EXAMEN 3

1. Responded:

a) Hallad el valor de c para que el número complejo $c + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

b) Resolved la siguiente ecuación y proporcionad los resultados en forma binómica y polar: $x^3 - (1 - i) = 0$.

Solución

a) Primero calculamos el cuadrado del número dado:

$\left(c + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = c^2 + 2c\frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = c^2 + c\sqrt{3}i - \frac{3}{4}$

Ahora agrupamos parte real y parte imaginaria: $c^2 + c\sqrt{3}i - \frac{3}{4} = \left(c^2 - \frac{3}{4}\right) + c\sqrt{3}i$

Hallamos el conjugado del número dado: $c - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Imponemos la condición que se nos da en el enunciado. Que el cuadrado sea igual al conjugado: $\left(c^2 - \frac{3}{4}\right) + c\sqrt{3}i = c - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

E igualamos parte real y parte imaginaria:

$\left.\begin{array}{r} c^2 - \frac{3}{4} = c \\ c\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ De donde podemos afirmar que $c = -\frac{1}{2}$

b) Primero despejamos la incógnita: $x = \sqrt[3]{1 - i}$

Para hallar las raíces terceras de $1 - i$ seguiremos el ejemplo de la página 44 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.

A continuación escribimos el complejo $1 - i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del Módulo 1, sobre la forma polar de los números complejos:

$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{1}\right) = 315^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135° y en 315°. Como el afijo del punto buscado es $(1, -1)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 315°.

Tal y como se recomienda en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando convertimos un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $1 - i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(1, -1)$, por lo cual es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$

Como nos piden las raíces terceras debemos calcular (observemos que en el apartado 3.6.1, en el ejemplo de la página 44 del Módulo 1, se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de -8):

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{315^o + 360^o k}{3}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2$

Esto es, el módulo de las raíces es $\sqrt[6]{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{315^o+360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 105^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 225^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 345^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$\sqrt[6]{2}_{105^\circ}, \sqrt[6]{2}_{225^\circ}, \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

Ahora pasamos los números anteriores a forma binómica:

$\sqrt[6]{2}_{105^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ) = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i) = \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} + \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}i$

$\sqrt[6]{2}_{225^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = \sqrt[6]{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\frac{\sqrt[6]{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt[6]{2}\sqrt{2}}{2}i$

$\sqrt[6]{2}_{345^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ) = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i) = \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4} + \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}i$

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + (a+2)y + 3z = \;\; 1 \\ (a+2)x + (a+1)y - z = \;\; 2 \end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Determinad los valores de α y β de forma que, al añadir al sistema anterior una tercera ecuación de la forma $(2a+5)x+(2a+1)y+\alpha z = \beta$, el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema inicial.

b) Determinad la solución del sistema dado, tal que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) El sistema dado inicialmente:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + (a+2)y + 3z = \;\; 1 \\ (a+2)x + (a+1)y - z = \;\; 2 \end{array}\right\}$$

tiene como matriz de coeficientes y como matriz ampliada las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+2 & 3 & 1 \\ a+2 & a+1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos que el menor de orden dos que se obtiene considerando la primera y la segunda columna siempre es diferente de cero: $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} = -2a-3 \neq 0$. Así pues, podemos afirmar que el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada coinciden y son iguales a 2. Dado que el número de incógnitas del sistema es 3, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12] podemos afirmar que el sistema dado es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

A continuación consideramos el sistema resultante de añadir, al sistema anterior, una tercera ecuación de la forma $(2a+5)x+(2a+1)y+\alpha z=\beta$, es decir:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x+(a+2)y+3z= \ 1 \\ (a+2)x+(a+1)y-z= \ 2 \\ (2a+5)x+(2a+1)y+\alpha z= \ \beta \end{array}\right\}$$

que tiene como matriz de coeficientes, A, y como matriz ampliada, M, las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+2 & 3 & 1 \\ a+2 & a+1 & -1 & 2 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

Si queremos que este nuevo sistema tenga las mismas soluciones que el sistema inicial, tendremos que buscar los valores de α y β que hacen que el sistema sea compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes A, considerando su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha(2a+3)-(12a+18)$$

Notemos que si $\alpha=-6$, entonces $\text{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Si calculamos el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 1 \\ a+2 & a+1 & 2 \\ 2a+5 & 2a+1 & \beta \end{vmatrix} = -\beta(2a+3)+(10a+15)$$

tenemos que para $\beta=5$ este menor se anula y, por lo tanto, se verifica que $\text{rg}(M)=2$.

Así pues, si $\alpha=-6$ y $\beta=5$ se verifica que $\text{rg}(M)=\text{rg}(A)=2\neq$ n^o incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1, obteniendo que este sistema y el sistema dado inicialmente tienen las mismas soluciones.

b) Este apartado se puede resolver de varias formas.

Por ejemplo, una manera es, en primer lugar, resolver el sistema de dos ecuaciones dado inicialmente

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+(a+2)y+3z= \;\; 1\\ (a+2)x+(a+1)y-z= \;\; 2\end{array}\right\} \rightarrow \left(x=\frac{\left(4a^2+9a+5\right)z+\left(a^2+4a+3\right)}{(a+1)(2a+3)}, y=\frac{-(4a+7)z-a}{2a+3}, z\right)$$

y a continuación imponemos que $x+y+z=a$, es decir:

$$\frac{\left(4a^2+9a+5\right)z+\left(a^2+4a+3\right)}{(a+1)(2a+3)}+\frac{-(4a+7)z-a}{3+2a}+z=a \quad \rightarrow \quad z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$$

y sustituyendo este valor de z en las soluciones anteriores, se obtiene la solución que se pide:

$$\left(x=\frac{4a^2+6a-4}{2a+1},\ y=\frac{-4a^2-8a+7}{2a+1},\ z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}\right).$$

Otra manera de proceder, equivalente a la que acabamos de hacer, es resolver directamente el sistema de tres ecuaciones formado por las dos ecuaciones iniciales más la ecuación $x+y+z=a$

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z= \;\; a\\ (a+1)x+(a+2)y+3z= \;\; 1\\ (a+2)x+(a+1)y-z= \;\; 2\end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ a+1 & a+2 & 3 & 1\\ a+2 & a+1 & -1 & 2\end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & -a+2 & -a^2-a+1\\ 0 & -1 & -a-3 & -a^2-2a+2\end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & -a+2 & -a^2-a+1\\ 0 & 0 & -2a-1 & -2a^2-3a+3\end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-(a+1)\cdot F1 \rightarrow F2$, $F3-(a+2)\cdot F1 \rightarrow F3$ (2): $F3+F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z= \;\; a\\ y+(-a+2)\,z= \;\; -a^2-a+1\\ (-2a-1)\,z= \;\; -2a^2-3a+3\end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y despejamos la y obtenemos $y=\frac{-4a^2-8a+7}{2a+1}$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x=\frac{4a^2+6a-4}{2a+1}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x=\frac{4a^2+6a-4}{2a+1}$,	$y=\frac{-4a^2-8a+7}{2a+1}$,	$z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$
Si $a=0$	$x=-4$	$y=7$	$z=-3$
Si $a=1$	$x=2$	$y=-5/3$	$z=2/3$
Si $a=2$	$x=24/5$	$y=-5$	$z=11/5$
Si $a=3$	$x=50/7$	$y=-53/7$	$z=24/7$
Si $a=4$	$x=28/3$	$y=-89/9$	$z=41/9$
Si $a=5$	$x=126/11$	$y=-133/11$	$z=62/11$
Si $a=6$	$x=176/13$	$y=-185/13$	$z=87/13$
Si $a=7$	$x=78/5$	$y=-49/3$	$z=116/15$
Si $a=8$	$x=300/17$	$y=-313/17$	$z=149/17$
Si $a=9$	$x=374/19$	$y=-389/19$	$z=186/19$

3. Sean $e_1=(1,-1,2)$, $e_2=(0,3,-6)$, $e_3=(1,0,0)$ y $e_4=(0,-4,8)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E=<e_1,e_2,e_3,e_4>$. Sea $v=(a+2,2a-2,-4a+4)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP.

a) Calculad la dimensión de E y una base A. Demostrad si el vector v pertenece al subespacio E. En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Encontrad un vector w de forma que $B=\{v,w\}$ sea una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2$$

ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ y los dos menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior [Ver módulo 2, sección 4.5] tienen determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Como base podemos usar $A=\{e_1,e_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior.
Par ver si $v\in E$ resolvemos el sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-2 \\ -4a+4 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x=a+2$ y $y=a$. Por tanto $v\in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+2,a)$.

b) Como w podemos usar el vector e_2, ya que es de E y es linealmente independiente de v (es directo encontrar un menor 2×2 con determinante distinto de 0). Así si escogemos $w = e_2$ tenemos directamente que $B = \{v, w\}$ es una base de E.
Comencemos calculando la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w tenemos que es directamente e_2. Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B \to A} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa [Ver módulo 2, sección 4.7 y sección 3.3]:

$$C_{A \to B} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & a+2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y) = (x + (b-a)(a+1)x + (a+1)^2(a-b)y, (b-a)x + y + (a-b)(a+1)y).$$

Sustituid el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC. Se pide:

a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinad si f es un isomorfismo.

c) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f. ¿Podemos determinar si f es diagonalizable conociendo solo sus valores propios?

