

PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més importants de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

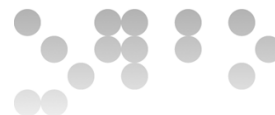
En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

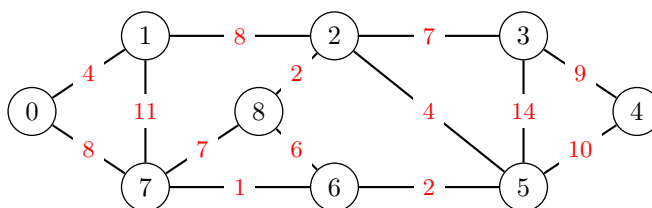


Descripció de la PAC

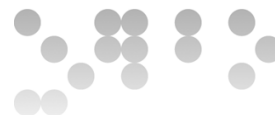
1. (Valoració d'un 20%)
 - (a) Un arbre de 15 vèrtexs té un vèrtex de grau 4, 3 de grau 3, x de grau 2 i la resta són fulles. Quantes fulles té?
 - (b) Existeix algun arbre amb seqüència de graus 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1? I amb seqüència de graus 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1?
 - (c) Demostreu que un graf G és un arbre si i només si G és connex i si eliminen qualsevol aresta deixa de ser connex.
2. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent algorisme per contruir un arbre generador en un graf ponderat (G, w) .

Entrada: (G, w) connex i ponderat d'ordre n
Sortida: T un arbre generador de G
algorisme *ArbreGenerador*($G = (V, A)$)
inici
 $A' \leftarrow \emptyset$
 $T = (V, A')$
per $\{u, v\} \in A$
 $A' \leftarrow A' \cup \{u, v\}$
si T conté un cicle c **aleshores**
 sigui $\{x, y\}$ l'aresta de pes màxim a c
 $A' \leftarrow A' - \{x, y\}$
fisi
fiper
return (T)
fi

- (a) Apliqueu-lo al graf ponderat de la figura següent:



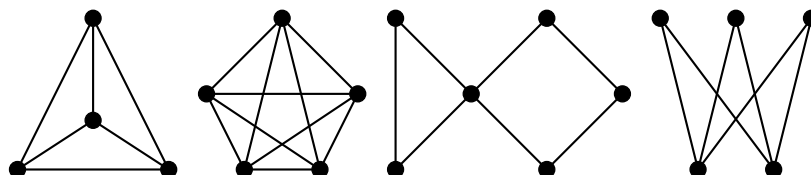
- (b) L'arbre generador obtingut amb aquest algorisme és un arbre generador minimal? Justifiqueu la resposta.
 - (c) Calculeu la complexitat de l'algorisme anterior i justifiqueu si és millor que els algorismes coneguts per trobar arbres generadors minimal.
3. (Valoració d'un 20%) Utilitzant la teoria de grafs, responeu a les qüestions següents:
 - (a) En un campionat d'escacs s'apunten 70 jugadors. Tinguent en compte que els jugadors competeixen per eliminatòries de dos jugadors calculeu quantes rondes cal fer fins arribar a proclamar el vencedor. Quantes partides s'hauran celebrat en total? Si en un campionat s'han celebrat 230 partides, quants jugadors hi havia inicialment en el campionat?
 - (b) Quants jugadors han jugat la ronda prèvia? Nota: Una ronda prèvia és una ronda en la qual el nombre de jugadors que juguen una partida és menor que el nombre màxim de jugadors que hi pot haver en aquesta ronda. Per exemple, si en una ronda poden jugar un màxim de 8 jugadors i se n'han apuntat 10, aleshores 4 jugadors han de jugar una ronda prèvia i, els dos guanyadors, juntament amb els 6 restants, ja formaran una ronda completa de 8 jugadors.



- (c) Generalitzeu els apartats anteriors per a n jugadors ($n \geq 2$). Es a dir, si hi ha n jugadors en un campionat d'escacs, quantes rondes hem de programar, quantes partides es faran en total i quants jugadors han de jugar la ronda prèvia.

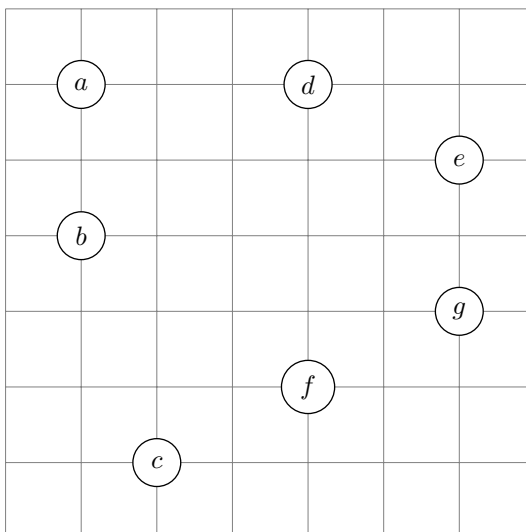
4. (Valoració d'un 20%)

- (a) Quins dels graf següents són eulerians i quins són hamiltonians? Justifiqueu la resposta.

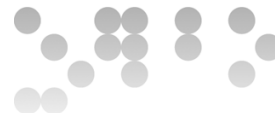


- (b) Quina condició han de complir r i s ($r, s > 0$) per què el graf bipartit complet $K_{r,s}$ sigui eulerià?
- (c) Quina condició han de complir r i s ($r, s > 0$) per què el graf bipartit complet $K_{r,s}$ sigui hamiltonià?

5. (Valoració d'un 20%) El gràfic següent representa set illes de l'oceà Pacífic que una companyia aèria vol unir entre elles. El costat de cada quadrícula representa una distància de 100 Kms. Responen, justificadament, les qüestions següents:



- (a) Utilitzeu l'algorisme més adequat per calcular els vols directes que cal establir entre les set ciutats de manera que hi hagi una connexió, encara que sigui amb escales, entre qualssevol parell de ciutats i que la suma de les distàncies dels vols directes sigui mínima.
- (b) Un avió de la companyia vol fer tots els vols directes entre ciutats, sortint des de la ciutat a i retornant a aquesta mateixa ciutat. Ho podrà fer sense fer cap vol més d'una vegada? En cas afirmatiu indiqueu l'algorisme més adequat per calcular aquesta ruta.
- (c) Un altre avió vol visitar cadascuna de les ciutats una sola vegada i retornar al punt de partida. Hi ha algun algorisme eficient per calcular la ruta que seguiria, de manera que el nombre total de quilòmetres recorreguts fos el mínim possible? Utilitzeu l'algorisme més adequat per calcular, de manera aproximada, els quilòmetres que recorreria l'avió.



Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 21/11/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**