Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 6: Métodos de estimación de parámetros y de predicción para el modelo Log-Normal

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

Introducción y objetivos

La estimación de parámetros es una rama muy importante de la estadística que utiliza técnicas de investigación operativa. Existen diferentes maneras de poder estimar estos parámetros. Las técnicas de evaluación-error permiten ir comprobando cómo se parecen los resultados obtenidos a los datos reales tomando diferentes parámetros. Estas técnicas se llaman heurísticas o metaheurísticas.

Introducción y objetivos

También existen métodos analíticos para estimar el valor de los parámetros. Se estudiaran tres métodos analíticos para estimar el valor de los parámetros: el método de los momentos, el método de máxima verosimilitud y el método no paramétrico.

Método de momentos estadísticos

El método de los momentos estadísticos. La estimación de los parámetros se lleva a cabo imponiendo que los momentos poblacionales (del modelo teórico) coinciden con los momentos muestrales (de los datos). Esta condición se impone sobre tantos momentos como parámetros se desee estimar.
En primer lugar consideramos $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$ que representa los datos del elemento financiero que queremos describir mediante el modelo Log-Normal. Estos datos corresponden a unos tiempos determinados que denotamos mediante $t_i = t_0 + i\Delta t$ para $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ con $\Delta t > 0$.

Método de momentos estadísticos

Recordemos que la solución del modelo Log-Normal viene dado por

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

Aplicando $\ln$, tenemos

$$\ln S(t) = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t).$$

Como $W(t) \sim N(0, t)$, tenemos

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t, \sigma^2 t\right).$$

Método de momentos estadísticos

Luego para $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, tenemos

$$
\begin{aligned}
U_i = \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\left(W(t_{i+1} - t_i)\right) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma W(\Delta t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los dos primeros momentos (media y varianza) de los logaritmos son

$$
E(U_i) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\ V(U_i) = \sigma^2 \Delta t.
$$

Método de momentos estadísticos

Luego calculamos la media y la varianza de nuestros datos, denotándolos mediante $\overline{U}$ y $\hat{S}^2$, tenemos

$$\overline{U} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\ \hat{S}^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

de donde se tiene

$$\sigma_{MME} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{\Delta t}},\ \mu_{MME} = \frac{\overline{U} + \frac{1}{2}\hat{S}^2}{\Delta t}.$$

Nota

Observad que hemos aplicado el método de momentos para la media y la varianza porque necesitamos estimar dos parámetros.

Ejemplo método de momentos estadísticos datos Tema4 $\Delta t = 1$

```
#Dt=1
import numpy as np

S=np.array([29.56,30.125,28.56,27.50,28.125,27.44,
27.06,27.125,28.69,27.94,27.25])

U=np.log(S[1:]/S[:-1])

sigmaMME=np.std(U,ddof=1) #ddof=1, 1/(N-ddof)*np.sum((U-np.mean(U))**2)
muMME=np.mean(U)+sigmaMME**2/2
```

```
# Mostrar estimaciones
print(f'muMME={muMME:0.3f} y sigmaMME={sigmaMME:0.3f}')

muMME=-0.008 y sigmaMME=0.033
```

Método de máxima verosimilitud

El método de máxima verosimilitud consiste en maximizar una función que se denomina función de verosimilitud.
Partiendo del modelo Log-Normal se construirá una función que contenga los parámetros μ y σ que se pretenden estimar. Utilizando técnicas de optimización (analíticas o numéricas) buscaremos el máximo de esta función.

$$\text{mín}\{-\ln l(x_0, x_1, \ldots, x_N; \theta)\},$$

donde $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ es la muestra y θ los parámetros a estimar.

Método de máxima verosimilitud

En general, sean $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$ los datos de un parámetro financiero que queremos describir mediante el modelo Log-Normal para los tiempos $t_i = t_0 + i\Delta t$ con $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Se puede demostrar (ver Teorema 5.2.5 de Soong (1973)) que la solución de una ecuación de Itô de la forma es un proceso de Markov de primer orden. Esto permite, utilizando el Teorema de la Probabilidad Total, reescribir la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra en términos de la función de verosimilitud del siguiente modo:

$$\begin{aligned} p(S_0, S_1, \ldots, S_N; \theta) &= p(S_0; \theta) p(S_1 | S_0; \theta) p(S_2 | S_0, S_1; \theta) \cdots p(S_N | S_0, S_1, \ldots, S_{N-1}; \theta \\ &= p(S_0; \theta) \prod_{i=1}^{N} p(S_i | S_{i-1}; \theta). \end{aligned}$$

Método de máxima verosimilitud

Dado que que en nuestro modelo de subyacente s_0 es determinista, por tanto:

$$p(S_0; \theta) = 1.$$

Obtenemos

$$l(S_0, S_1, \ldots, S_N; \theta) = \prod_{i=1}^{N} p(S_i | S_{i-1}; \theta).$$

Luego, consideramos la solución $S(t)$ del modelo Log-Normal, aplicando el esquema numérico de Euler Maruyama tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{i+1} & = & S^i + \mu S_i \Delta t + \sigma S_i W\left(\Delta t\right), \\ S_0 & = & s_0, \end{array} \right.$$

