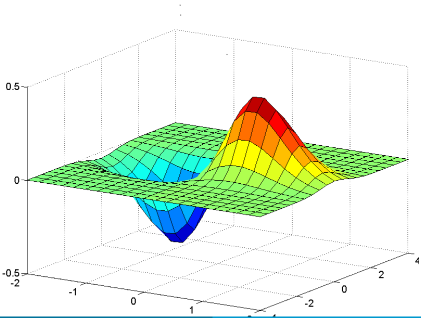
Tema 2: Problemas de contorno unidimensionales. Método de disparo

Métodos Numéricos Aplicados II

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Eva García Villalba



Contenido

Conceptos básicos

Ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. Distinguimos dos tipos:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias**: Función de una variable independiente y sus derivadas (Tema 2 y 3)
- **Ecuaciones en derivadas parciales**: Función multivariable y sus derivadas parciales (Resto de temas)

Problema de contorno de una EDO de segundo orden

Buscamos la solución de una ecuación diferencial de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$, que cumpla ciertas condiciones en la frontera de nuestro dominio, es decir, en los puntos a y b.

- Se llama orden del PC al mayor orden de la derivada que aparece en la ecuación.
- El número de condiciones coincide con el orden del problema.
- El problema de contorno es lineal o no dependiendo de la linealidad o no de la ecuación diferencial.
- La solución del problema es siempre, cuando existe, una función real de variable real que satisface las condiciones de contorno.

Tipos de condiciones de contorno

- Condiciones de Dirichlet
  - Homogéneas: $y(a) = 0, \quad y(b) = 0$,
  - No homogéneas: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$,

- Condiciones naturales

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a,\ \alpha_b \neq 0$.

- Condiciones mixtas

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

- Problema de contorno con condiciones Dirichlet

  Variación de potencial entre dos esferas concéntricas de radios r_1 y r_2, con un potencial en la esfera inferior de V_1 voltios y en la exterior de 0 voltios.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [r_1, r_2], \quad u(r_1) = V_1, u(r_2) = 0.$$

- Problema de contorno con condiciones Naturales

$$y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) + y'(0) = 1, y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.$$

- Problema de contorno con condiciones Mixtas

$$y'' + xyy' - xy^2 = x\sin x, \quad x \in [-1, 1], \quad y(-1) + y'(-1) = 0, y'(1) = 2$$

¡PC con el que vamos a trabajar!

PC lineal de segundo orden en una variable con condiciones Dirichlet

Problemas de contorno descrito por una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

y condiciones tipo Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ arbitrarias.

Teorema de existencia y unicidad

Consideremos el problema de contorno $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Si se cumplen las condiciones:

(i) $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a, b]$,

(ii) $q(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$,

entonces el problema tiene solución única.

Método de disparo lineal

Método que permite encontrar la solución aproximada del problema de contorno descrito, mediante las soluciones aproximadas de dos problemas de valor inicial

Problema 1

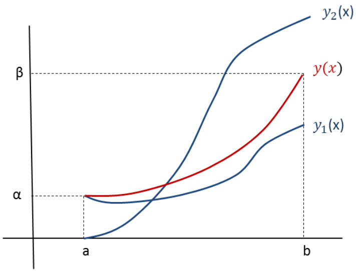
$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = 0, \qquad \text{Solución: } y_1(x)$$

Problema 2

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad x \in [a,b], \quad y(a) = 0, y'(a) = 1, \qquad \text{Solución: } y_2(x)$$

