Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 5: El modelo estocástico log-normal para la dinámica de activos financieros cotizados

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Proceso estocástico
- Descripción del movimiento browniano
- Descripción del modelo estocástico log-normal para describir la dinámica de subyacentes de activos financieros

Introducción y objetivos

Este tema está dedicado a describir un modelo matemático que nos permite estudiar a lo largo del tiempo el valor de un activo financiero que cotiza en un ambiente de incertidumbre como la bolsa. El modelo que se presenta se denomina modelo log-normal.

Es importante destacar que describir y predecir el valor de un elemento financiero, como por ejemplo el de una acción o el de un índice bursátil como el IBEX-35, es un problema complejo. Hay ciertos aspectos que no se pueden determinar con exactitud, como la volatilidad o el rendimiento de una inversión.

Como consecuencia de ello, una vez se describa el modelo log-normal, mediante una ecuación diferencial, el siguiente paso será aleatorizarlo.

Introducción y objetivos

Existen diversas técnicas de aleatorizar una ecuación diferencial, nosotros nos centraremos en la técnica que consiste en perturbar el parámetro que se considera que fluctúa debido a factores aleatorios mediante un tipo de ruido. El objetivo es que este término modele toda la posible incertidumbre. Las ecuaciones diferenciales modeladas mediante este tipo de técnica se denominan ecuaciones diferenciales estocásticas.

Introducción y objetivos

Los objetivos que trataremos de alcanzar en este tema son los siguientes:

- Definición y propiedades más importantes de un proceso estocástico
- Definición de movimiento Browniano
- Modelo estocástico log-normal
- Cálculo de la solución, media y varianza

Proceso estocástico

Un proceso estocástico (PE) desempaña el mismo rol que una función clásica, pero en el contexto aleatorio, y por tanto la solución de una ecuación diferencial estocástica sería un PE.

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, P)$ un espacio de probabilidad. Un PE es una familia de variables aleatorias indexadas, que generalmente representa el tiempo t. Sea $T \subset \mathbb{R}$, se dice que $X \equiv X(t) \equiv \{X(t)(\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ es un PE si $X(t)$ es una variable aleatoria para cada $t \in T$.

Un PE puede ser interpretado como una función de dos variables $X(t)(\omega)$, siendo $t \in T$ el índice y $\omega \in \Omega$ el suceso. A lo largo de este capítulo se utilizará $X(t)$ para referirse al PE $X(t)(\omega)$ de una manera más simplificada.

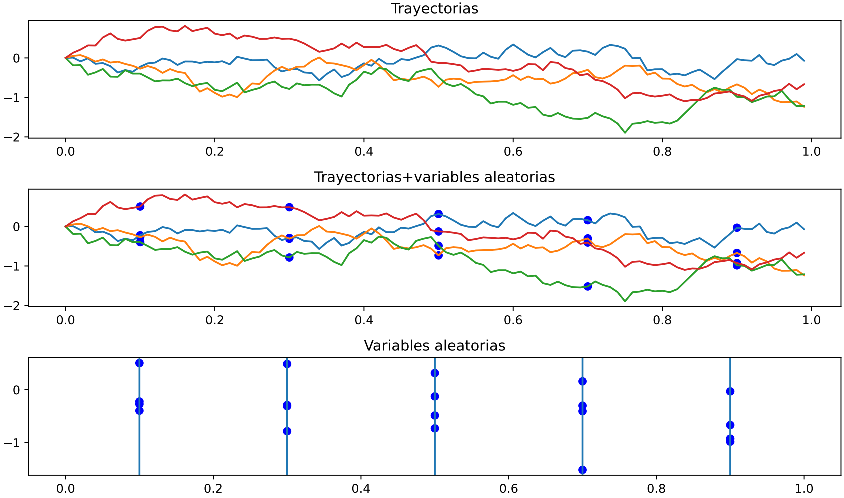
Proceso estocástico

Una vez se conoce el concepto de PE es importante remarcar la analogía entre el contexto determinista y el aleatorio. En un contexto aleatorio, una VA A es el elemento básico, al igual que en el ambiente determinista un número $a \in \mathbb{R}$.
Análogamente, en el contexto determinista, una función, por ejemplo $f(t) = at$, transforma un índice o variable t a un número real at.
El contexto aleatorio el PE $X(t) = At$, transforma un índice o variable t a una variable aleatoria At.

Nota

Sin embargo, como veremos a lo largo de este tema hay procesos estocásticos que no se definen mediante una expresión analítica, como el proceso de Wiener.

Proceso estocástico



Descripción del movimiento browniano

Continuando, cuando se añade incertidumbre a una ecuación diferencial estocástica mediante un ruido, la idea es que recoja la posible aleatoriedad presente en el fenómeno que se quiere modelar.

Nota

La dinámica de una acción depende de muchos factores aleatorios independientes, cada uno con comportamientos aleatorios distintos y por tanto con distribuciones de probabilidad diferentes.

El teorema central del límite, en una de sus variantes más generales, permite afirmar que el resultado de tales efectos aleatorios puede aproximarse por una distribución gaussiana, con lo cual se puede justificar la elección del proceso de Wiener.

Descripción del movimiento browniano

Definición: PE de Wiener

Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ un PE. Decimos que es un PE de Wiener o un movimiento Browniano si cumple las siguientes condiciones:

- Condición 1: Empieza en 0 con probabilidad 1.

$$P\left[\{\omega \in \Omega : W(0)(\omega) = 0\}\right] = P\left[\{W(0) = 0\}\right] = 1.$$

- Condición 2: Tiene incrementos estacionarios, es decir, para todo $h > 0$, se tiene que

$$W(s) - W(t) = W(s+h) - W(t+h), \forall s, t \in [0, +\infty[.$$

Descripción del movimiento browniano

Definición: PE de Wiener

- Condición 3: Tiene incrementos independientes, es decir, para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty$, las variables aleatorias

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son independientes.

- Condición 4: Tiene incrementos gausianos con media 0 y con varianza la diferencia de la ventana temporal del incremento, es decir que para todo $t, s \geq 0$ se tiene que

$$W(t) - W(s) \sim N(0, |t - s|).$$

Descripción del movimiento browniano

Desde las condiciones anteriormente, para un PE de Wiener, se tiene lo siguiente:

- $W(t) \sim N(0,t)$ para todo $t \geq 0$ desde la condición 1 y 4, ya que $W(0) = 0$, $|t| = t$ y

$$W(t) - W(0) = W(t) \sim N(0,t).$$

- Desde condición 2, sea $t \geq s \geq 0$

$$W(t-s) = W(t-s) - W(0) = W(t) - W(s) \sim N(0, t-s).$$

Nota

Finalmente la media y la varianza del PE de Wiener $W(t) \sim N(0,t)$ para $t \geq 0$, son

$$E(W(t)) = \mu_W(t) = 0 \text{ y } V(W(t)) = \sigma_W^2(t) = E(W(t)^2) = t.$$

Descripción del movimiento browniano

Proposición

Sea $W(t)$ un PE de Wiener, entonces

$$\mathrm{Cov}_W(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}, \ \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

Forma 1:

Demostración(1).

Dado que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_W(t_1, t_2) &= E\left[(W(t_1) - \mu_W(t_1))(W(t_2) - \mu_W(t_2))\right] \\ &= E\left[W(t_1)W(t_2)\right]\end{aligned}$$

Luego, considerando $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$, entonces

$$W(t_1)W(t_2) = (W(t_1) - W(0))(W(t_2) - W(t_1)) + W(t_1)^2.$$

Descripción del movimiento browniano

Demostración(1).

De condición 3 y 4, se tiene $W(t_1) - W(0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, son independientes con media 0, entonces

$$\begin{aligned} E\left(W(t_1)W(t_2)\right) &= E\left(W(t_1) - W(0)\right) E\left(W(t_2) - W(t_1)\right) + E\left(W(t_1)^2\right) \\ &= t_1. \end{aligned}$$

Caso análogo para $t_2 \leq t_1$, por lo tanto $\mathrm{Cov}_W\left(t_1, t_2\right) = \min\{t_1, t_2\}$, para todo $t_1, t_2 \geq 0$. $\square$

Descripción del movimiento browniano

Forma 2:

Demostración(2).

Sea $t_m = \min\{t_1, t_2\}$ y como $W(0) = 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
W(t_1)W(t_2) &= \left(W(t_m) + W(t_1) - W(t_m)\right)\left(W(t_m) + W(t_2) - W(t_m)\right) \\
&= \left(W(t_m) + W(t_1 - t_m)\right)\left(W(t_m) + W(t_2 - t_m)\right) \\
&= W(t_m)^2 + W(t_m)\left(W(t_2 - t_m) + W(t_1 - t_m)\right) + \\
&\quad + W(t_1 - t_m)W(t_2 - t_m).
\end{aligned}
$$

Descripción del movimiento browniano

Forma 2:

Nota

Antes de continuar, notemos que

$$t_1 - t_m \geq 0,\ t_2 - t_m \geq 0 \text{ y } t_1 - t_m = 0 \text{ o } t_2 - t_m = 0.$$

Por lo tanto $|t_1 - t_m| = t_1 - t_m$, $|t_2 - t_m| = t_2 - t_m$,

$$W(t_1 - t_m) \sim N(0, t_1 - t_m) \text{ y } W(t_2 - t_m) \sim N(0, t_2 - t_m).$$

Por otro lado

$$W(t_2 - t_m) + W(t_1 - t_m) \sim N(0, |t_1 - t_2|),$$

y

$$W(t_1 - t_m)W(t_2 - t_m) = W(0)W(|t_1 - t_2|) = 0.$$

Descripción del movimiento browniano

Forma 2:

Demostración(2).

De lo anterior, como $W(t_m) \sim N(0, t_m)$, por independencia, se tiene

$$\begin{aligned} E\left(W(t_1)W(t_2)\right) &= E\left(W(t_m)^2\right) + \\ &+ E\left(W(t_m)\right) E\left(W(t_2 - t_m) + W(t_1 - t_m)\right) \\ &= \sigma_W^2(t_m) \\ &= t_m. \end{aligned}$$

$\square$

Descripción del movimiento browniano

Dos maneras de poder muestrear el PE de Wiener

- Mediante una recurrencia. Supongamos que queremos muestrear $W(t)$ en el intervalo $[t_0, t_n]$ en los puntos $\{t_i : 0 \leq i \leq n\}$ ordenados, entonces

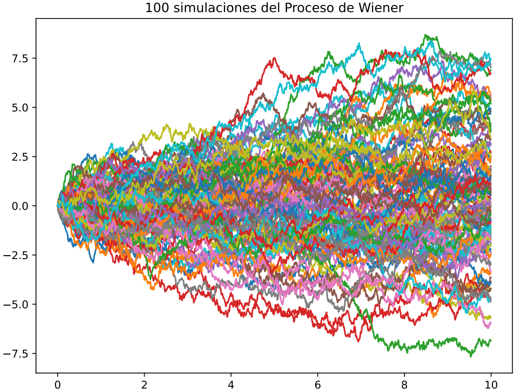
$$W(t_i) \sim W(t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z, \ \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

  donde $Z \sim N(0,1)$ y utilizando que para $a, b \in \mathbb{R}$, con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$.
- Utilizando la propiead $1/2$-autosemejante, para todo $T > 0$

$$W(T) = W(T \cdot 1) = \sqrt{T} W(1) \sim \sqrt{T} N(0,1).$$

Descripción del movimiento browniano

Mediante el método de una recurrencia, mostramos diferentes simulaciones del PE de Wiener $(W(t) \sim N(0, t))$. Notar que conforme el tiempo aumenta la varianza del proceso también aumenta.



Una variante del proceso de Wiener estandard o movimiento Browniano que se utiliza en el ámbito de las ecuaciones diferenciales estocásticas es el movimiento Browniano geométrico.

Definición

$$X(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)},\ t \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Propiedades.

$$\mu_X(t) = e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t},\ \forall t \geq 0.$$

$$\mathrm{Cov}_X(t_1, t_2) = e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1+t_2)} \left(e^{\sigma^2 \min\{t_1,t_2\}} - 1\right),\ \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

$$\sigma_X^2(t) = e^{\left(2\mu + \sigma^2\right)t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Para demostrar las propiedades necesitamos lo siguiente. Sea $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, como

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha x} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{\alpha x - \frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \forall x \in \mathbb{R}, \\
&= e^{\frac{\alpha\left(2\mu_X + \alpha\sigma_X^2\right)}{2}} f(x - \alpha\sigma_X^2).
\end{aligned}
$$

Considerando $s = x - \alpha\sigma_X^2 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
E(e^{\alpha X}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} f(x) dx = e^{\frac{\alpha\left(2\mu_X + \alpha\sigma_X^2\right)}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(s) ds \\
&= e^{\frac{\alpha\left(2\mu_X + \alpha\sigma_X^2\right)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Demostración.

Como $W(t) \sim N(0,t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E\left(e^{\mu t+\sigma W(t)}\right) = e^{\mu t} E\left(e^{\sigma W(t)}\right)\\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma\left(2\mu_W(t)+\sigma\sigma_W(t)^2\right)}{2}} = e^{\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}.\end{aligned}$$

Como

$$E\left(X(t_1)X(t_2)\right) = e^{\mu(t_1+t_2)} E\left(e^{\sigma(W(t_1)+W(t_2))}\right).$$

Luego, sea $t_m = \min\{t_1, t_2\}$, se tiene

$$\begin{aligned}W(t_1)+W(t_2) &= 2W(t_m)+W(t_1)-W(t_m)+W(t_2)-W(t_m),\\ &= 2W(t_m)+W(t_1-t_m)+W(t_2-t_m).\end{aligned}$$

Descripción del movimiento browniano

Movimiento Browniano geométrico

Demostración.

Al igual que antes, por independencia y como $t_m = (t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|)/2$, se tiene que

$$\begin{aligned} E\left(X(t_1)X(t_2)\right) &= e^{\mu(t_1+t_2)} E\left(e^{\sigma(2W(t_m)+W(t_1-t_m)+W(t_2-t_m))}\right) \\ &= e^{\mu(t_1+t_2)} E\left(e^{2\sigma W(t_m)}\right) E\left(e^{\sigma(W(t_1-t_m)+W(t_2-t_m))}\right) \\ &= e^{\mu(t_1+t_2)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(4t_m+|t_1-t_2|)} \\ &= e^{\mu(t_1+t_2)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(2t_m+t_1+t_2)} \\ &= \mu_X(t_1+t_2)e^{\sigma^2 t_m}. \end{aligned}$$

Demostración.

Como $\mu_X(t_1)\mu_X(t_2) = \mu_X(t_1 + t_2)$, la $\mathrm{Cov}_X(t_1, t_2)$ viene dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_X(t_1, t_2) &= \mu_X(t_1 + t_2)e^{\sigma^2 t_m} - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2),\\ &= \mu_X(t_1 + t_2)\left(e^{\sigma^2 t_m} - 1\right), \ \forall t_1, t_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Finalmente para la varianza, se considera $t = t_1 = t_2$ en la expresión anterior, es decir $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Cov}_X(t, t) = \mu_X(2t)\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$. $\square$

Descripción del modelo estocástico log-normal para describir la dinámica de subyacentes de activos financieros

Modelo determinista

Consideramos el siguiente problema determinista de valores iniciales determinista:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu S(t), \; \mu \in \mathbb{R}, \\ S(0) = s_0. \end{cases}$$

donde $S(t)$ representa el valor de la inversión en el instante de tiempo t cuando se invierte una cantidad inicial s_0 en el periodo $[0,t]$. El parámetro μ representa el rendimiento relativo de la inversión a un régimen de capitalización a un tipo de interés compuesto continuo y se considera determinista.

Nota

s_0 se considera determinsista al representar la inversión inicial y la solución viene dada por $S(t) = s_0 e^{\mu t}$.

Descripción del modelo estocástico log-normal para describir la dinámica de subyacentes de activos financieros

Modelo con incertidumbre

Dada la incertidumbre existente en el mercado financiero, parece lógico considerar que si queremos estudiar el valor de una acción, el parámetro μ no venga descrito por un valor nominal conocido, sino por un valor afectado por una perturbación aleatoria.
Dado el siguiente problema

$$\begin{cases} \dot{S}(t) & = & \left(\mu + \sigma \dot{W}(t)\right) S(t), \\ S(t) & = & s_0, \end{cases}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ la intensidad de la perturbación, $\dot{W}(t)$ la derivada (en sentido generalizado) del PE de Wiener (que sigue una distribución gaussiana).

Descripción del modelo estocástico log-normal para describir la dinámica de subyacentes de activos financieros

Modelo con incertidumbre

Finalmente el modelo puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(t) & = & s_0, \end{array} \right.$$

5.6 Referencias bibliográficas

- BCalatayud Gregori, J., Cortés López, J. C., Jornet Sanz, M., and Villanueva Micó, R. J. (2019). An introduction to random variables, random vectors and stochastic processes. Colección Académica.

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET