Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

⇢ Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 5. Fundamentos de EDAs

unir LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

Universidad Internacional de La Rioja

Índice

Contenidos

- Introducción y objetivos.
- Cálculo en media cuadrática.
- **Resolución de una EDA con series de potencias.**
- Bibliografía.

Tema 5
Contenidos - Esquema

- FUNDAMENTOS DE ECUACIONEES DIFERENCIALES ALEATORIAS
  - ENFOQUE EN MEDIA CUADRÁTICA
    - Continuidad en media cuadrática
    - Diferenciabilidad en media cuadrática
    - Integrabilidad en media cuadrática
  - RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ALEATORIA
    - Método de Frobenius para obtener la solución de una ecuación diferencial aleatoria
    - Aproximación de la media
    - Aproximación de la varianza

Resolución de una EDA
Método de Frobenius

Encontrar X_n tal que Y(t)

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n t^n.$$

satisfaga el PVI:

$$\begin{cases} \ddot{Y} + AY(t) = 0, & t > 0, \\ Y(0) = Y_0, & \dot{Y}(0) = Y_1. \end{cases}$$

Calculamos estas derivadas para el PE, Y (t).

$$\ddot{Y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t^n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) X_n t^{n-2}.$$

Resolución de una EDA

Método de Frobenius

Trasladamos el índice n según convenga en las series involucradas en la ecuación diferencial para que todas empiecen desde n = 0 y tengan la misma potencia de t.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)X_n t^{n-2} + At\sum_{n=0}^{\infty} X_n t^n = 0$$

$$2X_2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)X_{n+3}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} AX_n t^{n+1} = 0.$$

Agrupar los sumatorios y sacar factor común las potencias de t

$$2X_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+3)(n+2)X_{n+3} + AX_n\right)t^{n+1} = 0.$$

Resolución de una EDA

Método de Frobenius

En nuestro caso $X_2 = 0$. Por otro lado, todos los factores involucrados en el sumatorio deben ser cero. Despejamos X_{n+3}, obteniendo que

$$X_{n+3} = -\frac{AX_n}{(n+3)(n+2)}, \qquad n \geq 0.$$

Hasta aquí hemos encontrado una recurrencia que deben satisfacer los coeficientes X_n. Para que Y (t) sea solución debe satisfacer además las condiciones iniciales:

$$Y(0) = X_0 = Y_0,$$

$$\dot{Y}(0) = X_1 = Y_1.$$

Buscamos una expresión general para la recurrencia:

$$X_{3n} = \frac{(-1)^n A^n (3n-2)!!! X_0}{(3n)!},$$

$$X_{3n+1} = \frac{(-1)^n A^n (3n-1)!!!}{(3n+1)!} X_1, \qquad k!!! = k(k-3)(k-6)\cdots 1$$

$$X_{3n+2} = 0,$$

Resolución de una EDA
Método de Frobenius

Sustituyendo estas recurrencias en Y (t) tenemos la solución

$$Y(t) = X_0 X_1(t) + X_1 X_2(t),$$

$$X_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n (3n-2)!!!}{(3n)!} t^{3n},$$

$$X_2(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n (3n-1)!!!}{(3n+1)!} t^{3n+1}.$$

Veamos que $X_1(t)$ y $X_2(t)$ convergen en L_4:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \left\| \frac{(-1^n) A^n (3n-2)!!!}{(3n)!} \right\|_4 |t^{3n}| < \infty,$$

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \left\| \frac{(-1^n) A^n (3n-1)!!!}{(3n+1)!} \right\|_4 |t^{3n+1}| < \infty.$$

Una serie de potencias converge en L_4 si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|X_n\|_4 |t|^n < \infty.$$

Proposición 14

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales,

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{Y}(t) + AtY(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty, \\ Y(0) = Y_0\,,\ \ \dot{Y}(0) = Y_1. \end{array}\right\} \quad \textbf{(P1)}$$

donde A es una VA de modo que existen $M, H > 0$ tales que $\mathbb{E}\left[|A|^n\right] \leq H\, M^n < +\infty,\ \ \forall n \geq n_0$. Entonces este problema admite una solución que viene dada por una serie de potencias aleatoria donde

$$Y(t) = Y_0 X_1(t) + Y_1 X_2(t)$$

$$X_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n (3n-2)!!!}{(3n)!} t^{3n},$$

$$X_2(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n (3n-1)!!!}{(3n+1)!} t^{3n+1}.$$

Resolución de una EDA

Método de Frobenius - Ejemplo

PVI:

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) - 2t\dot{X}(t) + AX(t) = 0, \\ X(0) = X_0, \dot{X}(0) = X_1 \end{cases}$$

donde A, X_0, X_1 son VAs.

1. Buscamos una solución en serie de potencias:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n t^n. \qquad (1)$$

2. Identificamos las derivadas involucradas en el PVI y derivamos la expresion anterior (1):

$$\dot{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X_{n+1} t^n,$$

$$\ddot{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) X_{n+1} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) X_{n+2} t^n.$$

Resolución de una EDA
Método de Frobenius - Ejemplo

3. Sustituimos las derivadas en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)X_{n+2}t^{n} - 2t\sum_{n=1}^{\infty}(n)X_{n}t^{n-1} + A\sum_{n=0}^{\infty}X_{n}t^{n} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)X_{n+2}t^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n)X_{n}t^{n} + A\sum_{n=0}^{\infty}X_{n}t^{n} = 0.$$

4. Trasladamos el índice n según convenga en las series involucradas en la ecuación diferencial para que todas empiecen desde n = 1 y tengan la misma potencia de t:

$$2X_2t^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)X_{n+2}t^{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(n)X_{n}t^{n}+AX_0t^0+A\sum_{n=1}^{\infty}X_{n}t^{n} = 0,$$

5. Agrupar los sumatorios y sacar factor común las potencias de t:

$$2X_2 + AX_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)X_{n+2} - 2nX_n + AX_n]t^{n} = 0.$$

Resolución de una EDA

Método de Frobenius - Ejemplo

5. Agrupar los sumatorios y sacar factor común las potencias de t:

$$2X_2 + AX_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)X_{n+2} - 2nX_n + AX_n]t^n = 0.$$

6. Todos los factores involucrados en el sumatorio deben ser cero. Para que esta igualdad sea 0, se debe verificar que:

$$\begin{cases} 2X_2 + AX_0 = 0, \\ (n+2)(n+1)X_{n+2} - 2nX_n + AX_n = 0. \end{cases}$$

7. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X_2 = -\frac{A}{2}X_0, \\ X_{n+2} = \frac{(2n-A)}{(n+2)(n+1)}X_n, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Resolución de una EDA
Método de Frobenius - Ejemplo

8. Buscamos una expresión general para la recurrencia:

$$X_{2k+2} = \frac{(-A)(4-A)(8-A)\cdot\ldots\cdot(4k-A)}{(2k+2)!}X_0, \qquad k \geq 0,$$

$$X_{2k+3} = \frac{(2-A)(6-A)(10-A)\cdot\ldots\cdot(4k+2-A)}{(2k+3)!}X_1, \qquad k \geq 0.$$

9. Sustituyendo estas recurrencias en X(t) tenemos la solución:

$$X(t) = X_0 X_1(t) + X_1 X_2(t),$$

donde

$$X_1(t) = \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!} \prod_{j=0}^{k} (4j - A)\right),$$

$$X_2(t) = \left(t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!} \prod_{j=0}^{k} (4j + 2 - A)\right).$$

Resolución de una EDA

Método de Frobenius - Ejemplo

Para comprobar que $X_1(t)$ y $X_2(t)$ convergen en MC, se debe suponer que:

- A, X_0 y X_1 son VAs independientes
- Existe un natural n_0, $H>=0$ y $M>=0$ de modo que $E[|A|^n]<=HM^n$

https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.008

Resolución de una EDA

Cálculo de la media y la varianza – Ejemplo

Recordamos

Proposición 1

Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Y_m\}_{m=0}^{\infty}$ dos sucesiones de 2-VAs tales que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{MC}} X$ e $Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{MC}} Y$, entonces

$$\mathbb{E}[X_n Y_m] \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \mathbb{E}[XY].$$

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X],$$

$$\mathbb{V}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{V}[X],$$

$$\Gamma_{X_n,X_n}(t,s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma_{X,X}(t,s)$$

$$\mathbb{C}ov[X_n, Y_m] \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \mathbb{C}ov[X,Y].$$

Resolución de una EDA

Cálculo de la media y la varianza – Ejemplo

Definimos la siguiente sucesión $X_N(t)$ que sabemos que converge en MC a X(t).

$$X_N(t) = X_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{N} \frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!} \prod_{j=0}^{k} (4j - A)\right) + X_1 \left(t + \sum_{k=0}^{N} \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!} \prod_{j=0}^{k} (4j + 2 - A)\right).$$

Según la Proposición 1, la media y la varianza de $X_N(t)$ convergen a la media y varianza de X(t) respectivamente.

