EXAMEN 2

1. Responded:

a) Calculad dos números reales c y d, de modo que:

$$c + 5i = \frac{13 + di}{4 - i}$$

b) Resolved la ecuación siguiente: $x^3 + 12 = 0$. Proporcionad sus soluciones complejas en forma binómica y polar.

Solución

a) Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de c y de d.

Utilizamos la propiedad que dice que si dos fracciones son iguales, entonces:

$(c + 5i)(4 - i) = (13 + di)$

Aplicamos la distributiva del producto respecto de la suma:

$4c - ic + 20i + 5 = 13 + di$

Agrupamos, ahora, partes reales y partes imaginarias:

$4c + 5 + (20 - c)i = 13 + di$

Igualamos parte real de un lado con el otro lado e igual hacemos con la parte imaginaria:

$4c + 5 = 13$

$20 - c = d$

Resolvemos el sistema de ecuaciones de manera que las incógnitas son c y d. De la primera ecuación obtenemos que $c = 2$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos $d = 18$.

b) Primero despejamos la incógnita: $x = \sqrt[3]{-12}$.

Para hallar las raíces terceras de -12 seguiremos el ejemplo de la página 44 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del Módulo 1.

A continuación escribimos el complejo -12 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del Módulo 1, sobre la forma polar de los números complejos:

$r = \sqrt{(-12)^2 + (0)^2} = 12$

$\theta = \arctan\left(\frac{0}{-12}\right) = 180°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en $0°$ y en $180°$. Como el afijo del punto buscado es $(-12, 0)$, el ángulo está entre el segundo y el tercer cuadrante, es decir, en $180°$.

Tal y como se recomienda en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando convertimos un número de forma binómica a forma polar es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número -12 en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-12, 0)$, por lo cual es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-12 = 12_{180^\circ}$

Como nos piden las raíces cúbicas debemos calcular (observemos que en el apartado 3.6.1, en el ejemplo de la página 44 del Módulo 1, se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de -8):

$\sqrt[3]{-12} = \sqrt[3]{12_{180^\circ}} = \sqrt[3]{12}_{\frac{180^o+360^o k}{3}}$ para $k = 0, 1, 2$

Esto es, el módulo de las raíces es $\sqrt[3]{12}$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{180^o+360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$.

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 180^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 300^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$\sqrt[3]{12}_{60^\circ}, \sqrt[3]{12}_{180^\circ}, \sqrt[3]{12}_{300^\circ}$

Ahora pasamos los números anteriores a forma binómica:

$\sqrt[3]{12}_{60^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \sqrt[3]{12}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} + \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$

$\sqrt[3]{12}_{180^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \sqrt[3]{12}(-1 + 0i) = -\sqrt[3]{12}$

$\sqrt[3]{12}_{300^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \sqrt[3]{12}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} - \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$

2. Considerad la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{pmatrix}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Estudiad su rango según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Determinad la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : (a+1)x + (a+1)y + (2a+2)\,z = 2a+2$$

$$\pi_2 : 2x - my - 2mz = 2 - m$$

$$\pi_3 : -mx + 2y + (2-m)z = -2m$$

según los valores de m (sustituyendo el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC).

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Dado que la matriz A es cuadrada (con 3 filas y 3 columnas), estudiamos su rango utilizando que el rango será 3 solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.5, páginas de la 29 a la 32].

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{vmatrix} = (a+1)(m^2+4m+4) = (a+1)(m+2)^2$$

En consecuencia,

- Si $m \neq -2 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}(A) = 3$.
- Si $m = -2$, entonces $A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\mathrm{rg}(A) = 1$, ya que $|A| = 0$ y todos los menores de orden 2 son nulos.

b) Recordemos que, el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema, formado por las tres ecuaciones que definen estos planos [Ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31].

$$\left.\begin{aligned} (a+1)x + (a+1)y + (2a+2)\,z &= 2a+2 \\ 2x - my - 2mz &= 2-m \\ -mx + 2y + (2-m)z &= -2m \end{aligned}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+1 & 2a+2 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m & 2-m \\ -m & 2 & 2-m & -2m \end{array}\right)$$

Utilizando el estudio del rango de la matriz A, del apartado anterior, tenemos que:

- Si $m \neq -2 \;\rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{n}^o$ incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que los tres planos se cortan en un punto.
- Si $m = -2$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = 1 \neq \mathrm{n}^o$ incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Notemos que las tres ecuaciones de los tres planos son proporcionales, por lo tanto, los tres planos son coincidentes.

3. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = < (-1,1,3), (0,-1,1), (-2,7,\lambda) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculad la dimensión de F en función de λ y una base A para cada caso.

b) Sea $v_1 = (-2a-2, 7a+7, a+1)$, $v_2 = (1, a-1, -a-3)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP. Para el caso $\lambda = 1$, ¿pertenecen v_1 y v_2 a F? Para los que pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base A que habéis encontrado en el apartado anterior.

c) Sea $B = \{v_1, v_2\}$ el conjunto formado por los vectores del apartado anterior. ¿Es B una base de F en el caso $\lambda = 1$? Si lo es, calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis encontrado en el primer apartado.

Solución

a) Calculemos el rango de la matriz de los vectores con que está definido F [Ver módulo 2, sección 4.5]. Si calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

Así para $\lambda \neq 1$ tendremos que la dimensión de F es 3, y una base puede ser la formada por los tres vectores que forman el determinante anterior $A = \{(-1,1,3), (0,-1,1), (-2,7,\lambda)\}$. Para $\lambda = 1$ tendremos que el determinante anterior es 0. Pero podemos encontrar un menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y por tanto la dimensión de F es 2 en este caso. Una base puede ser la formada por los dos vectors que contienen el menor anterior $A = \{(-1,1,3), (0,-1,1)\}$.

b) Para ver si los vectores son de F y calcular sus coordenadas en el caso que lo sean, resolvemos el sistema siguiente para v_1 [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2 \\ 7a+7 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 2a+2$, $y = -5a-5$. Por tanto, $v_1 \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(2a+2, -5a-5)$.
Para v_2 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ -a-3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = -a$. Por tanto, $v_2 \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, -a)$.

c) Sabemos que en el caso $\lambda = 1$ la dimensión de F es 2 y tenemos que tanto v_1 como v_2 son de F, además son linealmente independientes (es fácil encontrar un menor 2×2 con determinante distinto de 0). Por tanto B es base de F en el caso $\lambda = 1$.
Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de

B en función de los de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Pero esto es justamente lo que hemos hecho en el apartado anterior. Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -2a-2 & -1 \\ -5a-5 & -a \end{pmatrix}$$

4. Sustituid el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

Se pide:

a) Calculad la expresión que define a la aplicación f en función de las coordenadas en base canónica (x,y,z) de un vector genérico de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad el valor que debe tener b para que el vector $v = (1,a,3)$ sea un vector propio de f, y encontrad su valor propio asociado.

c) Para el valor de b encontrado en el apartado anterior, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y cuál sería la forma diagonal de f.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) En el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la proposición de la página 15 nos indica que dado un vector $u = (x,y,z)$ expresado en la base canónica C, podremos calcular su imagen en base canónica como $f(u) = M(f|C,C)\cdot u$. Por tanto:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Realizando el producto de la matriz por el vector obtenemos:

$$f(x,y,z) = ((3a+7)x - 2y - 2z, -4ax + (a-1)y + 2az, (8a+12)x - 2y + bz).$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{ll}
a=0 & f(x,y,z)=(7x-2y-2z,-y,12x-2y+bz) \\
a=1 & f(x,y,z)=(10x-2y-2z,-4x+2z,20x-2y+bz) \\
a=2 & f(x,y,z)=(13x-2y-2z,-8x+y+4z,28x-2y+bz) \\
a=3 & f(x,y,z)=(16x-2y-2z,-12x+2y+6z,36x-2y+bz) \\
a=4 & f(x,y,z)=(19x-2y-2z,-16x+3y+8z,44x-2y+bz) \\
a=5 & f(x,y,z)=(22x-2y-2z,-20x+4y+10z,52x-2y+bz) \\
a=6 & f(x,y,z)=(25x-2y-2z,-24x+5y+12z,60x-2y+bz) \\
a=7 & f(x,y,z)=(28x-2y-2z,-28x+6y+14z,68x-2y+bz) \\
a=8 & f(x,y,z)=(31x-2y-2z,-32x+7y+16z,76x-2y+bz) \\
a=9 & f(x,y,z)=(34x-2y-2z,-36x+8y+18z,84x-2y+bz)
\end{array}$$

b) Para que $v=(1,a,3)\in\mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, el producto de la matriz $M(f|C,C)$ por el vector v debe ser un múltiplo de v. Tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" debe existir un número $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $f(v)=\lambda\cdot v$. Usando el cálculo de la imagen mediante la matriz asociada a f, la condición se traduce a:

$$M(f|C,C)\cdot v=\begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} 3a+7-2a-6 \\ -4a+(a-1)a+6a \\ 8a+12-2a+3b \end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ a^2+a \\ 6a+12+3b \end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

De esta expresión obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} a+1=\lambda \\ a^2+a=\lambda\cdot a \\ 6a+12+3b=3\lambda \end{gathered}$$

De la primera tenemos el valor propio $\lambda=a+1$ y podemos comprobar que la segunda ecuación se cumple para ese valor. Por tanto solo necesitamos que se cumpla la tercera. Se trata de aislar la incógnita b en esa ecuación:

$$\begin{gathered} 6a+12+3b=3(a+1) \\ 3b=3a+3-6a-12=-3a-9 \\ b=-a-3 \end{gathered}$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{lll} a=0 & \lambda=1 & b=-3 \\ a=1 & \lambda=2 & b=-4 \\ a=2 & \lambda=3 & b=-5 \\ a=3 & \lambda=4 & b=-6 \\ a=4 & \lambda=5 & b=-7 \\ a=5 & \lambda=6 & b=-8 \\ a=6 & \lambda=7 & b=-9 \\ a=7 & \lambda=8 & b=-10 \\ a=8 & \lambda=9 & b=-11 \\ a=9 & \lambda=10 & b=-12 \end{array}$$

c) El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios":

$$p(t) = \left| \begin{array}{ccc} 3a+7-t & -2 & -2 \\ -4a & a-1-t & 2a \\ 8a+12 & -2 & -a-3-t \end{array} \right| = -t^3 + 3(a+1)t^2 + (a+1)^2 t - 3(a+1)^3$$

$$p(t) = (-a-1-t)(a+1-t)(3a+3-t)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $-a-1$, $a+1$ y $3a+3$. La forma diagonal de f es:

$$M(f|B,B) = \left(\begin{array}{ccc} -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+3 \end{array} \right)$$

en la base B de vectores propios. El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{lll} a=0 & p(t) = (-1-t)(1-t)(3-t) & VAPS: -1, 1, 3 \\ a=1 & p(t) = (-2-t)(2-t)(6-t) & VAPS: -2, 2, 6 \\ a=2 & p(t) = (-3-t)(3-t)(9-t) & VAPS: -3, 3, 9 \\ a=3 & p(t) = (-4-t)(4-t)(12-t) & VAPS: -4, 4, 12 \\ a=4 & p(t) = (-5-t)(5-t)(15-t) & VAPS: -5, 5, 15 \\ a=5 & p(t) = (-6-t)(6-t)(18-t) & VAPS: -6, 6, 18 \\ a=6 & p(t) = (-7-t)(7-t)(21-t) & VAPS: -7, 7, 21 \\ a=7 & p(t) = (-8-t)(8-t)(24-t) & VAPS: -8, 8, 24 \\ a=8 & p(t) = (-9-t)(9-t)(27-t) & VAPS: -9, 9, 27 \\ a=9 & p(t) = (-10-t)(10-t)(30-t) & VAPS: -10, 10, 30 \end{array}$$