Anàlisi Matemàtica (05.558)

Universitat Oberta de Calalunya (UOC)

http://furniman.blogspot.com

1. Anàlisi de dades de processos físics

1.1 Representació gràfica de funcions.

1) Cal indicar quines magnituds es representen (Ex. temperatura (T) en funció del temps (t))
2) Els eixos de coordenades han d'expressar les unitats corresponents a la magnitud que s'hi representa. (Ex: ºC i segons (s))
3) L'escala en la que es representen les unitats ha de ser adequada.

Interpolar: Calcular un valor entre dos valors d'una taula.
Extrapolar: Calcular un valor més enllà dels límits de la taula.

1.2 Funcions de primer grau. L'equació d'una recta

També coneguda com a funció afí:

$y=ax+b$
$y-y_1=m(x-x_1)$

x és la variable independent i té exponent 1
y és la variable dependent i té exponent 1
a,b,m,x_1,y_1 són constants

Si la relació entre x i y es proporcional podem escriure que (y - constant) es proporcional a (x -constant) $(y = k \cdot x)$

Hi ha proporcionalitat directa entre dues magnituds si augmenten o disminueixen de manera que la relació entre elles es manté constant és a dir $y/x = k$

3 – De vegades es coneix la funció matemàtica

3.2 Funcions de segon grau: l'equació de la paràbola

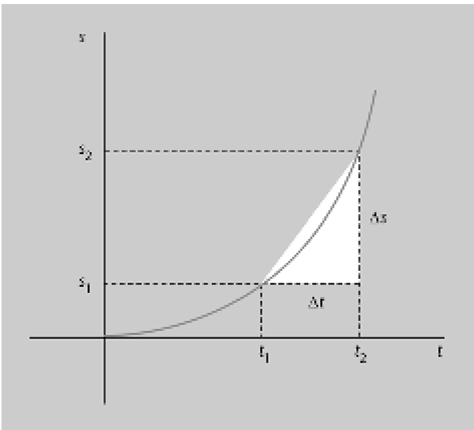
- Una paràbola és la gràfica que resulta de representar un polinomi de grau 2. El més general té la forma $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Si $a < 0$ les paràboles tenen un màxim. Si $a > 0$ tenen un mínim.

3.6 Velocitat mitjana

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

El **pendent** és la tangent que forma la recta amb una recta horitzontal.

$$tg\ \alpha = \frac{catet\ oposat}{catet\ contigu}$$

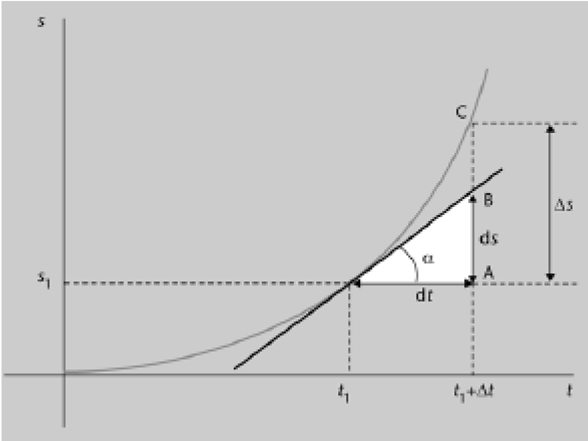


3.9. – Definició de derivada d'una funció en un punt.

La derivada d'una funció s(t) en un punt determinat t (representat s'), és el límit del quocient incremental Δs / Δt quan l'interval de la variable independent tendeix a 0.

$$s' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

4.- Derivada com quocient de diferencials



- El diferencial d'una funció és el que es desplaçaria l'objecte a partir d'un instant t durant un interval de temps Δt si ho fes a velocitat constant
- ds = v · Δt ón v és la velocitat instantània en el punt t
- Per al terme independent el concepte de diferencial i increment és el mateix: dt = Δt, per tant ds = v · dt

4.1.- Diferencial i derivada d'una funció.

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad dy = y'dx$ $\quad y' = tg\ \alpha$

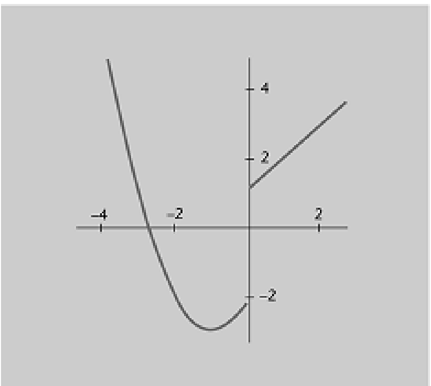
- La derivada d'una funció en un punt és la tangent trigonomètrica de l'angle que forma amb l'eix X la tangent trigonomètrica a la corba en aquest punt.
- La diferencial d'una funció per a un increment donat de la variable independent expressa l'increment del valor de la funció que obtindríem si el pendent de la funció es mantingués constant en tot l'increment de la variable independent.

4.3.- Continuïtat, derivabilitat.

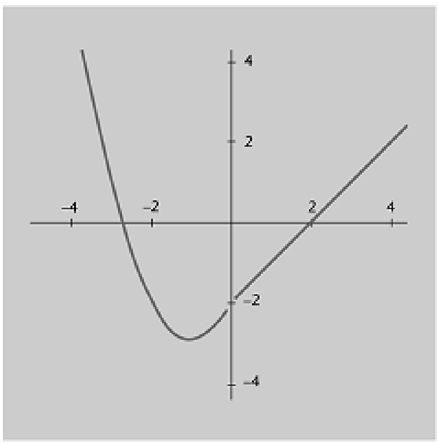
- Si una funció té el mateix límit pels dos costats i el valor és finit, diem que hi ha el límit de la funció en aquest punt. A més si el valor coincideix amb el valor de la funció en aquest punt diem que la funció és **continua.**

$$\lim_{x\to a^+} y(x) = \lim_{x\to a^-} y(x) = \lim_{x\to a} y(x) = y(a)$$

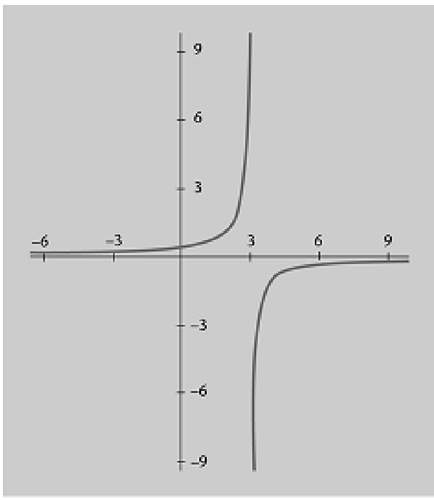
- Si els límits laterals no coincideixen diem que la funció presenta una **discontinuïtat de salt.**
- Si els límits laterals coincideixen però no el valor de la funció diem que la funció presenta una **discontinuïtat evitable** en aquest punt.
- Quan el límit d'una funció en un punt és +∞ o -∞, diem que la funció presenta una **discontinuïtat assimptòtica**.



Discontinuïtat de salt



Discontinuïtat evitable



Discontinuïtat Assimptòtica

- Si una funció és derivable en un punt, llavors és **continua** en aquell punt. La proposició inversa no és certa.

5.- Acceleracions

5.1.- Derivades d'ordre superior

Per a una funció qualsevol y=y(x), podrem tenir un nombre il·limitat de derivades y',y'',y''',y^{IV},y^{V},...
També es pot escriure com:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^{(iv)}y}{dx^{(iv)}}, \frac{d^{(v)}y}{dx^{(v)}} \cdots \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$$

5.2.- Propietats de les funcions derivades i derivades de les funcions elementals.

Funció, y	**Derivada, y'**	
K · y	K · y'	La derivada d'una funció multiplicada per una constant és el producte d'aquesta constant per la derivada de la funció.
y + z	y' + z'	La derivada d'una suma de funcions és la suma de les derivades de cada funció.
uv	u'v + uv'	La derivada d'un producte de dues funcions és igual a la primera funció per la derivada de la segona funció, més la derivada de la primera funció multiplicada per la segona funció.
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$	La derivada d'un quocient de dues funcions és igual al denominador multiplicat per la derivada del numerador, menys la funció del numerador multiplicada per la derivada del denominador, i tot això dividit pel quadrat del denominador.

Funció, y=y(u) amb u=u(x). És a dir, y=y(u(x))	**Derivada, $y' = \frac{dy}{dx}$** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$	
y = K	y' = 0	La derivada d'una constant és 0.
y = x	y'=1	
y = u^m	y'=mu^{m-1}u'	La derivada d'una potència d'una funció de x és igual a l'exponent, per la base elevada a l'exponent, menys una unitat, per la derivada respecte a x de la funció.
y = e^u	y' = u' e^u	La derivada de l'exponencial d'una funció és igual a l'exponencial per la derivada de la funció.
y = a^u	y'= a^u u' ln a	La derivada d'una potència de base *a* d'una funció és igual a la potència de base *a* de la funció pel logaritme neperià de la base i per la derivada de la funció.
y = ln u	$y' = \frac{u'}{u}$	La derivada del logaritme neperià d'una funció és igual a la inversa de la funció, multiplicada per la derivada de la funció.
y = $\log_a u$	$y' = \frac{u'}{u}\log_a e$	La derivada del logaritme en base *a* d'una funció és igual a la inversa de la funció, multiplicada per la derivada de la funció i pel logaritme en base *a* del nombre *e*.
y = sin u	y'=u' cos u	La derivada del sinus d'una funció és igual al cosinus de la funció, per la derivada de la funció.
y = cos u	y' = -u' sin u	La derivada del cosinus d'una funció és igual a menys el sinus de la funció, per la derivada de la funció.
y = tan u	$y' = \frac{u'}{cos^2u}$	
y = arcsin u	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
y = arccos u	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
y = arctan u	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	

7.- Nocions sobre funcions de diverses variables

7.1.- Funcions de més d'una variable

Derivades parcials

- La derivada f'(x) d'una funció d'una variable f(x) representa el ritme de canvi de la funció en mesura que canvia x.

Derivades parcials de primer ordre

- Ex: $f(x,y) = 2x^2y^3$

  a) Considerem y una constant i derivem x

  $f_x(x,y) = 4xy^3 + 0 \cdot 2x^2 = 4xy^3$; $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 4xy^3$

  b) Considerem x una constant i derivem y

  $f_y(x,y) = 0 \cdot y^3 + 3y^2 \cdot 2x^2 = 6x^2y^2$

- Sempre hem d'indicar sobre quina variable estem derivant.
- La definició formal de la derivada parcial és similar a la derivada total:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \;\; ; \;\; f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \;\; ;$$

- Les derivades parcials es representen com a quocient d'una lletra similar a una δ i no amb una d.

Derivació implícita

- Podem trobar la derivada d'una funció implícita, p.ex. 4x+3y=0 sense necessitat de trobar y(x)
- Per això derivem respecte a x i quan derivem y afegim dy/dx.
- Podem anomenar a dy/dx com a y'. Després aïllem g'.

Interpretació de les derivades parcials

- Les interpretacions de derivades de funcions reals d'una variable són vàlides per a funcions de diverses variables.
- Les derivades parcials representen el ritme de canvi de la funció per a canvis de la variable respecte a la qual derivem, de manera que es altres variables es mantinguin constants.
- La derivada parcial $f_x(a,b)$ és el pendent de la corba que resulta de tallar la funció f(x,y) amb el pla y=b en el punt (a,b).
- La derivada parcial $f_y(a,b)$ és el pendent de la corba que resulta de tallar la funció f(x,y) amb el pla x=a en el punt (a,b).

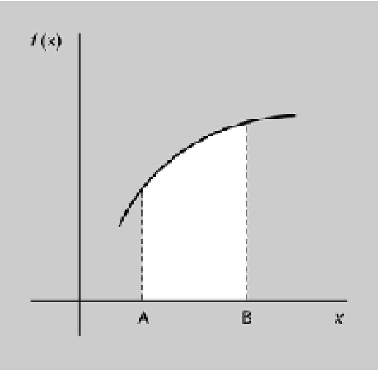
3.- Propietats de les integrals i funcions primitives de funcions elementals.

Integral, $\int f(x) \cdot dx$	Enunciat (integral)
$\int A \cdot y \cdot dx = A \int y \cdot dx$	La integral del producte d'una funció per una constant és igual a la constant multiplicada per la integral de la funció.
$\int (y+z) \cdot dx = \int y \cdot dx + \int z \cdot dx$	La integral d'una suma de funcions és la suma de les integrals de cada funció.
$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$ (regla d'integració per parts)	La integral d'una funció multiplicada per la derivada d'una altra funció és igual al producte de la funció per la primitiva de la funció derivada, menys la integral de la primitiva anterior per la derivada de la primera funció.

Integral, $\int f(x) \cdot dx$	Enunciat (integral)
$\int k \, dx = kx + C$	La integral d'una constant és ella mateixa multiplicada per la variable d'integració, sumada a una constant arbitrària.
$\int u' u^m \, dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad m \neq -1$	La integral d'una potència d'una funció *u*, que estigui multiplicada per la derivada de la funció, és igual a la base elevada a l'exponent més una unitat, dividit per l'exponent més una unitat, i tot sumat a una constant arbitrària. El resultat és vàlid només si l'exponent no és igual a menys un.
$\int e^x \, dx = e^x + C$	La integral de la funció exponencial és la mateixa funció, sumada a una constant arbitrària.
$\int u' e^u \, dx = e^u + C$	La integral de l'exponencial d'una funció per la derivada d'aquesta funció és igual a l'exponencial de la funció, sumada a una constant arbitrària.
$\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$	La integral de l'exponencial en base *a* d'una funció, per la derivada d'aquesta funció, és igual a l'exponencial en base *a* de la funció, dividida pel logaritme neperià de la base i sumada a una constant arbitrària.
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	La integral de la inversa de x és el logaritme neperià del valor absolut de x, sumat a una constant arbitrària.
$\int \frac{u'}{u} dx = \ln \lvert u \rvert + C$	La integral de la inversa d'una funció, multiplicada per la derivada de la mateixa funció és igual al logaritme neperià del valor absolut d'aquesta funció, sumat a una constant arbitrària.
$\int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$	La integral del sinus d'una funció, multiplicada per la derivada de la funció, és igual a menys el cosinus de la funció, sumat a una constant arbitrària.
$\int u' \cos u \, dx = \sin u + C$	La integral del cosinus d'una funció, multiplicada per la derivada de la funció, és igual al sinus de la funció, sumat a una constant arbitrària.
$\int u' \tan u \, dx = -\ln \lvert \cos u \rvert + C$	
$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \arcsin \frac{u}{a} + C$	
$\int \frac{u'}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	

2.- Concepte d'integral. Teorema fonamental del càlcul.

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\int_A^B f(x)dx = F(x)\Big|_A^B = \text{F(B)-F(A)} \quad \text{amb } F'(x) = f(x)$$

2.1.- Significat geomètric de la integral

- Una integral definida dóna el valor de l'àrea definida entre la corba que representa la funció que estem integrant i l'eix d'abscisses, calculada entre els extrems d'integració, sempre que f(x) no sigui negativa.

Integral indefinida

- f y(x)dx, no especifica l'interval per al que la calculem.

- La integral indefinida ens dona la funció primitiva de la funció f(x), és a dir, la funció F(x) la derivada de la qual coincideix amb y(x)

f y(x)dx = F(x) amb F'(x)=y(x)

- Com que la derivada d'una constant és nul·la, existeixen infinites primitives per tant hem d'escriure: f y(x)dx = F(x) + C

5.- Explorem el concepte de derivada

5.1.- Màxims i mínims d'una funció.

Si volem calcular quan serà màxima o mínima una funció, només hem de veure per a quins valors de la variable independent s'anul·larà la derivada de la funció. y'=0

5.2.-Determinar els zeros d'una funció.

Màxims i mínims → y' (x)=0 // Talls amb les X: y(x)=0

5.3.- Mètode de Newton per a trobar els zeros d'una funció.

$$x_1 = x_A - \frac{y_A}{y'_A} \quad , \quad x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y'_1} \quad , \quad x_3 = x_2 - \frac{y_2}{y'_2} \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{y'_n} \quad n \geq 0$$

- x_1 serà un punt que escollirem en un interval prop de zero.
- El procés es repeteix fins que el valor obtingut convergeix cap a la solució.
- La convergència és aplicable quan algunes xifres decimals de la solució no canvien a partir d'una iteració.
- Potser que el mètode de Newton no convergeixi:
  - Si al iterar el procés, els punt que s'obtenen s'allunyen del zero de la funció.
  - La derivada de la funció s'anul·la per algun dels punts.
- Si el mètode de Newton no convergeix podem reduïr l'interval en que la funció canvia de signe i escollir un altre punt per començar el procés iteratiu.

Cap 3. Funció Racional

1.- Introducció

- Una funció racional és un quocient de polinomis $\frac{p(x)}{q(x)}$ irreductible.
- El Domini són tots els punts excepte aquells que anul·len el denominador.

2.- Resolució d'integrals de funcions racionals

2.1.- Grau numerador ≥ grau del denominador

Dividirem polinomis i expressarem segon la fórmula de comprovació de resultats.

Ex : $\frac{3x^3+1}{x^2-3x-2}$

D = $3x^3 + 1$
d = x^2-3x-2 D = d · C + r $\frac{D}{d}=\frac{d \cdot C}{d}+\frac{r}{d}$ $\frac{D}{d}=C+\frac{r}{d}$
C= 3x+9
r = 21x-17

$$\frac{3x^3+1}{x^2-3x-2}=(3x+9)+\frac{21x-17}{x^2-3x-2}$$

1. Resolem l'integral:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-3x-2}dx=\int 3x+9dx+\int \frac{21x-17}{x^2-3x-2}dx$$

2.2.- Grau numerador < grau del denominador

1. Descomposem el denominador.

   a. Si el denomindor és del tipus (x-1)(x+1)

   $$\frac{5x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

   b. Si el denominador és del tipus $(x-1)^2(x+1)$

   $$\frac{5x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}$$

   c. Si el denominador és del tipus x^2+x+1

   $$\frac{5x+1}{x^2+x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}$$

   d. Si el denominador és del tipus $(x^2+x+1)^2$

   $$\frac{5x+1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

2. Sumem els termes i trobem l'equació amb el numerador:

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

5x + 1 = A(x-2)+B(x-1) A=2; B= 3

3. Resolem la nova integral:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-2}=\int \frac{2}{x-1}+\int \frac{3}{x-2}$$

2.3.- Resolució de integrals típiques que surten per aquest mètode.

Basicament hem d'anar a una integral tipus logaritme o arctangent

2.3.1.- Tipus logaritme

Es tracta de forçar alguna cosa del tipus: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|x|$

2.3.2.- Tipus denominador elevat a x

Es tracta de forçar alguna cosa del tipus: $\int \frac{1}{(x+n)^2} dx = \int (\mathrm{x}+\mathrm{n})^{-2}\, dx = \frac{(\mathrm{x}+\mathrm{n})^{-2+1}}{-2+1}$

Cap5. Modellus

2.4.- Càlcul amb modellus

Una equació diferencial de variables separables

- Una equació diferencial, és una equació que conté derivada de funcions.
- Les equacions diferencials de variables separades són equacions diferencials no lineals de primer ordre.
- Es poden escriure com:
  - $f(y) = \frac{dy}{dx} = g(x) \quad ó \quad f(y)dy = g(x)dx \quad i\ és\ resol \quad \int f(y)dy = \int g(x)dx$
- Com veiem tota dependència en x queda en el membre de la dreta i la de y a l'esquerra.
- Per a que l'equació diferencial sigui separable, totes les y de l'equació diferencial han d'estar multiplicades per la derivada d'y i totes les x de l'equació són a l'altre costat del signe igual.
- Haurem de comprovar la validesa de l' interval de la solució ja que la majoria de solucions que obtindrem no seran vàlides per a qualsevol valor d'x.

