Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la PEC de síntesis así como el enunciado de la actividad y la solución correspondiente.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Revisar y completar los conceptos sobre los números naturales y sus propiedades.
- Conocer el concepto de inducción matemática y su aplicación a la demostración de propiedades.
- Conocer el conjunto de los números complejos y entender su utilidad. Conocer cómo se representan y aprender a manipularlos.
- Conocer la utilidad y saber operar con matrices.
- Conocer la utilidad y saber operar con determinantes.
- Conocer y aplicar las técnicas básicas de discusión, resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la teoría de matrices y determinantes.

- Conocer y saber operar con los conceptos de espacio vectorial, subespacio vectorial y dimensión.
- Conocer y saber operar con los conceptos de base, coordenadas y cambios de base.
- Conocer y saber operar con bases ortonormales.
- Revisar y completar los conceptos sobre aplicaciones lineales, sus propiedades, diagonalización de matrices y transformaciones geométricas.
- Conocer la diagonalización de matrices y encontrar valores y vectores propios.
- Conocer las transformaciones geométricas básicas, escalados y giros. Conocer como se representan y aprender a componerlas.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán: 1) los números y el principio de inducción, poniendo especial énfasis en dos conjuntos concretos de números: los naturales y los complejos; 2) las matrices, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales, con especial énfasis en saber operar tanto con matrices como con determinantes y en la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales y en su discusión y resolución; 3) los espacios vectoriales, poniendo especial énfasis en dominar y saber operar con las nociones de espacio vectorial, subespacio vectorial, dimensión, base, coordenadas, cambios de base y bases ortonormales; y 4) las aplicaciones lineales y las transformaciones geométricas, con especial énfasis en el cálculo de la matriz de una aplicación lineal, su diagonalización y en los cálculos de las matrices de las transformaciones geométricas.

Recursos

Recursos Básicos

- Los módulos en PDF editados por la UOC.
- La calculadora CalcMe.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X.

- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927.

- El aula Laboratorio CalcMe.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales, a la que se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0, 3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3, 5)$: Suspenso alto (C-)
  - $[5, 7)$: Aprobado (C+)
  - $[7, 9)$: Notable (B)
  - $[9, 10]$: Excelente (A)
- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.
- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, en ningún caso, ésta no se guardará para otros semestres.
- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.
- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.
- En la realización de la PEC, se valorará:
  - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- Recordad que es necesario justificar las respuestas.
- La PEC se debe escribir usando un editor de texto (latex, libreoffice, word, ...) y entregar en formato PDF. El nombre del fichero deberá ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.

- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/

- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados.

- Dentro del documento de la PEC debéis escribir, en la primera página, vuestro nombre y apellidos y vuestro IDP completo.

- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 23:59h del día 24/05/2021**.

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos.

1. (Valoración de un 25 %)

   a) Sean los números complejos

$$\begin{aligned} z_1 &= a - 3i \\ z_2 &= a_{60^\circ} \end{aligned}$$

   donde a es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC. Comprobad que se cumple $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ y $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

   b) Demostrad por inducción que para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ se cumple la igualdad $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. **Indicación:** La igualdad $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ siempre se cumple para cualesquiera números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Solución:

a) Para comprobar que se cumple $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ escribiremos primero z_2 (que está dado en forma polar) de forma binómica [ver módulo 1, apartado 3.4.2].

$$z_2 = a_{60^\circ} = a\left(\cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ)\right) = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2}i$$

Y ahora tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= a + 3i \\ \overline{z_2} &= \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}i \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} &= a + \frac{a}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 3\right)i \end{aligned}$$

Mientras que, por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a + \frac{a}{2} + \left(-3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)i \\ \overline{z_1 + z_2} &= a + \frac{a}{2} - \left(-3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)i \end{aligned}$$

Por tanto $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

Para comprobar que se cumple $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ convertiremos z_1 a forma polar.
Para ello, calculamos $r = |z_1| = \sqrt{a^2 + (-3)^2}$, y el ángulo $\alpha = \arctan\left(\frac{-3}{a}\right)$ (salvo para $a = 0$, que directamente tenemos $\alpha = 90^\circ$ dado que es un número puramente imaginario).
Tenemos pues [ver módulo 1, apartado 3.5.1]:

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= \overline{r_\alpha} &= r_{-\alpha} \\ \overline{z_2} &= \overline{a_{60^\circ}} &= a_{-60^\circ} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (r \cdot a)_{-\alpha - 60^\circ}$$

Por otra parte:

$$z_1 \cdot z_2 = (r \cdot a)_{60^\circ + \alpha}$$

Y por tanto

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (r \cdot a)_{-(\alpha+60^\circ)} = (r \cdot a)_{-\alpha-60^\circ}$$

Por lo que la igualdad $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ queda demostrada.

b) Vamos a demostrar la propiedad $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ por inducción [ver módulo 1, apartado 2.3]. Empezamos probando que se cumple para $n = 1$, lo cual es obvio puesto que $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$. Supongamos ahora que la igualdad es cierta para n, y comprobemos que también lo es para $n+1$. Esto es: sabemos que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ y queremos probar que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}$.
Tenemos:

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z}$$

Este elemento de la derecha, por la indicación dada en el enunciado se puede escribir como

$$\overline{z^n \cdot z} = \overline{z^n} \cdot \overline{z}$$

Pero por el paso de inducción sabemos que esto es exactamente

$$\overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z}^n \cdot \overline{z}$$

Y simplemente multiplicando ahora nos queda

$$\overline{z}^n \cdot \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

Por lo que la igualdad se cumple para $n+1$.

