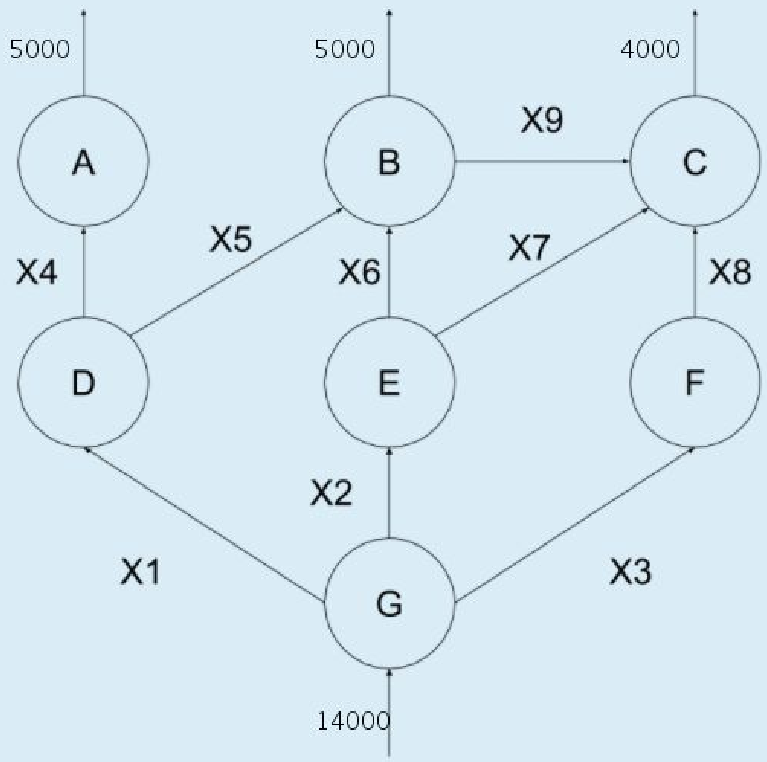
Àlgebra. Pràctica

Problema 1. Exemple d'Enunciat

L'esquema de la figura representa una xarxa de repetidors en la qual les dades es transmeten segons la direcció i sentit marcats. Després d'analitzar un històric de dades, s'ha aconseguit obtenir informació sobre la quantitat mitjana, en MB hora, de dades que es reben o s'envien des de cada node:



a) (2 punts) Suposant una condició d'equilibri sobre el flux de dades que travessa cada node (és a dir, el flux de dades que entra en cada node coincideix amb el flux total de dades que surt de cada node), plantegeu, discutiu i resoleu el corresponent sistema d'equacions.

b) (2 punts) Quin ha de ser el flux de dades si, en un cert moment, E deixa de funcionar i el flux de dades entre F i C és de 7000 MB.

Exemple de Solució

Apartat a)

Plantejament

Matriu d'adjacència

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Defineix

Fluxes exteriors

$$F = [-5000,\ -5000,\ -4000,\ 0,0,0,14000]$$ Defineix

Sistema en forma matricial: $Mx + F = 0$

Discussió

Matriu ampliada

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 4000 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14000 \end{pmatrix}$$ Defineix

$\mathrm{rang}(M) = 7$ Calc

$\mathrm{rang}(N) = 7$ Calc

Sistema compatible indeterminat amb $9-7=2$ graus de llibertat

Resolució

$$R = \text{resol}(M, -F) \quad \text{Defineix}$$

$$H = R_1 \quad \text{Defineix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

> H és el nucli de M, és a dir, una base del nucli de la matriu M.
> Per tant, és una base de totes les solucions de l'equació homogènia

$$P = R_2 \quad \text{Defineix}$$

$$P = [10000, 0, 4000, 5000, 5000, 0, 0, 4000, 0] \quad \text{Calc}$$

> P és una solució particular del sistema

> Per tant, totes les solucions del sistema són de la forma:

$$H \cdot [\alpha, \beta] + P = [\alpha - \beta + 10000, \beta, -\alpha + 4000, 5000, \alpha - \beta + 5000, \beta, 0, -\alpha + 4000, \alpha] \quad \text{Calc}$$

> que depèn de 2 paràmetres (2 graus de llibertat)

Apartat b)

Si la màquina E deixa de funcionar, X2 = X6 = X7 = 0. A més, es fixa el valor de X8 a 7000.
Per tant, afegim 4 equacions al nostre sistema imposant aquestes condicions

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Defineix}$$

$$F = [-5000, -5000, -4000, 0,0,0,14000,0,0,0,-7000] \quad \text{Defineix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 4000 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7000 \end{pmatrix} \quad \text{Defineix}$$

$$\text{rang}(M) = 9 \quad \text{Calc}$$

$$\text{rang}(N) = 9 \quad \text{Calc}$$

Sistema compatible determinat

$$P = \text{resol}(M, -F) \quad \text{Defineix}$$

$$P = [7000,0,7000,5000,2000,0,0,7000,-3000] \quad \text{Calc}$$

Problema 2. Exemple d'Enunciat

La matriu d'una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ en bases canòniques és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 4 & 10 & -7 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 23 & 17 & 13 & -7 & -23 & -10 & -23 \\ 0 & 17 & 14 & 4 & -7 & -14 & -10 & -14 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & -10 & -2 \\ 0 & 16 & 7 & 3 & 0 & -13 & -10 & -13 \\ 0 & 17 & 17 & 7 & -7 & -17 & -10 & -17 \\ -7 & 31 & 21 & 11 & -7 & -28 & -10 & -28 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punt) Calculeu la dimensió i una base del nucli.

b) (1 punt) Calculeu la dimensió i una base de la imatge.

c) (1 punt) Calculeu el polinomi característic de f.

d) (1 punt) Trobeu els valors i vectors propis de la matriu.

e) (1 punt) Estudieu si A és diagonalitzable, i en cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal corresponent D.

f) (1 punt) Calculeu D^{12} i a partir d'aquest resultat calculeu A^{12}.

Exemple de Solució

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 4 & 10 & -7 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 23 & 17 & 13 & -7 & -23 & -10 & -23 \\ 0 & 17 & 14 & 4 & -7 & -14 & -10 & -14 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & -10 & -2 \\ 0 & 16 & 7 & 3 & 0 & -13 & -10 & -13 \\ 0 & 17 & 17 & 7 & -7 & -17 & -10 & -17 \\ -7 & 31 & 21 & 11 & -7 & -28 & -10 & -28 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$ Defineix

$$\mathrm{nucli}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Calc

$$\mathrm{imatge}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 4 & 10 & -7 \\ 0 & 23 & 17 & 13 & -7 \\ 0 & 17 & 14 & 4 & -7 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 17 & 17 & 7 & -7 \\ -7 & 31 & 21 & 11 & -7 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ Calc

$$p = \begin{Vmatrix} 0-\lambda & 13 & 4 & 10 & -7 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 23-\lambda & 17 & 13 & -7 & -23 & -10 & -23 \\ 0 & 17 & 14-\lambda & 4 & -7 & -14 & -10 & -14 \\ 7 & 2 & 3 & -1-\lambda & 0 & -2 & -10 & -2 \\ 0 & 16 & 7 & 3 & 0-\lambda & -13 & -10 & -13 \\ 0 & 17 & 17 & 7 & -7 & -17-\lambda & -10 & -17 \\ -7 & 31 & 21 & 11 & -7 & -28 & -10-\lambda & -28 \\ 7 & 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & -10 & -2-\lambda \end{Vmatrix}$$ Defineix

$$p = \lambda^8 - 7\cdot\lambda^7 - 97\cdot\lambda^6 + 835\cdot\lambda^5 + 168\cdot\lambda^4 - 8820\cdot\lambda^3$$ Calc

$$\mathrm{resol}(p) = \{\{\lambda = -10\},\{\lambda = -3\},\{\lambda = 0\},\{\lambda = 6\},\{\lambda = 7\}\}$$ Calc

$$\mathrm{vaps}(A) = \{-10, -3, 0, 0, 0, 6, 7, 7\}$$ Calc

$$B = \mathrm{veps}(A)$$ Defineix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Calc

$$D = \mathrm{jordan}(A)$$ Defineix

$$D = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ Calc

$$
\begin{aligned}
A^{12} &= (B \cdot D \cdot B^{-1})^{12} \\
&= (B \cdot D \cdot B^{-1}) \cdot (B \cdot D \cdot B^{-1}) \cdot \ldots \cdot (B \cdot D \cdot B^{-1}) \\
&= B \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot \ldots \cdot I \cdot D \cdot B^{-1} \\
&= B \cdot D^{12} \cdot B^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
B \cdot D^{12} \cdot B^{-1} = \left(\begin{array}{cccc}
0 & 16018069537 & 13841818642 & 1601860097 \\
0 & -983981930463 & -986158712799 & 1601806953 \\
0 & -986158712799 & -986158181358 & 1384181864 \\
13841287201 & -1025505792066 & -1013841287201 & -116645048 \\
0 & -997823217664 & -999999468559 & 2177313777 \\
0 & -986158712799 & -986158712799 & 1384128720 \\
-13841287201 & -958476138397 & -972316894157 & 2768310584 \\
13841287201 & -1025505792066 & -1013841287201 & -116645048
\end{array} \right.
$$

$$
A^{12} = \left(\begin{array}{ccccc}
0 & 16018069537 & 13841818642 & 16018600978 & -13 \\
0 & -983981930463 & -986158712799 & 16018069537 & -13 \\
0 & -986158712799 & -986158181358 & 13841818642 & -13 \\
13841287201 & -1025505792066 & -1013841287201 & -11664504865 & \\
0 & -997823217664 & -999999468559 & 2177313777 & \\
0 & -986158712799 & -986158712799 & 13841287201 & -13 \\
-13841287201 & -958476138397 & -972316894157 & 27683105843 & -13 \\
13841287201 & -1025505792066 & -1013841287201 & -11664504865 &
\end{array} \right.
$$