Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la PEC así como el enunciado de la actividad y la resolución correspondiente.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer la utilidad y saber operar con matrices.
- Conocer la utilidad y saber operar con determinantes.
- Conocer y aplicar las técnicas básicas de discusión, resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la teoría de matrices y determinantes.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán las matrices, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales, con especial énfasis en saber operar tanto con matrices como con determinantes y en la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales y en su discusión y resolución.

Recursos

Recursos Básicos

- El módulo 2 (apartados 3, 4 -hasta el 4.5- y 5) y el módulo 3 en PDF editados por la UOC.
- La calculadora CalcMe.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X.
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927.
- El aula Laboratorio CalcMe.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales, a la que se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0,3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3,5)$: Suspenso alto (C-)
  - $[5,7)$: Aprobado (C+)
  - $[7,9)$: Notable (B)
  - $[9,10]$: Excelente (A)
- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.
- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, en ningún caso, ésta no se guardará para otros semestres.
- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.

- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.

- En la realización de la PEC, se valorará:

  - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta *PEC2-evaluación*.

- Recordad que es necesario justificar las respuestas.

- La PEC se debe escribir usando un editor de texto (latex, libreoffice, word, ...) y entregar en formato PDF. El nombre del fichero deberá ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.

- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/

- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados.

- **Dentro del documento de la PEC debéis escribir, en la primera página, vuestro nombre y apellidos y vuestro IDP completo.**

- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 23:59h del día 06/04/2021.**

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos.

1. (Valoración de un 20 %) Calculad el rango de la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde "a" es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Solución: Calculemos el determinante de la matriz,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a^2) - (6a) = a^2 - 6a.$$

Así pues, tenemos los siguientes casos.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 6$, observamos que el determinante es distinto de cero y, por lo tanto, $\text{rg}(A) = 3$.
- En los casos $a = 0$ o bien $a = 6$, existe un menor de orden 2 con determinante no nulo (por ejemplo, el formado por las filas segunda y tercera y las columnas primera y tercera)

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

  y, por lo tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

---

2. (Valoración de un 40 %) Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius, discutid el siguiente sistema lineal de ecuaciones dado en forma matricial, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ es un parámetro y "a" es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC. Posteriormente, resolvedlo en los casos en que sea posible.

$$\begin{pmatrix} \kappa & 1 & 2 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \kappa \\ \kappa \end{pmatrix}$$

Solución: Recordemos que antes de proceder a buscar las soluciones de un sistema de ecuaciones, puede resultar conveniente estudiar el sistema para saber si éste será o no compatible. Este proceso de determinar el tipo de sistema al que nos enfrentamos se llama discusión del sistema. Para ello, utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo: Sistemas de ecuaciones lineales, sección 4], el cual nos dice que dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, con A la matriz de coeficientes del sistema y M la matriz ampliada, se cumple lo siguiente:

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n$, entonces se tiene un sistema compatible determinado (SCD).

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = r < n$, entonces se tiene un sistema compatible indeterminado (SCI). En esta situación se dice que el sistema tiene $n - r$ grados de libertad.
- Si $\text{rg}(A)<\text{rg}(M)$, entonces se tiene un sistema incompatible (SI).

Para estudiar el rango de las matrices A y M operamos sobre la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \kappa & 1 & 2 & a \\ 1 & \kappa & 1 & \kappa \\ 1 & 2 & 1 & \kappa \end{array}\right).$$

Para simplificar los cálculos permutaremos las columnas de la matriz de modo que el orden de las variables en lugar de (x, y, z) sea (z, x, y). En efecto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \kappa & 1 & a \\ 1 & 1 & \kappa & \kappa \\ 1 & 1 & 2 & \kappa \end{array}\right) \underset{\substack{F3=F2-F3 \\ F2=-2F2+F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \kappa & 1 & a \\ 0 & -2+\kappa & -2\kappa+1 & -2\kappa+a \\ 0 & 0 & \kappa-2 & 0 \end{array}\right).$$

Así pues, tenemos los siguientes casos.

- Si $\kappa \neq 2$ entonces el sistema es compatible determinado (SCD), ya que

  $$\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 3 = n.$$

  La resolución del sistema, recordando que el orden de las variables es (z, x, y), es la siguiente. De la última ecuación se obtiene

  $$(\kappa - 2)y = 0,$$

  por lo tanto $y = 0$. De la segunda ecuación, utilizando que $y = 0$, se obtiene

  $$(-2 + \kappa)x = -2\kappa + a,$$

  $$x = \frac{-2\kappa + a}{\kappa - 2}.$$

  Finalmente, de la primera ecuación se obtiene

  $$2z + \kappa\left(\frac{-2\kappa + a}{\kappa - 2}\right) = a,$$

  $$2z = a - \kappa\left(\frac{-2\kappa + a}{\kappa - 2}\right) = \frac{2\kappa^2 - 2a}{\kappa - 2},$$

  $$z = \frac{\kappa^2 - a}{\kappa - 2}.$$

  En resumen, la solución del sistema en este caso es

  $$x = \frac{-2\kappa + a}{\kappa - 2},\ y = 0,\ z = \frac{\kappa^2 - a}{\kappa - 2}.$$

  En particular, según el valor a de vuestro IDP, la solución para el caso $\kappa \neq 2$ viene dada en la siguiente tabla:

a	x	y	z
0	$\frac{-2\kappa}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2}{\kappa-2}$
1	$\frac{-2\kappa+1}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-1}{\kappa-2}$
2	$\frac{-2\kappa+2}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-2}{\kappa-2}$
3	$\frac{-2\kappa+3}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-3}{\kappa-2}$
4	$\frac{-2\kappa+4}{\kappa-2}$	0	$\kappa+2$
5	$\frac{-2\kappa+5}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-5}{\kappa-2}$
6	$\frac{-2\kappa+6}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-6}{\kappa-2}$
7	$\frac{-2\kappa+7}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-7}{\kappa-2}$
8	$\frac{-2\kappa+8}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-8}{\kappa-2}$
9	$\frac{-2\kappa+9}{\kappa-2}$	0	$\frac{\kappa^2-9}{\kappa-2}$

- Si $\kappa = 2$, entonces el sistema queda expresado como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3 & -4+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Este es un sistema compatible indeterminado (SCI), ya que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = 2 < n = 3.$$

La resolución del sistema, recordando que el orden de las variables es (z, x, y), es la siguiente. De la segunda ecuación se obtiene

$$-3y = -4 + a,$$

y por lo tanto, $y = \dfrac{4-a}{3}$. Finalmente, de la primera ecuación se obtiene,

$$2z + 2x + y = a,$$

donde tomando $x = \lambda$ y sustituyendo el valor obtenido de y se obtiene

$$2z + 2\lambda + \frac{4-a}{3} = a,$$

y, por lo tanto,

$$z = \frac{2a - 3\lambda - 2}{3}.$$

En resumen, la solución del sistema en este caso es:

$$x = \lambda,\ y = \frac{4-a}{3},\ z = \frac{2a-3\lambda-2}{3}.$$

En particular, según el valor a de vuestro IDP, la solución para el caso $\kappa = 2$ viene dada en la siguiente tabla:

a	x	y	z
0	λ	$\frac{4}{3}$	$\frac{-3\lambda-2}{3}$
1	λ	1	$\frac{2-3\lambda-2}{3}$
2	λ	$\frac{2}{3}$	$\frac{4-3\lambda-2}{3}$
3	λ	$\frac{1}{3}$	$\frac{6-3\lambda-2}{3}$
4	λ	0	$\frac{8-3\lambda-2}{3}$
5	λ	$\frac{-1}{3}$	$\frac{10-3\lambda-2}{3}$
6	λ	$\frac{-2}{3}$	$\frac{12-3\lambda-2}{3}$
7	λ	-1	$\frac{14-3\lambda-2}{3}$
8	λ	$\frac{-4}{3}$	$\frac{16-3\lambda-2}{3}$
9	λ	$\frac{-5}{3}$	$\frac{18-3\lambda-2}{3}$

---

3. (Valoración de un 40 %) Dados los tres planos siguientes

$$\pi_1 : x + y - z = -3 \qquad \pi_2 : -4x + y + 4z = 7 \qquad \pi_3 : -2x + 3y + 2z = 2$$

contestad las siguientes preguntas.

a) Determinad la posición relativa de π_1 respecto a π_2.
b) Determinad la posición relativa de π_1 respecto a π_3.
c) Determinad la posición relativa de π_2 respecto a π_3.
d) Determinad la posición relativa de los tres planos (conjuntamente).
e) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, dibujad una gráfica ilustrativa de la situación de los tres planos en el espacio.

Solución:

a) Para determinar la posición relativa de los planos π_1 y π_2 debemos discutir el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema de tres incógnitas y dos ecuaciones linealmente independientes, ya que el siguiente menor de orden 2 es distinto de cero,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, la intersección de ambos planos es una recta.

b) Veamos ahora la posición relativa de los planos π_1 y π_3. En este caso debemos discutir el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos tres incógnitas y dos ecuaciones linealmente independientes, ya que el siguiente menor de orden 2 es distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Por lo tanto, tenemos un sistema compatible indeterminado. Es decir, la intersección de ambos planos es una recta.

c) Finalmente, veamos ahora la posición relativa de los planos π_2 y π_3. En este caso debemos discutir el sistema:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De nuevo, son dos ecuaciones linealmente independientes, ya que el siguiente menor de orden 2 es distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Por lo tanto, de nuevo tenemos un sistema compatible indeterminado. Es decir, la intersección de ambos planos es una recta.

d) Discutamos las soluciones del sistema lineal formado por las ecuaciones de los tres planos conjuntamente. Si escribimos el sistema en forma matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, A, y obtenemos:

$$\det(A) = (2 - 8 + 12) - (2 + 12 - 8) = 0.$$

Además, comprobamos que existe un menor de orden 2 tal que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

por lo tanto, $\mathrm{rg}(A) = 2$.
Por otro lado, la matriz ampliada del sistema, M, es en este caso

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

la cual tiene un menor de orden 3 no nulo,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 6 - 21) - (-36 + 14 - 2) = 5 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{rg}(M) = 3$.
Así pues, $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(M) = 3$, luego los tres planos dados no tienen intersección común.

e) Así pues los planos son secantes (en una recta) dos a dos, pero no tienen intersección común (los tres). Es decir, los tres planos forman una superficie prismática. Una gráfica ilustrativa de la situación de los tres planos en el espacio (donde π_1 corresponde al plano de color rojo, π_2 al plano de color verde, y π_3 al plano de color azul) sería la siguiente: