PAC1

Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) A l'antic sistema de matriculació de cotxes, el provicial alfanumèric, les matrícules constaven d'un codi de província (d'un total de 52), 4 dígits i finalment dues lletres de l'alfabet {ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}. L'any 2000 es va canviar el sistema i actualment les matrícules consten de 3 lletres i 4 dígits. Les lletres son les de l'alfabet anterior excepte vocals i la lletra Q.

   (a) En quin dels dos sistemes hi ha més matrícules?

   (b) Quantes matrícules del primer tipus hi ha amb totes les xifres senars?

   (c) Quantes matrícules del segon tipus hi ha que tenen alguna lletra repetida?

   (d) Considerem la funció $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que, donada la longitud n d'un alfabet, ens retorna quantes matrícules del segon tipus hi ha fent servir un alfabet d'aquesta longitud. Justifiqueu si aquesta funció és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució:

(a) En el primer cas, el nombre de matrícules és $52 \cdot VR(10,4) \cdot VR(26,2) = 351.520.000$. En el segon cas, hi ha $VR(20,3) \cdot VR(10,4) = 8.000.000$. Per tant, hi ha més matrícules en el primer cas.

(b) Si les xifres són senars, aleshores el conjunt de possibles xifres és $\{1,3,5,9\}$ i, per tant, el nombre de matrícules és $52 \cdot VR(5,4) \cdot VR(26,2) = 21.970.000$.

(c) Per determinar el nombre de matrícules que tenen alguna lletra repetida, restem del total les que no tenen cap lletra repetida. Per tant, el nombre de matrícules amb alguna lletra repetida és $VR(20,3) \cdot VR(10,4) - V(20,3) \cdot VR(10,4) = 8.000.000 - 6.840.000 = 11.600.000$.

(d) Tenim que $f(x) = VR(x,3) \cdot VR(10,4) = x^3 \cdot 10^4$. La funció Ìes injectiva, ja que si $f(x) = f(y)$ aleshores $x^3 \cdot 10^4 = y^3 \cdot 10^4$, d'on simplificant s'obté $x = y$. La funció no és exhaustiva ja que, per exemple, el 5 no té antiimatge; de fet, cap valor que no sigui múltiple de 1.0000 té antiimatge. Atés que no és exhaustiva, tampoc és bijectiva.

---

2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent per calcular el màxim comú divisor dels nombres enters n i m on $n > m$.

```
funció Mcd(n, m)
  inici
    r ← n
    p ← m
    mentre r mod p ≠ 0 fer
            d ← p
            p ← r mod p
            r ← d
    fimentre
    retorn p
  fi
```

   (a) Calculeu el resultat de les següents crides: $Mcd(7,5)$, $Mcd(121,22)$, $Mcd(176715,23562)$.

   (b) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme.

   (c) Determineu, en funció d'n, la complexitat de l'algorisme.

   (d) Proposeu una millora de l'algorisme. Millora aquest algorisme el nombre d'operacions? I la complexitat?

Solució:

(a) Aplicant l'algorisme tenim que els resultats són $1, 11$ i 11781.

(b) Les línies $3, 4$ i 10 efectuen 1 operació elemental cada una. Les línies $6, 7$ i 8 efectuen $1, 2$ i 1 operació elemental cada una multiplicat pel nombre de vegades que s'executa el bucle mentre. La línia 5 executa 1 operació i 1 comparació, també multiplicat pel nombre de vegades que s'executa el bucle mentre. Finalment, podem considerar que el nombre d'iteracions del buble és com a màxim $\log(n)$ (encara que també podem considerar com a correcte $n-1$ operacions). Per tant, el nombre de d'operacions elementals és $6\log(n)+3$.

(c) D'acord amb les propietats de la complexitat, l'algorisme té una complexitat $O(6\log(n)+3) = O(\log(n))$.

(d) El bucle mentre calcula dues vegades el valor $r \bmod p$. Una millora de l'algorisme seria:

funció *Mcd*(n, m)
  inici
    $r \leftarrow n$
    $p \leftarrow m$
    $d \leftarrow r \bmod p$
    mentre $d \neq 0$ **fer**
        $r \leftarrow p$
        $p \leftarrow d$
        $d \leftarrow r \bmod p$
    fimentre
    retorn p
  fi

En aquest cas, seguint el raonament de l'apartat b), l'algorisme efectua $5\log(n)+5$ operacions elementals i per tant sí que millora el nombre d'operacions. La complexitat en aquest cas és $O(5(\log(n)+5) = O(\log(n))$ i, per tant, la complexitat és la mateixa.

3. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent escenari que es pot modelar fent servir teoria de grafs i responeu a les preguntes. En Bernat (B) organitza una festa a casa seva. Decideix convidar a 5 amics seus i els hi ofereix que vinguin a la festa amb altres amics. Quan els convidats arriben a la festa, només es saluden entre ells els que ja es coneixien prèviament. En total hi ha 10 persones a la festa {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J}, que estan ordenades en ordre decreixent segons el nombre de persones que coneix cadascuna. Sabem que B i C han saludat a 5 persones i E,F,G,H,I i J només a 1 persona.

   (a) A quantes persones ha saludat A i a quantes D?

   (b) Dibuixeu un graf que es correspongui a l'escenari descrit.

   (c) Doneu un subgraf complet màxim del graf anterior. En termes de l'escenari plantejat, que compleixen les persones que formen part d'aquest subgraf?

   (d) Doneu la seqüència de graus del graf complementari i expliqueu que signifiquen aquests valors a l'escenari plantejat. Fent servir aquesta seqüència, quantes presentacions s'han de fer per tal que tots els assistents a la festa es coneguin entre ells?

Solució:

(a) La seqüència de graus del graf és $[x, 5, 5, y, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Com els vèrtexs estan ordenats en ordre creixent i el graf té 10 vèrtexs tenim que el el grau màxim és 9 i aleshores $5 \leq x \leq 9$ i $1 \leq y \leq 5$.

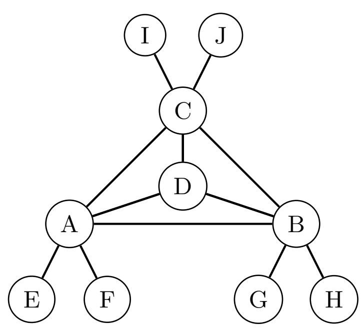
<table>
<tr><th>$x=9$</th><th>$x=8$</th><th colspan="2">$x=7$</th><th colspan="2">$x=6$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">9,5,5,y,1,1,1,1,1,1
4,4,y-1,0,0,0,0,0,0
4,4,y-1</td><td rowspan="3">8,5,5,y,1,1,1,1,1,1
4,4,y-1,0,0,0,0,0,1
4,4,1,y-1</td><td colspan="2">7,5,5,y,1,1,1,1,1,1
4,4,y-1,0,0,0,0,1,1</td><td colspan="2">6,5,5,y,1,1,1,1,1,1
4,4,y-1,0,0,0,1,1,1</td></tr>
<tr><td>$y>1$</td><td>$y=1$</td><td>$y>1$</td><td>$y=1$</td></tr>
<tr><td>4,4,y-1,1,1
3,y-2,0,0
3,y-2</td><td>4,4,1,1</td><td>4,4,y-1,1,1,1
3,y-2,0,0,1
3,y-2,1</td><td>4,4,1,1,1
3,0,0,0
3</td></tr>
<tr><td>No gràfica</td><td>No gràfica</td><td>No gràfica</td><td>No gràfica</td><td>No gràfica</td><td>No gràfica</td></tr>
</table>

De la taula anterior podem observar que la única possibilitat és $x = 5$ i la seqüència és $[5, 5, 5, y, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Pel lema de les encaixades, sabem que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell. Per tant, $y \in \{5, 3, 1\}$.

$y=5$	$y=3$	$y=1$
5,5,5,5,1,1,1,1,1,1 4,4,4,0,0,1,1,1,1 4,4,4,1,1,1,1 3,3,0,0,1,1 3,3,1,1 2,0,0 No gràfica	5,5,5,3,1,1,1,1,1,1 4,4,2,0,0,1,1,1,1 4,4,2,1,1,1,1 3,1,0,0,1,1 3,1,1,1 0,0,0 Gràfica	5,5,5,1,1,1,1,1,1,1 4,4,0,0,0,1,1,1,1 4,4,1,1,1,1 3,0,0,0,1 3,1 No gràfica

Així, A ha saludat a 5 persones i D a 3.

(b) Una represntació gràfica:



(c) Un subgraf complet màxim es el donat pels vèrtexs $\{A, B, C, D\}$. Les persones corresponents a aquests vèrtexs es coneixen tots entre ells.

(d) La seqüència del graf complementari és $[4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$. Corresponen a les persones que no coneixien prèviament a la festa. Les presentacions que s'han de fer coincideixen amb les arestes del graf complementari. Fent servir el lema de les encaixades, s'han de fer $\frac{1}{2}(4+4+4+6+8+8+8+8+8+8) = 33$ presentacions.

---

4. (Valoració d'un 20%) Considereu els grafs G_1, G_2, G_3 i G_4 definits de la forma següent: $G_1 = C_3 \times T_2$, $G_2 = (N_1 + T_6)^c$, G_3 té com a llista d'adjacències

$$\begin{array}{ccl} 1 & : & 3 \\ 2 & : & 3,4 \\ 3 & : & 1,2 \\ 4 & : & 2 \end{array}$$

i la matriu d'adjacències de G_4 és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

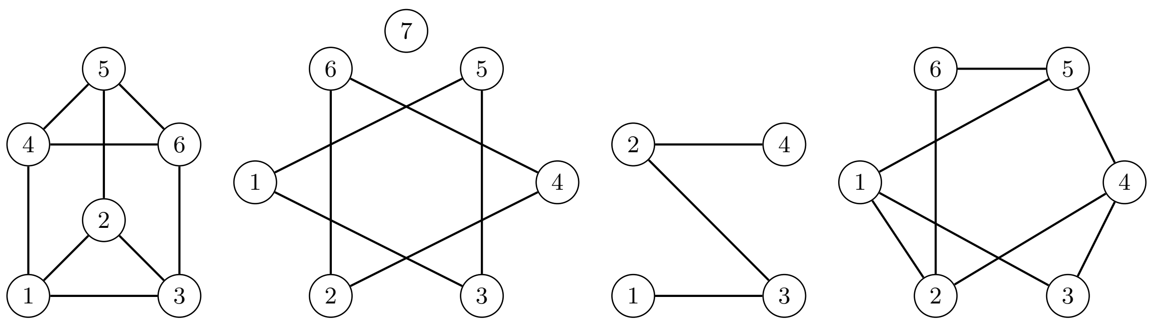
(a) Indiqueu justificadament quins grafs són bipartits. En cas afirmatiu, doneu dos conjunts que determinin la bipartició.

(b) Indiqueu quins grafs són connexos. En cas afirmatiu, justifiqueu quin és el nombre màxim d'arestes que es poden eliminar sense que deixi de ser connex.

(c) Indiqueu, justificadament, quins dels grafs són autocomplementaris. En cas afirmatiu, doneu l'isomorfisme.

(d) Doneu, per a cada cas, un subgraf r-regular màxim.

Solució: La representació gràfica dels grafs és:



G_1 G_2 G_3 G_4

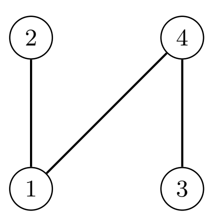
(a) Els grafs G_1 i G_2 no són bipartits ja que tenen cicles de longitud 3, senar. Els grafs G_3 i G_4 sí que són bipartits; els conjunts de la partició són $\{1,2\},\{3,4\}$ i $\{1,4,6\},\{2,3,5\}$ respectivament.

(b) L'únic graf no connex és G_2. En la resta de casos, hem de tenir en compte que un graf connex de n vèrtexs té un mínim de $n-1$ arestes. Considerant la mida de G_1, G_3 i G_4, tenim que el nombre mínim d'arestes en cada cas és $5, 3$ i 5 respectivament. Com el nombre d'arestes dels tres grafs són $9, 3$ i 8, les arestes que podem eliminar són $4, 0$ i 3 respectivament.

(c) Un graf és autocomplementari si és isomorf al seu complementari. Primer de tot, comparem la seqüencia de graus de cada graf amb la del seu complementari:

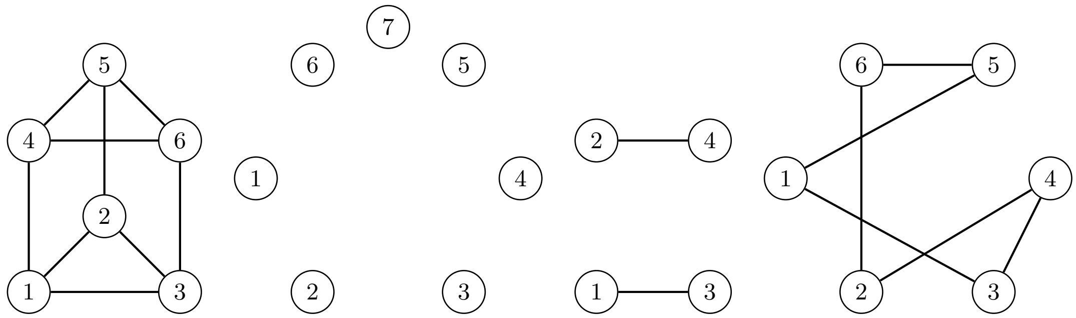
G	Seq. G	Seq. G^c
G_1	$[3,3,3,3,3,3]$	$[2,2,2,2,2,2]$
G_2	$[2,2,2,2,2,2,0]$	$[4,4,4,4,4,4,6]$
G_3	$[1,2,2,1]$	$[2,1,1,2]$
G_4	$[3,3,2,3,3,2]$	$[2,2,3,2,2,3]$

Podem assegurar que G_1, G_2 i G_4 no són autocomplementaris perquè la seqüència de graus no coincideix amb la del seu complementari. En el cas de G_3 tenim que G_3^c és



que sí és isomorf a G_3. Un isomorfisme seria $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$ i $f(4)=3$.

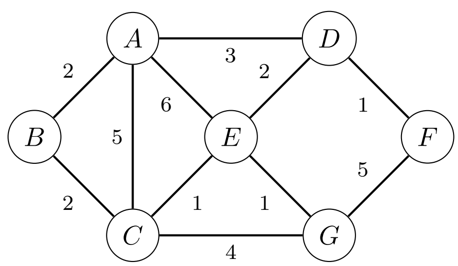
(d) El graf G_1 és 3-regular; per tant el subgraf r-regular màxim és ell mateix. El graf G_2, té un vèrtex de grau 0. Per tant, el subgraf r-regular màxim és N_7. En el cas de G_3, el grau mínim és 1 i, per tant, $r \leq 1$. Si eliminem l'aresta $(2,3)$ obtenim un graf 1-regular. De la mateixa manera, com el grau mínim de G_4 és 2, tenim que $r \leq 2$. Podem aconseguir un subgraf 2-regular eliminant les arestes, per exemple, $(1,2)$ i $(4,5)$. Els subgrafs r-regulars màxims en cada cas serien els següents.



G_1 G_2 G_3 G_4

---

5. (Valoració d'un 20%) El següent graf representa el conjunt de capses elèctriques d'un comerç i la longitud dels tubs que les uneix



(a) -

(b) Sota de la capsa F s'ha instal·lat l'ordinador i a la capsa G es posa una webcam. Quin és l'itinerari que permet que el cable sigui més curt?

(c) Quines són les capses que necessiten més longitud de cable per arribar d'una a l'altra?

(d) Si volem instal·lar webcam a totes les capses, on instal·larem l'ordinador de manera que la longitud de cable mitjana entre l'ordinador i les webcams sigui mínima?

Solució:

(a) -

(b) Apliquem l'algorisme de Dijkstra per trobar el camí més curt. La taula és la següent:

A	B	C	D	E	F	G
(∞,F)	(∞,F)	(∞,F)	(∞,F)	(∞,F)	(0,F)	(∞,F)
(∞,F)	(∞,F)	(∞,F)	(1,F)	(∞,F)	(0,F)*	(5,F)
(4,D)	(∞,F)	(∞,F)	(1,F)*	(3,D)	(0,F)	(5,F)
(4,D)	(∞,F)	(4,E)	(1,F)	(3,D)*	(0,F)	(4,E)
(4,D)*	(6,A)	(4,E)	(1,F)	(3,D)	(0,F)	(4,E)
(4,D)	(6,A)	(4,E)*	(1,F)	(3,D)	(0,F)	(4,E)

Ara tocaria agafar G com a pivot (té el cost mínim entre els no explorats), per tant ja està definit el cost del camí (4) i es pot reconstruir el camí $F-D-E-G$.

(c) Calculem primer la longitud de cable entre totes les capses amb l'algorisme de Floyd:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 1 & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu final és:

$$d^7 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Les capses que necessiten més longitud de cable per estar connectades entre elles són la A i la G o bé la B i la F.

(d) Cada fila de la matriu ens dóna la longitud de cable entre cada capsa a la resta. La longitud mitjana serà la suma de cada fila (o columna) dividida per 7:

A	B	C	D	E	F	G
3.42	3.14	2.28	2.42	2.14	3.14	2.85

La capsa amb menor distància mitjana és la E i, per tant, serà on instal·larem l'ordinador.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 22/10/2014**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**