Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la tercera PEC así como el enunciado de la actividad y la solución correspondiente.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer y saber operar con los conceptos de espacio vectorial, subespacio vectorial y dimensión.
- Conocer y saber operar con los conceptos de base, coordenadas y cambios de base.
- Conocer y saber operar con bases ortonormales.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán los espacios vectoriales. En particular, se pondrá un énfasis especial en dominar y saber operar con las nociones de espacio vectorial, subespacio vectorial, dimensión, base, coordenadas, cambios de base y bases ortonormales.

Recursos

Recursos Básicos

- El módulo 2 en PDF editado por la UOC. Concretamente los apartados 1, 2, 4.6, 4.7 y 6.
- La calculadora CalcMe, tanto en su versión en línea como local.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X.
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927.
- El aula Laboratorio CalcMe.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales, a la que se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0, 3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3, 5)$: Suspenso alto (C-)
  - $[5, 7)$: Aprobado (C+)
  - $[7, 9)$: Notable (B)
  - $[9, 10]$: Excelente (A)
- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.
- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, en ningún caso, ésta no se guardará para otros semestres.
- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.

- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.
- Es necesario resolver un cuestionario Moodle que complementa esta PEC.
- Del cuestionario pueden realizarse 5 intentos. La nota del cuestionario es la máxima puntuación obtenida en los 5 intentos.
- En la realización de la PEC, se valorará:
    - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
    - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
    - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- **Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta *PEC3-evaluación*.**
- Recordad que es necesario justificar las respuestas.
- La PEC se debe escribir usando un editor de texto (latex, libreoffice, word, ...) y entregar en formato PDF. El nombre del fichero deberá ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.
- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/
- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados.
- Dentro del documento de la PEC debéis escribir, en la primera página, vuestro nombre y apellidos y vuestro IDP completo.
- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 23:59h del día 26/04/2021.**

Responda a las siguientes preguntas razonando los pasos realizados en todo momento:

1. (Valoración de un 20 %) Sea $F =< (-1, 2, -1, 3, 1), (2, 1, -1, 1, 2) >$ y sea $v = (2a - 3, a + 6, -(a+3), \lambda, 2a+3)$ donde "a" es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.
   Calculad λ para que $v \in F$. ¿Cuáles son sus coordenadas en este caso?

Solución: Para qué $v \in F$ es necesario que v sea combinación lineal de vectores F. Por lo tanto, planteamos el sistema:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 \\ a+6 \\ -(a+3) \\ \lambda \\ 2a+3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 3$, $y = a$ y $\lambda = a + 9$. Por lo tanto, el λ que buscábamos es $a + 9$.
Las coordenadas de v en este caso serán $(3, a)$.

---

2. La mayoría de las impresoras 3D se basan en un dispositivo móvil (cabezal), dirigido por un sistema de 3 ejes, que inyecta plástico fundido en el elemento que construye. Para hacer referencia a puntos en el espacio (coordenadas), las impresoras 3D utilizan la terna de posición en cada eje $(pos_{eje1}, pos_{eje2}, pos_{eje3})$. Pero podemos encontrar que, dependiendo del modelo, ¡los ejes son diferentes!

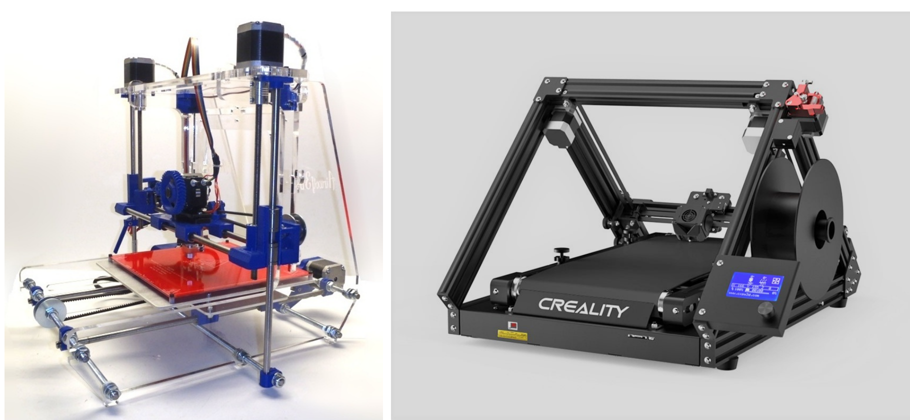

Figura 1: Ejemplos de impresoras 3D con ejes distintos.

Tenemos la impresora A que tiene los ejes ortogonales (el tipo más utilizado), podríamos decir que utiliza la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, $eje_1^A = (1, 0, 0)$, $eje_2^A = (0, 1, 0)$ y $eje_3^A = (0, 0, 1)$.
Y tenemos la impresora B en que los ejes forman ciertos ángulos entre ellos. Sabemos que la

dirección del primer eje, en las coordenadas de la impresora A, son $eje_1^B = (-2, 1, 0)$, y las del segundo eje $eje_2^B = (1, -3, 0)$. El tercer eje es el mismo con un escalado: $eje_3^B = (0, 0, a+1)$ donde "a" es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.
El punto correspondiente al centro de los ejes, es decir, el punto (0,0,0), es el mismo para ambas impresoras.

a) (Valoración de un 10 %) Encontramos instrucciones en internet para construir una pieza con la impresora de B, pero queremos hacerlo con la A y por lo tanto necesitamos "traducirlas". ¿Cuál es la matriz que transformará las coordenadas de la impresora B en la A?

Solución: Pensemos que las direcciones de los ejes de cada impresora son una base para $\mathbb{R}^3$. El enunciado ya nos da las coordenadas de los ejes de la impresora B (base B) en función de los de la impresora A (base A). Por lo tanto, tenemos directamente que la matriz de cambio base será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

---

b) (Valoración de un 10 %) ¿Y cuál es la matriz que transformará las coordenadas de la impresora A a la impresora B? El punto que con la impresora A tiene coordenadas $p_A = (-a, -2a, a+1)$, ¿cuáles tiene en la impresora B?

Solución: La matriz de cambio base es la inversa de la calculada en el apartado anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{a+1} \end{pmatrix}$$

Respecto a las coordenadas de p_A en B, aplicamos la matriz de cambio base que acabamos de calcular:

$$\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{a+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $p_B = (a, a, 1)$.

---

c) (Valoración de un 10 %) En las dos impresoras se rompe el motor del primer eje, de modo que el cabezal sólo se puede mover a lo largo del segundo y tercer eje, definiendo un subespacio de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$. ¿Es el subespacio definido por las dos impresoras rotas el mismo?

Solución: Si el primer eje de la impresora A está roto, tendremos que el espacio donde puede llegar es $E_A =< (0,1,0),(0,0,1) >$. Por otro lado, si el primer eje de la impresora B está roto, tendremos que el espacio donde puede llegar es $E_B =< (1,-3,0),(0,0,a+1) >$. Nos piden si E_A y E_B son el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$.
Es directo ver que no lo son. Ya que podemos encontrar vectores que son de un espacio y no del otro. Por ejemplo, $(1,-3,0)$ que es de E_B pero no de E_A ya que no podemos ponerlo como una combinación lineal de $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

---

3. Sea $F \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial de dimensión 3 definido como:
$F = \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid b_1+b_2+b_3=0, b_4=a\cdot b_5\}$ donde "a" es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

   a) (Valoración de un 10 %) Sea $e_1=(1,-1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,-1,0,0)$ y $e_3=(0,0,0,a,1)$. Comprobad que $A=\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de F.

Solución: Puesto que sabemos que la dimensión del subespacio vectorial es 3, para verificar que A es una base de F es suficiente con ver que $\{e_1,e_2,e_3\}$ son de F y que son linealmente independientes.
Veremos que son de F si verifican las ecuaciones que determinan los elementos de F: $b_1+b_2+b_3=0$ y $b_4=a\cdot b_5$. Y vemos que se cumplen para los tres vectores.
Y para ver que son linealmente independientes, calculamos el rango de la matriz formada por estos 3 vectores:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 3 ya que encontramos directamente un menor de orden 3 con determinante no nulo (primera, tercera y quinta fila):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

---

   b) (Valoración de un 10 %) Sea $v=(1,0,-1,0,0)$. Calculad v_1 como un vector unitario en la dirección de v. ¿Pertenece v_1 a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

Solución: Calculamos el vector v_1 unitario en la dirección de v haciendo: $v_1=\frac{v}{|v|}$.
Tenemos que $|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Por tanto $v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0)=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{-\sqrt{2}}{2},0,0)$.

Para saber si $v_1 \in F$ y al mismo tiempo calcular sus coordenadas en la base A, resolvemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $z = 0$. Así $v_1 \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

c) (Valoración de un 20 %) Calculad vectores v_2 y v_3 de forma que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ sea una base ortogonal de F.

Solución: Para encontrar una base ortogonal seguimos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. El primer vector (v_1) ya lo tenemos del apartado anterior. Como segundo vector para continuar el procedimiento de Gram-Schmidt, podemos usar e_2, ya que sabemos que es de F y que es linealmente independiente de v_1 (podemos encontrar un menor 2×2 con determinante no nulo).
Por Gram-Schmidt tendremos que $v_2 = e_2 - PO(e_2, < v_1 >)$
Primero calculamos la proyección ortogonal:

$$PO(e_2, < v_1 >) = \frac{e_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, 0)$$

Por lo tanto tendremos:

$$v_2 = e_2 - PO(e_2, < v_1 >) = (0, 1, -1, 0, 0) - (\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, 0) = (\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}, 0, 0)$$

Como tercer vector para continuar con el procedimiento Gram-Schmidt, usamos e_3, ya que sabemos que es de F y que es linealmente independiente de $< v_1, v_2 >$ (podemos encontrar un menor 3×3 con determinante no nulo).
Por Gram-Schmidt tendremos $v_3 = e_3 - PO(e_3, < v_1, v_2 >)$
Primero calculamos la proyección ortogonal:

$$PO(e_3, < v_1, v_2 >) = \frac{e_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 + \frac{e_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2 = \frac{0}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 + \frac{0}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2 = (0, 0, 0, 0, 0)$$

Y por tanto:

$$v_3 = e_3 - PO(e_3, < v_1, v_2 >) = (0, 0, 0, a, 1) - (0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, a, 1)$$

Es decir, e_3 ya es ortogonal a $< v_1, v_2 >$ y por tanto $v_3 = e_3$

---

d) (Valoración de un 10 %) Calculad la matriz de cambio base B (base ortogonal que has calculado en el apartado anterior) a la base A del primer apartado.

Solución: Para calcular la matriz C de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la B en función de los de la base A. Para el vector v_1 ya lo tenemos del apartado b).

Para el vector v_2 resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = \frac{-1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

Para el vector v_3 podemos resolver el sistema análogo o ver directamente que $v_3 = e_3$. Así la matriz de cambios base es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$