Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 3: Valoración de opciones financieras con árboles binomiales (Parte I).

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Introducción y objetivos
- Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
- Cobertura delta en árboles mono-periodo
- Referencias bibliográficas

3.1 Introducción y objetivos

Con anterioridad, la prima de una opción ha venido dada por un valor preasignado, sin embargo, este valor debe de ser calculado de manera racional para que no haya oportunidades de arbitraje.

Arbitraje

Estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, normalmente sin riesgo. Se realizan operaciones complementarias (comprar y vender) al mismo tiempo. Se posiciona en corto (vende) en el mercado con mayor precio y largo (compra) en el mercado con menor precio.

3.1 Introducción y objetivos

Las demostraciones que se muestran son ejemplos racionales perfectos, ideales. En estos casos, podemos exigir la condición de no arbitraje.

Nota

En el mundo real, las hipótesis ideal no se cumple (información de precio, competencia, que haya siempre suficientes compradores/vendedores), por tanto, el arbitraje es posible debido a la ineficiencias en los mercados. Cuanto más eficiente sea un mercado, más difícil será realizarlo.

3.1 Introducción y objetivos

Cálculo de la prima de una opción de manera racional para que no haya posibilidades de arbitraje:

$$S_0 \to S_\tau,\, t \to \tau > 0.$$

Un árbol binomial mono-periodo contempla dos escenarios posibles sobre el precio del subyacente:

- Escenario optimista S_τ^u (upper).
- Pesimista S_τ^d (down).

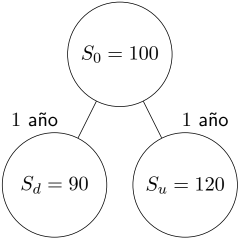
Donde $S_\tau^u > S_\tau^d$ y no tiene por qué darse $S_\tau^u > S_0$ y $S_\tau^d < S_0$.

3.1 Introducción y objetivos

Estudiaremos dos métodos para el cálculo de la prima porque aunque dan fórmulas equivalentes, aportan información extra diferente muy válida.
El objetivo es determinar el valor racional de la prima de la opción asumiendo que el subyacente puede tomar dos valores, S_d y S_u.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
Método I

Comenzaremos por un ejemplo, que luego generalizaremos:

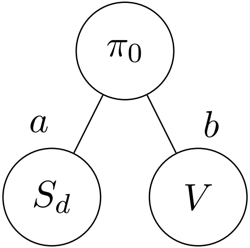


- Tasa de interés libre de riesgo anual compuesto continuo (RCICC) $r = 0.04879$.
- Precio de ejercicio $K = 105$.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Paso 1: Construimos una cartera con riesgo puro



Cartera $t = 0$	Número	Precio	Total
Acciones	a	S_0	aS_0
Opción de compra	b	V	bV (V es la prima de la opción)
Precio de la cartera			$\pi_0 = aS_0 + bV$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Donde los valores de a y b son a determinar, y pueden ser negativos. Por ejemplo, si $a < 0$, vendemos en corto la acción. Sea $K = 105$.

Cartera $t = 1$	S_1	π_1
Se ejerce la opción	$120 (S_1^u > K)$	$120a + (120 - 105)b = 120a + 15b$
No se ejerce la opción	$90 (S_1^d < K)$	$90a + 0b = 90a$

Paso 2: Eliminamos la incertidumbre: π_1 no puede depender del resultado:

$$120a + 15b = 90a \Rightarrow b = -2a.$$

a	b	Interpretación
1	-2	compramos 1 acción y vendemos 2 opciones de compra.
-2	4	vendemos 2 acciones y compramos 4 opciones de compra.

Para el primer caso tenemos el mismo valor de la cartera, es decir:

$$\pi_1 = 120 + 15(-2) = 90.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Paso 3: Valoramos la opción V

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=1 \\ \pi_0 = -2V + 100 & \longmapsto & \pi_1 = 90 \end{array}$$

$$e^{0.04879}\left(-2V + 100\right) = 90.$$

Nota

Capitalizamos el precio inicial de la cartera suponiendo que tenemos un régimen de capitalización a interés compuesto continuo (RCICC), con un tipo de interés de $r = 0.04879$. La capitalización es el proceso de proyectar un capital inicial a un periodo de tiempo posterior, con base en un tipo de interés.

De donde

$$V = 7.14.$$

Nota

Sin arbitraje, π_0 invertido debe generar el mismo valor ($r = 0.04879$ compuesto continuo).

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I ($V = 7.25 > 7.14$)

¿Por qué funciona este método?

Por que hay ausencia de oportunidades de arbitraje

Detalle, si $V = 7.25 > 7.14$ (precio de la opción excesivo), por tanto nos interesa vender opciones. Consideramos que vendemos dos opciones $b = -2$, y por tanto compramos una acción $a = 1$ ($b = -2a$). En $t = 0$,

$$\pi_0 = 100 - 2 \cdot 7.25 = 85.5 \text{ (costes}-\text{ingresos=debemos).}$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Pedimos un préstamo a un año para asumir esa deuda a un RCICC $r = 0.04879$. Al cabo de un año cerramos nuestra posición.
Caso más desfavorable $S_1^d = 90$:

$$\text{Ganancia (sin riesgo)} = \underbrace{90}_{\substack{\text{caso más}\\ \text{desfavorable}}} - \underbrace{85.5 \cdot e^{0.04876}}_{\text{deuda bancaria}} = 0.225.$$

Nota

No se ejercería la opción, ya que $S_1^d < K$ $(90 < 105)$.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Caso más favorable $S_1^u = 120$:

$$\text{Ganancia (sin riesgo)} = \underbrace{120}_{\substack{\text{caso más}\\ \text{favorable}}} - \underbrace{85.5 \cdot e^{0.04876}}_{\text{deuda bancaria}} - \underbrace{2(120-105)}_{\substack{\text{liquidación}\\ \text{de la opción}}} = 0.225.$$

Nota

Si hiciésemos esto con millones de opciones y acciones, generaremos muchas ganancias sin riesgo. Esto lo hará mucha más gente, y el mercado responderá haciendo caer el precio de la opción.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I ($V = 7 < 7.14$)

Ahora, si $V = 7 < 7.14$ (precio inferior), por tanto, nos interesa comprar. Consideramos que compramos dos opciones $b = 2$, por tanto vendemos $a = -1$ ($b = -2a$), entonces

$$\pi_0 = 100 - 2 \cdot 7 = 86 \text{ (ingresos−costes=recibimos).}$$

Los invertimos a un año a tipo de interés libre de riesgo $r = 0.04879$, obteniendo $86 \cdot e^{0.04879} = 90.3$.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
Método I

Caso más desfavorable $S_1^d = 90$:

$$\text{Ganancia (sin riesgo)} = \underbrace{90.3}_{\substack{\text{se genera}\\ \text{por inversión}}} - \underbrace{90}_{\substack{\text{caso desfavorable, no se ejerce}\\ \text{la opción } (S_1^d < K = 105)}} = 0.3.$$

Caso más favorable $S_1^u = 120$:

$$\text{Ganancia (sin riesgo)} = \underbrace{90.3}_{\substack{\text{se genera}\\ \text{por inversión}}} - \underbrace{120}_{\substack{\text{se devuelve}\\ \text{la acción}}} - \underbrace{2(120 - 105)}_{\substack{\text{caso favorable,}\\ \text{se ejerce}\\ \text{la opción}\\ (S_1^u > K = 105)}} = 0.3.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I

Si hacemos esto con millones de opciones y acciones, generaremos muchas ganancias sin riesgo. Esto lo hará mucha más gente y el mercado responderá haciendo subir el precio de la opción.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I (Generalización)

Precio acción

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=\tau \\ & \nearrow & S^u_\tau = S_u \\ S_0 & & \\ & \searrow & S^d_\tau = S_d \end{array}$$

Valor opción sobre acción

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=\tau \\ & \nearrow & U \\ V_0 & & \\ & \searrow & D \end{array}$$

Como estamos trabajando con árboles mono-periodo (solo se considera un paso temporal. Supongamos que tenemos una opción sobre esa misma acción. La prima de dicha acción es V_0, que será el valor a determinar. En el instante $t=\tau$ el pay-off (ganancia bruta) de la opción sobre la opción en un esenario optimista será U y en un escenario pesimista D.

Nota

Es importante remarcar que no hay que caer en la hipótesis preconcebida de que $S_u > S_0$ y $S_d < S_0$.

