Examen 1

Teoria

Qüestió 1

Per un cable horitzontal infinit hi circula un corrent elèctric d'intensitat I. Prop del cable i amb velocitat $\vec{v}$ paral·lela a aquest, es mou una partícula amb càrrega positiva tal i com indica la figura 1. Sense tenir en compte els efectes de la gravetat, cap on es mourà la partícula?
Indiqueu la resposta CORRECTA i JUSTIFIQUEU adequadament la vostra elecció.

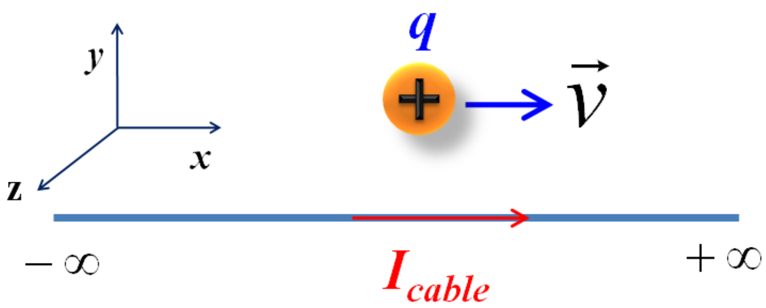

Figura 1: Distribució estudiada a la pregunta qüestió 1.

(a) No es desviarà i mantindrà la seva trajectòria recta.

(b) Farà tirabuixons al voltant del cable.

(c) Caurà cap el cable.

(d) Pujarà allunyant-se del cable.

Solució:

El camp d'inducció magnètica, creat per un cable infinit pel qual circula una intensitat, queda representat a la figura 2. Els símbols $\otimes$ representen camps que entren al paper i els símbols $\odot$ camps que en surten. La grandària dels símbols indica la intensitat d'aquest camp.

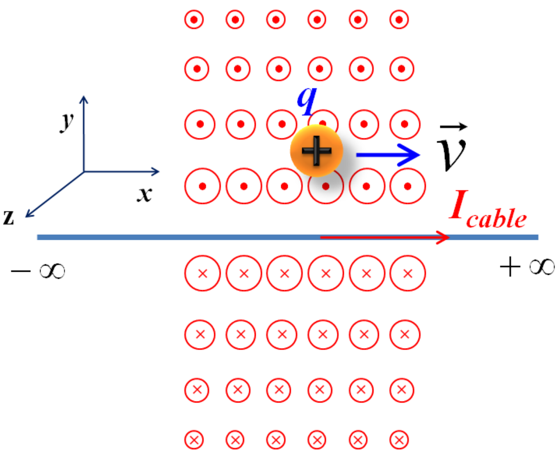

Figura 2: Representació del camp d'inducció magnètica creat pel cable infinit.

L'equació 30 del mòdul de Magnetostàtica indica la força que exerceix un camp d'inducció magnètica sobre una càrrega puntual q:

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{1}$$

Atès que, la direcció de la partícula és perpendicular a la direcció del camp $\vec{B}$, això significa que la velocitat $\vec{v}$ que porta la partícula és també perpendicular a la direcció del camp $\vec{B}$. Conseqüentment, quan es fa el producte vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ dintre de l'equació 1, obtenim una força perpendicular als dos vectors multiplicats.

Donat que la velocitat $\vec{v}$ va dirigida cap les x positives (cap a la dreta del dibuix) i el camp $\vec{B}$, a la zona on és la partícula, apunta sortint del paper, la regla de la mà dreta ens porta a que, el producte vectorial de l'equació 1 dóna un vector dirigit cap a les y negatives (la part de sota del dibuix). Si multipliquem aquest vector resultant per la càrrega de la partícula, tindrem la Força Magnètica exercida pel camp sobre la partícula. En ser la partícula de càrrega positiva, el sentit de la força magnètica no es modifica. Conseqüentment, la Força Magnètica sobre la partícula va dirigida cap a les y negatives (la part de sota del dibuix), fent així que la partícula es desviï cap a aquesta zona tot obtenint una força d'atracció. Vegeu la figura 3 que aclareix aquests productes vectorials.

