Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 6. Cálculo de la densidad de una EDA.

Índice

Contenidos

Tema 6

Contenidos - Esquema

- OBTENCIÓN DE LA PRIMERA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ALEATORIA
  - MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN DE VECTORES ALEATORIOS
    - Teorema de Transformación de vectores aleatorios
    - Pasos a seguir para obtener la primera función de densidad de probabilidad de la solución de una ecuación aleatoria utilizando el método de transformación de vectores aleatorios
    - Ejemplos numéricos
  - MÉTODO DE LIOUVILLE-GIBBS
    - Teorema de Liouville-Gibbs
    - Pasos a seguir para obtener la primera función de densidad de probabilidad de la solución de una ecuación aleatoria utilizando el método Liouville-Gibbs
    - Ejemplos numéricos

Objetivos

RESUMEN TEMA 5:

- Hemos calculado la solución de una EDA utilizando el método de Frobenius.
- Hemos obtenido aproximaciones para la media, para el momento de segundo orden y para la varianza.

OBJETIVOS TEMA 6:

- Obtención de la 1-FDP de un problema de valores iniciales aleatorio (PVIA) mediante el método de transformación de vectores aleatorios.
- Obtención de la 1-FDP de un PVIA mediante el teorema de Liouville-Gibbs.

1-FDP de una EDA

Método de transformación de vectores aleatorios

Teorema 1: Teorema de transformación de vectores aleatorios

Sean $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ y $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ dos vectores aleatorios absolutamente continuos de dimensión n definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supongamos conocida la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $\mathbf{U}$, denotada mediante $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$. Consideramos $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación determinista que transforma el vector $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$, es decir, $(v_1, \ldots, v_n) = (r_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, r_n(u_1, \ldots, u_n))$. Se asume que $\mathbf{r}$ es continua en $\mathbf{U}$ y sus derivadas parciales respecto de cada u_i, $1 \leq i \leq n$, son continuas. Denotamos mediante

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1} = (s_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, s_n(v_1, \ldots, v_n)),$$

la inversa de $\mathbf{r}$. Entonces la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $\mathbf{V}$, denotada mediante $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})$, viene dada por

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{U}}\left(\mathbf{s}(\mathbf{v})\right) \left|\mathcal{J}\right|,$$

1-FDP de una EDA
Método de transformación de vectores aleatorios

donde $|\mathcal{J}|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana de **s** definido por

$$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{v}}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial s_n(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_1(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_n} & \cdots & \frac{\partial s_n(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_n} \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Este teorema permite obtener la función de densidad conjunta de un vector aleatorio, **V**, que viene definido a través de una transformación continua, **r**, de un vector aleatorio, **U**, cuya función de densidad de probabilidad conjunta es conocida, $\mathbf{f_U}$, es decir **V = r(U)**.

1-FDP de una EDA

Método de transformación de vectores aleatorios

Comprobación Hipótesis:

- la transformación **r** y sus derivadas parciales tiene que ser continuas.

- el valor absoluto del determinante del Jacobiano de $\mathbf{r}^{-1}$ no debe ser nulo.

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

Consideramos la siguiente ecuación diferencial aleatoria de tipo Riccati,

$$\begin{aligned} X'(t) &= -aX(t)^2, \qquad a > 0, \quad t \geq 0, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde X_0 es una variable aleatoria continua con FDP $f_{X_0}(x_0)$. Es fácil ver que la solución PE de este PVIA viene dada por

$$X(t) = \frac{X_0}{1 + aX_0 t}. \tag{2}$$

Nuestro propósito es determinar la 1-FDP de $X(t)$ para cada $t > 0$ fijo.

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

En primer lugar debemos determinar el vector **U**. Recordemos que **U** debe de tener una FDP conocida, por tanto es razonable definir $\mathbf{U} = X_0$.

Definimos simultáneamente el vector **V** y la aplicación **r**. Como **U** tiene dimensión 1, $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y **V** tendrá dimensión 1.

La solución $X(t)$ descrita por la ecuación (2) se puede ver como una transformación de $\mathbf{U} = X_0$. Por tanto, se puede considerar que

$$\mathbf{V} = \mathbf{r}(\mathbf{U}) = \mathbf{r}(X_0) = \frac{X_0}{1 + aX_0 t}. \tag{3}$$

La transformación **r** es continua y con derivada continua

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

Comprobación Hipótesis:

La transformación **r** es continua y con derivada continua

La transformación inversa,

$$\mathbf{U} = \mathbf{s}(\mathbf{V}) = \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}) = \frac{\mathbf{V}}{1 - a\mathbf{V}t}, \tag{4}$$

tiene como jacobiano

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} = \frac{1}{(1 - a\mathbf{V}t)^2} \neq 0. \tag{5}$$

1-FDP de una EDA
EJEMPLO 1: Método de transformación de vectores aleatorios

la 1-FPD del vector aleatorio $\mathbb{V}$,

$$f_{\mathbf{V}}(x) = f_{\mathbf{U}}\left(\frac{x}{1-axt}\right)\frac{1}{(1-axt)^2}. \tag{6}$$

Como **V** $= X(t)$, entonces la 1-FDP de $X(t)$ viene dada por

$$f_{X(t)}(x) = f_{X_0}\left(\frac{x}{1-axt}\right)\frac{1}{(1-axt)^2}. \tag{7}$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Método de transformación de vectores aleatorios

Consideramos el movimiento de un oscilador linear descrito mediante el siguiente PVIA con condiciones iniciales aleatorias

$$\begin{aligned} X''(t) + \omega X(t) &= 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \\ X(0) &= X_0, \\ X'(0) &= X_0', \end{aligned} \tag{8}$$

donde X_0 y X_0' son variables aleatorias con FDP conjunta $f_{X_0,X_0'}(x_0, x_0')$. Se sabe que la solución viene dada por

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(X_0 \sqrt{\omega} \cos(t\sqrt{\omega}) + X_0' \sin(t\sqrt{\omega}) \right). \tag{9}$$

Nuestro propósito es calcular la 1-FDP de $X(t)$ para cada $t > 0$ fijo. Para ello utilizaremos el MTV.

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Método de transformación de vectores aleatorios

Ahora debemos definir el vector **V** y la aplicación **r**. Se van a determinar conjuntamente. Obsérvese que para poder aplicar el MTV, tanto **V** como **r** deben ser de dimensión 2, i.e. **V** $= (V_1, V_2)$ y **r** $= (r_1, r_2)$.

Por un lado, V_1 va a venir definida a través de una transformación r_1 del vector **U**. Obsérvese que $X(t)$ se puede ver como una transformación del vector **U** $= (X_0, X_0')$, por tanto si queremos calcular la 1-FDP de $X(t)$ parece lógico considerar $V_1 = r_1(U_1, U_2) = r_1(X_0, X_0') = \dfrac{1}{\sqrt{\omega}}\left(X_0\sqrt{\omega}\cos(t\sqrt{\omega}) + X_0'\sin(t\sqrt{\omega})\right)$.

Por otro lado, $V_2 = r_2(\mathbf{U})$. Dado que $X(t)$ ya está involucrada en la definición V_1, lo más sencillo es considerar

$$V_2 = r_2(U_1, U_2) = r_2(X_0, X_0') = X_0'.$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Método de transformación de vectores aleatorios

La inversa de r, s = r^{-1},

$$s(\mathbf{V}) = (s_1(V_1, V_2), s_2(V_1, V_2)) = \left(\frac{1}{\cos\left(t\sqrt{\omega}\right)} \left(V_1 - V_2 \frac{\sin(t\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega}} \right), V_2 \right),$$

y su determinante jacobiano

$$|\mathcal{J}| = \left| \det\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{v}} \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(v_1,v_2)}{\partial v_1} & \frac{\partial s_1(v_1,v_2)}{\partial v_2} \\ \frac{\partial s_2(v_1,v_2)}{\partial v_2} & \frac{\partial s_2(v_1,v_2)}{\partial v_2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\cos(t\sqrt{\omega})} \right|.$$

La FDP del vector **V** aplicando el MTV vendrá dado por

$$f_{V_1,V_2}(v_1, v_2) = f_{X_0,X_0'}\left(\left(\frac{1}{\cos\left(t\sqrt{\omega}\right)} \left(v_1 - v_2 \frac{\sin(t\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega}} \right), v_2 \right) \right) \left| \frac{1}{\cos(t\sqrt{\omega})} \right|.$$

1-FDP de una EDA

EJEMPLO 2: Método de transformación de vectores aleatorios

$$f_{V_1}(v_1) = \int_{\mathcal{D}(V_2)} f_{X_0,X_0'}\left(\left(\frac{1}{\cos\left(t\sqrt{\omega}\right)}\left(v_1 - v_2\frac{\sin(t\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega}}\right), v_2\right)\right)\left|\frac{1}{\cos(t\sqrt{\omega})}\right| \mathrm{d}v_2. \quad (11)$$

O lo que es lo mismo

$$f_{X(t)}(x) = \int_{\mathcal{D}(X_0')} f_{X_0,X_0'}\left(\left(\frac{1}{\cos\left(t\sqrt{\omega}\right)}\left(x - x_0'\frac{\sin(t\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega}}\right), x_0'\right)\right)\left|\frac{1}{\cos(t\sqrt{\omega})}\right| \mathrm{d}x_0'.$$

El truco está en definir como la primera coordenada de **V** $= r_1(\mathbf{U})$,$V_1 = r_1(\mathbf{U})$, como la solución del PVIA para un t fijo, ya que esta se puede entender como una transformación del vector **U**. Las demás transformaciones de r, son las VAs restantes que sean más díficil de despejar.

1-FDP de una EDA

Pasos MTV

Consideremos el siguiente **PVIA**: **$X'(t) = f(X(t), t)$; $X(0) = X_0$**, con solución X(t) conocida. Para calcular la **1-FDP de X(t)** para t > 0 fijo.

1. Identificar las variables aleatorias involucradas en el PVIA y conocer su FDP conjunta.

2. El vector aleatorio $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ vendrá definido por todas las variables aleatorias involucradas en el PVIA. Para una mayor facilidad, es importante asignar a U_1 una variable aleatoria que sea fácil de despejar en $X(t)$. Este truco nos facilitará cálculos posteriores cuando haya que calcular la inversa de **r**, $\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1}$.

3. $X(t)$ se puede ver como una transformación del vector **U**. La primera coordenada del vector **V**, V_1, vendrá definida a través de la aplicación r_1 como la solución PE, $X(t)$, es decir,

$$V_1 = r_1(\mathbf{U}) = X(t).$$

4. Las demás coordenadas del vector **V**, $V_2, \ldots, V_n$ vendrán definidas por las variables aleatorias involucradas en el PVIA, excepto la que corresponde a U_1. Por tanto, $V_i = r_i(\mathbf{U}) = U_i$, $i = 2, \ldots, n$.

5. Calculamos la transformación inversa de **r**, es decir $\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1}$, $\mathbf{U} = s(\mathbf{V})$. Notad que para $i = 2, \ldots, n$, $U_i = s_i(\mathbf{V}) = V_i$.

6. Calculamos el determinante jacobiano de la transformación **s**. Es fácil ver que para $i = 2, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$\frac{\partial s_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

por tanto,

$$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{V}}\right) = \left|\frac{\partial s_1(\mathbf{V})}{\partial V_1}\right|.$$

1-FDP de una EDA
Pasos MTV

7. Aplicamos el MTV para obtener la FDP del vector **V**,

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{s}(\mathbf{v}))|\mathcal{J}|$$

.

