EXAMEN 3 - 22 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Determinad el número complejo, z, su opuesto, $-z$, y su conjugado, $\bar{z}$, sabiendo que $\frac{1}{z} = i$.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
			i

b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $-i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución

a) Para resolver este ejercicio utilizaremos la definición de opuesto de un número complejo que aparece en la página 22, de conjugado de la página 24 del material y el cociente de números complejos.

Partimos de que:

$\frac{1}{z} = i \rightarrow \frac{1}{i} = z$

$z = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

Por lo tanto.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
$-i$	i	i	i

b) Escribimos el complejo $-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{0 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{--1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale ∞ en 90^o y en 270^o. Como que el afijo del punto buscado es $(0, -1)$ el ángulo está entre el tercer y cuarto cuadrante, es decir, en 270^o. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, en orden a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, el primero que hacemos es dibujar el número $-i$ al plan complejo. Este número está asociado en su punto $(0, -1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra entre el tercer y el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $-i = 1_{270°}$

Como que nos piden las raíces quintas tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace el mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{270°}} = 1_{\frac{270°+360°k}{5}}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

esto es, el módulo de las raíces es: $r = 1$

Los argumentos de las raíces cúbicas son $\beta = \frac{270°+360°k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 54°$

Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 54° + 72° = 126°$

Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 54° + 144° = 198°$

Si $k = 3$, tenemos que $\beta_3 = 54° + 216° = 270°$

Si $k = 4$, tenemos que $\beta_4 = 54° + 288° = 342°$

Por lo tanto, las cinco raíces quintas del complejo $-i$ son:

$1_{54°}, 1_{126°}, 1_{198°}, 1_{270°}, 1_{342°}$

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{a}_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 = 0\}.$$

Y sea $v = (-4, 0, 1, 3)$.
a) Comprobad que $A = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.
b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Solución
a) Como sabemos que la dimensión de E es 2, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectors de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1+a_3+a_4 = 0$ y $a_2 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$ y $y = -3$. Por tanto $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, -3)$.
b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función

de los vectores de A. Así pues, usando las columnas de la matriz $C_{B\to A}$ obtenemos que los dos vectores de la base B son:

$$\begin{aligned} 0\cdot(1,0,-1,0)+3\cdot(1,0,0,-1)&=(3,0,0,-3)\\ 1\cdot(1,0,-1,0)+(-1)\cdot(1,0,0,-1)&=(0,0,-1,1) \end{aligned}$$

Por tanto, $B=\{(3,0,0,-3),(0,0,-1,1)\}$.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+(k+1)z=0\\ 2x+(k-1)y-3z=0\\ 3x+(k+2)y-3z=0 \end{array}\right\}$$

Se pide:
a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.
b) Resolved el sistema para $k=2$. En este caso, razonad si existe alguna solución de este sistema verificando que $x=9$.

Solución
a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3 \end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & k+1 & 0\\ 2 & k-1 & -3 & 0\\ 3 & k+2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Como el sistema es homogéneo (todos los elementos de la última columna de la matriz ampliada son ceros), se tiene que rango(A) = rango(M) y, por lo tanto, el sistema siempre será compatible.

Observemos que rango$(A)\geq 2$, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 3 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$

A continuación, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A para los diferentes valores del parámetro k,

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3 \end{vmatrix}=-k^2+6k-8=-(k-4)(k-2)$$

- Si $k\neq 4$ y $k\neq 2$, entonces rango$(A)=3=$ rango$(M)=$ n^o incógnitas, por lo tanto el sistema es $\boxed{\text{compatible determinado}}$.
- Si $k=4$, rango$(A)=2=$ rango$(M)\neq$ n^o incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{Compatible indeterminado}}$.
- Si $k=2$, rango$(A)=2=$ rango$(M)\neq$ n^o incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{Compatible indeterminado}}$.

b) Para $k=2$, el sistema homogéneo que se tiene que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=0\\ 2x+y-3z=0\\ 3x+4y-3z=0 \end{array}\right\}$$

Sabemos, por el apartado anterior, que para $k = 2$ este sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 + 2{\cdot}F1 \to F2$ y $F3 + 3{\cdot}F1 \to F3$

(2) $F3 - 2{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + 3z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $z = -\frac{5}{3}y$. Si sustituimos en la primera ecuación y despejamos la x obtenemos que $x = -3y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{\left(x = -3y,\ y = y,\ z = -\tfrac{5}{3}y\right)}$$

Finalmente, se nos pide razonar si hay alguna solución en que $x = 9$. Observemos que todas las soluciones verifican que $x = -3y$, por lo tanto si $x = 9$ tendremos que $y = -3$ y en consecuencia tendremos que $z = -\frac{5}{3}{\cdot}(-3) = 5$. Así pues, podemos concluir afirmativamente diciendo que sí que hay una solución en que $x = 9$, concretamente la solución $(x = 9,\ y = -3,\ z = 5)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + 2z, 3x + 2y + z).$$

a) Encontrad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
b) ¿Diagonaliza la aplicación f?
c) Encontrad una base del subespacio $\ker(f)$, el núcleo de f.
d) Calculad el polinomio característico de f.
e) Calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios de f.

Solución

a) Para encontrar A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los ponemos por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Puesto que la matriz A de f es simétrica, entonces f diagonaliza.
c) Para calcular una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss, o transformaciones por filas. En la primera transformación hacemos $f_2' = f_2 - 2f_1$ y $f_3' = f_3 - 3f_1$. En la segunda transformación sacamos factor común -2 en la segunda fila y -4 en la tercera fila. En la tercera transformación, $f_3' = f_3 - f_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda: $x+2y+3z = 0$ e $y+2z = 0$. O sea, $y = -2z$ y $x = -2y-3z = 4z-3z = z$. Por lo tanto las soluciones son de la forma: $(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Una base del $\ker(f)$ es, pues, $\{(1, -2, 1)\}$.

d) Para calcular el polinomio característico de f, calculamos:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 3 & 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$-t^3 + 4t^2 + 12t = (0-t)(t^2 - 4t - 12) = (0-t)(6-t)(-2-t).$$

e) Los vectores propios de f de valor propio 0 son los del $\ker(f - 0\mathrm{I})$. O sea, los del $\ker(f)$. Antes hemos visto que $\ker(f)$ está generado por el vector $(1, -2, 1)$.

Para encontrar un vector propio de valor propio 6, buscamos una base del $\ker(f - 6\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ 3 & 2 & 1-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como antes, haciendo Gauss vemos que una solución es el vector $(1, 1, 1)$.

Para encontrar un vector propio de valor propio -2, buscamos una base del $\ker(f - (-2)\mathrm{I}) = \ker(f + 2\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 2 & 2+2 & 2 \\ 3 & 2 & 1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como antes, hacemos Gauss y vemos que una solución es el vector $(1, 0, -1)$. Por lo tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es $\{(1, -2, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$