Tema 5
Integración numérica

Dra. Paula Triguero Navarro

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

Aproximación de la integral

- Longitud de arco

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

- Función de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \cos\left(x\sin\theta - n\theta\right)d\theta$$

- Función error

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

- Función de distribución normal en un proceso de fabricación

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$$

Ejemplo 1. Fuerza total ejercida por el mástil de un velero

La fuerza total ejercida por el mástil de un velero se define como

$$F = \int_0^{30} f(z)dz,$$

donde z es la distancia vertical a la cubierta.
Se utiliza un modelo a escala en un túnel de viento para medir la fuerza ejercida por el mástil en diferentes puntos del mismo. En la siguiente tabla se observan dichas mediciones en función de la distancia respecto a la cubierta:

z	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$f(z)$	190	141	104	77.5	54.7	42.5	31.5	23.3	17.3	12.8	9.5

El cálculo de la fuerza total, es decir, de una integral definida cuyo integrando no posee una expresión analítica, es imprescindible para un correcto diseño del mástil.

¿Qué podemos hacer si nuestra función no tiene una expresión explícita y solo conocemos la función en algunos puntos?

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

NODOS EQUIESPACIADOS

Newton-Cotes

Métodos cerrados	Métodos abiertos
Trapecios Simpson	Punto medio

NODOS NO EQUIESPACIADOS

Cuadratura de Gauss

Gauss-Legendre	Gauss-Hermite
Gauss-Chebyshev	Gauss-Laguerre

INTEGRACIÓN SIMPLE Y MÚLTIPLE

Objetivos

- Conocer la expresión general de las técnicas de cuadratura
- Comprender e implementar las fórmulas derivadas de las expresiones de Newton-Cotes, cerradas y abiertas
- Comprender e implementar los casos particulares de la cuadratura de Gauss
- Aplicar la integración numérica sobre integración múltiple

Cuadratura numérica

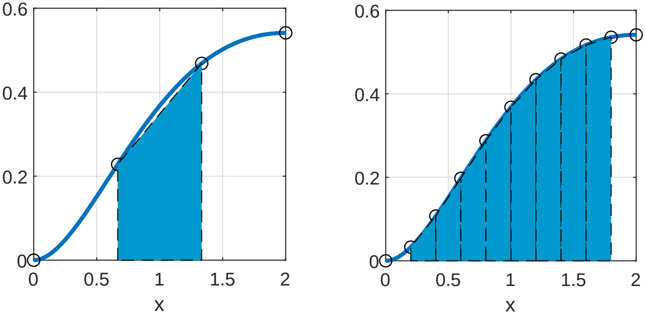
La técnica de cuadratura numérica consiste en calcular una integral a partir de unos valores discretos, obtenidos del valor del integrando en los diferentes nodos o en valores tabulados.
En general, la cuadratura numérica consiste en obtener

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Cuadratura numérica

La técnica de cuadratura numérica consiste en calcular una integral a partir de unos valores discretos, obtenidos del valor del integrando en los diferentes nodos o en valores tabulados.
En general, la cuadratura numérica consiste en obtener

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$



Cuadratura numérica

La técnica de cuadratura numérica consiste en calcular una integral a partir de unos valores discretos, obtenidos del valor del integrando en los diferentes nodos o en valores tabulados.
En general, la cuadratura numérica consiste en obtener

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Polinomio de interpolación de Lagrange de grado n

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i), \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

- Error cometido en $f(x) \approx l_n(x)$: $\quad \epsilon(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i).$

Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(l_n(x) + \epsilon(x)\right)\,dx$$

Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(l_n(x) + \epsilon(x)\right)\,dx \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right\} dx
\end{aligned}
$$

Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(l_n(x) + \epsilon(x)\right)\,dx \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right\} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx.
\end{aligned}
$$

Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(l_n(x) + \epsilon(x)\right)\,dx \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right\} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx.
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
I \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx,
$$

denominándose error de cuadratura al término

$$
\frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx.
$$

Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(l_n(x) + \epsilon(x)\right)\,dx \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right\} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx.
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
I \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx,
$$

denominándose error de cuadratura al término

$$
\frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx.
$$

- nodos equiespaciados $\rightsquigarrow$ fórmulas de Newton-Cotes
- nodos NO equiespaciados $\rightsquigarrow$ cuadratura de Gauss

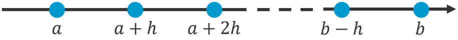
2

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\, dx,$$

- Nodos equiespaciados: $x \in [a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$



Teorema 1 (Error de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes)

Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$ la fórmula de Newton-Cotes cerrada de $n+1$ puntos donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a,b)$ tal que

- *para valores pares de n y si $f \in \mathcal{C}^{n+2}[a,b]$ se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_0^n \tau^2(\tau-1)\cdots(\tau-n)\, d\tau.$$

- *para valores impares de n y si $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^n \tau(\tau-1)\cdots(\tau-n)\, d\tau.$$

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Aproximación de $I = \int_a^b f(x)\,dx$:

- Trapecios:

$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right), \qquad \epsilon = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

- Simpson:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right), \qquad \epsilon = -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi)$$

- Simpson 3/8:

$$I \approx \frac{3h}{8}\left(f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right), \qquad \epsilon = -\frac{3h^5}{80}f^{(iv)}(\xi)$$

- Milne:

$$I \approx \frac{2h}{45}\left(7f(a)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f(b)\right),$$

$$\epsilon = -\frac{8h^7}{945}f^{(vi)}(\xi)$$

Contenidos

Desarrollo

- Puntos ($n = 1$): $x_0 = a$, $x_1 = b$

$$
\begin{aligned}
I &\approx f(a)\int_a^b L_0(x)\,dx + f(b)\int_a^b L_1(x)\,dx \\
&= f(a)\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx + f(b)\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx \\
&= -\frac{f(a)}{h}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{h}\int_a^b (x-a)\,dx \\
&= \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right).
\end{aligned}
$$

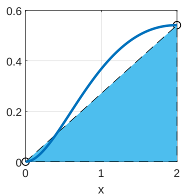
Método de Trapecios

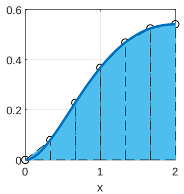
$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

- Error: $\epsilon = -\frac{h^3}{12} f''(\xi(x))$

Reducción del error

1. Dividir el intervalo $[a,b]$ en subintervalos
2. Aplicar el método de trapecios sobre cada subintervalo





Método de trapecios compuesto

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

- Error: $\epsilon = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi(x))$

Trapecios.m

```
function I=Trapecios(f,a,b,n)
% fórmula de Trapecios compuesta
  h=(b-a)/n;
  x=a:h:b;
  pesos=[1 2*ones(1,n-1) 1];
  I=h/2*sum(pesos.*f(x));
end
```

Contenidos

Desarrollo

- Puntos ($n = 2$): $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$\begin{aligned} I &\approx f(a)\int_a^b L_0(x)\,dx + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b L_1(x)\,dx + f(b)\int_a^b L_2(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \end{aligned}$$

Método de Simpson

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

- Error: $\epsilon = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi(x))$

Método de Simpson compuesto

Aplicando la regla de Simpson a cada subintervalo $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, $j = 1, 3, 5, \ldots, n-1$, con n par:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right) \end{aligned}$$

- Error: $\epsilon = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\xi(x))$

Simpson.m

```
function I=Simpson(f,a,b,n)
% fórmula de Simpson compuesta
  h=(b-a)/n; x=a:h:b;
  pesos=ones(1,n+1); pesos(2:2:n)=4; pesos(3:2:n-1)=2;
  I=h/3*sum(pesos.*f(x));
end
```

Ejemplo 2. Calcula $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{-x}\,dx$, utilizando los métodos de Trapecios y Simpson tomando 4 y 8 subintervalos. Para cada caso, calcula el error cometido sabiendo que el resultado analítico es $\frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$.

```
>> f=@(x) sin(x).*exp(-x);
>> a=0; b=pi/2; n1=4; n2=8;
```

	Trapecios	Simpson	ϵ_T	ϵ_S
$n=4$	0.380591	0.395839	0.015469	0.000221
$n=8$	0.392183	0.396047	0.003877	0.000013

- Para un mismo método, el error se reduce cuando disminuye el tamaño de h
- Las fórmulas de Simpson tienen menor error que las de Trapecios

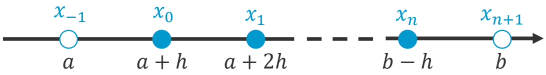
3

Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\, dx$$

- Nodos equiespaciados: $x \in [a, b]$
- El primer y último nodo no se toman: $\{a = x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = b\}$

$$h = \frac{b-a}{n+2}$$



Teorema 2 (Error de las fórmulas abiertas de Newton-Cotes)

Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$ *la fórmula de Newton-Cotes abierta de* $n+1$ *puntos donde* $x_{-1} = a$, $x_{n+1} = b$ *y* $h = \frac{b-a}{n+2}$. *Entonces existe un* $\xi \in (a, b)$ *tal que*

- *para valores pares de* n *y si* $f \in \mathcal{C}^{n+2}[a, b]$ *se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_{-1}^{n+1} \tau^2(\tau - 1) \cdots (\tau - n)\, d\tau.$$

- *para valores impares de* n *y si* $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ *se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{-1}^{n+1} \tau(\tau - 1) \cdots (\tau - n)\, d\tau.$$

Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$:

- Punto medio, $n=0$:

$$I \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \epsilon = \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

- $n=1$:

$$I \approx \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right), \qquad \epsilon = \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

- $n=2$:

$$I \approx \frac{b-a}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right), \qquad \epsilon = \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\xi)$$

Contenidos

Desarrollo

- Puntos $(n = 0)$: $x_{-1} = a$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_1 = b$

$$I \approx f(x_0) \int_a^b dx = (b-a) f(x_0) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Método de Punto Medio

$$I \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- Error: $\epsilon = -\dfrac{h^3}{3} f''(\xi(x))$

Reducción del error

1. Dividir el intervalo $[a,b]$ en subintervalos
2. Aplicar el método de punto medio a cada subintervalo

- El método de punto medio abarca los puntos anterior y posterior:

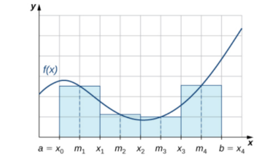
$$x_{-1} \quad \hookleftarrow \quad x_0 \quad \hookrightarrow \quad x_1$$

➔ Tomaremos solo los puntos pares para no solapar

➔ El número de subintervalos n debe ser par

Método de Punto Medio compuesto

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=0}^{n/2} (x_{2i+1} - x_{2i-1}) f(x_{2i}) \\ &= 2h\left(f(x_0) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_n)\right) \end{aligned}$$



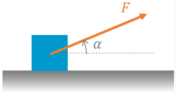
- Error: $\epsilon = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$

PuntoMedio.m

```
function I=PuntoMedio(f,a,b,n)
% fórmula de punto medio compuesta
  h=(b-a)/(n+2);
  x=a+h:h:b-h;
  I=2*h*sum(f(x(1:2:end)));
end
```

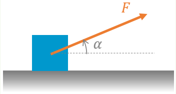
Ejemplo 3. El trabajo W necesario para trasladar un cuerpo de una posición a otra se puede calcular como $W = \int_a^b F(x)\cos(\alpha(x))\,dx$. Con los datos de la tabla, calcula el trabajo realizado utilizando el método de Punto Medio.

x	0.00	1.52	3.04	4.56	6.08	7.60	9.12
$F(x)$	0.00	40.04	57.83	62.28	46.71	53.38	22.24
$\alpha(x)$	0.50	1.40	0.75	0.90	1.30	1.48	1.50



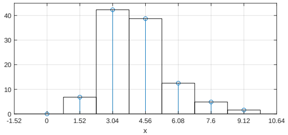
Ejemplo 3. El trabajo W necesario para trasladar un cuerpo de una posición a otra se puede calcular como $W = \int_a^b F(x)\cos(\alpha(x))\,dx$. Con los datos de la tabla, calcula el trabajo realizado utilizando el método de Punto Medio.

x	0.00	1.52	3.04	4.56	6.08	7.60	9.12
$F(x)$	0.00	40.04	57.83	62.28	46.71	53.38	22.24
$\alpha(x)$	0.50	1.40	0.75	0.90	1.30	1.48	1.50



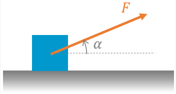
Como la distancia entre los nodos es 1.52, para tomar todos los puntos definimos:

$$x_i = \frac{1.52}{2} i, \quad i = -1, 0, \ldots, 13,$$



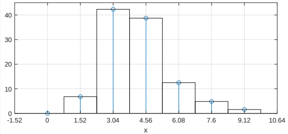
Ejemplo 3. El trabajo W necesario para trasladar un cuerpo de una posición a otra se puede calcular como $W = \int_a^b F(x)\cos(\alpha(x))\,dx$. Con los datos de la tabla, calcula el trabajo realizado utilizando el método de Punto Medio.

x	0.00	1.52	3.04	4.56	6.08	7.60	9.12
$F(x)$	0.00	40.04	57.83	62.28	46.71	53.38	22.24
$\alpha(x)$	0.50	1.40	0.75	0.90	1.30	1.48	1.50



Como la distancia entre los nodos es 1.52, para tomar todos los puntos definimos:

$$x_i = \frac{1.52}{2} i, \quad i = -1, 0, \ldots, 13,$$



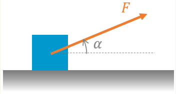
$$x_{-1} = -\frac{1.52}{2}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1.52}{2}, \quad x_2 = 1.52, \quad x_3 = \frac{1.52+3.04}{2}, \quad x_4 = 3.04,$$

$$x_5 = -\frac{3.04+4.56}{2}, \quad x_6 = 4.56, \quad x_7 = \frac{4.56+6.08}{2}, \quad x_8 = 6.08, \quad x_9 = \frac{6.08+7.60}{2},$$

$$x_{10} = 7.60, \quad x_{11} = -\frac{7.60+9.12}{2}, \quad x_{12} = 9.12, \quad x_{13} = 9.12 + \frac{1.52}{2}.$$

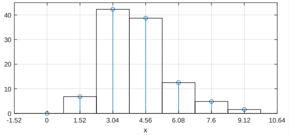
Ejemplo 3. El trabajo W necesario para trasladar un cuerpo de una posición a otra se puede calcular como $W = \int_a^b F(x)\cos(\alpha(x))\,dx$. Con los datos de la tabla, calcula el trabajo realizado utilizando el método de Punto Medio.

x	0.00	1.52	3.04	4.56	6.08	7.60	9.12
$F(x)$	0.00	40.04	57.83	62.28	46.71	53.38	22.24
$\alpha(x)$	0.50	1.40	0.75	0.90	1.30	1.48	1.50



Como la distancia entre los nodos es 1.52, para tomar todos los puntos definimos:

$$x_i = \frac{1.52}{2} i, \quad i = -1, 0, \ldots, 13,$$



Aplicando el método de punto medio compuesto:

$$I = 2h\left(f(x_0) + f(x_2) + \cdots + f(x_{10}) + f(x_{12})\right) = 162.24638.$$

4

Cuadratura de Gauss

Objetivo

Obtención de los nodos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y de los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que minimizan el error obtenido en la aproximación:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

- $w(x)$: función peso, y cumple $w(x) > 0, x \in [a, b]$
- Para nodos no equiespaciados

Obtención de los coeficientes c_i

1. Determinar unos polinomios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ tales que

$$\langle p_i, p_j \rangle = 0, \qquad i \neq j.$$

2. Los nodos $x_1, \ldots, x_n$ son las raíces del polinomio $p_n(x)$.

A partir de estas dos condiciones, se pueden obtener los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ y, por tanto, la fórmula de cuadratura.

Fórmulas de cuadratura

- $w(x) = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$ ➔ Cuadratura de Gauss-Legendre
- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a, b] = [-1, 1]$ ➔ Cuadratura de Gauss-Chebyshev
- $w(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, +\infty)$ ➔ Cuadratura de Gauss-Laguerre
- $w(x) = e^{-x^2}$, $[a, b] = (-\infty, +\infty)$ ➔ Cuadratura de Gauss-Hermite

Error

$$\epsilon = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \int_a^b p_n^2(x) w(x)\, dx, \quad \xi \in (a, b).$$

Contenidos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

- $w(x) = 1$
- $[a, b] = [-1, 1]$
- Polinomios $p_i(x)$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_{k+1}(x) &= \tfrac{1}{k+1}\left[(2k+1)xp_k(x) - kp_{k-1}(x)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

- Raíces de $p_n(x)$:

$$x_i = \left(1 - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8n^3}\right)\cos\left(\pi\frac{4k-1}{4n+2}\right)$$

- Coeficientes c_i:

$$c_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(p_n'(x_i))^2}$$

	i	1	2	3	4	5
$n=2$	x_i	-0.577350	0.577350	-	-	-
	c_i	1.000000	1.000000	-	-	-
$n=3$	x_i	0.000000	-0.774597	0.774597	-	-
	c_i	0.888889	0.555556	0.555556	-	-
$n=4$	x_i	-0.339981	-0.861136	0.339981	0.861136	-
	c_i	0.652145	0.347855	0.652145	0.347855	-
$n=5$	x_i	0.000000	-0.538469	-0.906180	0.538469	0.906180
	c_i	0.568889	0.478629	0.236927	0.478629	0.236927

Tabla: Nodos y coeficientes de la cuadratura de Gauss-Legendre

Ejemplo 4. Cuadratura de Gauss-Legendre para $n=4$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4)\\ &= 0.652145 f(-0.339981) + 0.347855 f(-0.861136)\\ &\quad +0.652145 f(0.339981) + 0.347855 f(0.861136)\end{aligned}$$

Intervalo genérico $[a, b]$

$$[a, b] \quad \rightsquigarrow \quad [-1, 1]$$

Utilizamos el cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}, \qquad dx = \frac{b-a}{2}dy,$$

por lo que podremos aproximar

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right).$$

Ejemplo 5. Obtén el valor de $I = \int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$ con la cuadratura de Gauss-Legendre utilizando $n = 2$ y $n = 3$

Transformamos el intervalo $[1, 1.5]$ en el $[-1, 1]$:

$$x = \frac{1.5-1}{2}y + \frac{1.5+1}{2} = \frac{y+5}{4}, \qquad dx = \frac{dy}{4}$$

de modo que

$$I = \int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(y+5)^2}{16}}\,dy.$$

- $n = 2$:

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(y+5)^2}{16}}\,dy \approx \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{(-0.577350+5)^2}{16}} + e^{-\frac{(0.577350+5)^2}{16}}\right) = 0.109400.$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(y+5)^2}{16}}\,dy \approx \\ &\approx \tfrac{1}{4}\left(0.888889e^{-\frac{(0+5)^2}{16}} + 0.555556e^{-\frac{(-0.774597+5)^2}{16}} + 0.555556e^{-\frac{(0.774597+5)^2}{16}}\right) \\ &= 0.109364.\end{aligned}$$

Contenidos

Cuadratura de Gauss-Chebyshev

- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[a, b] = [-1, 1]$
- Polinomios $p_i(x)$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_{k+1}(x) &= 2xp_{k-1}(x) - p_{k-2}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Raíces de $p_n(x)$:

$$x_i = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right)$$

- Coeficientes c_i:

$$c_i = \frac{\pi}{n}$$

- Aproximamos la integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

	i	1	2	3	4	5
$n=2$	x_i	-0.707107	0.707107	-	-	-
$n=3$	x_i	-0.866025	0.000000	0.866025	-	-
$n=4$	x_i	-0.923880	-0.382683	0.382683	0.923880	-
$n=5$	x_i	-0.951057	-0.587785	0.000000	0.587785	0.951057

Tabla: Nodos de la cuadratura de Gauss-Chebyshev

Ejemplo 6. Cuadratura de Gauss-Chebyshev para $n=4$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{4}\left(f(-0.923880)+f(-0.382683)+f(0.382683)+f(0.923880)\right)$$

Ejemplo 7. Calcula la integral $I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ con seis decimales exactos

Tenemos que determinar el valor de n tal que el error satisface

$$\epsilon = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e^{\xi} < 10^{-6}, \qquad \xi \in (-1, 1).$$

Acotemos el error ϵ:

$$|e^{\xi}| \leq e \quad \Leftrightarrow \quad |\epsilon| = \left| \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e^{\xi} \right| \leq \left| \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e \right|.$$

Calculamos para diferentes valores de n, obteniendo:

- $n = 1 : |\epsilon| < 2.134933555$
- $n = 2 : |\epsilon| < 0.044477782$
- $n = 3 : |\epsilon| < 3.70648 \cdot 10^{-4}$
- $n = 4 : |\epsilon| < 1.65468 \cdot 10^{-6}$
- $n = 5 : |\epsilon| < 4.59633 \cdot 10^{-9} \Rightarrow$ para $n = 5$ se garantiza que el error es menor a 10^{-6}

$$I \approx \frac{\pi}{5}\left(e^{-0.951057} + e^{-0.587785} + e^{0} + e^{0.587785} + e^{0.951057}\right) = 3.977463$$

Contenidos

Cuadratura de Gauss-Laguerre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

- $w(x) = e^{-x}$
- $[a, b] = [0, +\infty)$
- Polinomios $p_i(x)$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= 1 - x, \\ p_{k+2}(x) &= (2k + 3 - x)p_{k+1}(x) - (k + 1)^2 p_k(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 2. \end{aligned}$$

- Raíces de $p_n(x)$:

$$x_i = \frac{j_{0i}^2}{4h_n}\left(1 + \frac{-2 + j_{0k}^2}{48h_n^2}\right),$$

siendo $h_n = n + \frac{1}{2}$ y j_{0i} la raíz i-ésima de la función $J_0(x)$, es decir, la función de Bessel de primera especie y orden.

- Coeficientes c_i:

$$c_i = \frac{(n!)^2 x_i}{p_{n+1}^2(x_i)}.$$

Ejemplo 8. Calcula la integral $I = \int_0^{+\infty} e^{-10x} \sin(x)\, dx$ utilizando la cuadratura de Gauss-Laguerre para $n = 3$

El dominio de la integral está en $[0, +\infty)$, pero no es de la forma $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx$

- Cambio de variable:

$$y = 10x \quad \Rightarrow \quad dy = 10\, dx$$

entonces

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-10x} \sin(x)\, dx = \frac{1}{10} \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin\left(\frac{y}{10}\right) dy.$$

- Polinomios de Laguerre hasta $n = 4$:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1, \\
p_1(x) &= 1 - x, \\
p_2(x) &= x^2 - 4x + 2, \\
p_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \\
p_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24,
\end{aligned}$$