---

2. (Valoración de un 25 %) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + z & = & 2 \\ 2x + y + 2z & = & 4 \\ 2x - by + mz & = & 4 \end{array}\right.$$

donde b es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC, y $m \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) Discutid el sistema en función del parámetro m.

b) Encontrad la solución del sistema en función del parámetro m.

c) Añadid una cuarta ecuación al sistema, distinta de las tres dadas, de manera que el sistema resultante con las cuatro ecuaciones tenga las mismas soluciones encontradas en el apartado anterior. **Nota:** Esta cuarta ecuación no puede ser simplemente un múltiplo de una de las otras tres.

Solución:

a) Calculamos

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -b & m \end{pmatrix} = m-2$$

Por tanto, si llamamos A a la matriz asociada al sistema, tenemos que rango$(A) = 2$ si $m = 2$ (puesto que el menor dado por las dos primeras filas y columnas de A tiene determinante no nulo), o bien rango$(A) = 3$ para $m \neq 2$.

Si $m \neq 2$, dado que el rango de A es 3 el rango de la matriz ampliada M también será 3, y por tanto, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo 3, apartado 4], podemos afirmar que el sistema es compatible determinado.

Si $m = 2$ la matriz ampliada M queda

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -b & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de los menores 3×3 sustituyendo cada una de las tres primeras columnas por la cuarta (formada por los términos independientes del sistema), y vemos que todos ellos dan 0, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 2. En conclusión, para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para solucionar el sistema restamos dos veces la primera ecuación a la segunda ecuación, y dos veces la primera ecuación a la tercera ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 2 \\ 2x+y+2z & = & 4 \\ 2x-by+mz & = & 4 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 2 \\ y & = & 0 \\ -by+(m-2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema es bastante más sencillo de solucionar que el inicial, dado que la segunda ecuación nos da $y = 0$, y nos queda

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 2 \\ y & = & 0 \\ (m-2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

La tercera ecuación tiene dos posibilidades:

- Si $m \neq 2$ debe cumplirse $z = 0$ y por tanto, de la primera ecuación, $x = 2$. En este caso, la solución del sistema es $(2, 0, 0)$.
- Si $m = 2$ simplemente queda $0 = 0$, por lo que solamente quedan dos ecuaciones. La primera ecuación $x + z = 2$ se puede escribir como $z = 2 - x$. Este caso es el que habíamos concluido en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, por lo que tendrá infinitas soluciones, y todas ellas tendrán la forma $(x, 0, 2 - x)$.

c) Cualquier combinación lineal de las tres ecuaciones dadas satisface la condición del enunciado. Por ejemplo, la segunda ecuación menos la primera

$$x+y+z=2$$

no modifica las soluciones encontradas para el resto del sistema.

---

3. (Valoración de un 25 %) Sea $A = \{(x, y, z, t)|x + ay + z = 0, t = x\}$ un subespacio vectorial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$. Sea $v = (a, 2, -3a, a)$ un vector determinado donde a es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

a) Comprobad que $B = \{(3, 0, -3, 3), (0, 1, -a, 0)\}$ es una base de A. ¿Pertenece v a A? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base B.

Solución: La dimensión del subespacio vectorial es 2. Por tanto, para comprobar que B es una base de A debemos ver que: (1) los vectores de B pertenecen a A y (2) son linealmente independientes.

Comprobemos la primera condición:

- Vector $(3, 0, -3, 3)$: $3 + a \cdot 0 + (-3) = 0$ y $3 = 3$, por lo que pertenece a A.
- Vector $(0, 1, -a, 0)$: $0 + a \cdot 1 + (-a) = 0$ y $0 = 0$, por lo que pertenece a A.

Comprobemos ahora la segunda condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -a \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

dado que podemos encontrar un menor 2x2 con determinante distinto de cero para cualquier a. En consecuencia, podemos afirmar que B es una base de A.

Veamos ahora si $v = (a, 2, -3a, a)$ pertenece a A. Para ello, imponemos que v sea combinación lineal de los vectores de la base B y resolvemos el sistema [ver módulo 2, apartado 2.4, pág. 15]:

$$(a, 2, -3a, a) = \alpha \cdot (3, 0, -3, 3) + \beta \cdot (0, 1, -a, 0)$$

Vemos que el sistema tiene una única solución $\alpha = a/3$ y $\beta = 2$ para cualquier valor de a, de forma que v pertenece a A y sus coordenadas en la base B son $(a/3, 2)$.

---

b) Encontrad una base de A que contenga el vector v y calculad la matriz de cambio de base de la base que habéis encontrado a la base B.

Solución: Teniendo en cuenta que A tiene dimensión 2, para encontrar otra base de A (que llamaremos C) que contenga el vector v, debemos hallar un segundo vector de A que sea linealmente independiente de v. Por ejemplo, podemos escoger el primer vector de la base B, resultando en:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & 0 \\ -3a & -3 \\ a & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Con esto, obtenemos la base $C = \{(a, 2, -3a, a), (3, 0, -3, 3)\}$. Finalmente, calculamos la matriz de cambio de base de la base C a la base B. La primera columna de dicha matriz es las coordenadas de v en la base B, calculadas en el apartado anterior. La segunda columna es directa, puesto que el segundo vector de C es el primero de B. Así, la matriz de cambio de base de C a B es [ver módulo 2, apartado 4.7]:

$$\begin{pmatrix} a/3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

---

4. (Valoración de un 25 %) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (z, 5y, bx + 2z)$$

donde b es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

a) Determinad los valores propios de la aplicación f y estudiad si diagonaliza.

Solución: En primer lugar, obtenemos la matriz A de f en la base canónica calculando las imágenes por f de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas [ver módulo 4, apartado 3]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el polinomio característico:

$$Q(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 5-t & 0 \\ b & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

Desarrollando, obtenemos:

$$Q(t) = (-t)(5-t)(2-t) - (5-t)b = (5-t)(t^2-2t-b) = (5-t)(t-(1-\sqrt{b+1}))(t-(1+\sqrt{b+1}))$$

A partir del polinomio característico, podemos obtener los valores propios: 5, $1 - \sqrt{b+1}$ y $1 + \sqrt{b+1}$, todos ellos de multiplicidad algebraica 1. Por tanto, dado que la aplicación f tiene tres valores propios diferentes, podemos asegurar que diagonaliza.

---

b) Encontrad una base de $\mathbb{R}^3$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución: Buscamos primero el vector propio de f para el valor propio 5. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-5 & 0 & 1 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ b & 0 & 2-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos las ecuaciones: $-5x + z = 0$ y $bx - 3z = 0$. De la primera vemos que: $z = 5x$. Ahora sustituimos en la segunda ecuación y se obtiene: $bx - 15x = (b - 15)x = 0$; que únicamente se cumple cuando $x = 0$, para cualquier valor de b entre 0 y 9. En paralelo, y puede tomar cualquier valor. Por tanto, la solución del sistema es: $(x, y, z) = (0, y, 0)$.

Buscamos ahora el vector propio de f para el valor propio $1 - \sqrt{b+1}$. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-(1-\sqrt{b+1}) & 0 & 1 \\ 0 & 5-(1-\sqrt{b+1}) & 0 \\ b & 0 & 2-(1-\sqrt{b+1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación de este sistema es: $(5-(1-\sqrt{b+1}))y=0$; que únicamente se cumple cuando $y=0$, para cualquier valor de b entre 0 y 9. Ahora falta analizar las otras dos ecuaciones: $(-(1-\sqrt{b+1}))x+z=0$ y $bx+(2-(1-\sqrt{b+1}))z=0$. De la primera vemos que: $z=(1-\sqrt{b+1})x$. Hacemos la sustitución en la otra ecuación y se obtiene: $bx+(2-(1-\sqrt{b+1}))(1-\sqrt{b+1})x=0$. Al arreglar la ecuación, se observa que se cumple para cualquier valor de x. Por tanto, la solución del sistema es: $(x,y,z)=(x,0,(1-\sqrt{b+1})x)$.

Finalmente, buscamos el vector propio de f para el valor propio $1+\sqrt{b+1}$. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-(1+\sqrt{b+1}) & 0 & 1 \\ 0 & 5-(1+\sqrt{b+1}) & 0 \\ b & 0 & 2-(1+\sqrt{b+1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación de este sistema es: $(5-(1+\sqrt{b+1}))y=0$; que únicamente se cumple cuando $y=0$, para cualquier valor de b entre 0 y 9. Ahora falta analizar las otras dos ecuaciones: $(-(1+\sqrt{b+1}))x+z=0$ y $bx+(2-(1+\sqrt{b+1}))z=0$. De la primera vemos que: $z=(1+\sqrt{b+1})x$. Hacemos la sustitución en la otra ecuación y se obtiene: $bx+(2-(1+\sqrt{b+1}))(1+\sqrt{b+1})x=0$. Al arreglar la ecuación, se observa que se cumple para cualquier valor de x. Por tanto, la solución del sistema es: $(x,y,z)=(x,0,(1+\sqrt{b+1})x)$.

Con todo, por ejemplo, $(0,1,0),(1,0,1-\sqrt{b+1}),(1,0,1+\sqrt{b+1})$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.
