

## Capítulo 4

# Ecuaciones en Derivadas Parciales

### 4.1. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

**Definición 4.1** Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales o breviadamente ecuación en derivadas parciales (EDP) a una ecuación de la forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots\right) = 0 \quad (4.1)$$

donde  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $p \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ , son las variables independientes y  $u \equiv u(x_1, \dots, x_n)$  es la variable dependiente y siendo  $k_1 + \dots + k_n = m$ .

La EDP estará definida y planteada en la región abierta (finita o infinita)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.2** El orden de la EDP está indicado por la derivada de mayor orden dentro de la ecuación.

**Observación 4.1** Las derivadas parciales pueden expresarse como

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = u_{x_k}$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = u_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}}$$

Y para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$  utilizaremos la siguiente notación:

$$n = 2 \Rightarrow (x_1, x_2) = \begin{cases} (x, y) & \text{Para problemas espaciales} \\ (t, x) & \text{Para problemas espacio-temporales} \end{cases}$$

$$n = 3 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x, y, z) & \text{Para problemas espaciales} \\ (t, x, y) & \text{Para problemas espacio-temporales} \end{cases}$$

**Ejemplo 4.1** En la siguiente tabla se presentan algunas EDP junto con su correspondiente orden:

Ecuación	Expresión	Orden
Laplace	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	2
Fourier	$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$	2
Onda	$u_{xx} - u_{yy} = 0$	2
Euler-Bernouilli	$u_{tt} + \beta^2 u_{xxxx} = 0$	4
Schrodinger	$u_t - i\beta u_{xx} = 0$	2
Helmholtz	$u_{xx} + u_{yy} + \alpha^2 u = 0$	2
Korleneg-de Vries	$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0$	3
Tricomi	$u_{xx} + xu_{yy} = 0$	2

**Observación 4.2** Por su dificultad no estudiaremos sistemas de EDP.

Las EDP se utilizan, por ejemplo, para modelar procesos que además de tener una variación temporal, tienen una variación espacial tales como la variación del calor con el tiempo en un sólido, la distribución de poblaciones en un determinado habitat con el tiempo o la propagación del sonido de las cuerdas de una guitarra.

En general las EDP son bastante difíciles de resolver de forma analítica, de hecho, no existen teoremas de existencia y unicidad tan “sencillos” como los estudiados en los problemas de valor inicial asociados a las EDO, nosotros trataremos de resolver las EDP correspondientes a los problemas clásicos.

**Definición 4.3** Una solución de la ecuación 4.1 en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  es cualquier función  $u \equiv u(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^m(\Omega)$  tal que a sustituir  $u$  y todas sus derivadas parciales en dicha ecuación obtenemos una identidad.

**Observación 4.3** Generalmente se exigirá que  $u$  sea continua o diferenciable en  $\partial\Omega$ , la frontera del conjunto  $\Omega$ , que tenga todas las derivadas parciales continuas en  $\Omega$  y que se cumpla la ecuación en el interior de  $\Omega$ .

#### 4.1.1. Algunos métodos sencillos para resolver una EDP

##### Integración directa

Algunas EDP pueden resolverse mediante **integración directa**, como en los ejemplos siguientes:

**Ejemplo 4.2** Resuelve la siguiente EDP de primer orden

$$u_x = x + y.$$

**Solución:** Como la EDP es de primer orden y sólo incluye a la primera derivada respecto de  $x$ , una de las variables, buscaremos una función  $u$ , que sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , integrando respecto de esa variable

$$u = \int u_x dx = \int (x + y) dx = \frac{x^2}{2} + xy + \phi(y)$$

La función  $\phi(y)$  es la constante respecto a  $x$  que aparece al integrar de forma indefinida la función  $x+y$ , y si bien es constante respecto de la variable de integración hay que permitir que pueda depender de la otra variable  $y$ , ya que cualquiera que sea la expresión de  $\phi(y)$ , al ser sólo función de  $y$  ocurrirá:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi(y)) = 0$$

**Ejemplo 4.3** Resuelve la siguiente EDP de segundo orden

$$u_{xy} = 0$$

**Solución:** Buscamos una función  $u$  que sea de clase  $C^2$ . En primer lugar Integraremos la ecuación respecto a  $y$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0 \\ \Downarrow \\ \int u_{xy} dy &= \int 0 dy \\ \Downarrow \\ u_x &= \phi_0(x) \end{aligned}$$

ya que cualquier función que sólo dependa de  $x$  es constante respecto a  $y$ .

Ahora integramos respecto de la otra variable  $y$

$$\begin{aligned} u_x &= \phi_0(x) \\ \Downarrow \\ \int u_x dx &= \int \phi_0(x) dx \\ \Downarrow \\ u &= \phi_1(x) + \phi_2(y) \end{aligned}$$

donde  $\phi_1(x)$  es una primitiva cualquiera de  $\phi_0(x)$ . Por tanto la solución de la EDP viene dada por cualquier función  $u$  de la forma

$$u(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

con  $\phi_1$  y  $\phi_2$  funciones arbitrarias de una variable y que sean derivables dos veces. Por ejemplo, serían solución de esta EDP las siguientes funciones:

$$u(x, y) = x + y$$

$$u(x, y) = e^x + \sin(y)$$

$$u(x, y) = x^2 + ye^y$$

**Ejemplo 4.4** Resuelva la siguiente EDP de segundo orden

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

**Solución:** Si nos acordamos de la teoría de variable compleja vemos que las soluciones de esta EDP son funciones armónicas, es decir, son la parte real o imaginaria de funciones holomorfas  $f(z) = f(x + iy)$

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$$

$$u(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$$

Por ejemplo, tendremos como posibles soluciones las siguientes funciones:

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$u(x, y) = 2xy$$

$$u(x, y) = e^x \cos(y)$$

### Cambio de variable

Mediante un **cambio de variable**, algunas EDP se pueden transformar en otras que se pueden integrar de forma directa, como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.5** Resuelve la EDP de primer orden definida como:

$$u_x - u_y = 0$$

**Solución:** Hacemos en la EDP el cambio de variable

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= x + y \implies \begin{cases} \alpha_x = 1, \\ \alpha_y = 1 \end{cases} \\ \beta(x, y) &= x - y \implies \begin{cases} \beta_x = 1 \\ \beta_y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la regla de la cadena

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = u_\alpha + u_\beta \\ u_y &= u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha - u_\beta \end{aligned} \right\}$$

y al sustituir en la EDP obtendremos una nueva ecuación en las variables  $(\alpha, \beta)$

$$u_x - u_y = 0 \Leftrightarrow (u_\alpha + u_\beta) - (u_\alpha - u_\beta) = 2u_\beta = 0$$

o bien

$$u_\beta = 0,$$

cuya solución se obtiene mediante integración directa:

$$u(\alpha, \beta) = \int u_\beta d\beta = \phi(\alpha),$$

la solución es cualquier función de  $\xi$  y deshaciendo el cambio

$$u(x, y) = \phi(x + y)$$

de donde se deduce que la solución será cualquier función derivable de una variable pero evaluada en  $x + y$ , como por ejemplo

$$u(x, y) = \sin(x + y)$$

$$u(x, y) = (x + y)^2$$

$$u(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y$$

### Método de separación de variables

En dos dimensiones y haciendo cierta suposición sobre sus soluciones es posible resolver algunas clases de EDP. Este procedimiento es el llamado **método de separación de variables** donde se supone que la función buscada  $u(x, y)$  es de la forma

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

Con esta suposición se cumple

$$u_x(x, y) = F'(x)G(y),$$

$$u_y(x, y) = F(x)G'(y),$$

$$u_{xy}(x, y) = F'(x)G'(y),$$

$$u_{xx}(x, y) = F''(x)G(y),$$

$$u_{yy}(x, y) = F(x)G''(y),$$

y en general

$$u_x \underbrace{\cdots}_{k} u_y \underbrace{\cdots}_{n-k} y = \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x, y) = F^{(k)}(x)G^{(n-k)}(y).$$

Sustituyendo estas expresiones en la EDP, en algunas ocasiones es posible reducir una EDP a un sistema de EDO con dos ecuaciones que puede resolverse con los métodos habituales.

**Ejemplo 4.6** Resuelve la siguiente EDP de segundo orden por el método de separación de variables

$$u_{xx} = 4u_y.$$

**Solución:** Asumiremos por tanto que la solución  $u(x, y)$  es de la forma

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

por tanto

$$\begin{aligned} u_x &= F'(x)G(y) \Rightarrow u_{xx} = F''(x)G(y) \\ u_y &= F(x)G'(y) \Rightarrow u_{yy} = F(x)G''(y) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la EDP obtendremos

$$F''(x)G(y) = 4F(x)G'(y)$$

Si ahora se agrupan de forma independiente los términos en  $x$  e  $y$ , obtenemos

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{4G'(y)}{G(y)}.$$

El primer miembro es una función que sólo depende de  $x$  y el segundo miembro es una función que sólo depende de  $y$ , así que la única forma de que se cumpla la igualdad es que ambos valores sean iguales a una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que se denomina *constante de separación*:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{4G'(y)}{G(y)} = \lambda$$

Igualando cada fracción a la constante de separación obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \Rightarrow F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$\frac{4G'(y)}{G(y)} = \lambda \Rightarrow 4G'(y) - \lambda G(y) = 0$$

que se resuelven de forma independiente. Según el signo de  $\lambda$  distinguimos tres casos:

### 1. Caso $\lambda = 0$

Si  $\lambda = 0$ , las ecuaciones resultantes son

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow F''(x) = 0$$

$$4G'(y) - \lambda G(y) = 0 \Rightarrow G'(y) = 0$$

y podemos integrar directamente las dos ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = c_1 x + c_2 \\ G(y) = c_3 \end{array} \right\}$$

siendo  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ , constantes arbitrarias. La función  $u(x, y)$  sería

$$u(x, y) = F(x)G(y) = (c_1 x + c_2)c_3 = A_1 x + B_1$$

donde se ha hecho el cambio

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = c_1 c_3, \\ B_1 = c_2 c_3. \end{array} \right.$$

### 2. Caso $\lambda > 0$

Si  $\lambda$  es positivo entonces podemos suponer que es de la forma

$$\lambda = a^2 > 0$$

y las ecuaciones serán

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow F''(x) - a^2 F(x) = 0$$

$$4G'(y) - \lambda G(y) = 0 \Rightarrow 4G'(y) - a^2 G(y) = 0$$

La primera de estas ecuaciones es de segundo orden lineal y de coeficientes constantes cuya solución general es de la forma

$$F(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

La segunda también es lineal, pero de primer orden y su solución es

$$G(y) = c_3 e^{a^2 y/4}$$

La función  $u(x, y)$  será

$$u(x, y) = F(x) G(y) = (c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}) c_3 e^{a^2 y/4} = A_2 e^{ax+a^2 y/4} + B_2 e^{-ax+a^2 y/4}$$

donde se ha hecho el cambio

$$\begin{aligned} A_2 &= c_1 c_3, \\ B_2 &= c_2 c_3. \end{aligned}$$

### 3. Caso $\lambda < 0$

Si ahora suponemos que  $\lambda$  es negativo entonces podemos poner

$$\lambda = -a^2 < 0$$

y las ecuaciones serán

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow F''(x) + a^2 F(x) = 0$$

$$4G'(y) - \lambda G(y) = 0 \Rightarrow 4G'(y) + a^2 G(y) = 0$$

Como en el caso anterior, la primera de estas ecuaciones es de segundo orden, en este caso, como el polinomio característico tiene raíces complejas  $\pm ai$ , su solución general es de la forma

$$F(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$$

La segunda vuelve a ser de primer orden y su solución general es

$$G(y) = c_3 e^{-a^2 y/4}$$

La función  $u(x, y)$  será

$$u(x, y) = F(x) G(y) = (c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)) c_3 e^{a^2 y/4} = A_3 e^{a^2 y/4} \cos(ax) + B_3 e^{a^2 y/4} \sin(ax)$$

donde se ha hecho el cambio

$$\begin{aligned} A_3 &= c_1 c_3, \\ B_3 &= c_2 c_3. \end{aligned}$$

En estos ejemplos se ha visto que de forma similar a lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) para las que la solución general implicaba la existencia de constantes arbitrarias, en este caso las soluciones de una EDP suele implicar a funciones arbitrarias. En general al resolver una EDP podemos obtener una cantidad infinita de soluciones que dependerán de esas funciones arbitrarias. Para obtener una solución única para problemas de EDP y tal y como ocurre con las EDO, estos problemas deben llevar asociadas unas condiciones o restricciones que pueden ser de dos tipos: condiciones iniciales y/o condiciones de contorno. Veamos esta diferencia con un ejemplo.

**Ejemplo 4.7** La siguiente EDP modela la variación de temperatura con el tiempo en una varilla de longitud 1. Si  $u(t, x)$  es la temperatura de la varilla en el instante  $t$  en la posición  $x$  de la varilla, entonces, podemos plantear el problema como

$$\left. \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0, x) = f(x) \quad x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad t \geq 0 \end{array} \right\}$$

La condición  $u(0, x) = f(x)$  es la temperatura en el instante inicial  $t = 0$  y representa una condición inicial del problema. Las condiciones  $u(t, 0) = 0$  y  $u(t, 1) = 0$  son restricciones que se le imponen a los extremos de la varilla en cualquier instante de tiempo y se denominan condiciones de contorno.

## 4.2. Clasificación de EDP

Las EDP, al igual que las EDO, se pueden clasificar en *lineales* y *no lineales*.

**Definición 4.4** Una EDP es *lineal*, sí y sólo si,  $u$ , la variable dependiente y sus correspondientes derivadas parciales aparecen sólo en primera potencia.

Por ejemplo, una EDP lineal de 2º orden será de la forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + F u = G \quad (4.2)$$

donde

$$A_{ij} \equiv A_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

$$B_i \equiv B_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$F \equiv F(x_1, \dots, x_n)$$

$$G \equiv G(x_1, \dots, x_n)$$

son funciones de las variables independientes y donde se supone además que  $A_{ij} = A_{ji}$ .

Si la función  $G$  es idénticamente nula

$$G \equiv 0$$

la ecuación lineal se dice *homogénea*, siendo *no homogénea* en caso contrario.

Si las funciones  $A_{ij}$ ,  $B_i$ , y  $F$  son constantes, la EDP 4.2 sería lineal con coeficientes constantes.

**Ejemplo 4.8** Las siguientes ecuaciones son lineales

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{xx} - u_{yy} = xy$$

siendo la primera de ellas homogénea y la segunda no homogénea.

**Teorema 4.1** Si  $u_1, \dots, u_n$  son soluciones de una EDP lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal de ellas de la forma

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

con  $c_i \in \mathbb{R}$ , también es solución de la EDP.

La solución general de una EDP lineal de orden  $n$  es una familia de funciones que depende de  $n$  funciones arbitrarias.

#### 4.2.1. Ecuaciones lineales de orden 2

En esta sección estudiaremos con más detalle las ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes en dos dimensiones, que están definidas mediante la expresión

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \quad (4.3)$$

donde en este caso  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$  y  $G(x, y)$  es una función.

##### Tipos de EDP lineales de 2º orden

**Definición 4.5** Para la EDP 4.3 definimos el discriminante como

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

y la EDP correspondiente se clasifica según su signo en:

$$\text{Elíptica} \Leftrightarrow B^2 - 4AC < 0$$

$$\text{Hiperbólica} \Leftrightarrow B^2 - 4AC > 0$$

$$\text{Parabólica} \Leftrightarrow B^2 - 4AC = 0$$

La clasificación de las EDP de segundo orden lineales está basada en la posibilidad de reducir la ecuación general, mediante cambios de variable tanto en las variables dependientes como en las independientes, a una ecuación del tipo siguiente

$$v_{ss} + v_{tt} + \gamma v = \varphi(s, t) \quad (4.4)$$

$$v_{ss} - v_{tt} + \gamma v = \varphi(s, t) \quad (4.5)$$

$$v_{tt} - v_s = \varphi(s, t) \quad (4.6)$$

$$v_{ss} + \gamma v = \varphi(s, t) \quad (4.7)$$

donde  $\gamma$  es una constante que puede tomar los valores  $-1, 0$  o  $1$  y  $\varphi(s, t)$  es una función cualquiera en las nuevas variables  $(s, t)$ .

### Paso a la forma canónica (\*)

En esta sección veremos como transformar una EDP lineal de segundo orden de tipo general a una de las formas anteriores (esto no es posible, en general, para más de dos variables). Veremos el proceso con un ejemplo.

**Ejemplo 4.9** *Expresa en forma canónica la siguiente EDP lineal de 2º orden:*

$$3u_{xx} - 4u_{xy} + 6u_{yy} - 12u_x - 9u_y - 5u = 0$$

1. **Solución:** En primer lugar comprobamos el tipo de EDP

$$\left. \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \\ C = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (6) = 16 - 72 < 0$$

por tanto es elíptica.

El proceso de transformación a la forma canónica se hace en varias etapas. En primer lugar vamos a eliminar el término  $u_{xy}$  en la ecuación, bueno realmente lo que haremos será un cambio de variable, de forma que en las nuevas variables la ecuación no tenga el término correspondiente a la derivada cruzada. El cambio para ello es una rotación de ángulo  $\varphi \in \mathbb{R}$ :

$$\left( \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ \beta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{array}$$

y se elegirá el valor  $\varphi$  para que en las nuevas variables  $(\alpha, \beta)$  no aparezca el término  $u_{\alpha\beta}$ . Utilizando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que  $u \equiv u(\alpha(x, y), \beta(x, y))$ , tendremos

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x,$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y,$$

siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \cos \varphi \\ \alpha_y = \sin \varphi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = -\sin \varphi \\ \beta_y = \cos \varphi \end{array} \right.$$

por tanto

$$u_x = u_\alpha \cos \varphi - u_\beta \sin \varphi$$

$$u_y = u_\alpha \sin \varphi + u_\beta \cos \varphi$$

y para las segundas derivadas

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= (u_{\alpha\alpha}\alpha_x + u_{\alpha\beta}\beta_x) \cos \varphi - (u_{\beta\alpha}\alpha_x + u_{\beta\beta}\beta_x) \sin \varphi \\
 &= (u_{\alpha\alpha} \cos \varphi - u_{\alpha\beta} \sin \varphi) \cos \varphi - (u_{\beta\alpha} \cos \varphi - u_{\beta\beta} \sin \varphi) \sin \varphi \\
 &= u_{\alpha\alpha} \cos^2 \varphi - 2u_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\beta\beta} \sin^2 \varphi \\
 u_{xy} &= (u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y) \cos \varphi - (u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y) \sin \varphi \\
 &= (u_{\alpha\alpha} \sin \varphi + u_{\alpha\beta} \cos \varphi) \cos \varphi - (u_{\beta\alpha} \sin \varphi + u_{\beta\beta} \cos \varphi) \sin \varphi \\
 &= u_{\alpha\alpha} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\alpha\beta} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - u_{\beta\beta} \sin \varphi \cos \varphi \\
 u_{yy} &= (u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y) \sin \varphi + (u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y) \cos \varphi \\
 &= (u_{\alpha\alpha} \sin \varphi + u_{\alpha\beta} \cos \varphi) \sin \varphi + (u_{\beta\alpha} \sin \varphi + u_{\beta\beta} \cos \varphi) \cos \varphi \\
 &= u_{\alpha\alpha} \sin^2 \varphi + 2u_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\beta\beta} \cos^2 \varphi
 \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha}.$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{aligned}
 0 &= 3u_{xx} - 4u_{xy} + 6u_{yy} - 12u_x - 9u_y - 5u \\
 &= 3(u_{\alpha\alpha} \cos^2 \varphi - 2u_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\beta\beta} \sin^2 \varphi) \\
 &\quad - 4(u_{\alpha\alpha} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\alpha\beta} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - u_{\beta\beta} \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &\quad + 6(u_{\alpha\alpha} \sin^2 \varphi + 2u_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\beta\beta} \cos^2 \varphi) \\
 &\quad - 12(u_{\alpha} \cos \varphi - u_{\beta} \sin \varphi) - 9(u_{\alpha} \sin \varphi + u_{\beta} \cos \varphi) - 5u \\
 &= u_{\alpha\alpha} (3 \cos^2 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi + 6 \sin^2 \varphi) \\
 &\quad + u_{\alpha\beta} (6 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi) \\
 &\quad + u_{\beta\beta} (3 \sin^2 \varphi + 6 \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &\quad - u_{\alpha} (12 \cos \varphi + 9 \sin \varphi) + u_{\beta} (12 \sin \varphi - 9 \cos \varphi) - 5u
 \end{aligned}$$

Como queremos que el término  $u_{\alpha\beta}$  desaparezca de esta ecuación tendremos que elegir  $\varphi$  tal que el coeficiente asociado a esta derivada debe ser cero

$$6 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi = 0,$$

dividiendo por  $\cos^2 \varphi$  (para ello hay que suponer que  $\cos^2 \varphi \neq 0$ ):

$$6 \tan \varphi - 4 + 4 \tan^2 \varphi = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado en la variable  $\tan \varphi$  y cuyas soluciones son

$$\tan \varphi = \frac{-6 \pm 10}{8} = \begin{cases} \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ -\frac{16}{8} = -2 \end{cases}$$

Cualquiera de las dos soluciones sería adecuada para hacer el cambio, pero tomaremos la positiva por comodidad. Para encontrar el valor de  $\sin \varphi$  y  $\cos \varphi$  utilizaremos las relaciones trigonométricas

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 2 \sin \varphi$$

y

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sin^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sin^2 \varphi = \frac{1}{5}$$

Elegiremos  $\varphi$  en el primer cuadrante para que las razones trigonométricas  $\sin \varphi$  y  $\cos \varphi$  sean positivas (aunque también sería válida la elección del tercer cuadrante), por tanto

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

De este modo para estos valores, podemos obtener todos los coeficientes en la nueva ecuación:

$$3 \cos^2 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi + 6 \sin^2 \varphi = 3 \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 - 4 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \left( 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \right) + 6 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = 2$$

$$6 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi = 6 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \left( 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \right) - 4 \left( 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = 0$$

$$3 \sin^2 \varphi + 6 \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi = 3 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 6 \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \left( 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = 7$$

$$12 \cos \varphi + 9 \sin \varphi = 12 \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + 9 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{33}{5} \sqrt{5}$$

$$12 \sin \varphi - 9 \cos \varphi = 12 \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) - 9 \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) = -\frac{6}{5} \sqrt{5}$$

Y la ecuación será

$$2u_{\alpha\alpha} + 7u_{\beta\beta} - \frac{33}{5}\sqrt{5}u_\alpha - \frac{6}{5}\sqrt{5}u_\beta - 5u = 0$$

o multiplicando por 5

$$10u_{\alpha\alpha} + 35u_{\beta\beta} - 33\sqrt{5}u_\alpha - 6\sqrt{5}u_\beta - 25u = 0$$

Una vez eliminado el término  $u_{\alpha\beta}$ , el siguiente paso es eliminar los términos correspondientes a las derivadas primarias. En ambos casos se hace el mismo tipo de cambio en la variable dependiente,

por ejemplo, supongamos que queremos eliminar el término correspondiente a  $u_\alpha$  haremos el cambio

$$u = ve^{\alpha k}$$

donde  $k$  es un parámetro que se elegirá para que el término correspondiente sea 0. Con este cambio las derivadas serán

$$u_\alpha = v_\alpha e^{\alpha k} + kve^{\alpha k} \Rightarrow u_{\alpha\alpha} = v_{\alpha\alpha} e^{\alpha k} + 2kv_\alpha e^{\alpha k} + k^2 ve^{\alpha k},$$

$$u_\beta = v_\beta e^{\alpha k} \Rightarrow u_{\beta\beta} = v_{\beta\beta} e^{\alpha k}.$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} 10(v_{\alpha\alpha} e^{\alpha k} + 2kv_\alpha e^{\alpha k} + k^2 ve^{\alpha k}) + 35(v_{\beta\beta} e^{\alpha k}) - 33\sqrt{5}(v_\alpha e^{\alpha k} + kve^{\alpha k}) - 6\sqrt{5}v_\beta e^{\alpha k} - 25ve^{\alpha k} &= 0, \\ (10(v_{\alpha\alpha} + 2kv_\alpha + k^2 v) + 35v_{\beta\beta} - 33\sqrt{5}(v_\alpha + kv) - 6\sqrt{5}v_\beta - 25v)e^{\alpha k} &= 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $e^{\alpha k} \neq 0$ , debe ocurrir:

$$10(v_{\alpha\alpha} + 2v_\alpha k + k^2 v) + 35v_{\beta\beta} - 33\sqrt{5}(v_\alpha + kv) - 6\sqrt{5}v_\beta - 25v = 0,$$

y reagrupando

$$10v_{\alpha\alpha} + 35v_{\beta\beta} + v_\alpha(20k - 33\sqrt{5}) - 6\sqrt{5}v_\beta + v(10k^2 - 33\sqrt{5}k - 25) = 0,$$

por tanto si tomamos

$$20k - 33\sqrt{5} = 0 \Rightarrow k = \frac{33\sqrt{5}}{20},$$

tendremos

$$(10k^2 - 33\sqrt{5}k - 25) = 10\left(\frac{33\sqrt{5}}{20}\right)^2 - 33\sqrt{5}\left(\frac{33\sqrt{5}}{20}\right) - 25 = -\frac{1289}{8},$$

y la edp será

$$10v_{\alpha\alpha} + 35v_{\beta\beta} - 6\sqrt{5}v_\beta - \frac{1289}{8}v = 0.$$

Para eliminar el término correspondiente a  $v_\beta$  haremos un cambio similar:

$$v = we^{\beta k}$$

y de nuevo  $k$  es un parámetro que debemos elegir para que el término  $w_\beta$  sea 0. Con este cambio las correspondientes derivadas serán

$$v_\alpha = w_\alpha e^{\beta k} \Rightarrow v_{\alpha\alpha} = w_{\alpha\alpha} e^{\beta k}$$

$$v_\beta = w_\beta e^{\beta k} + kwe^{\beta k} \Rightarrow v_{\beta\beta} = w_{\beta\beta} e^{\beta k} + 2kw_\beta e^{\beta k} + k^2 w_{\beta\beta} e^{\beta k}$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned} 10(w_{\alpha\alpha} e^{\beta k}) + 35(w_{\beta\beta} e^{\beta k} + 2kw_\beta e^{\beta k} + k^2 w_{\beta\beta} e^{\beta k}) - 6\sqrt{5}(w_\beta e^{\beta k} + kwe^{\beta k}) - \frac{1289}{8}(we^{\beta k}) &= 0 \\ \left(10w_{\alpha\alpha} + 35(w_{\beta\beta} + 2kw_\beta + k^2 w_{\beta\beta}) - 6\sqrt{5}(w_\beta + kw) - \frac{1289}{8}w\right)e^{\beta k} &= 0 \end{aligned}$$

de nuevo  $e^{\beta k} \neq 0$  así que podemos simplificarlo

$$10w_{\alpha\alpha} + 35(w_{\beta\beta} + 2kw_{\beta} + k^2w_{\beta\beta}) - 6\sqrt{5}(w_{\beta} + kw) - \frac{1289}{8}w = 0$$

y reagrupando nos queda

$$10w_{\alpha\alpha} + 35w_{\beta\beta} + w_{\beta}\left(70k - 6\sqrt{5}\right) + w\left(35k^2 - 6\sqrt{5}k - \frac{1289}{8}\right) = 0$$

para eliminar el término  $w_{\beta}$ , tomamos

$$70k - 6\sqrt{5} = 0 \Rightarrow k = \frac{6\sqrt{5}}{70} = \frac{3\sqrt{5}}{35}$$

tendremos

$$35k^2 - 6\sqrt{5}k - \frac{1289}{8} = 35\left(\frac{3\sqrt{5}}{35}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(\frac{3\sqrt{5}}{35}\right) - \frac{1289}{8} = -\frac{9095}{56}$$

y la edp en la nueva variable queda como:

$$10w_{\alpha\alpha} + 35w_{\beta\beta} - \frac{9095}{56}w = 0$$

Si introducimos ahora el cambio

$$p = \frac{9095}{56}w \Rightarrow \begin{cases} p_{\alpha\alpha} = \frac{9095}{56}w_{\alpha\alpha} \Rightarrow w_{\alpha\alpha} = \frac{56}{9095}p_{\alpha\alpha} \\ p_{\beta\beta} = \frac{9095}{56}w_{\beta\beta} \Rightarrow w_{\beta\beta} = \frac{56}{9095}p_{\beta\beta} \end{cases}$$

y la ecuación queda

$$10w_{\alpha\alpha} + 35w_{\beta\beta} - \frac{9095}{56}w = 0 \Rightarrow 10\frac{56}{9095}p_{\alpha\alpha} + 35\frac{56}{9095}p_{\beta\beta} - p = 0 \Rightarrow \frac{112}{1819}p_{\alpha\alpha} + \frac{392}{1819}p_{\beta\beta} - p = 0$$

Finalmente hacemos los siguientes cambios en las variables independientes

$$t = \alpha\sqrt{\frac{1819}{112}}$$

$$s = \beta\sqrt{\frac{1819}{392}}$$

que nos dará

$$\begin{aligned} p_{\alpha\alpha} &= p_{tt}\frac{1819}{112} \\ p_{\beta\beta} &= p_{ss}\frac{1819}{392} \end{aligned}$$

y la ecuación queda finalmente como

$$p_{tt} + p_{ss} - p = 0$$

Aunque el cambio empleado para eliminar la componente  $u_{xy}$  es válido para cualquier ecuación, se puede hacer uno específico para cada tipo de ecuación, que se resume en la siguiente tabla:

Tipo	Discriminante	Cambio	Forma Canónica
Hiperbólica	$B^2 - 4AC > 0$	$\begin{cases} \text{Si } A \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = y - \left( \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) x \\ \beta = y - \left( \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) x \end{array} \right. \\ \text{Si } A = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = x \\ \beta = x - \frac{B}{C}y \end{array} \right. \end{cases}$	$u_{\alpha\beta} = F(u, u_\alpha, u_\beta)$ $\Downarrow$ $(\alpha = s + t, \beta = s - t)$ $\Downarrow$ $u_{ss} - u_{tt} = F(u, u_s, u_t)$
Parabólica	$B^2 - 4AC = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = y - \frac{B}{2A}x \\ \beta = hy - kx \end{array} \right.$	$u_{\beta\beta} = F(u, u_\alpha, u_\beta)$
Elíptica	$B^2 - 4AC < 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = y - \frac{B}{2A}x \\ \beta = -\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}x \end{array} \right.$	$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F(u, u_\alpha, u_\beta)$

Veamos cómo se utilizaría esta tabla con el ejemplo anterior.

**Ejemplo 4.10** Utilizando las transformaciones indicadas en la tabla anterior, expresa en forma canónica la siguiente EDP lineal de 2º orden:

$$3u_{xx} - 4u_{xy} + 6u_{yy} - 12u_x - 9u_y - 5u = 0$$

**Solución:** Hemos comprobado que la ecuación es elíptica, por tanto debemos realizar el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \alpha &= y - \frac{B}{2A}x \Rightarrow \alpha = y + \frac{2}{3}x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = \frac{2}{3} \\ \alpha_y = 1 \end{cases} \\ \beta &= -\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}x \Rightarrow \beta = -\frac{\sqrt{14}}{3}x \Rightarrow \begin{cases} \beta_x = -\frac{\sqrt{14}}{3} \\ \beta_y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = \frac{2}{3}u_\alpha - \frac{\sqrt{14}}{3}u_\beta$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha$$

y para las segundas derivadas

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= \frac{2}{3}(u_{\alpha\alpha}\alpha_x + u_{\alpha\beta}\beta_x) - \frac{\sqrt{14}}{3}(u_{\beta\alpha}\alpha_x + u_{\beta\beta}\beta_x) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}u_{\alpha\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\alpha\beta}\right) - \frac{\sqrt{14}}{3}\left(\frac{2}{3}u_{\beta\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\beta\beta}\right) \\
 &= \frac{4}{9}u_{\alpha\alpha} - \frac{4\sqrt{14}}{9}u_{\alpha\beta} + \frac{14}{9}u_{\beta\beta} \\
 u_{xy} &= \frac{2}{3}(u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y) - \frac{\sqrt{14}}{3}(u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y) = \frac{2}{3}u_{\alpha\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\beta\alpha} \\
 &= \frac{2}{3}u_{\alpha\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\alpha\beta} \\
 u_{yy} &= (u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y) = u_{\alpha\alpha}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDP

$$\begin{aligned}
 3u_{xx} - 4u_{xy} + 6u_{yy} - 12u_x - 9u_y - 5u &= 0 \\
 3\left(\frac{4}{9}u_{\alpha\alpha} - \frac{4\sqrt{14}}{9}u_{\alpha\beta} + \frac{14}{9}u_{\beta\beta}\right) - 4\left(\frac{2}{3}u_{\alpha\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\alpha\beta}\right) + 6(u_{\alpha\alpha}) - 12\left(\frac{2}{3}u_{\alpha} - \frac{\sqrt{14}}{3}u_{\beta}\right) - 9u_{\alpha} - 5u &= 0
 \end{aligned}$$

y la EDP sería

$$\frac{14}{3}u_{\alpha\alpha} + \frac{14}{3}u_{\beta\beta} - 17u_{\alpha} + \frac{12\sqrt{14}}{3}u_{\beta} - 5u = 0$$

Si multiplicamos por  $\frac{3}{14}$  toda la ecuación

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{51}{14}u_{\alpha} + \frac{12}{\sqrt{14}}u_{\beta} - 5u = 0$$

Ahora podemos simplificar la edp eliminando los términos  $u_{\alpha}$  y  $u_{\beta}$  como antes mediante cambios de tipo exponencial. En primer lugar eliminaremos el término  $u_{\alpha}$  mediante el cambio

$$u = ve^{k\alpha}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  se elegirá de forma que el término correspondiente a la primera derivada respecto a la primera variable desaparezca. Con este cambio tendremos

$$\left. \begin{array}{l} u_{\alpha} = v_{\alpha}e^{k\alpha} + kve^{k\alpha} \\ u_{\beta} = v_{\beta}e^{k\alpha} \\ u_{\alpha\alpha} = v_{\alpha\alpha}e^{k\alpha} + 2kv_{\alpha}e^{k\alpha} + k^2ve^{k\alpha} \\ u_{\beta\beta} = v_{\beta\beta}e^{k\alpha} \end{array} \right\}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{51}{14}u_\alpha + \frac{12}{\sqrt{14}}u_\beta - 5u &= 0 \Leftrightarrow \\ (v_{\alpha\alpha}e^{k\alpha} + 2kv_\alpha e^{k\alpha} + k^2ve^{k\alpha}) + (v_{\beta\beta}e^{k\alpha}) - \frac{51}{14}(v_\alpha e^{k\alpha} + kve^{k\alpha}) + \frac{12}{\sqrt{14}}v_\beta e^{k\alpha} - 5ve^{k\alpha} &= 0 \Leftrightarrow \\ v_{\alpha\alpha}e^{k\alpha} + v_{\beta\beta}e^{k\alpha} + v_\alpha \left(2k - \frac{51}{14}\right)e^{k\alpha} + \frac{12}{\sqrt{14}}v_\beta e^{k\alpha} + v \left(k^2 - \frac{51k}{14} - 5\right)e^{k\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Para que se anule el término en  $v_\alpha$  y teniendo en cuenta que  $e^{k\alpha} \neq 0$ , debe ocurrir

$$\left(2k - \frac{51}{14}\right) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{51}{28}$$

por tanto

$$k^2 - \frac{51k}{14} - 5 = \left(\frac{51}{28}\right)^2 - \frac{51}{14}\frac{51}{28} - 5 = -\frac{6521}{784}$$

y la EDP quedaría como

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + \frac{12}{\sqrt{14}}v_\beta - \frac{6521}{784}v = 0$$

Eliminaremos ahora el término en  $v_\beta$  mediante un cambio similar

$$v = we^{k\beta}$$

Con este cambio tendremos

$$\left. \begin{array}{l} v_\alpha = w_\alpha e^{k\beta} \\ v_\beta = w_\beta e^{k\beta} + kwe^{k\beta} \\ v_{\alpha\alpha} = w_{\alpha\alpha} e^{k\beta} \\ v_{\beta\beta} = w_{\beta\beta} e^{k\beta} + 2kw_\beta e^{k\beta} + k^2we^{k\beta} \end{array} \right\}$$

y sustituyendo en la edp en la ecuación

$$\begin{aligned} v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + \frac{12}{\sqrt{14}}v_\beta - \frac{6521}{784}v &= 0 \Leftrightarrow \\ (w_{\alpha\alpha}e^{k\beta}) + (w_{\beta\beta}e^{k\beta} + 2kw_\beta e^{k\beta} + k^2we^{k\beta}) + \frac{12}{\sqrt{14}}(w_\beta e^{k\beta} + kwe^{k\beta}) - \frac{6521}{784}we^{k\beta} &= 0 \end{aligned}$$

multiplicamos por  $e^{-k\beta}$

$$w_{\alpha\alpha} + (w_{\beta\beta} + 2kw_\beta + k^2w) + \frac{12}{\sqrt{14}}(w_\beta + kw) - \frac{6521}{784}w = 0$$

y agrupando

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + w_\beta \left(2k + \frac{12}{\sqrt{14}}\right) + w \left(k^2 + \frac{12}{\sqrt{14}}k - \frac{6521}{784}\right) = 0$$

y elegimos  $k$  de forma que se anule el término en  $w_\beta$

$$2k + \frac{12}{\sqrt{14}} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{6}{\sqrt{14}}$$

para este valor

$$\left( k^2 + \frac{12}{\sqrt{14}}k - \frac{6521}{784} \right) = \left( \left( -\frac{6}{\sqrt{14}} \right)^2 + \frac{12}{\sqrt{14}} \left( -\frac{6}{\sqrt{14}} \right) - \frac{6521}{784} \right) = -\frac{8537}{784}$$

quedando finalmente la ecuación en la forma

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} - w \frac{8537}{784} = 0$$

Multiplicando por  $\frac{784}{8537}$

$$\frac{784}{8537}w_{\alpha\alpha} + \frac{784}{8537}w_{\beta\beta} - w = 0$$

y haciendo el cambio

$$\alpha = \frac{28}{\sqrt{8537}}t$$

$$\beta = \frac{28}{\sqrt{8537}}s$$

y obtendremos la ecuación en las forma usual, puesto que

$$\left. \begin{array}{l} w_t = \frac{28}{\sqrt{8537}}w_\alpha \\ w_s = \frac{28}{\sqrt{8537}}w_\beta \\ w_{tt} = \frac{784}{8537}w_{\alpha\alpha} \\ w_{ss} = \frac{784}{8537}w_{\beta\beta} \end{array} \right\}$$

y entonces

$$\frac{784}{8537}w_{\alpha\alpha} + \frac{784}{8537}w_{\beta\beta} - w = 0 \Rightarrow w_{tt} + w_{ss} - w = 0.$$

### 4.3. Ecuaciones en derivadas parciales clásicas

En esta sección vamos a resolver mediante el método de variables separadas introducido anteriormente las tres ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden llamadas clásicas.

#### 4.3.1. Ecuación del calor

La ecuación del calor describe la variación de la temperatura en una región a lo largo del tiempo. En el caso de la ecuación del calor en una dimensión, describiría la temperatura en una barra de longitud  $L$  con el tiempo  $t$  y se expresa como

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \end{array} \right.$$

Las condiciones

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

son las condiciones de contorno e indican que la temperatura en los extremos de la barra es constante e igual a 0. Mientras que la condición

$$u(0, x) = f(x)$$

es una condición inicial e indica la distribución de temperatura en la barra en el instante inicial. El valor  $\alpha$  es la *difusividad térmica* y depende del material que forma la barra.

Vamos a utilizar el método de separación de variables para resolver esta ecuación, para ello supondremos que la solución  $u(t, x)$  puede ponerse como producto de dos funciones en cada una de las variables independientes:

$$u(t, x) = F(t)G(x)$$

por tanto

$$u_t = F'(t)G(x)$$

$$u_x = F(t)G'(x)$$

$$u_{xx} = F(t)G''(x)$$

y sustituyendo en la ecuación del calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \Leftrightarrow F'(t)G(x) = \alpha^2 F(t)G''(x)$$

Obviamente la función nula  $u \equiv 0$  es solución de la ecuación en derivadas parciales, sin embargo sólo será solución del problema si  $f(x) = 0$  que es el caso trivial; así que buscaremos soluciones alternativas y por tanto supondremos que  $F(t) \neq 0$  y  $G(x) \neq 0$ , por tanto:

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}.$$

Un lado de la igualdad depende sólo de  $t$  y el otro depende sólo de  $x$ , por tanto, para que se de la igualdad ambos miembros deben ser constantes

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \quad (4.8)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la constante de separación y donde hemos elegido el signo menos por convención.

De 4.8 obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$F'(t) + \lambda \alpha^2 F(t) = 0$$

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0$$

Las condiciones de contorno se transforman en

$$u(t, 0) = F(t)G(0) = 0,$$

$$u(t, L) = F(t)G(L) = 0,$$

y siendo  $t$  es arbitraria, se deduce que:

$$G(0) = G(L) = 0.$$

Tendremos el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(x) + \lambda G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(L) = 0 \end{cases},$$

cuya solución dependerá del valor del parámetro de separación  $\lambda$ . Distinguimos tres casos:

1. Caso  $\lambda = 0$ . En este caso la ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) = 0$$

cuya solución general se obtiene integrando dos veces respecto a  $x$

$$G(x) = Ax + B$$

Si utilizamos las condiciones de contorno

$$G(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$G(L) = 0 \Rightarrow A \cdot L + B = 0$$

como  $L \neq 0$ , la solución del sistema anterior es:  $A = B = 0$ , y obtenemos la solución nula, que hemos dicho que no nos interesa.

2. Caso  $\lambda < 0$ . Supongamos ahora que  $\lambda$  es negativo, y por tanto lo podemos poner de la forma  $\lambda = -\mu^2$ , con  $\mu = \sqrt{|\lambda|}$ . La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) - \mu^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de  $A$  y  $B$

$$G(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$G(L) = 0 \Rightarrow Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas  $A$  y  $B$ . El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{vmatrix} = e^{-\mu L} - e^{\mu L} = -2 \operatorname{senh}(\mu L)$$

y puesto que  $\mu \neq 0$  es no nulo, la única solución del sistema es la trivial  $A = B = 0$ , que nos da para el problema de contorno de nuevo la solución nula.

3. Caso  $\lambda > 0$ . Supongamos ahora que  $\lambda$  es positivo, y por tanto lo podemos poner de la forma  $\lambda = \mu^2$ , con  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) + \mu^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de  $A$  y  $B$

$$G(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$G(L) = 0 \Rightarrow A \cos \mu L + B \sin \mu L = 0$$

de donde

$$B \sin \mu L = 0$$

Como no queremos la solución nula debe ocurrir  $B \neq 0$  y

$$\sin \mu L = 0 \Leftrightarrow \mu L = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$\mu = \frac{n\pi}{L}$$

y el valor de  $\lambda = \mu^2$  es

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que  $\lambda$  era una constante arbitraria, luego para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$ , tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow G_n(x) = B_n \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Notar que para  $n = 0$  se obtendría de nuevo la nula, luego supondremos  $n \geq 1$ .

Los únicos valores que proporciona soluciones distintas de la solución nula son

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}.$$

Para estos valores y utilizando la otra ecuación diferencial

$$F'(t) + \alpha^2 \lambda^2 F(t) = 0 \Rightarrow F'(t) + \alpha^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} F(t) = 0$$

cuya solución para cada  $n \in \mathbb{N}$  es de la forma

$$F_n(t) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad A_n \in \mathbb{R}$$

Y la solución de la EDP será, para cada  $n$ , de la forma

$$u_n(t, x) = F_n(t) G_n(x) = \left( A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right) \left( B_n \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right) = b_n \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

donde hemos puesto  $b_n = A_n B_n \in \mathbb{R}$ .

Como la ecuación es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones también es solución, así que consideraremos como solución general en sentido formal a:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (4.9)$$

Finalmente, utilizando la condición inicial  $u(0, x) = f(x)$  se obtiene

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Podemos calcular el valor de los coeficiente  $b_n$ , si observamos la expresión como un desarrollo de Fourier, concretamente el de la extensión impar de  $f(x)$ , por tanto:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Se dice que la expresión 4.9 es la solución formal porque no podemos asegurar que sea una verdadera solución, es decir, que  $f(x)$  pueda representarse mediante una serie trigonométrica.

Por otra parte, aunque la linealidad garantiza que una combinación lineal finita de soluciones, es solución, nuestra combinación lineal es infinita, por lo que tendríamos que comprobar que efectivamente es solución (derivando 2 veces y sustituyendo en la ecuación correspondiente), y este es un proceso difícil, aunque en nuestro caso se garantiza por la presencia del término exponencial en la solución formal, ya que si  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \rightarrow 0$ .

Qualitativamente la ecuación describe un proceso de difusión del calor a través de la barra, la barra disipa calor convergiendo a 0 y suavizando cualquier irregularidad que  $f(x)$  pueda tener. Aplicamos este análisis a un ejemplo concreto.

**Ejemplo 4.11** Los extremos de una barra de cobre ( $\alpha^2 = 1,14$ ) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$ . Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

a)  $u(0, x) = 65 \cos^2(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2.$

b)  $u(0, x) = 70 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$

c)  $u(0, x) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1] \\ 60(2-x) & x \in [1, 2] \end{cases}.$

d)  $u(0, x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 75 & x \in [1, 2] \end{cases}.$

**Solución:** En todos los apartados se trata de la ecuación del calor pero con diferentes condiciones iniciales, por tanto lo que debemos calcular son los valores de los coeficientes de Fourier de la extensión impar de  $f(x)$ . En todos los casos  $L = 2$ .

a) Para  $f(x) = 65 \cos^2(\pi x)$ :

$$c_n = \frac{2}{2} \int_0^2 65 \cos^2(\pi x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 65 \int_0^2 \cos^2(\pi x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

obtenemos para

$$\begin{aligned} \int_0^2 \cos^2(\pi x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx &= \int_0^2 \frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(2\pi x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

La primera integral es inmediata

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{1}{2} \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \boxed{\frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)}$$

y para la segunda tenemos en cuenta que

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

entonces para  $a = \frac{n\pi x}{2}$  y  $b = 2\pi x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(2\pi x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 \frac{1}{2} \left( \sin\left(\frac{n\pi x}{2} + 2\pi x\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{2} - 2\pi x\right) \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^2 \sin\left(\frac{(n+4)\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(n-4)\pi x}{2}\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^2 \sin\left(\frac{(n+4)\pi x}{2}\right) dx + \int_0^2 \sin\left(\frac{(n-4)\pi x}{2}\right) dx \right\} \end{aligned}$$

que son integrales inmediatas

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{(n+4)\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{(n+4)\pi} \cos\left(\frac{(n+4)\pi x}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{2(1 - \cos(n+4)\pi)}{(n+4)\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{(n+4)\pi}$$

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{(n-4)\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{(n-4)\pi} \cos\left(\frac{(n-4)\pi x}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{2(1 - \cos(n-4)\pi)}{(n-4)\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{(n-4)\pi}$$

donde hemos empleado que  $(-1)^{n+4} = (-1)^{n-4} = (-1)^n$ . La suma total

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \cos(2\pi x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{4} (1 - (-1)^n) \left\{ \frac{2}{(n+4)\pi} + \frac{2}{(n-4)\pi} \right\} = \boxed{(1 - (-1)^n) \left( \frac{n}{\pi(n^2-16)} \right)}$$

Y finalmente obtendremos el valor del coeficiente  $c_n$

$$c_n = 65 \left\{ \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) + (1 - (-1)^n) \left( \frac{n}{\pi(n^2-16)} \right) \right\} = \frac{130}{n\pi} \frac{n^2 - 8}{n^2 - 16} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{260}{n\pi} \frac{n^2 - 8}{n^2 - 16} & n \text{ es impar} \\ 0 & n \text{ es par} \end{cases}$$

La solución formal de la EDP para esta condición inicial sería

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{260}{(2n-1)\pi} \frac{(2n-1)^2 - 8}{(2n-1)^2 - 16} \right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) e^{-\frac{1.14(2n-1)^2\pi^2}{4}t}$$

- b)  $f(x) = 70 \operatorname{sen}(\pi x)$ . En este caso no es necesario calcular el desarrollo de Fourier de la extensión impar de  $f(x)$ , puesto que  $f(x)$  es una función periódica de periodo 2. Si tomamos  $c_n = 0 \forall n \neq 2$  y  $c_2 = 70$ , obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = 70 \operatorname{sen}(\pi x)$$

y la solución formal de la EDP para esta condición inicial sería

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} = 70 \operatorname{sen}(\pi x) e^{-1,14\pi^2 t}$$

donde hemos teniendo en cuenta que  $c_n = 0$  para todos los valores excepto para  $c_2 = 70$ .

c)  $u(0, x) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1] \\ 60(2-x) & x \in [1, 2] \end{cases}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \int_0^1 60x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \int_1^2 60(2-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= 60 \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + 120 \int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx - 60 \int_1^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

Las integrales de la forma  $\int x \operatorname{sen}(ax) dx$  se resuelve por partes, tomando  $u = x$  y  $dv = \operatorname{sen}(ax) dx$ , entonces  $du = dx$  y  $v = -\frac{1}{a} \cos(ax)$ , obtenemos una primitiva

$$\int x \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a} \int \cos(ax) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \operatorname{sen}(ax)$$

Calculamos cada una de las integrales con  $a = \frac{n\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi/2) - 2n\pi \cos(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - (-1)^n]$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{4 \cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi)}{n^2\pi^2} + \frac{2 \cos(n\pi/2)}{n\pi} - \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \\ &= -\frac{4(-1)^2}{n\pi} + \frac{2 \cos(n\pi/2)}{n\pi} - \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{2n\pi \cos(n\pi/2) - 4 \operatorname{sen}(n\pi/2) - 4n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}
 & 60 \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + 120 \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx - 60 \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\
 = & 60 \left[ \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} \right] + 120 \left[ \frac{2}{n\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right] \right] - 60 \left[ \frac{2n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2} \right] \\
 = & \frac{480}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Y finalmente obtendremos el valor del coeficiente  $c_n$

$$c_n = \frac{480}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

y la solución formal de la EDP para esta condición inicial sería

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{480}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-\frac{1,142n^2\pi^2}{4}t}.$$

d)  $u(0, x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 75 & x \in [1, 2] \end{cases}$ .

1. a)

$$c_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \int_0^1 0 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \int_1^2 75 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \int_1^2 75 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

La integral es inmediata

$$\int_1^2 75 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{150}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{150}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)] = \frac{150}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - (-1)^n]$$

Y finalmente obtendremos el valor del coeficiente  $c_n$

$$c_n = \frac{150}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - (-1)^n]$$

y la solución formal de la EDP para esta condición inicial sería

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{150}{n\pi} [\cos(n\pi/2) - (-1)^n] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) e^{-\frac{1,142n^2\pi^2}{4}t}.$$

### 4.3.2. Ecuación de onda

La ecuación de onda representa las vibraciones de una cuerda sujetada por los extremos a lo largo del tiempo, como el de la cuerda de una guitarra. Si  $L$  es la longitud de la cuerda y  $u(t, x)$  representa el desplazamiento de la cuerda respecto a la horizontal en cada instante y en cada posición de la cuerda, la ecuación viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \end{array} \right.$$

Como en el caso de la ecuación del calor, las condiciones

$$u(t, 0) = u(t, L)$$

son condiciones de contorno e indican que los extremos de la cuerda son fijos y situados en el eje horizontal. Mientras que la condición

$$u(0, x) = f(x)$$

es una condición inicial e indica la forma de la cuerda en el instante inicial, mientras que

$$u_t(0, x) = g(x)$$

sería otra condición inicial que indica la velocidad (fuerza aplicada sobre la cuerda) que tiene la cuerda en el instante inicial.

Como en el caso de la ecuación del calor se utiliza el método de separación de variables, suponiendo por tanto que la solución  $u(t, x)$  puede ponerse como producto de funciones en las variables independientes:

$$u(t, x) = F(t)G(x)$$

por tanto

$$u_{tt} = F''(t)G(x)$$

$$u_x = F(t)G'(x)$$

$$u_{xx} = F(t)G''(x)$$

y sustituyendo en la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2u_{xx} \Leftrightarrow F''(t)G(x) = c^2F(t)G''(x)$$

Descartamos la solución trivial  $u \equiv 0$  y supondremos que  $F(t) \neq 0$  y  $G(x) \neq 0$ , por tanto

$$\frac{1}{c^2} \frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}$$

De nuevo cada miembro de la ecuación depende de una y sólo una de las variables independientes, así que ambos deben ser constantes:

$$\frac{1}{c^2} \frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \quad (4.10)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y el signo se toma por convención.

De 4.10 obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{array}{l} F''(t) + \lambda c^2 F(t) = 0 \\ G''(x) + \lambda G(x) = 0 \end{array} \right\} .$$

Con estas suposiciones las condiciones de contorno son

$$u(t, 0) = F(t)G(0) = 0,$$

$$u(t, L) = F(t)G(L) = 0,$$

que con  $t$  es arbitraria implica

$$G(0) = G(L) = 0.$$

Tendremos el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(x) + \lambda G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(L) = 0 \end{cases}$$

que coincide con el problema de contorno que se obtuvo para la ecuación del calor y por tanto los valores para  $\lambda$  y  $G(x)$  deben ser los mismos que allí se dedujeron:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ y } G_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para estos valores de  $\lambda_n$  la otra ecuación diferencial también es de segundo orden

$$F''(t) + c^2 a^2 F(t) = 0 \Rightarrow F''(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} F(t) = 0$$

y cuya solución general para cada  $n \in \mathbb{N}$  es de la forma

$$F_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad \text{con } C_n, D_n \in \mathbb{R}$$

Finalmente una posible solución para la EDP será de la forma

$$u_n(t, x) = F_n(t) G_n(x) = \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con  $a_n = C_n B_n$  y  $b_n = D_n B_n$ . Como la ecuación es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es solución, y consideraremos como solución general formal a

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Si ahora se utilizan las condiciones iniciales  $u(0, x) = f(x)$  y  $u_t(0, x) = g(x)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \\ u_t(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Si tomamos

$$d_n = b_n \frac{n\pi c}{L}$$

Vemos las expresiones para  $f(x)$  y  $g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

son desarrollos similares a los encontrados en la ecuación del calor. Podemos calcular el valor de los coeficiente  $a_n$  y  $d_n$ , si observamos ambas expresiones como desarrollos de Fourier, concretamente las extensiones impares de  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente, por tanto:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ d_n = b_n \frac{n\pi c}{L} &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.12** Resuelve el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 2\pi) \\ u(0, x) = \cos x - 1 & 0 < x < 2\pi \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < 2\pi \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{array} \right.$$

**Solución:** En este caso  $c = 1$ ,  $f(x) = \cos x - 1$  y  $g(x) = 0$  y  $L = 2\pi$ . Utilizando la solución general formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx$$

Está claro que como  $g(x) = 0$ , entonces  $b_n = 0$ . Para calcular  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - 1) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos x \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx - \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right) \end{aligned}$$

Calculando cada integral de forma independiente. Para la primera utilizamos que  $\sin(a+b) + \sin(a-b) =$

$2 \operatorname{sen} a \cos b /$ , para  $a = nx/2$  y  $b = x$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos x \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{(n+2)x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{(n-2)x}{2} dx \\ &= \left( -\frac{1}{n+2} \cos \left( \frac{(n+2)x}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} \right) + \left( -\frac{1}{n-2} \cos \left( \frac{(n-2)x}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{n+2} (1 - \cos(n+2)\pi) + \frac{1}{n-2} (1 - \cos(n-2)\pi) \\ &= \frac{1}{n+2} (1 - (-1)^{n+2}) + \frac{1}{n-2} (1 - (-1)^{n-2}) = \frac{2n}{n^2-4} (1 - (-1)^n)\end{aligned}$$

y la otra integral es inmediata:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) dx = -\frac{2}{n} \cos \left( \frac{nx}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{2}{n} (1 - (-1)^n)$$

El valor para  $a_n$  será

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2n}{n^2-4} (1 - (-1)^n) - \frac{2}{n} (1 - (-1)^n) \right) = \frac{8}{\pi n (n^2-4)} (1 - (-1)^n)$$

Luego la solución sería

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8(1 - (-1)^n)}{\pi n (n^2-4)} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) \cos \left( \frac{nt}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{16}{\pi (2n-1) ((2n-1)^2-4)} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)x}{2} \right) \cos \left( \frac{(2n-1)t}{2} \right)\end{aligned}$$

#### 4.3.3. Ecuación de Laplace

La última de las ecuaciones clásicas en derivadas parciales que vamos a tratar en esta sección es la llamada ecuación de Laplace que en dos dimensiones tiene la forma

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.11}$$

Utilizaremos las variables espaciales para indicar que mientras que en las ecuaciones de calor y onda representan modelos físicos que cambian con el tiempo, la ecuación de Laplace es estática y representa una condición de equilibrio como el potencial gravitatorio o electrostático o como la temperatura en una sección plana.

Esta ecuación se plantea sólo con condiciones de contorno sobre la frontera del recinto donde se cumpla la ecuación que tiene que tener cierta regularidad.

Estas condiciones de contorno pueden ser de dos tipos:

1. Condiciones tipo Dirichlet: Si  $R$  es la región donde se cumple la ecuación 4.11, podemos suponer que  $u(x, y)$  es constante en todos los puntos de la frontera de  $R$ . Son condiciones en la función  $u$ .
2. Condiciones tipo Neumann: Podemos suponer que conocemos el vector normal a  $R$  en la frontera. Son condiciones impuestas a las derivadas de  $u$ :  $u_x$  o  $u_y$ .

La geometría de  $R$  es muy importante y sólo podemos calcular soluciones si tienen ciertas condiciones de regularidad.

### Condiciones tipo Dirichlet

Supongamos, por ejemplo, que el recinto es una rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , es decir, sea  $R = [0, a] \times [0, b]$  y que tenemos el problema de Laplace siguiente

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0 & 0 \leq x \leq a \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq b \\ u(a, y) = f(y) & 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

Para estos problemas todas las condiciones son de contorno.

Utilizamos de nuevo el método de separación de variables, y expresamos la solución  $u(t, x)$  como producto de funciones independientes en cada variable

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

por tanto

$$u_{xx} = F''(x)G(y)$$

$$u_{yy} = F(x)G''(y)$$

y sustituyendo en la ecuación de Laplace 4.11

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

Descartamos la solución trivial  $u \equiv 0$  y supondremos que  $F(x) \neq 0$  y  $G(y) \neq 0$ , por tanto

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}$$

y tendremos una ecuación con las variables separadas de donde

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda \quad (4.12)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De 4.12 se obtienen dos ecuaciones diferenciales

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0$$

Las condiciones de contorno serían

$$u(x, 0) = F(x)G(0) = 0$$

$$u(x, b) = F(x)G(b) = 0$$

como  $x$  es arbitraria se deduce que

$$G(0) = G(b) = 0$$

La función  $G(y)$  se obtiene resolviendo el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(y) + \lambda G(y) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(b) = 0 \end{cases}$$

que es el mismo problema de contorno que se obtuvo para las ecuaciones del calor y de onda (salvo que cambiamos la variable  $x$  por la  $y$  y que  $L = b$ ), por tanto, para obtener una solución no trivial (no idénticamente nula) los valores para  $\lambda$  y  $G(y)$  serían

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \text{ y } G(y) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Sustituyendo estos valores para  $\lambda_n$  en la otra ecuación diferencial

$$F''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} F(x) = 0,$$

cuya solución para cada  $n \in \mathbb{N}$  es de la forma

$$F_n(x) = C_n e^{\left(\frac{n\pi}{b}x\right)} + D_n e^{\left(-\frac{n\pi}{b}x\right)} \quad \text{con } C_n, D_n \in \mathbb{R}.$$

Por la condición inicial  $u(0, y) = 0$

$$u(0, y) = F(0)G(y) = 0$$

que para  $y$  arbitraria conduce a que

$$F(0) = 0$$

y por tanto

$$F_n(0) = C_n + D_n = 0 \Rightarrow D_n = -C_n$$

y la función  $F_n(x)$  sería

$$F_n(x) = C_n \left( e^{\left(\frac{n\pi}{b}x\right)} - e^{\left(-\frac{n\pi}{b}x\right)} \right) = 2C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

La solución de la EDP será, para cada  $n$ , de la forma

$$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = 2C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

con  $c_n = 2C_n B_n$ .

Como la ecuación es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones, es otra solución, por tanto podemos considerar como solución general formal a

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

y utilizando la última condición de contorno  $u(a, y) = f(y)$

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(y)$$

Como ocurre para las ecuaciones anteriores podemos calcular el valor de los coeficiente  $d_n$ , si observamos la expresión como el desarrollo de Fourier de la extensión impar de  $f(y)$ , por tanto:

$$d_n = c_n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi a}{b} \right) = \frac{2}{b} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dx,$$

de donde

$$c_n = \frac{2}{b \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi a}{b} \right)} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dx.$$

### Condiciones de Neumann

Veamos un ejemplo de resolución de un problema con condiciones de tipo Newmann

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \\ u_y(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq a \\ u_y(x, b) = 0 & 0 \leq x \leq a \\ u_x(0, y) = f(y) & 0 \leq y \leq b \\ u_x(a, y) = 0 & 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

vemos que en este caso las condiciones de contorno implican a las derivadas parciales de  $u$ .

Todas las condiciones son de contorno. Como antes utilizamos el método de separación de variables

$$u(x, y) = F(x) G(y)$$

que nos conducirá a las dos ecuaciones diferenciales

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0$$

Las diferencias con las condiciones de tipo Dirichlet aparecen al plantear las condiciones de contorno de estos dos problemas. Observemos que en este caso  $u_y(x, 0) = 0$  y  $u_y(x, b) = 0$  y por tanto las condiciones de contorno para las ecuaciones diferenciales se obtiene de la siguiente forma:

$$u_y(x, y) = F(x) G'(y) \Rightarrow \begin{cases} u_y(x, 0) = F(x) G'(0) = 0 \Rightarrow G'(0) = 0 \\ u_y(x, b) = F(x) G'(b) = 0 \Rightarrow G'(b) = 0 \end{cases}$$

además también sucede

$$u_x(a, y) = F'(a) G(y) = 0 \Rightarrow F'(a) = 0$$

Utilizando la segunda ecuación y las condiciones encontradas para  $G'(y)$

$$\begin{cases} G''(y) + \lambda G(y) = 0 \\ G'(0) = 0 \\ G'(b) = 0 \end{cases}$$

Distinguimos según el valor de  $\lambda$

1. **Caso**  $\lambda = 0$  : Para este caso

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0 \Rightarrow G''(y) = 0$$

e integrando

$$\begin{aligned} G(y) &= Ay + B \\ G'(y) &= A \end{aligned}$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$ , constantes arbitrarias. Aplicando las condiciones de contorno

$$\left. \begin{aligned} G'(0) &= 0 \\ G'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow A = 0$$

por tanto

$$G(y) = B$$

y entonces

$$u(x, y) = F(x)B$$

Utilizando la EDP obtendremos

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F'(x)B \Rightarrow u_{xx} = F''(x)B \\ u_y &= 0 \Rightarrow u_{yy} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = F''(x)B + 0 = 0$$

de donde o bien  $B = 0$ , pero entonces tendremos nula, o bien  $F''(x) = 0$  y por tanto

$$F(x) = Cx + D$$

tendríamos como posible solución

$$u(x, y) = F(x)G(y) = ACx + AD = \alpha x + \beta$$

con  $\alpha = AC$  y  $\beta = AD$ . Si ahora utilizamos la condición de contorno nula en  $x$  ( $u_x(a, y) = 0$ )

$$u_x(x, y) = \alpha \Rightarrow u_x(\alpha, y) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Lo que nos daría como solución de la EDP

$$u(x, y) = \beta.$$

2. **Caso**  $\lambda < 0$ : Podemos poner

$$\lambda = -\mu^2 > 0$$

y las ecuaciones serán

$$\left\{ \begin{aligned} G''(y) - \mu^2 G(y) &= 0 \\ G'(0) &= 0 \\ G'(b) &= 0 \end{aligned} \right.$$

cuya solución es

$$G(y) = Ae^{\mu y} + Be^{-\mu y}$$

Utilizando las condiciones de contorno

$$G'(y) = A\mu e^{\mu y} - B\mu e^{-\mu y}$$

entonces

$$\left. \begin{array}{l} G'(0) = A\mu - B\mu = 0 \Rightarrow \mu(A - B) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \\ G'(b) = A\mu e^{\mu b} - B\mu e^{-\mu b} = 0 \Rightarrow \mu(Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b}) = 0 \Rightarrow Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b} = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación  $A = B$  y sustituyendo en la segunda

$$Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b} = 0 \Rightarrow Ae^{\mu b} - Ae^{-\mu b} = 0 \Rightarrow A(e^{\mu b} - e^{-\mu b}) = 0$$

Tendremos dos opciones

$$A = 0 \Rightarrow \text{Solución trivial},$$

$$e^{\mu b} - e^{-\mu b} = 0 \Rightarrow e^{\mu b} = e^{-\mu b} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \text{Solución trivial}$$

3. **Caso**  $\lambda > 0$ : Podemos poner

$$\lambda = \mu^2 > 0$$

y las ecuaciones serán

$$\left. \begin{array}{l} G''(y) + \mu^2 G(y) = 0 \\ G'(0) = 0 \\ G'(b) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación diferencial tiene como solución general

$$G(y) = A \cos(\mu y) + B \sin(\mu y)$$

Necesitamos  $G'(y)$

$$G'(y) = -\mu A \sin(\mu y) + \mu B \cos(\mu y)$$

para poder utilizar las condiciones de contorno

$$\left. \begin{array}{l} G'(0) = \mu B = 0 \\ G'(b) = -\mu A \sin(\mu b) + \mu B \cos(\mu b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = 0 \\ -\mu A \sin(\mu b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu b = n\pi$$

y por tanto

$$\mu = \frac{n\pi}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

para cada valor de  $n$  tendremos una función

$$G_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Con estos valores y la otra ecuación:

$$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0 \Rightarrow F''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} F(x) = 0$$

que tiene por solución general a

$$F(x) = C_n e^{\mu x} + D_n e^{-\mu x}$$

Como hemos visto antes  $F'(a) = 0$

$$F'(x) = C\mu e^{\mu x} - D\mu e^{-\mu x} \Rightarrow F'(a) = C\mu e^{\mu a} - D\mu e^{-\mu a} = 0 \Rightarrow Ce^{\mu a} = De^{-\mu a}$$

luego para cada  $n$  tendremos

$$F_n(x) = C_n \left( e^{n\pi x/b} + e^{-n\pi x/b} e^{2n\pi a/b} \right)$$

La solución formal será la combinación lineal de todas las soluciones, utilizando además la solución que se obtuvo para el caso  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) C_n \left( e^{n\pi x/b} + e^{-n\pi x/b} e^{2n\pi a/b} \right) \\ &= \beta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left( e^{n\pi x/b} + e^{-n\pi x/b} e^{2n\pi a/b} \right), \end{aligned}$$

donde se ha tomado

$$c_n = A_n C_n$$

Los valores de  $c_n$  se obtienen utilizando la condición de contorno  $u_x(0, y) = f(y)$ ,

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left( e^{n\pi x/b} - e^{-n\pi x/b} e^{2n\pi a/b} \right) \\ u_x(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi}{b} \left( 1 - e^{2n\pi a/b} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(y) \end{aligned}$$

donde

$$d_n = c_n \frac{n\pi}{b} \left( 1 - e^{2n\pi a/b} \right),$$

son los coeficientes del desarrollo de Fourier de la extensión par de  $f(y)$  y por tanto

$$d_n = c_n \frac{n\pi}{b} \left( 1 - e^{2n\pi a/b} \right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos(n\pi y) dy,$$

de donde

$$c_n = \frac{2}{n\pi \left( 1 - e^{2n\pi a/b} \right)} \int_0^b f(y) \cos(n\pi y) dy.$$

Notar que en este caso se debe cumplir que el término independiente en la serie de Fourier  $a_0/2$ , debe ser 0 y por tanto, para que la solución del problema con las condiciones de Neumann sea  $u(x, y)$ , debe cumplirse la siguiente condición de compatibilidad

$$a_0 = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) dy = 0 \Rightarrow \int_0^b f(y) dy = 0.$$

#### 4.3.4. Condiciones de contorno no nulas

En todas las ecuaciones anteriores hemos considerado que las condiciones de contorno eran nulas, pero podemos resolver el problema en el caso de no se cumpla esta propiedad. Por ejemplo, para un problema del calor con condiciones no nulas de la forma:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = A & t > 0 \\ u(t, L) = B & \end{cases},$$

realizamos el siguiente cambio en la variable dependiente

$$v(t, x) = (u(t, x) - A) + \frac{x}{L}(A - B)$$

de esta forma las condiciones de contorno para  $v(t, x)$  son

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= (u(t, 0) - A) + \frac{0}{L}(A - B) = (A - A) = 0 \\ v(t, L) &= (u(t, L) - A) + \frac{L}{L}(A - B) = (B - A) + (A - B) = 0 \end{aligned}$$

y la condición inicial

$$u(0, x) = f(x)$$

se transforma en

$$v(0, x) = (u(0, x) - A) + \frac{x}{L}(A - B) = f(x) - A + \frac{x}{L}(A - B) = g(x).$$

Las derivadas parciales serían

$$\begin{aligned} v_t &= u_t \\ v_x &= u_x + \frac{1}{L}(B - A) \\ v_{xx} &= u_{xx} \end{aligned}$$

y el problema se transforma en el siguiente con condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ v(0, x) = f(x) - A + \frac{x}{L}(A - B) & 0 < x < L \\ v(t, 0) = 0 & t > 0 \\ v(t, L) = 0 & \end{cases}.$$

El cambio también es válido para condiciones de contorno no nulas en la ecuación de onda, de forma que si tenemos un problema de la forma

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = A & t > 0 \\ u(t, L) = B & \end{cases},$$

haciendo el mismo cambio de antes tendremos condiciones de contorno nulas, mientras que las condiciones iniciales serían

$$\begin{aligned} v(0, x) &= (f(x) - A) + \frac{x}{L}(A - B), \\ v_t(0, x) &= u_t(0, x) = g(x), \end{aligned}$$

y el problema sería

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{tt} = c^2 v_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ v(0, x) = (f(x) - A) + \frac{x}{L}(A - B) & 0 < x < L \\ v_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ v(t, 0) = A & t > 0 \\ v(t, L) = B & \end{array} \right.$$

Para el caso de la ecuación de Laplace hay que tener en cuenta si las condiciones son de tipo Dirichlet o Neumann y en la mayoría de las ocasiones es posible descomponer el problema inicial en dos o más problemas con condiciones nulas.

### Ejercicios

1. Encuentre las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

- a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$
- b)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$
- c)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$
- d)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$
- e)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
- f)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

2. Para qué valores de  $\lambda$  tiene soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

- a)  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
- b)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

3. Clasifique las siguientes EDP y encuentre su forma canónica:

- a)  $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0.$
- b)  $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0.$
- c)  $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0.$
- d)  $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0.$
- e)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0.$

4. Los extremos de una barra de aluminio ( $\alpha^2 = 0,86$ ) de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$ . Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

- a)  $u(0, x) = 70, \quad 0 \leq x \leq 10.$
- b)  $u(0, x) = 70 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 10.$
- c)  $u(0, x) = \begin{cases} 10x & x \in [0, 5] \\ 10(10 - x) & x \in [5, 10] \end{cases} .$
- d)  $u(0, x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 3) \\ 65 & x \in [3, 10] \end{cases} .$

5. Los extremos de una barra de cobre ( $\alpha^2 = 1,14$ ) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$ . Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

- a)  $u(0, x) = 65 \cos^2(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2.$
- b)  $u(0, x) = 70 \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- c)  $u(0, x) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1) \\ 60(2 - x) & x \in [1, 2] \end{cases} .$
- d)  $u(0, x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 75 & x \in [1, 2] \end{cases} .$

6. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  es aquella que no varía con el tiempo. Demostrar:

- a) Todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma  $u(x) = A + Bx$ .
- b) Encuentre los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen  $u(t, 0) = T_1$  y  $u(t, L) = T_2$ .
- c) Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 1) \\ u(0, x) = 75 & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = 20 & t > 0 \\ u(t, 1) = 60 \end{cases}$$

Ayuda: Calcúlela como  $u(t, x) = v(x) + w(t, x)$ , donde  $v(y)$  es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno  $u(t, 0) = 20$ ,  $u(t, L) = 60$  y  $u(t, x)$  es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

7. Los extremos de una barra de cobre ( $\alpha^2 = 1,14$ ) de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$ , mientras que el centro de la barra es mantenido a  $100^\circ C$  mediante una fuente de calor externa. Encontrar la temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} 50 & x \in [0, 5) \\ 100 & x \in [5, 10] \end{cases} .$$

Ayuda: Descomponga el problema en dos problemas de contorno con uno de los extremos en la mitad de la barra.

8. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0, 1) \\ u(0, x) = \cos x & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

9. Resuelva los siguientes problemas

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 2\pi) \\ u(0, x) = \cos x - 1 & 0 < x < 2\pi \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < 2\pi \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases} \\ b) \quad & \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 1) \\ u(0, x) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_t(0, x) = 1 & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases} \\ c) \quad & \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 3) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 3 \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < 3 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in [1, 2] \\ 2-x & x \in [2, 3] \end{cases}. \end{aligned}$$

10. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describe su movimiento suponiendo que  $c^2 = 1$ .

11. Demuestra que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

transforma la ecuación de ondas  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  en la ecuación  $u_{\xi\eta} = 0$ . Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Para funciones apropiadas  $F$  y  $G$ .

12. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

es de la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (F(x - ct) + F(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

donde  $F$  es la extensión  $2L$ -periódica e impar de  $f(x)$ .

13. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < L \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

14. Resuelva el problema

$$a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < a \\ u(x, b) = g(x) & 0 < x < a \\ u(0, y) = 0 & 0 < y < b \\ u(a, y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < a \\ u(x, b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0, y) = g(y) & 0 < y < b \\ u(a, y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < a \\ u(x, b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0, y) = g(y) & 0 < y < b \\ u(a, y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

15. Resuelva los siguientes problemas de Neumann

$$a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u_y(x, 0) = 0 & 0 < x < a \\ u_y(x, b) = 0 & 0 < x < a \\ u_x(0, y) = f(y) & 0 < y < b \\ u_x(a, y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u_x(0, y) = 0 & 0 < y < b \\ u_x(a, y) = 0 & 0 < y < b \\ u_y(x, 0) = f(x) & 0 < x < a \\ u_y(x, b) = 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u_x(0, y) = 1 & 0 < y < b \\ u_x(a, y) = 0 & 0 < y < b \\ u_y(x, 0) = 1 & 0 < x < a \\ u_y(x, b) = 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

16. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(x, 1) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, y) = f(y) & 0 < y < 1 \\ u(1, y) = 0 & 0 < y < 1 \end{cases}$$