PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

   (a) Un arbre de 15 vèrtexs té un vèrtex de grau 4, 3 de grau 3, x de grau 2 i la resta són fulles. Quantes fulles té?

   (b) Existeix algun arbre amb seqüència de graus $3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$? I amb seqüència de graus $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$?

   (c) Demostreu que un graf G és un arbre si i només si G és connex i si eliminen qualsevol aresta deixa de ser connex.

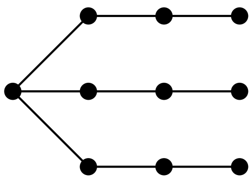
Solució:

(a) Denotem per y el nombre de fulles. Aplicant el lema de les encaixades,

$$2(15 - 1) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 + y$$

Que dóna l'equació $28 = 13 + 2x + y$. Per altra banda, $15 = 1 + 3 + x + y$. Resolent el sistema obtenim, $x = 4$ i $y = 7$.

(b) En el primer cas, podem veure fàcilment que $n = 10$ i $m = 8$. Per tant, no pot haver-hi un arbre amb aquestes condicions ja que no seria connex (8 arestes són insuficients per connectar 10 vèrtex). En el segon cas, $n = 10$ i $m = 9$. Per confirmar-ho, hauríem de trobar un arbre amb aquesta seqüència de graus:



(c) Si G és un arbre, aleshores G és connex. A més, si eliminant l'aresta $\{a, b\}$ no deixés de ser connex aleshores, entre els vèrtexs a i b hi hauria un camí que els uneix i, juntament, amb l'aresta $\{a, b\}$ formarien un cicle.

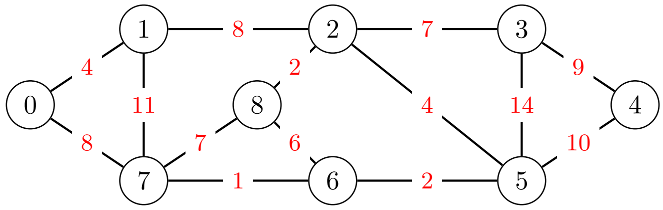
Recíprocament, si G és connex i no fos un arbre, aleshores contindria algun cicle. Siguin x, y dos vèrtexs adjacents del cicle. Si eliminem l'aresta $\{x, y\}$, el graf continuaria sent connex.

---

2. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent algorisme per contruir un arbre generador en un graf ponderat (G, w).

Entrada: (G, w) connex i ponderat d'ordre n
Sortida : T un arbre generador de G
`algorisme` *ArbreGenerador*$(G = (V, A))$
inici
    $A' \leftarrow \emptyset$
    $T = (V, A')$
    per $\{u, v\} \in A$
        $A' \leftarrow A' \cup \{u, v\}$
        si T *conté un cicle* c **aleshores**
            sigui $\{x, y\}$ l'aresta de pes màxim a c
            $A' \leftarrow A' - \{x, y\}$
        fisi
    fiper
    return (T)
fi

(a) Apliqueu-lo al graf ponderat de la figura següent:

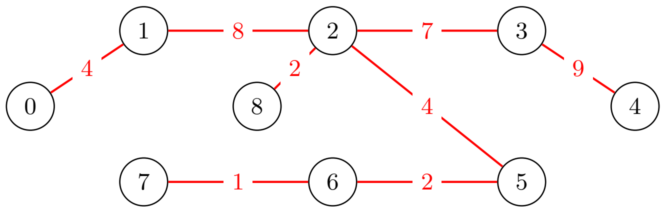


(b) L'arbre generador obtingut amb aquest algorisme és un arbre generador minimal? Justifiqueu la resposta.

(c) Calculeu la complexitat de l'algorisme anterior i justifiqueu si és millor que els algorismes coneguts per trobar arbres generadors minimals.

Solució:

(a) Aplicant l'algorisme, s'obté l'arbre generador,



amb un pes total 37.

(b) Per saber si és un arbre generador minimal hem d'aplicar l'algorisme de Kruskal o el de Prim i comparar els resultats. Si apliquem, per exemple, l'algorisme de Prim començant pel vèrtex 0 obtenim el mateix arbre generador. Per tant, l'arbre obtingut amb l'algorisme proposat és un arbre generador minimal.

(c) El bucle principal s'executa tantes vegades com arestes té el graf. En cada iteració cal controlar si l'aresta afegida forma un cicle i, en aquest cas, eliminar l'aresta de pes màxim. Controlar si s'ha format un cicle es pot fer usant l'algorisme DFS a T que té una complexitat $O(n+m)$ en general. Com que T té un màxim d'$n-1$ arestes, obtindriem una complexitat $O(n)$. Buscar l'aresta de cost màxim a T es pot fer amb una complexitat lineal en el nombre d'arestes de T, $O(n-1) = O(n)$. Les operacions d'afegir o eliminar una aresta a A' es pot fer amb una complexitat $O(1)$ si la representació del graf és fa usant una matriu d'adjacències. Resumint, cada iteració té una complexita màxima $O(n) + O(n) + O(1) = O(n)$. Executant m vegades l'algorisme tindrem una complexitat total $O(mn)$ que és pitjor que els dos algorismes que hem estudiat.

---

3. (Valoració d'un 20%) Utilitzant la teoria de grafs, responeu a les qüestions següents:

(a) En un campionat d'escacs s'apunten 70 jugadors. Tinguent en compte que els jugadors competeixen per eliminatòries de dos jugadors calculeu quantes rondes cal fer fins arribar a proclamar el vencedor. Quantes partides s'hauran celebrat en total? Si en un campionat s'han celebrat 230 partides, quants jugadors hi havia inicialment en el campionat?

(b) Quants jugadors han jugat la ronda prèvia? Nota: Una ronda prèvia és una ronda en la qual el nombre de jugadors que juguen una partida és menor que el nombre màxim de jugadors que hi pot haver en aquesta ronda. Per exemple, si en una ronda poden jugar un màxim de 8 jugadors i se n'han apuntat 10, aleshores 4 jugadors han de jugar una ronda prèvia i, els dos guanyadors, juntament amb els 6 restants, ja formaran una ronda completa de 8 jugadors.

(c) Generalitzeu els apartats anteriors per a n jugadors ($n \geq 2$). Es a dir, si hi ha n jugadors en un campionat d'escacs, quantes rondes hem de programar, quantes partides es faran en total i quants jugadors han de jugar la ronda prèvia.

Solució: Un campionat es pot veure com un arbre binari amb arrel complet on cada fulla és un jugador i cada node intern representa una partida. A més, cada nivell de l'arbre representa una ronda del campionat. Per tant, el nombre de rondes és l'altura de l'arbre.

(a) L'altura de l'arbre serà $h \geq \lceil \log_2 t \rceil$ on $t = 70$. $h = 7$ ja que l'arbre és complet. Els $t = 70$ jugadors són les fulles de l'arbre. Com que $t = (m-1)i+1$ resultarà $70 = i+1$, $i = 69$. Per tant, tindran lloc 69 partides. Ara hem de calcular el nombre de fulles de l'arbre que té 230 vèrtexs interns, $t = i+1 = 231$ jugadors.

(b) Hem de calcular el nombre de fulles de cada nivell d'un arbre complet i equilibrat. Si les fulles estiguessin totes en el darrer nivell, aleshores el nombre de fulles seria una potència de 2. Com que el nombre de jugadors no és una potència de 2, alguns jugadors hauran de fer una ronda prèvia per tal que quedin un nombre de jugadors que sigui una potència de 2. Com que 64 és la potència de 2 més propera a 70, si diem x els jugadors que estan a la ronda prèvia, s'ha de complir que $70 - x + \frac{x}{2} = 64$ que dóna $x = 12$ jugadors.

(c) El nombre de rondes és $h = \lceil \log_2 n \rceil$. Per calcular el nombre de partides, cal tenir en compte que si n és senar, hi haurà un jugador que passarà directament de la ronda prèvia a la següent (l'arbre no serà complet). Per tant, si n és parell, el nombre de partides coincideix amb el nombre de vèrtexs interns, $i = n - 1$. Si n és senar, el nombre de partides serà $n - 2$.

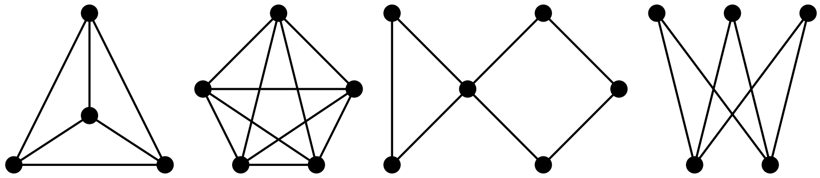
Per calcular el nombre de jugadors de la ronda prèvia, cal distingir quan n és parell i quan n és senar. A més, denotem per M la major potència de 2 menor o igual que n.

Si n és parell, l'equació a resoldre és $n - x + \frac{x}{2} = M$, que té solució $x = 2n - 2M$. Si n és senar, un jugador passa directament a la ronda següent, l'equació quedarà $n - x + 1 + \frac{x-1}{2} = M$ que té solució, $x = 2n - 2M + 1$.

---

4. (Valoració d'un 20%)

(a) Quins dels graf següents són eulerians i quins són hamiltonians? Justifiqueu la resposta.



(b) Quina condició han de complir r i s ($r, s > 0$) per què el graf bipartit complet $K_{r,s}$ sigui eulerià?

(c) Quina condició han de complir r i s ($r, s > 0$) per què el graf bipartit complet $K_{r,s}$ sigui hamiltonià?

Solució:

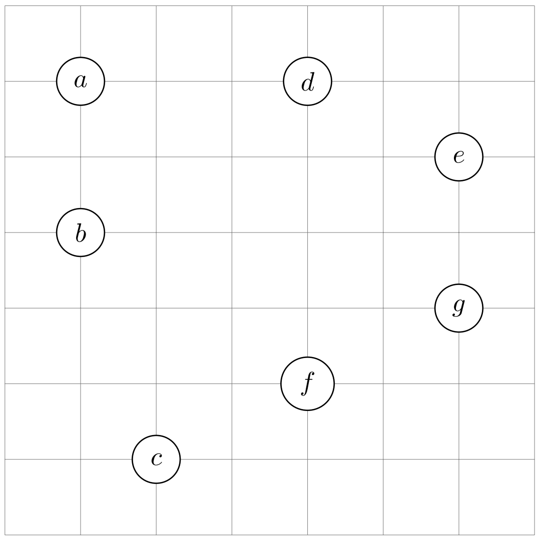
(a) El primer graf no és eulerià però sí hamiltonià. El segon graf és eulerià i hamiltonià. El tercer graf és eulerià però no hamiltonià. I el quart graf no és eulerià ni hamiltonià.

(b) Els vèrtexs de $K_{r,s}$ formen dos conjunts disjunt $V_1 \cup V_2$ tals que $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$. I cada vèrtex de V_1 és adjacent a tots els vèrtexs de V_2. Per tant, r i s han de ser parells.

(c) Sabem una condició necessària perquè un graf bipartit sigui hamiltonià, $|V_1| = |V_2|$. Per tant, $r = s$. A més, per a tot $r > 1$, $K_{r,r}$ és hamiltonià.

---

5. (Valoració d'un 20%) El gràfic següent representa set illes de l'oceà Pacífic que una companyia aèria vol unir entre elles. El costat de cada quadrícula representa una distància de 100 Kms. Responeu, justificadament, les questions següents:



(a) Utilitzeu l'algorisme més adequat per calcular els vols directes que cal establir entre les set ciutats de manera que hi hagi una connexió, encara que sigui amb escales, entre qualssevol parell de ciutats i que la suma de les distàncies dels vols directes sigui mínima.

(b) Un avió de la companyia vol fer tots els vols directes entre ciutats, sortint des de la ciutat a i retornant a aquesta mateixa ciutat. Ho podrà fer sense fer cap vol més d'una vegada? En cas afirmatiu indiqueu l'algorisme més adequat per calcular aquesta ruta.

(c) Un altre avió vol visitar cadascuna de les ciutats una sola vegada i retornar al punt de partida. Hi ha algún algorisme eficient per calcular la ruta que seguiria, de manera que el nombre total de quilòmetres recorreguts fos el mínim possible? Utilitzeu l'algorisme més adequat per calcular, de manera aproximada, els quilòmetres que recorreria l'avió.

Solució: Podem suposar que el graf associat és el graf K_7 ponderat amb els pesos definits en la taula següent (els hem dividit per 100):

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	2	$\sqrt{26}$	3	$\sqrt{26}$	5	$\sqrt{34}$
b	2	0	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$
c	$\sqrt{26}$	$\sqrt{10}$	0	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{20}$
d	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{29}$	0	$\sqrt{5}$	4	$\sqrt{13}$
e	$\sqrt{26}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{5}$	0	$\sqrt{13}$	2
f	5	$\sqrt{13}$	$\sqrt{5}$	4	$\sqrt{13}$	0	$\sqrt{5}$
g	$\sqrt{34}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{13}$	2	$\sqrt{5}$	0

(a) Per resoldre el problema, hem de calcular l'arbre generador minimal del graf K_7. Aplicant l'algorisme de Prim s'obté l'arbre d'arestes $\{a,b\}, \{a,d\}, \{d,e\}, \{e,g\}, \{f,g\}, \{c,f\}$ amb un pes mínim $(7+3\sqrt{5}) \cdot$ 100 Kms.

(b) Com que el graf K_7 és eulerià, podem afirmar que és possible recórrer totes les illes i retornar a a. Per trobar la ruta que seguiria, hauríem d'aplicar l'algorisme de Hierholzer.

(c) Aquest problema és una instància del problema TSP. No existeix cap algorisme eficient per resoldre aquest problema. Com que les distàncies compleixen la desigualtat triangular, podem calcular, de forma aproximada, la ruta mínima utilitzant l'algorisme TSP-aproximat. Amb aquest algorisme, començant pel vèrtex a, obtenim que haurà de recórrer $(7 + (3 + \sqrt{2})\sqrt{5}) \cdot 100$ quilòmetres.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 21/11/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**