Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA:	ÀLGEBRA		
PAC Núm.:	**1**		
Data de proposta:	07/03/2014	**Data d´entrega:**	$\leq$ 17/03/2014

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´haurà d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*). **Per utilitzar la i=$\sqrt{-1}$, dels nombres complexos, amb la Wiris haureu d´utilitzar la icona que apareix a l´eina "Símbols" (no la "i" del teclat de l´ordinador).**
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 17/03/2014**

CRITERIS DE VALORACIÓ de les PACs

- Els resultats obtinguts per l´estudiant a les PACs es qualificaran en funció de la següent escala numèrica de 0 a 10, amb expressió de dos decimals, a la qual s´afegirà la seva corresponent qualificació qualitativa, segons l´escala ECTS:

  [0-3): Suspens baix (D)
  [3-5): Suspens alt (C-)
  [5-7): Aprovat (C+)
  [7-9): Notable (B)
  [9,10]: Excel·lent (A)

- La realització fraudulenta de la PAC comportarà la nota de suspens a la PAC, amb independència del procés disciplinari que pugui seguir-se vers l´estudiant infractor. Recordeu que les PACs s'han de resoldre de forma individual, no es poden formar grups de treball.
- Una vegada publicada la nota definitiva de la PAC, no es pot recuperar ni guardar-se la nota d´aquesta ,ni optar a millorar la qualificació.
- Les respostes incorrectes no descompten res.
- Les PACs entregades fora del termini establert no puntuen i constaran com a no presentades.

- Recordeu que la nota d'AC es computa a partir de les 3 millors PACs que entregueu, de les 4 que hi ha durant el curs. Per optar a MH, però, cal que entregueu les 4 PACs.
- Les respostes a mà i escanejades no tenen cap puntuació.
- Tots els exercicis tenen el mateix valor. A cada exercici tots els apartats tenen el mateix valor.

CRITERIS DE VALORACIÓ de la PAC 1

En la realització de la PAC 1, es valorarà:

- l´ús correcte i coherent de conceptes teòrics estudiats al mòdul (10% del valor de cada exercici),
- la justificació de tots els procediments que es fan, així com la claredat, concreció i qualitat en l´exposició de la solució dels exercicis (10% del valor de cada exercici),
- la capacitat de presentar adequadament la PAC 1 (ordre, format, correcció ortogràfica i d´estil, recursos tipogràfics utilitzats, taules….) (10% del valor de cada exercici),
- amb la resta de punts es valorarà la correcta resolució de l'exercici.

SOLUCIÓ

1. (5 punts) Per a tot nombre natural n≥1, demostra per inducció que es compleix la següent propietat: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Solució:

Apliquem els passos que s´expliquen a l´apartat 2.3 de la pàgina 14 del material imprès (requadre gris):

i. Cal veure que la propietat és certa per a n = 1, és a dir que es compleix: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ la qual cosa és certa ja que 2 = 1 + 1.

ii. Cal veure que si la propietat és certa per a un natural n, llavors també ho és per a n + 1.

Efectivament: Hem de veure que si $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

llavors: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

És a dir, allò que cal demostrar és que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Partim de: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}$ i volem arribar a què és igual a $\frac{n+1}{n+2}$

Operem:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}=$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}=$$

Apliquem la hipòtesi d´inducció ja que sabem que: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ i ens queda:

$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}=$ i operem:

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$
$$=\frac{n+1}{n+2}$$

I hem arribat a allò que volíem demostrar. Llavors, pel principi d´inducció matemàtica, la propietat és certa per a qualsevol nombre natural.

2. Respon als següents apartats:
   a. (2,5 punts) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica:
   $$\frac{(5+i)\cdot(2-2i)-(-5+9i)}{3-4i}$$

Solució:

Per a això anem a aplicar la definició de nombre "i" que apareix a l´apartat 3.1 de la pàgina 17 del material imprès. Com que tenim una sèrie d´operacions amb nombres complexos en forma binòmica que operarem tal com s´explica a l´apartat 3.3.1 de la pàgina 20.

A més a més, en aquests casos, partirem del complex i multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per tal d´eliminar el complex del denominador. I, per últim, agrupem part imaginària i part real:

$$\frac{(5+i)\cdot(2-2i)-(-5+9i)}{3-4i}=\frac{(10-10i+2i+2)-(-5+9i)}{3-4i}=\frac{12-8i+5-9i}{3-4i}=\frac{17-17i}{3-4i}$$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\frac{17-17i}{3-4i}=\frac{(17-17i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}=\frac{51+68i-51i+68}{9+16}=\frac{119+17i}{25}=\frac{119}{25}+\frac{17}{25}i$$

Comprovació amb Wiris:

$$\text{simplificar}\left(\frac{(5+\mathrm{i})\cdot(2-2\mathrm{i})-(-5+9\mathrm{i})}{3-4\mathrm{i}}\right) \rightarrow \frac{119}{25}+\frac{17\cdot\mathrm{i}}{25}$$

b. (2,5 punts) Troba les arrels de la següent expressió, en forma polar i binòmica i els angles en graus: $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

NOTA: Recorda que la calculadora Wiris utilitza, per defecte, radians (i no graus) per realitzar els càlculs.

Solució:

Partim de $x=1-\sqrt{3}i$ Per determinar les arrels cinquenes d´aquest complex determinem primer el mòdul i l´argument d´aquest:

$$m=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$$

$$\alpha=arctg\frac{-\sqrt{3}}{1}=arctg(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{3}=300^{\circ}$$

(Observem que, al ser la part real positiva no cal sumar ni restar cap quantitat).

Tenim, per tant, que $x=2_{300^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes, hem de fer:

$\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{2_{300^\circ}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)_{\frac{300^\circ+360^\circ k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3,4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[5]{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta_k = \dfrac{300^\circ+360^\circ k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3,4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 60^\circ+72^\circ = 132^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 60^\circ+144^\circ = 204^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 60^\circ+216^\circ = 276^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 60^\circ+288^\circ = 348^\circ$

Per tant, les cinc arrels de l´equació són:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[5]{2}_{60^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{132^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{204^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{276^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{348^\circ} \end{array}}$$

Seguint les instruccions de l´apartat 3.4.2 de la pàgina 33, passem els nombres a forma binòmica:

$$\boxed{\sqrt[5]{2}_{60^\circ} = \sqrt[5]{2}\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = \sqrt[5]{2}\cdot(0{,}5 + 0{,}866i) = 0{,}5745 + 0{,}995i}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{2}_{132^\circ} = \sqrt[5]{2}\cdot(\cos 132^\circ + i\sin 132^\circ) = \sqrt[5]{2}\cdot(-0{,}66913 + 0{,}74314i) = -0{,}76863 + 0{,}85365i}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{2}_{204^\circ} = \sqrt[5]{2}\cdot(\cos 204^\circ + i\sin 204^\circ) = \sqrt[5]{2}\cdot(-0{,}91355 - 0{,}40674i) = -1{,}0494 - 0{,}46722i}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{2}_{276^\circ} = \sqrt[5]{2}\cdot(\cos 276^\circ + i\sin 276^\circ) = \sqrt[5]{2}\cdot(0{,}10453 - 0{,}99452i) = 0{,}12007 - 1{,}1424i}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{2}_{348^\circ} = \sqrt[5]{2}\cdot(\cos 348^\circ + i\sin 348^\circ) = \sqrt[5]{2}\cdot(0{,}97815 - 0{,}20791i) = 1{,}1236 - 0{,}23883i}$$

Comprovació amb Wiris:

$$\text{polar}\left(\sqrt[5]{2}, \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{\sqrt[5]{2}}{2} + \frac{\sqrt[10]{972} \cdot i}{2}$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[5]{2}, \frac{11\pi}{15}\right) \rightarrow -0.76863 + 0.85365 \cdot i$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[5]{2}, \frac{17\pi}{15}\right) \rightarrow -1.0494 - 0.46722 \cdot i$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[5]{2}, \frac{23\pi}{15}\right) \rightarrow 0.12007 - 1.1424 \cdot i$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[5]{2}, \frac{29\pi}{15}\right) \rightarrow 1.1236 - 0.23883 \cdot i$$