ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
15 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $-1+i$

   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{-27}{i}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.1. del módulo impreso, "De la forma binómica a polar". Primero hallamos el módulo:

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

A continuación hallamos el argumento:

Como $a=-1>0$ y $b=1$ tenemos

$$\vartheta=arctg\frac{1}{-1}=arctg(-1)=135^{\circ}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1, 1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1, 1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Por tanto, la respuesta es: $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

Se pide determinar las raíces terceras de $\frac{-27}{i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{-27}{i}=\frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{27i}{1}=27i$$

Para determinar las raíces terceras de $27i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{0^2+(27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\frac{27}{0}=arctg(\infty)=90^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Tenemos, por tanto, que $27i=27_{90^{\circ}}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{27}=3$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=30^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=30^{\circ}+120^{\circ}=150^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=30^{\circ}+240^{\circ}=270^{\circ}$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{3_{30^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{150^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{270^{\circ}}}$$

2. Sea F un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\, a_3 \rangle$$

Y sea $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comprobad que $A = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\}$ es una base de F. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Resolución:

a) Sabemos que la dimensión de F es 2, así solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a F y que son linealmente independientes.

Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rango \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues, A es una base de F.

Para ver si v pertenece a F miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=3, y=-3 y por tanto v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,-3).

b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así pues, si miramos les columnas de la matriz C ya tenemos que los dos vectores de la base B serán:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)

Por tanto B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$
  $\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-3·F1 y F3=F3-2·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ -2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (z+t, z+t, x+y, x+y)$$

a) Hallad la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f).

c) Decid si el vector $u = (1,1,1,1)$ es vector propio de f.

d) Encontrad vectores propios de f de valor propio -2.

e) Estudiad si f diagonaliza y hallad una base de $\mathbb{R}^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Resolución:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) y f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, escribiéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del ker(f) hemos de resolver el sistema A·X=0:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. Es decir, t=-z, y=-x. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) es la dada por los vectores a=(1,-1,0,0),b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) viene dada por a=(1,-1,0,0) y b=(0,0,1,-1).

c) Para comprobar si el vector u es vector propio de f es suficiente multiplicar la matriz A por u y ver si da un múltiplo de u:

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Así, puesto que A·u=2u, tenemos que el vector u es vector propio de f de valor propio 2.

u es vector propio de f de valor propio 2.

d) Usemos el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f de valor propio -2. Encontremos una base del núcleo de la matriz A-(-2)I=A+2I. O sea, resolvamos el sistema (A+2I)X=0:

$$(A+2\cdot I)\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restando la segunda ecuación a la primera queda: 2x-2y=0. O sea, x=y. Restando la cuarta ecuación a la tercera queda: 2z-2t=0. O sea, z=t. Sustituyendo z=t en la primera ecuación queda: 2x+t+t=0. O sea 2x=-2t y x=-t. Las soluciones de este sistema son vectores de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) es vector propio de f de valor propio -2.

e) La aplicación lineal f diagonaliza porqué su matriz en las bases canónicas es simétrica (ver Módulo 4, Sección 8).

Los vectores linealmente independientes a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generan el núcleo. Por lo tanto, a i b son dos vectores propios de f de valor propio 0. Por otra parte, u=(1,1,1,1) es vector propio de f de valor propio 2 y v=(-1,-1,1,1) es vector propio de valor propio -2. Así:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$