Javier Blanco Álvarez
Pablo Castañeda Fuentes
Jesús Gallinal Moreno

Descripción:

Consideramos el siguiente PVIA logístico:

$$X'(t) \;=\; a\big(b \;-\; X(t)\big)\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,, \qquad X(0) \;=\; X_0 \;\text{ es una } VA. \tag{1}$$

Se pide calcular la *1-FDP* utilizando los dos los métodos *RVT* y *Liouville-Gibbs*.

Planteamiento:

Se trata de resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal de primer orden con condición inicial aleatoria, que reescrita así: $X'(t) \,+\, a\,X(t) \;=\; ab$, es una EDO lineal de primer orden no homogénea que se resuelve fácilmente con el factor integrante e^{at} , en efecto:

$$\begin{aligned} X'(t) \,+\, a\,X(t) \;=\; ab \quad &\Longleftrightarrow \quad X'(t)\,\mathrm{e}^{at} \,+\, a\,X(t)\,\mathrm{e}^{at} \;=\; ab\,\mathrm{e}^{at} \quad \Longrightarrow \\ \big(X(t)\,\mathrm{e}^{at}\big)' \;=\; ab\,\mathrm{e}^{at} \quad &\Longrightarrow \quad X(t)\,\mathrm{e}^{at} \;=\; \int ab\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \\ X(t)\,\mathrm{e}^{at} \;=\; b\,\mathrm{e}^{at} \,+\, K \quad &\Longrightarrow \quad \boxed{X(t) \;=\; b \,+\, K\,\mathrm{e}^{-at}} \end{aligned} \tag{2}$$

donde la constante de integración K se deduce fácilmente de la condición inicial $X(0) = X_0$:

$$X(t) \;=\; b + K\,\mathrm{e}^{-at} \;\Longrightarrow\; X(0) \;=\; b + K \;\Longrightarrow\; K \;=\; X(0) - b \;\Longrightarrow\; \boxed{K \;=\; X_0 - b} \tag{3}$$

y de (2) y (3) se deduce que el PVIA propuesto tiene la siguiente solución analítica:

$$\boxed{X(t) \;=\; b \,+\, (X_0 - b)\,\mathrm{e}^{-at}\,, \qquad \text{donde } X_0 \text{ es una } VA.} \tag{4}$$

en general, no siempre es fácil obtener una solución analítica, pero se puede intentar calcular usando la función `DSolve` de *Mathematica* haciendo:

```
DSolve[X'[t] == a (b - X[t]), X[0] == X0, X[t], t]
```

que devuelve la misma solución (4) que se ha demostrado.

Cálculos previos:

Para poder calcular la *1-FDP*, es decir, la función de densidad $f_X(x)$ de X para cada $t > 0$ fijo y $X = x$ variable, por los métodos *RVT* y *Liouville-Gibbs* se deben calcular las siguientes cosas...

Por (1) se tiene que:

$$X'(X) \quad = \quad a\left(b \;-\; X\right), \qquad X(0) \;=\; X_0 \tag{5}$$

donde se ha reescrito (1) para mostrar que X' depende de X para un $t > 0$ fijo, y se puede calcular su *divergencia*:

$$\operatorname{div}(X') \quad = \quad \frac{\partial X'}{\partial X} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial X}\Big(a\left(b \;-\; X\right)\Big) \quad = \quad -a \tag{6}$$

además se tiene que la solución de (5) es por (4) :

$$X(X_0) \quad = \quad b \;+\; (X_0 - b)\,\mathrm{e}^{-at} \tag{7}$$

donde se ha reescrito (5) para mostrar que X depende de X_0 para un $t > 0$ fijo, y se puede calcular X_0 en función de X (calculo de la función inversa) resultando:

$$X_0(X) \quad = \quad b \;+\; \big(X - b\big)\,\mathrm{e}^{at} \tag{8}$$

de donde se puede calcular su *matriz jacobiana* J_{X_0} :

$$J_{X_0} \quad = \quad \left(\frac{\partial X_0}{\partial X}\right) \quad = \quad \left(\mathrm{e}^{at}\right) \tag{9}$$

finalmente, la $\operatorname{div}(X')$ de (6) es en general una función que depende de t y X , si en esta función sustituimos X por su expresión $X(X_0)$ de (7) se tiene una nueva función que depende de t y X_0 y se llamará $z(t, X_0)$, y en este caso es:

$$z(t, X_0) \quad = \quad -a \tag{10}$$

☞ **Método RVT**:

