PAC 2

Presentació

Aquesta PAC correspon als mòduls (*Circuits Elèctrics*) i (*Circuits RLC*).

Competències

Competències Generals

11 Capacitat d'utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.

12 Capacitat d'analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per abordar-lo i resoldre'l.

Competències Específiques

- Ser capaç d'analitzar un circuit mitjançant les lleis que regeixen un circuit analògic.
- Comprendre com es comporten en un circuit una resistència, un condensador i una bobina.
- Ser capaç d'analitzar un circuit en el domini del temps.

Objectius

- Analitzar circuits elèctrics bàsics en el domini del temps.
- Trobar els equivalents Thévenin i Norton d'un circuit.
- Entendre els transitoris.

Descripció de la PAC

La PAC està dividida en 3 parts: un qüestionari que trobareu en el Moodle de l'assignatura, 3 qüestions de caràcter teòric/pràctic i raonament i 2 problemes, un dels quals requereix l'ús d'una eina de simulació de circuits (QUCS).

Recursos

Recursos Bàsics

Mòduls *Circuits Elèctrics* i *Circuits RLC*.

Recursos Complementaris

A l'Aula trobareu informació sobre recursos addicionals, així com PAC resoltes de semestres anteriors. Per altra banda, al final de cada mòdul trobareu una bibliografia recomanada.

Criteris d'avaluació

20% Qüestionari Moodle
30% Qüestions
50% Problemes
Excepte al Qüestionari Moodle, totes les respostes s'han de justificar adequadament.

Format i data de lliurament

La PAC2 s'ha de lliurar abans del **17/04/2018 a les 23:59h** a través del **RAC** (Registre d'Avaluació Contínua). S'intentarà fer el lliurament en un únic fitxer PDF amb totes les respostes (excepte el qüestionari Moodle) sempre que sigui possible. En cas que això no pugui ser per algun motiu

justificat, es podran acceptar altres formats habituals com ara Microsoft Office (.DOC, .DOCX), OpenOffice (.ODT), fitxers de text (.TXT, .RTF) o LaTeX(.TEX).
El Qüestionari s'ha de realitzar on-line al Moodle de l'Aula de Fonaments Físics de la Informàtica. La data límit és la mateixa que la de la PAC2 ja que en forma part d'ella.

Enunciats

QÜESTIONARI MOODLE

Connecteu-vos al Moodle de l'assignatura i responeu el qüestionari corresponent a la PAC 2. Aquest qüestionari constarà d'una sèrie de preguntes preses **a l'atzar** d'entre els qüestionaris de cada setmana. Disposareu de fins a 2 intents per a realitzar-lo i la nota final serà sempre la **més alta** d'entre les obtingudes en cada intent.

Us recordem que disposeu dels qüestionaris no avaluables corresponents al temari de cada setmana, amb els que podeu practicar tantes vegades com vulgueu sense penalització.

QÜESTIONS

Qüestió 1

Volem utilitzar el circuit de la figura 1 per obtenir una tensió de $\frac{10}{3}$ V entre els terminals A i B a partir d'una pila de tensió $V_1 = 5$ V. Si $R_1 = 2$ kΩ, calculeu el valor de la resistència R_2 necessari. Indiqueu també el nom de les lleis aplicades per fer-ho.

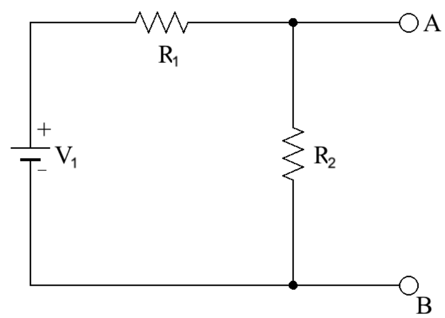

Figura 1: Circuit estudiat a la qüestió 1

Solució:
Com podem veure a la figura 2, es tracta d'un circuit amb una única malla, per la qual circula una intensitat de corrent I.

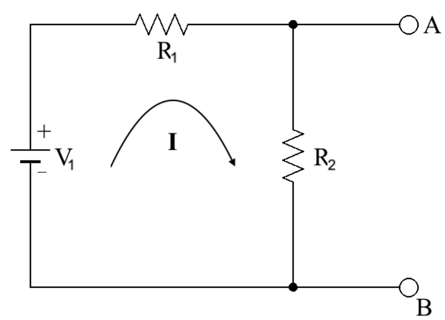

Figura 2: Malla considerada per analitzar el circuit de la qüestió 1

Per la llei d'Ohm, tenim que $V_{AB} = R_2 I$. Per tant, en primer lloc hem de calcular la intensitat I que circula per aquest circuit. Per fer-ho, apliquem la Segona llei de Kirchhoff (vegeu apartat 5.2 del mòdul *Circuits elèctrics*) a aquesta malla:

$$-V_1 + R_1 I + R_2 I = 0 \tag{1}$$

D'aquí podem aïllar I. Si substituïm també els valors numèrics de l'enunciat tenim:

$$I = \frac{V_1}{R_1 + R_2} = \frac{5}{2 + R_2} \text{ mA} \tag{2}$$

Per calcular la tensió que cau sobre R, que és precisament V_{AB}, apliquem la llei d'Ohm (vegeu apartat 3 del Mòdul 1 - *Circuits Elèctrics*):

$$V_{AB} = R_2 \cdot I = \frac{5R_2}{2 + R_2} \text{ V} \tag{3}$$

Segons diu l'enunciat, aquesta tensió és:

$$V_{AB} = \frac{10}{3} \text{ V} \tag{4}$$

Si igualem les expressions (3) i (4), obtenim una equació que ens permet aïllar R_2:

$$\frac{5R_2}{2 + R_2} = \frac{10}{3} \tag{5}$$

$$15R_2 = 10(2 + R_2) \tag{6}$$

$$15R_2 = 20 + 10R_2 \tag{7}$$

$$15R_2 - 10R_2 = 20 \tag{8}$$

$$5R_2 = 20 \rightarrow R_2 = \frac{20}{5} = 4 \text{ k}\Omega \tag{9}$$

Qüestió 2

En el circuit RC de la figura 3 l'interruptor es tanca a l'instant que anomenem $t = 0$ s. El condensador es troba inicialment descarregat.

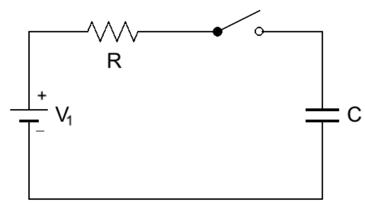

Figura 3: Circuit estudiat a la qüestió 2

a) Indiqueu quin procés es donarà a partir d'ara i quina equació modela la càrrega del condensador en funció del temps.

b) Apliqueu aquesta equació per calcular el temps necessari, expressat en μs, per tal que la càrrega del condensador sigui $q = 1$ mC. Els valors dels components del circuit són: $V_1 = 12$ V, $R = 10$ kΩ i $C = 100$ μF.

Solució

a) Es produirà la càrrega del condensador a través de la resistència (vegeu l'apartat 1.3.1 del Mòdul *Circuits RLC*). Com diu l'enunciat, el condensador està inicialment descarregat, de manera que quan es tanca l'interruptor en $t = 0$ el condensador s'oposa a un salt o canvi brusc del voltatge i la tensió en el condensador en aquell instant és $v_C = 0$ A.

Això vol dir que inicialment es comporta com un curtcircuit. D'aquesta manera, si apliquem la llei d'Ohm al circuit veiem que la intensitat inicial pel condensador és $i_C = \frac{V_1}{R}$. A partir d'aquest instant ($t > 0$), la tensió del condensador augmenta exponencialment a mesura que transcorre el temps, amb una constant de càrrega $\tau = R \cdot C$, de manera que quan s'arriba novament al règim permanent és pràcticament $V_C = V_1$ V (règim permanent). L'equació que modela aquest fenomen és

$$v_C(t) = V_1(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{10}$$

que es correspon amb l'equació (24) del Mòdul Circuits RLC (vegeu l'apartat 1.3.1 del Mòdul *Circuits RLC*).

Atès que ens demanen la càrrega en funció del temps, hem d'aplicar el concepte de capacitat explicat a l'apartat 1.1 del Mòdul *Circuits RLC*, que reproduïm aquí per comoditat

$$C = \frac{q}{v} \rightarrow q = C \cdot v \tag{11}$$

D'aquesta manera, si multipliquem l'equació (10) per la capacitat C, obtenim l'equació de la càrrega en funció del temps:

$$q_C(t) = C \cdot V_1(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{12}$$

Si observem l'equació (12),la carrega final del condensador és $C \cdot V_1$.

b) La constant de càrrega val:

$$\tau = R \cdot C = 10\ \text{k}\Omega \cdot 100\ \mu\text{F} = 1\ \text{s} \tag{13}$$

La carrega final del condensador és

$$C \cdot V_1 = 100\ \mu\text{F} \cdot 12\ \text{V} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{C} \tag{14}$$

El que estem buscant és el temps necessari perquè es compleixi la condició $q_C(t) = 10^{-3}$ C. Si substituïm aquests valors numèrics a l'equació (12) tenim:

$$1{,}2 \cdot 10^{-3}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) = 10^{-3} \tag{15}$$

$$1{,}2(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) = 1 \tag{16}$$

$$1{,}2 - 1{,}2e^{\frac{-t}{\tau}} = 1 \tag{17}$$

$$0{,}2 = 1{,}2e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18}$$

$$\frac{0{,}2}{1{,}2} = 0{,}167 = e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{19}$$

Si apliquem logaritmes a l'equació (19) aïllem el temps t:

$$\ln e^{\frac{-t}{\tau}} = \ln 0{,}167 \tag{20}$$

$$\frac{-t}{\tau} = \ln 0{,}167 \tag{21}$$

$$t = -\tau \ln 0{,}167 \tag{22}$$

Atès que $\tau = 1$ s, obtenim finalment:

$$t = -\ln 0{,}167 = 1{,}8\ \text{s} \tag{23}$$

Aquest temps és 1,8 vegades τ. Això vol dir que ens trobem en règim transitori. Tot i que la càrrega d'un condensador té una durada infinita, a efectes pràctics es considera que la càrrega és completa quan ha passat un temps de 4 vegades τ, ja que aquell moment la càrrega és un 98% del seu valor en règim permanent.

Qüestió 3

Disposem del circuit de la figura 4 en el que el **díode és ideal**.

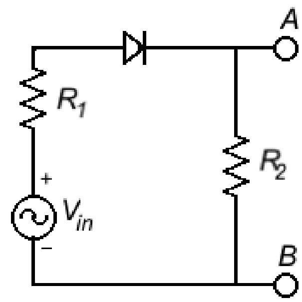

Figura 4: Circuit estudiat a la qüestió 3

Responeu les qüestions següents:

(a) Calculeu la tensió de sortida V_{AB} del circuit de la figura 4 en el moment en què la tensió d'entrada és $V_{in} = 50$ V, $R_1 = 800\ \Omega$ i $R_2 = 4200\ \Omega$ (Considereu que el díode no introdueix cap desfasament temporal).

(b) Raoneu com seria la sortida V_{AB} si la tensió d'entrada V_{in} correspon a la de la figura 5.

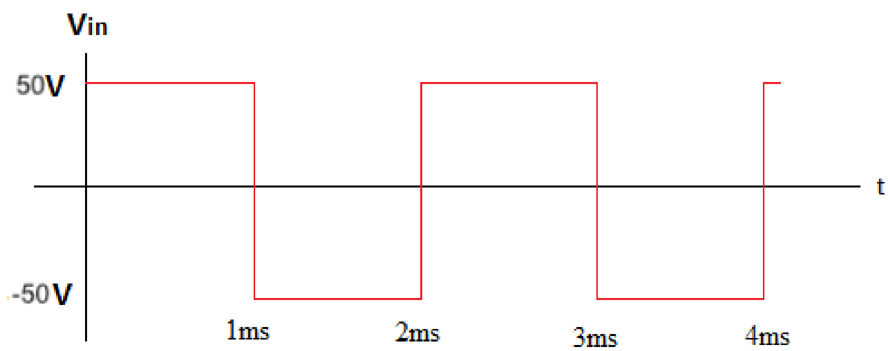

Figura 5: Tensió d'entrada, V_{in}, per al circuit de la qüestió 3

Solució:

(a) En un díode ideal, si entre l'ànode (terminal positiu) i el càtode (terminal negatiu) apliquem una tensió positiva, el díode està en directa, deixa passar el corrent i, també en el cas ideal, té una caiguda de tensió nul·la, és a dir, es comporta com un curtcircuit (vegeu el punt 4.1 del Mòdul de Circuits RLC).

D'altra banda, si entre l'ànode i el càtode apliquem una tensió negativa, el díode estarà en inversa i no deixarà passar el corrent, és a dir, es comportarà com un circuit obert (vegeu el quadre resum de les propietats d'un díode ideal al final de l'apartat 4.1 del Mòdul de Circuits RLC).

A la qüestió que ens ocupa, s'està aplicant una tensió positiva entre l'ànode i el càtode del díode, ja que V_{in} és positiva. Per tant, aquest díode ideal es troba en directa i es comporta com un curtcircuit. Ens queda un circuit amb una única malla, com el de la figura 2.

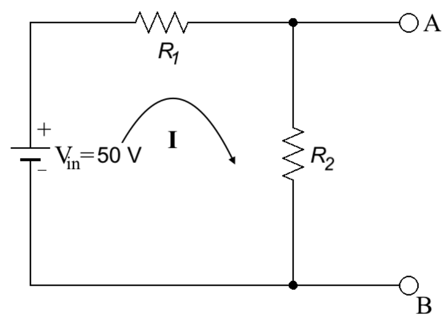

Figura 6: Circuit equivalent amb el díode en directa

Apliquem un procediment similar al que podem veure a Q1 per trobar I i V_{AB}:

$$I = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2} \tag{24}$$

$$V_{AB} = R_2 \cdot I = \frac{R_2 \cdot V_{in}}{R_1 + R_2} \tag{25}$$

Si substituïm les dades numèriques a (25), resulta:

$$V_{AB} = \frac{4200 \cdot 50}{800 + 4200} = 42 \text{ V} \tag{26}$$

(b) Per analitzar la resposta del circuit en el cas de díodes ideals, podem estudiar què succeeix en el circuit segons com sigui la diferència de potencial V_{in} que ens indica la figura 5 de l'enunciat. En tractar-se d'una ona quadrada on només hi ha dos possibles valors, +50 V i -50 V, els analitzarem per separat.

- Quan $V_{in} = 50$ V (semiperíode positiu), el díode està en directa i deixa passar el corrent. Com que es tracta d'un díode ideal, podem dir que actua com un curtcircuit pur ($\Delta V = 0$), tal com trobareu explicat a l'apartat 4.1 del mòdul 'Circuits RLC'. Per tant, tindrem que $V_{AB} = 42$ V (vegeu la figura 7).
- Quan $V_{in} = -50$ V (semiperíode negatiu), el díode està en inversa i no deixa passar el corrent. Podem dir que actua com un circuit obert, tal com trobareu explicat a l'apartat 4.1 del mòdul 'Circuits RLC'. Per tant, tindrem que $V_{AB} = 0$ V (vegeu la figura 7).

En resum, si el díode és ideal, la forma de la tensió de sortida V_{AB} serà la que indica la figura 7, senyalada de color blau. S'hi ha superposat la tensió d'entrada (color vermell) per poder veure de manera més clara quin és l'efecte del díode.

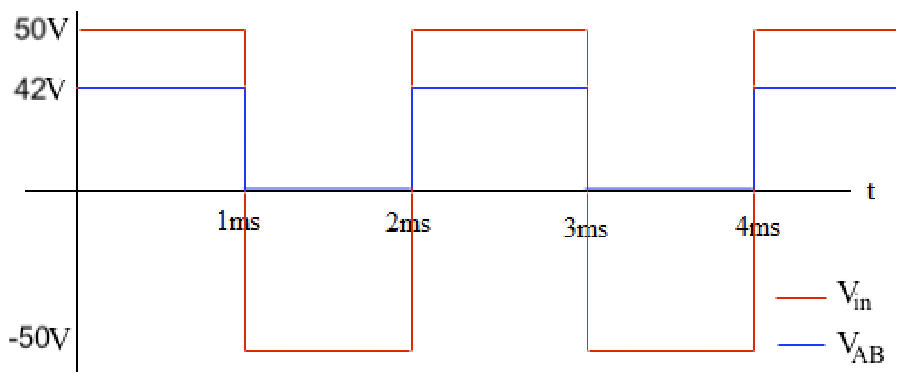

Figura 7: Tensió d'entrada i sortida del circuit a la situació (b) de la qüestió 3

PROBLEMES

Problema 1

Volem estudiar el circuit de la figura 8.

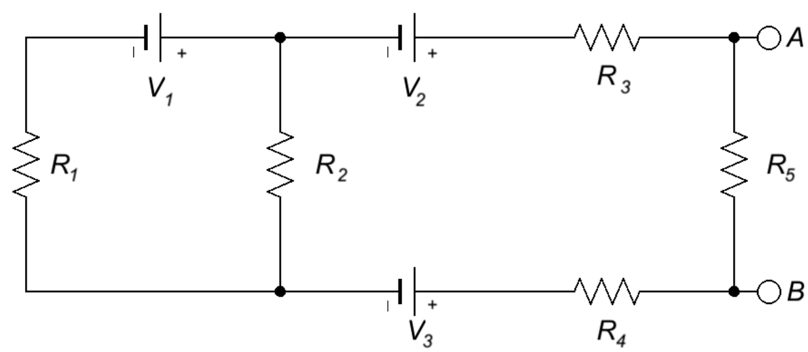

Figura 8: Circuit estudiat al problema 1

Els valors dels elements del circuit són els següents: $V_1 = 9$ V, $V_2 = 6$ V, $V_3 = 4$ V, $R_1 = 3$ kΩ, $R_2 = 6$ kΩ, $R_3 = 1$ kΩ, $R_4 = 3$ kΩ, $R_5 = 6$ kΩ. Per tal de simplificar-lo, calcularem el seu equivalent de Thévenin. Es demana el següent:

(a) Calculeu la resistència equivalent de Thévenin del circuit, vista des dels punts A i B.

(b) Calculeu la tensió de Thévenin del circuit, vista des dels punts A i B.

(c) Dibuixeu el circuit equivalent de Thévenin resultant.

Solució:

(a) El teorema de Thévenin diu que el comportament entre dos terminals d'un circuit lineal es pot substituir sempre per una font de tensió V_{th} en sèrie amb una resistència R_{th} (vegeu apartat 6.3 del Mòdul *Circuits elèctrics*). Per obtenir l'equivalent de Thévenin del circuit, primer podem trobar el valor de la resistència equivalent de Thévenin R_{th} entre els terminals A i B. Per fer-ho, hem de curtcircuitar les fonts de tensió, quedant-nos el circuit de la figura 9.

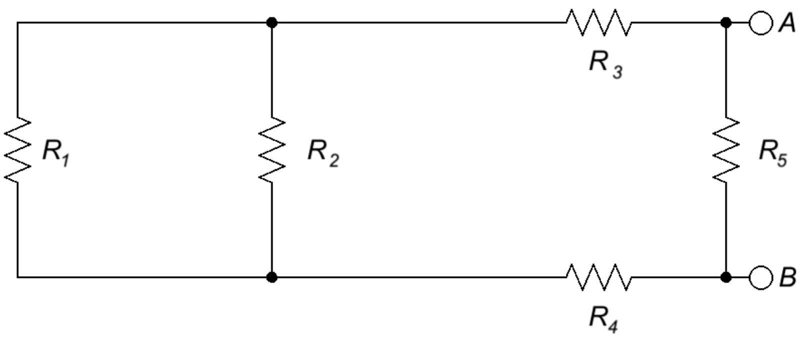

Figura 9: Curtcircuit de les fonts de tensió per trobar R_{th}.

Per a analitzar aquest circuit hem de començar per l'extrem més allunyat dels punts A i B. La figura 9 és equivalent a la figura 10. La resistència R_{12} és l'associació en paral·lel de les resistències R_1 i R_2:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2\ \text{k}\Omega \tag{27}$$

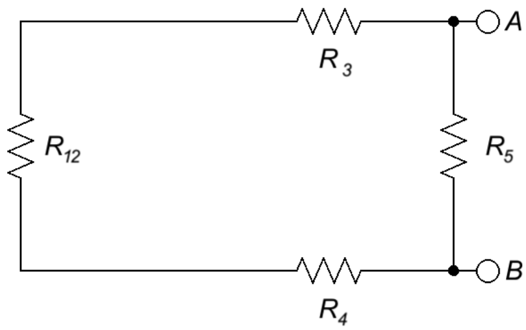

Figura 10: Associació de resistències per trobar R_{th} (I).

Si associem aquesta resistència R_{12} en sèrie amb R_3 i R_4, tenim la resistència equivalent R_{1234} de la figura 11. El seu valor està donat per:

$$R_{1234} = R_{12} + R_3 + R_4 = 6 \text{ k}\Omega \tag{28}$$

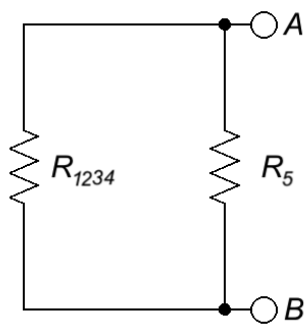

Figura 11: Associacions de resistències per trobar R_{th} (II).

