RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA UTILIZANDO EL LEMA DE ITÔ

ACTIVIDAD 3

Universidad Internacional de la Rioja (UNIR)

Cuatrimestre II

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Autor: Javier Blanco Álvarez

1. Planteamiento

Se tienen dos problemas de valor inicial estocásticos (PVIE) a los que se les aplicarán las técnicas descritas en los temas 8 y 9 de la asignatura. El propósito es resolver una ecuación diferencial estocásticas utilizando el lema de Itô en sus distintas versiones (general y particular) y en forma integral y diferencial.

2. Problema 1

Considerando el PVIE:

$$dX(t) = \frac{X(t)}{2}dt + X(t)dW(t),$$

$$X(0) = 1$$

Calcular la solución del problema estocástico (PE) mediante el lema de Itô, tomando la siguiente función $f(t, x) = e^x$

Datos:

Del problema propuesto podemos extraer algunos datos importantes:

$X(0) = 1$

$W(0) = 0$

$\mathrm{X} \in [0, \mathrm{t}]$

Forma Integral

La PVIE en cuestión tiene la siguiente forma integral[*]:

$$\int_0^{\mathrm{t}} dX(\tau) = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}_1(\tau, \mathrm{X}(\tau))\, \mathrm{d}\tau + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}_2(\tau, \mathrm{X}(\tau))\, \mathrm{dW}(\tau)$$

Siendo:

$\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}_1(\tau, \mathrm{X}(\tau))\, \mathrm{d}\tau$ una integral de tipo Riemann y

$\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}_2(\tau, \mathrm{X}(\tau))\, \mathrm{dW}(\tau)$ un integral de tipo Itô

[*] Para mantener una coherencia en la notación, utilizaremos la letra TAU para referirnos al tiempo t cuando apliquemos el lema de Itô.

Así pues, F_1 y F_2 son los coeficientes que acompañan a dt y dW(t) en el PVIE propuesto, por tanto, si:

$$\mathrm{F}_1 = \frac{1}{2}X(t) \text{ y } \mathrm{F}_2 = X(t)$$

Entonces:

$$\mathrm{X}(\tau) - \mathrm{X}(0) = \int_0^t \frac{1}{2}\mathrm{X}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathrm{X}(\mathrm{t})\, \mathrm{dW}(\tau)$$

Esta expresión se conoce como la expresión integral de la ecuación diferencial estocástica

Dado que $\int_0^t \mathrm{X}(\mathrm{t})\, \mathrm{dW}(\tau)$ se trata de una integral de tipo Itô hemos de aplicar el lema que lleva su nombre para resolverlo.

Solución

En esta ocasión aplicaremos la versión general del lema de Itô, conocido también **como el lema 0**.

Este lema establece:

$$\mathrm{f}(\tau, \mathrm{X}(\tau)) - \mathrm{f}(0, \mathrm{X}(0))$$
$$= \int_0^\tau \left\{\mathrm{f}_1(\tau, \mathrm{X}(\tau)) + \mathrm{F}_1(\tau, \mathrm{X}(\tau))\mathrm{f}_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{F}_2(\tau, \mathrm{X}(\tau)))^2 \mathrm{f}_{22}\right\} \mathrm{d}\tau$$
$$+ \int_0^\tau \mathrm{F}_2(\tau, \mathrm{X}(\tau))\mathrm{f}_2 \mathrm{dW}(\tau)$$

Los coeficientes F_1 y F_2 son conocidos, mientras que $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2$ y f_{22} serán determinadas a partir de la función $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$. Por tanto:

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} = 0$$

$$\mathrm{f}_2 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

Al reemplazar estos términos en la ecuación del lema de Itô se tiene:

$$e^{X(\tau)} - e^{X(0)} = \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{2} X(\tau) e^{x} + \frac{1}{2} (X(\tau))^2 e^{x} \right\} d\tau + \int_0^\tau X(\tau) e^{x} dW(\tau)$$

Ahora bien, si consideramos que esta expresión parece aun compleja de resolver y además observamos que la función $f(t, x)$ solo depende de x, entonces para una función $f(x) = e^{x}$, podemos aplicar **el lema 3 de Itô** que establece:

$$f(W(\tau)) - f(W(0)) = \int_0^\tau f'(W(x))\, dW(x) + \frac{1}{2} \int_0^\tau f''(W(x))\, dx$$

Sustituyendo tenemos:

$$e^{W(\tau)} - e^{w(0)} = \int_0^\tau e^{W(x)} dW(x) + \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{W(x)} dx$$

O lo que es lo mismo:

$$e^{W(\tau)} - e^{w(0)} = \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{W(x)} dx + \int_0^\tau e^{W(x)} dW(x)$$

Podemos observar un paralelismo entre la expresión anterior y esta otra:

$$X(\tau) - X(0) = \int_0^t \frac{1}{2} X(\tau)\, d\tau + \int_0^t X(t)\, dW(\tau)$$

Con lo cual la **solución del PE dado es**:

$$\mathbf{X(t) = e^{W(t)}}$$

Es fácil comprobar este paralelismo si consideramos la condición inicial $X(0) = 1$y $W(0) = 0$ entonces:

$$e^{w(0)} = e^{0} = 1$$

3. Problema 2

Para este problema hemos de considerar que $\{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener con W(0)=0 y que el proceso estocástico , con X(0)= a > 0 satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \frac{1}{X(t)} dt + X(t) dW(t)$$

Para:

$$f(t, x) = t^2 x^2$$

Se pide determinar la solución PE en su forma diferencial, es decir: *df(t,X(t))*.

Solución:

La forma diferencial del lema de Itô es:

$$df\big(\tau, X(\tau)\big) = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{F}_1 + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}\mathrm{F}_2^2\right)d\tau + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{F}_2 dW(\tau)$$

Procedemos a determinar las derivadas de la función f(t,x)

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} = 2\mathrm{tx}^2$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 2\mathrm{xt}^2$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} = 2\mathrm{t}^2$$

$$\mathrm{F}_1 = \frac{1}{X(\tau)}$$

$$\mathrm{F}_2 = X(\tau)$$

Aplicamos entonces el lema de Itô en su versión diferencial:

$$df\big(\tau, X(\tau)\big) = \left(2\mathrm{X}(\tau)\tau^2\frac{1}{X(\tau)} + 2\tau(\mathrm{X}(\tau))^2 + \frac{1}{2}2\tau^2(X(\tau))^2\right)d\tau + 2\mathrm{X}(\tau)\tau^2 X(\tau)dW(\tau)$$

Simplificando se tiene:

$$df\big(\tau, X(\tau)\big) = (2\tau^2 + 2\tau(X(\tau))^2 + \tau^2(X(\tau))^2)d\tau + 2(X(\tau))^2\tau^2 dW(\tau)$$

Finalmente, **la solución al PE** dado es:

$$df\big(t, X(t)\big) = (2t^2 + 2t(X(t))^2 + t^2(X(t))^2)dt + 2(X(t))^2 t^2 dW(t)$$