PEC1

Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %)

   El código ASCII es un sistema de representación de la información en el que se utilizan 8 bits para representar cada carácter. En el UNICODE se utilizan 16 bits para representar cada carácter (http://www.asciitable.com). Denotamos A como el conjunto $\{0, 1\}$. Utilizando la técnica de las funciones, responder de manera justificada las siguientes preguntas:

   a) Describir cada elemento de un código ASCII como una función y deducir cuántos símbolos se pueden representar con el código ASCII.

   b) Supongamos que solo queremos representar con un código binario las 26 letras del alfabeto, 'A',...,'Z'. ¿Cuántos bits necesitaremos para representar esta información?

   c) En la representación hexadecimal se utilizan los símbolos $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. ¿Cuántos caracteres podremos representar si utilizamos 4 símbolos hexadecimales?

   d) ¿Cuántos de los caracteres representados en el punto anterior tienen alguno de los símbolos hexadecimales repetido?

Solución:

a) Podemos considerar cada elemento de un código ASCII como una función $f : \mathbb{N}_8 \to A$. Por lo tanto, el número de símbolos que se pueden representar con el código ASCII coincide con el número de funciones de $\mathbb{N}_8$ a A. Este número coincide con el cardinal del conjunto de 8-muestras ordenadas con repetición del conjunto A. Así, $VR(2, 8) = 2^8 = 256$.

b) Si solo queremos representar las 26 letras del alfabeto, entonces tendremos que construir r-muestras ordenadas con repetición del conjunto A de manera que $VR(2, r) \geq 26$. Por lo tanto, $2^r \geq 26$ y de aquí obtenemos $r \geq 5$. Necesitaremos 5 bits.

c) Si utilizamos 4 símbolos hexadecimales podremos representar $VR(16, 4)$ caracteres, o sea, $16^4 = 65536$ caracteres.

d) Calculamos primero todos los que tendrán los cuatro símbolos difererentes. Tenemos que calcular $V(16, 4) = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43680$. Por lo tanto, los que tendrán algún símbolo hexadecimal repetido serán $65536 - 43680 = 21856$.

---

2. (Valoración de un 20 %)

   Considerar el algoritmo siguiente para calcular la n-ésima poténcia ($n > 0$) de un número real x.

```
función Potencia(x, n)
  inicio
    p ← 1
    mientras n > 0 hacer
              si n mod 2 ≠ 0 entonces
                p ← x * p
                n ← n − 1
              finsi
              si n > 0 entonces
                x ← x * x
              finsi
              n ← n div 2
    finmientras
    retorno p
  fin
```

a) Calcular el número de multiplicaciones que hace el algoritmo para las llamadas siguientes: $\mathit{Potencia}(2,6)$, $\mathit{Potencia}(2,9)$, $\mathit{Potencia}(2,16)$.

b) Calcular, en el peor de los casos, el número de multiplicaciones que realiza el algoritmo. ¿Cuál es el peor caso?

c) Calcular, en el caso más favorable, el número de multiplicaciones que realiza el algoritmo. ¿Cuál es el caso más favorable?

d) Calcular la complejidad del algoritmo y comparad esta complejidad con la del algoritmo habitual del cálculo de una potencia por la fórmula $x^n = x \cdot x \cdot x \cdots x$.

Solución:

a) Si n es impar, el algoritmo hace dos multiplicaciones (excepto para $n = 1$) y si n es par, solo hace una. Además, en cada iteración n se divide por 2. Así, para $n = 6$, hará $1+2+1 = 4$ multiplicaciones. Para $n = 9$ hará $2+1+1+1 = 5$ y para $n = 16$ hará $1+1+1+1+1 = 5$.

b) El peor de los casos se da cuando en cada iteración el número es impar. Esto pasa cuando $n = 2^t - 1$. El número de multiplicaciones será $2 * t - 1$.

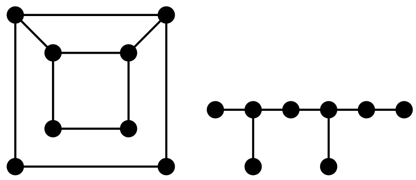
c) El caso más favorable se da cuando en cada iteración el número es par (excepto cuando $n = 1$). Esto pasa cuando $n = 2^t$ y el número de multiplicaciones será $t + 1$.

d) Observad que el número de multiplicaciones varía entre $t + 1$ y $2 * t - 1$ donde $t = \log_2 n$. Así la complejidad del algoritmo será $O(\log n)$. Si utilizamos la fórmula habitual, la complejidad sería $O(n)$. Por lo tanto, el algoritmo propuesto es mucho más eficiente que el algoritmo habitual. Este algoritmo es el algoritmo que utilizan todas las aplicaciones de cálculo simbólico.

---

3. (Valoración de un 20 %)

Considerar los grafos G_1, G_2, G_3 i G_4 definidos de la forma siguiente: $G_1 = T_2 \times T_4$, $G_2 = N_2 + T_6$, G_3 i G_4 estan definidos en los siguientes gráficos:



G_3 G_4

a) Indicar justificadamente que grafos son regulares.

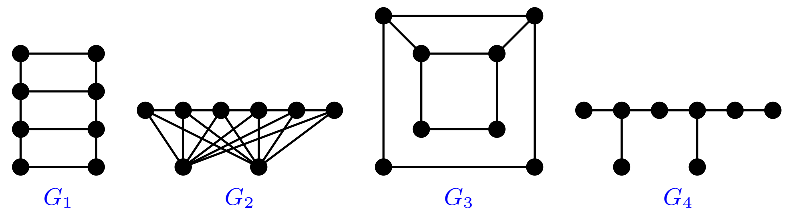
b) Indicar justificadamente que grafos son bipartitos.

c) Indicar, justificadamente, cuál es el número máximo de aristas que podemos eliminar en cada grafo sin que deje de ser conexo.

d) Indicar, justificadamente, que grafos son isomorfos.

Solución:

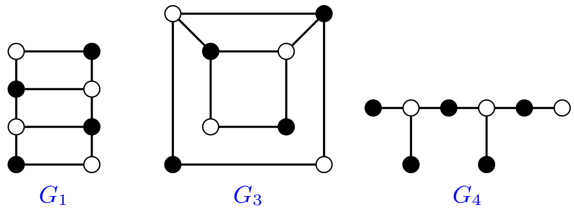
En primer lugar, dibujamos los 4 grafos:



y calculamos las secuencias de grados $G_1 : 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3$, $G_2 : 3, 3, 4, 4, 4, 4, 6, 6$, $G_3 : 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3$, $G_4 : 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$.

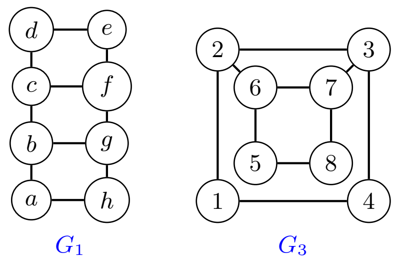
a) De acuerdo con las secuencias de grados, ninguno de los cuatro grafos es regular.

b) G_1, G_3 y G_4 son bipartitos como lo demuestra el gráfico siguiente:



c) Todos los grafos tienen 8 vértices y 10, 17, 10, 7 aristas. Puesto que un grafo conexo de orden n tiene un mínimo de $n - 1$ aristas, podremos eliminar un máximo de 3, 10, 3 y 0 aristas, respectivamente.

d) Ya que G_1 y G_3 tienen la misma secuencia de grados, son los únicos que pueden ser isomorfos. Asignamos una numeración a los dos grafos de la siguiente manera:



La asignación de vértices: $a \to 1$, $b \to 2$, $c \to 6$, $d \to 5$, $e \to 8$, $f \to 7$, $g \to 3$, $h \to 4$, define una biyección entre los vértices de los dos grafos que conserva las adyacencias. Por lo tanto, G_1 y G_3 són isomorfos.

---

4. (Valoración de un 20 %)

Justificar si son ciertas o falsas les siguientes afirmaciones:

a) En una reunión de la UE, 12 ministros han tenido reuniones bilaterals entre ellos. Cada ministro ha hecho 4 reuniones bilaterales, lo que significa que se han hecho un total de 48 reuniones bilaterales.

b) En una red de 8 computadores hemos hecho un total de 14 conexiones y el número de conexiones de cada computador ha sido $5, 4, 5, 3, 3, 4, 1, 3$.

c) El número de caminos de longitud 2 con origen y destino en un mismo vértice de un grafo simple G coincide con el grado del vértice.

d) Un grafo de orden 14 con 4 componentes conexas contiene un mínimo de 13 aristas.

Solución:

a) Podemos modelar la situación como un grafo $G(V, A)$ donde $V = 12$, $A = 48$ y cada vértice tiene grado 4. Aplicando la fórmula de los grados, $\sum_{v \in V} g(v) = 2A$, $4 \cdot 12 = 2A$, y por lo tanto $A = 24$. Así, la afirmación es falsa.

b) Si modelamos la red como un grafo, tenemos que comprobar si existe un grafo de 8 vértices, 14 aristas y con secuencia de grados: $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1$. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi, obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{r} 5,5,4,4,3,3,3,1 \\ 4,3,3,2,2,3,1 \\ 4,3,3,3,2,2,1 \\ 2,2,2,1,2,1 \\ 2,2,2,2,1,1 \\ 1,1,2,1,1 \\ 2,1,1,1,1 \\ 0,0,1,1 \\ 1,1,0,0 \\ 0,0,0 \end{array}}$$

Por lo tanto, el grafo existe, tendrá 14 vértices y la afirmación es cierta.

