# Universitat Oberta de Catalunya

**ASSIGNATURA:** ÀLGEBRA

**PAC Núm.:** **3**

**Data de proposta:** 17/04/2014 **Data d´entrega:** $\leq$ 28/04/2014

**Observacions:**

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix**.
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 28/04/2014**
- **Aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC3 que trobareu a Qüestionaris**

**CRITERIS DE VALORACIÓ generals de les PACs**

- Els resultats obtinguts per l´estudiant a les PACs es qualificaran en funció de la següent escala numèrica de 0 a 10, amb expressió de dos decimals, a la qual s´afegirà la seva corresponent qualificació qualitativa, segons l´escala ECTS:
  - [0-3): Suspens baix (D)
  - [3-5): Suspens alt (C-)
  - [5-7): Aprovat (C+)
  - [7-9): Notable (B)
  - [9,10]: Excel·lent (A)
- La realització fraudulenta de la PAC comportarà la nota de suspens a la PAC, amb independència del procés disciplinari que pugui seguir-se vers l´estudiant infractor. Recordeu que les PACs s'han de resoldre de forma individual, no es poden formar grups de treball.
- Una vegada publicada la nota definitiva de la PAC, no es pot recuperar ni guardar-se la nota d´aquesta ,ni optar a millorar la qualificació.
- Les respostes incorrectes no descompten res.
- Les PACs entregades fora del termini establert no puntuen i constaran com a no presentades.
- Recordeu que la nota d'AC es computa a partir de les 3 millors PACs que entregueu, de les 4 que hi ha durant el curs. Per optar a MH, però, cal que entregueu les 4 PACs.
- Les respostes a mà i escanejades no tenen cap puntuació.

- La puntuació de cada exercici està indicada a l'enunciat. Dins de cada exercici tots els apartats tenen el mateix valor.

**CRITERIS DE VALORACIÓ específics de la PAC3**

En la realització de la PAC3, es valorarà:

- L´ús correcte i coherent de conceptes teòrics estudiats al mòdul (10% del valor de cada exercici),
- La justificació de tots els procediments que es fan, així com la claredat, concreció i qualitat en l´exposició de la solució dels exercicis (10% del valor de cada exercici),
- La capacitat de presentar adequadament la PAC3 (ordre, format, correcció ortogràfica i d´estil, recursos tipogràfics utilitzats, taules….) (10% del valor de cada exercici),
- Amb la resta de puntuació es valorarà la correcta resolució de l'exercici.

Recorda que aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC3 que trobareu a Qüestionaris.

# RESOLUCIÓ

**1.** (3.5 punts) Sigui el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} mx - y &= m \\ 3x + (m-4)y &= m+2 \end{cases}$$

amb $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

b) Resoleu el sistema en aquells casos que el sistema sigui compatible.

## Resolució:

a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Cas I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incònites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = 1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

i per tant tenim $rang(A) = rang(A') = 1$ i aleshores el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

- Cas III: Si $m = 3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona demana $3x - y = 5$.

En resum:

| |
|---|
| Si $m \neq 1, 3$, el sistema és Compatible Determinat<br>Si $m = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat<br>Si $m = 3$, el sistema és Incompatible. |

b) Hem de trobar la solució per als casos I: $m \neq 1, 3$ i II: $m = 1$.

Cas I: $m \neq 1, 3$
Com que la matriu de coeficients és quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 4m + m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 + 2m - 3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Per tant, per a cada valor de $m \neq 1, 3$ el punt solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Cas II: $m = 1$
En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació queda múltiple de la primera.
Els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

**2.** (3 punts) Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per a $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu $A$ segons els valors del paràmetre real $\alpha$.

b) Per quins valors de $\alpha$ el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ no té solució única? Per a aquests casos, trobeu les solucions del sistema.

## Resolució:

a) La matriu amb la que treballem és

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & 1 & \alpha-1\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha-1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculem el seu rang. Prenem el menor

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & 1 & \alpha-1\\ 1 & \alpha & 1\end{vmatrix}=\alpha-1$$

de l'equació $\alpha-1=0$ tenim que si $\alpha\neq 1$, aquest menor d'ordre 3 és diferent de zero i per tant, el rang de la matriu serà 3, mentre que si $\alpha=1$, la matriu $A$ és

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

que té rang 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$ és diferent de zero.

En resum:

- Si $\alpha\neq 1\Rightarrow rang(A)=3$
- Si $\alpha=1\Rightarrow rang(A)=2$.

*Observació*: Naturalment la discussió del rang es pot fer aplicant el mètode de Gauss, sempre que es tingui en compte la casuística dels valors del paràmetre $\alpha$ que permeten fer la transformació elemental que s'estigui aplicant.

b) El sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ és homogeni i, per tant, és sempre compatible. La seva solució serà diferent de $x=0,\ y=0,\ z=0$, quan el rang de la matriu del sistema sigui menor que el nombre d'incògnites, és a dir, quan $\alpha=1$.

En aquest cas $\alpha=1$, el sistema esdevé

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z & =0\\ x+y & =0\\ x+y+z & =0\\ 0x+0y+0z & =0\end{array}\right\}$$

és a dir $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned}\right\}$. De la segona equació resulta $y=-x$ i substituint-ho a la primera equació obtenim $x-x+z=0$, o sigui, $z=0$.
Els punts solució són doncs de la forma $\boxed{(x,-x,0),\ x\in \mathbb{R}}$.

**3.** (3.5 punts) Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre $a$ l'equació matricial té solució única?
b) Trobeu la solució $X$ de l'equació matricial quan $a = 3$.

## Resolució:

a) De la igualtat $X \cdot A = B$ com que $A$ és una matriu 3x3 i $B$ és una matriu 2x3, aleshores $X$ serà una matriu 2x3.

Obsrvem, d'una banda, que si la matriu $A$ és invertible aleshores a la igualtat matricial podem multiplicar els dos termes per la dreta per $A^{-1}$ i obtenim $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, és a dir $X = B \cdot A^{-1}$ i per tant la matriu $X$ seria única.

D'altra banda, demanar que la matriu $X$ sigui única implica que cadascuna de les files de la matriu $X$ ha de ser la solució, també única, del sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites resultant del producte $X \cdot A = B$. Aquest sistema 3x3 té per matriu associada la matriu trasposada de la matriu $A$, i per terme independent cadascuna de les files de la matriu $B$. Per tant, el sistema serà compatible determinat si i només si el determinant de la matriu $A$ és diferent de 0.

Si igualem el determinant a 0 tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + a - 1 - 3 + a = 2a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

$\boxed{\text{Per tant, si } a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ i aleshores la matriu } A \text{ admet inversa, } A^{-1}, \text{ i } X = B \cdot A^{-1}.}$

Observació: L'argumentació inicial també es pot substituir de forma alternativa per demanar directament la condició suficient d'inversió de la matriu $A$ i després estudiar particularment el cas $a = \frac{7}{2}$.

b) Quan $a = 3$ tenim $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcularem $A^{-1}$ i després $X = B \cdot A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant,

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{pmatrix}}$$