PAC1

Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

   (a) Demostreu que la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 3x + 1$ és bijectiva.

   (b) Demostreu que la funció anterior, si la considerem restringida als nombres naturals, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, és injectiva però no exhaustiva, i que passa el mateix restringida als nombres enters, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

   (c) De quantes maneres poden seure quatre persones en una filera de teatre de dotze seients, si cadascuna pot triar-ne qualsevol? (no han de seure necessàriament en seients consecutius)

   (d) En una taula d'un restaurant cadascun dels quatre comensals ha de triar quin postre vol. Si hi ha sis postres diferents a escollir, de quantes maneres diferents pot fer la tria el grup?

Solució:

(a) La funció és injectiva, ja que si $f(x) = f(y)$ aleshores $3x + 1 = 3y + 1$, d'on simplificant s'obté $x = y$. D'altra banda la funció també és exhaustiva, ja que per qualsevol nombre real y donat existeix un nombre real x tal que $f(x) = y$. Només cal que x sigui tal que $3x + 1 = y$, és a dir, aïllant, $x = \frac{y-1}{3}$.

(b) Es demostra que la funció és injectiva de la mateixa manera que a l'apartat anterior. En canvi, el raonament per provar l'exhaustivitat ja no és vàlid, ja que, per exemple, el 3 no té antiimatge: hauria de ser $\frac{2}{3}$, que no pertany als nombres naturals ni als enters.

(c) Es tracta d'una 4-mostra ordenada sense repetició d'un conjunt de 12 elements, i per tant hi ha $V(12, 4) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$ maneres diferents.

(d) En aquest cas és una 4-mostra amb repetició d'un conjunt de 6 elements, de manera que el nombre de possibilitats diferents de demanar les postres és $VR(6, 4) = 6^4 = 1296$.

---

2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent on L és una llista de bits de longitud $n \geq 1$.

```
funció CanviBase10(L)
  inici
    n ← Longitud(L)
    resultat ← 0
    per i = 1 fins n
        si L[i] = 1 aleshores
                resultat ← resultat + 2^(i−1)
        fisi
    fiper
    retorn resultat
  fi
```

   (a) Calculeu el resultat de les següents crides: *CanviBase10*([1,0,1]), *CanviBase10*([1,1,0,0,1]), *CanviBase10*([1,0,0,1,1]), *CanviBase10*([0,0,0,1,1,1]).

   (b) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme. Suposeu que obtenir la longitud a partir d'una llista només representa una operació elemental, i obtenir el valor d'una potència 2^s requereix $s - 1$ productes, per tant $s - 1$ operacions elementals.

   (c) Determineu, en funció de la longitud de la llista, n, la complexitat de l'algorisme.

   (d) Proposeu una alternativa que millori l'algorisme.

Solució:

(a) Els resultats són: 5, 19, 25, 56.

(b) Les línies 4 i 10 efectuen una operació elemental cada una. La línia 3 efectua dues operacions elementals, una per obtenir la longitud de la llista, i l'altra per l'assignació. La línia 5 efectua una inicialització, $n+1$ comparacions i n increments de la variable, per tant un total de $2n+2$ operacions elementals.

La línia 7 efectua una operació elemental amb la suma, una amb la resta $i-1$, una amb l'assignació i $i-2$ operacions elementals amb els productes per obtenir 2^{i-1}, per tant un total de $i+1$ operacions elementals. La condició de la línia 6 també representa una operació elemental. En el pitjor dels casos, o sigui quan la llista L conté tot uns, haurem d'executar la línia 7 en totes les iteracions del bucle, per tant per la iteració i-èssima, el nombre d'operacions és $i+2$. El nombre d'iteracions és n, i per tant el total d'operacions elementals durant el bucle és $3+4+\cdots+(n+2) = n(n+5)/2$.

Per tant, el nombre total d'operacions elementals serà, en el pitjor dels casos, $n(n+5)/2 + 2n + 6 = (n^2+9n)/2 + 6$.

(c) D'acord amb les propietats de la complexitat, aquest algorisme tindrá una complexitat $O(n(n+5)/2 + 4) = O(n^2)$.

(d) Observem que si anem guardant en una variable el resultat de la potència 2^{i-1}, només cal multiplicar per 2 el resultat de la potència anterior. Per tant, en cada iteració només s'efectuaria, en el pitjor dels casos, una comparació (línia 8), una suma (línia 9) i un producte (línia 11):

```
1  funció CanviBase10(L)
2   inici
3     n ← Longitud(L)
4     resultat ← 0
5     powerTwo ← 1
6     per i = 1 fins n
7       si L[i] = 1 aleshores
8         resultat ← resultat + powerTwo
9       fisi
10      powerTwo ← 2 · powerTwo
11    fiper
12    retorn resultat
13  fi
```

Observem que la complexitat d'aquest algorisme en funció d'n és $O(5n+5) = O(n)$.

3. (Valoració d'un 20%) Volem trobar el conjunt C de tots els grafs diferents (llevat d'isomorfisme) connexos i bipartits d'ordre 5. Per la definició de graf bipartit, sabem que hi ha una partició $V = V_1 \cup V_2$ que verifica determinades condicions (vegeu pàgina 19 del mòdul 2).

(a) Demostreu que a C hi ha un únic graf en què V_1 consta d'un sol vèrtex.

(b) Considerem ara que $V_1 = \{v_1, v_2\}$ i $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$. Quin és el graf de C de mida més gran possible?

(c) Demostreu que tot graf de C té mida $4 \leq m \leq 6$.

(d) Només ens falta trobar els grafs de C amb $V_1 = \{v_1, v_2\}$ i $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ que tenen mida 4 ó 5. Trobeu els dos de mida 4 i l'únic de mida 5, i demostreu que no són isomorfs.

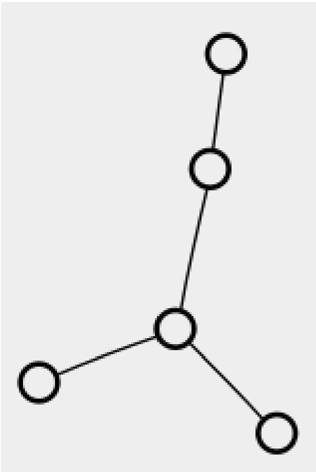
Solució:

(a) Sigui $V_1 = \{v_1\}$ i $V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Per tal que el graf sigui connex, tots els vèrtexs de V_2 han d'estar connectats amb v_1. Com que no podem afegir-hi cap altra aresta entre V_1 i V_2, aquest graf (que és el graf estrella, E_5) és l'únic graf possible que verifica les condicions demanades.

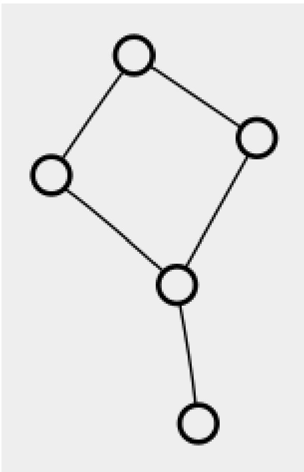
(b) El graf bipartit complet $K_{2,3}$. A aquest graf ja no li podem afegir cap més aresta, ja que tot vèrtex de V_1 és adjacent a tots els vèrtexs de V_2.

(c) En un graf connex $m \geq n - 1$, per tant $m \geq 4$. D'altra banda, la mida màxima s'assolirà en un graf bipartit complet, que ha de ser o bé $K_{1,4} = E_5$, o bé $K_{2,3}$. Aquest darrer és el que té mida màxima ($m = 6$).

(d) Els de mida 4 són el graf trajecte (T_5) i el següent:



No són isomorfs perquè aquest últim té un vèrtex de grau 3, mentre que T_5 no en té cap. L'únic de mida 5 (que es pot obtenir afegint una aresta a qualsevol dels dos anteriors) no pot ser isomorf a cap d'aquests dos perqué té diferent mida:



4. (Valoració d'un 20%) Considereu $s : x+2, y+1, x+1, x+1, y, x, x, 1, 1$ una seqüència no necessàriament ordenada.

   (a) Per a quins valors de x la seqüència s podria ser gràfica?

   (b) Doneu un exemple de x i y tal que existeix un graf no connex G amb seqüència de graus s. Dibuixeu G i digueu quantes components connexes té.

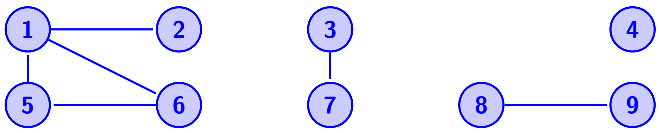
   (c) Quina és la mida mínima d'un graf amb seqüència de graus s per ser connex? Per a quins valors de x i y s és la seqüència d'un graf amb aquesta mida?

   (d) Si $y = 2$, digueu per a quins valors de x s és una seqüència gràfica.

Solució:

(a) Per tal que s sigui gràfica necessitem, aplicant la fòrmula dels graus, que es compleixi $2|A| = \sum_{i=1}^{9} g_i$. En aquest cas, tenim $2|A| = 5x + 2y + 7$; i, per tant, x ha de ser senar. A més, tenim que $x \geq 0$ i $x + 2 \leq (|V| - 1) = 8$; per tant, $0 \leq x \leq 6$ i aleshores $x \in \{1, 3, 5\}$.

(b) Si prenem $x = 1, y = 0$ aleshores $s : 3, 1, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 1$. Un exemple de graf amb aquesta seqüència de graus és:



Aquest graf té 4 components connexes.

(c) Tot graf connex ha de complir $|A| \geq |V| - 1 = 8$. Per tant, la mida mínima serà $|A| = 8$.
Com sabem que $2|A| = \sum_{i=1}^{9} g_i$ i $|A| = 8$, aleshores $5x + 2y + 7 = 16$, d'on tenim $5x + 2y = 9$. Sabem que $x \in \{1, 3, 5\}$. L'única solució possible és per $x = 1$ i en aquest cas tenim $y = 2$.

(d) Considerarem els tres casos: $x \in \{1, 3, 5\}$.

$x = 1$	$x = 3$	$x = 5$
$3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$	$5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1$	$7, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 1, 1$
$2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	$3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1$	$5, 5, 4, 4, 2, 1, 1, 0$
$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0$	$2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$	$4, 3, 3, 1, 1, 0, 0$
$1, 1, 1, 1, 0, 0$	$1, 1, 1, 1, 1, 1$	$2, 2, 0, 0, 0, 0$
$1, 1, 0, 0, 0$	$1, 1, 1, 1, 0$	$1, -1, 0, 0, 0$
$0, 0, 0$	$1, 1, 0, 0$	No és gràfica
És gràfica	$0, 0, 0$	
	És gràfica	

---

5. (Valoració d'un 20%) Considereu la xarxa del metro de València que podeu trobar a http://cat.redtransporte.com/valencia/metro-valencia/planol.pdf.

   Construïu el graf obtingut a partir de la xarxa anterior prenent com a vèrtexs les estacions de la xarxa on hi ha transbordaments i tenint en compte que dos vèrtexs són adjacents si hi ha una línia de la xarxa que uneix les estacions dels dos transbordaments i el cost d'aquesta aresta és el nombre de parades de la línia per anar d'una estació-transbordament a l'altra. Responeu a les següents preguntes fent servir l'algorisme més apropiat (heu d'incloure les taules de funcionament dels algorismes).

   (a) Doneu el camí que hem de fer d'*Empalme* (1) a *Grau-Canyamelar* (5) si volem passar pel nombre mínim de parades. Digueu per quantes estacions hem de passar.

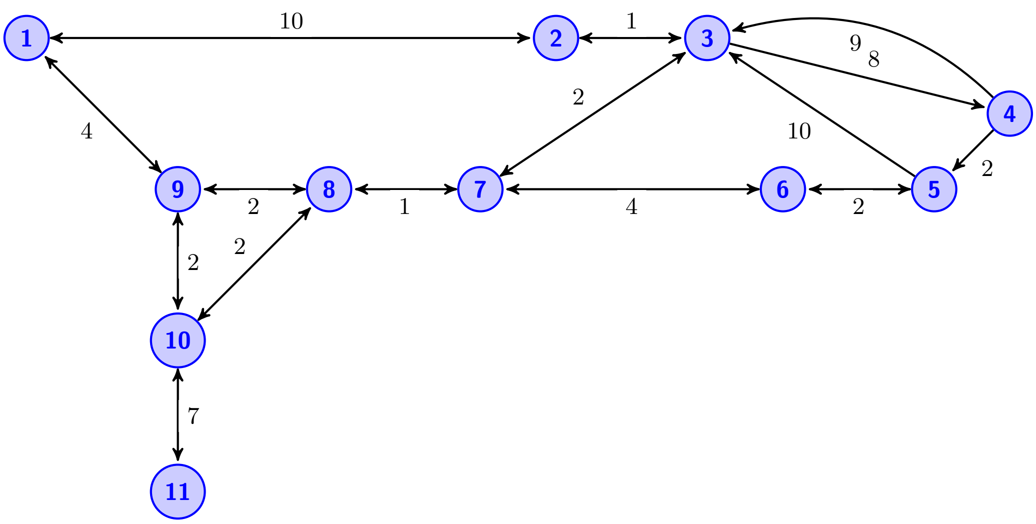
(b) Doneu el camí que hem de fer d'*Empalme* (1) a *Grau-Canyamelar* (5) si volem passar pel nombre mínim d'estacions-transbodaments. Digueu quants transbordaments reals s'han de fer, entenent per transbordaments reals el fet de canviar de línia.

(c) Descriviu com trobaríeu l'estació-transbordament que es troba en mitjana a menys estacions de la resta de trasbordaments. Digueu quin algorisme feu servir i doneu el valor amb el que inicieu l'algorisme i el primer pas (no cal donar el resultat final).

Nota: Numereu els vèrtexs del graf en comptes de fer servir el nom de les estacions-transbordaments. Comenceu per *Empalme* i seguiu el sentit de les agulles del rellotge i, en cas de dubte, de dalt a baix. Fixeu-vos que el graf no és simètric.

Solució: Els vèrtexs són $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ = {Empalme, Primat Reig, Benimaclet, Les Arenes, Grau-Canyamelar, Marítim-Serrería, Alameda, Colón, À. Guimerà, Joaquín Sorolla, Torrent}.

El graf corresponent és



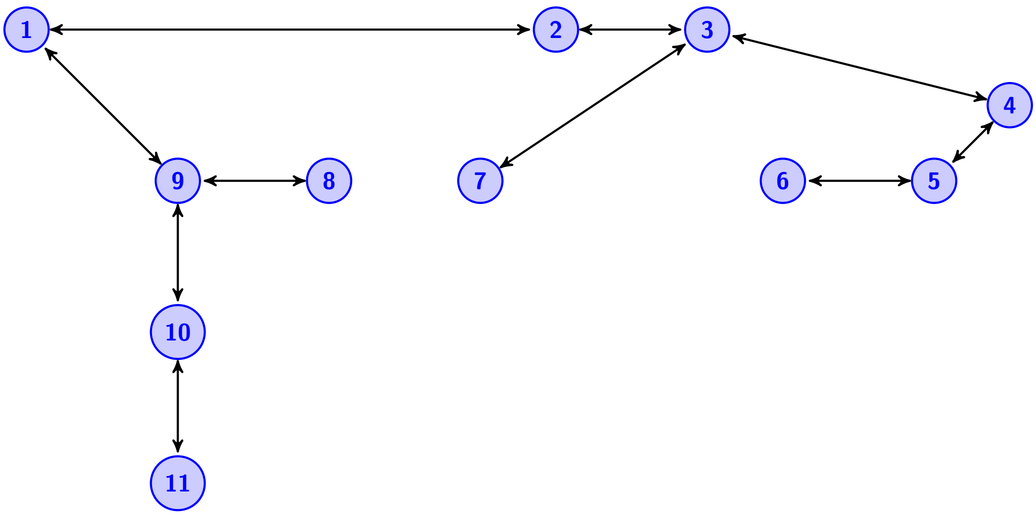
(a) Per obtenir el camí que passa per menys parades de Empalme a Grau-Canyamela, apliquem l'algorisme de Dijkstra a partir de l'estació 1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$(0,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$
$(0,1)^*$	$(10,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(4,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(6,9)$	$(4,1)^*$	$(6,9)$	$(\infty,1)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(7,8)$	$(6,9)^*$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(\infty,1)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)^*$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(11,7)$	$(7,8)^*$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)^*$	$(17,3)$	$(\infty,1)$	$(11,7)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)^*$	$(9,7)$	$(17,3)$	$(\infty,1)$	$(11,7)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)$	$(17,3)$	$(13,6)$	$(11,7)^*$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)$	$(15,5)$	$(13,6)^*$	$(11,7)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)$	$(15,5)$	$(13,6)$	$(11,7)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)^*$
$(0,1)$	$(10,1)$	$(9,7)$	$(15,5)^*$	$(13,6)$	$(11,7)$	$(7,8)$	$(6,9)$	$(4,1)$	$(6,9)$	$(13,10)$

El camí és: $1 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5$. Hem de passar per 15 estacions.

(b) Apliquem l'algorisme BFS per les arestes.

Q	Aresta afegida	S
1	-	$\emptyset$
1,2	$\{1,2\}$	$[\{1,2\}]$
1,2,9	$\{1,9\}$	$[\{1,2\},\{1,9\}]$
2,9	-	$[\{1,2\},\{1,9\}]$
2,9,3	$\{2,3\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\}]$
9,3	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\}]$
9,3,8	$\{9,8\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\}]$
9,3,8,10	$\{9,10\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\}]$
3,8,10	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\}]$
3,8,10,4	$\{3,4\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\}]$
3,8,10,4,7	$\{3,7\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\}]$
8,10,4,7	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\}]$
10,4,7	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\}]$
10,4,7,11	$\{10,11\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\}]$
4,7,11	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\}]$
4,7,11,5	$\{4,5\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\}]$
7,11,5	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\}]$
7,11,5,6	$\{5,6\}$	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\},\{5,6\}]$
11,5,6	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\},\{5,6\}]$
5,6	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\},\{5,6\}]$
6	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\},\{5,6\}]$
$\emptyset$	-	$[\{1,2\},\{1,9\},\{2,3\},\{9,8\},\{9,10\},\{3,4\},\{3,7\},\{10,11\},\{4,5\},\{5,6\}]$



El camí és $1-2-3-4-5$, passem per 3 estacions-transbordaments però només s'ha de fer un trasbordament real a *Les Arenes* (4).

(c) En aquest cas, hem de trobar el centre de distribució de costos del graf. Hauríem d'aplicar l'algorisme de Floyd per trobar la distància mínima entre cada parella de vèrtexs. Comencem amb la matriu inicial:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 10 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 8 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 2 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

El primer pas de l'algorisme seria:

$$d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 10 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 14 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 8 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 2 & 2 & \infty \\ 4 & 14 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 2 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Un cop obtenim la matriu final d^{11}, hem de posar el centre de distribució en el vèrtex tal que la suma de costos a la resta de vèrtexs sigui mínima.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 03/04/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**