

Modelización y Valoración de Derivados y Carteras en Finanzas “Problemas tipo examen”

Dr. Miguel Angel Navarro Burgos

11 de junio de 2024

Problema 1

Dado un modelo Log-Normal con $s_0 = 10$, $\mu = 0.5$ y $\sigma = 0.5$, es decir

$$S(t) = 10e^{0.375t+0.5W(t)}, t \geq 0.$$

Luego, dada la siguiente tabla

t	s	r
0	10	0.78
1	8	1.15
2	9	1.23
3	11	1.27
4	14	1.30
5	18	1.32
6	24	1.33
7	32	1.34
8	42	1.35
9	57	

donde $r_i = s_{i+1}/s_i$ ($\Delta t = 1$). Responder lo siguiente

- Utilizar el Algoritmo de Hull-White para calcular u y d .
- Comparar $|S_1 - uS_0|$ y $|S_1 - dS_0|$.

Solución

- Como $\Delta t = 1$ y

$$\begin{aligned}u &= 1 + \bar{r} + S_r, \\d &= 1 + \bar{r} - S_r.\end{aligned}$$

Desde la tabla tenemos

$$\bar{r} = \frac{1}{9} (0.78 + 1.15 + 1.23 + 1.27 + 1.3 + 1.32 + 1.33 + 1.34 + 1.35) = 1.23.$$

Entonces

$$S_r^2 = \frac{1}{8} ((0.78 - 1.23)^2 + \dots + (1.35 - 1.23)^2) = 0.03,$$

de donde $S_r = 0.18$ y

$$\begin{aligned} u &= 1 + 1.23 + 0.18 = 2.41, \\ d &= 1 + 1.23 - 0.18 = 2.05. \end{aligned}$$

Tabla de cálculos o resumen

i	s	r	$(r - \bar{r})^2$
0	10	0,78	0,20
1	8	1,15	0,01
2	9	1,23	0,00
3	11	1,27	0,00
4	14	1,3	0,00
5	18	1,32	0,01
6	24	1,33	0,01
7	32	1,34	0,01
8	42	1,35	0,01

- Como $S_0 = 10$ y $S_1 = 8$, se tiene que

$$\begin{aligned} |S_1 - uS_0| &= |8 - 2.41 \cdot 10| = 16.1 \\ |S_1 - dS_0| &= |8 - 2.05 \cdot 10| = 12.5 \end{aligned}$$

De donde apreciamos una mejor aproximación en el peor caso, es decir, $S_1 = dS_0$.

Problema 2

Dado un modelo Log-Normal con $s_0 = 20$, $\mu = 0.5$ y $\sigma = 0.05$, es decir

$$S(t) = 20e^{0.4988t + 0.05W(t)}, t \geq 0.$$

Dada la siguiente tabla

t	s
0	20
1	20.92
2	22.11
3	23.37
4	24.7
5	26.11
6	27.6
7	29.17
8	30.83
9	32.59

Considerando $\Delta t = 1$, calcular

1. μ_{MME} y σ_{MME} .
2. μ_{MMV} y σ_{MMV} .
3. μ_{MMNP} y σ_{MMNP} .
4. $|\mu - \mu_{MME}|$ y $|\sigma - \sigma_{MME}|$.
5. $|\mu - \mu_{MMV}|$ y $|\sigma - \sigma_{MMV}|$.
6. $|\mu - \mu_{MMNP}|$ y $|\sigma - \sigma_{MMNP}|$.

Solución

1. MME: Lo primero es calcular

$$u_i = \log\left(\frac{s_{i+1}}{s_i}\right),$$

desde la tabla tenemos que

t	s	u
0	20.00	0.0450
1	20.92	0.0553
2	22.11	0.0554
3	23.37	0.0554
4	24.70	0.0555
5	26.11	0.0555
6	27.60	0.0553
7	29.17	0.0553
8	30.83	0.0555

Luego, dado que $\Delta t = 1$, se tiene

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 u_i = 0.05425,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{MME} &= \frac{S_u}{\sqrt{\Delta t}} = S_u = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - \bar{u})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=0}^8 (u_i - \bar{u})^2} = 0.00348,\end{aligned}$$

y

$$\mu_{MME} = \frac{\bar{u}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma_{MME}^2 = \bar{u} + \frac{1}{2} \sigma_{MME}^2 = 0.05426.$$

2. MMV: Lo primero es calcular

$$r_i = \frac{s_{i+1}}{s_i} - 1,$$

desde la tabla tenemos que

t	s	r
0	20.00	0.0460
1	20.92	0.0569
2	22.11	0.0570
3	23.37	0.0569
4	24.70	0.0571
5	26.11	0.0571
6	27.60	0.0569
7	29.17	0.0569
8	30.83	0.0571

Luego, dado que $\Delta t = 1$, se tiene

$$\mu_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{s_{i+1}}{s_i} - 1 \right) = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 r_i = \bar{r} = 0.05576,$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_{MMV} &= \sqrt{\frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{s_{i+1}}{s_i} - 1 - \mu_{MMV} \Delta t \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 (r_i - \bar{r})^2} = 0.00345.\end{aligned}$$

3. MMNP: Lo primero es calcular

$$d_i = s_{i+1} - s_i,$$

desde la tabla tenemos que

t	s	d
0	20.00	0.9200
1	20.92	1.1900
2	22.11	1.2600
3	23.37	1.3300
4	24.70	1.4100
5	26.11	1.4900
6	27.60	1.5700
7	29.17	1.6600
8	30.83	1.7600

Luego, dado que $\Delta t = 1$, se tiene

$$\mu_{MMNP} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} s_i} \right) = \frac{\sum_{i=0}^8 d_i}{\sum_{i=0}^8 s_i} = 0.05600,$$

y

$$\sigma_{MMNP} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} s_i^2} \right)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^8 d_i^2}{\sum_{i=0}^8 s_i^2}} = 0.00317.$$

4. MME:

$$|\mu - \mu_{MME}| = 0.5 - 0.05426 = 4.45741 \cdot 10^{-1}$$

y

$$|\sigma - \sigma_{MME}| = 0.05 - 0.00348 = 4.65194 \cdot 10^{-2}.$$

5. MMV:

$$|\mu - \mu_{MMV}| = 0.5 - 0.05576 = 4.44243 \cdot 10^{-1}$$

y

$$|\sigma - \sigma_{MMV}| = 0.05 - 0.00345 = 4.65495 \cdot 10^{-2}.$$

6. MMNP:

$$|\mu - \mu_{MMNP}| = 0.5 - 0.05600 = 4.43997 \cdot 10^{-1}$$

y

$$|\sigma - \sigma_{MMNP}| = 0.05 - 0.00317 = 4.68320 \cdot 10^{-2}.$$

Dada la similitud de los resultados, no podemos deducir el método que produce mejores estimaciones.