_0 e^{\mu t_1} \text{ y } \mu_S(t_2) = s_0 e^{\mu t_2}.$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(S(t_1), S(t_2)\right) &= s_0^2 e^{\mu(t_1+t_2)+\sigma^2 t_m} - \left(s_0 e^{\mu t_1}\right)\left(s_0 e^{\mu t_2}\right) \\
&= s_0^2 e^{\mu(t_1+t_2)}\left(e^{\sigma^2 t_m} - 1\right) \\
&= s_0^2 e^{\mu(t_1+t_2)}\left(e^{\sigma^2 \min\{t_1,t_2\}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Referencias bibliográficas

- Calatayud Gregori, J., Cortés López, J. C., Jornet Sanz, M., and Villanueva Micó, R. J. (2019). An introduction to random variables, random vectors and stochastic processes. Colección Académica.
- Casas Morente, B. (2019). El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables. Aplicación a la modelización del subyacente cotizado Ferrovial. Universitat Politècnica de València. http://hdl.handle.net/10251/167159
- Miñana Sellés, G. (2018). Modelización de activos cotizados mediante modelos de difusión estocásticos de tipo Itô. http://hdl.handle.net/10251/101513