SOLUCIÓ EXAMEN 16/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els següents càlculs:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

b) Calculeu les arrels quartes del nombre complex: $z = 8+8\sqrt{3}i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem amb l'expressió, recordant que $i^2=-1$:

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2} = \frac{1+2i-1}{1-2i-1} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

b) Escrivim el complex z en forma polar:

$$m = \sqrt{8^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$$

$$\alpha = arctg\frac{8\sqrt{3}}{8} = arctg\sqrt{3} = 60^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $z = 8+8\sqrt{3}i = 16_{60^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels quartes, hem de:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16_{60}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{60+360k}{4}}$$ per a k=0, 1, 2, 3

El mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{16} = 2$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{60+360k}{4}$ per a k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 15^{\circ}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 15^{\circ}+90^{\circ} = 105^{\circ}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 15^{\circ}+180^{\circ} = 195^{\circ}$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 15^{\circ}+270^{\circ} = 285^{\circ}$

Per tant, les quatre arrels quartes del nombre complex $z = 8+8\sqrt{3}i$ són:

$$2_{15^{\circ}}, 2_{105^{\circ}}, 2_{195^{\circ}}, 2_{285^{\circ}}$$

Exercici 2:

Siguin A, B i C els subespais vectorials de R^3 generats pels conjunts de vectors següents:

$A = \langle (0,1,0), (0,-1,1), (0, a, -a^2) \rangle, \ a \in R$

$B = \langle (0,-1,0), (0,0,1) \rangle$

$C = \langle (1,0,2), (0,0,1) \rangle$

a) Trobeu la dimensió d'A en funció d'a. Trobeu les dimensions de B i de C. Trobeu una base per cada subespai vectorial.

b) Determineu si el vector v=(0,3,-1) pertany o no a A, a B i a C. En cas que hi pertanyi, calculeu-ne les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

c) Generen A i B el mateix subespai vectorial? En cas afirmatiu, trobeu la matriu de canvi de base d'A a B i comproveu el resultat de l'apartat anterior. Generen B i C el mateix subespai vectorial? Si és que sí, trobeu la matriu de canvi de base de B a C i comproveu el resultat de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem els rangs de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 per a tot a. Com a base podríem usar els dos primers vectors que són linealment independents (ja que contenen el menor anterior): $Base - A = \{(0,1,0), (0,-1,1)\}$

Per B: Podem trobar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb els quals està definit: $Base - B = \{(0,-1,0), (0,0,1)\}$

Per C: Podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de C és 2 i com a base també podríem usar els dos vectors amb els quals està definit: $Base - C = \{(1,0,2), (0,0,1)\}$

b) Per al subespai A i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ que té per solució: x=2, y=-1. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (2,-1).

Per al subespai B i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0=0 \\ -x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ que té per solució: x=-3, y=-1. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (-3,-1).

Per al subespai C i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x=0 \\ 0=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ que no té solució. Per tant $v \notin C$.

c) Sabem de l'apartat a) que la dimensió d'A és 2 i la de B també. Això no vol dir que generin el mateix subespai vectorial. Per comprovar si generen el mateix, com que la dimensió dels dos és igual, n'hi haurà prou amb comprovar si una base d'A pertany a B.

Així per a (0,1,0) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0=0 \\ -x=1 \\ y=0 \end{cases}$ que té solució x=-1, y=0 i per tant $(0,1,0) \in B$

Així per a (0,-1,1) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0=0 \\ -x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ que té solució x=1, y=1 i per tant $(0,1,1) \in B$

Per tant A i B generen el mateix subespai vectorial.

Per a calcular la matriu de canvi de base d'A a B, posarem els vectors de la base d'A com a combinació lineal dels de la base de B. Això ho acabem de resoldre, per tant:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I podem comprovar el resultat de l'apartat anterior fent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podem dir directament que B i C no generen el mateix subespai vectorial ja que hem vist un vector (v) que pertany a B i no pertany a C.

Exercici 3:

a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre *k:*

$$\begin{cases} x+ky=0 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z+kt=2 \\ x+y+z+t=k \end{cases}$$

b) Resoleu el sistema per a $k=-4$, en cas que tingui solució.

Resolució:

a) Per discutir el sistema utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Necessitem calcular els rangs de la matriu del sistema (M) i de la matriu ampliada (MA).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } |M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1-k)^3$$

Per tant tenim que el determinant de la matriu M només s'anul.la quan $k=1$.

La matriu M té rang 4 per a tots els valors de k, llevat de per a $k=1$ que té rang 3.

Per al $k=1$ podem comprovar també que la matriu ampliada té rang 4 i la incompatibilitat del sistema per la incoherència de les dues darreres equacions.

Per tant;

- Per a $k\neq 1$ el sistema és compatible determinat ja que $rang(M)=rang(MA)=4$.
- Per a $k=1$ el sistema és incompatible ja que $3=rang(M)<rang(MA)=4$

b) Per a $k = -4$, el sistema és compatible determinat. El sistema és:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \\ x + y + z + t = -4 \end{cases}$$

l'escrivim:

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 \\ x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \end{cases}$$

Reduïm la matriu per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm: 2fila per 2fila – 1fila, 3 fila per 3fila – 1fila, 4fila per 4fila – 1fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

Així tenim:

$t = \frac{-6}{5}$

$z = \frac{-5-t}{5} = \frac{-19}{25}$

$y = \frac{-4-t-z}{5} = \frac{-51}{125}$

$x = -4-t-z-y = \frac{-204}{125}$

Exercici4:

Considerem el polígon P de vèrtexs A(1,0), B(3,0), C(4,2) i D(2,1) i d'arestes AB, BC, CD i DA.

a) Calculeu les coordenades del polígon resultant d'aplicar a P un escalatge uniforme de raó 3 des del punt (1,0).
b) Calculeu les coordenades del trapezi resultant d'aplicar a P un gir d'angle $\pi/4$ (o sigui, 45º en sentit antihorari) al voltant de l'origen.

Resolució:

a) Per a fer un escalatge des del punt (1,0) primer cal buscar la translació que converteixi el punt (1,0) en l'origen. És la matriu T de la translació de vector (-1,0):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Després cal calcular la matriu E de l'escalatge de raó 3:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment cal desfer la primera translació, és a dir, considerar la inversa de T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Multiplicant les tres matrius amb l'ordre que toca (des de la dreta fins a l'esquerra) obtenim :

$$T^{-1} \cdot E \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Per tant, els transformats dels punts A(1,0), B(3,0), C(4,2) i D(2,1) són:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sigui, són els punts: A'(1,0), B'(7,0), C'(10,6) i D'(4,3).

b) La matriu del gir d'angle gir d'angle $\pi/4$ al voltant de l'origen és

$$\begin{pmatrix} cos\,(\pi/4) & -sin\,(\pi/4) & 0 \\ sin(\pi/4) & cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores el transformat de A(1,0) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformat de B(3,0) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformat de C(4,2) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El transformat de D(2,1) és:

.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sigui els punts:. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$