Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la PEC4, el enunciado de la actividad y su solución.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las competencias siguientes:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicaciones.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recorriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Revisar y completar los conceptos sobre aplicaciones lineales, sus propiedades, diagonalización de matrices y transformaciones geométricas.
- Conocer la diagonalización de matrices y encontrar valores y vectores propios.
- Conocer las transformaciones geométricas básicas, escalados y giros. Conocer cómo se representan y aprender a componerlas.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán las aplicaciones lineales y las transformaciones geométricas. Se pondrá énfasis en el cálculo de la matriz de una aplicación lineal, su diagonalización y en los cálculos de las matrices de las transformaciones geométricas.

Recursos

Recursos Básicos

- Los módulos 4 y 5 en pdf editados por la UOC.
- La calculadora CalcME.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/ca/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena con la colaboración de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servicio de Publicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927
- El aula Laboratorio CalcMe

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán en función de la siguiente escala numérica de 0 a 10, con expresión de dos decimales, a la cual se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0-3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3-5)$: Suspenso alto (C-)
  - $[5-7)$: Aprobado (C+)
  - $[7-9)$: Notable (B)
  - $[9,10]$: Excelente (A)
- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse contra el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.
- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota solo servirá para la evaluación del semestre actual, y no se guardará en ningún caso para otros semestres.
- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.
- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.
- Hay que resolver un cuestionario Moodle asociado a la PEC. Del cuestionario se pueden hacer 5 intentos y la puntuación del cuestionario será la máxima puntuación obtenida de los 5 intentos.
- En la realización de la PEC, se valorará:
  - el uso correcto y coherente de los conceptos teóricos estudiados en los módulos (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- **Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta PEC4-evaluación**.
- Recordad que es necesario que justifiquéis las respuestas.
- La PEC tiene que estar escrita en un editor de texto (LaTex, OpenOffice, Word, ...) y debe ser entregada en formato PDF.
- Para la solución de esta PEC se puede usar CalcME para comprobar los resultados o como editor de ecuaciones.
- Dentro del documento de la PEC tendréis que escribir en la primera página vuestro nombre y vuestro IDP completo.
- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 23:59 del día 17/05/2021**.

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos:

1. Sustituid el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f;\ C, C) = \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 2(a+1) & c & -2 \\ -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & b \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f;\ C, C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

Se pide:

a) (Valoración de un 10 %) Calculad la expresión que define a la aplicación f en función de las coordenadas en base canónica (x, y, z) de un vector genérico de $\mathbb{R}^3$.

b) (Valoración de un 15 %) Calculad el valor que debe tener b para que el vector $v = (1, 0, a + 1)$ sea un vector propio de f, y encontrad su valor propio asociado.

c) (Valoración de un 15 %) Usando el valor de b hallado previamente, calculad el valor que debe tener c para que f no sea un isomorfismo y calculad en este caso una base del núcleo de f. Decid qué valores propios de f conocéis en este punto.

d) (Valoración de un 10 %) Usando los valores de b y c hallados previamente, calculad el polinomio característico de f y comprobad cuáles son sus valores propios.

Solución: Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) En el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la proposición de la página 15 nos indica que dado un vector $u = (x, y, z)$ expresado en la base canónica C, podremos calcular su imagen en base canónica como $f(u) = M(f;\ C, C) \cdot u$. Por tanto:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 2(a+1) & c & -2 \\ -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Realizando el producto de la matriz por el vector obtenemos:

$$f(x, y, z) = ((a + 2)x + (a + 2)y, 2(a + 1)x + cy - 2z, -(a + 1)(a + 2)x + (a + 1)(a + 2)y + bz).$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP sería:

$$\begin{array}{ll}
a=0 & f(x,y,z)=(2x+2y,2x+cy-2z,-2x+2y+bz)\\
a=1 & f(x,y,z)=(3x+3y,4x+cy-2z,-6x+6y+bz)\\
a=2 & f(x,y,z)=(4x+4y,6x+cy-2z,-12x+12y+bz)\\
a=3 & f(x,y,z)=(5x+5y,8x+cy-2z,-20x+20y+bz)\\
a=4 & f(x,y,z)=(6x+6y,10x+cy-2z,-30x+30y+bz)\\
a=5 & f(x,y,z)=(7x+7y,12x+cy-2z,-42x+42y+bz)\\
a=6 & f(x,y,z)=(8x+8y,14x+cy-2z,-56x+56y+bz)\\
a=7 & f(x,y,z)=(9x+9y,16x+cy-2z,-72x+72y+bz)\\
a=8 & f(x,y,z)=(10x+10y,18x+cy-2z,-90x+90y+bz)\\
a=9 & f(x,y,z)=(11x+11y,20x+cy-2z,-110x+110y+bz)
\end{array}$$

b) Para que $v=(1,0,a+1)\in\mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, el producto de la matriz $M(f;\ C,C)$ por el vector v debe ser un múltiplo de v. Tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" debe existir un número $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $f(v)=\lambda\cdot v$. Usando el cálculo de la imagen mediante la matriz asociada a f, la condición se traduce a:

$$M(f;\ C,C)\cdot v=\begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0\\ 2(a+1) & c & -2\\ -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\a+1\end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} a+2\\ 2(a+1)-2(a+1)\\ -(a+1)(a+2)+b(a+1)\end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} a+2\\ 0\\ (a+1)(b-a-2)\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\a+1\end{pmatrix}$$

De esta expresión obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} a+2=\lambda\\ 0=\lambda\cdot 0\\ (a+1)(b-a-2)=(a+1)\lambda\end{gathered}$$

De la primera tenemos el valor propio $\lambda=a+2$ y la segunda ecuación se cumple siempre. Por tanto solo necesitamos que se cumpla la tercera. Se trata de aislar la incógnita b en esa ecuación:

$$\begin{gathered} b-a-2=\lambda=a+2\\ b=a+2+a+2\\ b=2a+4\end{gathered}$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP sería:

$$\begin{array}{lll} a=0 & \lambda=2 & b=4 \\ a=1 & \lambda=3 & b=6 \\ a=2 & \lambda=4 & b=8 \\ a=3 & \lambda=5 & b=10 \\ a=4 & \lambda=6 & b=12 \\ a=5 & \lambda=7 & b=14 \\ a=6 & \lambda=8 & b=16 \\ a=7 & \lambda=9 & b=18 \\ a=8 & \lambda=10 & b=20 \\ a=9 & \lambda=11 & b=22 \end{array}$$

c) Como se explica en el apartado "5.Monomorfismos y epimorfismos" una aplicación es un isomorfismo cuando es inyectiva y suprayectiva. Y una manera de saber si la aplicación f es inyectiva y suprayectiva es ver si el rango de su matriz asociada $M(f;\ C, C)$ es igual a la dimensión del espacio origen y a la del espacio destino. Como este espacio es $\mathbb{R}^3$ en ambos casos, el rango debería ser 3 para que f sea un isomorfismo. Si el determinante de la matriz es nulo se cumplirá la condición que nos piden.

$$\begin{gathered} (a+2)bc + 2(a+1)(a+2)^2 + 2(a+1)(a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)b = 0 \\ 4(a+1)(a+2)^2 + b(a+2)(c-2(a+1)) = 0 \\ 4(a+1)(a+2) + b(c-2(a+1)) = 0 \\ c-2(a+1) = -4(a+1)(a+2)/b \\ c = 2(a+1) - 4(a+1)(a+2)/b \end{gathered}$$

Este sería el valor de c que anularía el determinante y haría que f no fuera isomorfismo. En el caso de $b = 2(a+2)$ deducido del apartado anterior el valor de c tendrá que ser $c = 2(a+1) - 4(a+1)(a+2)/(2(a+2)) = 2(a+1) - 2(a+1) = 0$.

Una base del núcleo de f se calcula resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 2(a+1) & c & -2 \\ -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación $(a+2)x+(a+2)y = 0$ se obtiene que $y = -x$. Sustituyendo en la tercera tendríamos que $-(a+1)(a+2)x - (a+1)(a+2)x + bz = 0$ de donde $z = 2(a+1)(a+2)x/b$. Sustituyendo los valores de y,z,c en la segunda ecuación obtenemos $2(a+1)x - [2(a+1) - 4(a+1)(a+2)/b]x - 4(a+1)(a+2)x/b = 0$ comprobamos que se cumple. Un vector del núcleo tendría entonces la forma $(x, -x, 2(a+1)(a+2)x/b)$ y una base del núcleo es por tanto $(1, -1, 2(a+1)(a+2)/b)$. En el caso de $b = 2(a+2)$ la base del núcleo es $(1, -1, a+1)$. Y este vector es un vector propio de valor propio 0.

d) El polinomio característico de f es $p(t) = det(A - t\mathrm{I})$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios":

$$p(t) = \begin{vmatrix} a+2-t & a+2 & 0 \\ 2(a+1) & c-t & -2 \\ -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & b-t \end{vmatrix}$$

$p(t) = (a+2-t)(c-t)(b-t) + 2(a+1)(a+2)^2 + 2(a+1)(a+2)(a+2-t) - 2(a+1)(a+2)(b-t)$

. En el caso $b = 2(a+2)$ y $c = 0$ se anulan los tres últimos términos: $p(t) = (a+2-t)(-t)(2(a+2)-t)$ Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: 0, $a+2$ y $2a+4$. El resultado en función del valor de vuestro IDP sería:

$a=0$	$p(t) = (-t)(2-t)(4-t)$	$VAPS: 0,2,4$
$a=1$	$p(t) = (-t)(3-t)(6-t)$	$VAPS: 0,3,6$
$a=2$	$p(t) = (-t)(4-t)(8-t)$	$VAPS: 0,4,8$
$a=3$	$p(t) = (-t)(5-t)(10-t)$	$VAPS: 0,5,10$
$a=4$	$p(t) = (-t)(6-t)(12-t)$	$VAPS: 0,6,12$
$a=5$	$p(t) = (-t)(7-t)(14-t)$	$VAPS: 0,7,14$
$a=6$	$p(t) = (-t)(8-t)(16-t)$	$VAPS: 0,8,16$
$a=7$	$p(t) = (-t)(9-t)(18-t)$	$VAPS: 0,9,18$
$a=8$	$p(t) = (-t)(10-t)(20-t)$	$VAPS: 0,10,20$
$a=9$	$p(t) = (-t)(11-t)(22-t)$	$VAPS: 0,11,22$

---

2. Sean $A = (a+2, -a-1)$, $B = (0,0)$, $C = (0, a+1)$, $D = (a+3, 0)$. Considerad el cuadrilátero ABCD formado por estos cuatro puntos.
Sea f la transformación afín definida por $f(x,y) = (-2x, -2y + 3a + 3)$.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP.

(a) (Valoración de un 10 %) Calculad la matriz M asociada a f usando la notación matricial eficiente. Es decir, dada la siguiente matriz 3x3:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

encontrad los valores a_{11},a_{12},b_1,a_{21},a_{22} y b_2 que hacen que multiplicar M por el vector $(x,y,1)$ equivalga a aplicar f al punto (x,y).

(b) (Valoración de un 15 %) Calculad las imágenes de los vértices A, B, C y D del cuadrilátero por la aplicación f.

(c) (Valoración de un 15 %) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razón 2 junto a un giro de 180° respecto al punto $(0, a+1)$.

(d) (Valoración de un 10 %) Demostrad que hay un único punto fijo al aplicar la transformación f.

Solución: Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

(a) Se define una aplicación afín en el punto "7. Transformaciones afines en 2D" como aquella que tiene forma $f(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$. Y en el punto "5. Notación matricial eficiente" se muestran ejemplos de matrices de este tipo y cómo se multiplican por vectores $(x, y, 1)$ que representan puntos (x, y) del plano.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comparando la expresión resultante $(a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2, 1)$ con la definición $f(x, y) = (-2x, -2y + 3a + 3)$ podéis deducir fácilmente los valores solicitados y construir la matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos las imágenes de A, B, C, D por f usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 & a+3 \\ -a-1 & 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-4 & 0 & 0 & -2a-6 \\ 5a+5 & 3a+3 & a+1 & 3a+3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos dados son: $f(A) = (-2a-4, 5a+5)$, $f(B) = (0, 3a+3)$, $f(C) = (0, a+1)$ y $f(D) = (-2a-6, 3a+3)$. El resultado en función del valor de vuestro IDP sería:

$a=0$	$f(A)=(-4,5)$	$f(B)=(0,3)$	$f(C)=(0,1)$	$f(D)=(-6,3)$
$a=1$	$f(A)=(-6,10)$	$f(B)=(0,6)$	$f(C)=(0,2)$	$f(D)=(-8,6)$
$a=2$	$f(A)=(-8,15)$	$f(B)=(0,9)$	$f(C)=(0,3)$	$f(D)=(-10,9)$
$a=3$	$f(A)=(-10,20)$	$f(B)=(0,12)$	$f(C)=(0,4)$	$f(D)=(-12,12)$
$a=4$	$f(A)=(-12,25)$	$f(B)=(0,15)$	$f(C)=(0,5)$	$f(D)=(-14,15)$
$a=5$	$f(A)=(-14,30)$	$f(B)=(0,18)$	$f(C)=(0,6)$	$f(D)=(-16,18)$
$a=6$	$f(A)=(-16,35)$	$f(B)=(0,21)$	$f(C)=(0,7)$	$f(D)=(-17,21)$
$a=7$	$f(A)=(-18,40)$	$f(B)=(0,24)$	$f(C)=(0,8)$	$f(D)=(-20,24)$
$a=8$	$f(A)=(-20,45)$	$f(B)=(0,27)$	$f(C)=(0,9)$	$f(D)=(-22,27)$
$a=9$	$f(A)=(-22,50)$	$f(B)=(0,30)$	$f(C)=(0,10)$	$f(D)=(-24,30)$

(c) La matriz del giro de 180° y centro $(0, a+1)$ junto a un escalado de razón 2 se obtiene multiplicando cuatro matrices que, empezando de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(0, -a-1)$, la del giro de ángulo 180° y centro $(0, 0)$, la de escalado de razón 2 y la de la traslación de vector $(0, a+1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Giro de un objeto a partir de un punto fijo genérico" añadiendo el escalado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(180^\circ) & -sen(180^\circ) & 0 \\ sen(180^\circ) & cos(180^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que coinciden.

(d) La condición que tienen que cumplir los puntos fijos es que $f(x,y) = (x,y)$. Necesitamos pues que $(-2x, -2y + 3a + 3) = (x, y)$. Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x = x \\ -2y + 3a + 3 = y \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos deducir que $x = 0$ y de la segunda que $3a + 3 = 3y$ de donde $y = a+1$. Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(0, a+1)$, como podíamos suponer al tratarse de un giro más escalado con centro ese mismo punto.