PAC3

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinómica dels problemes NP-complets.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Per a cada un dels problemes següents, definiu-los en forma de funció i classifiqueu-los com a problemes de decisió, càlcul o optimització. Reformuleu els de càlcul i d'optimització en la versió de decisió i indiqueu a quina classe de complexitat pertanyen:

   (a) Donat un graf $G = (V, A)$ determinar si G és una graf eulerià.

   (b) Donada una seqüència S de nombres enters, ordenar la seqüència S.

   (c) Determinar si un graf $G = (V, A)$ és bipartit.

   (d) Calcular el diàmetre d'un graf ponderat $G = (V, A)$.

Solució:

(a) EULERIA : $\mathcal{G} \to \{\text{SÍ}, \text{NO}\}$. És un problema de decisió. Pertany a la classe P atès que podem saber si un graf és eulerià comprovant el grau de cada vèrtex.

(b) ORDENAR : $\mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}^*$. És un problema de càlcul. La versió de decisió seria, *donada una seqüència S de nombres enters, decidir si la seqüència S està ordenada*. També pertany a P atès que podem comprovar si un seqüència està ordenada en temps lineal.

(c) BIPARTIT : $\mathcal{G} \to \{\text{SÍ}, \text{NO}\}$. És un problema de decisió. L'algoritme BFS es pot utilitzar per comprovar si un graf és bipartit. Per tant, també està a la classe P.

(d) DIÀMETRE : $\mathcal{G} \times (A \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. És un problema d'optimització. La funció de valoració és el pes d'un camí i es desitja maximitzar els camins mínins. La versió de decisió seria, *donat un graf ponderat $G = (V, A)$ i un valor k, decidir si $D(G) \geq k$*. L'algorisme de Floyd calcula en temps polinomial el diàmetre d'un graf. Per tant, aquest problema també pertany a P.

---

2. (Valoració d'un 20%) De les fórmules següents, indiqueu quines estan en FNC i quines no. Per les que no estan en FNC, convertiu-les en FNC. Finalment, convertiu-les totes a entrades del problema 3SAT.

   (a) $(a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c)$.

   (b) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

   (c) $(a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b \vee \bar{c} \vee d)$.

   (d) $(a \wedge b) \vee (\bar{d} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (\bar{d} \wedge c)$.

Solució:

(a) Ja està en FNC i també és una instància del problema 3SAT.

(b) No està en FNC. Operant obtenim, $a \wedge (b \vee c)$ que està en FNC. Per convertir-la en una instància del problema 3SAT hem d'afegir variables auxiliars: La clàusula (a) es convertirà en $(a \vee x \vee y) \wedge (a \vee \bar{x} \vee y) \wedge (a \vee x \vee \bar{y}) \wedge (a \vee \bar{x} \vee \bar{y})$. La clàusula $(b \vee c)$ es converteix en $(b \vee c \vee z) \wedge (b \vee c \vee \bar{z})$. Quedarà, $(a \vee x \vee y) \wedge (a \vee \bar{x} \vee y) \wedge (a \vee x \vee \bar{y}) \wedge (a \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (b \vee c \vee z) \wedge (b \vee c \vee \bar{z})$.

(c) Ja està en FNC però no és una entrada del problema 3SAT. La clàusula $(a \vee \bar{b}) = (a \vee \bar{b} \vee x) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{x})$. La clàusula $(a \vee b \vee \bar{c} \vee d) = (a \vee b \vee y) \wedge (\bar{c} \vee d \vee \bar{y})$. Quedarà, $(a \vee \bar{b} \vee x) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{x}) \wedge (a \vee b \vee y) \wedge (\bar{c} \vee d \vee \bar{y})$.

(d) No està en FNC. Operant obtenim, $(a \vee \bar{d}) \wedge (\bar{b} \vee c)$ que està en FNC. Ara, fent la conversió, obtenim: $(a \vee \bar{d} \vee x) \wedge (a \vee \bar{d} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{b} \vee c \vee y) \wedge (\bar{b} \vee c \vee \bar{y})$.

3. (Valoració d'un 20%) L'objectiu d'aquest exercici és demostrar que el problema SUMA_SUB (Proposició 9) és NP-Complet suposant que el problema PARTICIÓ (Proposició 8) és NP-Complet.

   (a) Demostreu que el problema SUMA_SUB és verificable en temps polinomial.

   (b) Construiu una reducció polinòmica entre el problema PARTICIÓ i SUMA_SUB (PARTICIÓ $\leq_p$ SUMA_SUB).

   (c) Demostreu que SUMA_SUB és NP-complet.

Solució:

(a) Recordem que el problema SUMA_SUB està definit per: Donat un conjunt d'enters C i un enter t, decidir si existeix un subconjunt $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x \in C'} x = t$. Un testimoni seria un subconjunt $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x \in C'} x = t$. La comprovació que la suma val t es pot verificar en temps polinomial.

(b) La reducció PARTICIÓ $\leq_p$ SUMA_SUB es pot construir de la forma següent: Si $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, calculem $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ i definim la funció de reducció $g(C) = (C, s/2)$. Hem de demostrar que PARTICIÓ(C)=SUMA_SUB($g(C)$) tant per els casos on PARTICIÓ(C)=SÍ com quan PARTICIÓ(C)=NO.

- Si PARTICIÓ(C)=SÍ aleshores tenim una partició de C en dos subconjunts C_1 i C_2 tals que $\sum_{x \in C_1} x = \sum_{x \in C_2} x$. Aleshores, el subconjunt C_1 amb $t = s/2$ és una instància del problema SUMA_SUB.
- Si PARTICIÓ(C)=NO aleshores no existeixen subconjunts C_1 i C_2 tals que $\sum_{x \in C_1} x = \sum_{x \in C_2} x$. Per tant, a $g(C)$ no hi haurà cap subconjunt $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x \in C'} = t = s/2$

(c) En l'apartat (a) hem demostrat que el problema SUMA_SUB és verificable en temps polinomial, és a dir, SUMA_SUB $\in$ NP.

En l'apartat (b) hem demostrat que PARTICIÓ $\leq_p$ SUMA_SUB i com que PARTICIÓ és NP-Difícil aleshores SUMA_SUB també serà NP-Difícil. Les dues condicions juntes impliquen que SUMA_SUB és NP-Complet.

---

4. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent problema: una escola ha de programar les dates dels exàmens corresponents a n ($n > 1$) assignatures de tal manera que a cap estudiant li coincideixen dos examens en el mateix dia. Suposem que les assignatures són $Ass = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i que Int és el conjunt de parelles d'assignatures que tenen algun alumne en comú. L'objectiu és determinar el nombre mínim de dies necessaris per programar tots els exàmens de manera que cap estudiant tingui dos o més exàmens el mateix dia.

   (a) Modeleu aquest problema com un problema de grafs, és a dir, definiu els conjunts V i A del graf $G = (V, A)$ i la propietat de G que hem de determinar.

   (b) Si $n = 6$, $Ass = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $Int = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{b, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$, determineu la solució òptima.

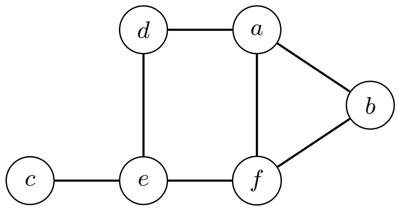
   (c) Demostreu que quan el nombre dies necessaris és com a màxim 2 aleshores el problema és a P.

   (d) Demostreu que quan el nombre de dies necessaris és més gran de 2 aleshores el problema és NP-Complet.

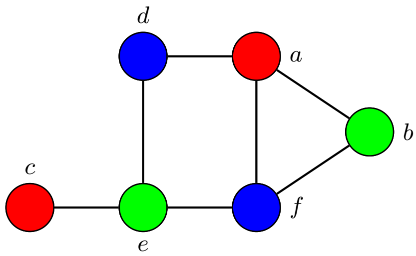
Solució:

(a) Definim el graf $G = (V, A)$ considerant el conjunt de vèrtexs com el conjunt d'assignatures ($V = Ass$). A més, dues assignatures seran adjacents si hi ha algun alumne que s'ha d'examinar de les dues assignatures. Per tant, $A = Int$. Aleshores, ens demanen quin és el número cromàtic d'aquest graf.

