Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Tercera PAC. Mòduls 6 i 7.
Semestre de tardor de 2011 (del 30 de novembre al 21 de desembre).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar:
  PAC3_Cognom1cognom2nom.pdf
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 25%) Donades les següents fórmules booleanes:

   I $a \wedge ((b \wedge \bar{b}) \vee \bar{c})$

   II $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   III $(a \wedge b \wedge c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   IV $a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   a) Digueu quines són satisfactibles i quines no. Per a cadascuna de les que ho són, doneu *totes* les assignacions de variables que la satisfan.

   b) Digueu quines fórmules estan en forma normal conjuntiva.

   c) Quines fórmules de l'enunciat podrien ser instàncies del problema $3SAT$?

   d) Enuncia el problema $3SAT$ com un problema d'optimització (*Indicació:* considera com a criteri a optimitzar el nombre de clàusules de la fórmula que s'aconsegueixen satisfer).

e) En un conegut problema de matemàtica recreativa, cal deixar a un dels dos costats d'un riu a un llop, una cabra i un enciam. No podem deixar en un mateix costat del riu al llop amb la cabra, ni a la cabra amb l'enciam (ja que el primer es menjaria al segon). Escriviu una fórmula en forma normal conjuntiva que es satisfagui si i només si es compleixen aquestes condicions.

Solució:

a) I la satisfan $\{a = 1, b = 0, c = 0\}$ i $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$.
II la satisfan $\{a = 1, b = 0, c = 0\}$, $\{a = 1, b = 0, c = 1\}$, $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$ i $\{a = 1, b = 1, c = 1\}$.
III és insatisfactible.
IV la satisfà només $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$.

b) II i IV.

c) Només II.

d) Donada una fórmula en FNC, amb exactament tres literals per clàusula, determinar el nombre natural k més gran tal que existeix una assignació de les variables que fa certes k clàusules.

e) Si anomenem als costats del riu A i B, la fórmula seria: .
$(\bar{l_A} \vee \bar{c_A}) \wedge (\bar{c_A} \vee \bar{e_A}) \wedge (\bar{l_B} \vee \bar{c_B}) \wedge (\bar{c_B} \vee \bar{e_B})$, on l_A simbolitza que el llop és a A, i anàlogament per a la resta de variables.

2. (Valoració d'un 25%) Siguin A, B i C tres problemes que verifiquen $A \leq_p B$ i $B \leq_p C$. Digueu si les següents afirmacions són verdaderes o falses, justificant la resposta:

a) $A \leq_p C$.

b) Si $B \leq_p A$, aleshores $A = B$.

c) Si $C \leq_p A$, aleshores A i C són polinòmicament equivalents.

d) Si $A \in NP$ i C és $NP - complet$, llavors B és $NP - complet$.

e) Si $C \in P$, aleshores $A \in P$.

f) Si $A \in NP$, aleshores $C \notin P$.

g) $C \not\leq_p A$.

Solució:

a) Cert, per la propietat transitiva de les reduccions.

b) Fals, $A \leq_p B$ i $B \leq_p A$ significa que A i B són polinòmicament equivalents, no que siguin iguals.

c) Cert, com a conseqüència del apartat (a) i de la reducció $C \leq_p A$ de l'enunciat.

d) Fals, caldria tenir $C \leq_p B$ i saber que B és NP.

e) Cert, per les propietats de les reduccions.

f) Fals, $A \in NP$ no implica que $A \notin P$.

g) Fals. L'enunciat permetria que A, B i C fossin el mateix problema ($A = B = C$) i aleshores tindríem que $C \leq_p A$.

3. (Valoració d'un 25%) Considereu els dos problemes de decisió següents:
$CAMI - HAM$: Donat un graf $G = (V, A)$, i dos vèrtexs u i v, determinar si existeix un camí hamiltonià de u a v a G.

$CAMI - HAM - DIR$: Donat un graf *dirigit* $G = (V, A)$, i dos vèrtexs u i v, determinar si existeix un camí hamiltonià de u a v a G.

a) Demostreu que el problema $CAMI - HAM - DIR$ pertany a NP.

b) Volem fer la reducció de $CAMI - HAM - DIR$ a $CAMI - HAM$, és a dir, $CAMI - HAM - DIR \leq_p CAMI - HAM$. Donat el graf dirigit G, li associem el graf no dirigit G' amb els següents vèrtexs: per a cada vèrtex A de G diferent de u i v, tenim tres vèrtexs a G', als que anomenem A_{entra}, A_{mig} i A_{surt}. A G' també tenim u_{surt} i v_{entra}. Penseu quines arestes ha de tenir G' per a que l'assignació que fa correspondre G' a G sigui una funció de reducció de $CAMI - HAM - DIR$ a $CAMI - HAM$, i demostreu que efectivament és una reducció polinòmica.

c) Sabent que $CAMI - HAM$ és $NP - complet$, què podem afirmar sobre $CAMI - HAM - DIR$? Podria ser que $CAMI - HAM - DIR$ pertangués a P?

Solució:

a) Un testimoni seria la llista de vèrtexs consecutius que forma el camí. Hem de comprovar que els vèrtexs adjacents a la llista ho són al graf ($O(n)$), que tots els vèrtexs de la llista són diferents ($O(n^2)$), i que hi ha tots els vèrtexs a la llista ($O(n)$). En conclusió, l'algorisme té complexitat $O(n^2)$. *Observació:* No és la manera òptima de fer-ho, però tenim prou amb demostrar que el cost és polinòmic.

b) Per a cada arc (A, B) de G, a G' posem una aresta $\{A_{surt}, B_{entra}\}$. Per a cada vèrtex A de G diferent de u i v, a G' posem una aresta d'A_{entra} a A_{mig}, i d'A_{mig} a A_{surt}. Per veure que l'assignació que fa correspondre G' a G és una funció de reducció, hem de veure que G té un camí hamiltonià si i només si el té G'. Si tenim un camí hamiltonià $u, u_1, u_2, ..., v$ a G, aleshores tenim aquest camí hamiltonià a G': $u_{surt}, u_{1,entra}, u_{1,mig}, u_{1,surt}, u_{2,entra}, u_{2,mig}, u_{2,surt}, ..., v_{entra}$.
D'altra banda, tot camí hamiltonià a G' ha de contenir les arestes del tipus $\{A_{entra}, A_{mig}\}$ i $\{A_{mig}, A_{surt}\}$, ja que és l'única manera de passar per A_{mig}. La resta d'arestes, que seran del tipus $\{A_{surt}, B_{entra}\}$, ens donen els arcs (A, B) d'un camí hamiltonià a G.

Falta veure que el cost de la reducció és polinòmic: el graf G' té 3 vèrtexs i 2 arestes per cada vèrtex de G i 1 aresta per cada arc. Per tant, la mida de G' és linial respecte a la mida de G. Per tant la reducció $f : G \to G'$ té complexitat polinòmica.

c) A partir de la reducció de l'apartat anterior, només sabem que $CAMI-HAM-DIR$ és a NP. No podem dir que sigui NP-Complet perquè això requeriria una reducció diferent a la que hem fet: $CAMI - HAM \leq_p CAMI - HAM - DIR$.

Sobre la pertinença de $CAMI - HAM - DIR$ a P no en podem dir res.

4. (Valoració d'un 25%) Considereu els dos problemes de decisió següents:

$CAMI-CURT$: Donat un graf $G = (V, A)$, dos vèrtexs u i v, i un nombre natural k, determinar si existeix un camí de u a v de llargada igual o més petita que k.

$CAMI-LLARG$: Donat un graf $G = (V, A)$, dos vèrtexs u i v, i un nombre natural k, determinar si existeix un camí de u a v de llargada igual o més gran que k.

a) Demostreu que $CAMI - CURT \in P$, donant un algorisme per resoldre'l en temps polinòmic.

b) Demostreu que $CAMI - LLARG \in NP$.

c) Demostreu que si $CAMI - LLARG \in P$, aleshores el problema del camí hamiltonià en grafs no dirigits ($CAMI - HAM$) també seria a P.

Solució:

a) Un algorisme per fer-ho seria: executar l'algorisme de Dijsktra, donant u com a vèrtex de partida. A partir del resultat, comprovar si $dist(u, v) \leq k$. Aquest algorisme té com a complexitat $O(n^2)$.

b) Un testimoni seria la llista de vèrtexs que forma el camí. Hem de comprovar que els vèrtexs adjacents a la llista ho són al graf ($O(n)$) i que tots els vèrtexs de la llista són diferents ($O(n^2)$ si es fan comparacions directes entre els elements o $O(n)$ utilitzant una taula de dispersió). En conclusió, aquest algorisme té complexitat polinòmica i verifica les entrades de $CAMI - LLARG$, demostrant per tant que $CAMI - LLARG \in NP$.

c) Donat G, si apliquem els algorismes òptims per als problemes $CAMI - CURT$ i $CAMI - LLARG$, per a u, v i k fixats, obtindrem que existeix un camí de u a v de llargada exactament k si i només si tots dos algorismes retornen el valor CERT. I això es faria en temps polinòmic per hipòtesi (aplicar dos algorismes de cost polinòmic consecutivament té cost polinòmic). Llavors, en el cas particular $k = n - 1$, podem determinar en temps polinòmic si existeix o no un camí de u a v de llargada exactament $n - 1$, on n és l'ordre de G. Només ens cal observar que això és precisament un camí hamiltonià: un camí de llargada $n - 1$.