SOLUCIÓ EXAMEN 13 DE GENER DE 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Realitzeu l´operació següent i simplifiqueu el resultat: $\dfrac{1-i}{\overline{\overline{3-i}}}$.

Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{3-i}$ representa el conjugat de $3-i$.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$. Proporcioneu el resultat en forma polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{3-i}$; això és, el conjugat de $3-i$ que és $3+i$. Per tant, el que es demana trobar és: $\dfrac{1-i}{3+i}$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar-lo:

$$\frac{1-i}{3+i}=\frac{(1-i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}=\frac{3-i-3i-1}{3^2-i^2}=\frac{2-4i}{9+1}=\frac{2-4i}{10}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{1-i}{\overline{\overline{3-i}}}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}$$

b) Escrivim el complex $-\dfrac{32}{i}$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

Per a això, primer, multipliquem i dividim per i per eliminar el denominador:

$$-\frac{32}{i}=-\frac{32i}{i^2}=-\frac{32i}{-1}=32i$$

Ara escrivim el complex en forma polar:

$$m=\sqrt{0^2+32^2}=32$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{32}{0}\right)=arctg\infty=90^{\circ}$$

Observem que no sumem ni restem cap quantitat donat que la part real del complex és nul·la i la imaginària del complex és positiva (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{32_{90^o}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{32_{90^o}} = 2_{\frac{90^o+360^o k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 2$

Los arguments de les arrels són $\beta = \frac{90^o+360^o k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 18^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 18^o+72^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 18^o+144^o = 162^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_1 = 18^o+216^o = 234^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 18^o+288^o = 306^o$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $-\frac{32}{i}$ són:

2_{18^o}	2_{90^o}	2_{162^o}	2_{234^o}	2_{306^o}

Problema 2: Siguin v_1=(1,0,0,2), v_2=(0,2,0,0), v_3=(2,2,0,4), v_4=(3,1,0,6), v_5=(0,-1,0,0) vectors de R^4.

Sigui V=<v_1, v_2, v_3, v_4, v_5>. Sigui w=(4,3,0,8)

a) (1,25 punts) Trobeu la dimensió de V i una base A. Pertany w a V? Si és que sí, trobeu les coordenades en la base A.

b) (1,25 punts) Sigui $e_1 = -v_1 - \frac{v_2}{2}$ i $e_2 = 4v_1 + 2v_2$. B={e_1, e_2} és una base de V. Trobeu la matriu de canvi de base de B a A.

Solució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així la dimensió de V és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Així doncs A={v_1, v_2}.

Per mirar si w pertany a V resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=4, y=3/2. Per tant les coordenades de w en la base A són (4, 3/2).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. I en el nostre cas això és justament la definició de la base B. Així tenim que la matriu de canvi de base M és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3: Sigui el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (m+4)x - y = m+4 \\ 3x + my = m+6 \end{cases}$$

amb $m \in R$.

a) (1,25 punts) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

b) (1,25 punts) Resoleu el sistema en aquells casos que el sistema sigui compatible.

<u>**Solució:**</u>

a) La matriu de coeficients, A, la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+4 & -1 & m+4 \\ 3 & m & m+6 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = (m+4)m + 3 = m^2 + 4\text{m} + 3 = (m+1)(m+3).$$

- Cas I: Si $m \neq -1,-3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incògnites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = -1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona $3x - y = 5$.

- Cas III: Si $m = -3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

Així doncs tenim que $rang(A) = rang(A') = 1$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

Resumint:

Si $m \neq -1,-3$, el sistema és Compatible Determinat Si $m = -1$, el sistema és Incompatible. Si $m = -3$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat

b) Hem de trobar la solució par als cassos I: $m \neq -1,-3$ y III: $m = -3$.

Cas I: $m \neq -1,-3$

Com que la matriu de coeficients es quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ m+6 & m \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 4m + m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 5m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+2}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & m+4 \\ 3 & m+6 \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+6-3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+4}{m+1}.$$

Por tant, para a cada valor de $m \neq -1,-3$ el punt solució del sistema és $\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{m+4}{m+1} \right)$.

Cas III: $m = -3$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació resulta ser un múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $(x, x-1)$.

Problema 4: Sigui f l'aplicació lineal de R^3 en R^3 definida per f(-1,1,0)=(1,1,1), f(0,1,0)=(1,1,1) i f(1,1,1)=(2,2,2).

a) (0,5 punt) Demostreu que (-1,1,1),(0,1,0) i (1,1,1) són una base de R^3.

b) (0,5 punt) Digueu quina és la dimensió de la imatge de f. És f exhaustiva?

c) (0,5 punt) Digueu quina és la dimensió del nucli de f. És f injectiva?

d) (1 punt) Diagonalitza f? Justifiqueu la resposta.

Solució:

a) Com que són tres vectors de R^3, per veure que són base és suficient provar que són linealment independents. Vegem que el determinant de la matriu que formen és no nul. El determinant de la matriu dels tres vectors (per columnes) és:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 .$$

Per tant, els tres vectors són una base de R^3.

b) Per calcular la dimensió de la imatge de f hem de calcular la dimensió del subespai generat per f(-1,1,0), f(0,1,0) i f(1,1,1), és a dir, la dimensió del subespai generat per (1,1,1),(1,1,1),(2,2,2). Clarament, aquests tres vectors tenen rang 1. Per tant, la dimensió de la imatge de f és 1. En particular, f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge de f és 1 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3.

c) Pel Teorema de la dimensió (o fórmula del rang) (veure Apunts Mòdul 5, pàgina 19) tenim que:

$$\dim E = \dim Nuc(f) + \dim Im(f).$$

Però ara $E=R^3$ i dim Im(f) =1. Per tant, la dimensió del nucli de f és necessàriament 2. Com que el nucli no és zero, f no és injectiva.

d) Anomenem u=(-1,1,0), v=(0,1,0) i w=(1,1,1), per simplificar. Tenim f(u)=f(v). Per tant, f(u-v)=0 i per tant, u-v=(-1,0,0) és el vector propi de f de valor propi 0. També tenim 2f(u)=f(w) o sigui f(2u-w)=0. És a dir, 2u-w=(-3,1,-1) també és vector propi de f de valor propi 0. A més f(w)=2w. És a dir, w és vector propi de f de valor propi 2. Observem que els tres vectors u-v, 2u-w i w són linealment independents ja que el determinant dels tres és no nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

En conclusió, tenim tres vectors, que són el u-v=(-1,0,0), el 2u-w=(-3,1,-1) i el w=(1,1,1), que formen una base de R^3, i que són vectors propis de f. Per tant, hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f. Això vol dir que f diagonalitza.

NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$