Método de máxima verosimilitud

Dado que $W(t_{i+1}) - W(t_i) = W(t_{i+1} - t_i) \sim N(0, \Delta t)$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y por lo tanto se deduce que

$$S_{i+1}|S_i \sim N\left((1 + \mu\Delta t) S_i, \sigma^2 (S_i)^2 \Delta t\right),$$

es decir

$$f(S_{i+1}|S_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(S_{i+1}-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}},$$

donde

$$\mu_i = (1 + \mu\Delta t) S_i,\ \sigma_i = \sigma S_i \sqrt{\Delta t}.$$

Método de máxima verosimilitud

Luego

$$
\begin{aligned}
l(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) &= \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1}|S_i; \mu, \sigma) \\
&= \prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(S_{i+1}-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \sigma_i \right)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(S_{i+1}-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}
\end{aligned}
$$

Método de máxima verosimilitud

De donde

$$
\begin{aligned}
L(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) &= -\ln l(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) \\
&= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \sum_{i=0}^{N-1} \ln \sigma_i + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(S_{i+1} - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}
\end{aligned}
$$

Luego para encontrar

$$
\min_{u \in \mathbb{R}, \sigma > 0} L(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma)
$$

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\nabla L(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) &= (0, 0), \\
L_\mu(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) &= 0, \\
L_\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_N; \mu, \sigma) &= 0.
\end{aligned}
$$

Método de máxima verosimilitud

Como

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \mu} = S_i \Delta t, \; \frac{\partial \mu_i}{\partial \sigma} = 0, \; \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mu} = 0, \; \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma} = S_i \sqrt{\Delta t}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} L_\mu &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left(\frac{S_{i+1} - \mu_i}{\sigma_i^2} \right) \left(-\frac{\partial \mu_i}{\partial \mu} \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu \Delta t) S_i}{\sigma^2 (S_i)^2 \Delta t} \right) (-S_i \Delta t) \right) \\ &= - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu \Delta t) S_i}{\sigma^2 S_i} \right) \end{aligned}$$

Método de máxima verosimilitud

De donde

$$L_\mu = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \mu\Delta t\right) = 0,$$

es decir

$$\mu_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1\right).$$

Ahora, como

$$L_\sigma = \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma}}{\sigma_i}\right) - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{(S_{i+1}-\mu_i)^2\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma}\right)}{\sigma_i^3}$$

Método de máxima verosimilitud

De donde

$$0 = L_\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_i \sqrt{\Delta t}}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\left(S_{i+1} - (1 + \mu \Delta t)\, S_i\right)^2 \left(S_i \sqrt{\Delta t}\right)}{\sigma^3 \left(S_i\right)^3 \Delta t \sqrt{\Delta t}},$$

es decir

$$0 = \frac{N}{\sigma} - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \mu \Delta t\right)^2}{\sigma^3 \Delta t}.$$

Por lo tanto

$$\sigma_{MMV} = \sqrt{\frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \mu_{MMV} \Delta t \right)^2}.$$

Método de máxima verosimilitud

$$L_{\mu,\mu} = \frac{N\Delta t}{\sigma^2},$$

$$L_{\mu,\sigma} = L_{\sigma,\mu} = 2\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \mu\Delta t\right).$$

$$L_{\sigma,\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\left(-N + \frac{3}{\sigma^2\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \mu\Delta t\right)^2\right)$$

Sustituyendo $\mu = \mu_{MMV}$ y $\sigma = \sigma_{MMV}$, tenemos

$$Hess_L(\mu_{MMV}, \sigma_{MMV}) = \frac{N}{\sigma_{MMV}^2}\begin{pmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, es semidefinida positiva y por tanto el punto es mínimo.

Método de máxima verosimilitud

Nota

Una matriz A es semidefinida positiva si, para cualquier vector$x$, se cumple que $x^T Ax \geq 0$, o equivalentemente si todos sus valores propios son no negativos, es decir, $\lambda_i \geq 0$ para todo λ_i siendo un valor propio de A.
Para el caso anterior

$$\begin{aligned} x^T Hess_L(\mu_{MMV}, \sigma_{MMV})x &= \frac{N}{\sigma^2_{MMV}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{N}{\sigma^2_{MMV}} \left(\Delta t x_1^2 + 2x_2^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo Máxima Verosimilitud datos Tema4 $\Delta t = 1$

```python
#Dt=1
import numpy as np

S=np.array([29.56,30.125,28.56,27.50,28.125,27.44,
27.06,27.125,28.69,27.94,27.25])
R=S[1:]/S[0:-1]-1
muMMV=np.mean(R)
sigmaMMV=np.std(R,ddof=0)
```

```python
# Mostrar estimaciones
print(f'muMMV={muMMV:0.3f} y sigmaMMV={sigmaMMV:0.3f}')

muMMV=-0.008 y sigmaMMV=0.031
```

Referencias bibliográficas

- Allen, E. (2007). Modeling with Itô stochastic differential equations, volume 22. Springer Science & Business Media.
- Casas Morente, B. (2019). El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables. Aplicación a la modelización del subyacente cotizado Ferrovial. Universitat Politècnica de València. `http://hdl.handle.net/10251/167159`
- Miñana Sellés, G. (2018). Modelización de activos cotizados mediante modelos de difusión estocásticos de tipo Itô. `http://hdl.handle.net/10251/101513`
- Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York.

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET