SOL practica cat P2018 - Solución práctica 2018 de Álgebra

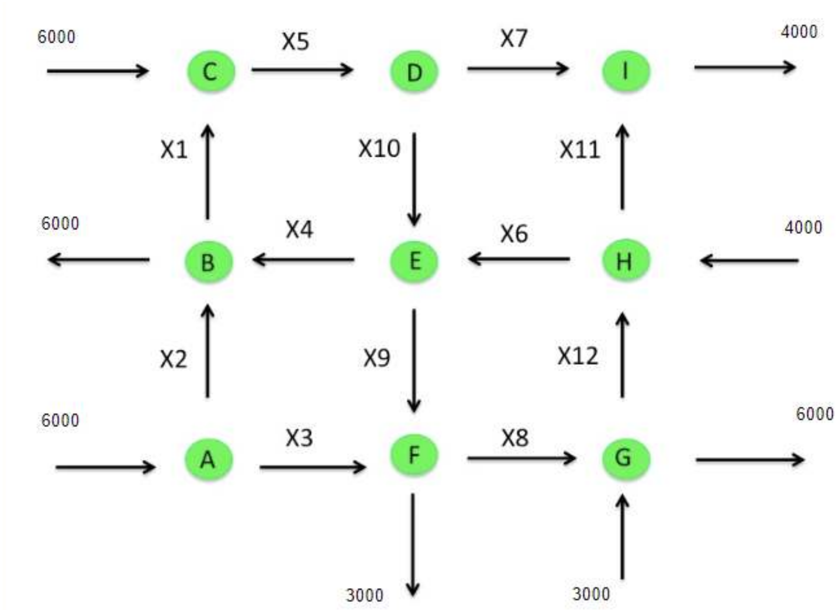
Algebra (Universitat Oberta de Catalunya)

05.557 Àlgebra / 11.506 Matemàtiques I

Solució Pràctica

Problema 1. Exemple d'Enunciat (40%)

L'esquema de la figura representa una part de la xarxa circulatoria de vehicles de carrers de la ciutat de Boston amb la direcció i sentit marcats. Després d'analitzar un històric de dades, s'ha aconseguit obtenir informació sobre la quantitat mitjana, en unitats hora, de vehicles que entren i surten d'alguns carrers en una hora:



a) (2 punts) Suposant una condició d'equilibri en cada cruilla (és a dir, el nombre total de vehicles que entra a una cruilla és el mateix del nombre de vehicles que en surt), plantegeu, discutiu i resoleu el corresponent sistema d'equacions, on podreu determinar la mitjana del nombre de vehicles que circula per cada carrer per hora.

b) (2 punts) Quin ha de ser el nombre mitjà de vehicles per hora, en un dia determinat, si es fan obres als carrers X4 i X12, on no hi pot circular cap vehicle?

Resolució:

a) En primer lloc fem la matrius d'adjacència a partir de cada node

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Defineix}$$

$$F = [6000,6000,6000,0,0,3000,3000,4000,4000] \quad \text{Defineix}$$

i la matriu ampliada amb els fluxes exteriors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4000 \end{pmatrix} \quad \text{Defineix}$$

Observem que el rang de la matriu i la matriu ampliada coincideix

$$\text{rang}(M) = 8 \quad \text{Calc}$$

$$\text{rang}(N) = 8 \quad \text{Calc}$$

d'aquesta manera el sistema és compatible indeterminat, ja que el nombre de variables és 12 i el rang és 8, així tenim 12-8=4 graus de llibertat:

Resolem el sistema:

$$R = \text{resol}(M,F) \quad \text{Defineix}$$

$$H = R_1 \quad \text{Defineix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

H és el nucli de M, i les seves columnes són base del nucli, de manera que podem determinar totes les solucions de l'equació a partir d'una solució particular P

$$P = R_2 \quad \text{Defineix}$$

$$P = [-2000,0,6000,4000,4000,4000,4000,3000,0,0,0,0] \quad \text{Calc}$$

$$H\cdot[a,b,c,d]+P = [-b+c-2000,-a+d,a-d+6000,a-b+c-d+4000,-b+c+4000,a-b+4000,-b+4000,a+3000,d,c,b,a] \quad \text{Calc}$$

on la solució general té 4 graus de llibertat, que es corresponen amb la dimensió del nucli, que és 4.

b)

Sigui ara que X4=X12=0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Defineix}$$

$$\text{rang}(A) = 8 \quad \text{Calc}$$

Com que el rang de la nova matriu A continua sent 8, i el sistema és (altre cop) compatible indeterminat, cal resoldre el sistema com abans,

$$S = \text{resol}(A,F) \quad \text{Defineix}$$

$$T = S_1 \quad \text{Defineix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

$$U = S_2 \quad \text{Defineix}$$

$$U = [-2000,4000,2000,4000,4000,4000,3000,4000,0,0] \quad \text{Calc}$$

$$T\cdot[a,b]+U = [-a+b-2000,-a+b+4000,a-b+2000,-a+b+4000,-a+4000,-a+4000,3000,-a+b+4000,b,a] \quad \text{Calc}$$

Problema 2. Exemple d'Enunciat (60%)

La matriu d'una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ és la següent

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

a) (1 punt) Calculeu la dimensió i una base del nucli.
b) (1 punt) Calculeu la dimensió i una base de la imatge.
c) (1 punt) Calculeu el polinomi característic de f.
d) (1 punt) Trobeu els valors i vectors propis de la matriu.
e) (1 punt) Estudieu si A és Diagonalitzable, i en cas afirmatiu, trobeu la corresponent matriu diagonal D.
f) (1 punt) Calculeu D^4 i a partir d'aquest resultat calculeu A^4.