Lo único que cierto es:

$$S_u > S_d \text{ y } \begin{cases} U = \max\{S_u - K, 0\} > \max\{S_d - K, 0\} = D & \text{para Call,} \\ U = \max\{K - S_u, 0\} < \max\{K - S_d, 0\} = D & \text{para Putt.} \end{cases}$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I (Generalización)

Paso 1: Construimos una cartera

$$\begin{cases} \text{acciones} = a \in \mathbb{R}, \\ \text{opciones de la acción} = b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Valor cartera

$$\begin{cases} \pi_0 = aS_0 + bV_0, \\ \pi_\tau = \begin{cases} \pi_u = aS_u + bU, \\ \pi_d = aS_d + bD. \end{cases} \end{cases}$$

Luego

$$\pi_u = \pi_d \text{ (condición de no arbitraje)} \Rightarrow a\,(S_u - S_d) = -b\,(U - D)\,.$$

Fijando $b = b^* = -1$, es decir, vendiendo una opción, se tiene

$$a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d},$$

llamado parámetro Delta.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método I (Generalización)

Capitalización

$$
\begin{tikzcd}
\pi_0 = \pi_\tau \cdot e^{-r\tau} \arrow[r, mapsto] & \pi_\tau \arrow[l, bend right, swap] \arrow[from=1-1, to=1-2, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$t = 0$ $\qquad$ $t = \tau$

De donde

$$\pi_0 = \pi_\tau \cdot e^{-r\tau} \Rightarrow a^* S_0 - V_0 = (a^* S_u - U) \cdot e^{-r\tau}.$$

Entonces, el valor de la prima de la opción es

$$V_0 = a^* S_0 + (U - a^* S_u) \cdot e^{-r\tau}, \text{ con } a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{\Delta V}{\Delta S}.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
Método I (Generalización)

Observaciones

- Se puede tomar cualquier otro valor de b (incluso positivo), aunque se tiende a tomar pequeño en módulo, para no presuponer que el inversor dispone de grandes cantidades de valores, así es aplicable a cualquier inversor y sobre todo para no complicar los cálculos sin necesidad.
- $b^* = -1$, nos da el parámetro Delta.

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
Método I (Generalización)

Observaciones

- Si tomamos π_d en lugar de π_u para π_τ, obtendríamos una fórmula equivalente

$$V_0 = a^* S_0 + (U - a^* S_d) \cdot e^{-r\tau},\; a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{\Delta V}{\Delta S}.$$

- Podemos esforzarnos en dar una fórmula de V_0 en términos del precio de ejercicio K.
  - Opción de compra (europea) $U > D$:

$$U = (S_u - K)^+ ,\; D = (S_d - K)^+ .$$

  - Opción de venta (europea) $D > U$:

$$U = (K - S_u)^+ ,\; D = (K - S_d)^+ .$$

- Las opciones de compra a^* y b^* tienen signos opuestos.

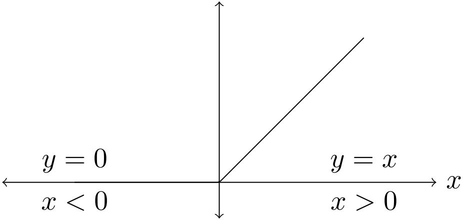
$$\frac{a^*}{b^*} = \frac{(D - U < 0)}{(S_u - S_d > 0)} < 0.$$

- Las opciones de venta a^* y b^* tienen el mismo signo.

$$\frac{a^*}{b^*} = \frac{(D - U > 0)}{(S_u - S_d > 0)} > 0.$$

Donde $(x)^+ = \text{máx}\{x, 0\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$y = (x)^+ = \text{máx}\{x, 0\}$$



3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método II

Se construye una inversión híbrida en riesgo: acciones+bonos. Consideramos que r es la tasa de interés libre de riesgo (anual, compuesta continua).

Cartera ($t = 0$)	Número	Precio	Total
Acciones	a	S_0	aS_0
Bonos	b	1	b
			$\pi_0 = aS_0 + b$

Cartera 1:

Bono

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=\tau \\ 1 & \longrightarrow & e^{r\tau} \end{array}$$

Acción

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=\tau \\ & \nearrow & S^u_\tau = S_u \\ S_0 & & \\ & \searrow & S^d_\tau = S_d \end{array}$$

suponiendo un escenario optimista, es S_u y suponiendo un escenario pesimista, es S_d. El precio de la cartera en ambos escenarios sería

$$\pi_\tau = \begin{cases} \pi_u = aS_u + be^{r\tau}, \\ \pi_d = aS_d + be^{r\tau}. \end{cases}$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método II

Construimos otra cartera con una opción sobre la acción, cuya prima es V_0. En el instante inicial esta cartera tiene un precio de V_0. En el instante $t = \tau$, el pay-off de la opción es U.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] t = 0 & t = \tau \\ & U \\ V_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D \end{tikzcd}$$

En escenario optimista, y D en el caso pesimista. Para que no haya arbitraje, igualamos el precio inicial de ambas carteras, es decir

$$V_0 = aS_0 + b = \pi_0.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras
Método II

Este método consiste en invertir en opciones formando una nueva cartera que replique la cartera o inversión inicial. Por tanto

$$\pi_u = U,\, \pi_d = D.$$

Para poder conocer el valor de la prima de la opción V_0 despejamos en primer lugar a y b del valor de la cartera en $t = \tau$ (π_τ), es decir

$$a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d},\, b^* = (U - a^* S_u) \cdot e^{-r\tau}.$$

Desde donde sustituyendo $a = a^*$ y $b = b^*$, se obtiene

$$V_0 = (q^* U + (1 - q^*)\, D) \cdot e^{-r\tau},\, q^* = \frac{e^{r\tau} S_0 - S_d}{S_u - S_d}.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método II

Observaciones importante

- Por reducción al absurdo se puede ver que $q^* \in [0, 1]$.
- La expresión obtenida para V_0 es equivalente a la obtenida por el Método I. Si $q^* = 0.5$.

$$V_0 = (15q^* + 15\,(1 - q^*)) \cdot e^{-0.04879} = 7.14.$$

3.2 Valoración mediante árboles mono-periodo y carteras

Método II

Observaciones importante

- Como $q^* \in [0, 1]$, este parámetro se puede interpretar como la probabilidad de que el valor de la opción en $t = \tau$ sea U. Consecuentemente, la probabilidad de que el valor de la opción en $t = \tau$ sea D sería $(1 - q^*)$, por ende

  $$E\left[V_1\right] = q^* U + (1 - q^*)\, D \text{ (ver vídeo)},$$

  y por lo tanto la prima de la opción V_0, se puede interpretar como la media actualizada del pay-off de la opción por el tipo de interés, es decir:

  $$V_0 = e^{-r\tau} E\left[V_1\right].$$

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Vistos dos métodos para determinar la prima de la opción, procedemos a estudiar cómo cubrirnos ante el riesgo de la venta de una opción de compra, para ello hay que comprar cierto número de acciones.

Nota

Si tenemos una opción de compra, tenemos el riesgo de que la opción suba y nuestra contrapartida ejerza su derecho de compra de la acción y tengamos que liquidar diferencias.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Ejemplo: Supongamos que un corredor de activos financieros (que vende opciones) vende una opción de compra europea (call corta). Suponemos que la acción al principio vale $S_0 = 60$ y que en el siguiente periodo (1 año, por ejemplo), vale $S_u = 80$ en el escenario favorable y $S_d = 50$ en el escenario desfavorable.

Supongamos que el precio de ejercicio de la opción $K = 65$. Por tanto, pay-off (ganancia bruta) de la opción se puede saber automáticamente, en el entorno optimista y en el pesimista sería (resp.):

$$U = (S_u - K)^+ = (80 - 65)^+ = (15)^+ = 15,$$

$$D = (S_d - K)^+ = (50 - 65)^+ = (-15)^+ = 0 \text{ (porque no se ejecutaría la opción)}.$$

Para calcular el precio de la prima V_0. Como trabajamos con una tasa libre de riesgo compuesta continuamente, tomamos $r = 0.048$.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Como

$$a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{15 - 0}{80 - 50} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

y

$$V_0 = a^* S_0 + (U - a^* S_u)\, e^{-r\tau} = 6.176.$$

El corredor le pone un valor mayor a la opción de compra (ya que vive de ello). Supongamos que si vende la opción le pone $6.25 > 6.17$. Si él compra la opción le pone $6.00 < 6.17$. A este valor se le llama el diferencial o *dealer spread (margen que un distribuidor o corredor cobra por la compra y venta de un activo financiero)*.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Supongamos un escenario en el que un cliente compra $N = 100000$ opciones de compra al precio que le indica el corredor (6.25).
Si al cabo de un periodo el subyacente vale 80, el corredor entregará las 100000 acciones, el otro le pagará el precio de ejercicio (65) y liquidarán diferencias. Y el corredor tendrá que pagar 1500000.
Este es el riesgo que corre si suben las acciones. Si no suben y valen 50, el corredor solo gana la prima y no liquida diferencias. Por tanto el corredor corre un riesgo si la acción sube de precio.
Para cubrirse de ese riesgo, el corredor se mueve con las acciones. Debe comprar $a^* N$ acciones, en este caso $0.5 \cdot 100000 = 50000$ acciones.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Situación del corredor en $t = 0$.

- Recibe: $100000 \cdot 6.25 = 625000$ por vender las opciones de compra.
- Gasta: $50000 \cdot 60 = 3000000$ por comprar las acciones que le cubren.
- Diferencia: $3000000 - 625000 = 2375000$ que debe pedir prestado al banco y al cabo de un periodo, cuando termine el contrato lo debe devolver con el tipo de interés libre de riesgo, lo que resulta en $2375000e^{0.048} = 2493750$.

Al cabo de un periodo, pueden pasar dos cosas, o que suban las acciones o que bajen.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Analicemos cada caso:

- Supongamos que $S_u = 80$. El cliente ejecutará la opción de compra, con lo cual la ganancia del corredor es la siguiente

$$\text{Ganancia del corredor} = \underbrace{80 \cdot 50000}_{\text{valoraciones}} - \left(\underbrace{2493750}_{\text{deuda préstamo}} + \underbrace{15 \cdot 100000}_{\text{para cubrir opciones}} \right) = 6250.$$

- Supongamos que $S_d = 50$. El cliente no ejercitará su opción de compra, con lo cual la ganancia del corredor es la siguiente

$$\text{Ganancia del corredor} = \underbrace{50 \cdot 50000}_{\text{valoraciones}} - \underbrace{2493750}_{\text{deuda préstamo}} = 6250.$$

Independientemente de lo que le pase a la acción (suba o baje). El corredor va a estar cubierto y además va a obtener la ganancia de la prima. Esta técnica para protegerse del riesgo se llama cobertura delta.

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

En términos generales, supongamos que vendemos una opción de compra, según el Método I, el precio de la prima V viene dado por:

$$V = a^* S_0 + (U - a^* S_u)\, e^{-r\tau}$$

Además, compramos a^* acciones a precio unitario S_0, donde

$$a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d}.$$

El coste de la posición inicial es el número de acciones que hemos comprado por el precio inicial del subyacente menos la prima de la call que hemos recibido, es decir

$$\text{Coste de la posición inicial} = a^* S_0 - V.$$

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Esta cantidad puede ser positiva o negativa, pero en cualquier caso se invierte (o se pide un préstamo) al tipo interés libre de riesgo r compuesto continuamente durante el periodo τ.
Consideramos el escenario optimista, es decir $S_\tau = S_u$, y dado que $(a^* S_0 - V)\, e^{r\tau} = a^* S_u - U$, la ganancia del corredor viene dada por

$$\text{Ganancia del corredor} = a^* S_u - \left(U + (a^* S_0 - V)\, e^{r\tau}\right) = 0.$$

3.3 Cobertura delta en árboles mono-periodo

Consideramos el escenario pesimista, es decir $S_\tau = S_d$. Análogamente al caso anterior, la ganancia del corredor viene dada por

$$\begin{aligned}\text{Ganancia del corredor} &= a^* S_d - (D + (a^* S_0 - V)\, e^{r\tau}) \\ &= (S_d - S_u)\left(a^* - \frac{U - D}{S_u - S_d}\right) = 0.\end{aligned}$$

3.4 Referencias bibliográficas

- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016a). Estrategias financieras sintéticas con opciones de compra y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Burgos, C., Cortés, J. C., and Navarro-Quiles, A. (2016b). Estrategias financieras sintéticas con opciones de venta y futuros. Colección de objetos docentes ADE-UPV.
- Cortés, J. C. and Navarro-Quiles, A. (2016). Fundamentos sobre opciones financieras: Una revisión desde una perspectiva matemática. Colección de objetos docentes ADE-UPV.

unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET