# Universitat Oberta de Catalunya

| | | | |
|---|---|---|---|
| **ASSIGNATURA:** | ÀLGEBRA | | |
| **PAC Núm.:** | **4** | | |
| **Data de proposta:** | 5/12/2013 | **Data d´entrega:** | $\leq$ 16/12/2013 |

**Observacions:**

- El nom del fitxer ha de ser ser Cognom1_Cognom2_Nom.pdf
- Per ser avaluada, cal escriure la PAC amb un editor de text i entregar-la en format pdf abans de les 24h del 16/12/2013.
- **En la resolució d´aquesta PAC es pot utilitzar la Wiris** (cal afegir la corresponent captura de pantalla amb els comentaris necessaris al document de resolució).
- **Justifiqueu tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**

**Valoració:**

- Tots els apartats puntuen 1 sobre 10.
- **Aquests exercicis puntuen el 80% de la PAC4. El 20% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades a l'etiqueta PAC4 i que trobareu a Qüestionaris.**

## COGNOMS i NOM:

**1. Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per les equacions:**

$$f(x, y, z) = (x + 4y + 7z, x + 2y + z, -3x - 2y + 9z).$$

**a) Trobeu la matriu *A* de $f$ en les bases canòniques.**

**b) Calculeu una base dels subespais nucli $Nuc(f)$ i imatge $\mathrm{Im}(f)$. És $f$ injectiva? I exhaustiva ?**

**2. Sigui $g : R^2 \to R^2$ l'aplicació lineal definida per $g(4,-3) = (-8,6)$ i $g(4,2) = (-2,-1)$.**

**a) Digueu si g diagonalitza.**

**b) Calculeu el determinant de la matriu de $g$ en les bases canòniques.**

**3. Sigui $g : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per**

$$g(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 2z, 3x + y + z).$$

**a) Trobeu la matriu de g en les bases canòniques.**

**b) Calculeu el polinomi característic de g i els valors propis de g.**

**c) Estudieu si g diagonalitza.**

**d) Si existeix, trobeu una base de $R^3$ formada per vectors propis de g.**

**4. Considerem els punts: $A_1 = (1,0), A_2 = (2,0)$.**

**a) Sigui *E* l'escalatge horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3 des del (0,0). Siguin $C_1, C_2$ les imatges de $A_1, A_2$ per *E*. Calculeu la longitud del vector $C_2 - C_1$.**

**b) Sigui *G* el gir de $\alpha$ radians en sentit antihorari des del punt $(0,b)$. Siguin $B_1, B_2$ les imatges de $A_1, A_2$ per *G*. Calculeu el vector $B_2 - B_1$.**

## Resolució:

**1. a)** La matriu de $f$ en les bases canòniques e=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) de $R^3$ és :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 9\end{pmatrix}.}$$

(*Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)*

**b)** Per trobar una base del nucli cal resoldre el sistema següent :

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Fent Gauss, restem a la segona fila la primera fila i sumem a la tercera fila 3 vegades la primera fila. Ens queda el sistema :

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 10 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que la tercera fila és múltiple de la segona i per tant és supèrflua. Si dividim per -2 la segona equació, ens queda $y+3z=0$. Per tant, $y=-3z$. De la primera equació deduïm : $x+4y+7z=0$. O sigui, $x=-4y-7z$. Susbstituïnt $y=-3z$ en $x=-4y-7z$ obtenim : $x=-4(-3z)-7z=12z-7z=5z$. Conclusió, els vectors del nucli són de la forma $(x,y,z)=(5z,-3z,z)=z(5,-3,1)$. Per tant, una base del nucli ve donada pel vector $(5,-3,1)$. Com que el nucli és no nul, podem deduir que $f$ no és injectiva.

Sabem que una base del subespai imatge ve donada per les columnes linealment independents de la matriu $A$. D'altra banda, la dimensió del nucli més la dimensió de la imatge ha de ser igual a la dimenció de l'espai. Com que el nucli té dimensió 1 i l'espai té dimenció 3, deduïm que la dimensió de la imatge ha de ser 2. Com que les dues primeres columnes de la matriu $A$ són linealment independents, ja podem deduir que són base. Conclusió, una base de la imatge de $f$ és la formada pels vectors $(1,1,-3),(4,2,-2)$. Fixem-nos que, com que la imatge no és tot l'espai d'arribada, podem deduir que $f$ no és exhaustiva.

