PEC3

Presentación

Esta PEC profundiza en el concepto de complejidad computacional que cubre los contenidos estudiados en los módulos 6 y 7 de la asignatura. Los ejercicios trabajan los conceptos de medida de complejidad, la reducción y completitud, la clase NP-completo y algunos de los problemas intratables más importantes que se conocen.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado en Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Entender los conceptos de intratabilidad y no-determinismo.
- Conocer las diferentes clases de complejidad y saber clasificar los problemas en cada una de estas.
- Entender el concepto de reducción entre problemas y saber demostrar cuando un problema es NP-completo.
- Reconocer problemas intratables que aparecen de forma habitual en informática y en ingeniería.
- Entender y saber aplicar las técnicas básicas de reducción polinómica de los problemas NP-completos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %) Clasificad los siguientes problemas según su grado de complejidad. Decid si los problemas pertenecen a la clase P o NP.

   a) Dada una instancia de un problema SAT, y una asignación de valores a las variables del problema, determinar si la asignación de variables se satisface.

   b) Dada una instancia de un problema SAT, determinar si existe una solución (asignación de variables al problema que satisfaga la fórmula).

   c) Dado el problema SAT y un problema CLIQUE, determinar si existe un algoritmo determinista con coste polinómico que transforme el problema SAT a un problema CLIQUE.

   d) Dada una instancia de SAT, una Forma Normal Conjuntiva (FNC) con n variables booleanas, y un entero k, decidir si existe una asignación que satisfaga la FNC con un mínimo de k variables booleanas.

   e) Dado un grafo no dirigido, decidir si contiene un CLIQUE con tamaño 2.

Solución:

a) P. Consiste en verificar si la fórmula del problema se puede satisfacer utilitzando una asignación dada. El algoritmo evalua cada cláusula de modo lineal.

b) NP. Es el problema SAT y sabemos por el teorema de Cook que es NP.

c) P. Por definición, la reducción es posible, por lo tanto, el algoritmo simplemente tiene que devolver SI.

d) NP. SAT sería un caso particular del problema, fijando $k = 0$.

e) P. Un CLIQUE de tamaño 2 es simplemente una arista entre dos nodos.

---

2. (Valoración de un 20 %) Dados los siguientes problemas decisionales: CLIQUE, HAMILTONIANO, PARES.
   Decid si son ciertas o falsas la siguientes afirmaciones y justifcad bevemente la respuesta:

   a) La reducción CLIQUE $\leq_p$HAMILTONIANO es posible.

   b) La reducción CLIQUE $\leq_p$PARES es posible.

   c) La reducción PARES $\leq_p$HAMILTONIANO es posible.

   d) La reducción CLIQUE $\leq_p$CLIQUE es posible.

Solución:

a) Cierto. Los dos problemas son NP-completos, por lo tanto polinómicamente equivalentes y por definición es posible reducirlos entre ellos.

b) Falso. Sólo sería cierto si $P = NP$.

c) Cierto. Todo problema en P se puede reducir mediante una reducción $\leq_p$ a un problema NP. Podemos resolver el problema P en tiempo polinómico y si nos da cierto devolvemos un resultado válido del problema NP; si no, devolvemos un resultado inválido.

d) Cierto. Todo problema puede reducirse a si mismo utilizando la función identidad que tiene coste polinómico.

3. (Valoración de un 30 %) Un problema decisional de programación lineal entera PLE está definido por un conjunto de variables enteras y un sistema de inecuaciones lineales. La solución consiste en determinar si existe una asignación de un valor entero a todas las variables, tal que satisfaga todas las inecuaciones. Una instancia de este tipo de problemas podría definirse, sobre les variables x, y y z, con las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &\geq 3 \\ -3x - z &\geq -5 \\ x &\geq 0 \\ -x &\geq -1 \end{aligned} \tag{1}$$

Por ejemplo, este problema PLE es satisfactible para: $x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$.

a) Demuestra que PLE es NP. (Nota: Para demostrar que PLE es NP puedes utilizar la definición 19: La clase NP es el conjunto de todos los problemas verificables en tiempo polinómico.).

b) Sea A una instancia de SAT en FNC. Toda variable x_i de A la traducimos como una variable de decisión y_i de PLE, de manera que $y_i = 1$ si x_i es *cierto*, y $y_i = 0$ si x_i es $falso$. También traducimos toda variable $\neg x_i$ por $1 - y_i$ y todo $\vee$ por un $+$. Todas las cláusulas tienen que ser satifactibles, y por lo tanto añadimos un ≥ 1 al final de la expresión lineal resultante. Finalmente, para forzar una solución donde todas las variables tienen asignado un valor $0 - 1$ podemos introducir las siguientes inecuaciones: $x \geq 0$ y $-x \geq -1$.
Dada la FNC A (2), calcula todas las soluciones que hacen cierta la fórmula A.

$$A = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \tag{2}$$

c) Aplicando la función de reducción propuesta, ¿qué problema PLE le corresponde a la fórmula A? Comprueba que la asignación de variables propuesta en el apartado anterior y con la correspondiente función de reducción hacen que el problema PLE también sea cierto.

d) Comprueba si las propiedades que tienen que satisfacer toda funciones de reducción ($\leq_p$) se cumplen.

Solución:

a) Utilitzando la definición del enunciado utilitzaremos la versión verificadora del problema PLE. El problema que consiste en determinar si una asignación de variables determinada satisface el sistema de inecuacions. El problema pertenece a P. Hacemos un recorrido por todas les inecuaciones y comprobamos que satisface la asignación.

b) $x_1 = FALSO, x_2 = FALSO, x_3 = FALSO$
$x_1 = FALSO, x_2 = CERT, x_3 = FALSO$
$x_1 = FALSO, x_2 = CIERTO, x_3 = CIERTO$
$x_1 = CIERTO, x_2 = CIERTO, x_3 = CIERTO$

c) $x_1 \rightarrow x$
$x_2 \rightarrow y$
$x_3 \rightarrow z$

$$
\begin{aligned}
x + y + (1 - z) &\geq 1 \\
(1 - x) + y &\geq 1 \\
(1 - x) + z &\geq 1 \\
x &\geq 0 \\
-x &\geq -1 \\
y &\geq 0 \\
-y &\geq -1 \\
z &\geq 0 \\
-z &\geq -1
\end{aligned} \tag{3}
$$

Comprobamos que todas las inecuaciones son ciertas. Por ejemplo sustituyendo $x = 0, y = 1, z = 1$.

d) Hemos comprobado que si una instancia del problema SAT es cierta entonces la instancia creada a partir de la función de reducción también es cierta. Si cogemos una instancia de SAT donde no se cumpla p.e. $x_1 = CIERTO, x_2 = CIERTO, x_3 = FALSO$ tenemos que comprobar que el problema PLE tampoco se cumple. En este caso la tercera inecuación no se cumple utilizando la asignación propuesta. Finalmente tenemos que demostrar que la función de reducción tiene un coste polinómico. Lo podemos ver simplemente mirando lo que hace la función de reducción. Hace un recorrido sobre todas las variables y cláusulas del problema SAT y realizando las transformaciones en cada caso. Concretamente, creamos una inecuación por cada cláusula de SAT y dos inecuacions por cada variable. Por lo tanto, la función de reducción es polinómica.

---

4. (Valoración de un 20 %) Sean los siguientes problemas: MOCHILA, SUMAMAS (calcular la suma de un vector de enteros, en su versión decisional), SUMA_SUB y PARTICION.

MOCHILA = { Dado un vector de N pares (tamaño, beneficio) y dos enteros T y B, decidir si existe algún subconjunto de números pares con un tamaño $\leq T$ y un beneficio $\geq B$ }
SUMAMAS={ Dado un vector de N enteros y un entero M, decidir si la suma de todos los elementos del vector es $\geq M$ }
SUMA_SUB={ Dado un conjunto de N enteros C y un entero t, decidir si existe un subconjunto $C' \subseteq C$ tal que la suma de todos los elementos de C' sea igual a t}
PARTICION={ Dado un vector de N enteros C, decidir si existe un subconjunto $C' \subseteq C$ tal que la suma de todos los elementos de C' sea igual a la suma de los elements que no están en C'.}

Decid si las siguientes reducciones son posibles y en caso afirmativo proponed una función de reducción:

a) SUMAMAS $\leq_p$MOCHILA

b) MOCHILA $\leq_p$SUMAMAS

c) SUMA_SUB $\leq_p$PARTICION

Solución:

a) La función de reducción f es la siguiente: dado un vector de N enteros $x_1, \ldots, x_n$ y un entero M, generamos una instancia de MOCHILA con N pares: $(tamaño = 1, beneficio = x_1) \ldots (tamaño = 1, beneficio = x_n)$ y tenemos $T = N$ y $B = M$.

b) La función de reducción no es posible. No podemos reducir un problema NP a un problema P.

c) Sea D, F una instancia del problema SUMA_SUB tal que $S = \sum D$. Ahora creamos el conjunto $DD = D\cup < S+F, 2S-F >$. Si existe un subconjunto $D' \subseteq D$ tal que $\sum D' = F$, entonces DD lo podemos dividir en dos conjuntos $D' \cup 2S - F$ y $D \setminus D' \cup S + F$. El primer conjunto suma $F + (2S - F) = 2S$ y el segundo $(S - F) + (S + F) = 2S$. Si DD lo podemos dividir en dos partes P_1 y P_2, entonces hay un subconjunto de D tal que la suma es F. Dado que $(S+F)+(2S-F) = 3S$ y cada parte suma $2S$, los dos elementos están en subconjuntos diferentes: $2S - F \in P_1$ los otros elementos de P_1 estan en D y suman F.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 6. Complejidad computacional.
- Módulo didáctico 7. Problemas intratables.
- Colección de problemas

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlace: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se debe resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta en cada uno de los apartados. Se valorará tanto la corrección de la respuesta como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Se debe entregar **un único documento** PDF con las respuestes de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC3_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 27/05/2015**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**