Álgebra / Matemáticas I

EXAMEN 1 - 10 enero 2021

1. Hallad el módulo y el argumento del resultado de la operación siguiente: $\frac{4+4i}{1+\sqrt{3}i}$

Solución

Primero de todo multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador para eliminarlo:
$\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(4+4i)\cdot(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\cdot(1-i\sqrt{3})} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}i^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 i^2} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i+4\sqrt{3}}{1+3} = \frac{4+4\sqrt{3}+(-4\sqrt{3}+4)i}{4} = \frac{4(1+\sqrt{3})+4(1-\sqrt{3})i}{4} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$

Por tanto, tenemos que: $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$.

A continuación buscamos el módulo y el argumento del número $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = -15^\circ = 345^\circ$

Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ en 345° y en 165°. Como el afijo del punto buscado es $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 345°.

Tenemos, por tanto, que $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i = (2\sqrt{2})_{345^\circ}$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{r} nx+y=m \\ y=a \\ nz=0 \end{array}\right.$$

donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus.

(a) Discutid el sistema en función de n, m y dad una interpretación geométrica del sistema para cada caso.

(b) Resolved el sistema para $n=1$ y $m=a$.

Solución

(a) Primero calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, A:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = n^2$$

que es cero solo para $n = 0$.

En el caso de $n = 0$, tendremos que la matriz ampliada M es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que el único menor que puede ser no nulo es el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & a \end{vmatrix}$.

Así pues, para $m = a$, el sistema será compatible indeterminado [rango(A) = rango(M) = 1] y tendremos dos planos coincidentes (el plano $y = a$)

Para $m \neq a$, tendremos un sistema incompatible, [rango$(A) \neq$ rango(M)] que representa dos planos paralelos (el plano $y = a$ y el plano $y = m$)

En el caso de $n \neq 0$, el rango de A será 3, así como también el rango de M, por lo que aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius será un sistema compatible determinado (SCD), que representa 3 planos que se cortan en un punto [ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31].

(b) En este caso, el sistema queda como:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \quad\;\; y = a \\ \quad\;\; z = 0 \end{cases}$$

Con el apartado anterior, es un SCD y puede resorverse fácilmente. De la tercera ecuación sacamos $z = 0$, de la segunda $y = a$ y de la primera y la segunda, $x = 0$.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 - 2a_3 = 0\}.$$

Y sea $v = (-4, 6, -2, 2)$.

(a) Comprobad que $A = \{(2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean

$$C_1 = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.
¿Pueden C_1 o C_2 ser matrices de cambio de base de una base B a la base A? ¿Cuáles son las bases B para las que lo son?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1 - 2a_3 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -2$, $y = 6$ y $z = 2$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-2, 6, 2)$.

(b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base deberán de ser 3×3. Pero esto no nos descarta ninguna. También sabemos que deben ser invertibles, por tanto vamos a ver si C_1 y C_2 lo son [Ver módulo 2, sección 4.7]. Al ser matrices triangulares, podemos multiplicar la diagonal directamente para calcular el determinante: $Det(C_1) = (a-1)(a-3)(a-5)(a-7)(a-9)$. De forma que para $a = 1, 3, 5, 7, 9$ el determinante de C_1 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
$Det(C_2) = a^2(a-2)(a-4)(a-6)(a-8)$. De forma que para $a = 0, 2, 4, 6, 8$ el determinante de C_2 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
Para calcular la base B en cada caso, podemos multiplicar directamente y obtenemos la base B (columnas de la matriz resultado) [Ver módulo 2, sección 4.7].
Para los casos $a = 0, 2, 4, 6, 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 2(a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

y para los casos $a = 1, 3, 5, 7, 9$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_2 = \begin{pmatrix} 2a(a-2)(a-4) & 2a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

4. Sean $A = (a, 1)$, $B = (0, 0)$ y $C = (2a, 0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC. Se pide:

(a) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

(b) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razones 4 y $-a$ respecto al punto A seguido de una traslación. Determinad el vector de la tranlación.

(c) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución

(a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 & -3a-3 & 5a-3 \\ a-4 & 2a-4 & 2a-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las imágenes de los puntos dados: $f(A) = (a-3, a-4)$, $f(B) = (-3a-3, 2a-4)$ y $f(C) = (5a-3, 2a-4)$.

(b) La matriz del escalado desde el punto $A = (a, 1)$ y de razón 4 y $-a$ se obtiene multiplicando tres matrices que, de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-a, -1)$, la del escalado y la de la traslación de vector $(a, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la traslación de vector (r, s) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición del escalado con esta traslación seria el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a+r \\ 0 & -a & a+1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que r y s deben cumplir $-3a + r = -3a - 3$, de donde $r = -3$ y que $a + 1 + s = 2a - 4$, de donde $s = a - 5$.

(c) La condición que deben cumplir los puntos fijos es que $f(x,y)=(x,y)$.
La imagen del punto (x,y) por f es:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x-3a-3 \\ -ya+2a-4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos pues que $(4x-3a-3,-ya+2a-4)=(x,y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x-3a-3=x \\ -ya+2a-4=y \end{cases}$$

Agrupamos los términos con x e y:

$$\begin{cases} 3x=3a+3 \\ 2a-4=y+ay=(1+a)\cdot y \end{cases}$$

Y aislando las incógnitas x e y obtenemos:

$$\begin{cases} x=a+1 \\ y=\frac{2a-4}{a+1} \end{cases}$$

Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(a+1,\frac{2a-4}{a+1})$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$--\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$