PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

   Considem els grafs G_n, per $n \geq 4$, que tenen com a vèrtexs $V = \{2, 3, ..., n\}$. Dos vèrtexs són adjacents si corresponen a nombres consecutius, o bé un dels nombres és el doble de l'altre, és a dir, les arestes són del tipus $(a, a+1)$ o $(a, 2a)$. Per exemple, a G_{13} el 6 és adjacent al 3, al 5, al 7 i al 12.

   (a) Dibuixeu G_n per a valors de n de 5 a 8, inclosos.

   (b) Demostreu que si n és senar G_n no és hamiltonià, i que G_8 tampoc.

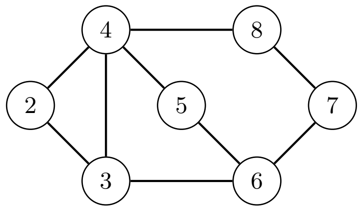
   (c) Trobeu el menor valor de n tal que G_n no tingui cap camí eulerià ni cap circuit eulerià.

   (d) Demostreu que, per a tot $n \geq 14$, G_n no és eulerià ni té cap camí eulerià.

   (e) Trobeu l'ordre i la mida de G_n.

Solució:

(a) Aquest és G_8 (els altres són subgrafs d'aquest):



(b) Per valors d'n senars, n'hi ha prou en observar que el vèrtex n té grau 1. Per a n=8, si eliminem els vèrtexs 4 i 6 ens queden tres components, contradint una de les condicions necessàries de hamiltoneïtat.

(c) G_7, ja que té quatre vèrtexs de grau senar (3, 4, 6 i 7).

(d) 3, 5 i 7 tenen grau senar.

(e) L'ordre és n-1. La mida és $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3$. Hi ha $n-2$ arestes corresponents a nombres consecutius. D'altra banda tenim $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -1 arestes del tipus $(a, 2a)$, ja que, si tinguéssim també el vèrtex 1 serien la meitat d'n (arrodonida cap avall).

---

2. (Valoració d'un 20%) Per reduir la tensió bèlica en una zona de conflicte, una ONG vol afavorir contactes diplomàtics entre cinc estats afectats, A, B, C, D i E. La taula següent representa el benefici d'establir contactes entre cada parella d'estats en una escala d'1 a 10 (1 representa que poca utilitat, mentre que 10 màxima). L'ONG només disposa de la possibilitat d'establir contactes entre quatre parelles d'estats, i és condició necessària que el graf resultant sigui connex. Volem establir els quatre contactes que donin un benefici global més gran.

	A	B	C	D	E
A		6	1	9	4
B	6		8	2	10
C	1	8		5	7
D	9	2	5		3
E	4	10	7	3	

   (a) Quina mena de graf cerquem?

(b) Utilitzeu l'algorisme adequat per trobar la solució. Modifiqueu prèviament els pesos de les arestes per a que representin cost en lloc de benefici.

(c) Si apliquem l'algorisme de Dijkstra al graf ponderat (amb els pesos modificats a l'apartat b), començant per C, i considerem els camins mínims obtinguts, obtindrem un arbre generador del graf. Representeu el graf obtingut. És un arbre generador minimal?

(d) Suposem que cal que el primer dels quatre contactes sigui necessàriament entre A i B. Podem aplicar Kruskal com a l'apartat b? Com canviarà la solució?

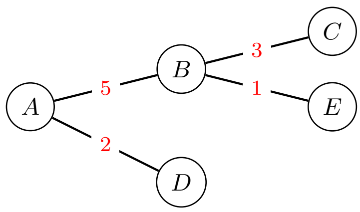
Solució:

(a) El graf resultant ha de tenir 5 nodes i 4 arestes i ser connex, cosa per la qual ha de ser un arbre.

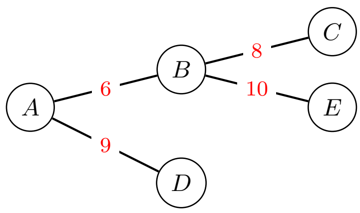
(b) Si canviem el pes p de cada aresta per 11-p (de manera que una aresta 1 passa ser 10 i viceversa) podem pensar que ara en lloc de benefici d'establir un contacte tenim el cost de no establir-lo.

	A	B	C	D
B	5			
C	10	3		
D	2	9	6	
E	7	1	4	8

Ara cal trobar l'arbre de cost mínim, que serà el de benefici màxim.
Ordenant les arestes de menor a major cost, anem seleccionant, successivament, (B, E), (A, D), (B, C) i (A, B). Observeu que no agafem (C, E) tot i tenir cost inferior a (A, B) perquè es crearia un cicle.
El gràfic següent mostra l'arbre generador minimal obtingut:



Aquest arbre té un cost total de 11, que equival a un benefici de 33 usant els pesos originals:



(c) Aplicant l'algorisme de Dijkstra començant pel vèrtex C obtindrem els camins mínims: $C - B$ (3), $C - B - A$ (8), $C - D$ (6) i $C - E$ (4). L'arbre obtingut té pes 18 i, per tant, no és un arbre generador minimal.

(d) Donat que l'aresta $A - B$ està present en la solució minimal trobada, la mateixa solució dels apartats anteriors és vàlida.

---

3. (Valoració d'un 20%) "Qui és la víctima?" demanà en Sherlock Holmes. "Es tracta d'un arbre amb arrel, encara per identificar" responguè l'inspector Lestrade. "Les anàlisis del laboratori han trobat que el seu recorregut DFS és A,B,C,D,E,F,G, mentre que el BFS és A,B,C,D,G,E,F. Però, segons els nostres experts, hi ha diversos arbres amb aquestes característiques.". "Vuit, per a ser exactes", replicà Holmes. En veure la meva expressió de sorpresa va afegir: "Però hi ha coses que fins i tot vostè pot esbrinar, Watson". Demostreu que:

(a) F i G són terminals.

(b) D és pare d'E i és al mateix nivell de l'arbre que G.

(c) Només D i G podrien ser fills de C.

(d) Un noi es va apropar a Holmes i li va xiuxiuejar alguna cosa a cau d'orella. "Gràcies als meus informadors, que m'han dit que tres dels nivells de l'arbre tenen exactament dos nodes, ja podem saber de quin arbre es tracta". Dibuixeu l'arbre corresponent.

(e) Escriviu els recorreguts en preordre, inordre i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

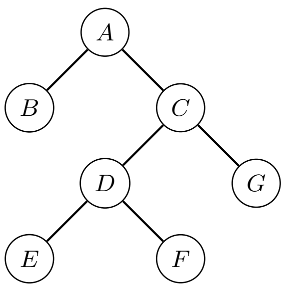
Solució:

(a) G és terminal per ser l'últim del recorregut DFS. F perquè el seu fill únicament podria ser G (immediatament posterior a DFS), però llavors G aniria darrere d'F a BFS.

(b) D no pot estar a un nivell inferior que E perquè és anterior a ell al recorregut BFS. Llavors, si E no fos fill d'D, el recorregut DFS forçaria E a d'estar al mateix nivell i immediatament a la dreta de D. Però això contradiu BFS (ja que darrere de D aniria E i no G). D'altra banda, D i G són germans perquè, pel recorregut BFS, G ha d'estar a la dreta de D o ser-ne fill. Però si fos fill tindríem D i G consecutius al recorregut DFS.

(c) A i B no perquè són anteriors a C al recorregut DFS (o al BFS). Si E fos fill de C, per DFS D seria el primer fill de C i E el segon, i aleshores D i E serien consecutius al recorregut BFS. D'altra banda, si F fos fill de C, amb un raonament anàleg, també quedaria a l'esquerra de G en el BFS.

(d) Com que tenim 7 nodes, tindrem tres pisos de dos vèrtexs per sota de l'arrel. L'arbre és aquest:



(e) El recorregut en preordre és el mateix que en profunditat. El recorregut en inordre és B, A, E, D, F, C, G, i en postordre B, E, F, D, G, C, A.

---

4. (Valoració d'un 20%)

(a) Un arbre T té 5 vèrtexs de grau 5 i 6 de grau 4, i no té cap altre vèrtex de grau > 2. Demostreu que T té 29 fulles i, com a mínim, 40 vèrtexs.

(b) Sigui G un graf amb mateix nombre de vèrtexs que d'arestes. Demostreu que conté algun cicle.

(c) Demostreu que el graf de l'apartat anterior, si és connex, el podem convertir amb un arbre eliminant una aresta.

(d) Quantes arestes caldria afegir a un bosc B per tal d'obtenir un arbre?

Solució:

(a) Sigui x el nombre de vèrtexs de grau 2 i y el nombre de vèrtexs de grau 1 (fulles). El total de vèrtexs és $n = 5 + 6 + x + y$, mentre que, pel lema de les encaixades, $2m = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 2x + y$. Simplificant la primera de les equacions anteriors obtenim $n - 11 = x + y$, i substituint m per $n - 1$ en la segona i simplificant s'obté $2n - 51 = 2x + y$. Resolent (per exemple, restant les dues equacions) trobem que $x = n - 40$, d'on $y = n - 11 - x = 29$. Com que $x \geq 0$ i $n = x + 40$, s'ha de complir $n \geq 40$.

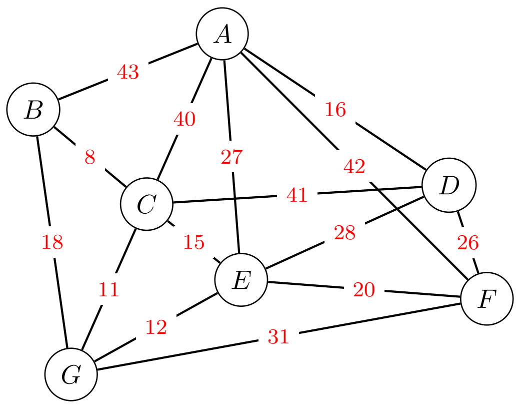
(b) Com que $n = m$, G no pot ser un arbre. Això vol dir que, o bé no és connex, o bé conté un cicle. Però si no és connex, tampoc és un bosc, ja que en un bosc el nombre d'arestes m sempre és inferior al nombre de vèrtexs n. Com G no és un bosc, ha de tenir algun component connex que no sigui un arbre, la qual cosa implica que aquest component connex ha de contenir un cicle.

(c) Per l'apartat b sabem que G conté un cicle. Cal eliminar qualsevol de les arestes que forma part del cicle. Aleshores continuarà sent connex, i com que es verificarà $m = n - 1$ serà un arbre. El fet de que continuï sent connex el tenim garantit perquè tota parella de vèrtexs estarà connectada per un camí: el mateix que a G, excepte en el cas en què el camí passés per l'aresta eliminada (u, v). En aquest cas es pot considerar el mateix camí, però salvant l'aresta eliminada via la resta d'arestes del cicle, que també ens connecten u i v.

(d) Si el bosc està format pels arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ sabem que el nombre d'arestes és $m = n - k$. Si afegim $k - 1$ arestes aconseguirem una de les condicions necessàries per a tenir un arbre, $m = n - 1$. Però cal fer-ho de manera que no es creï cap cicle. És suficient afegir qualsevol aresta entre nodes de cada parell d'arbres consecutius, és a dir, una aresta que uneixi un vèrtex qualsevol de T_i amb un vèrtex qualsevol de T_{i+1}, per i des d'1 a $k - 1$ (per tant, hem afegit k-1 arestes com volíem). Observeu que amb una única aresta d'un arbre a un altre no es pot crear cap cicle.

---

5. (Valoració d'un 20%) La distància en km entre pobles d'una regió ve donada pel següent gràfic:



Un viatjant vol recórrer tots els pobles sense repetir-ne cap, acabant al poble inicial.

(a) Descriviu el problema i trobeu una solució.

(b) Demostreu que, com a mínim, haurà de recórrer 93 kms.

(c) Demostreu que la solució més curta no supera els 136 Kms.

(d) Com varia la solució més curta si fixem quin ha de ser el poble de partida? Justifiqueu la resposta.

Solució:

(a) Cal trobar un cicle hamiltonià. Una solució seria el cicle: $A - B - G - F - D - E - C - A$.

(b) El nombre de quilòmetres que haurà de recórrer estarà afitat inferiorment per l'arbre generador de pes mínim. Si apliquem l'algorisme de Kruskal obtenim, en aquest ordre, les arestes $(B, C), (C, G), (G, E), (A, D), (E, F), (D, F)$. No hem agafat ni (C, E) ni (B, G) perquè crearien un cicle. L'arbre té un pes total de 93 km.

(c) L'arbre obtingut en l'apartat anterior és, de fet, un graf trajecte. El recorregut en preordre des de B és B, C, G, E, F, D, A. Tot i que el graf no és complet, podem seguir l'algorisme TSP-aproximat, ja que les totes les arestes del recorregut es troben al graf. Afegint l'aresta (A, B) s'obté un cicle hamiltonià de pes 136. Per tant, una fita superior de la solució òptima és 136. Observeu que és molt millor que la distància obtinguda amb el cicle de l'apartat a, que és 201 km.

(d) La distància total serà la mateixa. Per exemple, si considerem els pobles A i B, tenim que cada solució partint d'A ens dóna una solució partint de B de la mateixa longitud i viceversa: el cicle $A-x-B-y-A$, on x i y són succesions de pobles, té la mateixa longitud que el cicle $B-y-A-x-B$. Per tant, la solució òptima començant a A ens dóna la solució òptima començant a B.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 19/11/2014**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**