Ejemplo 8. Calcula la integral $I = \int_0^{+\infty} e^{-10x}\sin(x)\,dx$ utilizando la cuadratura de Gauss-Laguerre para $n = 3$

- Calculamos las raíces de $p_3(x)$:

```
>> syms x
>> p3=-x.∧3+9*x.∧2-18*x+6;
>> xi=double(solve(L3==0))
xi =
   0.415774556783479
   2.294280360279042
   6.289945082937479
```

- Obtenemos los coeficientes:

```
>> p4=x.∧4-16*x.∧3+72*x.∧2-96*x+24;
>> ci=(factorial(3))∧2*xi./...
(double(subs(p4,x,xi))).∧2
ci =
   0.711093009929173
   0.278517733569241
   0.010389256501586
```

Por tanto, el valor de la integral para $n = 3$ será:

$$I = \frac{1}{10}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin\left(\frac{y}{10}\right)dy \approx \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} c_i f(x_i)$$

```
>> f=@(y) sin(y/10);
>> I=1/10*sum(f(xi).*ci)
I=
  0.009900991829812
```

Contenidos

Cuadratura de Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

- $w(x) = e^{-x^2}$
- $[a, b] = (-\infty, +\infty)$
- Polinomios $p_i(x)$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= 2x, \\ p_{k+2}(x) &= 2xp_{k+1}(x) - 2(k+1)p_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

- Coeficientes c_i:

$$c_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 H_{n-1}^2(x_i)}.$$

Ejemplo 9. Calcula la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2} |x| \, dx$ utilizando la cuadratura de Gauss-Hermite para $n = 4$

- Cambio de variable:

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2\, dx$$

entonces

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2} |x| \, dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y| \, dy.$$

- Calculamos los polinomios de Hermite hasta $n = 4$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= 2x, \\ p_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ p_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ p_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Calcula la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2}|x|\,dx$ utilizando la cuadratura de Gauss-Hermite para $n = 4$

- Calculamos las raíces de $p_4(x)$:

```
>> xi=roots([16 0 -48 0 12])
xi =
  -1.650680123885785
  1.650680123885786
  -0.524647623275290
  0.524647623275290
```

- Obtenemos los coeficientes:

```
>> syms x
>> p3=8*x.∧3-12*x;
>> ci=2∧(4-1)*factorial(4)*sqrt(pi)/4∧2./(double(subs(p3,x,xi)).∧2);
```

- El valor de la integral para $n = 4$ será:

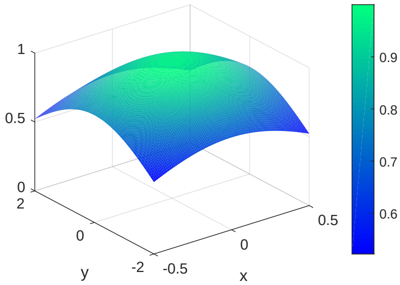
```
f=@(y) abs(y);
>> I=1/4*sum(ci.*f(xi))
I =
0.278258872775874
```

5

Integración múltiple

- Integración sobre más de una variable: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Consideraremos $n = 2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$



Objetivo

Aproximación de integrales dobles utilizando:

- Nodos equiespaciados (método de Trapecios)
- Nodos no equiespaciados (fórmulas de cuadratura de Gauss)

Contenidos

Podemos escribir la integral doble como

$$I = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx.$$

Si nombramos $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, entonces

$$I = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Con la notación $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\quad k = \dfrac{d-c}{m}$, aproximamos la integral como

$$I = \int_a^b g(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) + g(x_{i+1}) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{ \int_c^d f(x_i,y)\,dy + \int_c^d f(x_{i+1},y)\,dy \right\}$$

$$\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{ \frac{k}{2}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i,y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + \frac{k}{2}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i,y_j) + f(x_i,y_{j+1}) \right\}$$

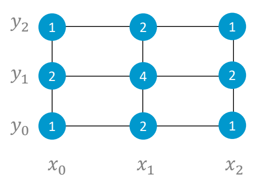
Aproximación de la integral doble con la regla de Trapecios

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\, dy \right\} dx \\
&\approx \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i+1}, y_{j+1}) \right\},
\end{aligned}
$$

siendo $h = \frac{b-a}{n}$, $\quad k = \frac{d-c}{m}$.

Ejemplo 10. Regla de Trapecios para $n = 2$ y $m = 2$

$$
\begin{aligned}
I \approx \frac{hk}{4} & [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2) + \\
& + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + 2f(x_1, y_2) + \\
& + f(x_2, y_0) + 2f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)]
\end{aligned}
$$



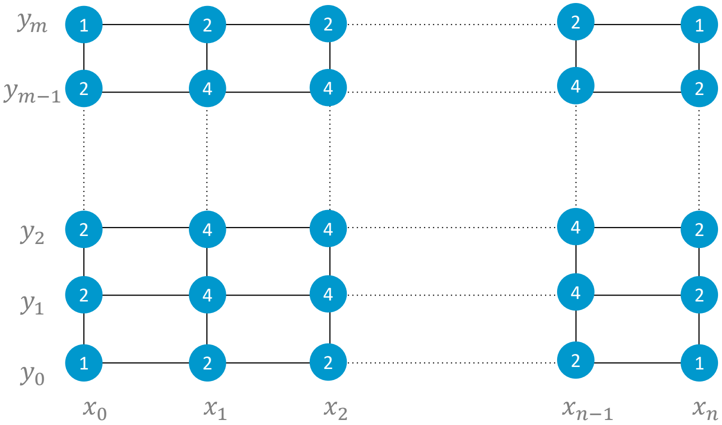


Figura: Distribución de los nodos para cualesquiera n y m

Contenidos

- Nodos no equiespaciados $\Rightarrow$ cuadratura de Gauss
- Transformar el recinto de integración $[a, b] \times [c, d]$ en el que corresponda a la cuadratura

Enunciado

Calcula la integral

$$I = \iint\limits_R \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dA,$$

donde $f(x,y)$ es la superficie de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + f^2(x,y) = 9,$$

y el recinto de integración es

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Utiliza los métodos de Simpson con $n = m = 8$ y de Gauss-Legendre con $n = 4$.

Solución

La función f que aparece en el integrando es $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$$

de modo que el integrando es

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}.$$

El recinto de integración es un cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, por lo que la integral a resolver es

$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{\frac{x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}\,dy\,dx.$$

Solución (Método de Simpson con $n = m = 8$)

La distribución de nodos del método de Simpson es la expuesta en la siguiente tabla para $n = m = 8$:

1	4	2	4	2	4	2	4	1
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
1	4	2	4	2	4	2	4	1

El resultado es

$$I \approx 0.267814255559730.$$

Solución (Método de Gauss-Legendre con $n = 4$)

Para aplicar el método de Gauss-Legendre, aplicamos los cambios de variables:

$$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2\,dx, \qquad v = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad dv = 2\,dy.$$

Por tanto,

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9 - x^2 - y^2}}\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{u^2 + 2u + v^2 + 2v + 2}{34 - u^2 - 2u - v^2 - 2v}}\,dv\,du$$

Los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre para $n = 4$ son

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = -0.339981, & c_1 &= 0.652145;\\
u_2 &= v_2 = -0.861136, & c_2 &= 0.347855;\\
u_3 &= v_3 = -u_1, & c_3 &= c_1;\\
u_4 &= v_4 = -u_2, & c_4 &= c_2.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$I \approx \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_i c_j \sqrt{\frac{u_i^2 + 2u_i + v_j^2 + 2v_j + 2}{34 - u_i^2 - 2u_i - v_j^2 - 2v_j}} \approx 0.267770529696778.$$

- Lecciones magistrales
- Material complementario: A fondo
- Bibliografía recomendada

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET