1º Función f(x)=(x²-2x)·eˣ

a) Dominio y asíntotas.
b) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.
c) Extremos absolutos en el intervalo [-5, 3].

a) Como se trata de representar la función, seguimos los 5 pasos habituales. El primero es delimitar el dominio. Tenemos un producto de un polinomio por una exponencial. Ninguno de los dos da problemas, por lo tanto el dominio es todos los reales.

$$D = \mathbb{R}$$

El segundo sería mirar los puntos de corte con los ejes. Empecemos con f(0).

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 \quad El\ punto\ es\ el\ (0,0)$$

Hagamos ahora los puntos de corte con el eje x.

$$0 = (x^2 - 2x) \cdot e^x$$

El segundo término no se anula nunca, por lo tanto hemos de calcular:

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-2) \cdot x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \ \ el\ (0,0) ya\ lo\ conocíamos \\ x = 2 \ \ es\ decir, corta\ en\ (2,0) \end{cases}$$

El tercer punto son las asíntotas. No tiene asíntotas verticales ya que el dominio son todos los reales y sólo hemos de mirar las asíntotas en el infinito. Miramos el límite en más infinito y tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - 2x) \cdot e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

Si hacemos el límite en menos infinito tenemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x) \cdot e^x = \infty \cdot 0 = Indeterminación$$

La forma de solucionar la indeterminación es transformarla en otra que sepamos resolver, por ejemplo ∞/∞. Hacemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x) \cdot e^x = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Esta la podemos resolver aplicando dos veces la regla de L'Hopital o directamente "comparando infinitos". El caso es que da cero, por lo tanto, hay una asíntota horizontal en y=0 cuando x tiende a menos infinito.

Nos faltaría mirar si hay una asíntota oblicua en el infinito, pero es tan sencillo como hacer el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - 2x) \cdot e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} (x-2) \cdot e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntota oblicua.

b) Ahora pasaríamos al cuarto punto, la derivada y los máximos y mínimos. Por tanto, calculemos f'(x).

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x) \cdot e^x = (x^2 - 2) \cdot e^x$$

Al igualar a cero, como el segundo término no se anula nunca, es como si resolviéramos:

$$x^2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \begin{cases} -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \end{cases}$$

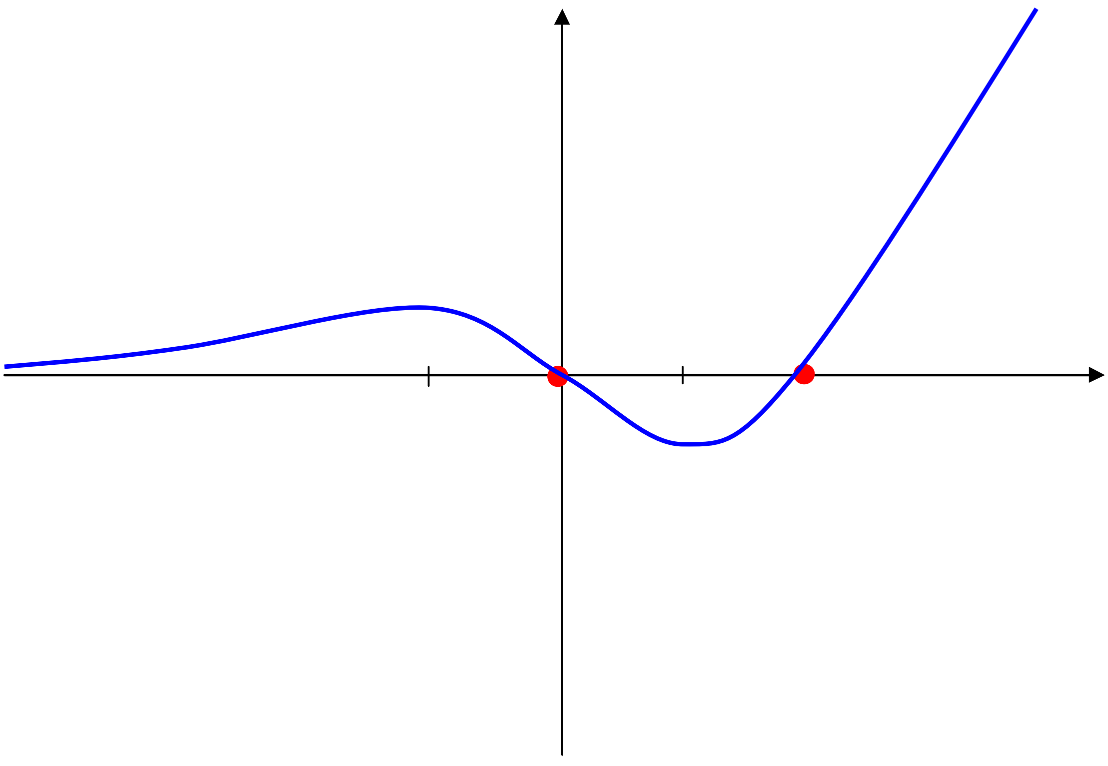
Para saber qué son, calculamos la derivada a derecha e izquierda de cada uno de esos puntos, por ejemplo -2 y 0 para el primero y 0 y 2 para el segundo.

$$f'(-2) = ((-2)^2 - 2) \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}27$$
$$f'(0) = (0 - 2) \cdot e^0 = -2 \cdot 1 = -2$$
$$f'(2) = (2^2 - 2) \cdot e^2 = 2 \cdot e^2 \approx 14{,}78$$

Por lo tanto, en $-\sqrt{2}$ tiene un máximo y en $\sqrt{2}$ tiene un mínimo. Así los intervalos de crecimiento y decrecimiento serán:

$$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \ creciente$$
$$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \ decreciente$$
$$\left(\sqrt{2}, \infty\right) \ creciente$$

Nos faltaría hacer la segunda derivada y los puntos de inflexión, pero como no los piden, lo dejamos aquí. Ya podemos dibujar la función.



Nos piden los extremos absolutos en [-5, 3]. Del dibujo ya vemos que va a tener un máximo relativo en $-\sqrt{2}$, que va a tener un mínimo relativo y absoluto en $\sqrt{2}$ y que tendrá un máximo absoluto en 3, pero lo mejor, para salir de dudas es calcularse la imagen de los cuatro puntos:

$$f(-5) = ((-5)^2 - 2 \cdot (-5)) \cdot e^{-5} = \frac{35}{e^5} \approx 0{,}236$$
$$f(-\sqrt{2}) = \left((-\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (-\sqrt{2})\right) \cdot e^{-\sqrt{2}} = \frac{4{,}82}{e^{\sqrt{2}}} = 1{,}176$$
$$f(\sqrt{2}) = \left((\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot e^{\sqrt{2}} = -0{,}82 \cdot 4{,}113 = -3{,}37$$
$$f(3) = (3^2 - 2 \cdot 3) \cdot e^3 = 3 \cdot 20{,}09 = 60{,}27$$

Que confirma lo dicho.

2º Optimización. Nos dan un triangulo rectángulo con el ángulo recto y los otros ángulos "x" y "y". Nos piden cuales son los ángulos "x e y" que maximizan la función f(x,y) = sin(x).sin(y).

Nota: La suma de todos los ángulos es Pi radianes (180º).
Nota: Realizar todo el ejercicio en radianes y dar el resultado en grados.

De entrada, ya tenemos la función a maximizar, que es:

$$f(x,y) = sen\, x \cdot sen\, y$$

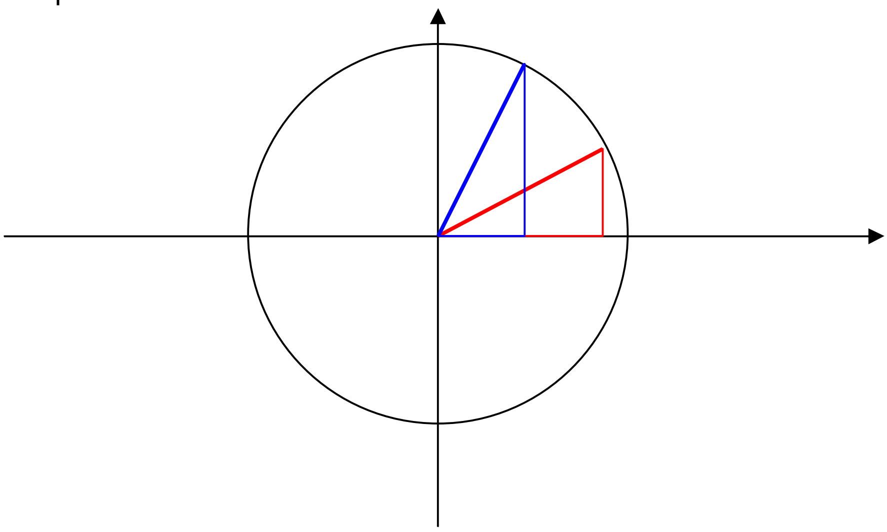
Lo único es que nosotros sólo trabajamos con funciones de una variable, por lo tanto hemos de ver cómo poner y en función de x, pero eso nos lo dan en el enunciado, y es que (al menos en la geometría euclídea, que es la que trabajamos en AM) la suma de los ángulos de un triángulo es 180º o pi radianes. Si encima nuestro triángulo es rectángulo tenemos que:

$$\pi = x + y + \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = x + y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{\pi}{2} - x$$

Por lo que nuestra función se convierte en:

$$f(x) = sen\, x \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Y aquí llegamos al "truco" (o si preferís, putada) de este ejercicio. Y es que hay que saberse cómo se relacionan las razones trigonométricas de un ángulo y su complementario. Si os habéis leído el pdf sobre "el círculo unidad", allí lo explico. Si no, aquí tenéis el dibujito que soluciona este problema.