El circuit de la figura 11 conté dues resistències R_{1234} i R_5 en paral·lel que, un cop associades, donen lloc a la resistència equivalent R_{th}:

$$R_{th} = \frac{R_{1234} \cdot R_5}{R_{1234} + R_5} = 3 \text{ k}\Omega \tag{29}$$

(b) Per trobar la tensió de Thévenin, calcularem la tensió entre A i B en circuit obert, és a dir, sense connectar-hi res més. Aleshores, per resoldre el circuit pel mètode de corrents de malla o Segona llei de Kirchhoff (apartat 5.2 del Mòdul *Circuits Elèctrics* i figura 22) - llei

de Kirchhoff de les tensions, el redibuixem assignant els corrents de malla tal i com es veu a la figura 12. Aquest mètode ens permet reduir el nombre d'equacions a només 2 (es podria resoldre també assignant una intensitat I_3 a la branca que conté R_2 i després afegir una tercera equació que relacionés I_1, I_2 i I_3. En tots dos casos acabaríem obtenint el mateix resultat).
D'altra banda, per calcular la tensió equivalent de Thévenin V_{th} entre els terminals A i B, ens adonem que aquesta tensió V_{th} es correspon amb la tensió que cau a R_5, la qual obtindrem pel mètode de corrents de malla.

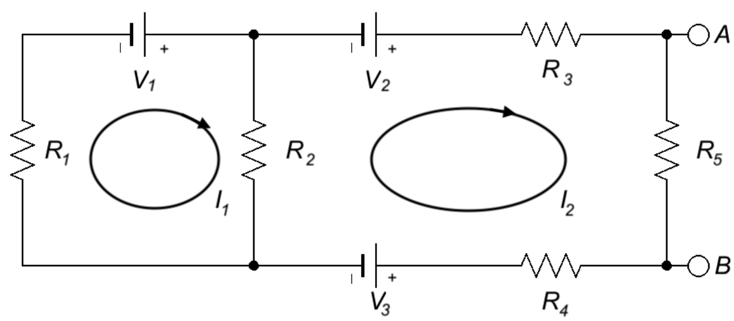

Figura 12: Assignació dels corrents de malla al problema 1.

D'aquesta forma, les equacions de malla pel circuit seran:

$$Malla\ 1: \quad -V_1 + I_1R_1 + I_1R_2 - I_2R_2 = 0 \tag{30}$$

$$Malla\ 2: \quad -V_2 + V_3 + I_2R_3 + I_2R_5 + I_2R_4 + I_2R_2 - I_1R_2 = 0 \tag{31}$$

Quan treballem amb corrents de malla, és molt útil reescriure les fórmules agrupant els termes per intensitats de malla enlloc de per les resistències. O sigui:

$$Malla\ 1: \quad I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 = V_1 \tag{32}$$

$$Malla\ 2: \quad -I_1R_2 + I_2(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) = V_2 - V_3 \tag{33}$$

Substituïm les dades de l'enunciat i obtenim:

$$Malla\ 1: \quad 9I_1 - 6I_2 = 9 \tag{34}$$

$$Malla\ 2: \quad -6I_1 + 16I_2 = 2 \tag{35}$$

Si multipliquem l'equació (34) per 2 i l'equació (35) per 3, i sumem, obtenim l'equació:

$$36I_2 = 24 \tag{36}$$

Això ens permet aïllar I_2:

$$I_2 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}\ \text{mA} \tag{37}$$

Ara podem calcular la caiguda de tensió a R_5 a partir de la llei d'Ohm:

$$V_{R_5} = R_5 I_2 = 6\ \text{k}\Omega \cdot \frac{2}{3}\ \text{mA} = 4\ \text{V} \tag{38}$$

sent aquest valor la tensió equivalent Thévenin:

$$V_{th} = V_{R_5} = 4\ \text{V} \tag{39}$$

(c) A la figura 13 podem veure com quedaria el circuit equivalent de Thévenin segons els càlculs que hem fet en els apartats anteriors.

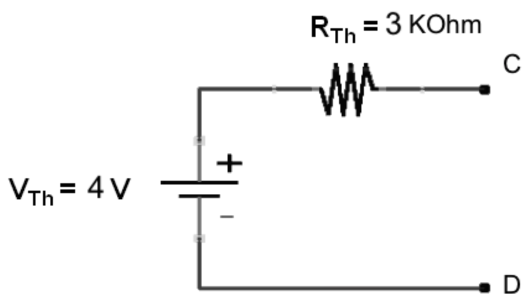

Figura 13: Circuit equivalent de Thévenin del Problema 1

Problema 2

En aquest problema farem servir una eina de simulació de circuits. En el nostre cas farem servir el QUCS, que podeu descarregar des del web `http://qucs.sourceforge.net/download.html`. El circuit a simular serà el de la figura 14. Es tracta d'un circuit RC amb tres malles del qual haureu d'estudiar la resposta transitòria.

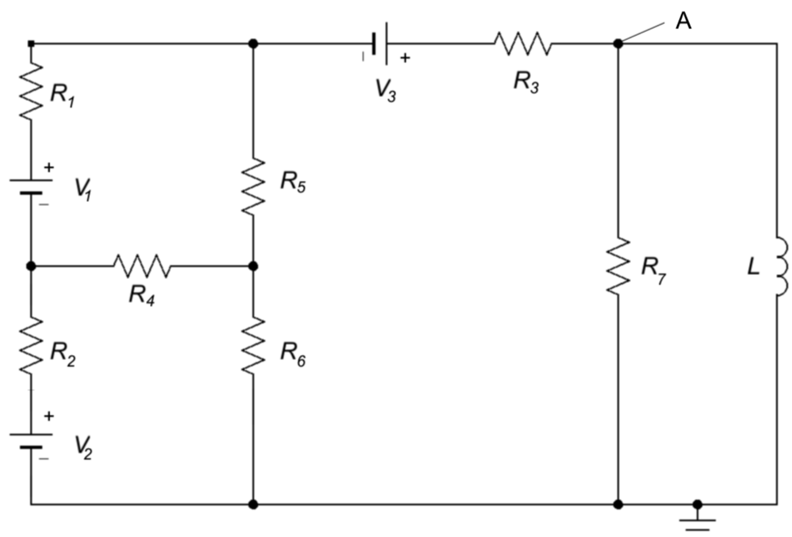

Figura 14: Circuit simulat al problema 2

Els valors dels components són: $R_1 = R_2 = 300\ \Omega$, $R3 = 350\ \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 100\ \Omega$, $R_7 = 500\ \Omega$ i $L = 5$ mH. Les fonts de tensió són $V_1 = V2 = 8$ V i $V_3 = 2$ V.

El procediment a seguir serà el següent:

1. Dibuixeu l'esquemàtic del circuit en el QUCS, amb els components que trobareu al requadre de l'esquerra. Les resistències, la bobina i la presa de terra els trobareu en el desplegable *componentes sueltos* (o *lumped components*). Les piles les trobareu a *fuentes* (o *sources*).

   No oblideu modificar els valors dels components, ja que quan s'afegeixen apareixen amb un valor per defecte que no té perquè coincidir amb el que necessitem. En el cas de la bobina, a part del valor de la seva inductància, cal indicar-li també el valor inicial nul d'intensitat ($I = 0$), ja que a l'instant inicial $t = 0$ la bobina es comporta com un circuit obert.

2. Afegiu a l'esquemàtic les etiquetes de cable d'allà on voleu que es mesuri tensió amb el botó "etiqueta de cable"del menú d'eines . En el nostre cas en tindrem prou amb el punt A, ja que el B està connectat directament a terra i sabem que tindrà sempre potencial $V = 0$.

3. Per mesurar la intensitat haureu de posar un amperímetre en sèrie a la branca on s'hagi de fer la mesura. Per mesurar una diferència de potencial entre dos punts, haureu de posar un voltímetre entre aquests dos punts. Aquests components de mesura els trobareu a *probes.*

4. Afegiu a l'esquemàtic la simulació que voleu fer. Les trobareu també en el requadre esquerre, en el desplegable *simulaciones* o *simulations* . En concret realitzarem una *simulación transitoria*, per poder visualitzar l'evolució amb el temps de la resposta del circuit. Haurem d'editar els paràmetres de la simulació per fer-la adequada. Uns valors adequats per la simulació que fareu són:

   - Tipo = Lineal
   - Inici = 0
   - Parar = 120 us
   - Pas = 120 n[1]
   - Número = 1001

   Els paràmetres "Pas" i "Número" no són independents entre ells, així que només podrem modificar-ne un dels dos. Si augmentem el número de punts a representar hem de reduir el pas, i viceversa. Després de fer tots els passos anteriors, hauríeu de tenir un esquemàtic similar al que es mostra a la figura 15

[1] la "u" indica "microsegons"

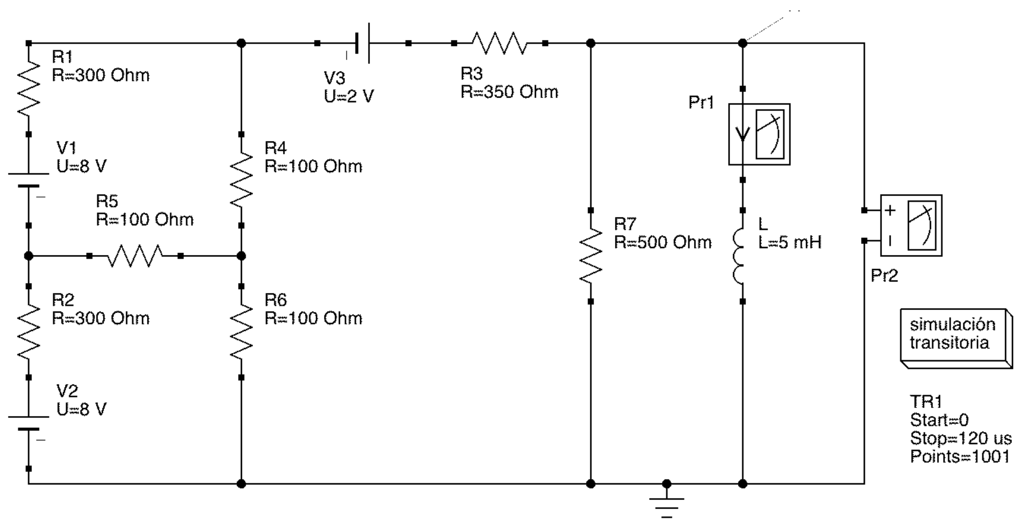

Figura 15: Esquemàtic del circuit a simular al problema 2

5. Inicieu la simulació mitjançant l'opció 'Simular' del menú 'Simulació', amb el botó de la barra d'eines o bé amb la tecla F2. La simulació serà gairebé instantània.

6. Afegiu les taules o gràfiques que necessiteu per poder respondre les preguntes. Les trobareu en el desplegable *Diagramas* de la part esquerra (en principi se us hauria d'haver obert automàticament després de córrer la simulació). Per exemple, si voleu representar l'evolució amb el temps de la tensió A, arrossegueu un diagrama tipus 'Cartesiano' cap a l'àrea de treball i veureu que se us obre un quadre de diàleg amb les dades que ha calculat el QUCS en la simulació. Llavors feu doble clic sobre la variable que vulgueu visualitzar. Per exemple, si ho heu fet amb 'A.Vt' (on 'A' és el nom que li heu posat a l'etiqueta), comprovareu que us apareix a la llista de la dreta. Feu clic a 'Aceptar' i ja tindreu la gràfica. El mateix procediment és aplicable si voleu obtenir la taula de valors (en aquest cas, haureu de seleccionar 'Tabular').

(a) Representeu l'evolució amb el temps de la tensió i de la intensitat en la bobina (podeu fer servir directament captures de pantalla de la sortida del QUCS o bé copiar les dades i representar-les pel vostre compte, com ho preferiu). Comenteu els resultats obtinguts.

(b) A partir d'una de les gràfiques anteriors o de la seva taula de valors corresponent (opció 'Tabular'), deduïu el valor aproximat de la constant de temps τ.

(c) Calculeu, a partir del valor de τ trobat a l'apartat anterior, la resistència equivalent del circuit.

(d) Expliqueu com i perquè variarien els resultats anteriors en els casos següents (podeu fer servir indistintament càlculs matemàtics, raonament lògic o simulacions amb el QUCS):

1. Es substitueix la bobina per una altre amb la meitat d'inductància.
2. S'afegeix una segona bobina idèntica en sèrie amb la que hi ha.

Solució:

En aquest problema estudiem les corbes de càrrega de les bobines en circuits RL, que trobareu explicades a l'apartat 2.3 del mòdul *Circuits RLC*.

(a) A les gràfiques que venen a continuació podem apreciar les corbes típiques de càrrega d'una bobina en un circuit RL. La figura 16 mostra l'evolució en el temps de la tensió de la bobina.

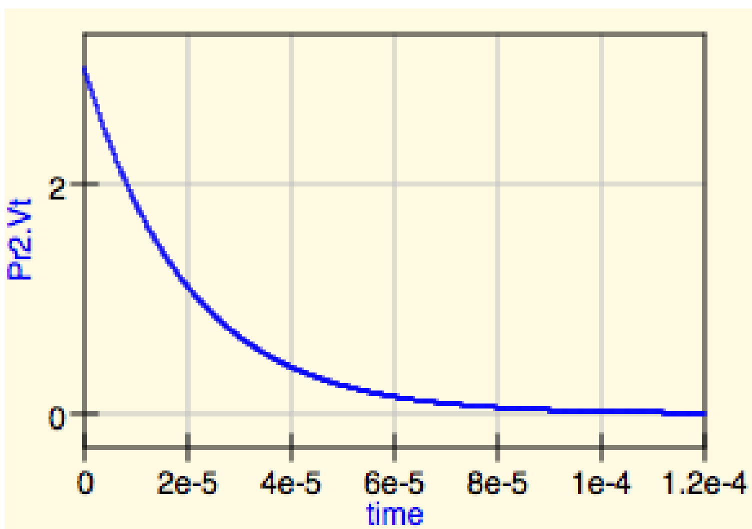

Figura 16: Evolució transitòria de la tensió de la bobina L

Observem que la tensió de la bobina disminueix molt ràpidament a l'inici, ja que és quan la bobina està completament descarregada. A mesura que avança el temps, la bobina es va carregant i la tensió als seus extrems redueix la seva velocitat de creixement (el pendent de la gràfica). Al cap d'uns 120 microsegons la bobina ja està pràcticament carregada (ha arribat al seu règim permanent) i la tensió és aproximadament zero (recordeu que en règim permanent una bobina equival a un curtcircuit (teòricament es necessita un temps infinit per arribar realment a ser zero). Tal com s'explica a l'apartat 2.3.1 del mòdul *Circuits RLC*, la tensió en la bobina ve donada per l'equació 62, que reproduïm aquí perquè la necessitarem en el proper apartat:

$$v_L(t) = Ve^{-\frac{R}{L}t} \tag{40}$$

que concorda perfectament amb el comportament descrit.

La figura 17 mostra l'evolució en el temps de la intensitat de la bobina.

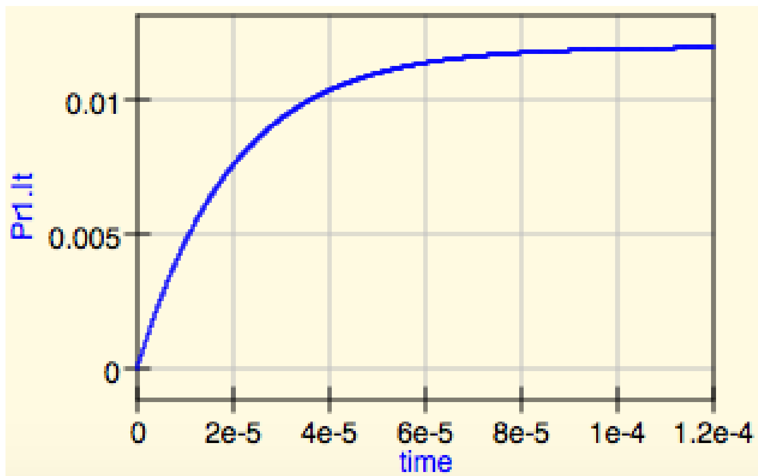

Figura 17: Evolució transitòria de la intensitat de la bobina L

Observem que la intensitat de la bobina té un valor inicial nul i que el seu valor augmenta molt ràpidament al principi, ja que, com abans,és quan la bobina està completament descarregada. A mesura que la bobina es va carregant, la intensitat redueix la seva velocitat de creixement (el pendent de la gràfica s'apropa a zero). Al cap d'uns 120 microsegons la bobina ja està pràcticament carregada (ha arribat al seu règim permanent) i la intensitat és aproximadament constant, que també és el seu valor màxim (teòricament es necessita un temps infinit per arribar realment a aquest valor constant). En aquest cas, la intensitat en la bobina ve donada per l'equació 65 que podeu trobar també a l'apartat 2.3.1 del mòdul *Circuits RLC*:

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{41}$$

on $\tau = \frac{L}{R}$ i I és la intensitat en règim permanent. També concorda completament amb el comportament descrit més amunt.

(b) El paràmetre més rellevant que determina la velocitat d'aquest procés de càrrega és el que anomenem constant de temps (τ). A l'equació 66 de l'apartat 2.3.1 del mòdul *Circuits RLC*, hi podeu trobar la definició d'aquest paràmetre com el quocient de l'autoinducció per la resistència. Es pot comprovar que aquesta divisió té dimensions de temps i determina la "lentitud" amb la que la bobina arriba al seu règim permanent, tal com podem veure a les equacions 41 i 40.

Trobarem aquest valor mitjançant un mètode basat en la seva definició mateixa, ja que el valor de τ és:

- El temps que triga la intensitat a arribar al 63,2% del seu valor màxim (això és degut a que $1 - e^{-1} = 0{,}632$)
- El temps que triga la tensió a arribar al 36,8% del seu valor màxim (això és degut a que $e^{-1} = 0{,}368$)

Qualsevol de les dues possibilitats és vàlida.

Si utilitzem la tensió, primer hem de trobar el seu valor inicial, que trobem també a partir d'una taula del QUCS. En el nostre cas és $V = 3$ V. A continuació hem de buscar el valor de temps corresponent a $V = 0{,}368 \cdot 3 = 1{,}1$ V. Novament, ho farem amb l'ajuda d'una taula del QUCS, que podem veure en la figura 17

time	Pr2.Vt
1.92e-5	1.15
1.93e-5	1.14
1.94e-5	1.13
1.96e-5	1.13
1.97e-5	1.12
1.98e-5	1.11
1.99e-5	1.11
2e-5	1.1
2.02e-5	1.09
2.03e-5	1.09
2.04e-5	1.08
2.05e-5	1.08
2.06e-5	1.07
2.08e-5	1.06
2.09e-5	1.06

Figura 18: Taula de tensions del transitori de càrrega de la bobina L

El valor de temps que obtenim és:

$$\tau = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 20\ \mu\text{s} \tag{42}$$

Si utilitzem la intensitat, en primer lloc hem de trobar el valor de la intensitat de corrent en règim permanent, que trobem a partir d'una taula de dades al QUCS. En el nostre cas, aquest valor és $I = 0{,}012$ A. A continuació hem de trobar el valor de temps corresponent a $I = 0{,}632 \cdot 0{,}012 = 0{,}00759$ A. Ho farem amb la taula del QUCS que podem veure en la figura 18

time	Pr1.It
1.92e-5	0.00741
1.93e-5	0.00743
1.94e-5	0.00746
1.96e-5	0.00749
1.97e-5	0.00751
1.98e-5	0.00754
1.99e-5	0.00757
2e-5	0.00759
2.02e-5	0.00762
2.03e-5	0.00765
2.04e-5	0.00767
2.05e-5	0.0077
2.06e-5	0.00772
2.08e-5	0.00775
2.09e-5	0.00778

Figura 19: Taula d'intensitats del transitori de càrrega de la bobina L

Novament, el valor de temps que obtenim és:

$$\tau = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{s} = 20\ \mu\text{s} \tag{43}$$

(c) Tal com hem dit, la constant de temps és el quocient de l'autoinducció per la resistència equivalent del circuit de càrrega ($\tau = \frac{L}{R}$). Atès que coneixem tant τ com L, podem trobar directament el valor de R:

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{5\ \text{mH}}{20\ \mu\text{s}} = \mathbf{250}\ \Omega \tag{44}$$

(d) Els casos que ens llista l'enunciat corresponen a variacions en els valors de la inductància L, que canvien el quocient $\frac{L}{R}$ del circuit i, per tant, el valor de la constant de temps τ, és a dir, la velocitat amb què es carrega.

Estudiem cadascun dels casos individuals:

1. *Es substitueix la bobina per una altra amb la meitat d'autoinducció.*
   Això implica que el quocient $\frac{L}{R}$ també es redueix a la **meitat** i, per tant, la càrrega total de la bobina es farà el doble de ràpid.

2. *S'afegeix una segona bobina idèntica en sèrie amb la que hi ha.*
   A l'apartat 2.4.1 del mòdul *Circuits RLC* ens expliquen que la inductància equivalent de dues bobines en sèrie és la suma de les seves inductàncies. En el nostre cas, en tenir una segona bobina idèntica, la inductància equivalent serà el doble de la inicial, i això implica que el quocient $\frac{L}{R}$ serà també el doble. La bobina trigarà així el **doble** de temps (o el que és equivalent, es carregarà la meitat de ràpid) que en el cas inicial.