

$$\bullet X(t) = e^{\frac{1}{2}t - W(t)} = e^{\frac{1}{2}t} \cdot e^{-W(t)}$$

(debes saber que... $E(e^{\alpha Y}) = e^{\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$)
 Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bullet E(X(t)) = e^{\frac{1}{2}t} \cdot \underbrace{E(e^{-W(t)})}_{= e^{\frac{1}{2}t}} , \begin{cases} W(t) \sim N(0, t) \\ \gamma \alpha = -1 \end{cases}$$

$$E(X(t)) = e^t$$

$$\bullet V(X(t)) = E(X^2(t)) - E^2(X(t))$$

$$= E(e^{t-2W(t)}) - e^{2t}$$

$$= e^t \cdot \underbrace{E(e^{-2W(t)})}_{= e^{2t}} - e^{2t}$$

$$= e^t \cdot e^{2t} - e^{2t} \Rightarrow$$

$\begin{cases} W(t) \sim N(0, t) \\ \gamma \alpha = -2 \end{cases}$

$$V(X(t)) = e^{2t} \cdot (e^t - 1)$$



$$\text{Cov}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2)) - \underbrace{E(X(t_1))}_{e^{t_1}} \cdot \underbrace{E(X(t_2))}_{e^{t_2}}$$

\swarrow

$$e^{t_1+t_2}$$

$$X(t_1) \cdot X(t_2) = e^{\frac{1}{2}(t_1+t_2) - (w(t_1) + w(t_2))}$$

Diego :

$$\text{Ergo: } \mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)} \cdot \mathbb{E}\left(e^{-(W(t_1)+W(t_2))}\right)$$

debes saber que... -

$$w(t_1) + w(t_2) \stackrel{d}{=} 2x_1 + x_2$$

$$\text{con} \begin{cases} x_1 \sim N(0, \min(t_1, t_2)) \\ x_2 \sim N(0, |t_1 - t_2|) \end{cases}$$

y como X_1, X_2 independientes y normales

y sabiendo que si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

y Sabiendo que entonces $\sum \lambda_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2\right)$
 con $\lambda_i \in \mathbb{R}$

es decir la combinación lineal de normales es una normal de media la misma combinación lineal de las medias y de varianza la misma combinación de coeficientes al cuadrado de las varianzas

$$\text{distr } W(t_1) + W(t_2) \sim N(0, 4\min(t_1, t_2) + |t_1 - t_2|)$$

como $\min(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|}{2}$

entonces $4\min(t_1, t_2) + |t_1 - t_2| = \underline{2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|}$

por tanto,

$$W(t_1) + W(t_2) \sim N(0, 2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|)$$

para aprenderlos ...

y sabiendo esto, y volviendo a ..

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot \mathbb{E}(e^{-(W(t_1) + W(t_2))})$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot e^{\frac{1}{2}(2(t_1 + t_2) - |t_1 - t_2|)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \cdot e^{(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}|t_1 - t_2|}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}|t_1 - t_2|} \cdot e^{t_1 + t_2}$$

$$= e^{\frac{t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|}{2}} \cdot e^{t_1 + t_2}$$

$$= e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot X(t_2)) = e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2}, \text{ luego}$$

$$\boxed{\text{Cov}(t_1, t_2) = e^{\min(t_1, t_2)} \cdot e^{t_1 + t_2} - e^{t_1 + t_2} = e^{t_1 + t_2} \cdot (e^{\min(t_1, t_2)} - 1)}$$

este es el correlación entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$
¡cuota!