Universitat Oberta de Catalunya 2015-16 tardor

Resolució PAC4

Problema 1. (4 punts) Sigui f l'aplicació lineal de R^3 en R^3 definida per f(0,1,3)=(0,-3,-9), f(1,0,-1)=(2,0,-2) i f(1,0,1)=(2,0,-2).

a) Demostreu que (0,1,3),(1,0,-1) i (1,0,1) són una base de R^3.
b) Digueu quina és la dimensió de la imatge de f. És exhaustiva?
c) Digueu quina és la dimensió del nucli de f. És injectiva?
d) Diagonalitza f? Justifiqueu la resposta.

Resolució:

a) Anomenem u=(0,1,3), v=(1,0,-1) i w=(1,0,1). Com que són tres vectors de R^3, per veure que són base és suficient provar que són linealment independents. És a dir, que el determinant de la matriu que formen és no nul. Usant la Regla de Sarrus, tenim:

$$det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix} = -1-1=-2$$

.

Com que el determinant és no nul, u,v,w són tres vectors linealment independents de R^3, o sigui són una base de R^3.

b) Per calcular la dimensió de la imatge de f és suficient calcular la dimensió del subespai generat per f(u)=(0,-3,-9), f(v)=(2,0,-2) i f(w)=(2,0,-2). Com que el tercer vector és el mateix que el segon, la dimensió com a molt és 2. D'altra banda, el vectors (0,-3,-9) i (2,0,-2) són clarament linealment independents, perquè un no és múltiple de l'altre. Per tant, la dimensió de la imatge de f és 2. En particular, f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge de f és 2 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3.

c) Pel Teorema de la dimensió (o fórmula del rang) (veure Apunts Mòdul 5, pàgina 19):

dim E= dim Nuc(f) + dim Im (f).

Però ara E=R^3 i dim Im(f) =2. Per tant, la dimensió del nucli de f és necessàriament 1. Com que el nucli no és zero, f no és injectiva.

De fet, si volem calcular el Nucli(f), observem que f(v)=f(w). És a dir, f(v)-f(w)=0 i, com que f és lineal, f(v-w)=0. Per tant, el vector v-w=(1,0,-1)-(1,0,1)=(0,0,-2) és del nucli. Com que el nucli té dimensió 1, deduïm que (0,0,-2) és una base del nucli de f.

d) Seguim amb la notació u=(0,1,3), v=(1,0,-1) i w=(1,0,1). Tenim que f(u)=-3u. O sigui, u és vector propi de f de valor propi -3. D'altra banda f(v)=2v. Per tant, v és vector propi de f de valor propi 2. Finalment, f(v-w)=0. És a dir, v-w=(0,0,-2) és vector propi de f de valor propi 0. Observem que els tres vectors u=(0,1,3), v=(1,0,-1) i v-w=(0,0,-2) són linealment independents ja que el seu determinant és no nul.

$$det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} = 2.$$

Resumint: v, v-w són tres vectors propis de f de valor propi -3, 2 i 0, respectivament. Com que f té tres valors propis diferents, f diagonalitza. A més a més, u, v i v-w són base de R^3 formada per vectors propis de f.

Manera alternativa de resoldre el Problema 1:

Anem a calcular la matriu de f en bases canòniques. Anomenem:
C={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} a la base canònica de R^3 .
B={u,v,w}={(0,1,3),(1,0,-1),(1,0,1)}, que ja hem comprovat que també són base de R^3.

Tenim f(u)= -3u. És a dir, f(u)=-3*u+0*v+0*w. O sigui, les components del vector f(u) en la base B són (-3,0,0).
Tenim f(v)=2v. És a dir, f(v)=0*u+2*v+0*w. O sigui, les components del vector f(v) en la base B són (0,2,0).
Tenim f(w)=f(v)=2v. És a dir, f(w)=0*u+2*v+0*w. O sigui, les components del vector f(w) en la base B són (0,2,0).

Per tant, la matriu de f en la base B és:

$$M(f;B,B)=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriu del canvi de la base B a la base C és:

$$Q=M(Id;B,C)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu del canvi de la base C a la base B és la inversa de l'anterior:

$$P=M(Id;C,B)=M(Id;B,C)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de f en la base canònica, serà:

$$M(f;B)=QM(f;B,B)P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Així, les equacions de f s'obtenen de multiplicar aquesta matriu per (x,y,z). És a dir, f és l'aplicació lineal que té equacions f(x,y,z)=(2x,-3y,-2x-9y).

A partir d'aquí es pot veure que f(1,0,0)=(2,0,-2), f(0,1,0)=(0,-3,-9) i f(0,0,1)=(0,0,0). Per tant, la imatge de f és Im(f)=<(2,0,-2),(0,-3,-9))> i té dimensió 2. A més f no és exhaustiva perquè la Imatge de f no és tot l'espai d'arribada, que és R^3.
Anàlogament es veu que f(0,0,1)=(0,0,0). És a dir, el vector (0,0,1) és del nucli. Com que el nucli té dimensió dimNuc(f)=dim R^3–dim Im(f)=3-2=1, deduïm que (0,0,1) és una base del Nuc(f). A més f no és injectiva perquè el nucli és diferent de zero.
Com que la matriu de f en les bases canòniques és triangular, quan calculem el polinomi característic és molt senzill i surt: Q(t)=(2-t)(-3-t)(0-t). Deduïm que f té tres valors propis diferents que són el 2, el -3 i el 0 i, per tant, f diagonalitza.

Problema 2. (4 punts) Sigui f l'aplicació de R^3 en R^3 definida per
f(x,y,z)=(3x,2y+z,x+2z).

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

b) El polinomi característic de f és (desenvolupant el determinant per la primera fila):

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix}3-t&0&0\\0&2-t&1\\2&0&2-t\end{pmatrix}=(3-t)det\begin{pmatrix}2-t&1\\0&2-t\end{pmatrix}=(3-t)(2-t)(2-t).$$

Observem que el polinomi característic descomposa en producte de tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 3, amb multiplicitat algebraica 1 i 2 amb multiplicitat algebraica 2.

c) Per estudiar si f diagonalitza cal veure si les multiplicitats algebraiques coincideixen amb les multiplicitats geomètriques. En el cas del valor propi 3 no hi ha problema perquè sempre que la multiplicitat algebraica és 1, aleshores la geomètrica també és 1. Hem d'estudiar què passa amb el valor propi 2. La multiplicitat geomètrica del valor propi 2 és la dimensió del nucli de A-2I. O sigui, es calcula de la manera següent:

$$dimNuc(A-2\mathrm{I})=3-rang(A-2\mathrm{I})=3-rang\begin{pmatrix}3-2&0&0\\0&2-2&1\\2&0&2-2\end{pmatrix}=3-rang\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}=3-2=1$$

Per tant, la multiplicitat geomètrica del valor propi 2 és 1. Com que no coincideix amb la multiplicitat algebraica del valor propi 2 (que és 2), deduïm que f no diagonalitza.

d) Trobem vectors propis de f de valor propi 3. És a dir, busquem el nucli de A-3I. O sigui, resolem el sistema (A-3I)X=0:

$$(A-3\cdot I)X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Queda el sistema: -y+z=0, x-z=0. O sigui, y=z i x=z. Els vectors solució són de la forma: (x,y,z)=(z,z,z)=z(1,1,1). Per tant, (1,1,1) és vector propi de f de valor propi 3.

Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 2. És a dir, busquem el nucli de A-2I. O sigui, resolem el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2\mathrm{I})X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Queda el sistema z=0, 2x=0. Els vectors solució d'aquest sistema són de la forma (x,y,z)=(0,y,0)=y(0,1,0). Per tant, (0,1,0) és un vector propi de f de valor propi 2.

I no hi ha més vectors propis de f linealment independents amb els dos anteriors, perquè ja sabem que f no diagonalitza. Per tant, una base de R^3 formada pel nombre màxim de vectors propis de f podria ser (1,1,1), (0,1,0), (0,0,1). Observem que els dos primers són vectors propis i el tercer que hem afegit és el (0,0,1) que és linealment independent amb els dos primers (el determinant dels tres és 1):

$$det\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=1$$

Problema 3. (2 punts) Considerem A=(1,1), B=(2,2), C=(0,3), D=(-1,0).
a) Sigui g el gir de 45º en sentit antihorari. Calculeu g(A), g(B), g(C) i g(D).

b) Sigui f l'escalatge de raó 3 des del punt (-2,,2). Calculeu f(A), f(B), f(C) i f(D).
Feu un dibuix amb Wiris dels tres polígons ABCD, g(A)g(B)g(C)g(D) i f(A)f(B)f(C)f(D).

Resolució: a) La matriu del gir d'angle 45º, o π/2, és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a trobar les imatges dels punts A,B,C,D, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$g(A)=(0,\sqrt{2}), g(B)=(0,-3\sqrt{2}), g(C)=\left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right), g(D)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) Per trobar la matriu de l'escalatge de raó 3 des del punt (-2,2), d'esquerra a dreta, fem la translació des del punt (-2,2), després l'escalatge de raó 3, i després desfem la translació des del punt (-2,2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, D, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, f(A)=(7,-1), f(B)=(10,2), f(C)=(4,5) i f(D)=(1,-4).