Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Aplicaciones

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Dra. Noèlia Viles Cuadros

Tema 8. Integral de Itô. Resolución de integrales estocásticas.

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

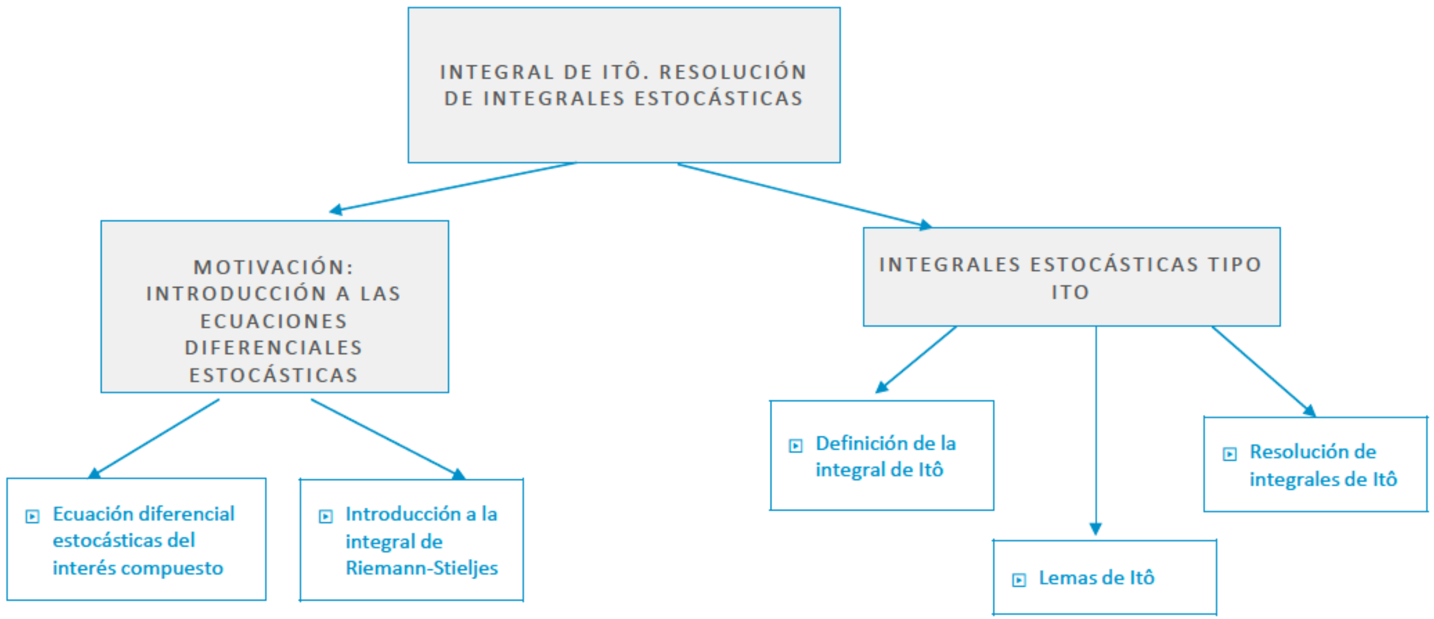
Universidad Internacional de La Rioja

Índice

Contenidos

- Concepto de ecuación diferencial estocástica.
- Definición de integral de Itô y Lema de Itô.
- Resolución de integrales estocásticas tipo Itô.
- Bibliografía.

Tema 8
Contenidos - Esquema



Objetivos

- Presentar las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs).
- Integral de Itô.
- Lema de Itô.
- Cálculo de integrales mediante el lema de Itô.
- Bibliografía.

Concepto de EDE
Modelo interés compuesto

Consideramos el siguiente PVI que describe el interés compuesto.

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu S(t), & (\mu \in \mathbb{R}) \\ S(0) = s_0. \end{cases} \qquad (1)$$

S(t): valor de la inversión en t cuando se invierte una cantidad inicial s_0 en [0,t]

μ : rendimiento relativo de la inversión a un régimen de capitalización a un tipo de interés compuesto continuo y determinista

s_0 : inversión inicial

Solución de (1): $S(t) = s_0 e^{\mu t}$

Concepto de EDE
Modelo interés compuesto

Si consideramos que μ está afectado por una perturbación aleatoria. Lo representamos por $\mu + \sigma \dot{W}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (\mu + \sigma \dot{W}(t))S(t), \\ \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} &= (\mu + \sigma \dot{W}(t))S(t), \\ \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\dot{W}(t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t). \end{aligned}$$

$\dot{W}(t)$: es la derivada del proceso de Wiener.

El PVI quedaría:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned}\right\} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0. \qquad (2)$$

Concepto de EDE
Modelo interés compuesto

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned}\right\} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0. \tag{2}$$

Esta ecuación es un caso particular de la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= A^{(1)}(t, X(t))\,\mathrm{d}t + A^{(2)}(t, X(t))\,\mathrm{d}W(t), \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

donde

$$A^{(1)}(t, X(t)) = \mu X(t),\ A^{(2)}(t, X(t)) = \sigma X(t)$$

Reescribimos en forma integral:

$$X(t) = X_0 + \underbrace{\int_0^t A^{(1)}(s, X(s))\,\mathrm{d}s}_{\text{Integral de Riemann–Stieljes}} + \underbrace{\int_0^t A^{(2)}(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s)}_{\text{Integral de tipo Itô}}.$$

Integral de Riemann – Stieltjes

Consideramos una partición equidistante en el intervalo [a,b]:
$p_n = \{a = p_0, p_1, \ldots, p_n = b\}$ siendo $\Delta_n = p_n - p_{n-1}$.

Definimos las siguientes sumas de Riemann-Stieltjes:

$$V_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} f(t'_j)(X(t_j) - X(t_{j-1})) \xrightarrow[MC]{n\to\infty, \Delta_n \to 0} V_1 = \int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t),$$

$$V_{2,n} = \sum_{j=1}^{n} X(t'_j)(f(t_j) - f(t_{j-1})), \xrightarrow[MC]{n\to\infty, \Delta_n \to 0} V_2 = \int_a^b X(t)\mathrm{d}f(t).$$

donde $t'_j \in [t_{j-1}, t_j]$

Integral de Riemann – Stieltjes

Proposición 1

Sea $\{X(t) \, : \, t \in [a,b]\}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$ de variación acotada. Entonces, la integral de Riemann-Stieltjes V_1 (análogamente V_2, asumiendo que f es de variación acotada) existe, si y solamente si, la siguiente integral doble determinista existe

$$\int_a^b \int_a^b f(t) f(s) \mathrm{dd}\Gamma_X(t,s)$$

(o análogamente $\int_a^b \int_a^b \Gamma_X(t,s) \mathrm{d}f(t) \mathrm{d}f(s)$).

Integral de Riemann – Stieltjes

Proposición 2

Sea $\{X(t) : t \in [a,b]\}$ un 2-PE con función de correlación $\Gamma_X(t,s)$ con variación acotada. Sea $f(t)$ una función determinista Riemann-Stieltjes integrable con variación acotada. Si una de las siguientes integrales existe

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t), \\ V_2 &= \int_a^b X(t)\mathrm{d}f(t), \end{aligned} \tag{8}$$

entonces

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}X(t) = f(t)X(t)\,\Big|_a^b - \int_a^b X(t)\mathrm{d}f(t), \tag{9}$$

es decir,

$$V_1 = (f(b)X(b) - f(a)X(a)) - V_2. \tag{10}$$

Integrales estocásticas

Notación	Tipo de integral	Datos
$\int_a^b f(t)\,X(t)\mathrm{d}s$	Riemann	$f(t)$ función determinista, $X(t)$ PE
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}X(t)$	Riemann–Stieltjes	$f(t)$ función determinista, $X(t)$ PE
$\int_a^b X(t)\,\mathrm{d}f(t)$	Riemann–Stieltjes	$f(t)$ función determinista, $X(t)$ PE

Integral de Itô
Requerimientos

- Una partición en el intervalo $[0,t]$: $p_n = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t\} = \{t_i\}_{i=0}^{n}$, $n \geq 1$.

- El conjunto de todas las particiones en el intervalo $[0,t]$: $\mathcal{P}([0,t]) = \{p_n\}_{n\geq 1}$.

- La norma de la partición p_n: malla$(p_n) =$ máx$_{1\leq j\leq n}(\Delta_j = t_j - t_{j-1})$.

- Los puntos intermedios, que hemos determinado en el Tema 5 para definir la integral de Riemann en MC, van a ser los extremos inferiores de cada una de las particiones: $t_{j-1} \in [t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq n$.

Integral de Itô
Motivación

Sean f, g funciones deterministas definidas en un intervalo $[a, t]$. Consideramos una partición, p_n, $0 = s_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = t$. Si f es una función diferenciable se tiene que

$$\int_0^t g(s)\mathrm{d}f(s) = \int_0^t g(s)\, f'(s)\mathrm{d}s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{malla}(p_n) \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i')f(t_i')(t_{i+1} - t_i),$$

Si f es una función con variación acotada

$$\int_a^t g(s)\mathrm{d}f(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i')(f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

La integral $\int_a^t g(s)\mathrm{d}f(s)$ no se puede definir en caso de que tanto $f(t)$ como $g(t)$ sean PEs de Wiener. El PE de Wiener no tiene ni trayectorias diferenciables ni es de variación acotada.

Integral de Itô
Nueva integral

$$\int_0^t X(s)\mathrm{d}W(s) = \underset{\substack{n \to \infty \\ \text{malla}(p_n) \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right).$$

Para probar la convergencia en MC de la serie necesitamos estudiar la convergencia del momento de segundo orden

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right)^2\right].$$

- $X(t_i)$ es independiente de $W(t_{i+1}) - W(t_i)$,
- $\int_0^t \mathbb{E}\left[(X(s))^2\right] \mathrm{d}s < \infty$,

utilizando las propiedades del PE de Wiener, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(s_i)\left(W(s_{i+1}) - W(s_i)\right)\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X(s_i))^2\right] \mathbb{E}\left[(W(s_{i+1}) - W(s_i))^2\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X(s_i))^2\right](s_{i+1} - s_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{malla}(p_n)\to 0} \int_0^t \mathbb{E}\left[(X(s))^2\right] \mathrm{d}s < \infty.$$

Como consecuencia, bajo las hipótesis asumidas anteriormente se puede comprobar que la integral estocástica de Itô,

$$\int_0^t X(s)\mathrm{d}W(s),$$

existe y es finita.

Integral de Itô
Integrabilidad

Sea $X(t)$ un PE, se dice que es Itô integrable en el intervalo $[0, s]$ si

- $X(s)$ es un PE adaptado para $s \in [0, t]$,
- $\int_0^t \mathbb{E}\left[(X(s))^2\right] \mathrm{d}s < \infty$.

Entonces, para cada $t > 0$ la integral de Itô se define como la VA

$$\int_0^t X(s)(\omega)\,\mathrm{d}W(s)(\omega) = \underset{\substack{n \to \infty \\ \text{malla}(p_n) \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(\omega)\left(W(t_{i+1})(\omega) - W(t_i)(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega.$$

Una VA X definida en una σ-álgebra $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbb{P})$, se dice que es $\mathcal{F}_s$-adaptado si se puede escribir como límite de una sucesión de funciones $W(\tau)$ para $\tau \leq s$, pero no como límite de una sucesión de funciones para algún $W(\tau)$ para $\tau \geq s$. Un PE, $X(t)$, se dice adaptado si para cada tiempo fijo t_0, la VA $X(t_0)$ es una VA $\mathcal{F}_s$-adaptada.

Proposición 3

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ PEs que satisfacen las condiciones necesarias dadas en la Definición 2 para ser integrables Itô. Denotamos

$$I(t) = \int_0^t X(s)\, \mathrm{d}W(s).$$

Entonces,

1. $I(t)$ es un PE adaptado.

2. La integral de Itô es lineal, es decir

$$\int_0^t (aX(s) + bY(s))\ \mathrm{d}W(s) = a\int_0^t X(s)\, \mathrm{d}W(s) + b\int_0^t Y(s)\, \mathrm{d}W(s).$$

3. $\mathbb{E}\left[I(t)\right] = 0.$

4. $\mathbb{V}\left[I(t)\right] = \mathbb{E}\left[(I(t))^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[(X(s))^2\right]\ \mathrm{d}s.$

Integral de Itô
Lema Itô (versión particular)

Lema 3: Lema de Itô (versión particular)

Sea $f(x)$ una función determinista con la primera y segunda derivada continuas.

Entonces, para $t_0 \leq s < t$ se tiene que,

$$f(W(t)) - f(W(s)) = \int_s^t f'(W(x))\,\mathrm{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W(x))\,\mathrm{d}x, \quad s < t.$$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$ y $X_t = W_t$, obtenemos

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t,$$

porque $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$.

Integral de Itô
Lema Itô (versión general)

Sea $f(t,x)$ una función de clase $C^{1,2}$ y $X(t)$ un PE de Itô teniendo la siguiente representación integral

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A^{(1)}(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} A^{(2)}(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(s, X(s)) = &\int_s^t \Big\{ f_1(y, X(y)) + A^{(1)}(y, X(y)) f_2(y, X(y)) \\ &+ \frac{1}{2}(A^{(2)}(y, X(y)))^2 f_{22}(y, X(y)) \Big\}\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_s^t A^{(2)}(y, X(y)) f_2(y, X(y))\,\mathrm{d}W(y). \end{aligned}$$

Cálculo de la integral de Itô
Ejemplo 1

Calcular la siguiente integral utilizando el Lema de Itô

$$X_1 = \int_0^t W(x)\mathrm{d}W(x).$$

Supongamos f(x) = x^2 . Es una función diferenciable dos veces.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 2x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}^2 x} = 2.$$

Aplicando Lema de Itô con s =0, tenemos que:

$$f(W(t)) - f(W(s)) = \int_s^t f'(W(x))\,\mathrm{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$(W(t))^2 - (W(0))^2 = \int_0^t f'(W(x))\,\mathrm{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_0^t, f''(W(x))\,\mathrm{d}x$$

$$(W(t))^2 - (W(0))^2 = \int_0^t 2W(x)\,\mathrm{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,\mathrm{d}x.$$

Cálculo de la integral de Itô

Ejemplo 1

Como $W(0)^2 = 0$, entonces

$$\int_0^t W(x)\,\mathsf{d}W(x) = \frac{1}{2}(W(t))^2 - \frac{1}{2}t.$$

Cálculo de la integral de Itô
Ejemplo 2

Calcular la siguiente integral utilizando el Lema de Itô.

$$X_1 = \int_0^t W(x)^2 \mathsf{d}W(x).$$

Supongamos f(x) = x^3 . Es una función diferenciable

$$\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x} = 3x^2, \qquad \frac{\mathsf{d}^2 f(x)}{\mathsf{d}^2 x} = 6x.$$

Aplicando Lema de Itô con s =0, tenemos que:

$$f(W(t)) - f(W(s)) = \int_s^t f'(W(x))\,\mathsf{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W(x))\,\mathsf{d}x$$

$$(W(t))^3 - (W(0))^3 = \int_0^t f'(W(x))\,\mathsf{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(x))\,\mathsf{d}x$$

$$(W(t))^3 - (W(0))^3 = \int_0^t 3W(x)^2\,\mathsf{d}W(x) + \frac{1}{2}\int_0^t 6W(x)\,\mathsf{d}x.$$

Cálculo de la integral de Itô

Ejemplo 2

$$\int_0^t 3W(x)^2 \, \mathsf{d}W(x) = (W(t))^3 - (W(0))^3 - \frac{1}{2}\int_0^t 6W(x) \, \mathsf{d}x$$

$$3\int_0^t W(x)^2 \, \mathsf{d}W(x) = (W(t))^3 - (W(0))^3 - \frac{1}{2}\int_0^t 6W(x) \, \mathsf{d}x$$

$$\int_0^t W(x)^2 \, \mathsf{d}W(x) = \frac{1}{3}(W(t))^3 - \frac{1}{3}(W(0))^3 - \frac{1}{6}\int_0^t 6W(x) \, \mathsf{d}x$$

Como $W(0)^3 = 0$, entonces

$$\int_0^t W(x)^2 \, \mathsf{d}W(x) = \frac{1}{3}(W(t))^3 - \int_0^t W(x)\mathsf{d}x$$

Cálculo de la integral de Itô
Ejemplo 3

Calcular la siguiente integral utilizando

$$\int_0^t s\mathrm{d}W(s).$$

Supongamos f(t,x) =tx . Tiene segundas derivadas continuas

$$\begin{aligned}
f_1(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) &= x, \\
f_2(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) &= t, \\
f_{2,2}(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) &= 0.
\end{aligned}$$

Cálculo de la integral de Itô
Ejemplo 3

Tomando $A^{(1)} = 0$, $A^{(2)} = 1$, $s = 0$ y $X(t) = W(t)$.

$$
\begin{aligned}
f(t, X(t)) - f(s, X(s)) = &\int_s^t \{f_1(y, X(y)) + (0) f_2(y, X(y)) \\
&+ \frac{1}{2}(1)^2 f_{22}(y, X(y))\Big\} \, \mathrm{d}y \\
&+ \int_s^t (1) f_2(y, X(y)) \, \mathrm{d}W(y)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
tW(t) - 0W(0) = &\int_0^t \{W(y) + (0)y \\
&+ \frac{1}{2}(1)^2 0\Big\} \, \mathrm{d}y \\
&+ \int_0^t (1) y \, \mathrm{d}W(y).
\end{aligned}
$$

Cálculo de la integral de Itô

Ejemplo 3

Simplificando

$$tW(t) = \int_0^t W(y)\,\mathrm{d}y \int_0^t y\,\mathrm{d}W(y).$$

Si despejamos la integral que queremos calcular, se tiene que

$$\int_0^t y\,\mathrm{d}W(y) = tW(t) - \int_0^t W(y)\,\mathrm{d}y.$$

De nuevo la integral original está expresada en término s de ina integral estocás-tica que sabemos simular, pues por las propiedades de la integral estocástica se sabe que

$$\int_0^t W(y)\mathrm{d}y \sim N(0, \frac{t^3}{3}),$$

Cálculo de la integral de Itô

Ejemplo 3

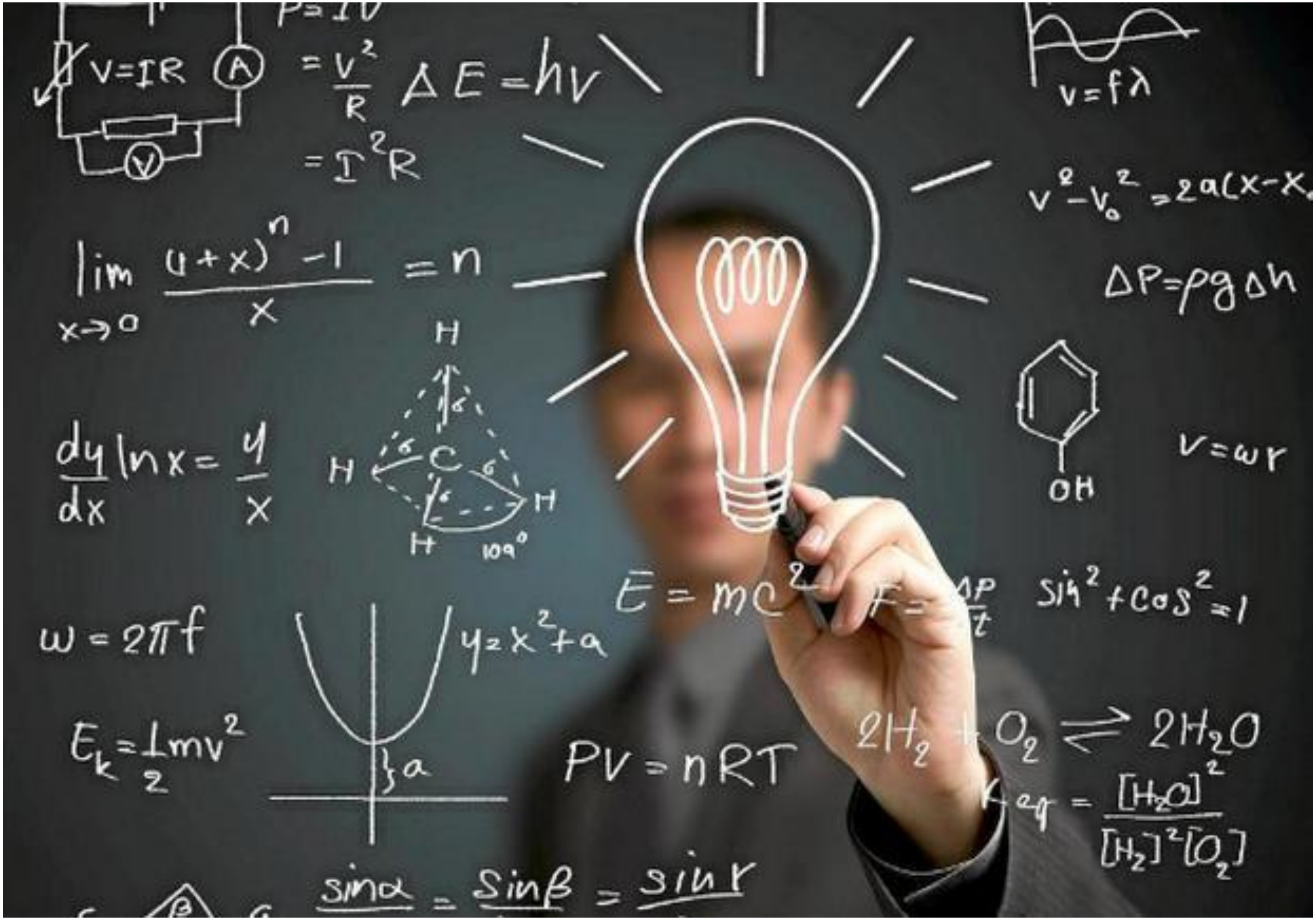
$$\mathbb{E}[\int_0^t W(y)\mathsf{d}y] = \int_0^t t(W(y))\mathsf{d}y = 0$$

$$\mathbb{V}[\int_0^t W(y)\mathsf{d}y] = \mathbb{E}[\left(\int_0^t W(y)\mathsf{d}y\right)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t W(y)^2\mathsf{d}y] \;\; = \int_0^t y^2\mathsf{d}y = t^3/3$$

Bibliografía

Oksendal, B. K. (2004). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, Berlin.

¿Dudas / Aportaciones?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net