Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **1**

Data de proposta: 30/09/2011 **Data d´entrega:** ≤ 10/10/2011

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´haurà d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*). **Per utilitzar la i=$\sqrt{-1}$, dels nombres complexos, amb la Wiris haureu d´utilitzar la icona que apareix a l´eina "Símbols" (no la "i" del teclat de l´ordinador).**
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 10/10/2011**

Valoració:

- **Els exercicis d´aquesta PAC tenen el mateix valor (2,5 punts cadascun). La resta de la puntuació fins als 10 punts es valoraran amb la realització de les activitats Moodle de l´aula.**
- **Aquesta part de la PAC representa el 75% de la nota final de la PAC i el 25% restant s´obté realitzant les activitats Moodle.**

SOLUCIÓ

NOTA: Observa que després de cada enunciat tens una pauta per escriure el resultat i el desenvolupament de cada problema (l´espai destinat a això pots fer-lo tan gran com necessitis).

1. Per a tot nombre natural n, demostra per inducció que $n^2 + 5n + 6$ és un nombre parell.

   Explicació de la solució:

i. Cal veure que la propietat és certa per a n = 1, és a dir que $1^2 + 5 \cdot 1 + 6$ és parell, la qual cosa és certa.

ii. Cal veure que si la propietat és certa per a un natural n, llavors també ho és per a n + 1.

Efectivament: Hem de veure que:
$n^2 + 5n + 6$ parell implica $(n + 1)^2 + 5(n + 1) + 6$ parell

Tenim $(n + 1)^2 + 5(n + 1) + 6 = (n^2 + 5n + 6) + (2n + 6)$. Ara, com que $(n^2 + 5n + 6)$ és, per hipòtesi d´inducció, parell i $2n + 6$ és evidentment parell per ser la suma de dos parells, tenim que la implicació que acabem de formular és certa, i per tant hem acabat la demostració.

2. Deixant el resultat en forma binòmica, troba les sis arrels sisenes de 64. Dibuixa-les al pla complex. Quina figura resulta d´unir-les?

Solució:

$$\boxed{z1 = 2, \quad z2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z3 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z4 = -2, \quad z5 = 1 - \sqrt{3}i, \quad z6 = -1 - \sqrt{3}i}$$

La figura que resulta és un HEXÀGON

Explicació:

$$z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2_{\frac{(0^\circ + 360^\circ \cdot k)}{6}} ; k = 0,1,2,3,4,5$$

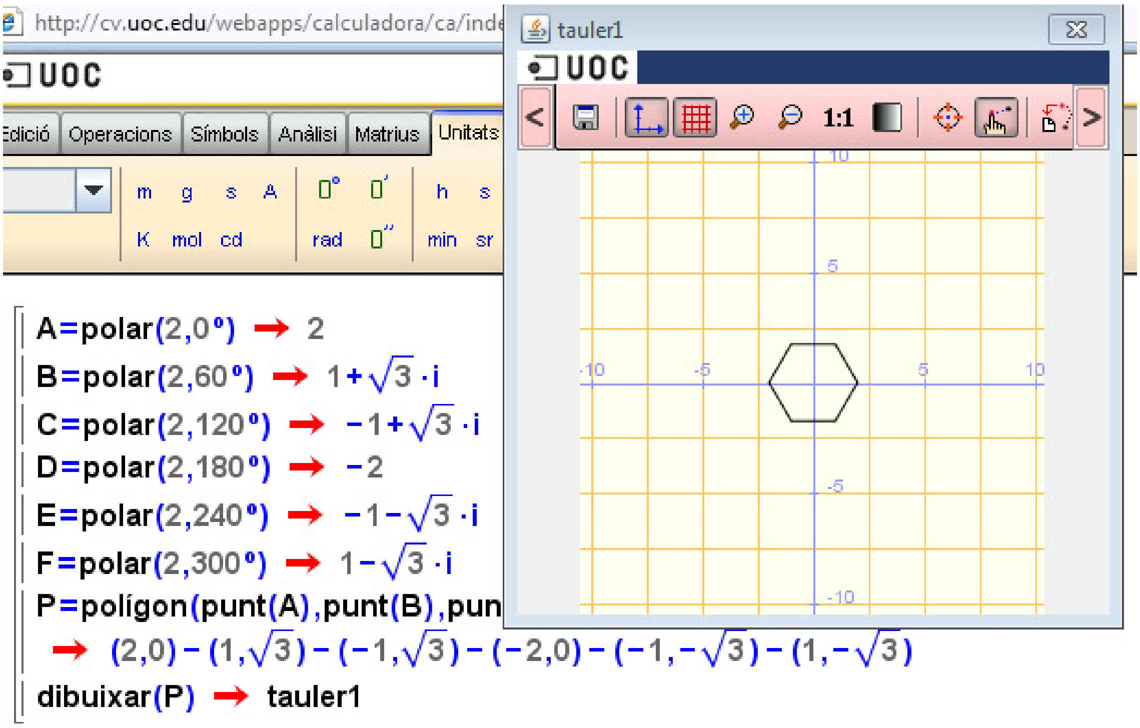
Per tant, les sis arrels (en forma polar) són:

$$\boxed{2_{0^\circ}, \quad 2_{60^\circ}, \quad 2_{120^\circ}, \quad 2_{180^\circ}, \quad 2_{240^\circ}, \quad 2_{300^\circ}}$$

Ara passem aquest resultat a forma binòmica, recordem que, depenent del quadrant en el que es trobi l´angle, els valors variaran:

$$\boxed{\begin{aligned}
&2_{0^\circ} = 2 \\
&2_{60^\circ} = (2 \cdot \cos 60) + (2 \cdot \sin 60) \cdot i = 1 + \sqrt{3} \cdot i \\
&2_{120^\circ} = 2 \cdot (-\cos(180^\circ - 120^\circ)) + (2 \cdot (\sin(180^\circ - 120^\circ)) = -1 + \sqrt{3} \cdot i \\
&2_{180^\circ} = 2 \cdot \cos 180^\circ + 2 \cdot \sin 180^\circ = -2 + 0 = -2 \\
&2_{240^\circ} = 2 \cdot (-\cos(180 + 240)) + 2 \cdot (-\sin(180 + 240)) = -1 - \sqrt{3} \\
&2_{300^\circ} = 2 \cdot \cos(-300) + 2 \cdot (-\sin(-300)) = 1 - \sqrt{3}
\end{aligned}}$$

Comprobació amb Wiris



3. Determina el valor que haurien de tenir x i y per a què es verifiqui la igualtat següent:

$$\frac{x + y\cdot i}{2 - 3\cdot i} = \frac{(3 - 2\cdot y) + (x - y)\cdot i}{1 + i}$$

Solució:

x=3, y=2

Explicació:

Utilitzem la propietat que diu que si dues fraccions són iguals, llavors:

$(x + y\cdot i)\cdot(1 + i) = [(3 - 2y) + (x - y)\cdot i]\cdot(2 - 3\cdot i)$

Apliquem la distributiva del producte respecte de la suma:

$x + xi + yi - y = 6 - 4y - 9i + 6yi + 2xi - 2yi + 3x - 3y$

Agrupem ara les parts reals i les imaginàries a cada costat:

$(x - y) + (x + y)\cdot i = (6 - 4y + 3x - 3y) + (-9 + 6y + 2x - 2y)i$

Sumant els termes semblants:

$(x - y) + (x + y)\cdot i = (3x - 7y + 6) + (2x + 4y - 9)i$

Pel fet de ser iguals els complexos de cada costat, podrem igualar les parts reals i les imaginàries de cada un, resultarà el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 6 = x - y \\ 2x + 4y - 9 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y - x + y = -6 \\ 2x + 4y - x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -6 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

Simplificant la primera equació: $x - 3y = -3$. Sumant-la amb la segona: $2x = 6$. Per tant, **x=3**

Substituïnt aquest valor a la segona: $3 + 3y = 9, \quad 3y = 6$. Finalment ens quedarà que **y=2**