Conseqüentment, la resposta correcta és la (c) ja que caurà cap el cable.

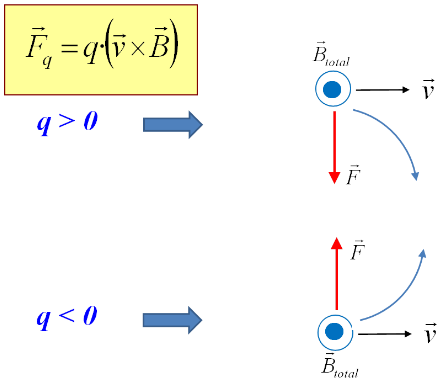

Figura 3: Representació del resultat dels productes vectorials segons el signe de la càrrega q.

Qüestió 2

Es disposa d'una font de llum submergida al fons d'un got ple d'oli, d'índex de refracció $n = 1,46$. Un raig surt de la font, puja propagant-se per l'oli i incideix amb un angle de 35º (mesurat des de la perpendicular a la superfície) sobre la superfície que separa l'oli de l'aire. Calculeu els angles de reflexió, θ_r, i de refracció, θ_t, i JUSTIFIQUEU la resposta.

(a) $\theta_r \approx 68,04^o$ i $\theta_t \approx 35^o$

(b) $\theta_r \approx 56,87^o$ i $\theta_t \approx 35^o$

(c) $\theta_r \approx 35^o$ i $\theta_t \approx 56,87^o$

(d) $\theta_r \approx 35^o$ i $\theta_t \approx 68,04^o$

Solució:

Per justificar quina de les respostes és la correcta, haurem de calcular els angles de reflexió i de refracció i després comparar amb els resultats indicats en les opcions. Per a això ens basarem en la figura 4. Començarem amb el càlcul de l'angle de reflexió.

L'angle de reflexió és l'angle que forma el raig reflectit amb la perpendicular a la superfície. És a dir, és l'angle que el raig que no travessa la interfície al següent medi forma amb la perpendicular, com s'indica a la figura 4. El valor de l'angle reflectit es pot calcular a partir de l'equació (11) del mòdul d'Òptica i Fotònica. L'angle del raig reflectit coincideix amb l'angle d'incidència, per tant:

$$\theta_r = \theta_i = 35^o \tag{2}$$

A continuació, podem calcular l'angle de refracció. L'angle de refracció és l'angle que el raig que travessa la interfície amb el següent medi forma amb la perpendicular a la

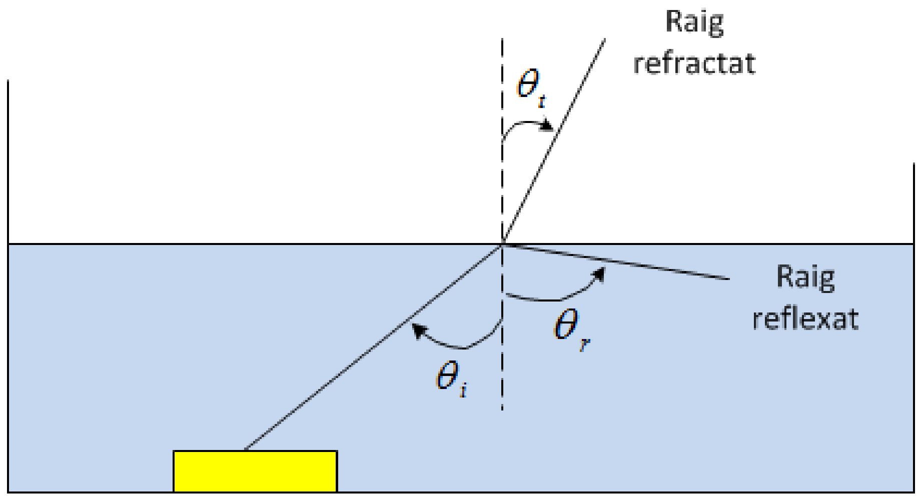

Figura 4: Representació-esquema del recipient amb oli.

superfície, com s'indica a la figura 4. Per calcular l'angle de refracció podem utilitzar la llei de Snell que es defineix a través de l'equació (12) del mòdul d'Òptica i Fotònica:

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \tag{3}$$

on n_1 i n_2 són els índexs de refracció dels medis en els quals es propaga el raig incident i el refractat respectivament. En aquest cas tenim un raig de llum que surt d'un recipient amb oli, així que el raig incident es propaga en oli i $n_1 = 1,46$. El raig refractat es propaga en aire i $n_2 = 1$. Ara ja estem en condició de calcular l'angle de refracció mitjançant la llei de Snell:

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \tag{4}$$

$$1,46 \sin(35^o) = 1 \cdot \sin(\theta_t) \tag{5}$$

d'on podem deduir el valor de l'angle de refracció:

$$\sin(\theta_t) = 1,46 \sin(35^o) = 0,837 \Longrightarrow \theta_t = \arcsin(0,837) = 56,87^o \tag{6}$$

Ara que ja coneixem ambdós angles podem deduir quina de les respostes indicades és la correcta:

(a) La resposta (a) és FALSA degut a que ambdós angles són incorrectes.

(b) La resposta (b) és FALSA ja que els valors d'ambdós angles, el de reflexió i el de refracció, estan intercanviats en la solució.

(c) La resposta (c) és CERTA ja que els angles indicats són els obtinguts en els càlculs i estan en la posició correcta.

(d) la resposta (d) és FALSA ja que, si bé el valor de l'angle reflectit és el correcte, el valor de l'angle de refracció és incorrecte.

La resposta CORRECTA és, per tant, la (c).

Problema 1

Disposem del circuit de la figura 5:

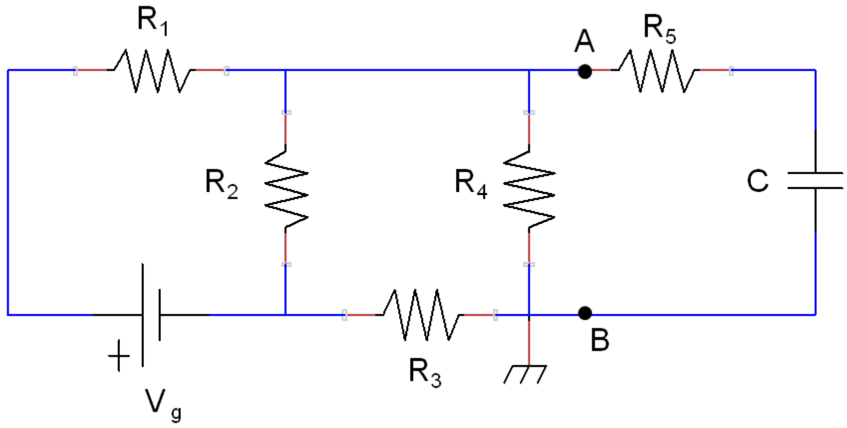

Figura 5: Circuit estudiat al problema 1.

Els valors dels seus elements són, respectivament, $V_g = 6$ V, $R_1 = R_2 = 2$ kΩ, $R_3 = 3$ kΩ, $R_4 = R_5 = 1$ k$\Omega, C = 2$ μF. Es demana:

(a) Considereu el condensador ha arribat al règim permanent. Aleshores, trobeu el circuit equivalent de Thévenin entre els terminals $A - B$, tal i com es mostra a la figura 6. Obteniu els valors i, finalment, dibuixeu-lo.

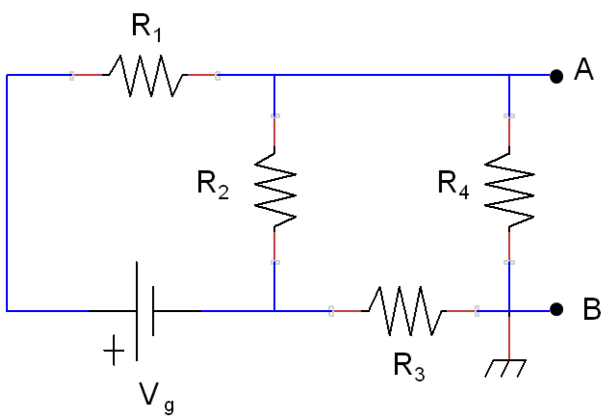

Figura 6: Circuit per l'equivalent Thévenin al problema 1.

(b) Calculeu la constant de càrrega del condensador.

Solució:

(a) El teorema de Thévenin diu que el comportament entre dos terminals d'un circuit lineal es pot substituir sempre per una font de tensió V_{th} en sèrie amb una resistència R_{th} (vegeu apartat 6.3 del Mòdul 1). Per obtenir l'equivalent de Thévenin del circuit, primer podem trobar el valor de la resistència equivalent de Thévenin R_{th} entre els terminals A i B. Per fer-ho, hem de curtcircuitar la font de tensió V_g quedant-nos el circuit de la figura 7.

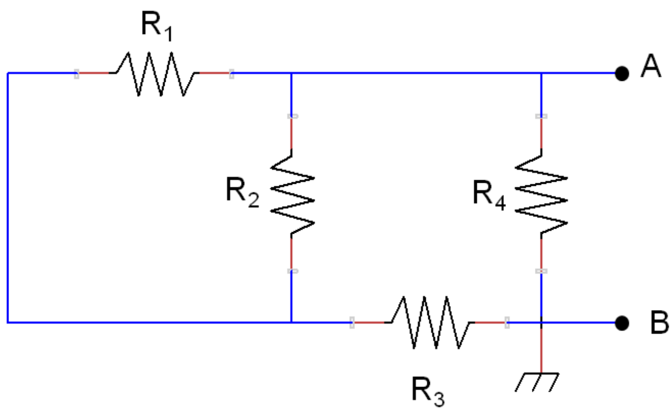

Figura 7: Curtcircuit de la font de tensió per trobar R_{th}.

Aquesta figura 7 conté dues resistències R_1 i R_2 en paral·lel que, un cop associades, donen lloc a la resistència equivalent R_{12}:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{4} = 1\ \mathrm{k}\Omega \tag{7}$$

Ens queda ara el circuit equivalent de la figura 8 (a).

El circuit de la figura 8 (a) conté dues resistències R_{12} i R_3 en sèrie que, un cop associades, donen lloc a la resistència equivalent:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 1 + 3 = 4\ \mathrm{k}\Omega \tag{8}$$

resistència aquesta que queda col·locada segons indica el nou circuit equivalent de la figura 8 (b).

En l'apartat que ens ocupa, com estem calculant l'equivalent Thévenin, ens estem mirant el circuit des dels terminals $A - B$.
Aquesta referència és molt important ja que, des d'aquest punt de vista, tenim que

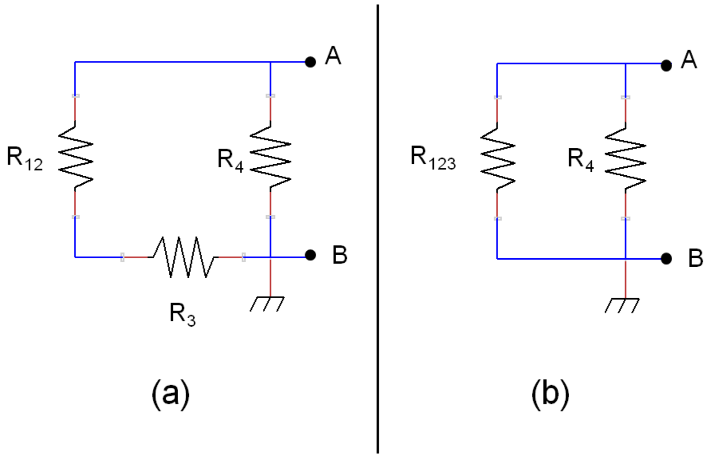

Figura 8: Associacions de resistències per trobar R_{th}.

R_4 està en paral·lel amb R_{123} i, la resistència equivalent Thévenin R_{th} vindrà donada en resoldre aquest paral·lel de resistències:

$$R_{th} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ k}\Omega = 800\ \Omega \tag{9}$$

D'altra banda, per calcular la tensió equivalent de Thévenin V_{th} entre els terminals A i B, ens adonem que aquesta tensió V_{th} es correspon amb la tensió que cau a R_4, la qual calcularem pel mètode de corrents de malla.

Per resoldre el circuit pel mètode de corrents de malla o Segona llei de Kirchhoff (apartat 5.2 del Mòdul 1 i figura 22) - llei de Kirchhoff de les tensions, el redibuixem assignant els corrents de malla tal i com es veu a la figura 9.

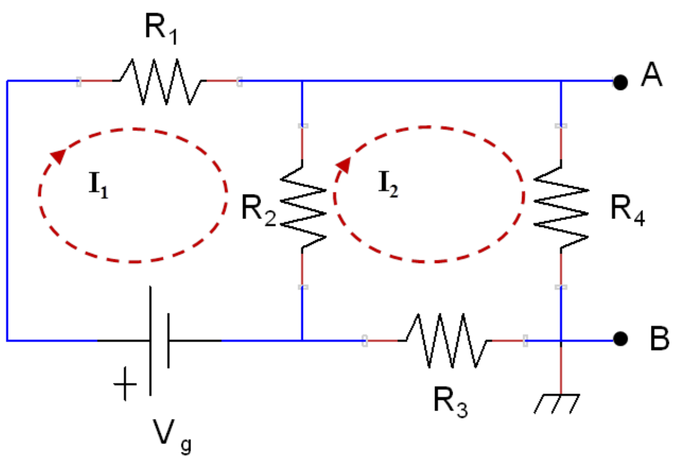

Figura 9: Assignació dels corrents de malla al problema 1.

D'aquesta forma, les equacions de malla pel circuit seran:

$$Malla\ 1: \quad -V_g + I_1R_1 + I_1R_2 - I_2R_2 = 0 \tag{10}$$
$$Malla\ 2: \quad I_2R_2 + I_2R_3 + I_2R_4 - I_1R_2 = 0 \tag{11}$$

Quan treballem amb corrents de malla, és molt útil reescriure les fórmules agrupant els termes per intensitats de malla enlloc de per les resistències. O sigui:

$$Malla\ 1: \quad I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 = V_g \tag{12}$$

$$Malla\ 2: \quad -I_1R_2 + I_2(R_2 + R_3 + R_4) = 0 \tag{13}$$

Substituint les dades de l'enunciat tenim:

$$Malla\ 1: \quad 4I_1 - 2I_2 = 6 \tag{14}$$

$$Malla\ 2: \quad -2I_1 + 6I_2 = 0 \tag{15}$$

Aïllant I_1 de l'equació 15:

$$I_1 = 3I_2 \tag{16}$$

i substituint a l'equació 14 obtenim:

$$12I_2 - 2I_2 = 6 \quad \longrightarrow \quad I_2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ mA} \tag{17}$$

Substituint aquest resultat a l'equació 16 podem obtenir el valor de $I_1 = 1,8$ mA, que no ens cal per aquest problema en concret.

Finalment, podem calcular la caiguda de tensió de R_4 a partir de la llei d'Ohm:

$$V_{R_4} = R_4I_2 = 1 \text{ k}\Omega \cdot 0,6 \text{ mA} = 0,6 \text{ V} \tag{18}$$

sent aquest valor la tensió equivalent Thévenin:

$$V_{th} = V_{R4} = 0,6 \text{ V} \tag{19}$$

I el nostre circuit equivalent de Thévenin serà el que indica la figura 10.

amb els valors $V_{th} = 0,6$ V i $R_{th} = 0,8$ kΩ.

(b) La constant de càrrega τ ve donada pel producte $R \cdot C$ (vegeu l'apartat 1.3.1 del mòdul de Circuits RLC), on C és la capacitat del condensador i R és la resistència equivalent del circuit de càrrega. Al nostre problema, el circuit equivalent Thévenin de l'apartat (a) està connectat amb la resistència R_5 i el condensador segons mostra la figura 11.

Per tant, per tenir el circuit de càrrega RC, només ens cal sumar R_{Th} amb R_5 ja que estan en sèrie tot obtenint $R = R_{Th} + R_5 = 1,8$ kΩ. D'aquesta forma, la constant de càrrega queda:

$$\tau = R \cdot C = 1,8 \text{ k}\Omega \cdot 2\ \mu\text{F} = 1800\ \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 0,0036 \text{ s} = 3,6 \text{ ms} \tag{20}$$

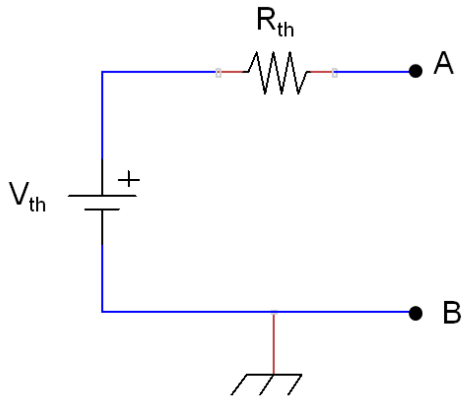

Figura 10: Circuit equivalent Thévenin.

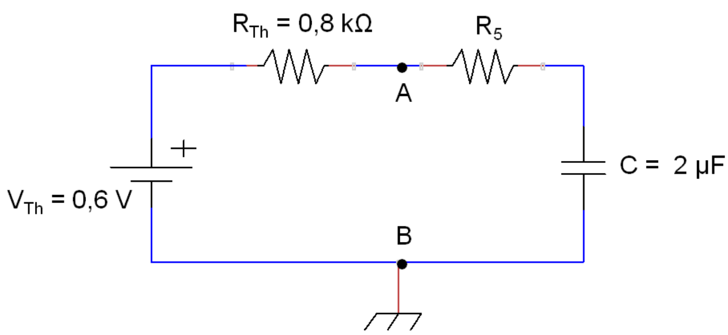

Figura 11: Connexió del circuit equivalent Thévenin amb el condensador i R_5.

Problema 2

Disposem de dues barres carregades de longitud L situades tal i com s'indica a la figura 12. Ambdues barres estan carregades amb una densitat lineal de càrrega homogènia de valor λ positiu. Es demana:

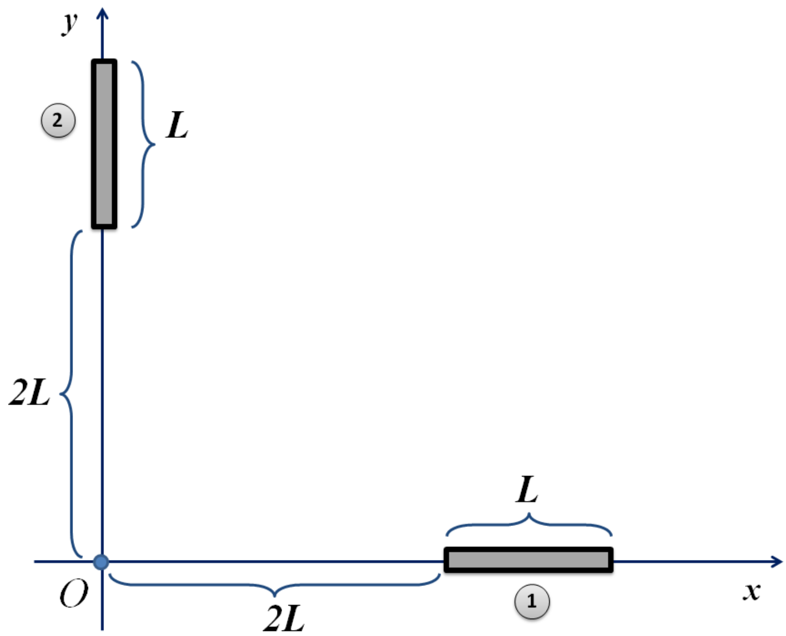

Figura 12: Distribució de les barres carregades del problema 2.

(a) Calculeu el camp electrostàtic resultant a l'origen $O = (0, 0)$.

(b) Calculeu el mòdul de la força electrostàtica que rebria una càrrega puntual de valor q positiu situada al punt O.

INDICACIÓ:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{on } n \text{ és un enter que pot ser positiu o negatiu.} \tag{21}$$

Solució:

(a) Calcularem el camp electrostàtic resultant mitjançant el principi de superposició sumant les contribucions de cada barra. Degut a que ambdues barres estan carregades amb densitat lineal homogènia de valor λ positiva, les direccions dels camps electrostàtics que produeixen al punt O queden reflectides a la figura 13.

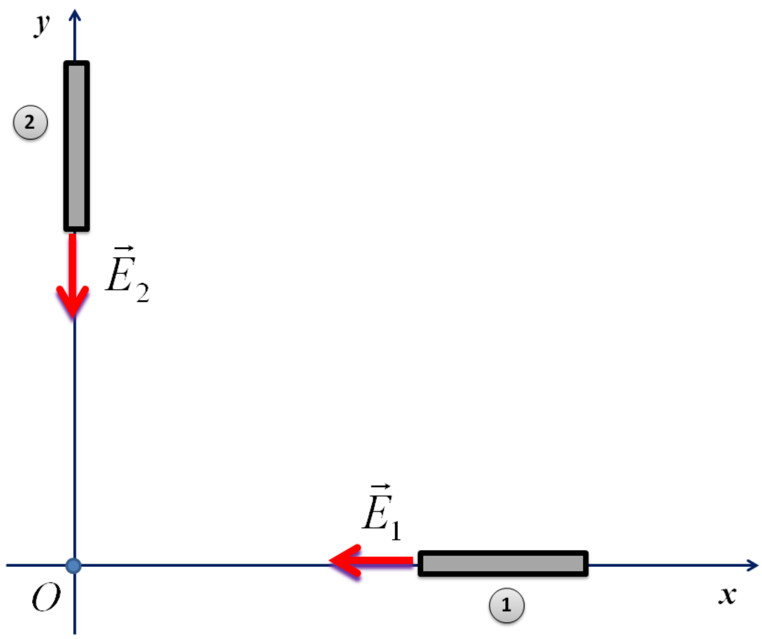

Figura 13: Direccions dels camps electrostàtics creats per les dues barres carregades sobre el punt P.

D'altra banda, en ser distribucions contínues de càrrega, el camp electrostàtic creat per una barra ve donat per l'equació 29 del mòdul d'Electrostàtica:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_\Gamma \frac{dq'}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^2}\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r'}} \tag{22}$$

on:
Γ = regió on hi ha càrregues creadores de camp,
$\vec{r}$ = vector de posició del punt on estudiem el camp (és el punt $P = (0, 0)$),
$\vec{r'}$ = vector de posició que indica on estan les càrregues. És variable i va recorrent tota la regió Γ.

Barra 1 |
Les dades corresponents a la *Barra 1* són:

$$\vec{r} = 0\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} \tag{23}$$

$$\vec{r_1}' = x'\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}, \quad 2L \leq x' \leq 3L \tag{24}$$
$$\vec{r} - \vec{r_1}' = -x'\vec{\imath} \tag{25}$$
$$\left\|\vec{r} - \vec{r_1}'\right\| = \|-x'\| = x', \text{ ja que } x' > 0 \tag{26}$$
$$\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r_1}'} = -\vec{\imath} \tag{27}$$
$$dq' = \lambda dl' \tag{28}$$
$$dl' = dx' \tag{29}$$

Substituint aquestes dades a l'equació 22 obtenim:

$$\vec{E}_1(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_{x'=2L}^{x'=3L}\frac{\lambda dx'}{(x')^2}(-\vec{\imath}) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\vec{\imath}\left[\frac{-1}{x'}\right]_{x'=2L}^{x'=3L} = \tag{30}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}\vec{\imath}\left[\frac{1}{3L} - \frac{1}{2L}\right] = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{6L}\vec{\imath} \tag{31}$$

EL càlcul per la Barra 2 és idèntic i només hem de canviar x' per y', $\vec{\imath}$ per $\vec{\jmath}$. D'aquesta forma, obtenim el mateix mòdul de camp $\vec{E}$ però orientat cap a les Y negatives $(-\vec{\jmath})$. No cal fer doncs aquest càlcul però, el reproduïm per justificar el resultat:
Barra 2 |
Les dades corresponents a la *Barra 2* són:

$$\vec{r} = 0\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} \tag{32}$$
$$\vec{r_2}' = 0\,\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}, \quad 2L \leq y' \leq 3L \tag{33}$$
$$\vec{r} - \vec{r_2}' = -y'\vec{\jmath} \tag{34}$$
$$\left\|\vec{r} - \vec{r_2}'\right\| = \|-y'\| = y', \text{ ja que } y' > 0 \tag{35}$$
$$\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r_2}'} = -\vec{\jmath} \tag{36}$$
$$dq' = \lambda dl' \tag{37}$$
$$dl' = dy' \tag{38}$$

Substituint aquestes dades a l'equació 22 obtenim:

$$\vec{E}_2(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_{y'=2L}^{y'=3L}\frac{\lambda dy'}{(y')^2}(-\vec{\jmath}) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\vec{\jmath}\left[\frac{-1}{y'}\right]_{y'=2L}^{y'=3L} = \tag{39}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}\vec{\jmath}\left[\frac{1}{3L} - \frac{1}{2L}\right] = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{6L}\vec{\jmath} \tag{40}$$

Camp resultant |
Sumant les contribucions dels camps de les dues barres al punt O, obtenim el camp electrostàtic resultant:

$$\vec{E}_T(O) = \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{6L}\vec{\imath} + \frac{(-\lambda)}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{6L}\vec{\jmath} = \tag{41}$$
$$= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{6L}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) = \frac{-\lambda}{24\pi\epsilon_o L}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right). \tag{42}$$

(b) Per calcular la força electrostàtica que rep una càrrega puntual sota l'acció d'un camp electrostàtic utilitzarem l'equació 39 del mòdul d'Electrostàtica:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{43}$$

on q és la càrrega que rep la força i que està situada en un punt $\vec{r}$, on hi ha un camp electrostàtic $\vec{E}(\vec{r})$.

Al nostre problema tenim que $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_T(O)$. Per tant, substituint aquests valors a l'equació 43 obtenim:

$$\vec{F}_q(O) = \frac{-\lambda q}{24\pi\epsilon_o L}\,(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \tag{44}$$

Fent el mòdul d'aquesta força tenim:

$$\|\vec{F}_q(O)\| = \frac{\lambda q}{24\pi\epsilon_o L}\|\vec{\imath} + \vec{\jmath}\| = \frac{\lambda q}{24\pi\epsilon_o L}\sqrt{2}\ [N] \tag{45}$$