Entonces, la solución de nuestro problema de contorno es

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x).$$



Problema 1

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = 0,$$

$$\begin{array}{l} u_1 = y, \\ u_2 = y' \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & p(x)u_2 + q(x)u_1 + r(x) \end{array}\right\}, \quad \left(\begin{array}{c} u_1(a) \\ u_2(a) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array}\right).$$

$$[u_1, u_2] = Runge - Kutta('funcion1', \ a:h:b, \ [\alpha, 0]')$$

Problema 2

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad x \in [a,b], \quad y(a) = 0, y'(a) = 1,$$

$$\begin{array}{l} v_1 = y, \\ v_2 = y' \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} v_1' = & v_2 \\ v_2' = & p(x)v_2 + q(x)v_1 \end{array}\right\}, \quad \left(\begin{array}{c} v_1(a) \\ v_2(a) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right).$$

$$[v_1, v_2] = Runge - Kutta('funcion2', \ a:h:b, \ [0, 1]')$$

- ENTRADA funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de puntos N.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$; z_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

- Paso 1 elección de los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N}$; $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 2 aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 1. Obtención de valores aproximados u_{1i} y u_{2i} para $y_1(x_i)$ e $y_1'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 3 aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 2. Obtención de valores aproximados v_{1i} y v_{2i} para $y_2(x_i)$ e $y_2'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 4 tomar $y_0 = \alpha$ y $C = \dfrac{\beta - u_{1N}}{v_{1N}}$.
- Paso 5 desde $i = 1$ hasta N tomar

$$\begin{aligned} y_i &= u_{1i} + C v_{1i}, \\ z_i &= u_{2i} + C v_{2i}. \end{aligned}$$

¡ Utilizando el método de Runge-Kutta podemos afirmar que este algoritmo tiene orden 4!

Convergencia Método de Disparo

En general, si u_{1i} y v_{1i} son aproximaciones de orden $O(h^n)$ para $y_1(x_i)$ e $y_2(x_i)$, respectivamente, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, entonces se puede demostrar que y_i es una aproximación de orden $O(h^n)$ para $y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, solución del problema de contorno.
En particular,

$$|y_i - y(x_i)| \leq K h^n \left| 1 + \frac{v_{1i}}{v_{1N}} \right|,$$

para una constante $K > 0$.

Ejemplo

Ejemplo

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y(2) = 2.$$

Problemas de valor inicial que debemos resolver:

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0,$$

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad x \in [1,2], \quad y_2(1) = 0, y_2'(1) = 1,$$

Solución exacta

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),$$

siendo

$$c_1 = \frac{1}{70}\left(69 + 4\cos(\ln(2)) + 12\sin(\ln(2))\right), c_2 = \frac{4}{35} - \frac{2}{35}\cos(\ln(2)) - \frac{6}{35}\sin(\ln(2)).$$

Ejemplo

Tabla de resultados

x_i	u_{1i}	v_{1i}	y_i	$y(x_i)$	$\|y(x_i) - y_i\|$
1.0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000	-
1.1	1.0089	0.0911	1.0926	1.0926	1.43e-7
1.2	1.0324	0.1685	1.1870	1.1870	1.34e-7
1.3	1.0667	0.2360	1.2833	1.2833	9.78e-8
1.4	1.1092	0.2965	1.3814	1.3814	6.02e-8
1.5	1.1583	0.3518	1.4811	1.4811	3.06e-8
1.6	1.2124	0.4031	1.5823	1.5823	1.08e-8
1.7	1.2708	0.4553	1.5850	1.5850	5.43e-10
1.8	1.3327	0.4971	1.7888	1.7888	5.05e-9
1.9	1.3971	0.5409	1.8939	1.8939	4.41e-9
2.0	1.4647	0.5833	2.0000	2.0000	-

Table: Resultados numéricos

¡ El error máximo está alrededor de 10^{-7} !

PC lineal de segundo orden de una variable con condiones **NO** Dirichlet

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

con las condiciones $y(a) - y'(a) = \alpha$, $y(b) + y'(b) = \beta$.

