Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA:	ÀLGEBRA – MATEMÀTIQUES I
PAC Núm.:	**3**
Data de proposta:	20/04/2012 **Data d´entrega:** ≤ 30/04/2012

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **Utilització de la Wiris: L'exercici 1 és per a ser fet amb Wiris o manualment. Els exercicis 2 i 3 són per a ser resolts manualment (i amb verificació posterior, si es vol, amb la Wiris).** Quan es faci servir, caldrà il·lustrar-ho amb la corresponent captura de pantalla, afegint al document de resolució els comentaris necessaris.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 30/04/2012**

Valoració:

- Totes les preguntes tenen el mateix valor. A cada pregunta tots els apartats tenen el mateix valor.
- **Aquesta part de la PAC representa el 75% de la nota final de la PAC i el 25% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC3 que trobareu a Questionaris.**

RESOLUCIÓ

1. Sigui per a n un nombre natural i a un paràmetre real, $W_n(a)$ la matriu definida per:

$$W_n(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu el determinant de la matriu $W_n(a)$ per a $n=7$ i descomponeu-lo en factors en termes de la indeterminada a.

b) Per a quins valors del paràmetre a la matriu $W_n(a)$, amb $n=7$, no té rang màxim?

c) Resoleu els apartats a) i b) per a n un nombre natural.

Resolució:

a)

Per a n=7, tenim $W_7(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \\ a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 \end{pmatrix}$ i per tant,

$|W_7(a)|=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \\ a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 \end{vmatrix}$ i si, començant per la setena columna i fins a la segona, a cada columna li restem a vegades l'anterior obtenim

$$|W_7(a)|=\begin{vmatrix} 1 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 \\ a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 \\ a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 \\ a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 \\ a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 \\ a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a \\ a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 \end{vmatrix}=\left(1-a^7\right)^6.$$

$\boxed{|W_7(a)|=\left(1-a^7\right)^6}$ ja és una descomposició en factors i tenint en compte que el valor $a=1$ és l'única solució real també podem factoritzar (aplicant la regla de Ruffini, per exemple) $1-a^7=(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$ i per tant

$$\boxed{|W_7(a)|=(1-a)^6(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^6.}$$

b)
La matriu $W_7(a)$ no tindrà rang màxim quan el seu determinant sigui zero, és a dir quan $|W_7(a)| = (1-a^7)^6 = 0$ i això només passa quan $a^7 = 1$, és a dir quan $\boxed{a=1}$.

c)
Aplicant el mateix desenvolupament que hem utilitzat a l'apartat a) tenim que $\boxed{|W_n(a)| = (1-a^n)^{n-1}}$. Aquesta expressió només s'anul·larà quan $a^n = 1$, això és,

$\boxed{\text{per a } a=1 \text{ si } n \text{ és senar, com en el cas b), o per a } a = \pm 1 \text{ si } n \text{ és parell.}}$

2. Considereu les següents rectes de R^2: r: $x+y=2$, s: $3x-y=2$ i t: $2x+ay=a+2$ on a és un paràmetre real ($a \in R$). Discutint i resolent els corresponents sistemes d'equacions lineals estudieu la posició relativa de les rectes:

   a) r i s.
   b) r, s i t.

Resolució:

a)

Si plantegem el corresponent sistema d'equacions lineals tenim $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.

Sumant les equacions obtenim $4x=4$ i per tant $x=1$, que substituït a la primera equació ens fa $y=1$. Per tant el sistema és compatible determinat amb solució $x=1$ i $y=1$, és a dir

$\boxed{\text{les rectes } r \text{ i } s \text{ es tallen (són secants) en el punt } P(1,1).}$

b)
Sabem per l'apartat anterior que les rectes r i s es tallen en el punt $P(1,1)$. Per tant el sistema format per les tres rectes, r, s i t, només serà compatible (determinat) i tindrà com a solució el mateix $P(1,1)$ quan el punt P pertanyi a la recta t. Això és,

2·1+a·1=a+2
a+2=a+2
0=0,

que es compleix per a qualsevol valor del paràmetre a.

$\boxed{\text{Per tant, sigui quin sigui el valor d'} a \text{ les rectes } r, s \text{ i } t \text{ es tallen en el punt } P(1,1).}$

3. Considereu el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x+y+az=b \\ 3x+2z=9 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors dels paràmetres $a, b \in R$.

b) Per al cas $a = 2$, utilitzeu el mètode de Cramer i resoleu el sistema.

c) Per al cas $a = 1$ i $b = 3$, utilitzeu el mètode de Gauss i resoleu el sistema.

Resolució:

a)

La matriu del sistema és $A' = (A \mid v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & a & b \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$.

El rang de la matriu de coeficients, A, és com a mínim 2, ja que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ i serà 3 només si *det(A)* és diferent de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3a + 0 - 3 - 0 + 2 = 3 - 3a.$$

Aleshores *det(A)=0* si i només si *a=1* i per tant per a la discussió del sistema tenim els dos següents casos:

Cas I: $a \neq 1$. En aquest cas $|A| \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 3 \Rightarrow rang\ A' = 3$ i el sistema serà **Compatible Determinat** (amb independència del valor que prengui el paràmetre b)

Cas II: $a = 1$. En aquest cas $|A| = 0 \Rightarrow rang\ A = 2$. El rang de la matriu ampliada, A', dependrà del determinant

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 3b + 0 - 18 - 0 + 9 = 9 - 3b$ que només s'anul·la per a *b=3* i per tant tindrem els dos següents subcasos:

- Cas II.1: $a = 1, b \neq 3$. En aquest cas $rang\ A = 2, rang\ A' = 3$ i per tant el sistema és **Incompatible**.

- Cas II.2: $a = 1, b = 3$. En aquest cas $rang\ A = 2, rang\ A' = 2$ i per tant el sistema és **Compatible Indeterminat** amb (3-2=1) **una infinitat de solucions**.

b)

Si *a=2* estem en el Cas I i per tant el sistema és Compatible Determinat.

La matriu del sistema és $A' = (A \mid v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$.

Aplicant Cramer tenim:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{12-18-9+2b}{-3} = \frac{2b-15}{-3} = \frac{15-2b}{3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4b+9+36-3b-36-12}{-3} = \frac{b-3}{-3} = \frac{3-b}{3} \text{ i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{18-3b-18+9}{-3} = \frac{9-3b}{-3} = b-3.$$

I per tant la solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{15-2b}{3}.\frac{3-b}{3}, b-3\right)}$ per a cada b.

Per exemple:

$b = 0 \Rightarrow (5,1,-3)$

$b = 3 \Rightarrow (3,0,0)$

$b = 1 \Rightarrow \left(13/3, 2/3, -2\right)$

...

c)

Si $a = 1$ i $b = 3$ estem en el Cas II.2 i per tant el sistema és $\boxed{\text{Compatible Indeterminat amb una infinitat de solucions}}$.

La matriu del sistema és $A' = (A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$ i si resolem per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3-y \\ 0 & 1 & -3y \end{array}\right)$$

després de

- Intercanviar la primera i la segona files.

- A la segona fila restar dues vegades la primera
- A la tercera fila restar tres vegades la primera

- Eliminar la tercera fila

- Traspassar la segona columna, la de la incògnita y, al terme independent i canviar el signe de la segona fila

I per tant tenim, de la segona equació, $z=-3y$ i substituint a la primera, $x-3y=3-y$ és a dir $x=2y+3$.

Per tant la solució del sistema és $\boxed{(2y+3, y, -3y)}$ o en altres termes $\boxed{(3,0,0)+<(2,1,-3>}$.