Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer els principals conceptes de combinatòria.
- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%=5%+%5+10%)

   (a) Considerem el conjunt $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i el conjunt $B = \{1, \ldots, 10\}$.

   i. Quantes funcions d'A a B hi ha? Quantes d'aquestes funcions són injectives? I quantes són bijectives?

   ii. Quantes funcions $f : A \to B$ compleixen que $f(a) = 3$ i $f(b) = 5$? Quantes d'aquestes funcions són injectives?

   (b) Quants nombres capicua naturals existeixen de fins a vuit xifres decimals? Calculeu primer quants nombres capicua hi ha d'una xifra, de dues xifres, . . . , i de vuit xifres. Un nombre es capicua si a l'invertir l'ordre de les seves xifres obtenim el mateix nombre.

Solució:

(a) i. Hi ha $VR(10, 6) = 10^6 = 1000000$ funcions d'A a B, de les quals $V(10, 6) = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 151200$ són injectives. No n'hi ha cap de bijectiva, ja que els conjunts A i B no tenen el mateix nombre d'elements.

ii. Hi ha $10^4 = 10000$ funcions que compleixen aquesta condició, i d'aquestes n'hi ha $8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 1680$ que són injectives.

(b) Hi ha exactament 9 nombres capicua d'una xifra, i hi ha el mateix nombre de dues xifres. De tres o quatre xifres, hi ha el mateix nombre de capicues, $9 \cdot 10 = 90$. De la mateixa manera, de cinc o sis xifres n'hi ha $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, i de set o vuit n'hi ha $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Per tant, en total hi ha $2(9 + 90 + 900 + 9000) = 19998$ nombres que són capicua.

---

2. (Valoració d'un 20%=2%+5%+5%+5%+3%)

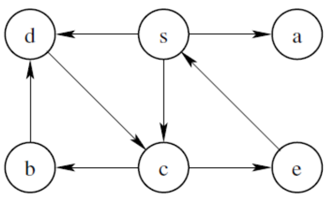
   Considereu una matriu quadrada $M = (a_{ij})$ de mida $n \times n$, on els coeficients són valors enters. Considereu el següent algorisme:

```
funció Func(M)
  inici
    resultat ← 0
    per i ← 1 fins n
      sum ← 0
      per j ← 1 fins n
        sum ← sum + M[i, j]
      fiper
      si sum > resultat aleshores
        resultat ← sum
      fisi
    fiper
    retorn resultat
  fi
```

(a) Calculeu el resultat de la crida Func(M_1) si

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculeu la matriu d'adjacència M_2 del següent graf dirigit amb vèrtexs $V = \{a, b, c, d, e, s\}$ i el resultat de la crida Func(M_2):



(c) Si M és la matriu d'adjacència d'un graf G. Què calcula l'algorisme respecte de G?

(d) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme en funció d'n, i ompliu la següent taula com a resum:

Línia	Cost
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
Total	

(e) Determineu, en funció d'n, la complexitat de l'algorisme.

Solució:

(a) El resultat de la crida és $Func(M_1) = 4$.

(b) La matriu d'adjacència del graf donat és

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i $Func(M_2) = 3$.

(c) L'algorisme calcula el grau màxim d'un graf G, si M és la matriu d'adjacències del graf. Si el graf és dirigit, l'algorisme retorna el grau de sortida màxim.

(d) La següent taula mostra el nombre d'operacions que es fan a cada línia de l'algorisme:

Línia	Cost
3	1
4	$2n+2$
5	n
6	$(2n+2)n = 2n^2 + 2n$
7	$3n^2$
8	0
9	n
10	n
11	0
12	0
13	1
Total	$5n^2 + 7n + 4$

(e) En funció d'n, d'acord amb l'apartat anterior, la complexitat és $O(n^2)$.

---

3. (Valoració d'un 20%=10%+5%+5%)

   (a) Siguin s_1, s_2, s_3 i s_4 les següents seqüències de nombres enters:

      i. s_1: 6,6,5,4,4,3,3,3,3,3,3
      ii. s_2: 6,6,5,5,4,3,3,3,3,3,3
      iii. s_3: 9,9,8,8,6,3,3,3,3,3,3
      iv. s_4: 4,2,2,1,1,1,1,1,1

   Determineu quines de les seqüències anteriors són gràfiques. Per a les seqüències que són gràfiques, determineu l'ordre, la mida i si el graf corresponent a la seqüència pot ser connex. Ompliu la següent taula com a resum, però igualment justifiqueu totes les respostes i no doneu només la taula de resum com a solució.

	és gràfica	ordre	mida	connex
s_1				
s_2				
s_3				
s_4				

   (b) Per a la primera seqüència que és gràfica, doneu un graf G que tingui aquesta seqüència de graus, i justifiqueu si el graf G és bipartit.