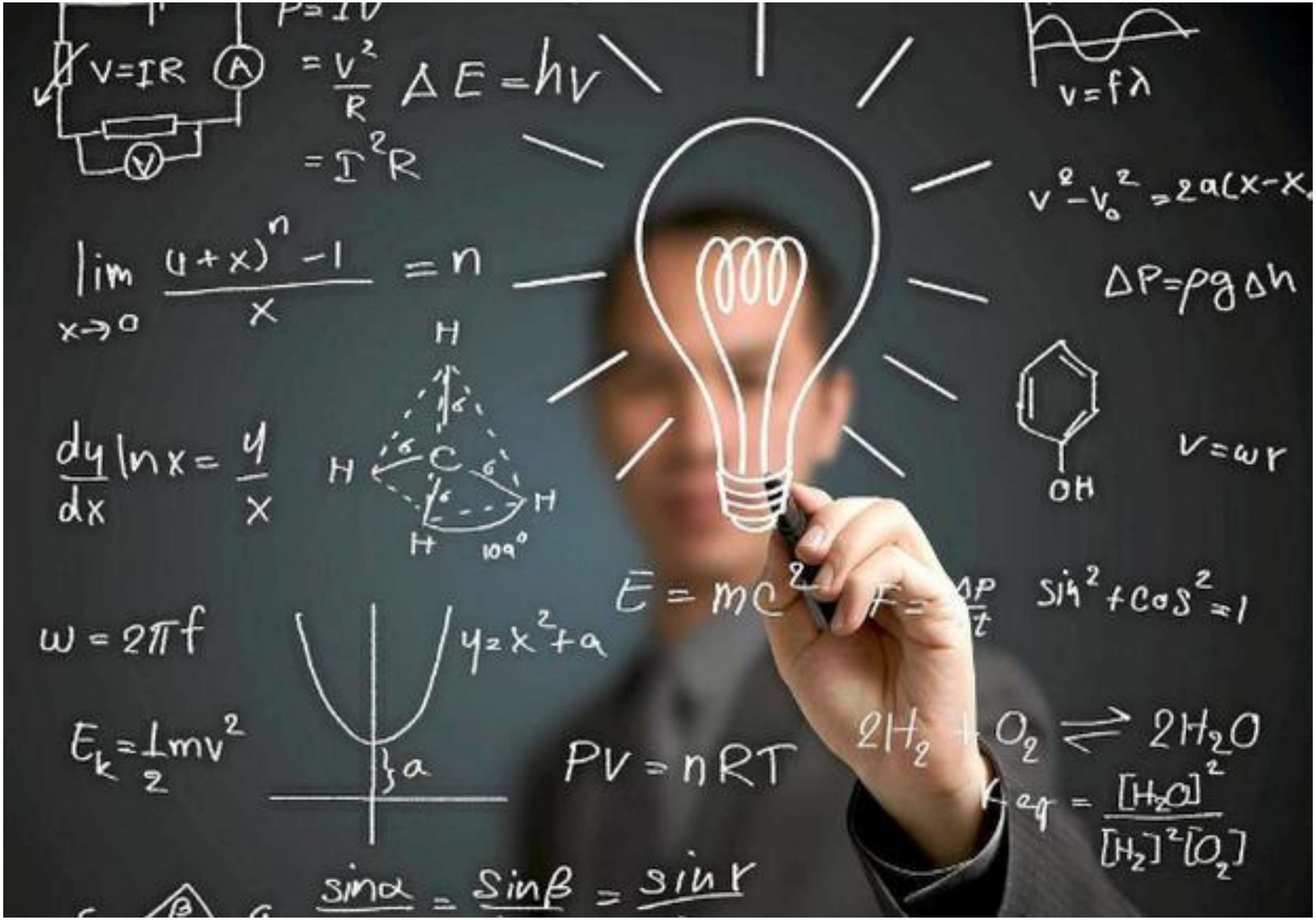
Bibliografía

Devroye, L. (2006). Nonuniform random variate generation. *Handbooks in operations research and management science*, 13:83–121.

Kroese, D. P., Taimre, T., and Botev, Z. I. (2013). *Handbook of monte carlo methods*, volume 706. John Wiley & Sons.

Ross, S. M. (1990). *A course in simulation*. Number 04; QA273, R6.

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net