Universitat Oberta de Catalunya 2016-17 primavera
Resolución PEC4

Problema 1. (4 puntos) Sea $f: R^2 \to R^3$ la aplicación lineal de R^2 en R^3 definida por

$$f(2,3)=(1,0,2), f(-1,2)=(-1,2,1)$$

a) Demostrar que $(2,3),(-1,2)$ son una base de R^2.
b) Calcular la dimensión de la imagen de f. ¿Pertenece $(1,2,3)$ a la imagen de f?
c) Calcular la dimensión del núcleo de f. ¿Es f inyectiva?
d) Encontrar la matriz de f en las bases canónicas.

Resolución:

a) Sean u=(2,3) y v=(-1,2). Puesto que son dos vectores de R^2, para ver que son base es suficiente probar que son linealmente independientes (ver Módulo 2, Sección 2.4). Es decir, que el determinante de la matriz que forman es no nulo (Módulo 2, Sección 4.6). Sabemos que:

$$det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=2\cdot 2-3\cdot(-1)=7.$$

Puesto que el determinante es no nulo, u y v son dos vectores linealmente independientes de R^2 (ver Módulo 2, Sección 4.6), o sea:

$(2,3),(-1,2)$ **son una base de R^2.**

b) Para encontrar la imagen de f es suficiente calcular el subespacio generado por las imágenes de una base (ver Módulo 4, Sección 4). O sea, f(u)=(1,0,2), f(v)=(-1,2,1). Por lo tanto, la imagen de f es el subespacio Im(f)=<(1,0,2),(-1,2,1)>. Los vectores (1,0,2) y (-1,2,1) son claramente linealmente independientes ya que uno no es múltiplo del otro. Por lo tanto, Im(f) tiene dimensión 2. Además, el vector (1,2,3) no es combinación lineal de éstos dos ya que el determinante de los tres es no nulo:

$$det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=1\cdot 2\cdot 3+0\cdot 1\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot 2\cdot 1-0\cdot(-1)\cdot 3-1\cdot 1\cdot 2=-4.$$

Así, el vector (1,2,3) no es de Im(f). O sea:

La dimensión de la imagen de f es 2 y (1,2,3) no pertenece a la imagen de f.

c) Por el Teorema de la dimensión (o fórmula del rango) (ver Módulo 4, Sección 4):

dim E= dim Ker(f) + dim Im (f).

Pero ahora E=R^2 y, por el apartado anterior, dim Im(f) =2 . Por lo tanto, la dimensión del núcleo de f es necesariamente 0. Puesto que el núcleo es cero, f es inyectiva.

La dimensión del núcleo de f es 0 y f es inyectiva.

d) Sea B={(2,3),(-1,2)} la base de R^2 formada por los vectores u=(2,3) y v=(-1,2). Sea C={(1,0),(0,1)} la base canónica de R^2. Sea D={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} la base canónica de R^3. Sea M(C,B) la matriz del cambio de la base C a la base B y M(B,C) la matriz del cambio de la base B a la base C. Sabemos que M(C,B) es la inversa de M(B,C). Tenemos que calcular la matriz de f en las bases C y D, o sea, M(f,C,D). Sabemos que M(f,C,D)=M(f,B,D)·M(C,B).

Puesto que f(u)=(1,0,2), f(v)=(-1,2,1), y estos vectores ya estan expresados en base canònica, vemos que la matriz de f en las bases B y D es:

$$M(f,B,D)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Análogamente, la matriz del cambio de la base B a la base C es

$$M(B,C)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Su inversa es:

$$M(C,B)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Así:

$$M(f,C,D)=M(f,B,D)\cdot M(C,B)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -6 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

(ver Apuntes Módulo 4, Sección 6).

Problema 2. (4 puntos) Sea $f:R^3\to R^3$ la aplicación lineal de R^3 en R^3 definida por

$$f(x,y,z)=(2x-2y-2z,-x+3y+2z,x-2y-z).$$

a) Encontrar la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Calcular el polinomio característico de f y los valores propios de f. (Se puede usar Wiris.)

c) Estudiar si f diagonaliza.

d) Encontrar una base de R^3 con el número máximo de vectores propios de f.

Resolución:

a) Observemos que f(1,0,0)=(2,-1,1), f(0,1,0)=(-2,3,-2) y f(0,0,1)=(-2,2,-1). Los vectores imagen ya están expresados en la base canónica. Por lo tanto, escribiéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

b) El polinomio característico de f es (Módulo 4, Sección 7):

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix}2-t & -2 & -2\\ -1 & 3-t & 2\\ 1 & -2 & -1-t\end{pmatrix}.$$

Aplicando la regla de Sarrus (ver Módulo 2, Sección 4.6):

$$Q(t)=(2-t)(3-t)(-1-t)+(-1)\cdot(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-2)\cdot 2-1\cdot(3-t)(-2)-(-1)\cdot(-2)(-1-t)-(2-t)\cdot(-2)\cdot 2$$

Operando, obtenemos

$$Q(t)=-t^3+4t^2-5t+2=(1-t)^2\cdot(2-t)$$

Observemos que el polinomio característico descompone en producto de tres factores reales de grado 1. Los valores propios son 1 con multiplicidad algebraica 2 y 2 con multiplicidad algebraica 1.

El polinomio característico es Q(t)=(1-t)²(2-t) y los valores propios son 1 y 2.

c) Para ver si diagonaliza hemos de comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8).
Usemos ahora el Módulo 4, Sección 7, para encontrar vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz A-(1)·I. O sea, resolvamos el sistema (A-I)X=0:

$$(A\text{-}I)X=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Observemos que la matriz A-I tiene claramente rango 1 ya que las columnas dos y tres son la primera multiplicada por -2. Por lo tanto, la dimensión del subespacio solución, que es igual al número de incógnitas menos el rango del sistema, es 3-1=2. Por lo tant, la solución tiene dimensión 2. Puesto que la segunda columna es -2 veces la primera, el vector (2,1,0) es solución del sistema. Análogamente, puesto que la tercera columna es -2 veces la primera, el vector (2,0,1) es solución del sistema. Por lo tanto, tenemos dos vectores propios linealmente independientes de valor propio 1.
Como antes, encontremos los vectores propios de f de valor propio 2. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz A-2I. O sea, resolvamos el sistema (A-2I)X=0:

$$(A\text{-}2I)X=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Queda el sistema -2y-2z=0, -x+y+2z=0 y x-2y-3z=0. De la primera ecuación sale y=-z. De la segunda: x=y+2z, y sustituyendo el valor de y en función de z: x=-z+2z=z. Por lo tanto, los vectores solución son de la forma: (x,y,z)=(z,-z,z)=z(1,-1,1). Observemos que el vector (1,-1,1) tambien cumple la tercera ecuación. Así, vemos que el subespacio vectorial generado por los vectores propios de valor propio 2 tiene dimensión 1 y que un generador es el (1,-1,1). Por el Teorema de diagonalización del Módulo 4, Sección 8, tenemos:

Puesto que el polinomio característico descompone completamente en factores reales de grado 1 y la multiplicidad de cada VAP coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los VEP asociados, entonces f diagonaliza.

d) Hemos visto que (2,1,0) y (2,0,1) son vectores propios de valor propio 1. Tambien hemos visto que (1,-1,1) es vector propio de valor propio 2. Los tres vectores juntos son linealmente independientes ya que su determinante es no nulo (se comprueba usando la regla de Sarrus).

Una base de R^3 formada por vectores propios de f es
B={ (2,1,0), (2,0,1), (1,-1,1) }.

Problema 3. (2 puntos) Dado $a>1$, consideramos el triángulo $A=(2,1),B=(4,1),C=(2,a)$.
a) Sea g el giro de 45º en sentido antihorario desde el origen de coordenadas. Calcular

$$g(A),g(B),g(C).$$

b) Sea f el escalage de razón 3 desde el punto $(0,2)$. Calcular $a>1$ de manera que el triángulo

$$f(A),f(B),f(C),$$

tenga área 6. Con este $a>1$, hacer un dibujo con la Wiris de los tres triángulos: A,B,C, $g(A),g(B),g(C)$ y $f(A),f(B),f(C)$.

Resolución: a) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro en sentido antihorario y de 45º de ángulo, o π/4, desde el origen es:

$$\begin{pmatrix} \cos(45^o) & -\sin(45^o) & 0 \\ \sin(45^o) & \cos(45^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los punts A,B,C hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} & \frac{(2-a)\cdot\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} & \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} & \frac{(2+a)\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$g(A) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right), g(B) = \left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right), g(C) = \left(\frac{(2-a)\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{(2+a)\cdot\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) Recordemos ahora el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalage de razón 3 desde el punto (0,2), de derecha a izquierda, hacemos la translación de vector (0,-2), después el escalage de razón 3, y después la translación de vector (0,2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -1 & -1 & 3a-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(6,-1), f(B)=(12,-1), f(C)=(6,3a-4). Puesto que el área del triángulo es base por la altura dividido por 2, este triángulo tiene área 6·(3a-4-(-1))/2=6·(3a-3)/2=9a-9. Imponiendo que sea igual a 6, obtenemos 9a-9=6, o sea, a=15/9=5/3. Por lo tanto, C=(2,5/3) y f(C)=(6,1).