Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

Tema 6: Métodos de estimación de parámetros y de predicción para el modelo Log-Normal

Índice de la asignatura

Índice: Ideas claves

- Método de momentos no paramétrico
- Validación del modelo
- Predicción puntual y por intervalos de confianza

Método de momentos no paramétrico

El método de momentos no paramétrico destaca por su sencillez. A pesar de que las estimaciones obtenidas no son tan robustas como la de los demás métodos explicados, pero es muy fácil de aplicar.

- En caso de disponer de datos razonablemente frecuentes, es probable que los errores de aproximación sean pequeños.
- Los valores estimados pueden utilizarse como datos de partida para otros métodos.

Método de momentos no paramétrico

Sea

$$\begin{cases} dS(t) &= f(t,S(t);\theta)dt + g(t,S(t);\theta)dW(t), \\ S(0) &= s_0, \end{cases}$$

Consideramos $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$ los datos de un producto financiero dado y $t_i = t_0 + i\Delta t$, con $i \in \{0, \ldots, N\}$. El problema consiste en cómo estimar $\theta = (\mu, \sigma)$ (puede utilizarse σ^2). En un primer paso, consiste en aplicar el esquema de Euler-Maruyama, es decir

$$S_{i+1} - S_i = f(t_i, S_i; \theta)\Delta t + g(t_i, S_i; \theta)W(\Delta t),\ i \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

donde $W(\Delta t) \sim\ N(0, \Delta t)$ para todo $i \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Método de momentos no paramétrico

Del mismo modo que se indica en (Allen, 2007). El método de momentos no paramétrico consiste en aplicar la siguiente propiedad:

$$E\left(\frac{S_{i+1}-S_i}{\Delta\ t}-f(t_i,S_i;\theta)\right)=O\left(\Delta t\right),$$

$$E\left(\frac{\left(S_{i+1}-S_i\right)^2}{\Delta\ t}-g^2(t_i,S_i;\theta)\right)=O\left(\Delta t\right).$$

donde $O\left(\Delta t\right)\to 0$ cuando $\Delta t\to 0$.

Método de momentos no paramétrico

El vector de parámetros θ se estima utilizando las contrapartidas muestrales de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, para $\theta \in \mathbb{R}^2$, θ puede estimarse utilizando:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, s_i; \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i),$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} g^2(t_i, s_i; \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i)^2.$$

Método de momentos no paramétrico

Luego como $\theta = (\mu, \sigma)$ adaptando las funciones f y g al modelo Log-Normal, es decir $f(t_i, s_i; \theta) = \mu s_i$ y $g(t_i, s_i; \theta) = \sigma s_i$, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\mu s_i) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i),$$
$$\sum_{i=0}^{N-1} (\sigma s_i)^2 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i)^2.$$

Método de momentos no paramétrico

Es decir

$$\mu_{MMNP} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(s_{i+1}-s_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} s_i}\right),$$

$$\sigma_{MMNP} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(s_{i+1}-s_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} s_i^2}\right)}.$$

Validación del modelo

Estimados los parámetros del modelo Log-Normal, es importante saber cómo de buenas son esas estimaciones. Para ello se compararán los datos que conocemos con los datos obtenidos mediante el modelo Log-Normal. Denotamos por $\{s_0, \ldots, s_N\}$ a los datos conocidos en los instantes de tiempo $\{t_0, \ldots, t_N\}$. Luego consideramos los siguientes errores:

- Error cuadrático medio (ECM): El error cuadrático medio se define como la raíz cuadrada de la media de las diferencias al cuadrado entre los datos y los proporcionados por el modelo.

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_i - S(t_i))^2}.$$

Validación del modelo

- Error procentual absoluto medio (EPAM): El error porcentual absoluto medio se define como la media de los errores relativos entre los datos reales y los proporcionados por el modelo.

$$EPAM = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i - S(t_i)|}{s_i} = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| 1 - \frac{S(t_i)}{s_i} \right|.$$

Predicción puntual y por intervalos de confianza

Esta sección está dedicada a aplicar los resultados de este tema a datos reales. Consideremos las cotizaciones de una compañía que cotiza en el IBEX-35 en 28 días laborales, desde el 15 de julio del 2019 al 21 de agosto del 2019.

15/7/2019	24.38	4/8/2019	25.2
16/7/2019	24.23	5/8/2019	25.07
17/7/2019	24.26	6/8/2019	25.33
20/7/2019	24.32	7/8/2019	25.42
21/7/2019	24.89	10/8/2019	25.32
22/7/2019	23.55	11/8/2019	25.61
23/7/2019	23.79	12/8/2019	25.48
24/7/2019	23.95	13/8/2019	25.48
27/7/2019	23.75	14/8/2019	25.56
28/7/2019	23.98	17/8/2019	25.86
29/7/2019	24.59	18/8/2019	25.91
30/7/2019	24.86	19/8/2019	26.08
31/7/2019	24.8	20/8/2019	25.87
3/8/2019	24.95	21/8/2019	26.25

Referencias bibliográficas

- Allen, E. (2007). Modeling with Itô stochastic differential equations, volume 22. Springer Science & Business Media.
- Casas Morente, B. (2019). El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables. Aplicación a la modelización del subyacente cotizado Ferrovial. Universitat Politècnica de València. http://hdl.handle.net/10251/167159
- Miñana Sellés, G. (2018). Modelización de activos cotizados mediante modelos de difusión estocásticos de tipo Itô. http://hdl.handle.net/10251/101513
- Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York.

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET