

Solució examen 3

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{1+2i}{2-i} \cdot (2+i) + \frac{1-2i}{2+i} \cdot (2-i)$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^6 + 1 = 0$ (proporciona els resultats en forma binòmica i polar)

Resolució:

a) Fem el producte dels complexos, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{2-i} \cdot (2+i) + \frac{1-2i}{2+i} \cdot (2-i) &= \frac{(1+2i) \cdot (2+i)}{2-i} + \frac{(1-2i) \cdot (2-i)}{2+i} = \frac{(1+2i) \cdot (2+i)^2}{(2-i) \cdot (2+i)} + \\ &+ \frac{(1-2i) \cdot (2-i)^2}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{(1+2i) \cdot (4+4i-1) + (1-2i) \cdot (4-4i-1)}{4+1} = \\ &= \frac{(1+2i) \cdot (3+4i) + (1-2i) \cdot (3-4i)}{5} = \frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\frac{1+2i}{2-i} \cdot (2+i) + \frac{1-2i}{2+i} \cdot (2-i) = -2$$

b) Primer aïllem la incògnita de l'equació:

$$x^6 + 1 = 0 \rightarrow x^6 = -1 \rightarrow x = \sqrt[6]{-1}$$

Escrivim el complex $z=-1$ en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\alpha = \arctg \frac{0}{-1} + 180^\circ = \arctg 0 + 180^\circ = 180^\circ$$

Observem que sumem 180° donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fet, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180° , l'angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z = 1_{180^\circ}$

Com que ens demanen les arrels sisenes, hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{6}} = 1_{30^\circ + 60^\circ k} \quad \text{per a } k=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Els arguments de les arrels són:

- Si $k=0$, tenim que $\beta_0 = 30^\circ$
- Si $k=1$, tenim que $\beta_1 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$
- Si $k=2$, tenim que $\beta_2 = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$
- Si $k=3$, tenim que $\beta_3 = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$
- Si $k=4$, tenim que $\beta_4 = 30^\circ + 240^\circ = 270^\circ$
- Si $k=5$, tenim que $\beta_5 = 30^\circ + 300^\circ = 330^\circ$

Per tant, les sis arrels de l'equació $x^6 + 1 = 0$ són:

$$1_{30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 0,866 + 0,5i$$

$$1_{90^\circ} = i$$

$$1_{150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -0,866 + 0,5i$$

$$1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -0,866 - 0,5i$$

$$1_{270^\circ} = -i$$

$$1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = 0,866 - 0,5i$$

2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de \mathbb{R}^5 definits de la següent forma:

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 = a_4, a_5 = 0\}$$

$$B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1 = b_3, b_4 = 0\}$$

I sigui $v = (0, 0, -2, 0, 0)$

a) Comprova que $W = \{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0)\}$ és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

Àlgebra/ Matemàtiques I

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de \mathbb{R}^5 ? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1=a_4$, $a_5=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dona el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0 \\ z = -2 \\ x + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{que té solució } x=2, y=0, z=-2.$$

Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (2,0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

Àlgebra/ Matemàtiques I

$T = \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que compleixen les condicions $b_1=b_3$, $b_4=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3×3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Així doncs T és una base de B .

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix $b_1=b_3$

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

3.

Considereu els següents plans de R^3

$$\pi_1: 2x + (m-2)y + z = m-2,$$

$$\pi_2: (m+2)x + 10y + 4z = 11$$

$$\pi_3: x + y + z = 2,$$

on m és un paràmetre real ($m \in R$)

- Estudieu, segons els valors de m , la posició relativa dels tres plans.
- Calculeu, per a aquells valors de m que tingui sentit, els punts, rectes o plans intersecció dels tres plans π_1, π_2, π_3 .

Resolució:

a)

Per a estudiar la posició relativa plantegem la matriu 3×4 corresponent al sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites format pels tres plans, per tal d'estudiar si té o no

Àlgebra/ Matemàtiques I

solució i denotem per A i A' la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament, i reordenem les files per dificultat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & 1 & m-2 \\ m+2 & 10 & 4 & 11 \end{array} \right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ja tenim que $\text{rang}(A) \geq 2$. Per tant el $\text{rang}(A)$ només valdrà 3 quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-2) + 20 + m + 2 - (m-2)(m+2) - 10 - 8 = -m^2 + 5m = -m(m-5), \text{ que només s'anul·la quan } m = 0 \text{ o } m = 5.$$

Per tant:

- Cas I: Si $m \neq 0, 5 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A')$ aleshores el sistema és SCD i per tant els tres plans s'intersecten en un punt.
- Cas II: Si $m = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i anem a calcular el $\text{rang}(A')$.

En substituir el valor de m , el $\text{rang}(A')$ només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 - 4 - 4 + 8 - 22 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A') = 3 > 2 = \text{rang}(A) \text{ i per tant el sistema és incompatible, és a dir que els tres plans no tenen cap punt en comú.}$$

- Cas III: Si $m = 5 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i anem a calcular el $\text{rang}(A')$.

Com abans, en substituir el valor de m , el $\text{rang}(A')$ només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

Àlgebra/ Matemàtiques I

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 + 21 - 14 - 12 - 22 = 0 \Rightarrow \text{rang}(A') = 2 = \text{rang}(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb $(3-2=1)$ 1 grau de llibertat, és a dir que els tres plans s'intersecten en una recta.

En resum:

- Si $m \neq 0,5$ els tres plans es tallen en un punt
- Si $m = 0$ els tres plans no tenen cap punt en comú
- Si $m = 5$ els tres plans s'intersecten en una recta

b)

Pel que s'ha vist a l'apartat anterior, es tracta de trobar el punt intersecció en el cas $m \neq 0,5$ i la recta intersecció en el cas $m = 5$.

- Cas $m \neq 0,5$

El corresponent sistema és SCD i el resolldrem pel mètode de Cramer, en funció dels valors del paràmetre m .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{8(m-2)+10(m-2)+11-11(m-2)-20-4(m-2)}{-m(m-5)} = \frac{3m-15}{-m(m-5)} = \frac{3(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{-3}{m},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{4(m-2)+22+2(m+2)-(m+2)(m-2)-11-16}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+6m-5}{-m(m-5)} = \frac{-(m-1)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m-1}{m},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & m-2 \\ m+2 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{11(m-2)+40+(m+2)(m-2)-2(m+2)(m-2)-10(m-2)-22}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+m+20}{-m(m-5)} = \frac{-(m+4)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m+4}{m}.$$

Per tant el punt intersecció és $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$, per als diferents valors de $m \neq 0,5$.

Àlgebra/ Matemàtiques I

- Cas $m = 5$

Com hem vist a l'apartat anterior, en aquest cas els tres plans s'intersecten en una recta que és la formada per la intersecció de dos d'ells, per exemple el primer i el tercer. Així doncs la recta resulta de la resolució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

o equivalentment (restant a la segona equació dues vegades la primera)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Aïllant de la segona tenim $y = z - 1$ i substituint a la primera $x = 2 - y - z = 2 - z + 1 - z = 3 - 2z$.

Per tant els punts de la recta són de la forma $(3 - 2z, z - 1, z) = (3, -1, 0) + \langle (-2, 1, 1) \rangle$. És a dir, és la recta que passa pel punt $(3, -1, 0)$ i que té vector director $(-2, 1, 1)$.

Resumint:

- Cas $m \neq 0, 5$, els tres plans es tallen en el punt $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$
- Cas $m = 5$, els tres plans tenen per intersecció la recta $(3 - 2z, z - 1, z) = (3, -1, 0) + \langle (-2, 1, 1) \rangle$

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (2x + 2z, 5x + y + 10z, -x - z).$$

- Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
- Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f .

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 2 \\ 5 & 1-t & 10 \\ -1 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$$(1-t)[(2-t)(-1-t) + 2] = (1-t)(t^2 - t) = t(1-t)(t-1) = (0-t)(1-t)^2$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Fixem-nos que el polinomi característic descomposa completament en tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 0 (amb multiplicitat algebraica 1) i 1 (amb multiplicitat algebraica 2) (*veure apunts M5, Teorema de diagonalització.*)