(b) En aquest cas concret el graf que tenim és,



Com que conté un triangle, K_3, necessitarem un mínim de 3 colors. El següent gràfic demostra que amb tres colors en tenim prou.



Per tant, necessitariem 3 dies d'examens.

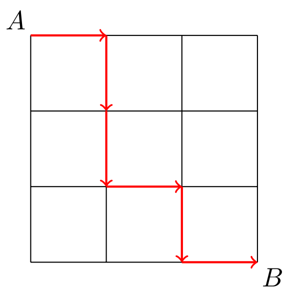
(c) Un graf 2-colorable és un graf bipartit i es pot utilitzar l'algorisme BFS per comprovar-ho. Per tant, el problema és a P.

(d) Tal com hem vist em el mòdul 7 secció 1.4, el problema de la coloració per 3 o més colors és un problema NP-complet.

---

5. (Valoració d'un 20%) Reviseu el vídeo següent: `https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs`.

Considerem una simplificació del problema del vídeo: volem calcular quants camins mínims uneixen el punt A amb el punt B en una xarxa com la del vídeo de costat n. En el gràfic següent podeu veure un exemple de camí mínim en la xarxa 3×3:



(a) Representeu la xarxa de costat n com un graf simple $G = (V, A)$. Indicació: expresseu-lo com a producte de dos grafs simples.

(b) Plantegeu el problema proposat com un problema de càlcul en el graf G.

(c) Demostreu que el nombre de camins mínims entre A i B en una xarxa de costat n és $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$.

(d) Calculeu el nombre de camins mínims entre A i B que hi ha en una xarxa de costat n, per a $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

(e) Raoneu perquè el problema de **llistar** tots els possibles camins no pertany ni a P ni a PSPACE. Pertany a NP? Nota: fixeu-vos que ens demanen llistar tots els camins, no calcular quants n'hi ha com en els apartats anteriors.

Solució:

(a) La xarxa del problema es pot veure com un graf simple $G = (V, A)$ definit per $T_n \times T_n$ d'ordre n^2, on T_n representa el graf trajecte d'ordre n. En el graf G tenim vèrtexs de grau 2 (els 4 extrems), de grau 3 (els dels costats) i de grau 4 (interiors). Si agafem dos vèrtexs dels extrems oposats en diagonal estaran a una distància $2n$.

(b) Podem definir el problema de dos maneres diferents: rebent el graf G com a entrada o bé rebent el nombre n. Aquí hem optat per la primera opció.

Problema de càlcul: Calcular tots els camins de longitud $2n$ entre els vèrtexs A i B del graf $G = T_n \times T_n$.

(c) Observem que cada camí mínim es pot construir a partir d'un desplaçament a la dreta (R) i un desplaçament cap avall (D). A més, hi ha d'haver el mateix nombre de desplaçaments a la dreta que cap avall. En l'exemple de la figura, el camí seria: $RDDRDR$. Observem també que el nombre de desplaçaments a la dreta és n i el nombre de desplaçaments cap avall també és n. Per tant, el nombre total de camins mínims serà igual el nombre de permutacions del conjunt format per n lletres R i n lletres D. Com que en total hi ha $2n$ lletres, tindrem $(2n)!$ maneres de permutar les lletres. A més, hem d'eliminar totes les mostres en les quals permutem només lletres R i les que només permutem lletres D. Per tant, el nombre total de permutacions serà $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$.

(d) La taula següent resumeix el resultat:

n	*Nombre camins*
1	2
2	6
3	20
4	70
5	252
6	924
7	3432
8	12870
9	48620
10	184756

(e) L'entrada al nostre problema és el graf $T_n \times T_n$ d'ordre n^2. El nombre de camins creix exponencialment quan n augmenta. Aquest és un exemple de problema d'explosió combinatòrica. La mida de la solució és $2n$ multiplicat pel nombre de camins possibles i, per tant, l'espai de memòria usat per l'algorisme és exponencial respecte a la mida de l'entrada. Això vol dir que el problema no pertany a PSPACE. Com el temps d'execució és sempre igual o superior a l'espai de memòria utilitzat, el temps d'execució també ha de ser exponencial. Com que NP$\subseteq$ PSPACE, el problema no pot pertànyer a NP.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 19/12/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**