Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA:	ÀLGEBRA – MATEMÀTIQUES I		
PAC Núm.:	**3**		
Data de proposta:	11/11/2011	**Data d´entrega:**	$\leq$ 21/11/2011

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **Utilització de la Wiris: L'exercici 1 és per a ser fet amb Wiris o manualment. Els exercicis 2 i 3 són per a ser resolts manualment (i amb verificació posterior, si es vol, amb la Wiris).** Quan es faci servir, caldrà il·lustrar-ho amb la corresponent captura de pantalla, afegint al document de resolució els comentaris necessaris.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 21/11/2011**

Valoració:

- Totes les preguntes tenen el mateix valor. A cada pregunta tots els apartats tenen el mateix valor.
- **Aquesta part de la PAC representa el 75% de la nota final de la PAC i el 25% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC3 que trobareu a Questionaris.**

RESOLUCIÓ

1. Sigui per a n un nombre natural i a un paràmetre real, $W_n(a)$ la matriu definida per:

$$W_n(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu el determinant de la matriu $W_n(a)$ per a $n=7$ i descomponeu-lo en factors en termes de la indeterminada a.

b) Per a quins valors del paràmetre a la matriu $W_n(a)$, amb $n=7$, no té rang màxim?

c) Resoleu els apartats a) i b) per a n un nombre natural.

Resolució:

a)

Per a n=7, tenim $W_7(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \\ a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 \end{pmatrix}$ i per tant,

$|W_7(a)|=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \\ a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & 1 \end{vmatrix}$ i si, començant per la setena columna i fins a la segona, a cada columna li restem a vegades l'anterior obtenim

$$|W_7(a)|=\begin{vmatrix} 1 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 \\ a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 \\ a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 \\ a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 & a^3-a^3 \\ a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a & a^2-a^2 \\ a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 & a-a \\ a & a^2-a^2 & a^3-a^3 & a^4-a^4 & a^5-a^5 & a^6-a^6 & 1-a^7 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a^7 \end{vmatrix}=\left(1-a^7\right)^6.$$

$\boxed{|W_7(a)|=\left(1-a^7\right)^6}$ ja és una descomposició en factors i tenint en compte que el valor $a=1$ és l'única solució real també podem factoritzar (aplicant la regla de Ruffini, per exemple) $1-a^7=(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$ i per tant

$$\boxed{|W_7(a)|=(1-a)^6(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^6.}$$

b)
La matriu $W_7(a)$ no tindrà rang màxim quan el seu determinant sigui zero, és a dir quan $|W_7(a)| = (1-a^7)^6 = 0$ i això només passa quan $a^7 = 1$, és a dir quan $\boxed{a=1}$.

c)
Aplicant el mateix desenvolupament que hem utilitzat a l'apartat a) tenim que $\boxed{|W_n(a)| = (1-a^n)^{n-1}}$. Aquesta expressió només s'anul·larà quan $a^n = 1$, això és, per a $a=1$ si n és senar, com en el cas b), o per a $a = \pm 1$ si n és parell.

2. Considereu les següents rectes de R^2: r: $x+y=2$, s: $3x-y=2$ i t: $2x+ay=a+2$ on a és un paràmetre real ($a \in R$). Discutint i resolent els corresponents sistemes d'equacions lineals estudieu la posició relativa de les rectes:

a) r i s.
b) r, s i t.

Resolució:

a)

Si plantegem el corresponent sistema d'equacions lineals tenim $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.

Sumant les equacions obtenim $4x=4$ i per tant $x=1$, que substituït a la primera equació ens fa $y=1$. Per tant el sistema és compatible determinat amb solució $x=1$ i $y=1$, és a dir les rectes r i s es tallen (són secants) en el punt $P(1,1)$.

b)
Sabem per l'apartat anterior que les rectes r i s es tallen en el punt $P(1,1)$. Per tant el sistema format per les tres rectes, r, s i t, només serà compatible (determinat) i tindrà com a solució el mateix $P(1,1)$ quan el punt P pertanyi a la recta t. Això és,

2·1+a·1=a+2
a+2=a+2
0=0,

que es compleix per a qualsevol valor del paràmetre a.
Per tant, sigui quin sigui el valor d'a les rectes r, s i t es tallen en el punt $P(1,1)$.

3. Considereu el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x+y+az=b \\ 3x+2z=9 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors dels paràmetres $a,b \in R$.

b) Per al cas $a=2$, utilitzeu el mètode de Cramer i resoleu el sistema.

c) Per al cas $a=1$ i $b=3$, utilitzeu el mètode de Gauss i resoleu el sistema.

Resolució:

a)

La matriu del sistema és $A'=(A|v)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & a & b \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$.

El rang de la matriu de coeficients, A, és com a mínim 2, ja que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ i serà 3 només si *det(A)* és diferent de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-3a+0-3-0+2=3-3a.$$

Aleshores *det(A)=0* si i només si *a=1* i per tant per a la discussió del sistema tenim els dos següents casos:

Cas I: $a\neq 1$. En aquest cas $|A|\neq 0 \Rightarrow rang\ A=3 \Rightarrow rang\ A'=3$ i el sistema serà **Compatible Determinat** (amb independència del valor que prengui el paràmetre b)

Cas II: $a=1$. En aquest cas $|A|=0 \Rightarrow rang\ A=2$. El rang de la matriu ampliada, A', dependrà del determinant

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}=18-3b+0-18-0+9=9-3b$ que només s'anul·la per a *b=3* i per tant tindrem els dos següents subcasos:

- Cas II.1: $a=1, b\neq 3$. En aquest cas $rang\ A=2, rang\ A'=3$ i per tant el sistema és **Incompatible**.

- Cas II.2: $a=1, b=3$. En aquest cas $rang\ A=2, rang\ A'=2$ i per tant el sistema és **Compatible Indeterminat** amb (3-2=1) **una infinitat de solucions**.

b)

Si *a=2* estem en el Cas I i per tant el sistema és Compatible Determinat.

La matriu del sistema és $A'=(A|v)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$.

Aplicant Cramer tenim:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&2\\3&0&2\end{vmatrix}=-3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&-1&1\\b&1&2\\9&0&2\end{vmatrix}}{-3}=\frac{12-18-9+2b}{-3}=\frac{2b-15}{-3}=\frac{15-2b}{3},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&6&1\\1&b&2\\3&9&2\end{vmatrix}}{-3}=\frac{4b+9+36-3b-36-12}{-3}=\frac{b-3}{-3}=\frac{3-b}{3}\text{ i}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&6\\1&1&b\\3&0&9\end{vmatrix}}{-3}=\frac{18-3b-18+9}{-3}=\frac{9-3b}{-3}=b-3.$$

I per tant la solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{15-2b}{3}.\frac{3-b}{3},b-3\right)}$ per a cada b.

Per exemple:

$b=0 \Rightarrow (5,1,-3)$

$b=3 \Rightarrow (3,0,0)$

$b=1 \Rightarrow \left(13/3, 2/3, -2\right)$

...

c)

Si $a = 1$ i $b = 3$ estem en el Cas II.2 i per tant el sistema és $\boxed{\text{Compatible Indeterminat amb una infinitat de solucions}}$.

La matriu del sistema és $A'=(A|v)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&6\\1&1&1&3\\3&0&2&9\end{array}\right)$ i si resolem per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&6\\1&1&1&3\\3&0&2&9\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&6\\3&0&2&9\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&0\\0&-3&-1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3-y\\0&1&-3y\end{array}\right)$$

després de

- Intercanviar la primera i la segona files.
- A la segona fila restar dues vegades la primera
- A la tercera fila restar tres vegades la primera

- Eliminar la tercera fila

- Traspassar la segona columna, la de la incògnita y, al terme independent i canviar el signe de la segona fila

I per tant tenim, de la segona equació, $z=-3y$ i substituint a la primera, $x-3y=3-y$ és a dir $x=2y+3$.

Per tant la solució del sistema és $\boxed{(2y+3,\, y,\, -3y)}$ o en altres termes $\boxed{(3,0,0)+\langle(2,1,-3\rangle}$.