

PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més importants de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

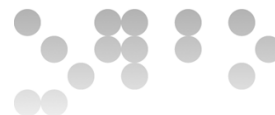
En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.



Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

Considem els grafs G_n , per $n \geq 4$, que tenen com a vèrtexs $V = \{2, 3, \dots, n\}$. Dos vèrtexs són adjacents si corresponen a nombres consecutius, o bé un dels nombres és el doble de l'altre, és a dir, les arestes són del tipus $(a, a+1)$ o $(a, 2a)$. Per exemple, a G_{13} el 6 és adjacent al 3, al 5, al 7 i al 12.

- Dibuixeu G_n per a valors de n de 5 a 8, inclosos.
- Demostreu que si n és senar G_n no és hamiltonià, i que G_8 tampoc.
- Trobeu el menor valor de n tal que G_n no tingui cap camí eulerià ni cap circuit eulerià.
- Demostreu que, per a tot $n \geq 14$, G_n no és eulerià ni té cap camí eulerià.
- Trobeu l'ordre i la mida de G_n .

2. (Valoració d'un 20%)

Per reduir la tensió bèlica en una zona de conflicte, una ONG vol afavorir contactes diplomàtics entre cinc estats afectats, A , B , C , D i E . La taula següent representa el benefici d'establir contactes entre cada parella d'estats en una escala d'1 a 10 (1 representa que poca utilitat, mentre que 10 màxima). L'ONG només disposa de la possibilitat d'establir contactes entre quatre parelles d'estats, i és condició necessària que cada país participi en almenys un d'aquests contactes. Volem establir els quatre contactes que donin un benefici global més gran.

	A	B	C	D	E
A		6	1	9	4
B	6		8	2	10
C	1	8		5	7
D	9	2	5		3
E	4	10	7	3	

- Quina mena de graf cerquem?
- Utilitzeu l'algorisme adequat per trobar la solució. Modifiqueu prèviament els pesos de les arestes per a que representin cost en lloc de benefici.
- Si apliquem l'algorisme de Dijkstra al graf ponderat (amb els pesos modificats a l'apartat b), començant per C , i considerem els camins mínims obtinguts, obtindrem un arbre generador del graf. Representeu el graf obtingut. És un arbre generador minimal?
- Suposem que cal que el primer dels quatre contactes sigui necessàriament entre A i B . Podem aplicar Kruskal com a l'apartat b? Com canviarà la solució?

3. (Valoració d'un 20%)

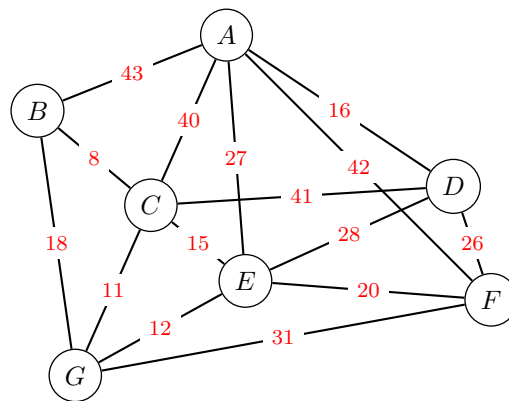
"Qui és la víctima?" demanà en Sherlock Holmes. "Es tracta d'un arbre amb arrel, encara per identificar" respongué l'inspector Lestrade. "Les anàlisis del laboratori han trobat que el seu recorregut DFS és A, B, C, D, E, F, G , mentre que el BFS és A, B, C, D, G, E, F . Però, segons els nostres experts, hi ha diversos arbres amb aquestes característiques.". "Vuit, per a ser exactes", replicà Holmes. En veure la meua expressió de sorpresa va afegir: "Però hi ha coses que fins i tot vostè pot esbrinar, Watson". Demostreu que:

- F i G són terminals.
- D és pare d' E i és al mateix nivell de l'arbre que G .
- Només D i G podrien ser fills de C .
- Un noi es va apropar a Holmes i li va xiuxiuejar alguna cosa a cau d'orella. "Gràcies als meus informadors, que m'han dit que tres dels nivells de l'arbre tenen exactament dos nodes, ja podem saber de quin arbre es tracta". Dibuixeu l'arbre corresponent.
- Escriuiu els recorreguts en preordre, inordre i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

4. (Valoració d'un 20%)

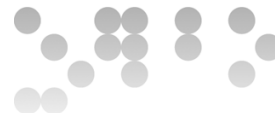


- (a) Un arbre T té 5 vèrtexs de grau 5 i 6 de grau 4, i no té cap altre vèrtex de grau > 2 . Demostreu que T té 29 fulles i, com a mínim, 40 vèrtexs.
 - (b) Sigui G un graf amb mateix nombre de vèrtexs que d'arestes. Demostreu que conté algun cicle.
 - (c) Demostreu que el graf de l'apartat anterior, si és connex, el podem convertir amb un arbre eliminant una aresta.
 - (d) Quantes arestes caldria afegir a un bosc B per tal d'obtenir un arbre?
5. (Valoració d'un 20%) La distància en km entre pobles d'una regió ve donada pel següent gràfic:



Un viatjant vol recórrer tots els pobles sense repetir-ne cap, acabant al poble inicial.

- (a) Descriu el problema i trobeu una solució.
- (b) Demostreu que, com a mínim, haurà de recórrer 93 kms.
- (c) Demostreu que la solució més curta no supera els 136 Kms.
- (d) Com varia la solució més curta si fixem quin ha de ser el poble de partida? Justifiqueu la resposta.



Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 19/11/2014**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**