Planteamos los mismos PVIs anteriores Problema 1 y Problema 2, con soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, respectivamente.
Determinamos λ_1 y λ_2 de manera que

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x),$$

sea la solución del problema de contorno. Los valores de los parámetros λ_1 y λ_2 se obtienen de las condiciones de contorno. En este caso:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))}$$

y

$$\lambda_2 = \alpha \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))}.$$

PC no lineales de segundo orden

Problemas descritos por una ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b]$$

y condiciones, por ejemplo, tipo Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Métodos para aproximar la solución del problema:

- Método de disparo (Tema 2)
- Método de diferencias finitas (Tema 3)

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Método parecido al del caso lineal, excepto que la solución no se expresa como combinación lineal de las soluciones de dos PVIs. En su lugar, necesitamos utilizar las soluciones de una sucesión finita de problemas de valor inicial de la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t,$$

que involucran un parámetro t, que debemos ir cambiando hasta conseguir la solución de nuestro problema de contorno.

Elegimos los valores del parámetro $t = t_k$, tal que

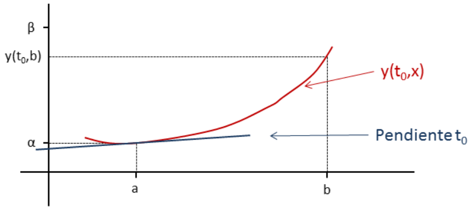
$$\lim_{k \to +\infty} y(t_k, b) = y(b) = \beta,$$

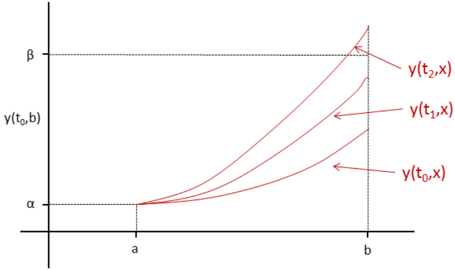
donde $y(t_k, x)$ es la solución del PVI con $t = t_k$ e $y(x)$ es la solución del problema de contorno. Es decir, estamos buscando una solución aproximada de la **ecuación no lineal**

$$F(t) := y(t, b) - \beta = 0.$$

Método de disparo no lineal con condiciones Dirichlet

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$





$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Tomamos $t = t_0$ y resolvemos el problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_0 \quad \rightarrow \quad \text{Solución} \quad y(t_0, x)$$

- Si $|y(t_0, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_1$ y resolvemos el PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_1 \quad \rightarrow \quad \text{Solución} \quad y(t_1, x)$$

- Si $|y(t_1, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_2$ y ...
- Debemos tener algún criterio para la elección de los valores t_k. Como buscamos una raíz de $F(t) = y(t, b) - \beta$, aplicamos, por ejemplo, el método de la secante

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)(t_k - t_{k-1})}{F(t_k) - F(t_{k-1})} = t_k - \frac{(y(t_k, b) - \beta)(t_k - t_{k-1})}{y(t_k, b) - y(t_{k-1}, b)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Algoritmo método de disparo no lineal con secante

- ENTRADA función f; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
  Primeros valores del parámetro t, $t0 = \beta$, $t1 = (\beta - \alpha)/(b-a)$;
- Paso 3 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t0)$ e $yp_i(t_0)$ para $y(t0, x_i)$ e $y'(t0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 4 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t1, x_i)$ e $y'(t1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 5 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos 4 a 8
  - Paso 6 Elegir el nuevo t

$$t = t1 - \frac{(y_{N+1}(t1) - \beta)(t1 - t0)}{y_{N+1}(t1) - y_{N+1}(t0)};$$

  - Paso 7 Tomar $t0 = t1$ y $t1 = t$.
  - Paso 8 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t1, x_i)$ e $y'(t1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
  - Paso 9 Actualizar: $iter = iter + 1$; $incre = abs(y_{N+1}(t1) - \beta)$;
    $y_{N+1}(t0) = y_{N+1}(t1)$,
- Paso 10 Analizar por qué nos hemos salido del bucle.

Programa del método de disparo no lineal con secante

```
function [nodos ,solaprox ,t,iter ] = ...
...=DisparoSecante (funcion ,a,b,alfa ,beta ,n,tol , maxiter )
h=(b-a)/(n+1);  x=a:h:b;  x=x(:);
t0 =0;
    [x,Y]= ode45 (funcion ,x ,[ alfa , t0]');
    yb0=Y(end ,1);
t1 =(beta - alfa)/(b-a);
    [x,Y]= ode45 (funcion ,x ,[ alfa ,t1]');
    yb1=Y(end ,1);
iter =1; incre =tol+1;

while incre >tol && iter < maxiter
    t=t1 -(t1 -t0)*(yb1 -beta )/(yb1 -yb0);
        [x,Y]= ode45 (funcion ,x ,[ alfa ,t]');
    incre =abs(Y(end ,1) -beta);
    iter= iter +1;
    t0=t1; yb0=yb1;
    t1=t; yb1=Y(end ,1);
end
if incre <= tol
    nodos =x;
    solaprox =Y;
else
    disp('se necesitan mas iteraciones ')
end
end
```

Método de disparo no lineal con Newton

Vamos a elegir los valores t_k que se van aproximando a la solución de la ecuación $F(t) := y(t,b) - \beta = 0$, utilizando el método de Newton

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(t_k,b) - \beta}{\dfrac{d}{dt} y(t_k,b)}$$

¡ No tenemos una expresión explícita de la función $y(t,b)$!

El PVI que queremos resolver es

$$y''(t,x) = f(x, y(t,x), y'(t,x)), \quad x \in [a,b], \quad y(t,a) = \alpha, y'(t,a) = t$$

Derivando el problema respecto de t y llamando $z(t,x) = \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)$, para encontrar z debemos resolver otro PVI

$$z'' = f_y(x,y,y')z + f_{y'}(x,y,y')z', \quad x \in [a,b], \quad z(a) = 0, z'(a) = 1.$$

Vamos a resolver los dos PVI anteriores introduciendo las variables auxiliares

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = z, \quad y_4 = z'$$

con los que transformamos los dos PVI en el sistema de primer orden

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & f(x, y_1, y_2) \\ y_3' & = & y_4 \\ y_4' & = & f_{y_1} y_3 + f_{y_2} y_4 \end{array}\right\}, \qquad \begin{array}{c} y_1(a) = \alpha \\ y_2(a) = t \\ y_3(a) = 0 \\ y_4(a) = 1 \end{array}$$

La función que describe este sistema la programamos en un archivo.m de la forma

```
function F=funcion(x,y)
F = zeros(4,1);
F(1) = y(2);
F(2) = f(x,y(1),y(2));
F(3) = y(4);
F(4) = f_{y1} y(3) + f_{y2} y(4);
```

Algoritmo método de disparo no lineal con Newton

- ENTRADA función F; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
  Primer valor del parámetro t, $t0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$;
- Paso 3 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos siguientes:
  - Paso 4 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t0)$ e $yp_i(t_0)$ para $y(t0, x_i)$ e $y'(t0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$. Además, obtener los valores $z_i(t0)$ y $z_i'(t0)$.
  - Paso 5 $yb = y_{N+1}(t0)$, $zb = z_{N+1}(t0)$.
  - Paso 6 Actualizar $iter$ e $incre$: $iter = iter + 1$; $incre = abs(yb - \beta)$;
  - Paso 7 Elegir el nuevo t
  $$t = t0 - \frac{yb - \beta}{zb};$$
  - Paso 8 Tomar $t0 = t$.
- Paso 9 Analizar por qué el programa se ha salido del bucle.

Ejemplo

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

Solución exacta: $y(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$

Planteamos los dos problemas de valor inicial que requiere el método de disparo con Newton

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y'(1) = t_k.$$

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8}(yz' + y'z), \quad x \in [1,3], \quad z(1) = 0, z'(1) = 1.$$

Iniciamos el proceso con $t_0 = 0$ y criterio de parada

$$\left| y_{1,N+1}(t_k) - \frac{43}{3} \right| \leq 10^{-5} = tol,$$

y tras 4 iteraciones y $t_4 = -14.000203$ el programa se detiene, mostrando por pantalla:

Ejemplo

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.0	17.000000	17.000000	-
1.1	15.755495	15.755455	4.06e-5
1.2	14.773389	14.773333	5.60e-5
1.3	13.997752	13.997692	5.94e-5
1.4	13.388629	13.388571	5.71e-5
1.5	12.916719	12.916667	5.23e-5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.4	12.426673	12.426667	6.68e-6
2.5	12.650004	12.650000	3.61e-6
2.6	12.913847	12.913846	9.17e-7
2.7	13.215924	13.215926	1.43e-6
2.8	13.554282	13.554286	3.47e-6
2.9	13.927236	13.927241	5.21e-6
3.0	14.333327	14.333333	6.69e-6

¡ El error real máximo está alrededor de 10^{-5} !

Recordemos que, si tenemos un PC lineal pero este no presenta condiciones Dirichlet, usaremos el método de Disparo no lineal tanto con esquema de Secante como de Newton.

Veamos cómo modificaríamos los códigos para ejemplos concretos ya que:

¡no son cambios genéricos!

PROBLEMA EDO1

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} ru'' + u' = -4r, & r \in [1,3] \\ u(1) = \ln(1/3) - 1, & u(3) - u'(3) = 0.5(\ln 3 - 7) \end{array} \tag{1}$$

a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con secante, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}.

b) Plantea y resuelve el sistema lineal de tamaño 10×10 que resulta al aplicar el método de diferencias finitas con aproximaciones de orden 2.

c) Teniendo en cuenta que la solución exacta es $u(r) = \ln \frac{r}{3} + \frac{1}{2} \ln r - r^2$, determina el error cometido en las aproximaciones de los apartados anteriores.

El problema que nos ocupa es un problema lineal, sin embargo, al tener condiciones de contorno no Dirichlet optamos por aplicar el método de disparo no lineal.

1. $$\textbf{PVI}: \begin{cases} u'' = -\frac{1}{r}u' - 4, r \in [1,3], \\ u(1) = \ln(1/3) - 1, \\ u'(1) = t, \end{cases}$$

2. t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del **PVI** satisface el **PF**, es decir, t ha de satisfacer:
$$|u(3,t) - u'(3,t) - 0.5(\ln 3 - 7)| \leq 10^{-7}$$

3. Transformamos el **PVI** en un problema de valor inicial de primer orden con el cambio de variable: $u_1 = u$ y $u_2 = u'$
$$\textbf{PVI de 1º orden}: \quad \left.\begin{array}{l} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\frac{1}{r}u_2 - 4, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u_1(1) = \ln(1/3) - 1, \\ u_2(1) = t. \end{array}$$

a) Método de la Secante

4. Para elegir los distintos valores del parámetro t, hasta alcanzar el valor deseado, vamos a utilizar el método de la secante. En este caso, t debe verificar:

$$u(3,t) - u'(3,t) - 0.5(\ln 3 - 7) = 0.$$

Por tanto, para resolver esta ecuación no lineal, usamos el método iterativo de la Secante para aproximar la solución:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})(u(3,t_k) - u'(3,t_k) - 0.5(\ln 3 - 7))}{u(3,t_k) - u'(3,t_k) - u(3,t_{k-1}) + u'(3,t_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

a partir de dos aproximaciones iniciales t_0 y t_1.

Vamos a adaptar el programa de disparo con secante a las características de este problema.

Solución PROBLEMA EDO1

Llamamos a la función `DisparoSecanteP1` con los parámetros de entrada indicados en el problema:

$alfa = log(1/3) - 1;$
$beta = 0.5 * (log(3) - 7);$
$[r, U, t, iter, incr] = DisparoSecanteP1('ej8', 1, 3, alfa, beta, 20, 100, 1e - 7)$

Los resultados obtenidos, tanto para la solución $u(r)$ como para su derivada aparecen en la Tabla. Estos resultados se han obtenido después de 2 iteraciones, con $t = -0.5$, e $1.04586e - 7$.

r	u_{aprox}	u'_{aprox}	$\lvert u(r) - u_{aprox} \rvert$
1.0	-2.098612	-0.500000	0
1.2	-2.265130	-1.150001	2.28596e-7
1.4	-2.553904	-1.728572	1.25410e-7
1.6	-2.953607	-2.262500	9.77514e-8
1.8	-3.456932	-2.766667	9.75936e-8
2.0	-4.058892	-3.250000	1.08110e-7
2.2	-4.755926	-3.718182	1.22740e-7
2.4	-5.545409	-4.175000	1.38733e-7
2.6	-6.425345	-4.623077	1.54887e-7
2.8	-7.394183	-5.064286	1.70669e-7
3.0	-8.450694	-5.500000	1.83567e-7

PROBLEMA EDO2

La temperatura $u(r)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 viene descrita por el problema de frontera

$$\begin{aligned} & ru'' + u' = 0 && r \in [1,3] \\ & u(1) + u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln 3}, && u(3) + u'(3) = 0.5 - \frac{1}{6\ln 3} \end{aligned} \tag{2}$$

a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con Newton, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}.

b) Plantea y resuelve el sistema lineal de tamaño 11×11 que resulta al aplicar el método de diferencias finitas con aproximaciones de orden 2.

c) Sabiendo que la función $u(r) = \dfrac{1}{\ln(1/3)}(\ln(r/3) - 0.5\ln r)$ es la solución exacta del problema, determina el error cometido en las aproximaciones de a) y b).

El problema que nos ocupa es un problema lineal, sin embargo, al tener condiciones de contorno no Dirichlet optamos por aplicar el método de disparo no lineal.

1. $$\textbf{PVI 1}: \begin{cases} u'' = -\frac{1}{r}u', r \in [1,3], \\ u(1) = t, \\ u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln(3)} - t, \end{cases}$$

   Gracias a estas CI: $u(1) + u'(1) = t + 1 - \frac{1}{2\ln(3)} - t = 1 - \frac{1}{2\ln(3)}$.

2. t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del **PVI** satisface el **PF**, es decir, t ha de satisfacer:

   $$\left| u(3,t) + u'(3,t) - \left(0.5 - \frac{1}{6\ln(3)}\right) \right| \leq 10^{-7}$$

3. Transformamos el **PVI** en un problema de valor inicial de primer orden con el cambio de variable: $u_1 = u$ y $u_2 = u'$

   $$\textbf{PVI 1 de 1º orden}: \quad \left. \begin{array}{l} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\frac{1}{r}u_2, \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} u_1(1) = t, \\ u_2(1) = 1 - \frac{1}{2\ln(3)} - t. \end{array}$$

a) Método de Newton

4. En este caso, t debe verificar:

$$u(3,t) + u'(3,t) - \left(0.5 - \frac{1}{6\ln(3)}\right) = 0.$$

Por tanto, para resolver esta ecuación no lineal, usamos el método iterativo de Newton:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{u(3,t_k) + u'(3,t_k) - \left(0.5 - \frac{1}{6\ln(3)}\right)}{z(3,t_k) + z'(3,t_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

donde $z(r,t)$ es la solución del PVI:

$$\textbf{PVI 2}: \left\{ \begin{array}{l} z'' = -\frac{1}{r} z', r \in [1,3], \\ z(1,t) = 1, \\ z'(1,t) = -1, \end{array} \right.$$

La EDO del **PVI 2** tiene la misma forma que la del **PVI 1** casualmente ya que:

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial u}(r,u,u') \cdot z + \frac{\partial f}{\partial u'}(r,u,u') \cdot z' = 0 \cdot z + \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot z' = -\frac{1}{r} z'.$$

Transformamos el **PVI 2** en uno equivalente de primer orden, con: $u_3 = z$ y $u_4 = z'$:

$$\textbf{PVI 2}: \quad \left. \begin{array}{l} u_3' = u_4, \\ u_4' = -\frac{1}{r} u_4 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} u_3(1) = 1, \\ u_4(1) = -1 \end{array}$$

Vamos a adaptar el programa de disparo con Newton a las características de este problema.

Solución PROBLEMA EDO2

Si llamamos a la función DisparoNewtonP1 con los parámetros de entrada que proporciona el problema obtenemos los valores que aparecen en la Tabla. Estos valores se han conseguido después de 2 iteraciones, para un valor del parámetro $t = 1.0000001$ y un valor de la cota de error $incr = 4.1667974e - 9$.

r	$u_{aprox}(r)$	$u_aprox'(r)$	$\lvert u(r) - u_{aprox}\rvert$
1.0	1.000000	-0.455120	5.5346e-8
1.2	0.917022	-0.379266	2.06788e-8
1.4	0.846865	-0.325085	2.29695e-8
1.6	0.786092	-0.284450	3.66073e-8
1.8	0.732487	-0.252844	3.96605e-8
2.0	0.684535	-0.227560	3.86093e-8
2.2	0.641158	-0.206873	3.59019e-8
2.4	0.601557	-0.189633	3.25490e-8
2.6	0.565128	-0.175046	2.89940e-8
2.8	0.531400	-0.162543	2.54377e-8
3.0	0.500000	-0.151707	2.26155e-8

Problema 1

Aproxima por el método de disparo los siguientes problemas de frontera, utilizando en cada caso 20 subintervalos. Compara los resultados obtenidos con la solución exacta. Repite el problema utilizando diferencias finitas con el mismo número de subintervalos. Compara las dos soluciones aproximadas obtenidas entre sí y con la solución exacta.

a) $y'' = -y'^2 - y + \ln x$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$
   Solución exacta: $y(x) = \ln x$

b) $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 1/2$, $y(2) = 1/3$
   Solución exacta: $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$

c) $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 2$, $y(2) = 5/2$
   Solución exacta: $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Problema 2 Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} y''' = f(x, y, y', y''), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha,\ y'(a) - 2y''(a) = \beta & \\ y'(b) - y''(b) = \gamma & \end{array}$$

Describe, con todo detalle, el método de disparo para este problema, utilizando el método de la secante para determinar los diferentes valores del parámetro.

Problema 3 Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, & x \in [0, 1] \\ 2y(0) + y'(0) + y(1) + y'(1) = 1/e & \\ y(0) + y'(0) = 1 & \end{array}$$

a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de la secante para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

b) Transforma el problema en un sistema lineal de tamaño 11×11, aproximando las derivadas por diferencias finitas de orden 2. Resuelve el sistema planteado.

c) Representa las aproximaciones obtenidas en los apartados a) y b).

Problema 4 Consideremos el siguiente problema de frontera:

$$\begin{array}{ll} y''' = -6y'^2 - y'' + 2y^3, & x \in [-1, 0] \\ y(-1) = 1/2,\ y(0) = 1/3,\ y'(0) = -1/9 & \end{array}$$

a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de Newton para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

b) Mejora los resultados obtenidos en el apartado anterior empleando la técnica de extrapolación de Richardson, para $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.025$.

c) Comprueba que $y(x) = \dfrac{1}{x+3}$ es la solución exacta del problema. Calcula el error cometido con las aproximaciones obtenidas en a) y b).

Problema 5

La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L, que soporta una carga $p(x)$ y que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} w(0) = 0, & w''(0) = 0 \\ w(L) = 0, & w''(L) = 0 \end{array}$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud. Utilizando los siguientes datos: $L = 10m$, $E = 30 \times 10^6$, $k = 1000kg/m^2$, $I = 2$ y $p(x) = 100\left(1 - \dfrac{x}{36}\right) kg/m^2$, se pide:

a) Determina $w(x)$ en el centro de la viga, mediante el método de disparo con 40 subintervalos y una tolerancia de 10^{-8}.

b) Determina la deformación en el centro de la viga, mediante diferencias finitas con $h = 0.25$. Compara los resultados con los obtenidos en a).

Referencias

- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.