En este dibujo se comprueba que:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sen\ x$$

Por lo tanto, la función a maximizar se nos transforma en:

$$f(x) = sen\ x \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sen\ x \cdot \cos x$$

Por lo tanto, hacemos la derivada e igualamos a cero y tenemos que:

$$0 = f'(x) = \cos x \cdot \cos x + sen\ x \cdot (-sen\ x) = cos^2 x - sin^2\ x$$

Si utilizamos el teorema fundamental de la trigonometría nos acaba quedando:

$$0 = 1 - 2 \cdot sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad sin^2 x = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y ya sabemos que ese ángulo es $^{\pi}/_{4}$, es decir 45º. Y por lo tanto, y también es 45º.

3º Función f(x)= x / $(x^2-4)^{2/3}$.

a) Porque es impropia la integral $\int_0^6 f(x)dx$.
b) Buscar una primitiva de la función.
c) Convergencia.

a) La integral es impropia porque en el intervalo donde está definida la integral (el intervalo [0,6]) contiene un punto (el x=2) donde el denominador se anula y, por lo tanto, la función se hace infinito.

b) Para calcular la primitiva, la hacemos sin límites de integración y hacemos el cambio:

$$x^2 - 4 = t \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot x \cdot dx = dt \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

Con lo que la integral se convierte en:

$$F(x) = \int \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{1}{2} \cdot \int t^{-2/3} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/3}}{1/3} = \frac{3 \cdot t^{1/3}}{2}$$
$$= \frac{3 \cdot (x^2-4)^{1/3}}{2}$$

c) Ahora ya podemos plantear el paso al límite, descomponiendo la integral en dos integrales:

$$\int_0^6 \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}dx = \int_0^2 \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}dx + \int_2^6 \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}dx$$
$$= \lim_{a\to 2^-}\int_0^a \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}dx + \lim_{a\to 2^+}\int_a^6 \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}dx$$
$$= \lim_{a\to 2^-}[F(a)-F(0)] + \lim_{a\to 2^+}[F(6)-F(a)]$$
$$= \left[\lim_{a\to 2^-}\frac{3\cdot(a^2-4)^{1/3}}{2} - \frac{3\cdot(0^2-4)^{1/3}}{2}\right]$$
$$+ \left[\frac{3\cdot(6^2-4)^{1/3}}{2} - \lim_{a\to 2^+}\frac{3\cdot(a^2-4)^{1/3}}{2}\right] = \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{3\cdot\sqrt[3]{32}}{2} \approx 7{,}1433$$

Por lo tanto, converge.

4º Función f(x)= sin(x).cos(x) / 1+sin(x). Nos dan el cambio de variable t=sin(x).

a) Calcular una primitiva y resolver la integral.
b) Área limite de f(x) con eje OX entre x=0; x=Pi /2

a) Pues como ya nos dan el cambio, lo planteamos así:

$$sen\, x = t \qquad \Rightarrow \qquad \cos x\cdot dx = dt$$

Por lo tanto, nos queda que:

$$F(x) = \int \frac{sen\, x\cdot\cos x}{1+sen\, x}dx = \int \frac{t\cdot dt}{1+t}$$

Y esta es una racional, muy sencilla, pero una racional. Lo primero es dividir los polinomios. Usamos Ruffini:

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |
| -1 | | -1 |
| | 1 | $\boxed{-1}$ |

Es decir, tenemos que:

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

Y nuestra integral se convierte en:

$$F(x) = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - \ln|1+t|$$
$$= sen\, x - \ln|1+sen\, x|$$

b) Una vez calculada la primitiva, lo que nos piden es muy sencillo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{sen\,x \cdot \cos x}{1 + sen\,x}\,dx = \; sen\,x - \ln|1 + sen\,x|\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left[sen\,\frac{\pi}{2} - \ln\left|1 + sen\,\frac{\pi}{2}\right| - (sen\,0 - \ln|1 + sen\,0|)\right]$$

$$= [1 - \ln 2 - (0 - \ln 1)] = 1 - 0{,}693 - 0 = 0{,}307$$