Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA:	ÀLGEBRA		
PAC Núm.:	**2**		
Data de proposta:	14/10/2011	**Data d´entrega:**	$\leq$ 24/10/2011

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **A la solució d´aquesta PAC es pot utilitzar la Wiris** (en tal cas, caldrà il·lustrar-ho amb la corresponent captura de pantalla, afegint-hi els comentaris necessaris al document de resolució).
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 24/10/2011**

Valoració:

- **Tots els apartats tenen el mateix valor.**

RESOLUCIÓ

1. Sigui W = {(x, y, z) | x+y=z)} un subespai vectorial de dimensió 2 a R^3 i sigui el vector v = (2, 2, 4).

   a) Comproveu que A={ (1, 0, 1), (0, 1, 1)} és una base de W.
   b) Calculeu les coordenades de v en la base A.
   c) Sabem que B={ (1, 0, 1), (1, 2, 3)} és també una base de W, calculeu ara les coordenades de v en la base B.
   d) Calculeu la matriu del canvi de base de A a B i comproveu la coherència del resultat amb els apartats b i c.

Resolució:

a) Per a comprovar A és una base de W és suficient veure que els vectors de A estan inclosos a W i que són linealment independents.

   Veurem que els vectors són de W si verifiquen l'equació que determina els elements de W, així:
   (1,0,1)=>1+0=1 i per tant (1,0,1) és de W
   (0,1,1)=>0+1=1 i per tant (0,1,1) és de W

   Per veure que són linealment independents, comprovarem que la matriu formada per aquests dos vectors és de rang 2, així:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que efectivament $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

D'aquesta manera tenim que A és una base de W.

b) Per calcular les coordenades de v en la base A sols cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(2, 2, 4)=a(1, 0, 1)+b(0, 1, 1)

i aquest sistema té una única solució amb a=2 i b=2.
Nota: si el sistema no hagués tingut solució, voldria dir que v no pertany a W.

c) Com a l'apartat a), veurem que els vectors són de W si verifiquen l'equació que determina els elements de W, així:
(1,0,1)=>1+0=1 i per tant (1,0,1) és de W
(1,2,3)=>1+2=3 i per tant (1,2,3) és de W

Per veure que són linealment independents, comprovarem que la matriu formada per aquests dos vectors és de rang 2, així:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ que efectivament $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

D'aquesta manera tenim que B és una base de W.

Per calcular les coordenades de v en la base B farem com a l'apartat b), sols cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(2, 2, 4)=a(1, 0, 1)+b(1, 2, 4)

i aquest sistema té una única solució amb a=1 i b=1.

d) Per escriure la matriu de canvi de base de la base A a la base B, posarem els vectors de A en combinació lineal del vectors de la base B, així:

(1, 0, 1)=x(1, 0, 1)+y(1, 2, 3)

i aquest sistema té una única solució amb x=1 i y=0, (1, 0) és el primer vector de la base A escrit en base B. Anàlogament

(1, 2, 3)=x(1, 0, 1)+y(1, 2, 3)

i aquest sistema té una única solució amb x=-1/2 i y=1/2, (-1/2, 1/2) és el segon vector de la base A escrit en base B.

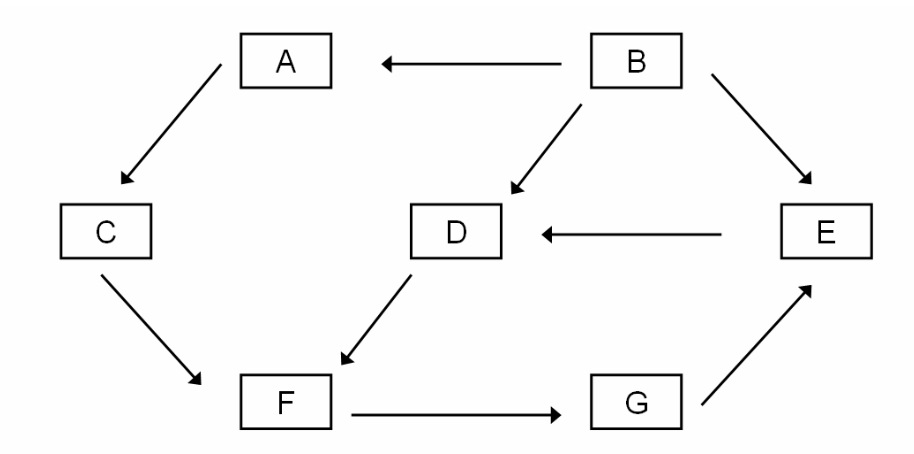
Així la corresponent matriu de canvi de base és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

que efectivament, transforma el vector v en base A, el (2, 2) a (1, 1) que és el vector v en la base B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. El graf següent mostra els enllaços directes existents entre set llocs web pertanyents a diverses companyies dedicades al desenvolupament de programari matemàtic:



a) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior sobre enllaços directes utilitzant per a això una matriu M de zeros i uns, i.e.: l'element $(M)_{ij}$ serà 1 si existeix un enllaç directe entre la companyia que ocupa la fila *i*-èsima i la companyia que ocupa la columna *j*-èsima (amb *i* diferent de *j*), essent 0 en cas contrari.

b) Trobeu, fent ús de la matriu M, la matriu N que representa els enllaços de fins a quatre connexions, entre els llocs web. Determineu el nombre mínim d'enllaços indirectes que es necessiten per anar del lloc A al lloc D. Justifiqueu la vostra resposta.

Resolució:

a) Seguint les indicacions de com hem de construir la matriu M obtenim:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) D’acord amb la resolució dels exercicis d’autoavaluació 14 i 17, la matriu que representa els enllaços de fins a dos connexions és $N = M + M^2 + M^3$ essent $M^p, p > 1$ la matriu que ens proporciona els enllaços indirectes a base de p-1 connexions.

Fent els càlculs obtenim:

$$N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu N ens compta el total de camins, d’enllaç directe o de fins a quatre enllaços indirectes entre dos qualsevol dels nodes. Per exemple, la segona columna de zeros ens indica que no podem arribar de cap manera al node B des de cap node (com és clar en el graf) i que per anar de B a D hi ha 3 possibilitats.
Per a determinar el nombre mínim d’enllaços indirectes per anar de A fins a D, hem de veure en quin primer moment en calcular $M^p, p > 1$, hem obtingut un 1 en la 1a fila (A), 4a columna (D). Això s’obté quan p=5. Per tant, es necessiten un mínim de 4 enllaços indirectes per anar de A a D.

$$M^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^5 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sigui el conjunt *A* = {(2, 3, 1, -5), (0, 2, -1, 3)}.
   a) Demostreu que el subespai generat per A és un subespai de dimensió 2 a R^4.
   b) Determineu el valor de p i q per tal que el vector (2, p, 3, -q) pertanyi al subespai generat per A.

Resolució:

a) Per veure la dimensió del subespai generat per A és suficient veure la quantitat de vector linealment independents que conté A. En el nostre cas, com que els dos vectors de A no són proporcionals, el subespai generat per A és de dimensió 2. Equivalentment podem calcular el rang de la matriu formada per els seus vectors, aquest rang serà la dimensió del subespai, així:

$$rang\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 2 \text{ ja que } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

b) Per determinar els valors de p i q el que cal fer és imposar que el vector (2, p, 3, -q) sigui de l'espai generat per A, així caldrà que es compleixi que

(2, p, 3, -q)=x(2, 3, 1, -5)+y(0, 2, -1, 3)

això és un sistema amb quatre equacions i dos incògnites (x i y), p i q dos valors a determinar.

$$\begin{cases} 2 = 2x \\ p = 3x + 2y \\ 3 = x - y \\ -q = -5x + 3y \end{cases}$$

del que primer trobem les dues incògnites amb

$$\begin{cases} 2 = 2x \\ 3 = x - y \end{cases}$$

que té una única solució amb x=1 i y=-2

i ara en podem determinar p i q de manera simple a

$$\begin{cases} p = 3x + 2y \\ -q = -5x + 3y \end{cases}$$

substituint els valors de x i y, així:

$$\begin{cases} p = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -1 \\ -q = -5 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -11 \end{cases}$$

i tenim que si p=-1 i q=11 llavors el vector (2, p, 3, -q) és del subespai generat per A