

PAC1

Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions d'algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

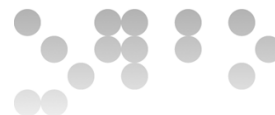
En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudo-grafs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usats sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.



Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) La companyia de telèfons d'un país que s'ha independitzat recentment vol assignar números de telefon de 7 xifres $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ als seus usuaris. Utilitzeu les tècniques estudiades en el tema de funcions per respondre:
 - (a) Suposant que $0 \leq d_i \leq 9$, a quants usuaris pot donar servei?
 - (b) Si la primera xifra, d_1 , no pot ser 0, a quants usuaris pot donar servei?
 - (c) Si totes les xifres han de ser diferents, a quants usuaris pot donar servei?
 - (d) Si tenim les restriccions dels apartats (b) i (c) alhora (primera xifra diferent de 0, totes les xifres diferents), a quants usuaris pot donar servei? (**Indicació:** Considereu dos casos per separat: si s'utilitza el 0 en les darreres 6 xifres i si no s'utilitza).
2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent on n és un nombre enter $n > 1$.


```

1  funció DivisorMesGran( $n$ )
2    inici
3       $d \leftarrow n - 1$ 
4      mentre  $n \bmod d \neq 0$ 
5         $d \leftarrow d - 1$ 
6      fimentre
7      retorn  $d$ 
8    fi
      
```

 - (a) Calculeu el resultat de les següents crides: $\text{DivisorMesGran}(24)$, $\text{DivisorMesGran}(17)$, $\text{DivisorMesGran}(39)$, $\text{DivisorMesGran}(100)$.
 - (b) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme.
 - (c) Determineu, en funció d' n , la complexitat de l'algorisme.
 - (d) Podeu proposar una alternativa que millori l'algorisme?
3. (Valoració d'un 20%) En un centre educatiu disposen de 4 aules d'informàtica amb 7 ordinadors cadascuna. A cada aula, el tècnic del centre ha connectat entre si els ordinadors formant una xarxa. No hi ha connexions entre ordinadors de diferents aules. A la taula següent figura el nombre de connexions realitzades a cada ordinador:

Aula	
A_1	3, 3, 3, 3, 2, 2, 2
A_2	4, 3, 3, 3, 2, 2, 1
A_3	4, 3, 3, 3, 3, 1, 1
A_4	3, 3, 2, 2, 2, 1, 1

Usant la teoria de grafs, responeu a les qüestions següents:

- (a) Quines de les configuracions anteriors corresponen realment a una xarxa d'ordinadors.
 - (b) Per a les configuracions correctes, calculeu el nombre de cables que s'han utilitzat.
 - (c) Per a les configuracions correctes, dibuixeu una topologia de xarxa que es correspongui amb la configuració donada.
 - (d) Existeix una topologia de xarxa que permeti connectar tots els ordinadors d'una aula? Raoneu la resposta. Es considera que dos ordinadors estan connectats si un paquet pot arribar de l'un a l'altre seguint 1 o més connexions.
4. (Valoració d'un 20%) Donat un graf qualsevol $G = (V, A)$, es defineix el seu *graf línia* $L(G)$ com el graf $L(G) = (A, A')$ tal que els vèrtexs de $L(G)$ són les arestes de G i dos vèrtexs són adjacents en $L(G)$ si i només si les arestes corresponents a G tenen un vèrtex en comú.

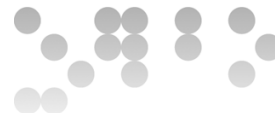


- (a) Representeu gràficament els grafs $K_3 + T_2$ i $T_2 \times E_3$ i determineu l'ordre dels seus grafs línia.
 - (b) Determineu el graf línia dels grafs següents: graf estrella E_n , graf trajecte T_n i graf cicle C_n .
 - (c) Demostreu que si G és connex aleshores $L(G)$ també és connex.
 - (d) Demostreu que si G és regular aleshores $L(G)$ també és regular.
 - (e) Si G és regular d'ordre n , mida m i grau d , calculeu l'ordre de $L(G)$, la mida de $L(G)$ i el grau dels vèrtexs de $L(G)$ en funció d' n , m i d .
 - (f) Quina condició hauria de complir un graf G per a que $L(G)$ tingui tots els seus vèrtexs de grau parell?
5. (Valoració d'un 20%) Una companyia de transport aeri vol enviar mercaderies entre 6 ciutats, a, b, c, d, e, f . La taula següent mostra el cost (en milers d'euros) de fletar un avió de transport entre les diferents ciutats:

	a	b	c	d	e	f
a	—	14	—	16	—	—
b	14	—	9	6	13	25
c	—	9	—	—	4	12
d	16	6	—	—	8	—
e	—	13	4	8	—	11
f	—	25	12	—	11	—

Utilitzant l'algorisme més adequat, responeu les questions següents:

- (a) L'escenari plantejat per aquesta taula correspon a un graf dirigit o a un graf simple (no dirigit)? Justifiqueu la resposta.
- (b) Podem afirmar que la companyia podrà transportar les mercaderies entre qualsevol de les 6 ciutats?
- (c) Calculeu el cost mínim de fletar un avió que des de la ciutat a pugui arribar a les altres cinc ciutats. Indiqueu les ciutats que caldria passar en cada cas.
- (d) Quines són les dues ciutats més allunyades entre sí, és a dir, les dues ciutats amb el cost més alt per fletar un avió que permeti anar d'una a l'altra?
- (e) A quina ciutat caldria posar el centre de distribució de manera que el cost total de fletar avions a la resta de ciutats sigui el menor possible.



Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59** del dia **24/10/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**