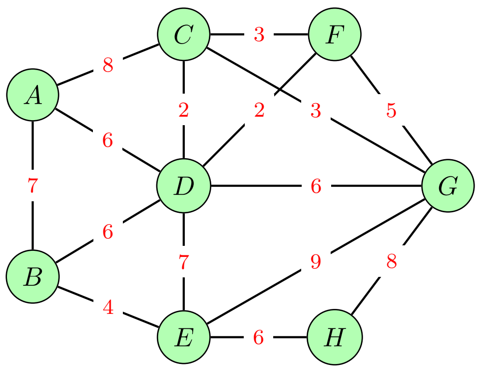
c) Un camino de longitud 2 partiendo de un vértice v solo puede ir a un vértice adyacente w y volver. Por lo tanto, el número de caminos de longitud 2 coincide con el número de vértices adyacentes a v o grado de v. La afirmación es cierta.

d) Si n_1, n_2, n_3, n_4 son los órdenes de las 4 componentes conexas entonces $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 14$ y cada componente conexa contiene un mínimo de $n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1$ aristas. Así, $A \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1 + n_4 - 1 = 14 - 4 = 10$. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

---

5. (Valoración de un 20 %)

Considerar la red de computadores representada por la siguiente figura, donde el peso de cada segmento representa el tiempo, en milisegundos, que tarda en llegar un paquete entre los dos extremos del segmento.



a) Se define el *grado de separación* entre dos nodos de la red como el número mínimo de segmentos (aristas) que unen los dos nodos. Utilizando el algoritmo más adecuado, calcular el grado de separación entre el nodo A y el resto de nodos de la red.

b) En una red de computadores, el *broadcasting* es un método para enviar un mensaje a todos los nodos de la red. Supongamos que el nodo A hace un *broadcasting* a la red. Calcular, con el algoritmo más adecuado, el tiempo que tardará cada nodo en recibir el mensaje, suponiendo que el mensaje escoge el camino más rápido para llegar a cada nodo.

c) Si un segmento de la red se corta, ¿tenemos que volver a rehacer todos los cálculos del apartado (b)? Justificar la respuesta.

d) Si todos los nodos hacen *broadcasting*, ¿cuál será el tiempo máximo para que un paquete llegue a su destino? ¿Entre que dos nodos se alcanza este valor?

Solución:

a) El grado de separación coincide con la distancia (sin peso en las aristas) entre dos vértices del grafo. Por lo tanto, utilizaremos el algoritmo BFS para calcular estas distancias. Partiendo del vértice A las distancias son $d(A,B) = 1$, $d(A,C) = 1$, $d(A,D) = 1$, $d(A,E) = 2$, $d(A,F) = 2$, $d(A,G) = 2$, $d(A,H) = 3$ que representan, respectivamente, los grados de separación.

b) En este caso, tenemos que utilizar el algoritmo de Dijkstra empezando por el vértice A:

A	B	C	D	E	F	G	H
$(0,A)$	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
$(0,A)^*$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)$	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)^*$	$(13,D)$	$(8,D)$	$(12,D)$	(∞,A)
$(0,A)$	$(7,A)^*$	$(8,A)$	$(6,A)$	$(11,B)$	$(8,D)$	$(12,D)$	(∞,A)
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)^*$	$(6,A)$	$(11,B)$	$(8,D)$	$(11,C)$	(∞,A)
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)$	$(11,B)$	$(8,D)^*$	$(11,C)$	(∞,A)
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)$	$(11,B)^*$	$(8,D)$	$(11,C)$	$(17,E)$
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)$	$(11,B)$	$(8,D)$	$(11,C)^*$	$(17,E)$
$(0,A)$	$(7,A)$	$(8,A)$	$(6,A)$	$(11,B)$	$(8,D)$	$(11,C)$	$(17,E)^*$

La última fila de la tabla nos da el tiempo mínimo para llegar a cada nodo de la red.

c) Si se corta un segmento de la red que forma parte del camino más corto que une A con un nodo, entonces habrá que rehacer los cálculos parcialmente. Por ejemplo, si se corta el segmento que une el nodo E con el nodo H, entonces tendríamos que rehacer solo la última fila de la tabla anterior.

En cambio, si se corta un segmento que no forma parte de ningún camino más corto que une A con un nodo, entonces no tendríamos que hacer ningún cambio.

d) Tenemos que calcular el diámetro del grafo y utilizaremos el algoritmo de Floyd. Las matrices siguientes representan la primera y la última matriz de la aplicación del algoritmo:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 7 & 0 & \infty & 6 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 8 & \infty & 0 & 2 & \infty & 3 & 3 & \infty \\ 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 9 & 6 \\ \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^8 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 6 & 11 & 8 & 11 & 17 \\ 7 & 0 & 8 & 6 & 4 & 8 & 11 & 10 \\ 8 & 8 & 0 & 2 & 9 & 3 & 3 & 11 \\ 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 5 & 13 \\ 11 & 4 & 9 & 7 & 0 & 9 & 9 & 6 \\ 8 & 8 & 3 & 2 & 9 & 0 & 5 & 13 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 9 & 5 & 0 & 8 \\ 17 & 10 & 11 & 13 & 6 & 13 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la última matriz, el tiempo máximo será de 17 milisegundos entre los nodos A y H.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Cada ejercicio tiene un peso del 20 % de la nota final.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 02/04/2014**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**