010203047 C

[redacted]

[redacted]

UNED	GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA		
	7190105- - ESTADÍSTICA (ING.INFORMÁTICA/ING.TI)		
Junio 2014	06/06/2014 Hora de entrada: 11:23 Hora de salida: 13:23	Examen tipo: C DESARROLLO	AULA E1 Fila: 12 Columna:2
MADRID-GINER DE LOS RIOS - 053042		NACIONAL - U.E. SEGUNDA SEMANA	Hoja 1 de 2 (+1)
Material:El material escrito indicado en el examen			

Es imprescindible entregar esta hoja para salir del aula.
NO ESCRIBIR EN EL REVERSO DE ESTA HOJA

¿Desea obtener un certificado de asistencia?
(Rellenar el cuadro completamente)

Número total de hojas entregadas (incluyendo ésta): 7

Lea esto primero:

1. Compruebe que tiene en su poder los enunciados con las ocho cuestiones a responder.

2. Es **obligatorio** entregar este cuestionario con la hoja de respuestas.

3. Material permitido: Libro de texto, calculadora programable, apuntes personales y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Lanzamos un dado dos veces y designamos por X_1 y X_2 las puntuaciones obtenidas en el primer y segundo lanzamiento, respectivamente. Consideremos la variable aleatoria $V = X_1 - X_2$.

1. Obtener la función de probabilidad de la variable V y calcular $E\{V\}$.

2. Si $A = \{X_2 = 3\}$, encontrar la función de probabilidad de la variable condicionada $V \mid A$.

3. Calcular $E\{X \mid V = 0\}$.

Enunciado 2 Sea (X,Y) un vector con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Hallar las funciones de densidad marginales.

5. Calcular la covarianza $\sigma_{X,Y}$.

Enunciado 3 Se considera una muestra aleatoria simple (X_1,X_2,X_3) de una población con distribución $\mathcal{N}(\theta,2)$ y el estadístico

$$Y = (X_1-\theta)^2 + (X_2-\theta)^2 + (X_3-\theta)^2$$

6. ¿Cuál es la distribución en el muestreo de Y? Utilizar esta distribución para calcular la probabilidad $P(Y < 2.336)$.

Enunciado 4 Se considera una variable X que tiene una distribución $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ de media y varianza desconocidas. Para una muestra aleatoria de 16 observaciones de esta variable se obtuvieron los siguientes resúmenes estadísticos: $\sum_{i=1}^{16} x_i = 24$ y $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 80$.

7. Encontrar un intervalo de confianza, con una confianza del 99 %, para el valor medio de X.

Enunciado 5 Dado el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z = 7x_1 - 3x_2 + x_3, \text{ sujeto a:} \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 50 \\ &x_1 + x_2 = 20 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 5 \\ &\text{con } x_1 \text{ cualquiera, } x_2 \ge 0 \text{ y } x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

8. Obtener su forma canónica

06/06/2014	DNI: [redacted]	NOMBRE: [redacted]
UNED	TITULACIÓN: GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA	
	ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (ING.INFORMÁTICA/ING.TI)	
	CLAVE DE VERIFICACIÓN: BX58	

ENUNCIADO 5

(8) Visto el PPL, para obtener su forma canónica son necesarias las siguientes transformaciones:

- x_1, como puede tener cualquier valor, la transformamos a $x_1 = x_1^+ - x_1^-$
- La igualdad $x_1 + x_2 = 20$ se descompone en dos desigualdades

$$x_1 + x_2 = 20;\quad x_1^+ - x_1^- + x_2 = 20 \begin{cases} x_1^+ - x_1^- + x_2 \leq 20 \\ x_1^+ - x_1^- + x_2 \geq 20 \end{cases}$$ que a su vez

$$-x_1^+ + x_1^- - x_2 \leq -20$$

- La desigualdad $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$, la cambiamos de signo quedando

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -5 \quad \rightarrow \quad -x_1^+ + x_1^- - x_2 - x_3 \leq -5$$

El PPL en su forma canónica quedaría:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & z = 7x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1^+ - x_1^- + 2x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ & x_1^+ - x_1^- + x_2 \leq 20 \\ & -x_1^+ + x_1^- - x_2 \leq -20 \\ & -x_1^+ + x_1^- - x_2 - x_3 \leq -5 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

ENUNCIADO 1

① - La distribución de los valores de V según los valores que se vean en X_1 y X_2 serán:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

- Los valores de la tabla son los valores de V y la probabilidad de cada suceso elemental es de $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

- La función de probabilidad de V quedaría

V	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p(v)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

(se comprueba que su suma es 1)

- El valor esperado E(V) quedaría

$$E(v) = \sum_{i=-5}^{5} v_i \, p(v_i) = -\frac{5}{36} - 4\frac{2}{36} - 3\frac{3}{36} - 2\frac{4}{36} - \frac{5}{36} + 0 + \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 3\frac{3}{26} + 4\frac{2}{36} +$$

$$+ \frac{5}{36} = 0 \; ; \quad \boxed{E(v) = 0}$$

06/06/2014	DNI: [redacted]	NOMBRE: [redacted]
UNED	TITULACIÓN: GRADO EN INGENIERIA INFORMATICA	
	ASIGNATURA: ESTADISTICA (ING. INFORMATICA / ING. TI)	
	CLAVE DE VERIFICACIÓN: BX58	

(2) - Cuando $X_2 = 3$, la variable V toma valores desde -2 hasta 3, tal y como se aprecia en la tabla primera, por tanto, el resto de valores será 0

$$P(V=-5|\Delta) = P(V=-4|\Delta) = P(V=-3|\Delta) = P(V=4|\Delta) = P(V=5|\Delta) =$$
$$= 0$$

- Para los otros casos posibles

$$P(V=-2|\Delta) = \frac{P(V=-2 \cap \Delta)}{P(\Delta)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

$$P(V=-1|\Delta) = \frac{P(V=-1 \cap \Delta)}{P(\Delta)} = \frac{1}{6}$$

por simetría con los distintos casos, todos tienen valor $1/6$, luego:

$V\|\Delta$	-2	-1	0	1	2	3
$p(V\|\Delta)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

(3) - Para calcular $E(X|V=0)$ es necesario calcular los distintos $E(X_2|V=0)$ que puede tomar X en ese caso

$$P(X=1|V=0) = \frac{P(X_1=1 \cap X_2=1)}{P(V=0)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

, por simetría en el resto de casos : $P(X=2,\dots,6|V=0) = \frac{1}{6}$

Luego

$$E(X \mid V=0) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 21 \cdot \frac{1}{6} = 3'5$$

$$\boxed{E(X \mid V=0) = 3'5}$$

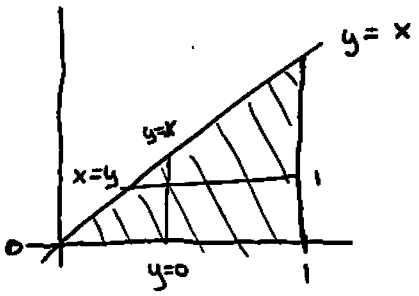
06/06/2014	DNI: [redacted]	NOMBRE: [redacted]
	TITULACIÓN: GRADO EN INGENIERIA INFORMATICA	
UNED	ASIGNATURA: ESTADISTICA (ING. INFORMATICA / ING. TI)	
	CLAVE DE VERIFICACIÓN: BX58	

ENUNCIADO 2

(4) - Para calcular las funciones de densidad marginal basta con calcular las siguientes funciones

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad ; \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

- Representemos la funcion $f(x,y)$



$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy\,dy = 4xy^2 \Big|_0^x = 4x^3 \; ; \; \boxed{f_x(x) = 4x^3}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^1 8xy\,dx = 4yx^2 \Big|_y^1 = 4y - 4y^3 \; ;$$

$$\boxed{f_y(y) = 4y(1-y^2)}$$

(5) - Para calcular la covarianza σ_{xy} es necesario hacer los cálculos de $E(x)$, $E(Y)$ y $E(XY)$ ya que

$$\sigma_{x,y} = E(XY) - E(x) \cdot E(Y)$$, luego

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,4x^3\,dx = 4\int_0^1 x^4\,dx = 4\,\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\,4y(1-y^2)\,dy = \int_0^1 4y^2 - 4y^4\,dy =$$

$$= \left(\frac{1}{3}4y^3 - \frac{1}{5}4y^5\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^x 8x^2y^2\,dy\right)dx = 8\int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^3x^2\right)\Big|_0^x dx =$$

$$= 8\int_0^1 \frac{1}{3}x^3\cdot x^2\,dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^5\,dx = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}x^6\Big|_0^1 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

por tanto $\sigma_{x,y} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15} = 0'1777$

$$\boxed{\sigma_{x,y} = 0'1777}$$

06/06/2014	DNI: [redacted]	NOMBRE: [redacted]
UNED	TITULACIÓN: GRADO EN INGENIERIA INFORMATICA	
	ASIGNATURA: ESTADISTICA (ING. INFORMATICA / ING. TI)	
	CLAVE DE VERIFICACIÓN: BX58	

ENUNCIADO 4

$X \sim N(\mu, \sigma)$ $\qquad \sum_{i=1}^{16} x_i = 24$

$n = 16$ $\qquad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 80$

7 - Puesto que tenemos una distribución normal con μ y σ desconocidas, el intervalo para el valor medio de X será de la forma

$$\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

- Calculamos los estimadores media ~~muestral~~ y varianza de la muestra

media muestral: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{16} 24 = 1'5$

cuasivarianza muestral: $S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{15} \left(80 - 16 \cdot 1'5^2\right)$

$$S^2 = 2'933 \quad ; \quad S = 1'713$$

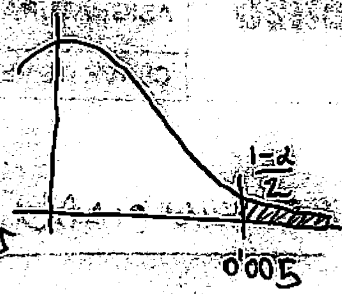
Luego $\hat{\mu} = 2'8$, $\hat{\sigma} = 1'713$

- El intervalo de confianza viene dado, para una confianza del 99%:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < t_{n-1} < \bar{X} + t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0'99$$

-Podemos calcular tal que:

$$P(t_{15} > t_{15,\alpha}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0'99}{2} = 0'005$$



$$t_{15,\alpha} = 2'947 \quad \text{ya que} \quad P(t_{15} > 2'947) = 0'005$$

-El intervalo de confianza queda entonces:

$$\left(1'5 - 2'947 \cdot \frac{1'713}{\sqrt{16}} \; , \; 1'5 + 2'947 \cdot \frac{1'713}{\sqrt{16}} \right)$$

$$\boxed{(0'238 \, , \, 1'738)}$$

06/06/2014	DNI: [redacted]	NOMBRE: [redacted]
UNED	TITULACIÓN: GRADO EN INGENIERIA INFORMATICA	
	ASIGNATURA: ESTADISTICA (ING. INFORMATICA / ING. TI)	
	CLAVE DE VERIFICACIÓN: BX58	

ENUNCIADO 3

(6) - Tomando el estadístico Y, al estar sus sumandos compuestos por las variables del muestreo al cuadrado, podemos decir que Y tiene una distribución χ^2 con 3 grados de libertad, donde es necesaria una tipificación de X_i ya que su distribución normal no es $N(0,1)$ sino $(0, 2)$

- Por lo tanto $P(Y < 2'336) = P\left(\frac{Y}{\sigma^2} < \frac{2'336}{\sigma^2}\right) =$

$$= P\left(\chi^2_3 < \frac{2'336}{2^2}\right) = P(\chi^2_3 < 0'584) = 1 - P(\chi^2_3 > 0'584)$$

$$= 1 - 0'9 = 0'1$$

$$\boxed{P(Y < 2'336) = 0'1}$$