Tema 6
Problemas de Valor Inicial I

Dra. Paula Triguero Navarro

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Introducción

Introducción

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Ecuación diferencial + Condición inicial

Ecuación diferencial de primer orden

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$t \in [a, b], \qquad y(a) = y_a$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_m(t)\big),$$
$$\vdots$$
$$y_m'(t) = f_m\big((t, y_1(t), \dots, y_m(t)\big),$$
$$t \in [a, b],$$
$$y_1(a) = y_{1,a}, \dots, y_m(a) = y_{m,a}$$

Ecuación diferencial de orden superior

$$y^{(m)}(t) = f\big(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)\big),$$
$$t \in [a, b],$$
$$y(a) = y_{1,a}, \dots, y^{(m-1)}(a) = y_{m,a}$$

MÉTODOS

Un paso

- Euler
- Heun
- Runge-Kutta

Multipaso

- Explícitos: Adams-Bashforth
- Implícitos: Adams-Moulton
- Predictor-corrector

Ejemplo 1. Modelo de crecimiento económico

Consideremos el modelo de crecimiento económico de un país:

$$\begin{cases} X(t) = \sigma K(t), \\ \dot{K}(t) = \alpha X(t) + H(t), \\ N(t) = N_0 e^{\rho t}, \end{cases}$$

donde $X(t)$ es la producción total anual, $K(t)$ el stock de capital, $H(t)$ el flujo anual de ayudas del exterior y $N(t)$ es el tamaño de la población, medidos en el instante t.

El modelo se resumen en la ecuación diferencial

$$\dot{K}(t) = \alpha\sigma K(t) + H(t),$$

con la condición inicial $K(0) = K_0$.

Ejemplo 2. Modelo de macroeconomía

En un modelo macroeconómico $C(t)$, $I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente el consumo, la inversión y la renta nacional de un país en un periodo t. Teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} C(t) + I(t) = Y(t), \\ \qquad\quad I(t) = k\dot{C}(t), \\ \qquad\quad C(t) = aY(t) + b, \end{cases}$$

con a, b y k constantes positivas y $a < 1$.

Se puede deducir la ecuación diferencial

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka} Y(t) - \frac{b}{ka},$$

con la condición incial $Y(0) = Y_0 > \frac{b}{1-a}$.

Ejemplo 3. Modelización epidemiológica del COVID-19

La propagación de una enfermedad contagiosa con una tasa de transmisión β y una tasa de recuperación γ se puede modelizar por medio de un modelo SIR:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} & = & -\beta S(t)I(t), \\[2ex] \dfrac{dI(t)}{dt} & = & \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\[2ex] \dfrac{dR(t)}{dt} & = & \gamma I(t), \end{cases}$$

siendo $S(t)$ la población susceptible, $I(t)$ la población infectada, $R(t)$ la población recuperada y $N = S + R + T$ es la población total.

Objetivos

- Definir los problemas de valor inicial y los distintos esquemas de ecuaciones diferenciales que los definen.
- Comprender la relación entre solución analítica y discreta de un PVI.
- Conocer procesos distintos para diseñar métodos numéricos y el error cometido en el cálculo de la solución de un PVI.
- Estudiar los métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta así como su orden de convergencia obtenido de forma numérica.

Introducción

Objetivos

- Definir los problemas de valor inicial y los distintos esquemas de ecuaciones diferenciales que los definen.
- Comprender la relación entre solución analítica y discreta de un PVI.
- Conocer procesos distintos para diseñar métodos numéricos y el error cometido en el cálculo de la solución de un PVI.
- Estudiar los métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta así como su orden de convergencia obtenido de forma numérica.

Los problemas de valor inicial se pueden definir a partir de diferentes esquemas de ecuaciones diferenciales:

- Una única ecuación diferencial de primer orden
- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Ecuaciones diferenciales con derivadas de orden mayor que uno

2

PVIs definidos por ecuaciones diferenciales de primer orden

Problema de valor inicial

EDO primer orden que expresa la variación de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente t:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

El objetivo de un PVI es encontrar la solución $y(t)$ de la ecuación conociendo la condición inicial $y(a) = y_a$.

Problema de valor inicial

EDO primer orden que expresa la variación de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente t:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

El objetivo de un PVI es encontrar la solución $y(t)$ de la ecuación conociendo la condición inicial $y(a) = y_a$.

Teorema 1

Supongamos que $D = \{(t, y) : t \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ y que $f(t, y)$ es continua en D. Si para todo par de puntos $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in D$ existe una constante $L > 0$ tal que f cumple la condición de Lipschitz:

$$|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

entonces el PVI dado por

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \qquad y(a) = y_a,$$

tiene una solución única $y(t)$, $t \in [a, b]$.

Problema de valor inicial

EDO primer orden que expresa la variación de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente t:

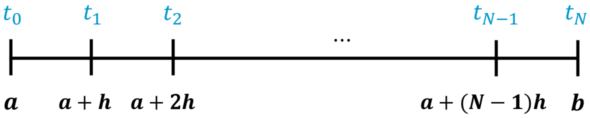
$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

El objetivo de un PVI es encontrar la solución $y(t)$ de la ecuación conociendo la condición inicial $y(a) = y_a$.

- Técnicas analíticas: solución continua $y(t)$
- Técnicas numéricas: solución discreta $y_k \approx y(t_k)$, donde t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, son los nodos de la discretización.

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ cuyos extremos son los nodos equiespaciados:

$$t_k = a + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, N,$$



- Obtendremos la solución numérica en los nodos t_k, de forma que $y_k \approx y(t_k)$

Ejemplo 4. $y'(t) = (1-2t)y(t)$, $t \in [0,3]$, $y(0) = 1$

- Obtendremos la solución discreta tomando como paso $h = 0.1$.
- Implementamos la función de Matlab que define el sistema:

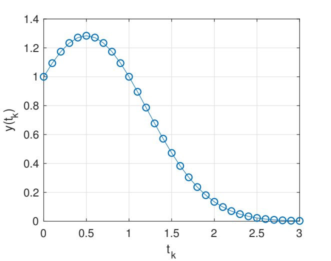
```
function dy = PVI (t,y)
  dy=(1-2*t).*y;
end
```

- Definimos la variable independiente discretizada, tomando el paso indicado:

```
>> a=0; b=3; h=0.1;
>> td=a:h:b;
```

- Definimos el vector de condiciones iniciales y ejecutamos el comando ode23:

```
>> y0=1;
>> [t,y]= ode23 ('PVI ',td,y0);
```



3

Diseño de métodos numéricos y convergencia

Diseño del método

- **Fórmulas de cuadratura:**
  Utilizaremos técnicas de integración numérica al aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para transformar el problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \qquad y(a) = y_a$$

  en la siguiente ecuación integral:

$$y(t) = y_a + \int_a^t f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

- **Diferenciación numérica:**
  Aproximamos la derivada de la variable utilizando la definición de derivada como límite de un cociente incremental:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad \Rightarrow \quad y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

- **Desarrollos de Taylor:**

$$y(t+h) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(t)}{j!} h^j + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}, \qquad \xi \in]t, t+h[.$$

Error de discretización o de truncamiento

Cuando aproximamos la función por el cociente incremental o utilizando el polinomio de Taylor truncado, estamos cometiendo en cada nodo t_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, un error de truncamiento local, $L_k(h)$.

- Error que cometemos en un solo paso cuando reemplazamos un proceso infinito por uno finito.
- Inherente a cualquier algoritmo que podamos escoger.
- Si se tiene en cuenta el error acumulado en todo el proceso de discretización, tendríamos el error de truncamiento global, $L(h)$, definido como

$$L(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |L_k(h)|.$$

- El error de truncamiento global siempre es una unidad inferior al error de truncamiento local.

Error de redondeo

- Local (en cada nodo) o global (su acumulación).
- Inherente al software utilizado para la resolución, provocado por la limitada precisión de los ordenadores.
- Su magnitud depende del número de dígitos en la mantisa usando aritmética de coma flotante.

Error total local o global

Suma del error de truncamiento y el de redondeo local o global, respectivamente.

