Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

b) Calcula les arrels cinquenes del complex següent: $z = i$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Resolució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = 1 - \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = arctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\Pi}{3} = 300^o$

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^o}$

Oposat:

$-z = -1 + \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} + 180^o = arctg(-\sqrt{3}) + 180^o = 300^o + 180^o = 480^o = 120^o$

$-z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^o}$

Conjugat:

$\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg(\sqrt{3}) = 60^o$

$\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^o}$

Per tant:

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^o}$

$-z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^o}$

$\overline{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^o}$

b) Escrivim el complex $z = i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{0}\right) = arctg\infty = 90^o$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle ja que la part real i la part imaginària del complex són positives o zero (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 i exemple primer de la página 29 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^o}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1_{90^o}} = 1_{\frac{90^o + 360^o k}{5}} \qquad \text{per a k=0, 1, 2, 3, 4}$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{90^o + 360^o k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 18^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 18^o + 72^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 18^o + 144^o = 162^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 18^o + 216^o = 234^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 18^o + 288^o = 306^o$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $z = i$ són:

$$\boxed{1_{18^o} = 1\cdot(\cos 18^o + i\cdot \sin 18^o) = 0{,}951 + 0{,}309i}$$

$$\boxed{1_{90^o} = 1\cdot(\cos 90^o + i\cdot \sin 90^o) = i}$$

$$\boxed{1_{162^o} = 1\cdot(\cos 162^o + i\cdot \sin 162^o) = -0{,}951 + 0{,}309i}$$

$$\boxed{1_{234^o} = 1\cdot(\cos 234^o + i\cdot \sin 234^o) = -0{,}588 - 0{,}809i}$$

$$\boxed{1_{306^o} = 1\cdot(\cos 306^o + i\cdot \sin 306^o) = 0{,}588 - 0{,}809i}$$

Exercici 2.

Donats els conjunts de vectors de R^3:

A=< $(a,0,0),(0,a,0),(0,0,a)$ >.

B=< $(a,a,a),(0,a,a),(0,0,a)$ >.

a) Trobeu el valor de a per a que A i B siguin base de R^3. Si $a=1$ trobeu les coordenades del vector v=(1,2,3) en cada una de les bases.
b) Calcula la matriu de canvi de base de A a B per $a=1$. Comprova la coherència de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R3.

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{vmatrix} = a^3$$

Així que de nou per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R3

Així doncs tant A com B quan $a \neq 0$ formen una base de R3.

Per a calcular les coordenades de v en A quan $a=1$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=3, ja que és la base canònica. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$

són (1,2,3).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a=1$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=1, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$ són (1,1,1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base C hem de resoldre:

C=B-1·A

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem primer la inversa de la matriu B

$$B^{-1}=\frac{(adj(B))^t}{|B|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem trobar ara ja la matriu de canvi de base.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Ara comprovem els resultats de l'apartat anterior i veiem que efectivament transforma les coordenades de v en A a les coordenades de v en B.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exercici 3.

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases}x+ky+k^2z=0\\(4k+1)x-y-7z=1\\x+y+z=0\end{cases}$$ en funció dels valors de k.

b) Resoleu el sistema per a aquells valors de k que fan que el sistema sigui compatible indeterminat

Resolució:

a) Les matrius de coeficients, A, i ampliada, A', del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&k&k^2&0\\4k+1&-1&-7&1\\1&1&1&0\end{array}\right)$$

I es tracta d'estudiar els rang(A) i rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre k mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&k&k^2\\4k+1&-1&-7\\1&1&1\end{vmatrix}=-1+(4k+1)k^2-7k+k^2+7-k(4k+1)$$
$$=4k^3-2k^2-8k+6.$$

$$4k^3-2k^2-8k+6=0$$
$$2k^3-k^2-4k+3=0$$

Si apliquem la regla de Ruffini observem que el polinomi $2k^3-k^2-4k+3$ té una arrel doble en $k=1$ i que pot factoritzar com

$2k^3 - k^2 - 4k + 3 = (k-1)^2(2k+3)$

I per tant les solucions de $2k^3 - k^2 - 4k + 3 = 0$ són $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k = 1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i observem que la tercera equació és la mateixa que la primera i per tant per tant la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el menor

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-3}{2} - 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$$

i per tant el sistema és incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompable.

b) Es tracta de trobar la solució per al cas $k = 1$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i podem prescindir de la tercera equació perquè és la mateixa que la primera.
Si apliquem el mètode de Gauss i a la segona equació li restem 5 vegades la primera tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant

$$y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$$

i substituint a la primera equació

$$x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z.$$

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Exercici 4.

Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per
$f(x,y,z) = (3x - 2z, -x + 2y + 2z, 2x - 2z)$.

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} 3-t & 0 & -2 \\ -1 & 2-t & 2 \\ 2 & 0 & -2-t \end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix}=$$

$$(2-t)[(3-t)(-2-t)+4]=(2-t)(t^2-t-2)=(2-t)(2-t)(t+1).$$

Així, Q(t) té arrels -1 i 2 amb multiplicitat 2. Per tant, els valors propis de f són -1 i 2.

c) Per veure si f diagonalitza ens caldrà calcular les dimensions dels espais vectorials generats pels vectors propis corresponents.

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & -2 \\ -1 & 2-2 & 2 \\ 2 & 0 & -2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A-(-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+1 & 0 & -2 \\ -1 & 2+1 & 2 \\ 2 & 0 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del primer sistema és: (0,1,0) i (2,0,1). La dimensió de l'espai generat és 2.

Una base de solucions del segon sistema és: (1,-1,2). La dimensió de l'espai generat és 1.

Així com que la dimensió dels espais generats coincideix amb la dimensió de les multiplicitats, l'aplicació lineal diagonalitza.

d) Un cop calculats els vectors propis dels valors propis 2 i -1 a l'apartat anterior, I com que tenim que {(0,1,0), (2,0,1), (1,-1,-2)} és una base de R^3 formada per 3 vector propis de f i en aquesta base la matriu associada a l'aplicació és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$