Àlgebra/ Matemàtiques I

EXAMEN 11-06-2011

1.-Realitza els càlculs següents:

a) Troba tots els valors d'*a* per a que la següent igualtat sigui certa:

$$6_{\frac{\pi}{6}rad} = \frac{\sqrt{3}+i}{i}\cdot(-a+3i)$$

b) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^3+64=0$$

Resolució:

a) D'una banda tenim: $6_{\frac{\pi}{6}rad} = 6(\cos(\frac{\pi}{6})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{6})) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}) = 3\sqrt{3}+3\cdot i$

De l'altra:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{i}\cdot(3i-a) = \frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}\cdot(3i-a) = \frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{1}\cdot(3i-a) =$$
$$=(1-\sqrt{3}\cdot i)\cdot(3i-a) = (3\sqrt{3}-a)+(a\sqrt{3}+3)i$$

Si ara igualem les parts reals i les parts imaginàries tenim: $3\sqrt{3}-a=3\sqrt{3}$ i $a\sqrt{3}+3=3$ d'on obtenim que l'única solució és a=0

b) $x^3+64=0 \Rightarrow x^3=-64 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-64}$ Si ara passem a polar:

$x=\sqrt[3]{-64} \Rightarrow x=\sqrt[3]{64_{180^\circ}} = 4_{(180^\circ+360^\circ\cdot k)/3}$ i per tant, fent k=0,1,2 trobem que les tres solucions són: $4_{60^\circ}, 4_{180^\circ}, 4_{300^\circ}$

2.- Siguin A i B els subespais de R^3 generat pels conjunts de vectors següents:

$A=<(0,0,1),(0,1,1),(0,1,-a)>,\ a\in R$

$B=<(0,1,-3),(0,4,4)>$

a) Troba la dimensió de A en funció d'*a*. Troba la dimensió de B. Troba una base per cada subespai.

b) Determina si els vectors v=(0,-5,1) i w=(1,0,-3) pertanyen o no a A i a B. En cas que hi pertanyin, calcula'n les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem els rang de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 independentment d'*a*. Com a base podríem usar els dos primers vectors que són linealment independents (contenen el menor anterior): $Base - A = \{(0,0,1),(0,1,1)\}$

Per B: Tenim el menor $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb que està definit: $Base - B = \{(0,1,-3),(0,4,4)\}$

b) Per al vector v=(0,-5,1) i el subespai A tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=6, y=-5. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (6,-5).

Per al vector v=(0,-5,1) i el subespai B tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ x + 4y = -5 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=-3/2, y=-7/8. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (-3/2,-7/8).

Per al vector w=(1,0,-3) i el subespai A tenim que $w \notin A$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 1 \\ y = 0 \\ x + y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

Per al vector w=(1,0,-3) i el subespai B tenim que $w \notin B$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 1 \\ x + 4y = 0 \\ -3x + 4y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

3.-Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $m \in R$.

$$\begin{cases} x & + & my & + & 3z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \\ mx & - & y & + & z & = & 0 \end{cases}.$$

Resolució.

La matriu del sistema és

$$A \mid A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ m & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Observem primer que el sistema és homogeni per tant $rang\, A = rang\, A'$ amb el que serà compatible per a qualsevol valor $m \in R$.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang A \geq 2$.

Per a veure si el rang de la matriu de coeficients és 3 orlem el menor no nul d'ordre 2 i estudiem quan s'anul·la el determinant. Hi ha dues possibilitats:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 0 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m+1)(1-m) = (m+1)(m-1)$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1-m & 0 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3).$$

Observem que els dos determinants només s’anul·len simultàniament quan $m=-1$. Per tant tenim:

- Cas I. $m \neq -1 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$ i la solució única és $(0,0,0)$.
- Cas II $m = -1 \Rightarrow rang\ A = 2 = rang\ A' \Rightarrow SCI$ amb 3-2=1 grau de llibertat (y).

En aquest cas, el sistema queda, després d’eliminar la 3a i 4a equacions i traspassar la incògnita “y” al terme independent obtenim:

$\begin{cases} x + 3z = y \\ -x + z = y \end{cases}$ que té solució $x = -\dfrac{y}{2}, z = \dfrac{y}{2}$ i $y = y$.

4.-Considerem el polígon P de vèrtexs A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2) i E(-3,-2) i d’arestes AB, BC, CD , DE i EA.

a) Calculeu els vèrtexs del polígon resultant d’aplicar a P un escalatge de raó 3 horitzontal i raó 2 vertical, des del punt (1,-1).
b) ¿Quins valors han de prendre $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$ per a que el vèrtex C’ del polígon resultant d’aplicar a P un gir d’angle α radians en sentit antihorari al voltant de l’origen sigui $C'(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$?

Resolució:

a) Per fer un escalatge des del punt (1,-1) primer cal buscar la translació que converteixi el punt (1,-1) en l’origen. És la translació de vector (-1,1):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després cal calcular la matriu E de l’escalatge de raó 3 horitzontal i 2 vertical:

$$E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Finalment cal desfer la primera translació, és a dir, considerar la inversa de T:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Multiplicant les tres matrius, de dreta a esquerra, obtenim :

$$T^{-1}\cdot E\cdot T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Per tant, els transformats de A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2), E(-3,-2) són:

$$\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&-1&-3&-3\\0&5&1&2&-2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-5&-11&-11\\1&11&3&5&-3\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

O sigui, són els punts: (-2,1), (4,11), (-5,3), (-11,5) i (-11,-3).

b) La matriu del gir d'angle α al voltant de l'origen és

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)&0\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b&0\\b&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Aleshores els transformats de A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2), E(-3,-2) són:

$$\begin{pmatrix}a&-b&0\\b&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1&-3&-3\\0&5&1&2&-2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2a-5b&-a-b&-3a-2b&-3a+2b\\0&5a+2b&a-b&2a-3b&-2a-3b\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Imposant que C' sigui el punt $C'(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$ obtenim que:

$$-a-b=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};a-b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Restant les dues equacions obtenim que -2a=-1. O sigui: $a=\frac{1}{2}$. Per tant $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Així:

$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ i $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i per tant $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$.

Àlgebra/ Matemàtiques I