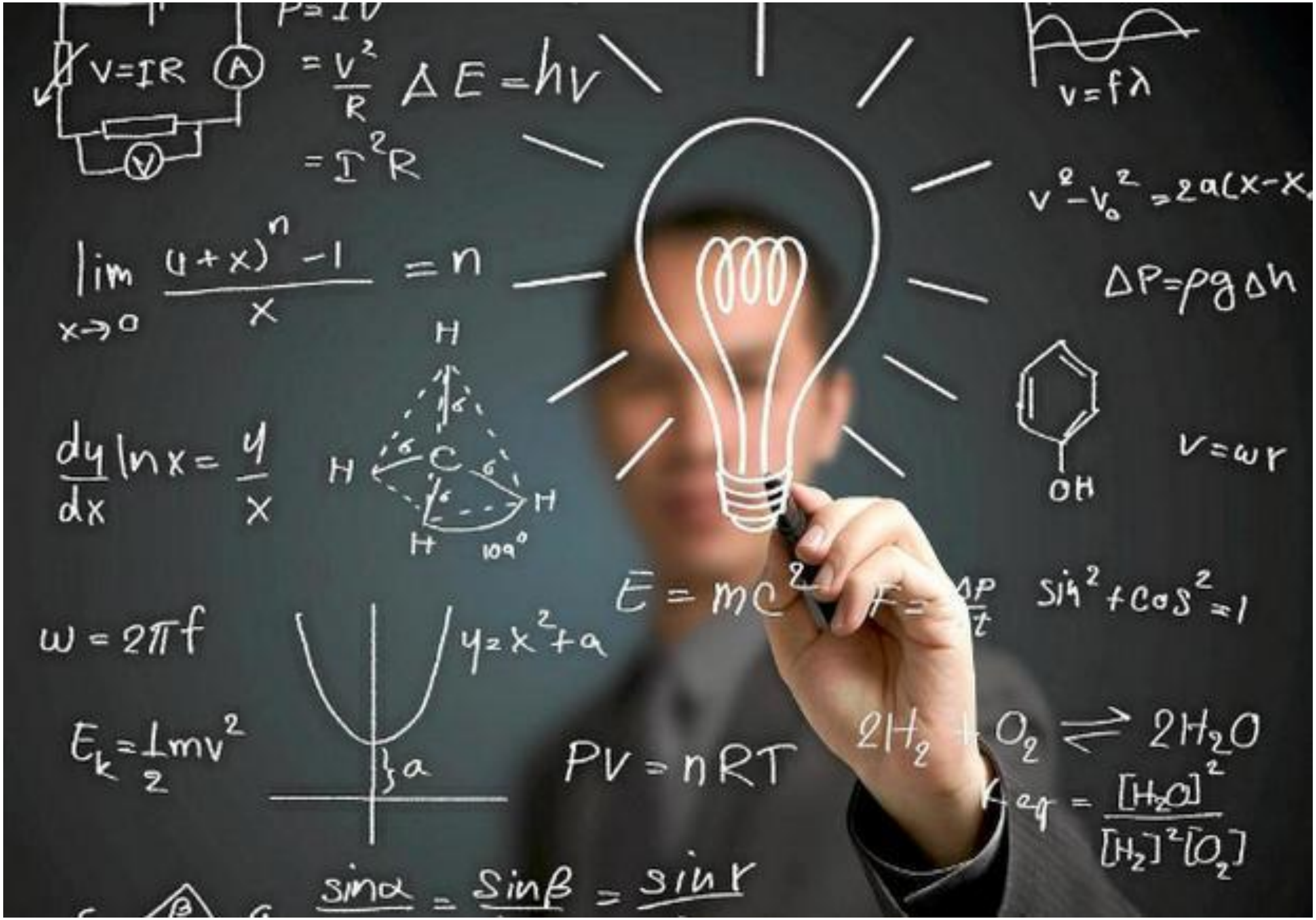
8. Nuestro propósito es calcular la FDP de $X(t) = V_1$, por tanto bastaría con marginalizar respecto del resto de las variables aleatorias involucradas en el PVI excepto U_1. De este modo

$$f_{X(t)}(x) = f_{V_1}(x) = \int_{\mathcal{D}(U_2,\ldots,U_n)} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{s}(\mathbf{v}))|\mathcal{J}|\mathrm{d}v_2 \ldots \mathrm{d}v_n$$

Bibliografía

Soong, T. T. (1973). Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York. Ecuaciones

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net