PEC2

Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles , así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un ábol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %)

   a) Sea T un árbol ternario completo de altura 10. ¿Cuántas aristas tiene como máximo?

   b) ¿Para qué valores de s la secuencia ordenada $[3, 3, 3, s, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ es gráfica? Y si esta secuencia se corresponde a un bosque, ¿cuántas componentes conexas tiene?

   c) Dad la medida de un árbol donde los 6 vértices que no son hojas tienen grado 3.

   d) ¿Existe algún árbol con medida $n > 0$ tal que su complementario también sea un árbol?

Solución:

a) T es ternario, por lo tanto, $m = 3$, tiene altura $h = 10$, t hojas y i vértices internos. Entonces el valor máximo de hojas es $t = 3^{10} = 59049$. Además, $t = 2i + 1$; por lo tanto, $i = 29524$. Como $|V| = t + i$ i $|A| = |V| - 1$, podemos concluir que $|A| = t + i - 1 = 59049 + 29524 - 1 = 88572$.

b) Como la secuencia es ordenada, $s \in \{1, 2, 3\}$. Además, por el lema de las encajadas, tiene que ser un número impar, por lo tanto $s = 1$ ó 3. Para cualquiera de los dos valores se pued ver, aplicando el algoritmo de Havel y Hakimi, que la secuencia es gráfica.

En un bosque, tenemos que $|A| = |V| - k$ donde k es el número de componentes conexas del bosque. En este caso, $2|A| = 15 + s$ y $|V| = 10$; por lo tanto, $15 + s = 20 - 2k$ y $k = \frac{5-s}{2}$. Si $s = 1$ entonces $k = 2$ y tenemos 2 componentes conexas. Si $s = 3$, entonces hay $k = 1$ componente conexa.

c) Por el lema de las encajadas, $2|A| = 6 \cdot 3 + k$. Además, por ser un árbol, $|A| = |V| - 1 = 6 + k - 1$. De las dos ecuaciones, obtenemos $k = 8$ y, por lo tanto, $|V| = 6 + 8 = 14$. Así la medida es $|A| = 13$.

d) El orden del árbol es n y la medida es $n - 1$. El orden del complementario es también n i la medida es $\binom{n}{2} - |A| = \binom{n}{2} - n + 1$. Ahora, si el complementario es un árbol tenemos que $\binom{n}{2} - n + 1 = n - 1$. Desarrollando obtenemos $\frac{n^2-n}{2} - n + 1 = n - 1$ y, por lo tanto, $n^2 - 5n + 4 = 0$ que implica $n = 1$ ó $n = 4$. Si $n > 0$, los árboles que lo cumplen son el grafo nulo de un vértice N_1 o un árbol de 4 vértices; por ejemplo, $G(V, A)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$.

---

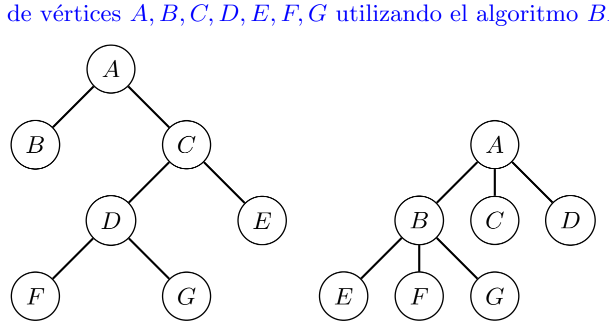
2. (Valoración de un 20 %)

   a) Dibujad dos árboles no isomorfos tales que cuando exploramos los árboles usando un recorrido BFS obtenemos el siguiente orden de los vértices: A, B, C, D, E, F, G. Justificad por qué no son isomorfos y dad el recorrido usando el algoritmo DFS.

   b) Sea T un árbol de altura 3 tal que el orden de exploración de los vértices usando BFS y DFS coincide: A, B, C, D, E, F, G. Demostrad que si B no es una hoja entonces tiene exactamente 5 hijos.

Solución:

a) Dos árboles con orden de vértices A, B, C, D, E, F, G utilizando el algoritmo BFS podrían ser:



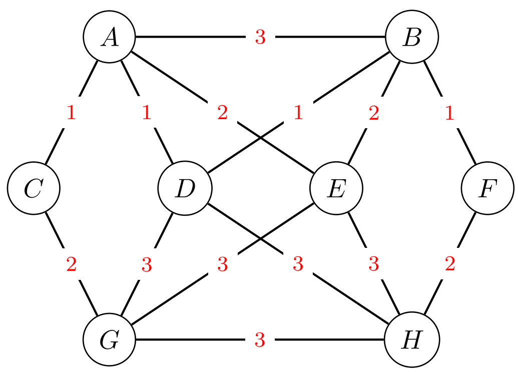
No son isomorfos porque el número de hojas ees diferente. Si realizamos el recorrido utilizando el algoritmo DFS obtenemos A, B, D, E, C, F, G y A, B, E, F, G, C, D respectivamente.

b) Suponemos que B no es una hoja. Entonces B tiene un hijo y, mirando el recorrido DFS su hijo es C. Según el recorrido en BFS, como C se explora después que B, podemos concluir que A no puede tener más hijos. Ahora, D se explora en BFS después que C; por lo tanto, puede ser hijo de C y C no tiene más vértices en su nivel, o puede ser hijo C. Como el árbol tiene altura 3, D no puede tener hijos, y necesariamente D está en el mismo nivel que D; por lo tanto, D también es hijo de B. Utilizando el mismo argumento, E no puede ser hijo de D y por lo tanto está en el mismo nivel que D y és hijo de B, y lo mismo pasa con E, F y G. Así C, D, E, F y G son hijos de B.

---

3. (Valoración de un 20 %)

Se han detectado diversas averías en la red telefónica que reperesenta el grafo siguiente. Los números del grafo indican el precio, en centenares de euros, de la renovación de cada tramo.



Decidimos eliminar todos los tramos antiguos y renovar el mínimo número de tramos que hagan que todos los nodos estén conectados. Explicitad en cada apartado qué algoritmo estáis utilizando y dad todos los pasos.

a) ¿Cuál es el valor mínimo y el valor máximo de la reparación? En cada caso, ¿los tramos que dan este valor son únicos?

b) Queremos que la renovació contenga el tramo (A, B). ¿Podemos conseguir que el importe sea el mínimo obtenido en el apartado anterior? Dad los tramos de la renovación con el mínimo coste posible y que contenga este tramo.

Solución:

Consideramos las aristas ordenadas por coste:

(A,C)	1
(A,D)	1
(B,D)	1
(B,F)	1
(A,E)	2
(B,E)	2
(C,G)	2
(F,H)	2
(A,B)	3
(D,G)	3
(D,H)	3
(E,G)	3
(E,H)	3
(G,H)	3

a) Para obtener el valor mínimo de la renovación aplicamos el algoritmo de Kruskal. Las aristas que forman parte del árbol generador minimal son $\{(A,C),(A,D),(B,D),(B,F),(A,E),(C,G),(F,H)\}$. Renovando estos tramos, la reforma tiene un coste de 1000 €. Para obtener el valor máximo, aplicamos el algoritmo de Kruskal tomando las aristas de mayor coste en vez de las de menor coste. Así, las aristas serían $\{(G,H),(E,H),(D,H),(A,B),(F,H),(C,G),(B,E)\}$ y el coste de la renovación de estos tramos es 1800 €. Por lo tanto, el coste de la renovación se encuentra entre 1000 €y 1800 €.

En ninguno de los dos casos, el árbol obtenido es único. En el primer caso, podemos añadir el tramo (B,E) en vez del tramo (A,E) y el coste sería el mínimo. En el segundo caso, si añadimos (E,G) en vez de (G,H), matenemos el mismo coste.

b) Si queremos que la renovación contenga el tramo (A,B), entonces fijamos este tramo y volvemos a aplicar el algoritmo de Kruskal teniendo en cuenta esta arista. Los tramos que se tienen que renovar son $\{(A,B),(A,C),(A,D),(B,F),(A,E),(C,G),(F,H)\}$ y el coste de la renovación es 1200 €, que es el mínimo posible que incluya (A,B) y, por lo tanto, no podemos conseguir el coste mínimo del apartado anterior.

---

4. (Valoración de un 20 %)

Considerad el grafo G del ejercicio anterior y el subgrafo G' que obtenemos considerando sólo las aristas $\{(A,C),(A,D),(B,D),(B,F),(A,E),(C,G),(F,H)\}$. Añadid a G' las aristas de G que creáis necesarias para que el nuevo grafo cumpla las siguientes propiedades.

a) Sea euleriano y hamiltoniano.

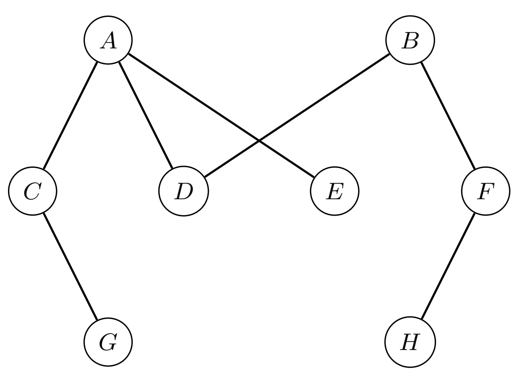
b) Sea hamiltoniano pero no exista ningún circuito ni ningún camino euleriano.

c) Sea euleriano pero no hamiltoniano.

d) No sea hamiltoniano y no exista ningún circuito ni camino euleriano.

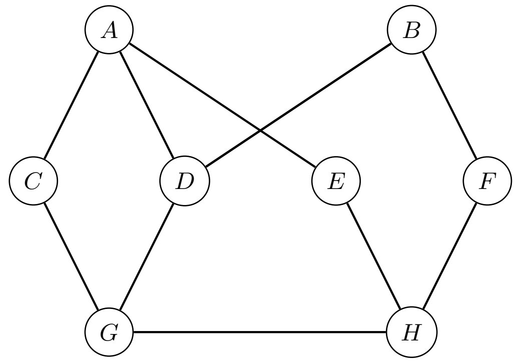
Solución:

El grafo G' es



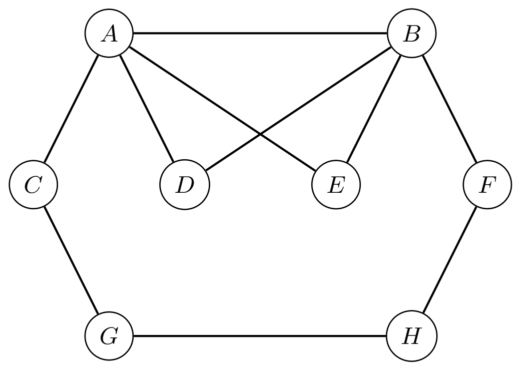
a) Añadimos a G' todas las aristas que faltan para obtener G. En el grafo G todos los vértices tienen grado par, por lo tanto es euleriano. Por otra parte, un circuito hamiltoniano sería A,C,G,D,B,F,H,E,A.

b) Añadimos a G' las aristas $\{(B,D),(D,G),(G,H),(H,E)\}$. El nuevo grafo es



Es hamiltoniano; un circuito sería $A, C, G, D, B, F, H, E, A$. Como tiene 4 vértices de grado impar, no existe ningún circuito ni ningún camino euleriano.

c) Añadimos a G' las aristas $\{(A, B), (B, E), (G, H)\}$. El nuevo grafo es



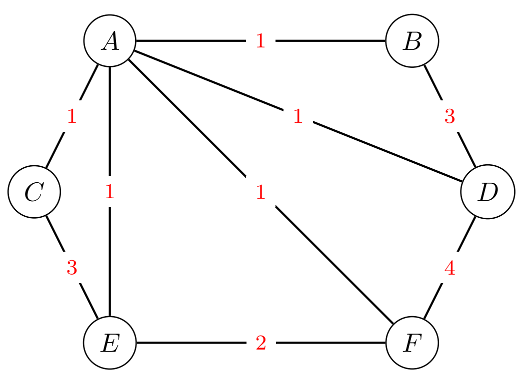
Como todos los vértices tienen grado par, el grafo es euleriano. Ahora, si eliminamos los dos vértices $\{A, B\}$ nos quedan 3 componentes conexas; por lo tanto, no es hamiltoniano.

d) Si no añadimos ninguna arista a G' entonces claramente no es eulerino ni hamiltoniano, ya que no existe ningún circuito. Además, como tiene 4 vértices de grado impar $\{A, E, G, H\}$ tampoco existe un camino euleriano.

---

5. (Valoración de un 5+10+5=20 %)

La distancia en kilómetros entre pueblos de una región viene dada por el siguiente grafo G:



Un repartidor quiere pasar por todos los pueblos acabando en el pueblo inicial de manera que el número total de kilómetros recorridos sea mínimo. Para encontrar este circuito, seguid los siguientes pasos.

a) Dad un circuito que pase exactamente una vez por cada pueblo y vuelva al pueblo inicial. ¿Cuál es la distancia total recorrida?

b) Construid el grafo D obtenido a partir de G que contiene los mismos vértices que G pero el coste de cada arista (v_i, v_j) es el coste del camino mínimo entre v_i y v_j. (**Nota:** El grafo D se llama el grafo distancia de G y satisface la desigualdad triangular. Para obtener el coste de las aristas, utilizad el algoritmo de Floyd).

c) Encontrad un circuito H que pase por cada pueblo exactamente una vez y que recorra el mínimo número de kilómetros. ¿Cuántos kilómetros tendrá que recorrer el repartidor?

d) Como solución del problema inicial, tomad el circuito $H = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$ del apartado anterior. Si el coste de la arista (v_i, v_{i+1}) de D no coincide con el coste de la misma arista en G (o no existe en G), entonces sustituir esta arista por el camino de coste mínimo de v_i a v_{i+1}. Dad el circuito que se obtiene y el número de kilómetros que tiene que recorrer.

Solución:

a) Hay que encontrar unciclo hamiltoniano. Una solución sería el ciclo A, B, D, F, E, C con un recorrido de 14 kilómetros.

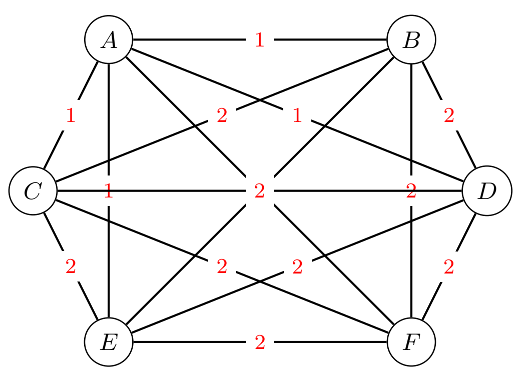
b) Aplicamos el algoritmo de Floyd:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ 1 & 3 & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 1 & \infty & \infty & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz final es:

$$d^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El grafo D es



c) Aplicamos el algoritmo de Kruskal para obtener el árbol generador de coste mínimo. Las aristas del árbol son $(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F)$. El recorrido en preorden desde A es A, C, E, F, D, B. Añadiendo la arista (B, A) se obtiene un ciclo hamiltoniano de peso 10.

d) Cambiamos la arista (C, E) por el camino C, A, E, la arista (F, D) por el camino F, A, D y la arista (D, B) por el camino D, A, B. Así, el camino final es $A, C, A, E, F, A, D, A, B, A$. El coste es, como en el apartado anterior, 10 kilómetros.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. Árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Cada ejercicio tiene un peso del 20 % de la nota final.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 29/04/2015**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**