Este método calcula la densidad $f_X(x)$ de X para cada $t > 0$ fijo, conocida la densidad $f_{X_0}(x)$ de X_0 así:

$$\boxed{f_X(x) \;=\; f_{X_0}(x_0) \cdot \left| \det\left(J_{X_0}\right) \right|} \tag{11}$$

donde $x_0 = X_0(X = x)$, y $\det\left(J_{X_0}\right)$ es el *determinante* de la *matriz jacobiana* de X_0 , así que usando (8) y (9) resulta que:

$$f_X(x) \;=\; f_{X_0}\Big(b \;+\; (x-b)\,\mathrm{e}^{at}\Big) \cdot \left| \det\left(\mathrm{e}^{at}\right) \right| \;=\; f_{X_0}\Big(b \;+\; (x-b)\,\mathrm{e}^{at}\Big) \cdot \left|\mathrm{e}^{at}\right| \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{f_X(x) \;=\; f_{X_0}\Big(b \;+\; (x-b)\,\mathrm{e}^{at}\Big) \cdot \mathrm{e}^{at}} \qquad \blacksquare$$

Nota: Se garantiza el uso de este método porque $\det\left(J_{X_0}\right) \neq 0$ y la función $X(X_0)$ de (7) es continua y todas sus derivadas parciales también.

☞ **Método Liouville-Gibbs**:

Este método calcula la densidad $f_X(x)$ de X para cada $t > 0$ fijo, conocida la densidad $f_{X_0}(x)$ de X_0 así:

$$\boxed{f_X(x) \;=\; f_{X_0}(x_0) \cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t z(\tau, x_0)\,\mathrm{d}\tau}\Bigg|_{x_0 \;=\; X_0(X=x)}} \tag{12}$$

donde $z(\tau, x_0)$ es la función (10) adaptada con $t = \tau$ y $X_0 = x_0$ para integrarla, así que usando (8) y (10) resulta que:

$$f_X(x) \;=\; f_{X_0}(x_0) \cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t -a\,\mathrm{d}\tau}\Bigg|_{x_0 \;=\; b+(x-b)\,\mathrm{e}^{at}} \;=\; f_{X_0}(x_0) \cdot \mathrm{e}^{at}\Big|_{x_0 \;=\; b+(x-b)\,\mathrm{e}^{at}} \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{f_X(x) \;=\; f_{X_0}\Big(b \;+\; (x-b)\,\mathrm{e}^{at}\Big) \cdot \mathrm{e}^{at}} \qquad \blacksquare$$

Nota: Se garantiza el uso de este método porque la función $X'(X)$ de (5) es continua diferenciable, y se suponen ciertas el resto de condiciones exigidas para aplicarlo.

Comparativa:

Ambos métodos llegan al mismo resultado, que la densidad $f_X(x)$ de X para cada $t > 0$ fijo, conocida la densidad $f_{X_0}(x)$ de X_0 es:

$$\boxed{f_X(x) \quad = \quad f_{X_0}\left(b \,+\, (x-b)\,\mathrm{e}^{at}\right) \cdot \mathrm{e}^{at}} \tag{13}$$

y dado que en este problema sólo se depende de una variable aleatoria X_0, esto ha simplificado la complejidad de los cálculos.

La resolución de una ecuación diferencial aleatoria (EDA) implica el cálculo no sólo de su proceso estocástico (PE) solución, sino también sus principales funciones estadísticas, como la esperanza ($\mathbb{E}$) y la varianza ($\mathbb{V}$); además de la determinación de su primera función de densidad de probabilidad (1-PDF) (Villafuerte & Cortés, 2013). Esta última proporciona una descripción probabilística más completa del proceso estocástico solución en cada instante de tiempo fijo $t > 0$.

La consideración de la aleatoriedad en su formulación a través de condiciones iniciales/de frontera, se adapta mejor que si se usara un enfoque exclusivamente determinista a la hora de modelar la incertidumbre asociada a la medición experimental requerida para establecer las funciones estadísticas mencionadas, así como la complejidad inherente involucrada en muchos problemas de modelado real (Ballesteros, Simon, Calatayud, López, & Sanz, 2018).

Este enfoque conlleva enfrentar otras cuestiones diferentes a las que aparecen en el escenario determinista. De hecho, en lugar de obtener sólo el PE solución de la EDA, la teórica, el cálculo de la primera función de densidad de probabilidad (1-PDF) del PE solución, es decir, $X(t)$, es mucho más deseable ya que, a partir de ella, se pueden calcular las funciones estadísticas anteriores como casos particulares simples y, además, proporciona una descripción probabilística integral del PE solución para cada instante de tiempo (Cortés, Quiles, Romero, & Roselló, 2016).