   (c) Doneu un graf amb la mateixa seqüència gràfica que el graf G de l'apartat anterior, però que no sigui isomorf a G. Justifiqueu perquè no és isomorf.

Solució:

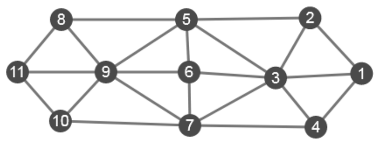
(a) La seqüència s_1 no és gràfica ja que la suma de tots els valors $6+6+5+4+4+3+3+3+3+3+3 = 43$ no és parell, o equivalentment, conté un nombre senar de nombres senars. Aplicant l'algorisme de Havel-Hakimi, podem comprovar si la resta de seqüències són gràfiques o no:

s_2: 6,6,5,5,4,3,3,3,3,3,3	s_3: 9,9,8,8,6,3,3,3,3,3,3	s_4: 4,2,2,1,1,1,1,1,1
5,4,4,3,2,2,3,3,3,3	8,7,7,5,2,2,2,2,2,3	1,1,0,0,1,1,1,1
5,4,4,3,3,3,3,3,2,2	8,7,7,5,3,2,2,2,2,2	1,1,1,1,1,1,0,0
3,3,2,2,2,3,3,2,2	6,6,4,2,1,1,1,1,2	0,1,1,1,1,0,0
3,3,3,3,2,2,2,2,2	6,6,4,2,2,1,1,1,1	1,1,1,1,0,0,0
2,2,2,2,2,2,2,2	5,3,1,1,0,0,1,1	0,1,1,0,0,0
1,1,2,2,2,2,2	5,3,1,1,1,1,0,0	1,1,0,0,0,0
2,2,2,2,2,1,1	2,0,0,0,0,0,0	0,0,0,0,0
1,1,2,2,1,1	-1,-1,0,0,0,0	és gràfica
2,2,1,1,1,1	no és gràfica	
1,0,1,1,1		
1,1,1,1,0		
0,1,1,0		
1,1,0,0		
0,0,0		
és gràfica		

Per la seqüència s_2 tenim que $6+6+5+5+4+3+3+3+3+3+3 = 44$, per tant la mida és 22. Per s_4 la mida és 7 ja que $4+2+2+1+1+1+1+1+1 = 14$. Un graf amb 9 vèrtexs, si té menys de 8 arestes no pot ser connex. Per tant, obtenim la següent taula resum:

	és gràfica	ordre	mida	connex
s_1	no		-	-
s_2	sí	11	22	sí
s_3	no		-	-
s_4	sí	9	7	no

(b) Per exemple, el graf següent G té s_2 com a seqüència gràfica: El graf no és bipartit ja que té



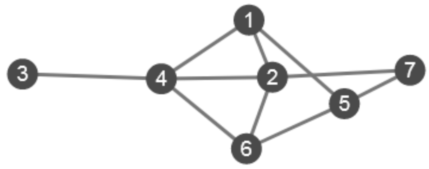
cicles de longitud senar, per exemple, $\{1, 3, 4\}$.

(c) Per exemple, si en el graf anterior G eliminem l'aresta que va del vèrtex 1 al 3, i l'aresta del vèrtex 9 al 11; i afegim una aresta entre els vèrtexs 1 i 11, i una altra entre els vèrtexs 3 i 9, obtenim un graf amb la mateixa seqüència gràfica, però no és isomorf a G. Fixem-nos que en el nou graf, els dos vèrtexs de grau 6 són adjacents, però en el graf G no estan connectats.

---

4. (Valoració d'un 20%=10%+5%+5%)

   Sigui G el graf següent:



   (a) Doneu el recorregut BFS per al graf G començant amb el vèrtex 5, triant sempre el vèrtex menor en cas de poder escollir més d'un vèrtex en el mateix pas de l'algorisme. És també 5671423 un recorregut BFS per al graf G? I el recorregut 5126743?

   (b) Quins d'aquests dos algorismes (BFS/DFS) es poden fer servir per calcular la distància mínima entre dos vèrtexs d'un graf, si totes les arestes tenen el mateix pes? Determineu la distància mínima entre els vèrtexs 3 i 5 del graf G, si totes les arestes tenen pes 10.

   (c) Quins d'aquests dos algorismes (BFS/DFS) es poden fer servir per saber si un graf és connex o determinar el nombre de components connexes? I per saber si és bipartit?

Solució:

(a) El recorregut BFS per al graf G és 5167243 i la taula següent mostra la simulació en l'aplicació de l'algorisme:

Q	Vèrtex afegit	Vèrtex eliminat	*dist*
5	5	-	[5]
51	1	-	[5,1]
516	6	-	[5,1,6]
5167	7	-	[5,1,6,7]
167	-	5	[5,1,6,7]
1672	2	-	[5,1,6,7,2]
16724	4	-	[5,1,6,7,2,4]
6724	-	1	[5,1,6,7,2,4]
724	-	6	[5,1,6,7,2,4]
24	-	7	[5,1,6,7,2,4]
4	-	2	[5,1,6,7,2,4]
43	3	-	[5,1,6,7,2,4,3]
3	-	4	[5,1,6,7,2,4,3]
$\emptyset$	-	3	[5,1,6,7,2,4,3]

El recorregut 5671423 és també un recorregut BFS per al graf G, però en canvi 5126743 no ho és. En el primer cas, simplement s'han intercanviat d'ordre els tres vèrtexs 1, 6, 7 adjacents al vèrtex inicial 5 i que per tant estan a la mateixa profunditat 1; i els dos vèrtexs a profunditat 2, adjacents als vèrtexs 1, 6, 7 i que per tant estan a profunditat 2. En el segon cas, apareix el vèrtex 2 que està a profunditat 2 abans del vèrtex 6 i 7 que es troben a profunditat 1.

(b) Només l'algorisme BFS pot servir també per determinar la distància mínima entre dos vèrtexs, sempre i quan totes les arestes del graf tinguin el mateix pes. Com que l'exploració es fa en amplada prioritària, el nivell de profunditat en que s'ha explorat un vèrtex coincideix amb la distància mínima que hi ha fins al vèrtex a partir del qual s'ha aplicat l'algorisme BFS. Així, la distància mínima entre el vèrtex 3 i el vèrtex 5 és 30 ja que ha de passar abans per 4 i 1.

(c) Els dos algorismes es poden adaptar i fer servir per saber si el graf és connex o per determinar el nombre de components connexes. De la mateixa manera, també amb els dos algorismes es pot saber si un graf és bipartit.

---

5. (Valoració d'un 20%=10%+5%+5%)

Sigui G el graf dirigit amb matriu de costos representada per la següent taula, on l'entrada de la fila i i columna j representa el cost de l'arc del vèrtex corresponent de la fila i al corresponent de la columna j.

(a) Aplicant l'algorisme de Dijkstra, quina és la distància mínima per anar del punt origen G al punt destinació A? Utilitzeu la taula següent per resoldre l'exercici.

A	B	C	D	E	F	G
(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	$(0,G)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	–	38	–	16	–	–
B	–	0	–	36	8	23	–
C	–	–	0	49	46	–	–
D	–	16	–	0	–	6	–
E	37	–	–	6	0	13	–
F	5	9	–	–	19	0	8
G	48	12	3	47	–	36	0

(b) A partir de la taula anterior, recupereu també el camí de distància mínima de G a A explicant els passos seguits.

(c) A partir de la taula anterior, podem saber quin és el camí de distància mínima del punt G al punt F? I del punt A al punt G? I del punt B al F? Justifiqueu totes les respostes.

Solució:

(a) La taula corresponent a l'aplicació de l'algorisme de Dijkstra és la següent:

A	B	C	D	E	F	G
(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	$(0,G)^*$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)^*$	$(47,G)$	(∞,G)	$(36,G)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)^*$	$(3,G)$	$(47,G)$	$(49,C)$	$(36,G)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(47,G)$	$(20,B)^*$	$(35,B)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)^*$	$(20,B)$	$(33,E)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)$	$(20,B)$	$(32,D)^*$	$(0,G)$
$(37,F)^*$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)$	$(20,B)$	$(32,D)$	$(0,G)$

Per tant, la distància mínima per anar de G a A és 37.

(b) A partir de la taula anterior, tenim que el camí de cost mínim és (G, B, E, D, F, A). A partir de l'etiqueta del punt A, $(37, F)$, sabem que el camí ve de F. A partir de l'etiqueta de F, $(32, D)$, a F arribem des de D. A partir de l'etiqueta de D, $(26,E)$, venim de E. A partir de l'etiqueta de E, $(20,B)$, venim de B. Finalment, amb l'etiqueta de B, $(12,G)$, arribem al punt G.

(c) A partir de la taula anterior, podem saber també quin és el camí de distància mínima del punt G al punt F, ja que l'algorisme ha finalitzat després d'haver seleccionar el vèrtex F. En canvi, no podem saber el camí de distància mínima del punt A al punt G, ja que el graf no és simètric. Finalment, del punt B al punt F no ho podem saber, ja que no comença pel punt G, que és el punt a partir del qual s'ha aplicat l'algorisme de Dijkstra.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 25/10/2018**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**