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

a) Para calcular $M(f|C, C)$, la matriz de f en la base canónica C de $\mathbb{R}^2$, calculamos las imágenes de los dos vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales": $f(1, 0) = (1 + (b-a)(a+1), b-a)$

$f(0, 1) = ((a+1)^2(a-b), 1 + (a-b)(a+1))$

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} 1 + (b-a)(a+1) & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1 + (a-b)(a+1) \end{pmatrix}$$

La matriz en función de vuestro IDP será pues:

$$
\begin{array}{ll}
a=0 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1+b & -b \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\
a=1 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 2b-1 & 4-4b \\ b-1 & 3-2b \end{pmatrix} \\
a=2 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 3b-5 & 18-9b \\ b-2 & 7-3b \end{pmatrix} \\
a=3 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 4b-11 & 48-16b \\ b-3 & 13-4b \end{pmatrix} \\
a=4 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 5b-19 & 100-25b \\ b-4 & 21-5b \end{pmatrix} \\
a=5 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 6b-29 & 180-36b \\ b-5 & 31-6b \end{pmatrix} \\
a=6 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 7b-41 & 294-49b \\ b-6 & 43-7b \end{pmatrix} \\
a=7 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 8b-55 & 448-64b \\ b-7 & 57-8b \end{pmatrix} \\
a=8 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 9b-71 & 648-81b \\ b-8 & 73-9b \end{pmatrix} \\
a=9 & M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 10b-89 & 900-100b \\ b-9 & 91-10b \end{pmatrix}
\end{array}
$$

b) Como se explica en el apartado "5.Monomorfismos y epimorfismos" una aplicación es un isomorfismo cuando es inyectiva y suprayectiva. Y una manera de saber si la aplicación f es inyectiva y suprayectiva es ver si el rango de su matriz asociada $M(f|C,C)$ es igual a la dimensión del espacio origen y a la del espacio destino. Como este espacio es $\mathbb{R}^2$ en ambos casos, el rango debería ser 2 para que f sea un isomorfismo. Si el determinante de la matriz no es nulo se cumplirá la condición:

$$
\begin{aligned}
& det(M(f|C,C)) = \begin{vmatrix} 1+(b-a)(a+1) & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1+(a-b)(a+1) \end{vmatrix} = \\
& [1+(b-a)(a+1)] \cdot [1+(a-b)(a+1)] - (a+1)^2(a-b) \cdot (b-a) = \\
& [1-(a-b)(a+1)] \cdot [1+(a-b)(a+1)] + (a+1)^2(a-b)^2 = \\
& 1^2 - (a-b)^2(a+1)^2 + (a+1)^2(a-b)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto el rango de $M(f|C,C)$ es 2 y f es un isomorfismo.

c) El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante:

$$
\begin{aligned}
& p(t) = \begin{vmatrix} 1+(b-a)(a+1)-t & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1+(a-b)(a+1)-t \end{vmatrix} = \\
& [1+(b-a)(a+1)-t] \cdot [1+(a-b)(a+1)-t] - (a+1)^2(a-b) \cdot (b-a) = \\
& [1+(b-a)(a+1)] \cdot [1+(a-b)(a+1)] - t[1+(b-a)(a+1)] - t[1+(a-b)(a+1)] + t^2 + (a+1)^2(a-b)^2 = \\
& [1-(a-b)(a+1)] \cdot [1+(a-b)(a+1)] - t - t(b-a)(a+1) - t - t(a-b)(a+1) + t^2 + (a+1)^2(a-b)^2 = \\
& 1-(a-b)^2(a+1)^2 - 2t + t(a-b)(a+1) - t(a-b)(a+1) + t^2 + (a+1)^2(a-b)^2 = \\
& 1-2t+t^2 = (t-1)^2
\end{aligned}
$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $t = 1$. El único valor propio es 1 y tiene multiplicidad 2.

No podemos determinar si f es diagonalizable solo con estos cálculos porque necesitamos saber si el subespacio de vectores propios de f asociados al valor propio 1 tiene dimensión 2. Si no hay dos vectores propios de f linealmente independientes no podremos diagonalizar la matriz de f.