- Si conocemos la solución exacta $y(t)$ en cada nodo t_k, definimos el error exacto local como

$$e_k = y(t_k) - y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Definición 1 (Convergencia y consistencia)

Sea $y(t)$*,* $t \in [a, b]$ *la solución exacta de un problema de valor inicial e* $y_k \approx y(t_k)$ *la solución discreta obtenida de forma numérica, donde* $t_k = a + kh$*,* $k = 0, 1, \ldots, N$*, son los nodos de la discretización. Decimos que un método numérico converge a la solución del PVI si*

$$\lim_{h \to 0} |e_k| = 0.$$

Asimismo, decimos que el método numérico es consistente con un problema de valor inicial si verifica

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \le k \le N} |L_k(h)| = 0.$$

Estabilidad

- Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un método iterativo es que la función $f(t, y(t))$ sea de Lipschitz.
- Un esquema numérico es estable punto a punto si pequeñas perturbaciones del esquema o de las condiciones iniciales afectan poco a la solución.
- Teorema de Lax: Dado un método numérico asociado a un PVI, si el esquema es consistente entonces es estable punto a punto si, y solo si, es convergente.

4

Métodos numéricos de un paso

Contenidos

Diferenciación numérica

- Como por definición

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h},$$

el enfoque más simple para resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b]$$

es aproximarla por

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \approx f(t, y(t)) \quad \Rightarrow \quad y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)),$$

donde h es próximo a 0.

- De aquí, conocida la condición incial $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0), \\ y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Método de Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

- Integrando directamente en la ecuación diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \quad y(a) = y_a,$$

se obtiene

$$y(t) = y_a + \int_a^t f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

- En particular, tras la discretización de la variable independiente en N subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

- Aproximando la integral con la fórmula de los rectángulos:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + (t_{k+1} - t_k)f(t_k, y(t_k)) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k))$$

donde h es el paso de integración, obtendríamos de nuevo el método de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Desarrollos de Taylor

- Consideremos la función $y(t)$ solución de la ecuación diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

- Dado el paso h, el desarrollo en serie de Taylor de primer orden de la función $y(t)$ está dado por

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

- Sustituyendo $y'(t) = f(t, y(t))$ en el desarrollo obtenemos

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2).$$

- Así, conocida la condición inicial $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y(t_1) &\approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0), \\ y(t_2) &\approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

- De forma sucesiva en los siguientes puntos $y(t_{k+1}) \approx y_{k+1}$ se obtiene el método de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Error y orden

- A partir de la deducción de la fórmula de Euler con desarrollos de Taylor, el error local de truncamiento es de orden 2:

$$e_{k+1} = y(t_{k+1}) - \big(y(t_k) + hy'(t_k)\big) = \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \qquad \xi_k \in]t_k, t_{k+1}[.$$

- El error global de truncamiento tras N pasos es de orden 1:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = \frac{h^2}{2} N y''(\xi) = \frac{1}{2}(b-a) y''(\xi) h = \mathcal{O}(h), \qquad \xi \in [a, b], \quad h = \frac{b-a}{N}$$

El método de Euler tiene orden 1

Teorema 1

Sea f tal que $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, con condición inicial $y(a) = y_a$. Si $y(t) \in \mathcal{C}^2[a, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k \geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de Euler, entonces

$$|e_k| \leq |y(t_k) - y_k| = \mathcal{O}(h^2)$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |e_k| = \mathcal{O}(h).$$

Algoritmo del método de Euler

- Entrada:
  - función: f
  - extremos del intervalo: a, b
  - condición inicial: y_a
  - número de subintervalos: N
- Proceso:
  - Cálculo del paso de integración h
  - Obtención de la variable independiente discretizada t
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 1 hasta N:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

  - Fin para k
- Salida: t, y

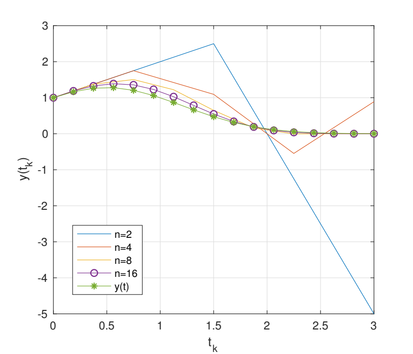
Ejemplo 5. Obtén la solución numérica del PVI

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \qquad t \in [0,3], \qquad y(0) = 1,$$

utilizando el método de Euler y $N = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ subintervalos.

- La solución exacta es: $y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$

N	E_N
2	5.002478
4	0.886193
8	0.353108
16	0.168799
32	0.081921
64	0.040323



¿Cómo estimamos de forma numérica el orden del método?

