Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **4**

Data de proposta: 16/05/2014 **Data d´entrega:** ≤ 26/05/2014

Observacions:

- El nom del fitxer ha de ser ser Cognom1_Cognom2_Nom.pdf
- Per ser avaluada, cal escriure la PAC amb un editor de text i entregar-la en format pdf abans de les 24h del 26/05/2014.
- **En la resolució d´aquesta PAC es pot utilitzar la Wiris** (cal afegir la corresponent captura de pantalla amb els comentaris necessaris al document de resolució).
- **Justifiqueu tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**

Valoració:

- Tots els apartats puntuen 1 sobre 10.
- **Aquests exercicis puntuen el 80% de la PAC4. El 20% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades a l'etiqueta PAC4 i que trobareu a Qüestionaris.**

CRITERIS DE VALORACIÓ generals de les PACs

- Els resultats obtinguts per l´estudiant a les PACs es qualificaran en funció de la següent escala numèrica de 0 a 10, amb expressió de dos decimals, a la qual s´afegirà la seva corresponent qualificació qualitativa, segons l´escala ECTS:
  - [0-3): Suspens baix (D)
  - [3-5): Suspens alt (C-)
  - [5-7): Aprovat (C+)
  - [7-9): Notable (B)
  - [9,10]: Excel·lent (A)
- La realització fraudulenta de la PAC comportarà la nota de suspens a la PAC, amb independència del procés disciplinari que pugui seguir-se vers l´estudiant infractor. Recordeu que les PACs s'han de resoldre de forma individual, no es poden formar grups de treball.
- Una vegada publicada la nota definitiva de la PAC, no es pot recuperar ni guardar-se la nota d´aquesta ,ni optar a millorar la qualificació.
- Les respostes incorrectes no descompten res.
- Les PACs entregades fora del termini establert no puntuen i constaran com a no presentades.
- Recordeu que la nota d'AC es computa a partir de les 3 millors PACs que entregueu, de les 4 que hi ha durant el curs. Per optar a MH, però, cal que entregueu les 4 PACs.
- Les respostes a mà i escanejades no tenen cap puntuació.
- La puntuació de cada exercici està indicada a l'enunciat. Dins de cada exercici tots els apartats tenen la mateixa puntuació.

CRITERIS DE VALORACIÓ específics de la PAC 4

En la realització de la PAC 4, es valorarà:

- L´ús correcte i coherent de conceptes teòrics estudiats al mòdul (10% del valor de cada exercici),
- La justificació de tots els procediments que es fan, així com la claredat, concreció i qualitat en l´exposició de la solució dels exercicis (10% del valor de cada exercici),
- La capacitat de presentar adequadament la PAC 4 (ordre, format, correcció ortogràfica i d´estil, recursos tipogràfics utilitzats, taules….) (10% del valor de cada exercici),
- Amb la resta de puntuació es valorarà la correcta resolució de l'exercici.

Recorda que aquesta part de la PAC representa el 80% de la nota final de la PAC i el 20% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC4 que trobareu a Qüestionaris.

SOLUCIÓ

1. (2 punts) Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per les equacions:
$$f(x,y,z) = (x+4y+7z, x+2y+z, 2x+6y+8z).$$
   a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
   b) Calculeu una base dels subespais nucli $Nuc(f)$ i imatge $\mathrm{Im}(f)$. És f injectiva? I exhaustiva ?

2. (2 punts) Sigui $g: R^2 \to R^2$ l'aplicació lineal definida per $g(-1,1) = (2,-2)$ i $g(1,1) = (2,2)$.
   a) Digueu si g diagonalitza.
   b) Calculeu el determinant de la matriu de g en les bases canòniques.

3. (4 punts) Sigui $g: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per
$$g(x,y,z) = (-x-2y+z, -2x-y+z, x+y-2z).$$
   a) Trobeu la matriu de g en les bases canòniques.
   b) Calculeu el polinomi característic de g i els valors propis de g.
   c) Estudieu si g diagonalitza.
   d) Si existeix, trobeu una base de R^3 formada per vectors propis de g.

4. (2 punts) Considerem els punts: $A_1 = (1,0), A_2 = (0,2)$.
   a) Sigui E l'escalatge horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3 des del (0,0). Siguin C_1, C_2 les imatges de A_1, A_2 per E. Calculeu la longitud del vector $C_2 - C_1$.
   b) Sigui G el gir de α radians en sentit antihorari des del punt $(0,b)$. Siguin B_1, B_2 les imatges de A_1, A_2 per G. Calculeu el mòdul del vector $B_2 - B_1$.

Resolució:

1. a) La matriu de f en les bases canòniques e=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) de R^3 és :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&4&7\\1&2&1\\2&6&8\end{pmatrix}}.$$

(*Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)*

b) Per trobar una base del nucli cal resoldre el sistema següent :

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\1&2&1\\2&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Fent Gauss, restem a la segona fila la primera fila i restem a la tercera fila 2 vegades la primera fila. Ens queda el sistema :

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\0&-2&-6\\0&-2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que la tercera fila és la mateixa que la segona i per tant és supèrflua. Si dividim per -2 la segona equació, ens queda $y+3z=0$. Per tant, $y=-3z$. De la primera equació deduïm : $x+4y+7z=0$. O sigui, $x=-4y-7z$. Susbstituïnt $y=-3z$ en $x=-4y-7z$ obtenim : $x=-4(-3z)-7z=12z-7z=5z$. Conclusió, els vectors del nucli són de la forma $(x,y,z)=(5z,-3z,z)=z(5,-3,1)$. Per tant, una base del nucli ve donada pel vector $(5,-3,1)$. Com que el nucli és no nul, podem deduir que f no és injectiva.

Sabem que una base del subespai imatge ve donada per les columnes linealment independents de la matriu A. D'altra banda, la dimensió del nucli més la dimensió de la imatge ha de ser igual a la dimensió de l'espai. Com que el nucli té dimensió 1 i l'espai té dimensió 3, deduïm que la dimensió de la imatge ha de ser 2. Com que les dues primeres columnes de la matriu A són linealment independents, ja podem deduir que són base. Conclusió, una base de la imatge de f és la formada pels vectors $(1,1,2),(4,2,6)$. Fixem-nos que, com que la imatge no és tot l'espai d'arribada, podem deduir que f no és exhaustiva.

2.a) Anomenem $u_1=(-1,1)$ i $u_2=(1,1)$. Tenim que $g(u_1)=-2u_1$ i $g(u_2)=2u_2$. Per tant u_1 és vector propi de g de valor propi -2 i u_2 és vector propi de g de valor propi 2. Com que $\{u_1,u_2\}$ és una base de R^2 formada per vectors propis de g, tenim que g diagonalitza *(veure apunts M5, vectors i valors propis i diagonalització d'un endomorfisme)*. De fet, la matriu de g en les bases $\{u_1,u_2\}$ és:

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}}.$$

(*Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)*

b) Busquem l'expressió de (1,0) com a combinació lineal dels vectors de la base (-1,1) i (1,1). Resolent un sistema lineal trobem: $(1,0)=\frac{-1}{2}(-1,1)+\frac{1}{2}(1,1)$. Per linealitat de g,

$$g(1,0)=\frac{-1}{2}g(-1,1)+\frac{1}{2}g(1,1)=\frac{-1}{2}(2,-2)+\frac{1}{2}(2,2)=(0,2).$$

Anàlogament, com que $(0,1)=\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{1}{2}(1,1)$, aleshores per linealitat de g,

$$g(0,1)=\frac{1}{2}g(-1,1)+\frac{1}{2}g(1,1)=\frac{1}{2}(2,-2)+\frac{1}{2}(2,2)=(2,0).$$

Per tant, $g(1,0)=(0,2)$ i $g(0,1)=(2,0)$. Així la matriu de g en les bases canòniques és:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Fàcilment es comprova que el determinant és igual a -4. Observem que el determinant de la matriu D també és -4. I no és casualitat. És degut a que el determinant de la matriu d'una aplicació lineal és independent de les bases en que està escrita la matriu.

3. **a)** La matriu A de g en les bases canòniques és :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de g és:

$$\boxed{q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} -1-t & -2 & 1 \\ -2 & -1-t & 1 \\ 1 & 1 & -2-t \end{vmatrix}=-t^3-4t^2+t+4=-(t+4)(t+1)(t-1).}$$

Les arrels del polinomi q(t) són -1, 1 i -4. Per tant, els valors propis de g són -1, 1 i -4. *(Veure apunts M5, Càlcul de Valors i Vectors propis.)*

c) Com que g té 3 valors propis diferents, podem concloure que diagonalitza. *(M5, Teorema Diagonalització.)*

d) Calculem els vectors propis de valor propi -1. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-(-1)·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A+I)X=0. El sistema és:

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+1 & -2 & 1 \\ -2 & -1+1 & 1 \\ 1 & 1 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (1,1,2).

Calculem els vectors propis de valor propi 1. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-1·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A-I)X=0. El sistema és:

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-1 & -2 & 1 \\ -2 & -1-1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (1,-1,0).

Calculem ara els vectors propis de valor propi -4. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-(-4)·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A+4I)X=0. El sistema és:

$$(A+4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & -2 & 1 \\ -2 & -1+4 & 1 \\ 1 & 1 & -2+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector (1,1,-1). O sigui:

una base de R^3 formada per vectors propis de g és (1,1,2), (1,-1,0), (1,1,-1).

4. a) La matriu de l'escalatge E horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3 és $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a obtenir C_1, C_2, les imatges dels punts $A_1 = (1,0), A_2 = (0,2)$ per l'escalatge E fem: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La longitud del vector $C_2 - C_1 = (0,6)-(2,0) = (-2,6)$ és doncs $2\sqrt{10}$.

b) Per fer un gir de α radians des del punt (0,b), primer fem la translació que porta el (0,b) a l'origen: *(veure apunts M6, Notació matricial eficient)*: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Després fem el gir de α radians en sentit antihorari:

$$gir = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on $c := \cos(\alpha)$ i $s := \sin(\alpha)$.

Després desfem la translació: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim *G*, el gir de α radians en sentit antihorari des del punt (0,b):

$$G = T^{-1}\cdot gir\cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & bs \\ s & c & b-bc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem B_1, B_2, les imatges dels punts $A_1 = (1,0), A_2 = (0,2)$ pel gir *G*:

$$\begin{pmatrix} c & -s & bs \\ s & c & b-bc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+bs & -2s+bs \\ s+b-bc & 2c+b-bc \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Així, els punts són: $B_1 = (c+bs, s+b-bc)$ i $B_2 = (-2s+bs, 2c+b-bc)$. El vector diferència és, doncs, $B_2 - B_1 = (-c-2s, -s+2c)$ i el seu mòdul és $\sqrt{5}$.