Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA – MATEMÀTIQUES I

PAC Núm.: **4**

Data de proposta: 18/05/2012 **Data d´entrega:** $\leq$ 28/05/2012

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **Utilització de la Wiris: en aquesta pràctica NO es pot usar la Wiris (només, si es vol, per fer una verificació posterior).** Quan es faci servir, caldrà il·lustrar-ho amb la corresponent captura de pantalla, afegint al document de resolució els comentaris necessaris.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 28/05/2012**

Valoració:

- Totes les preguntes tenen el mateix valor. A cada pregunta tots els apartats tenen el mateix valor.
- **Aquesta part de la PAC representa el 75% de la nota final de la PAC i el 25% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC4 que trobareu a Qüestionaris.**

COGNOMS i NOM:

ENUNCIAT

1. Per a cada nombre real α, sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = ((\alpha+1)x, x+(\alpha+2)y+2z, -x-y+(\alpha-1)z).$$

a) Trobeu la matriu M de f en les bases canòniques u={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} de R^3.

b) Estudia el rang de M en funció de α.

c) Per a cada α, trobeu una base del Nucli de f i una base de la Imatge de f.

d) Sigui v={(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)} una base de l'espai de sortida i w={(1,1,1),(0,0,1),(0,1,1)} una base de l'espai d'arribada. Expresseu M en les bases v i w.

2. **Sigui $g: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal de l'exercici anterior per a $\alpha = -1$.**

$$g(x,y,z) = (0, x+y+2z, -x-y-2z)$$

   a) **Calculeu el polinomi característic de g i els seus valors propis.**
   b) **Estudieu si g diagonalitza.**
   c) **Si g diagonalitza, trobeu una base de R^3 formada per vectors propis.**
   d) **Useu els apartats anteriors per trobar una recta de R^3 tal que per a qualsevol punt $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ de la recta es té $(x_0, y_0, z_0) \neq f(x_0, y_0, z_0)$ però $(x_0, y_0, z_0) = f(f(x_0, y_0, z_0))$.**
   Indicació: fixeu-vos què passa si hi ha un valor propi que valgui -1.

3. **Sigui P el polígon de vèrtexs A(0,0), B(1,1), C(2,1), D(3,0), E(2,-1), F(1,-1) i arestes AB, BC, CD, DE, EF, FA.**
   a) **Trobeu la matriu que aplica una rotació de 180º al voltant del punt A, i calculeu les coordenades del polígon P' resultant d'aplicar aquesta matriu a P.**
   b) **Trobeu la matriu que aplica una translació tal que porta el punt D de P' a l'origen. Anomenem P'' al polígon resultant d'aplicar aquesta matriu a P'.**
   c) **Hi ha algun vèrtex del polígon original que romangui invariant després d'aplicar les transformacions de l'apartat anterior? P'' és igual a P?**
   d) **Suposem que després de les dues transformacions anteriors també apliquem un escalatge horitzontal de raó 2 (ço és, 2 unitats respecte les x i 1 respecte les y). Hi ha algun punt del pla que romangui invariant després d'aplicar totes les transformacions?**

Resolució:

1. **a)** Podem veure que podem expressar f com

$$f(x,y,z) = ((\alpha+1)x, x+(\alpha+2)y+2z, -x-y+(\alpha-1)z) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+2 & 2 \\ -1 & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de f en les bases canòniques u és : $M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+2 & 2 \\ -1 & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$

b) Per estudiar el rang, podem calcular el determinant de M i veure per quins valors val 0**:**

$$|M| = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+2 & 2 \\ -1 & -1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)\begin{vmatrix} \alpha+2 & 2 \\ -1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1)^2$$

Així, veiem que el determinant s'anul·la per $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$. Això vol dir que per α diferent d'aquests valors, el determinant és diferent de 0 i per tant el rang val 3. Anem a estudiar els casos $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$.

Per $\alpha = 0$, tenim la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Estudiant el menor principal dominant d'ordre 2 veiem que és diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ i per tant el rang és com a mínim 2. Com que no pot ser 3 ja que hem vist que per aquest valor el determinant de la matriu 3x3 és 0, ja sabem que el rang és exactament 2.

Per $\alpha = -1$ tenim la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Si sumem la segona fila a la tercera, i canviem la primera fila per la segona, ens queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aquesta matriu clarament té rang 1, ja que només té una fila amb elements diferents de 0.

c) Per trobar la base del nucli, ho hem de fer per cada cas diferent. D'entrada, sabent el rang de la matriu, (usant el Teorema de la Dimensió, pàg. 19 mòdul 4) ja podem deduir les dimensions del nucli i de la imatge:

Cas	dim. espai sortida	Rang	dim Ker	dim Im
$\alpha \neq 0,1$	3	3	0	3
$\alpha = 0$	3	2	1	2
$\alpha = -1$	3	1	2	1

Per $\alpha \neq 0,1$**:** Mirant les dimensions ja veiem que el nucli serà {(0,0,0)} i la imatge serà tot R^3. Per tant, una base de la imatge serà la pròpia base canònica **u**.

Per $\alpha = 0$: Solucionem el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que fent un parell de passos de Gauss queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o el que és el mateix: x = 0 i y = -z.

Per tant, les solucions són de la forma (0,-z,z) = z (0,-1,1). En altres paraules, el nucli està generat pel vector (0,-1,1).

La imatge està formada pels vectors de la forma

$$f(x,y,z)=(x,x+2y+2z,-x-y-z)=(x,x,-x)+(0,2(y+z),-(y+z))=x(1,1,-1)+(y+z)(0,2,-1)$$

Per tant, la imatge està generada pels vectors $(1,1,-1)$ i (0,2,-1).

Nota: s'observa que aquests vectors són precisament els vectors columna linealment independents de la matriu ***M*.**

Per α = -1: Solucionem el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que fent un parell de passos de Gauss queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o el que és el mateix: x = -y-2z. Per tant, les solucions són de la forma (-y-2z,y,z) = (-y,y,0) + (-2z,0,z) = y(-1,1,0)+ z(-2,0,1). En altres paraules, el nucli està generat pels vector (-1,1,0) i (-2,0,1).

Per estudiar la imatge, mirem la funció:

$$f(x,y,z)=(0,x+y+2z,-x-y-2z)=(x+y+2z)(0,1,-1)$$

Per tant, la imatge està generada pel vector $(0,1,-1)$.

Nota: un altre cop, es pot trobar la base de la imatge simplement agafant els vectors columna linealment independents de la matriu *M* (en aquest cas només n'hi ha un).

d) Se'ns demana trobar la matriu de l'aplicació f quan partim de la base **v** i arriba a la base **w**. Com que tenim la matriu de l'aplicació f des de **u** a **u**, el que farem és trobar la matriu que canvia de la base **v** a **u**, ho composarem amb l'aplicació de **u** a **u**, i després farem el canvi final de **u** a **w**. És a dir, farem la composició de:

funció de **v** a **w** = canvi de **v** a **u** + funció de **u** a **u** + canvi de **u** a **w**

Comencem pel principi: el canvi de **v** a **u** és molt fàcil, com que **u** és la base canònica, aquest canvi simplement consisteix en col·locar els vectors de **v** en columnes en una matriu:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Clarament veiem que efectivament, si multipliquem P per un vector escrit en la base **v** ens dóna el mateix vector escrit en la base **u**.

Per fer el canvi de **u** a **w** s'ha de fer el mateix, però en sentit contrari: trobarem el canvi de **w** a **u**, i aleshores calcularem la matriu inversa:

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

Per tant, Q representa el canvi de **w** a **u**, i Q^{-1} de **u** a **w.**

Com que a l'apartat a) ja s'ha trobat la matriu de la funció f en la base canònica, ja només resta fer la composició: $B=Q^{-1}AP$.

Atenció: fixeu-vos que l'ordre de la composició és de dreta a esquerra. És a dir, com que primer fem el canvi de **v** a **u**, que té la matriu associada P, a la composició P va a la dreta de tot. Després s'aplica la funció que té matriu A. Finalment es fa el canvi de **u** a **w,** i per això aquest últim canvi es posa a l'esquerra de tot.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha+1&0&0\\1&\alpha+2&2\\-1&-1&\alpha-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+1&\alpha+1&0\\-\alpha-5&\alpha-5&-6\\2&-\alpha+2&\alpha+4\end{pmatrix}$$

2 **a)** La matriu de g en les bases canòniques és : $M=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$. Calculem el seu polinomi característic: $q(t)=\begin{vmatrix}0-t&0&0\\1&1-t&2\\-1&-1&-2-t\end{vmatrix}=-t\begin{vmatrix}1-t&2\\-1&-2-t\end{vmatrix}=-t^2(t+1)$**.**

Per tant, atès que els valors propis són els valors que anul·len el polinomi característic, tenim que els valors propis són 0 i -1.

b) La multiplicitat geomètrica del valor propi 0 és:

$$\dim(Ker(M-0\cdot I))=\dim(Ker(M))=2$$

.

(tal i com hem vist a l'apartat anterior, ja que el *Ker(M)* correspon amb el *Ker(f)* quan α = -1). Així doncs, la multiplicitat geomètrica coincideix amb la multiplicitat algebraica (que és 2, ja que l'exponent de t^2 és 2).

D'altra banda, el valor propi -1 té multiplicitat algebraica 1 (ja que l'exponent de (t+1) és 1), i per tant també tindrà multiplicitat geomètrica 1.

Així doncs, la matriu sí que diagonalitza.

c) Pel valor propi t=0, els vectors propis són els mateixos que els vectors que generen el nucli de M que s'ha calculat a l'apartat c) del primer exercici, és a dir, (-1,1,0) i (-2,0,1).

Per t=-1, hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema coincideix justament amb el sistema de l'apartat c) del primer exercici, pel cas $\alpha = 0$, que tenia com a solució el vector (0,-1,1).

Per tant, la base de R^3 que se'ns demana és {(-1,1,0),(-2,0,1),(0,-1,1)}.

d) Hem vist que -1 és un valor propi de vector propi (0,-1,1). Per tant, això vol dir que $f(0,-1,1) = -(0,-1,1) \neq (0,-1,1)$. Així mateix, tenim que

$$f(f(0,-1,1)) = f(-(0,-1,1)) = -(-(0,-1,1)) = (0,-1,1).$$

Per tant, podem comprovar que qualsevol element de la recta $(0,0,0) + \lambda(0,-1,1)$ satisfarà aquesta condició.

3 a) La matriu de rotació serà

$$\begin{pmatrix} \cos(180^o) & -\sin(180^o) & 0 \\ \sin(180^o) & \cos(180^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, els punts seran:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El punt D a P' s'ha convertit en (-3,0). Per portar-lo al (0,0) mitjançant una translació, el que hem fet és: (-3+a,0+b)=(0,0). Per tant, veiem que a=3 i b=0. És a dir, la matriu corresponent és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La composició de les dues transformacions serà el producte de les matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicat als punts originals, serà:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Podem veure que cap dels punts originals correspon amb els punts finals. Ara bé, el polígon P’’ és exactament el mateix que l’original, ja que està format pels mateixos punts.

d) Aplicar un escalatge horitzontal de raó 2 és equivalent a multiplicar per la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La composició de les tres transformacions serà el producte de les matrius:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volem veure si hi ha algun punt del pla (x,y,1) tal que quan li apliquem aquesta composició de transformacions ens surt el punt original. És a dir:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolem el sistema i tenim

-2x +6 = x
-y = y

de la qual cosa tenim que x=2 i y=0. És a dir, tenim que el punt (2,0) queda invariant per a la composició de totes les transformacions.