- Conocida la solución analítica, podemos estimar numéricamente el orden de un método para resolver un PVI como

$$\log_2\left(\lim_{N\to\infty}\frac{E_{N/2}}{E_N}\right),$$

donde E_N es el error máximo cometido entre la solución exacta $y(t_k)$ y la solución numérica y_k, utilizando N subintervalos:

$$E_N = \max_{1\leq k\leq N}|y(t_k) - y_k|.$$

¿Y si no conocemos la solución exacta?

- Si no conocemos el valor de la solución analítica, comparamos las soluciones discretas obtenidas duplicando el número de subintervalos a partir de

$$\log_2\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\epsilon_{N/2}}{\epsilon_N}\right),$$

donde

$$\epsilon_N = \left\| y_k^{(N)} - y_{1+2k}^{(2N)} \right\|, \qquad k = 0, 1, \ldots, N,$$

siendo $y^{(N)}$ la solución discretizada del PVI utilizando N subintervalos.

Ejemplo 5. Obtén la solución numérica del PVI

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \qquad t \in [0,3], \qquad y(0) = 1,$$

utilizando el método de Euler y $N = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ subintervalos.

- La solución exacta es: $y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$

N	E_N	$\log_2\left(E_{N/2}/E_N\right)$
2	5.002478	–
4	0.886193	2.496950
8	0.353108	1.327508
16	0.168799	1.064805
32	0.081921	1.042990
64	0.040323	1.022606

N	ϵ_N	$\log_2\left(\epsilon_{N/2}/\epsilon_N\right)$
2	6.054254	–
4	1.158963	2.385114
8	0.273823	2.081516
16	0.174685	0.648484
32	0.118520	0.559624

Contenidos

Método de Euler implícito

- Euler es un método explícito: y_{k+1} se obtiene directamente a partir de y_k
- El método de Euler hacia atrás se construye siguiendo los mismos pasos pero aproximando la derivada como

$$\frac{dy}{dt}(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

con error de truncamiento $L_k(h) = \mathcal{O}(h)$, obteniendo:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

- Euler hacia atrás es un método implícito, ya que hay que resolver la siguiente ecuación no lineal para obtener y_{k+1} a partir de y_k:

$$g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = 0.$$

Método de Euler implícito

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Algoritmo del método de Euler implícito

- Entrada: f, a, b, N, y_a
- Proceso:
  - Obtención de la variable independiente discretizada t
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 0 hasta $N-1$:
    - Uso de un método de punto fijo (por ejemplo, método de Newton) para encontrar cada nuevo y_{k+1} resolviendo la ecuación no lineal:

$$g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = 0.$$

  - Fin para k
- Salida: t, y

Ejemplo 6. Obtén la solución discreta del PVI definido por el modelo de Malthus utilizando el método de Euler explícito y el método de Euler implícito en $t \in [0,3]$ con $k = -10$, estimación inicial $y_a = 1$ y tomando $N = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ subintervalos.

Consideremos el PVI definido por el modelo de Malthus

$$y'(t) = -10y(t), \qquad t \in [0,3], \qquad y(0) = 1,$$

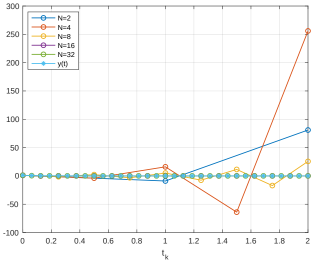
cuya solución analítica es $y(t) = e^{-10t}$.

Ejemplo 6. Obtén la solución discreta del PVI definido por el modelo de Malthus utilizando el método de Euler explícito y el método de Euler implícito en $t \in [0, 3]$ con $k = -10$, estimación inicial $y_a = 1$ y tomando $N = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ subintervalos.

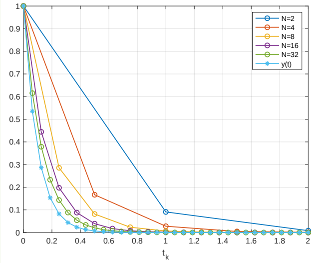
Consideremos el PVI definido por el modelo de Malthus

$$y'(t) = -10y(t), \qquad t \in [0, 3], \qquad y(0) = 1,$$

cuya solución analítica es $y(t) = e^{-10t}$.



(a) Euler explícito



(b) Euler implícito

Ejemplo 6. Obtén la solución discreta del PVI definido por el modelo de Malthus utilizando el método de Euler explícito y el método de Euler implícito en $t \in [0, 3]$ con $k = -10$, estimación inicial $y_a = 1$ y tomando $N = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ subintervalos.

Consideremos el PVI definido por el modelo de Malthus

$$y'(t) = -10y(t), \qquad t \in [0, 3], \qquad y(0) = 1,$$

cuya solución analítica es $y(t) = e^{-10t}$.

N	E_N explícito	E_N implícito
2	81	0.0909
4	256	0.1599
8	25.6289	0.2036
16	0.5365	0.1579
32	0.1603	0.0922

- Para este problema, el método de Euler explícito es inestable y requiere de muchos puntos para disminuir el error.
- El método de Euler implícito requiere de pocos puntos para aproximarse a la solución de este PVI.

Contenidos

Método de Heun

- Integrando directamente en la ecuación diferencial

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

y aproximando la integral por trapecios, siendo h el paso de integración:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau \approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \left(f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))\right)$$

obtenemos

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{2} \left(f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))\right)$$

- Como no conocemos el valor de $y(t_{k+1})$, predecimos primero un valor con Euler

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

y lo ajustamos después por trapecios

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \bar{y}_{k+1})\right)$$

Método de Heun

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}hf(t_k, y_k) + \frac{1}{2}hf\left(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)\right) = y_k + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2,$$

donde $k_1 = hf(t_k, y_k)$ y $k_2 = hf\left(t_{k+1}, y_k + k_1\right)$.

Teorema 2

Sea f tal que $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, con condición inicial $y(a) = y_a$. Si $y(t) \in \mathcal{C}^3[a, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k \geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de Heun, entonces

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq |y(t_k) - y_k| \\ &= \left| y(t_k) - y_{k-1} - \frac{1}{2}hf(t_{k-1}, y_{k-1}) - \frac{1}{2}hf(t_k, y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})) \right| \\ &= \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |e_k| = \mathcal{O}(h^2).$$

- El método de Heun tiene orden 2 con un error global de $\mathcal{O}(h^2)$.

Algoritmo del método de Heun

- Entrada: f, a, b, N, y_a
- Proceso:
  - Obtención de la variable independiente discretizada t
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 0 hasta $N-1$:
    - Cálculo de k_1 y k_2
    - $y_{k+1} = y_k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}$
  - Fin para k
- Salida: t, y

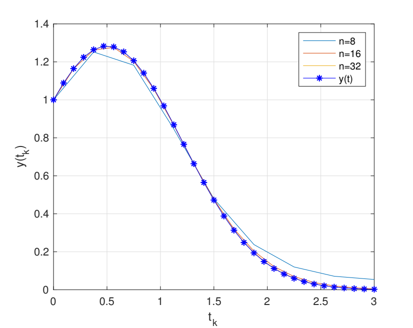
Ejemplo 7. Obtén la solución numérica del PVI

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \qquad t \in [0,3], \qquad y(0)=1,$$

utilizando el método de Heun y $N = \{2,4,8,16,32,64\}$ subintervalos.

- La solución exacta es: $y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$

N	E_N	$\log_2(E_{N/2}/E_N)$
2	14.002478	–
4	0.889272	3.976913
8	0.060006	3.889445
16	0.010358	2.534260
32	0.002242	2.207672
64	0.000528	2.086139



Contenidos

- Integrando directamente en la ecuación diferencial

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

y aproximando la integral con la fórmula de Simpson:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau \approx \frac{t_{k+1} - t_k}{6} \Big(f(t_k, y_k) + 4f(t_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \Big)$$

obtenemos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \Big(f(t_k, y_k) + 4f(t_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \Big),$$

siendo h el paso de la discretización.

- $f(t_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ y $f(t_{k+1}, y_{k+1})$ son valores que no conocemos y que debemos aproximar

Método de Runge-Kutta

- Realizamos las aproximaciones

$$f(t_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) \approx f\left(t_k + \frac{h}{2}, y\left(t_k + \frac{h}{2}\right)\right) \approx \frac{1}{2}(k_2 + k_3),$$
$$f(t_{k+1}, y_{k+1}) \approx k_4,$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_{k+1}, y_k + hk_3). \end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta explícito de orden 4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Teorema 3

Sea f *tal que* $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, *con condición inicial* $y(a) = y_a$. *Si* $y(t) \in \mathcal{C}^5[a, b]$ *y* $\{(t_k, y_k)\}_{k \geq 0}$ *es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de Runge-Kutta, entonces*

$$|e_k| \leq |y(t_k) - y_k| = \mathcal{O}(h^5)$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |e_k| = \mathcal{O}(h^4).$$

- El error global del método de Runge-Kutta es $\mathcal{O}(h^4)$.

Algoritmo del método de Runge-Kutta

- Entrada: f, a, b, N, y_a
- Proceso:
  - Obtención de la variable independiente discretizada t
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 0 hasta $N-1$:
    - Cálculo de k_1, k_2, k_3 y k_4
    - $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
  - Fin para k
- Salida: t, y

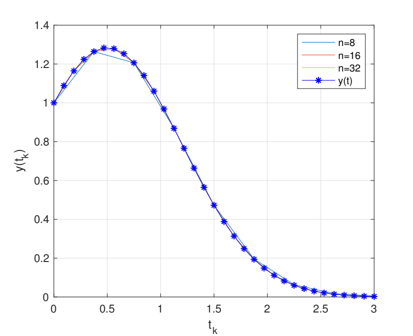
Ejemplo 8. Obtén la solución numérica del PVI

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \qquad t \in [0,3], \qquad y(0) = 1,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 y $N = \{2,4,8,16,32,64\}$ subintervalos.

- La solución exacta es: $y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$

N	E_N	$\log_2(E_{N/2}/E_N)$
2	3.997933	–
4	0.229210	4.124506
8	0.003400	6.074752
16	1.428132e–4	4.573578
32	7.295871e–6	4.290905
64	4.110425e–7	4.149720



5

PVIs definidos por sistemas de ecuaciones diferenciales

PVIs definidos por sistemas de EDOs de orden 1

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)), \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)), \\ & \vdots & \\ y_m'(t) & = & f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)), \end{array}\right.$$

- m funciones incógnitas: $y_1, y_2, \dots, y_m$
- Variable independiente: $t \in [a, b]$
- Tendremos un PVI si conocemos el valor de las m funciones incógnita en el instante inicial:

$$y_1(a) = y_{1,a}, \qquad y_2(a) = y_{2,a}, \qquad \dots, \qquad y_m(a) = y_{m,a}.$$

Ejemplo 9.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1^2 + 2y_2, \\ y_2'(t) & = & y_1^2 + \sin(y_2), \end{array}\right. \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

sujeto a las condiciones iniciales $y_1(\pi) = 0$, $y_2(\pi) = 1$.

PVIs definidos por ecuaciones diferenciales de orden m

$$y^{(m)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)\right)$$

- Función incógnita: $y(t)$
- Variable independiente: $t \in [a, b]$
- Tendremos un PVI si cononemos los valores de la función incógnita y de sus derivadas hasta orden $m-1$ en el instante inicial:

$$y(a) = y_{1,a}, \quad y'(a) = y_{2,a}, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)}(a) = y_{m,a}.$$

Ejemplo 10.

Consideremos la ecuación diferencial de orden 3

$$y'''(t) = 4y''(t) - y'(t)^2 - e^{-t}, \qquad t \in [0, 2]$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3, \qquad y''(0) = -1.$$

Obtención de un sistema de PVIs de primer orden

- Realizamos el cambio de variables:

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad \ldots, \quad y_m(t) = y^{(m-1)}(t),$$

➔ La ecuación diferencial de orden m se convierte en el sistema de EDOs

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ \vdots \\ y_m'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ \vdots \\ y^{(m)}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ f\left(t, y_1(t), \ldots, y_m(t)\right) \end{bmatrix}$$

con condiciones iniciales

$$y_1(a) = y_{1,a}, \quad y_2(a) = y_{2,a}, \quad \ldots, \quad y_m(a) = y_{m,a},$$

Ejemplo 11.