**2.a)** Anomenem $u_1=(4,-3)$ i $u_2=(4,2)$. Tenim que $g(u_1)=(-2)u_1$ i $g(u_2)=-(1/2)u_2$. Per tant $u_1$ és vector propi de $g$ de valor propi -2 i $u_2$ és vector propi de $g$ de valor propi –(1/2). Com que $\{u_1,u_2\}$ és una base de $R^2$ formada per vectors propis de $g$, tenim que $g$ diagonalitza *(veure apunts M5, vectors i valors propis i diagonalització d'un endomorfisme).* De fet, la matriu de $g$ en les bases $\{u_1,u_2\}$ és:

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}}.$$

(*Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)*

**b)** Busquem l'expressió de (1,0) com a combinació lineal dels (4,-3) i (4,2). Resolent un sistema lineal trobem: $(1,0)=\frac{2}{20}(4,-3)+\frac{3}{20}(4,2)$. Per linealitat de $g$,

$$g(1,0)=\frac{2}{20}g(4,-3)+\frac{3}{20}g(4,2)=\frac{2}{20}(-8,6)+\frac{3}{20}(-2,-1)=\frac{1}{20}(-22,9).$$

Anàlogament, com que $(0,1)=\left(-\frac{1}{5}\right)(4,-3)+\frac{1}{5}(4,2)$, aleshores per linealitat de $g$,

$$g(0,1)=\left(-\frac{1}{5}\right)g(4,-3)+\frac{1}{5}g(4,2)=\left(-\frac{1}{5}\right)(-8,6)+\frac{1}{5}(-2,-1)=\frac{1}{5}(6,-7).$$

Per tant, $g(1,0)=\frac{1}{20}(-22,9)$ i $g(0,1)=\frac{1}{5}(6,-7)=\frac{4}{20}(6,-7)=\frac{1}{20}(24,-28)$. Així la matriu de $g$ en les bases canòniques és:

$$\boxed{A=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-22 & 24\\ 9 & -28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{22}{20} & \frac{24}{20}\\ \frac{9}{20} & -\frac{28}{20}\end{pmatrix}}.$$

Fàcilment es comprova que el determinant és igual a 1. Observem que el determinant de la matriu $D$ també és 1. I no és casualitat. És degut a que el determinant de la matriu d'una aplicació lineal és independent de les bases en que està escrita la matriu.

**3. a)** La matriu A de g en les bases canòniques és :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}}.$$

*(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)*

**b)** El polinomi característic de g és:

$$\boxed{q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}1-t & 2 & 3\\ 2 & 3-t & 2\\ 3 & 1 & 1-t\end{vmatrix}=-t^3+5t^2+8t-12=(-2-t)(1-t)(6-t).}$$

Les arrels del polinomi q(t) són -2, 1 i 6. Per tant, els valors propis de g són -2, 1 i 6.
*(Veure apunts M5, Càlcul de Valors i Vectors propis.)*

**c)** Com que g té 3 valors propis diferents, podem concloure que diagonalitza. *(M5, Teorema Diagonalització.)*

**d)** Calculem els vectors propis de valor propi -2. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-(-2)·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A+2I)X=0. El sistema és:

$$(A+2I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2 & 3\\ 2 & 3+2 & 2\\ 3 & 1 & 1+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (1,0,-1).

Calculem els vectors propis de valor propi 1. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-1·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A-I)X=0. El sistema és:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & 2 & 3\\ 2 & 3-1 & 2\\ 3 & 1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (1,-3,2).

Calculem ara els vectors propis de valor propi 6. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-6·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A-6·I)X=0. El sistema és:

$$(A-6I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6&2&3\\2&3-6&2\\3&1&1-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2&3\\2&-3&2\\3&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (13,16,11). O sigui:

| |
|---|
| una base de $R^3$ formada per vectors propis de g és (1,0,-1), (1,-3,2), (13,16,11). |

**4. a)** La matriu de l'escalatge $E$ horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3 és $E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Per a obtenir $C_1, C_2$, les imatges dels punts $A_1=(1,0), A_2=(2,0)$ per l'escalatge $E$ fem: $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

La longitud del vector $C_2-C_1=(4,0)-(2,0)=(2,0)$ és doncs 2.

**b)** Per fer un gir de $\alpha$ radians des del punt (0,b), primer fem la translació que porta el (0,b) a l'origen: *(veure apunts M6, Notació matricial eficient)*: $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després fem el gir de $\alpha$ radians en sentit antihorari:

$$gir=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)&0\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{c}&-\mathrm{s}&0\\\mathrm{s}&\mathrm{c}&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

on $c:=\cos(\alpha)$ i $s:=\sin(\alpha)$.

Després desfem la translació: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim $G$, el gir de $\alpha$ radians en sentit antihorari des del punt (0,b):

$$G=T^{-1}\cdot gir\cdot T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{c}&-\mathrm{s}&0\\\mathrm{s}&\mathrm{c}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-s&bs\\s&c&b-bc\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculem $B_1, B_2$, les imatges dels punts $A_1=(1,0), A_2=(2,0)$ pel gir $G$:

$$\begin{pmatrix}c&-s&bs\\s&c&b-bc\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+bs&2c+bs\\s+b-bc&2s+b-bc\\1&1\end{pmatrix}.$$

| |
|---|
| Així, els punts són: $B_1=(c+bs, s+b-bc)$ i $B_2=(2c+bs, 2s+b-bc)$. El vector diferència és, doncs, $B_2-B_1=(c,s)=(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$. |