Resolució:

En primer lloc definim la matriu a wiris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

a) Wiris permet calcular directament el nucli de l'aplicació

$$\text{nucli}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

i els vectors columna que ens proporciona ja són base del nucli, de manera que la seva dimensió és 8.

b) De manera similar, wiris permet calcular la seva imatge

$$\text{imatge}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \\ 8 & 9 \\ 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

i la dimensió de la imatge és 2.

c) Ara calculem el polinomi característic

$$p = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3-\lambda & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5-\lambda & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7-\lambda & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9-\lambda & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11-\lambda & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13-\lambda & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15-\lambda & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17-\lambda & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19-\lambda \end{vmatrix}$$

i en calcularem les seves arrels, que serán els valors propis de l'aplicació.

$$p = \lambda^{10} - 100\cdot\lambda^{9} - 825\cdot\lambda^{8} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resol}(p) = \{\{\lambda=0\},\{\lambda=-5\cdot\sqrt{133}+50\},\{\lambda=5\cdot\sqrt{133}+50\}\} \quad \text{Calc}$$

d) Tal i com hem vist al apartat anterior tenim 3 valors propis diferents (les arrels del polinomi característic). Per veure si diagonalitza podem comprovar que la multiplicitat de cada valor propi coincideix amb la dimensió de l'espai vectorial generat pels seus vectors propis associats (veure Mòdul 4, Secció 8). Alternativament, wiris ens proporciona directament els vectors propis linealment independents de l'aplicació.

$$\operatorname{veps}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & 1 & \frac{3\cdot\sqrt{133}}{38}-\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{66}+\frac{65}{66} & \frac{4\cdot\sqrt{133}}{57}-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{133}}{33}+\frac{32}{33} & \frac{7\cdot\sqrt{133}}{114}-\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{22}+\frac{21}{22} & \frac{\sqrt{133}}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{31}{33} & \frac{5\cdot\sqrt{133}}{114}+\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{61}{66} & \frac{2\cdot\sqrt{133}}{57}+\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{11}+\frac{10}{11} & \frac{\sqrt{133}}{38}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{59}{66} & \frac{\sqrt{133}}{57}+\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{29}{33} & \frac{\sqrt{133}}{114}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{3\cdot\sqrt{133}}{22}+\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix}$$

e) La matriu A diagonalitza, ja que tenim una base de vectors propis. De manera que podem definir directament la matriu de canvi de base B, de la base de vectors propis a la base canònica:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & 1 & \frac{3\cdot\sqrt{133}}{38}-\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{66}+\frac{65}{66} & \frac{4\cdot\sqrt{133}}{57}-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{133}}{33}+\frac{32}{33} & \frac{7\cdot\sqrt{133}}{114}-\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{22}+\frac{21}{22} & \frac{\sqrt{133}}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{31}{33} & \frac{5\cdot\sqrt{133}}{114}+\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{61}{66} & \frac{2\cdot\sqrt{133}}{57}+\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{11}+\frac{10}{11} & \frac{\sqrt{133}}{38}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{59}{66} & \frac{\sqrt{133}}{57}+\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{29}{33} & \frac{\sqrt{133}}{114}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{3\cdot\sqrt{133}}{22}+\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu de valors propis la podem definir manualment, o directament amb wiris

$$D = \operatorname{jordan}(A)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-5\cdot\sqrt{133}+50&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5\cdot\sqrt{133}+50 \end{pmatrix}$$

On D és la matriu A diagonalitzada.

f) Per calcular les potencies de A, farem servir el fet que A diagonalitza a la seva base de vectors propis:

$$A^4 = (B\cdot D\cdot B^{-1})^4 = (B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1}) =$$
$$= B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1} = B\cdot D\cdot I\cdot D\cdot I\cdot D\cdot I\cdot D\cdot B^{-1} =$$
$$= B\cdot D^4\cdot B^{-1}$$

D'aquesta manera:

$$B \cdot D^4 \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 4250125 & 4928000 & 5605875 & 6283750 & 6961625 & 7639500 & 8317375 & 8995250 & 9673125 & 10351000 \\ 4928000 & 5714125 & 6500250 & 7286375 & 8072500 & 8858625 & 9644750 & 10430875 & 11217000 & 12003125 \\ 5605875 & 6500250 & 7394625 & 8289000 & 9183375 & 10077750 & 10972125 & 11866500 & 12760875 & 13655250 \\ 6283750 & 7286375 & 8289000 & 9291625 & 10294250 & 11296875 & 12299500 & 13302125 & 14304750 & 15307375 \\ 6961625 & 8072500 & 9183375 & 10294250 & 11405125 & 12516000 & 13626875 & 14737750 & 15848625 & 16959500 \\ 7639500 & 8858625 & 10077750 & 11296875 & 12516000 & 13735125 & 14954250 & 16173375 & 17392500 & 18611625 \\ 8317375 & 9644750 & 10972125 & 12299500 & 13626875 & 14954250 & 16281625 & 17609000 & 18936375 & 20263750 \\ 8995250 & 10430875 & 11866500 & 13302125 & 14737750 & 16173375 & 17609000 & 19044625 & 20480250 & 21915875 \\ 9673125 & 11217000 & 12760875 & 14304750 & 15848625 & 17392500 & 18936375 & 20480250 & 22024125 & 23568000 \\ 10351000 & 12003125 & 13655250 & 15307375 & 16959500 & 18611625 & 20263750 & 21915875 & 23568000 & 25220125 \end{pmatrix}$$