Consideremos el PVI:

$$y'''(t) = 4y''(t) - y'(t)^2 - e^{-t}, \qquad t \in [0, 2], \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -1.$$

Realizando el cambio de variables:

$$y_1(t) = y(t), \qquad y_2(t) = y'(t), \qquad y_3(t) = y''(t),$$

el PVI se transforma en el siguiente sistema de EDOs de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_3(t), \\ y_3'(t) & = & 4y_3(t) - y_2(t)^2 - e^{-t}, \end{array} \right.$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 3, \qquad y_3(0) = -1.$$

Contenidos

PVI

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)), \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)), \\ & \vdots & \\ y_m'(t) & = & f_m(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)), \end{array}\right. \qquad t \in [a, b]$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$y_1(a) = y_{1,a}, \qquad y_2(a) = y_{2,a}, \qquad \ldots, \qquad y_m(a) = y_{m,a}.$$

- Discretización:

$$h = \frac{b-a}{N}, \qquad t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

- Vector de estimaciones iniciales: $Ya = (y_{1a}, y_{2a}, \ldots, y_{ma})$
- Solución en el nodo t_k: $Y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk})$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$

Método de Euler para sistemas

$$Y_{k+1} = Y_k + hF(t_k, y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk}), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

EulerSistemas.m

```
function [t,Y] = EulerSistemas(F,a,b,N,Ya)
  h=(b-a)/N;
  t=a:h:b;
  t=t(:);
  Y=zeros(N+1,length(Ya));
  Y(1,:)=Ya;
  for k=1:N
    Y(k+1,:)=Y(k,:)+h*feval(F,t(k),Y(k,:))';
  end
  end
```

Ejemplo 12.

Utiliza el método de Euler para estimar la solución del PVI

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x + 2y - (2t^2 + 1)e^{2t} \\ y'(t) &= 4x + y + (t^2 + 2t - 4)e^{2t} \end{aligned} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \qquad t \in [0, 1]$$

a) Obtén la aproximación de la solución utilizando un paso $h = \frac{1}{10}$ y representa su evolución respecto a la variable independiente.

b) Sabiendo que la solución exacta es

$$x(t) = \frac{e^{5t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + e^{2t}, \qquad y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2 e^{2t},$$

obtén una aproximación numérica del orden de convergencia del método de Euler.

Ejemplo 12.

Utiliza el método de Euler para estimar la solución del PVI

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x + 2y - (2t^2+1)e^{2t} \\ y'(t) &= 4x + y + (t^2+2t-4)e^{2t} \end{aligned} \qquad x(0)=1, \quad y(0)=1, \qquad t \in [0,1]$$

a) Obtén la aproximación de la solución utilizando un paso $h = \frac{1}{10}$ y representa su evolución respecto a la variable independiente.

b) Sabiendo que la solución exacta es

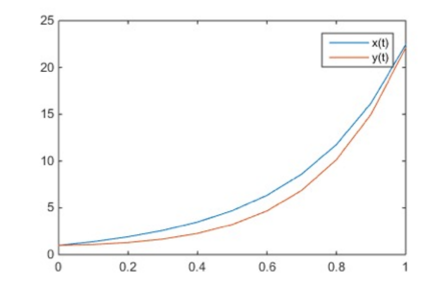
$$x(t) = \frac{e^{5t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + e^{2t}, \qquad y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2 e^{2t},$$

obtén una aproximación numérica del orden de convergencia del método de Euler.

```
function f = ej12(t,z)
x=z(1); y=z(2);
f=[3*x+2*y-(2*t.^2+1).*exp(2*t); 4*x+y+(t.^2+2*t-4).*exp(2*t)];
end
```

Ejemplo 12.

```
>> [t,Y]=EulerSistemas('ej12',0,1,10,[1,1]);
>> plot(t,Y(:,1));
>> hold on
>> plot(t,Y(:,2));
```



t_k	x_k	y_k
0	1.0000	1.0000
0.1	1.4000	1.1000
0.2	1.9154	1.3071
0.3	2.5903	1.6729
0.4	3.4870	2.2732
0.5	4.6940	3.2187
0.6	6.3382	4.6707
0.7	8.6027	6.8629
0.8	11.7532	10.1346
0.9	16.1767	14.9776
1	22.4403	22.1052

Para finalizar...

- Lecciones magistrales
- Material complementario: A fondo
- Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET