Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinómica dels problemes NP-complets.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 25% = 5% + 10% + 10%)

   Donades les següents funcions que resolen problemes decisionals:

   Entrada G : matriu d'adjacències d'un graf amb n vèrtexs i m arestes.
   funció $Problema1(G)$
     inici
       $Suma \leftarrow 0$
       per $i = 1$ fins n
           per $j = 1$ fins n
               $Suma \leftarrow Suma + G[i, j]$
           fiper
       fiper
       $Total \leftarrow Suma/2$
       retorn $(Total = n - 1)$
     fi

   Entrada G : matriu d'adjacències d'un graf amb n vèrtexs i m arestes.
   funció $Problema2(G)$
     inici
       $Propietat \leftarrow cert$
       per $i = 1$ fins n
           $Propietat \leftarrow Propietat \wedge (G[i, i] = 0)$
       fiper
       retorn $(Propietat)$
     fi

```
Entrada F : Una fórmula booleana en forma normal conjuntiva amb m clàusules sobre
n variables booleanas.
funció Problema3(F)
  inici
    A : array[1..n] of Boolean
    per i = 1 fins n
        A[i] ← fals
    fiper
    repetir
      // "eval" evalua una fórmula per uns valors concrets de les seves variables
      // Cost de "eval": m operacions
      Propietat ← eval(F, A)
      i ← 1
      mentre (A[i] ∧ (i ≤ n)) fer
              A[i] ← fals
              i ← i + 1
      fimentre
      si (i ≤ n) aleshores
                          A[i] ← cert
                          MesSolucions ← cert
                     si_no
                          MesSolucions ← fals
      fisi
    fins (¬MesSolucions ∨ Propietat)
    retorn (Propietat)
  fi
```

Us demanem el següent:

(a) Descriviu quin problema decisional està sent resolt per cada funció.

(b) Indiqueu quina és la complexitat de cada funció usant la notació O en termes de n i m.

(c) Indiqueu si aquests algorismes us permeten decidir si Problema1 i Problema3 pertanyen a P, NP o EXP, o bé si no teniu prou informació per decidir-ho.
Nota: tingueu en compte només la informació que us proporciona aquest pseudocodi, no el vostre coneixement sobre el problema a resoldre.

Solució:

(a) i. Comprovar si el graf té $n-1$ arestes (una de las condicions necessàries, però no suficients, per ser un arbre).

ii. Comprovar que el graf no conté cap llaç (aresta d'un vèrtex cap a sí mateix). Si G conté llaços aleshores és un pseudograf (també ho és si conté arestes múltiples, però aquesta propietat no la comprovem aquí).

iii. SAT, la satisfactibilitat d'una fórmula booleana en forma normal conjuntiva.

(b) i. $O(n^2)$

ii. $O(n)$

iii. $O((n+m)\cdot 2^n)$. La inicialització de l'assignació de valors de veritat té cost $O(n)$. El bucle "repetir" s'executarà en cas pitjor 2^n vegades ($O(2^n)$), una per cada assignació de valors de veritat que no satisfà la fórmula. A cada iteració s'avalua F (amb cost $O(m)$) i es calcula la propera assignació de valors de veritat dins el bucle "mentre" usant O(n) operacions.

(c) i. Donat que l'algorisme té complexitat temporal polinòmica sabem que pertany a P. Com tots els problemes de P pertanyen a NP i EXP, el problema resolt per aquesta funció també pertany a NP i EXP.

ii. Igual que a l'apartat anterior.

iii. L'algorisme té cost temporal exponencial. Això ens permet saber que Problema3 pertany a EXP. Aquest algorisme no ens aporta prou informació per decidir que Problema3 pertany a NP (encara que sabem que SAT $\in$ NP) ni tampoc per a decir si Problema3 pertany o no a P (l'existència d'un algorisme exponencial no impedeix l'existència d'algorismes polinòmics).

---

2. (Valoració d'un 25% = 7% + 6% + 6% + 6%)

Proporcioneu un testimoni i una funció verificadora per als següents problemes decisionals. La funció verificadora que resol el problema decisional es pot donar en forma de pseudocodi o descrivint els passos que ha de realitzar.

(a) *COPRIMERS(x,y)*: Donats dos nombres naturals x i y, decidir si són primers entre ells, és a dir, si no tenen cap divisor en comú.

(b) *NO-DESIGUALTAT-TRIANGULAR(G)*: Donat un graf ponderat (G, w), decidir si G **no** satisfà la desigualtat triangular.

(c) *DESIGUALTAT-TRIANGULAR(G)*: Donat un graf ponderat (G, w), decidir si G satisfà la desigualtat triangular.

Nota: Aquest problema és el complementari del problema anterior.

(d) *SAT-RESTRINGIT(f, k)*: Donada una fórmula booleana f sobre n variables i un valor $k \leq n$, decidir si f pot satisfer-se assignant el valor cert a un màxim de k variables.

Nota: Podeu assumir que dins la vostra funció verificadora podeu avaluar el valor de f per una assignació concreta de valors de veritat.

Solució:

(a) Un testimoni pot ser una parella de llistes de nombres enters (la llista de divisors de x i y). La funció o programa que verifica si la solució és vàlida ha de:

   i. Comprovar que x és el producte de tots els nombres de la primera llista.
   ii. Comprovar que y és el producte de tots els nombres de la segona llista.
   iii. Comprovar que cada nombre de les llistes és un nombre primer.
   iv. Comprovar que les dues llistes no contenen valors comuns.

(b) Un testimoni pot ser una tripleta de tres vèrtexs del graf, v_1, v_2, i v_3, que no satisfan la desigualtat triangular. La funció o programa que verifica si la solució és vàlida ha de:

   i. Comprovar que v_1, v_2, i v_3 són vèrtexs del graf.
   ii. Comprovar que els pesos entre els tres vèrtexs no satisfan la següent desigualtat: $w(v_1, v_3) \leq w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3)$.

(c) En aquest cas, el testimoni seria la funció w o la matriu de costos associada al graf ponderat. La funció o programa que verifica si la solució és vàlida ha d'avaluar totes les tripletes de tres vèrtexs del graf per comprovar que es compleix la desigualtat triangular entre elles.

(d) Un testimoni pot ser una assignació a de valors de veritat a les n variables de la fórmula. La funció o programa que verifica si la solució és vàlida ha de:

   i. Comprovar que $f(a)$ avalua a cert.
   ii. Comptar el nombre de variables que queden assignades a cert en a i comprovar que no n'hi hagi més de k.

---

3. (Valoració d'un 25% = 5% + 5% + 5% + 5% + 5%)

   Indiqueu si són certes o falses les següents afirmacions i justifiqueu breument les respostes:

   (a) Si A i B són problemes decisionals i sabem que $A \leq_p B$, els dos problemes poden pertànyer a EXP.
   (b) La complexitat espacial d'un problema A no ens aporta informació suficient per a decidir si aquest problema $A \in \mathrm{P}$ o $A \notin \mathrm{P}$.
   (c) Seria possible demostrar $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ si trobem un problema de P que no pertany a NP.

(d) Si un algorisme resol un problema decisional en temps polinòmic, aleshores aquest problema pertany a PSPACE.

(e) Si un problema $A \in \mathrm{P}$, qualsevol algorisme que resolgui A té un cost temporal polinòmic.

Solució:

(a) Cert. La reducció polinòmica entre dos problemes no impedeix que tots dos puguin pertànyer a la mateixa classe de complexitat.

(b) Fals. El cost espacial ens ofereix una fita inferior al cost temporal que podem usar per veure si un problema pertany a P. Per exemple, si sabem que un problema **no** pertany a PSPACE, sabem que tampoc pertany a P. D'altra banda, saber que un problema pertany PSPACE no ens permet assegurar que pertanyi a P.

(c) Fals. Per definició, tots els problemes de P pertanyen a NP. Per demostrar que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ cal trobar el contrari: un problema de NP que no pertanyi a P.

(d) Cert. Si un problema decisional es resol en temps polinòmic, pertany a P, i tot problema de P pertany a PSPACE.

(e) Fals. Encara que un problema pertanyi a P, pot haver-hi algorismes ineficients que el resolguin en temps exponencial. Pertànyer a P només significa que el cost del *millor* algorisme que resol el problema és polinòmic.

---

4. (Valoració d'un 25% = 12.5% + 12.5%)

L'empresa fictícia LGO és una gran multinacional dedicada a la venda online. Actualment s'enfronta a diferents problemes tecnològics. Per a tractar de resoldre'ls contracten a GyC, consultora especialitzada en l'aplicació de tècniques de Matemàtica Discreta a problemes del món real.

Les situacions plantejades són les següents:

(a) **Big Data.**

Fa cinc anys, amb la ferma intenció d'endinsar-se en el Big Data, LGO va decidir sensorizar tots els seus camions. Amb la urgència per no quedar-se enrere, van oblidar preparar la forma d'extreure la informació dels camions i, actualment, cada camió guarda la informació dels seus 147 sensors de forma interna.

Per estalviar costos, la consultora GyC, que en el seu moment va instal·lar els sensors en els camions, ha convençut a LGO que el millor que poden fer és instal·lar antenes de curt abast en cada camió perquè es comuniquin entre ells i instal·lar, en "molt pocs" camions, una connexió 4G que es comuniqui amb la xarxa de LGO.

La transmissió és extremadament ràpida entre camions i, amb només creuar-se en una carretera o estar en el mateix magatzem, ja se sincronitzen les dades de tots dos camions. Un camió només envia, a altres camions, dades pròpies i no de la resta de la flota.

LGO vol disposar de les dades el més ràpidament possible. A la pràctica això significa que, cada nit, ens agradaria tenir informació dels camions del dia anterior, és a dir, el dimarts a la nit volem tenir dades del dilluns.

Per minimitzar costos, LGO vol instal·lar les antenes en el menor nombre de camions possible que permeti recollir informació de tots els camions. Com pot LGO determinar el mínim nombre de camions en el qual instal·lar les antenes 4G?

(b) **Priorització d'enviaments.**

La pandèmia ha fet que alguns centres estiguin saturats i no puguin donar sortida a tots els paquets. Alguns clients empresarials, cansats de retards en els lliuraments, han pactat dues mesures: (a) disposar d'un servei urgent de lliurament garantit i (b) rebre una compensació en cas de rebre un paquet amb retard en els paquets no urgents. L'import de la compensació és diferent per a cada client.

En l'últim enviament de cada dia, LGO necessita prioritzar quins paquets hem d'enviar en l'últim camió i quins paquets es quedaran en el magatzem fins a l'endemà (causant una penalització per LGO). Sabem quins paquets són urgents i quins no, el pes de cadascun i, pels no urgents, l'import de la compensació. Ens garanteixen que els paquets urgents sempre cabran dins dels camions LGO (que tenen una capacitat de càrrega de 10 tones) però, pels no urgents, haurem de prioritzar.

Per cada una d'aquestes situacions, identifiqueu un problema complex conegut amb el què realitzar un paral·lelisme. Heu d'especificar:

1) Problema conegut que faries servir per realitzar la conversió.
2) Paral·lelisme entre els elementos de LGO i el problema conegut.
3) Entrada del problema.
4) Sortida del problema.

Solució:

(a) 1) Problema escollit: **Conjunt dominant**.

2) Paral·lelisme: En aquest cas els camions seran els vèrtexs del graf, i existirà una aresta entre vèrtexs del graf si tots dos s'han creuat al llarg del dia d'avui. Necessitem que s'hagin creuat avui per garantir que tenim tota la informació d'ahir sincronitzada. En aquesta situació el que volem és trobar el menor conjunt de vèrtexs tals que, per a tot vèrtex del graf, o bé el vèrtex pertany al conjunt seleccionat, o bé el vèrtex és veí d'un vèrtex en el conjunt seleccionat.
3) Input: Un graf en el qual tenim un camió per cada vèrtex i amb arestes entre cada parell de camions que s'hagin creuat durant el dia o hagin compartit magatzem.
4) Output: Conjunt dominant que garanteix que tot camió ha enviat les seves dades.

(b) 1) Problema escollit: **Motxilla sense fraccionament**.
2) Paral·lelisme: Els paquets no urgents són els elements a introduir en la motxilla i el benefici de cada element és la compensació canviada de signe (una compensació de 100 serà un benefici de -100). El pes de cada element és el pes del paquet. La grandària de la motxilla és la capacitat del camió menys la suma del pes de tots els paquets urgents.
3) Input: Llista de parelles (pes, benefici) per als paquets no urgents i capacitat total (10 tones menys el pes total dels paquets urgents).
4) Output: Selecció de paquets no urgents que respecta el límit de càrrega del camió i maximitza el benefici (és a dir, minimitza la compensació a pagar).

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**. En cas que hagueu consultat recursos externs per respondre algun apartat, és necessari referenciar-los.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 21/12/2020**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**