Espai
grapa

Examen 2008/09 -2

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Lògica	05.056	25/06/2009	16:30

⊂05.056ℜ10ℜ01ℜ09ℜEΞ∀∈
05.056 10 01 09 EX

Enganxeu en aquest espai una etiqueta identificativa
amb el vostre codi personal
Examen

Fitxa tècnica de l'examen

- **Comprova que el codi i el nom de l'assignatura corresponen a l'assignatura en la qual estàs matriculat.**
- **Només has d'enganxar una etiqueta d'estudiant a l'espai corresponent d'aquest full.**
- **No es poden adjuntar fulls addicionals.**
- **No es pot realitzar la prova en llapis ni en retolador gruixut.**
- **Temps total:** 2 **h.**
- **En cas que els estudiants puguin consultar algun material durant l'examen, quin o quins materials poden consultar?**
  No es pot consultar cap material
- **Valor de cada pregunta:** Problema 1: 30%; problema 2: 20%; problema 3: 20%; problema 4: 20%; problema 5: 10%
- **En cas que hi hagi preguntes tipus test: Descompten les respostes errònies? Quant?**
- **Indicacions específiques per a la realització d'aquest examen:**

Enunciats

Problema 1

a) Formalitzeu utilitzant la lògica d'enunciats les frases següents. Utilitzeu els àtoms proposats.

1) Només si els polítics fan promeses els inversors posen diners i les empreses no tanquen.
   $I \wedge \neg E \rightarrow P$

2) Quan passa que la borsa no puja quan els inversors posen diners llavors els treballadors se'n van a l'atur quan les empreses tanquen.
   $I \rightarrow \neg B \rightarrow (E \rightarrow T)$

3) Si els polítics fan promeses quan els inversors posen diners o la borsa puja llavors les empreses no tanquen.
   $I \vee B \rightarrow P \rightarrow \neg E$

Àtoms:

- I = Els inversors posen diners
- B = La borsa puja
- E = Les empreses tanquen
- T = Els treballadors es van a l'atur
- P = Els polítics fan promeses

b) Formalitzeu utilitzant la lògica de predicats les frases següents. Utilitzeu els predicats proposats.

1) Hi ha polítics honestos que només donen consells encertats.
   $\exists x\, [P(x) \wedge H(x) \wedge \forall y\, (D(x,y) \rightarrow C(y) \wedge A(y))]$

2) Cal donar algun consell encertat per a ser un polític honest.
   $\forall x\, [\neg\exists y\, (C(y) \wedge A(y) \wedge D(x,y) \rightarrow \neg(P(x) \wedge H(x)))]$

3) Si tots els polítics que apareixen a TV són honestos, llavors la TV dóna algun consell encertat.
   $\forall x\, [P(x) \wedge E(x,a) \rightarrow H(x)] \rightarrow \exists x\, [C(x) \wedge A(x) \wedge D(a,x)]$

Domini: qualsevol conjunt no buit

Predicats:
- P(x): x és un polític
- H(x): x és honest
- D(x,y): x dóna y
- C(x): x és un consell
- A(x): x és encertat
- E(x,y): x apareix a y

Constants:
- a: "TV"

Problema 2

Demostreu, utilitzant la deducció natural, que el següent raonament és correcte. Utilitzeu només les 9 regles bàsiques (és a dir, no utilitzeu ni regles derivades ni equivalents deductius).

$P \to Q,\ T \to (Q \to W),\ R \to T,\ \neg(R \to W)\ \therefore\ \neg P$

1	$P \to Q$			P
2	$T \to (Q \to W)$			P
3	$R \to T$			P
4	$\neg(R \to W)$			P
5		P		H
6		Q		E→ 1,5
7			T	H
8			$Q \to W$	E→ 2.7
9			W	E→ 6.8
10		$T \to W$		I → 7,9
11			R	H
12			T	E→ 3.11
13			W	E→ 10.12
14		$R \to W$		I → 11,13
15		$\neg(R \to W)$		It 4
16	$\neg P$			I ¬ 5,14,15

Problema 3

El raonament següent NO és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

$P \to Q$
$\neg Q \vee R \to \neg S$
$\neg(\neg P \to S)$
$\neg P \to (\neg R \to (Q \to P))$
$\therefore\ \neg Q \wedge R \to P$

Cerquem les FNC:

1a Premissa:

$P \to Q$
$\neg P \vee Q$

FNC($P \to Q$) = $\neg P \vee Q$

2ª Premissa
$\neg Q \vee R \to \neg S$
$\neg(\neg Q \vee R) \vee \neg S$
$(\neg\neg Q \wedge \neg R) \vee \neg S$
$(Q \wedge \neg \vee R) \vee \neg S$
$(Q \vee \neg S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

FNC ($\neg Q \vee R \to \neg S$) = $(Q \vee \neg S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

3ª Premissa
$\neg(\neg P \to S)$
$\neg(P \lor S)$
$\neg P \land \neg S$

FNC($\neg(\neg P \to S)$) = $\neg P \land \neg S$

4ª Premissa
$\neg P \to (\neg R \to (Q \to P))$
$\neg\neg P \lor (\neg R \to (Q \to P))$
$\neg\neg P \lor (\neg\neg R \lor (Q \to P))$
$\neg\neg P \lor (\neg\neg R \lor (\neg Q \lor P))$
$P \lor (R \lor (\neg Q \lor P))$
$P \lor R \lor \neg Q$

FNC($\neg P \to (\neg R \to (Q \to P))$) = $P \lor R \lor \neg Q$

Negació de la conclusió
$\neg[\neg Q \land R \to P]$
$\neg[\neg(\neg Q \land R) \lor P]$
$\neg Q \land R \land \neg P$

FNC$\neg[\neg Q \land R \to P]$) = $\neg Q \land R \land \neg P$

El conjunto de clàusules obtingudes és:

S= { $\neg P \lor Q$, $Q \lor \neg S$, $\neg R \lor \neg S$, $\neg P$, $\neg S$, $P \lor R \lor \neg Q$, **$\neg Q$, R, $\neg P$**}

La clàusula $\neg P$ subsumeix totes les clàusules que la contenen:

S= { $Q \lor \neg S$, $\neg R \lor \neg S$, $\neg P$, $\neg S$, $P \lor R \lor \neg Q$, **$\neg Q$, R** }

Aplicant la regla del literal pur podem eliminar totes les clàusules que contenen $\neg S$ ja que no tenim cap clàusula amb S.

S= { $\neg P$, $P \lor R \lor \neg Q$, **$\neg Q$, R** }

La clàusula R subsumeix totes les clàusules que la contenen:

S= { $\neg P$, **$\neg Q$, R** }

És obvi que aquest conjunt no permet obtenir la clàusula buida.
D'aquesta manera podem afirmar que el raonament NO és vàlid.

Problema 4

El següent raonament és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

$\forall x(\forall y(\neg A(y) \wedge \neg C(x,y)) \rightarrow B(x))$
$\forall x\forall y(C(x,y) \rightarrow D(y))$
$\forall x((D(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall y\, \neg A(y))$
$\therefore\ \exists x\, (E(x) \vee \forall y\, B(y))$

Cerquem les FNS

1^a premissa
$\forall x(\forall y(\neg A(y) \wedge \neg C(x,y)) \rightarrow B(x))=$
$\forall x(\neg\forall y(\neg A(y) \wedge \neg C(x,y)) \vee B(x))=$
$\forall x(\exists y(A(y) \vee C(x,y)) \vee B(x))=$
$\forall x(A(f(x)) \vee C(x,f(x)) \vee B(x))=$
$\mathbf{A(f(x)) \vee C(x,f(x)) \vee B(x)}$

2^a premissa
$\forall x\forall y(C(x,y) \rightarrow D(x)) =$
$\forall x\forall y(\neg C(x,y) \vee D(x))=$
$\mathbf{\neg C(x,y) \vee D(x)}$

3^a premissa
$\forall x((D(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall y\, \neg A(y)) =$
$\forall x((\neg D(x) \vee B(x)) \wedge \forall y\, \neg A(y)) =$
$\mathbf{(\neg D(x) \vee B(x)) \wedge\ \neg A(y)}$

Negació de la conclusió
$\neg\exists x\, (E(x) \vee \forall y\, B(y)) =$
$\forall x\, (\neg E(x) \wedge \neg\forall y\, B(y)) =$
$\forall x\, (\neg E(x) \wedge \exists y\, \neg B(y)) =$
$\forall x\, (\neg E(x) \wedge \neg B(g(x))) =$
$\mathbf{\neg E(x) \wedge \neg B(g(x))}$

El conjunt de clàusules obtingudes és **(en negreta el conjunt de suport):**

$\{\ A(f(x)) \vee C(x,f(x)) \vee B(x),\ \neg C(u,v) \vee D(u),\ \neg D(z) \vee B(z),\ \ \neg A(y),\ \mathbf{\neg E(w), \neg B(g(w))}\}$

Clàusules Troncals	**Clàusules laterals**	
$\neg B(g(w))$	$A(f(x)) \vee C(x,f(x)) \vee B(x)$	Substituim x per g(w)
$A(f(g(w))) \vee C(g(w),f(g(w)))$	$C(u,v) \vee D(u)$	Substituim u per g(w) i v per f(g(w))
$A(f(g(w))) \vee D(g(w))$	$\neg D(z) \vee B(z)$	Substituim z per g(w)
$A(f(g(w))) \vee B(g(w))$	$\neg B(g(w))$	
$A(f(g(w)))$	$\neg A(y)$	Substituim y per f(g(w))
□		

Problema 5

Quina de les següents interpretacions és un contraexemple del raonament:
$\exists xQ(x,a) \rightarrow \exists xP(x)\ ,\quad \neg\forall xP(x)\quad \therefore\ \ \forall x\, \neg Q(x,a)$

a) < {1,2} , {P(1)=V, P(2)=F, Q(1,1)=V, Q(1,2)=V, Q(2,1)=F, Q(2,2)=F} , {a=2} >
b) < {1,2} , {P(1)=V, P(2)=V, Q(1,1)=F, Q(1,2)=F, Q(2,1)=V, Q(2,2)=F} , {a=2} >
c) < {1,2} , {P(1)=V, P(2)=F, Q(1,1)=F, Q(1,2)=V, Q(2,1)=F, Q(2,2)=V} , {a=1} >

d) < {1,2} , {P(1)=F, P(2)=F, Q(1,1)=V, Q(1,2)=V, Q(2,1)=V, Q(2,2)=V} , {a=1} >

Observeu la taula de veritat de la fórmula $\exists x Q(x,a) \to \exists x P(x)$ en els quatre casos:

	P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)	$\exists x Q(x,a)$	$\exists x P(x)$	$\exists x Q(x,a) \to \exists x P(x)$
a)	V	F	V	V	F	F	$Q(1,2) \lor Q(2,2)$=V	$P(1) \lor P(2)$=V	V
b)	V	V	F	F	V	F	$Q(1,2) \lor Q(2,2)$=F	$P(1) \lor P(2)$=V	V
c)	V	F	F	V	F	V	$Q(1,1) \lor Q(2,1)$=F	$P(1) \lor P(2)$=V	V
d)	F	F	V	V	V	V	$Q(1,1) \lor Q(2,1)$=V	$P(1) \lor P(2)$=F	F

Observeu la taula de veritat de la fórmula $\neg \forall x P(x)$ en els quatre casos:

	P(1)	P(2)	$\forall x P(x)$	$\neg \forall x P(x)$
a)	V	F	$P(1) \land P(2)$=F	V
b)	V	V	$P(1) \land P(2)$=V	F
c)	V	F	$P(1) \land P(2)$=F	V
d)	F	F	$P(1) \land P(2)$=F	V

Observeu la taula de veritat de la fórmula $\forall x \neg Q(x,a)$ en els quatre casos:

	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)	$\forall x \neg Q(x,a)$
a)	V	V	F	F	$\neg Q(1,2) \land \neg Q(2,2)$ = F
b)	F	F	V	F	$\neg Q(1,2) \land \neg Q(2,2)$ = V
c)	F	V	F	V	$\neg Q(1,1) \land \neg Q(2,1)$ = V
d)	V	V	V	V	$\neg Q(1,1) \land \neg Q(2,1)$ = F

Per tant la taula de veritat amb les tres fórmules és:

	$\exists x Q(x,a) \to \exists x P(x)$	$\neg \forall x P(x)$	$\forall x \neg Q(x,a)$	
a)	V	V	F	Contraexemple
b)	V	F	V	
c)	V	V	V	
d)	F	V	F	

L'únic contraexemple és el de l'opció a) , ja que les premisses tenen valor V i la conclusió té valor F.