Cap 6.- Aplicació de les derivades

1.- Aplicació de les derivades

1.1.- Ritme de canvi

- Si la derivada de la funció és positiva a un punt, en aquest punt creix.
- Si la derivada de la funció és negativa a un punt, en aquest punt decreix.
- Si es 0, ni creix ni decreix (és un punt crític)

1.2.- Punts crítics

- Seran aquells punts de la funció on la derivada és 0 ó no té solució
- Si la derivada no té solució en un punt, per a que sigui punt crític, la funció ha de tenir solució en aquell punt.

1.3.- Màxims i mínims

Teorema del valor extrem

Si una funció és continua en un interval, existirà un màxim i un mínim absolut.

Teorema de Fermat

Si una funció té un extrem relatiu a un punt i la derivada en aquest punt existeix, el punt serà un punt crític. A més la funció de la derivada en aquest punt serà 0.

1.4.- Càlcul d'extrems absoluts

1) Verificarem que la funció és continua a l'interval [a,b]
2) Trobarem els punts crítics f(x) en l'interval [a,b]
3)Avaluarem la funció en els punts crítics i els extrems de l'interval.

4) Veurem en quin punt la funció pren el valor més gran i més petit.

1.5.- Significat geomètric de la segona derivada: concavitat i convexitat

- Si f''(x)>0 és cóncava
- Si f''(x)<0 és convexa
- Si la segona derivada és 0 o no existeix hi ha un **punt d'inflexió**

Polinomi de Taylor

1.- Introducció

$$Error\ Abs = |p(x) - f(x)| \qquad Error\ Relatiu = \frac{|p(x) - f(x)|}{f(x)} \quad ó \quad 100 * \frac{|p(x) - f(x)|}{f(x)}\%$$

2.- Fórmula de Taylor

2.2.- Definició del polinomi de Taylor

$$pn(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2.3.- Resta o residu d'un polinomi de Taylor

- El residu d'un polinomi de Taylor serà la diferéncia entre el polinomi el resultat exacte de la funció.

3.- Apliquem la fórmula de Taylor a funcions triogonomètriques

3.2.- Fòrmula de Taylor per a la funció cosinus.

- Una funció és **parella** si f(x) = f(-x)
- Una funció és **imparella** si (f-x)=-f(x)

4.- Estimació d'errors. La funció exponencial, per exemple

- Per a trobar l'error en un polinomi d Taylor només hem de calcular un pas més, pero en comptes de fer $P_n(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ farem $|R_n(x)| = \frac{e^z}{n+1!}|(x-a)^{n+1}|$ sent e^z el resultat del polinomi de Taylor.

- Es a dir, es fa un pas més del polinomi de Taylor amb x al punt cercat, pero sense resoldre el numerador:
  Ex:

  $x = 1{,}2 \qquad |R_e(1{,}2)| = \frac{f^{iV}(c)}{4!}(0{,}2)^4$

  Després es trova la fita máxima o m,ínima (a < c < 1,2)

  Resolem amb f^{iv}(c) - amb c fita maxima.

Integració Impròpia

1.- La integral definida com una área

Discontinuïtat evitable

No passa res, s'ignora el punt.

Discontinuïtat de salt

Només cal fer la suma de les dues integrals definides en cada intervalo n la funció és continua.

2.- Definició d'integral impròpia amb discontinuïtats asimptòtiques

Discontinuïtat en l'extrem inferior de l'interval

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to a^+}\int_M^b f(x)dx$$

- Si el límit existeix i és finit diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari diem que és divergent.

Discontinuïtat en l'extrem superior de l'interval

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to b^-}\int_a^M f(x)dx$$

- Si el límit existeix i és finit diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari diem que és divergent.

Discontinuïtat asimptòtica dins de l'interval

- I un funció és continua a [a,b] i presenta una discontinuïtat asimptòtica a un punt c, separem les dues integrals.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- I ara es tracten les integrals con en els punts anterior.
- Si alguna de les integrals impròpies de la dreta divergeix, aleshores direm que la integral imptòpia de l'esquerra divergeix.

Annex

Arctan ∞ = π/2

Ln ∞ = ∞