Espai grapa

UOC www.uoc.edu

Examen 2008/09 -2

Assignatura	**Codi**	**Data**	**Hora inici**
Lògica	05.056	13/06/2009	11:15

⊂05.056ℜ10ℜ01ℜ09ℜEΞ∀∈
05.056 10 01 09 EX

Enganxeu en aquest espai una etiqueta identificativa amb el vostre codi personal
Examen

Fitxa tècnica de l'examen

- **Comprova que el codi i el nom de l'assignatura corresponen a l'assignatura en la qual estàs matriculat.**
- **Només has d'enganxar una etiqueta d'estudiant a l'espai corresponent d'aquest full.**
- **No es poden adjuntar fulls addicionals.**
- **No es pot realitzar la prova en llapis ni en retolador gruixut.**
- **Temps total:** 2 **h.**
- **En cas que els estudiants puguin consultar algun material durant l'examen, quin o quins materials poden consultar?**
  No es pot consultar cap material
- **Valor de cada pregunta:** Problema 1: 30%; problema 2: 20%; problema 3: 20%; problema 4: 20%; problema 5: 10%
- **En cas que hi hagi preguntes tipus test: Descompten les respostes errònies? Quant?**
- **Indicacions específiques per a la realització d'aquest examen:**

Enunciats

Problema 1

a) Formalitzeu utilitzant la lògica d'enunciats les frases següents. Utilitzeu els àtoms proposats.

1) Quan els bancs venen actius tòxics i la gent s'espanta, l'economia entra en crisi només si els bancs s'arruïnen
$V \wedge G \rightarrow (E \rightarrow A)$

2) Si els bancs s'arruïnen llavors els directius se'n van a l'atur si l'economia entra en crisi.
$A \rightarrow (C \rightarrow D)$

3) Si no passa que els directius se'n van a l'atur quan els bancs venen actius tòxics, llavors la gent s'espanta només quan la economia entra en crisi
$\neg(V \rightarrow D) \rightarrow (G \rightarrow E)$

Àtoms:

- V = Els bancs venen actius tòxics
- A = Els bancs s'arruïnen
- E = L'economia entra en crisi
- G = La gent s'espanta
- D = Els directius se'n van a l'atur

b) Formalitzeu utilitzant la lògica de predicats les frases següents. Utilitzeu els predicats proposats.

1) Hi ha professors que no són prestigiosos però que ensenyen certes destreses.
$\exists x\, [P(x) \wedge \neg PR(x) \wedge \exists y\, (D(y) \wedge E(x,y)]$

2) És necessari ensenyar alguna destresa interessant per ser un professor amb prestigi.
$\forall x\, [\neg\exists y\, (D(y) \wedge I(y) \wedge E(x,y) \rightarrow \neg(P(x) \wedge PR(x)))]$

3) Si tots els professors que ensenyen matemàtiques són prestigiosos, llavors les matemàtiques ensenyen alguna destresa.
$\forall x\, [P(x) \wedge E(x,a) \rightarrow PR(x)] \rightarrow \exists x\, [D(x) \wedge E(a,x)]$

Domini: qualsevol conjunt no buit

Predicats:

- P(x): x és un professor
- PR(x): x és prestigiós
- E(x,y): x ensenya y
- D(x): x és una destresa
- I(x): x és interessant

Constants:

- a: "matemàtiques"

Problema 2

Demostreu, utilitzant la deducció natural, que el següent raonament és correcte. Utilitzeu només les 9 regles bàsiques (és a dir, no utilitzeu ni regles derivades ni equivalents deductius).

$T \rightarrow (\neg U \rightarrow W),\ U \rightarrow S,\ \neg W \vee U \therefore T \rightarrow S$

1	$T \rightarrow (\neg U \rightarrow W)$				P
2	$U \rightarrow S$				P
3	$\neg W \vee U$				P
4		T			H
5		$\neg U \rightarrow W$			E$\rightarrow$ 1,4
6			U		H
7			U		It 6
8			$\neg W$		H
9				$\neg U$	H
10				W	E$\rightarrow$ 5,9
11				$\neg W$	It 8
12			$\neg\neg U$		I $\neg$ 9,10,11
13			U		E $\neg$ 12
14		U			E $\vee$ 3,7,13
15		S			E$\rightarrow$ 2,14
16	$T \rightarrow S$				I$\rightarrow$ 4,15

Problema 3

El raonament següent NO és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

$A \rightarrow C$
$\neg C \vee B \rightarrow \neg D$
$\neg(\neg A \rightarrow D)$
$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \rightarrow A))$
$\therefore \neg C \wedge B \rightarrow A$

Cerquem les FNC:

1a Premissa:
$A \rightarrow C$
$\neg A \vee C$

FNC($A \rightarrow C$) = $\neg A \vee C$

2ª Premissa
$\neg C \vee B \rightarrow \neg D$
$\neg(\neg C \vee B) \vee \neg D$
$(\neg\neg C \wedge \neg B) \vee \neg D$
$(C \wedge \neg B) \vee \neg D$
$(C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg D)$

FNC ($\neg C \vee B \rightarrow \neg D$) = $(C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg D)$

3ª Premissa

$\neg(\neg A \rightarrow D)$

$\neg(A \vee D)$

$\neg A \wedge \neg D$

FNC($\neg(\neg A \rightarrow D)$) = $\neg A \wedge \neg D$

4ª Premissa

$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \rightarrow A))$

$\neg\neg A \vee (\neg B \rightarrow (C \rightarrow A))$

$\neg\neg A \vee (\neg\neg B \vee (C \rightarrow A))$

$\neg\neg A \vee (\neg\neg B \vee (\neg C \vee A))$

$A \vee (B \vee (\neg C \vee A))$

$A \vee B \vee \neg C$

FNC($\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \rightarrow A))$) = $A \vee B \vee \neg C$

Negació de la conclusió

$\neg[\neg C \wedge B \rightarrow A]$

$\neg[\neg(\neg C \wedge B) \vee A]$

$\neg C \wedge B \wedge \neg A$

FNC$\neg[\neg C \wedge B \rightarrow A]$) = $\neg C \wedge B \wedge \neg A$

El conjunt de clàusules obtingudes és:

S= { $\neg A \vee C$, $C \vee \neg D$, $\neg B \vee \neg D$, $\neg A$, $\neg D$, $A \vee B \vee \neg C$, **$\neg C$, B, $\neg A$**}

La clàusula $\neg A$ subsumeix totes les clàusules que la contenen:

S= { $C \vee \neg D$, $\neg B \vee \neg D$, $\neg A$, $\neg D$, $A \vee B \vee \neg C$, **$\neg C$, B** }

Aplicant la regla del literal pur podem eliminar totes les clàusules que contenen $\neg D$ ja que no tenim cap clàusula amb D.

S= { $\neg A$, $A \vee B \vee \neg C$, **$\neg C$, B** }

La clàusula B subsumeix totes les clàusules que la contenen:

S= { $\neg A$, **$\neg C$, B** }

És obvi que aquest conjunt no permet obtenir la clàusula buida.
D'aquesta manera podem afirmar que el raonament NO és vàlid.

Problema 4

El següent raonament és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

$\forall x(\neg D(x) \to \exists y(B(y) \vee E(x,y)))$
$\forall x \forall y(E(x,y) \to \forall z\, A(z))$
$\forall x(A(x) \to D(x) \wedge \exists z\, C(z,x))$
$\therefore\ \forall x\, D(x) \vee \exists y\, B(y)$

Cerquem les FNS

1ª premissa
$\forall x(\neg D(x) \to \exists y(B(y) \vee E(x,y)))$ =
$\forall x(D(x) \vee \exists y(B(y) \vee E(x,y)))$ =
$\forall x(D(x) \vee B(f(x)) \vee E(x,f(x)))$ =
$\mathbf{D(x) \vee B(f(x)) \vee E(x,f(x))}$

2ª premissa
$\forall x \forall y(E(x,y) \to \forall z\, A(z))$ =
$\forall x \forall y(\neg E(x,y) \vee \forall z\, A(z))$ =
$\mathbf{\neg E(x,y) \vee A(z)}$

3ª premissa
$\forall x(A(x) \to D(x) \wedge \exists z\, C(z,x))$ =
$\forall x(\neg A(x) \vee (D(x) \wedge \exists z\, C(z,x)))$ =
$\forall x(\neg A(x) \vee (D(x) \wedge C(g(x),x)))$=
$\forall x((\neg A(x) \vee D(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(g(x),x)))$=
$\mathbf{(\neg A(x) \vee D(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(g(x),x))}$

Negació de la conclusió
$\neg(\forall x\, D(x) \vee \exists y\, B(y))$ =
$\exists x\, \neg D(x) \wedge \forall y\, \neg B(y)$ =
$\mathbf{\neg D(a) \wedge \neg B(y)}$

El conjunt de clàusules obtingudes és **(en negreta el conjunt de suport):**

{ $D(x) \vee B(f(x)) \vee E(x,f(x)), \neg E(u,v) \vee A(z), \neg A(w) \vee D(w), \neg A(w) \vee C(g(w),w)$, $\mathbf{\neg D(a), \neg B(s)}$}

Clàusules Troncals	**Clàusules laterals**	
$\neg D(a)$	$D(x) \vee B(f(x)) \vee E(x,f(x))$	Substituïm x per a
$B(f(a)) \vee E(a,f(a))$	$\neg E(u,v) \vee A(z)$	Substituïm u per a i v per f(a)
$B(f(a)) \vee A(z)$	$\neg A(w) \vee D(w)$	Substituïm z per w
$B(f(a)) \vee D(w)$	$\neg D(a)$	Substituïm w per a
$B(f(a))$	$\neg B(s)$	Substituïm s per f(a)
$\square$		

Problema 5

Indiqueu l'opció correcta per al raonament: $\forall x \exists y[Q(x) \to P(y,x)]\ \therefore \exists y \forall x[Q(x) \to P(y,x)]$

1) No és vàlid. Un contraexemple és:
   Domini: {1,2}
   Q(1) = Q(2) = cert
   P(1,1) = P(2,2) = cert; P(1,2) = P(2,1) = fals;

2) No és vàlid. Un contraexemple és:
   Domini: {1}

$Q(1) = P(1,1) =$ fals;

3) No és vàlid. Un contraexemple és:
Domini: {1, 2}
$Q(1) = Q(2) =$ cert
$P(1,1) = P(1,2) =$ cert; $P(2,1) = P(2,2) =$ fals;

4) El raonament donat és vàlid i, en conseqüència, no serà possible trobar cap contraexemple.

Amb un domini d'un element el raonament donat es pot escriure:

$Q(1) \rightarrow P(1,1) \therefore Q(1) \rightarrow P(1,1)$

I cap interpretació no en serà un contraexemple.

Amb un domini de dos elements tenim:

$\forall x \exists y[Q(x) \rightarrow P(y,x)] \therefore \exists y \forall x[Q(x) \rightarrow P(y,x)]$

$[(Q(1) \rightarrow P(1,1)) \vee (Q(1) \rightarrow P(1,2))] \wedge [(Q(2) \rightarrow P(2,1)) \vee (Q(2) \rightarrow P(2,2))]$
$\therefore$
$[(Q(1) \rightarrow P(1,1)) \wedge (Q(1) \rightarrow P(1,2))] \vee [(Q(2) \rightarrow P(2,1)) \wedge (Q(2) \rightarrow P(2,2))]$

Amb la primera interpretació tenim:

$[(V \rightarrow V) \vee (V \rightarrow F)] \wedge [(V \rightarrow F) \wedge \vee (V \rightarrow V)] = V$
$\therefore$
$[(V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow F)] \vee [(V \rightarrow F) \wedge (V \rightarrow V)] = F$

Aquesta interpretació sí és un contraexemple perquè fa certa la premissa i falsa la conclusió.

Amb la tercera interpretació tindríem:

$[(V \rightarrow V) \vee (V \rightarrow V)] \wedge [(V \rightarrow F) \vee (V \rightarrow F)] = F$
$\therefore$
$[(V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow V)] \vee [V \rightarrow F) \wedge (V \rightarrow F)] = V$

Però aquesta interpretació NO és un contraexemple.