Universitat Oberta de Catalunya

SOLUCIÓ PAC 2

Problema 1 (2 punts): Siguin els següents conjunts de vectors de R^3:

A={(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)}

B={(2,1,-1), (1,2,1)}

C={(2,1,-1), (1,-1,0)}

a) Troba la dimensió de l'espai vectorial que generen A, B i C i una base de cadascun d'ells.

b) Demostra que A i B generen el mateix subespai vectorial de R^3.

c) Demostra que C no genera el subespai generat per B.

Solució:

a) Per a trobar les dimensions calculem el rang dels vectors amb els quals està definit cada un d'ells.

$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ però podem trobar un menor 2x2 amb determinant diferent de zero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A té dimensió 2 i una base d'A seria la composada pels dos vectors que contenen aquest menor: {(1,0,-1), (1,1,0)}.

$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ja que podem trobar un menor 2x2 amb determinant diferent de zero $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Així B té dimensió 2 i una base de B és {(2,1,-1), (1,2,1)}.

$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ja que podem trobar un menor 2x2 amb determinant diferent de zero $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així C té dimensió 2 i una base de C és {(2,1,-1), (1,-1,0)}.

b) Com que sabem que els dos espais vectorials A i B tenen la mateixa dimensió, per veure que són el mateix podem veure que un és dins de l'altre. I és suficient veure-ho per els vectors de la base. Veiem si podem expressar els vectors de la base de B com a combinació lineal dels vectors de la base d'A:

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$ Que té solució x=1, y=1. Per tant (2,1,-1) pertany a A.

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$ Que té solució x=-1, y=2. Per tant (1,2,1) pertany a A.

Així doncs A i B són el mateix espai vectorial.

c) Procedim anàlogament a l'apartat anterior i anem a veure si els vectors de la base de C es poden expressar com a combinació lineal dels de la base de B.
(2,1,-1) pertany a B ja que és també element de la base de B

$$x\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$ No té solució. Per tant (1,-1,0) no pertany a B.

Així doncs C i B no generen el mateix espai vectorial.

Problema 2 (1 punt): Sigui E=<(2,3,1,-5), (0,2,-1,3)> un subespai vectorial de dimensió 2 de R^4. Sigui v=(2,α,3,-β). Troba α i β per a que v pertanyi a E i les coordenades de v en la base {(2,3,1,-5), (0,2,-1,3)} d'E.

<u>Solució:</u>

Resolem el sistema lineal $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}2\\\alpha\\3\\-\beta\end{pmatrix}$ de 4 equacions i 4 incògnites.

Trobem: x=1, y=-2 ; α=-1, β=11. Així doncs ja hem trobat l'α i β que ens demanen i les coordenades de v en E serien (1,-2).

Problema 3 (3 punts): Sigui F el subespai vectorial de dimensió 2 de R^3 generat per la base A={(1,1,1), (0,1,2)}. Sigui v=(1,–1,–3). Siguin:

$C_1=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $C_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C_3=\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}$ $C_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ $C_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

a) Pertany v a F? En cas afirmatiu troba les coordenades de v en la base A.
b) Quines de les matrius C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 són matrius de canvi de base (d'una base B a la base A) del subespai F?
c) Per a cada matriu C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 que hagis trobat que es canvi de base, troba:

i) La base B.
ii) Les coordenades de v en la base B.

Solució:

a) Resolem el sistema lineal $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Que té per solució x=1, y=-2.

Per tant sí que v pertany a F, i les seves coordenades en la base A són (1,-2).

b) Sabem que les matrius de canvi de base expressen els vectors d'una base en funció dels de l'altra. També sabem que totes les bases tenen el mateix nombre de vectors i que aquest és la dimensió de l'espai vectorial. Això fa que les matrius de canvi de base siguin quadrades i de la dimensió de l'espai vectorial com a mides.
Així que això elimina totes les possibilitats excepte C_1 i C_3.
També sabem que les matrius de canvi de base tenen inversa (la matriu de canvi de base en la "direcció" contraria). C_3 no és invertible (té determinant zero) per tant no és matriu de canvi de base.
Per tant, només C_1 és una matriu de canvi de base.

c) Anem a expressar en la base A els dos vectors de la base B utilitzant la matriu de canvi de base:

$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ així b_1 és $-1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ així b_1 és $1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

i per tant la base B és {(-1,0,1), (1,1,1)}.
Per a trobar les coordenades de v en la base B resolem el sistema lineal $x\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Que té per solució x=-2, y=-1. Per tant les coordenades de v en la base B són (-2,-1).
Podem comprovar que la matriu de canvi de base transforma les coordenades que acabem de trobar en les que hem trobat a l'apartat a) (també una manera alternativa de trobar les coordenades de v en B hauria estat resoldre el sistema lineal amb les coordenades en B com a incògnites).

$$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$