Espai
grapa

Universitat Oberta de Catalunya

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	11/01/2020	15:30

81.507 11 01 20 EX

Espacio para la etiqueta identificativa con el código personal del **estudiante**.
Examen

Ficha técnica del examen

- Comprueba que el código y el nombre de la asignatura corresponden a la asignatura matriculada.
- Debes pegar una sola etiqueta de estudiante en el espacio correspondiente de esta hoja.
- No se puede añadir hojas adicionales, ni realizar el examen en lápiz o rotulador grueso.
- Tiempo total: **2:30 horas** Valor de cada pregunta: **25%**
- En el caso de que los estudiantes puedan consultar algún material durante el examen, ¿cuáles son?: **NINGUNO**
- En el caso de poder usar calculadora, de que tipo? **NO PROGRAMABLE**
- En el caso de que haya preguntas tipo test: ¿descuentan las respuestas erróneas? **NO** ¿Cuánto?
- Indicaciones específicas para la realización de este examen

LAS RESPUESTAS DEBEN JUSTIFICARSE. NO SE VALORARÁ SI SOLO SE DA EL RESULTADO FINAL

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	11/01/2020	15:30

Enunciados

Problema 1. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x+1)}$$

(a) **[5 puntos]** Calcular el dominio.

(b) **[5 puntos]** Calcular las asíntotas horizontales y verticales.

(c) **[10 puntos]** Calcular la función derivada $f'(x)$ y expresarla de la forma más simplificada posible. Antes de derivar, intentar simplificar al máximo la función.

(d) **[5 puntos]** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución

(a) La función $f(x)$ es un cociente de polinomios, es decir, se trata de una función racional. Entonces, el dominio será todo el conjunto de números reales a excepción de aquellos puntos que anulan el denominador. En particular,

$$(x-2)(x+1)=0 \iff x=2\ x=-1$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(5,+\infty)}$$

(b) Las asíntotas verticales se podrán dar en $x=2$ y $x=-1$ puesto que en estos puntos la función podría tender a infinito. Si calculamos los límites obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{3}{0\cdot 3}=\infty \quad (+\infty \text{ si } x\to 2^+ \ ,\ -\infty \text{ si } x\to 2^-)\\
\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{0}{0}=\text{IND}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $x=2$ sí que tenemos una asíntota vertical pero no en $x=-1$.

Para saber si tenemos asíntotas horizontales, estudiaremos el comportamiento de la función en el infinito, teniendo en cuenta como ya hemos visto que si $x\neq -1$ entonces

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

En este caso tenemos que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x-2}=1 \qquad\qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x-2}=1.$$

Así pues, el asíntota horizontal de la función es $y=1$ tanto a más como a menos infinito.

$$\boxed{\text{La asíntota vertical es } x=2 \text{ y la asíntota horizontal es } y=1}$$

(c) Observamos primero que la función es una función continua en todo su dominio de definición $\mathbb{R}-\{-1,2\}$, pero no en $x=-1$ donde tenemos una discontinuidad evitable y en $x=2$ donde tenemos una discontinuidad asintótica o de salto infinito. Por lo tanto, la derivada solo existirá en los puntos $x\notin\{-1,2\}$. En estos puntos, tal y como hemos visto en la apartado b) como $x\neq -1$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

Por lo tanto, tenemos que calcular la derivada de un cociente de polinomios. Entonces,

$$f'(x) = \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

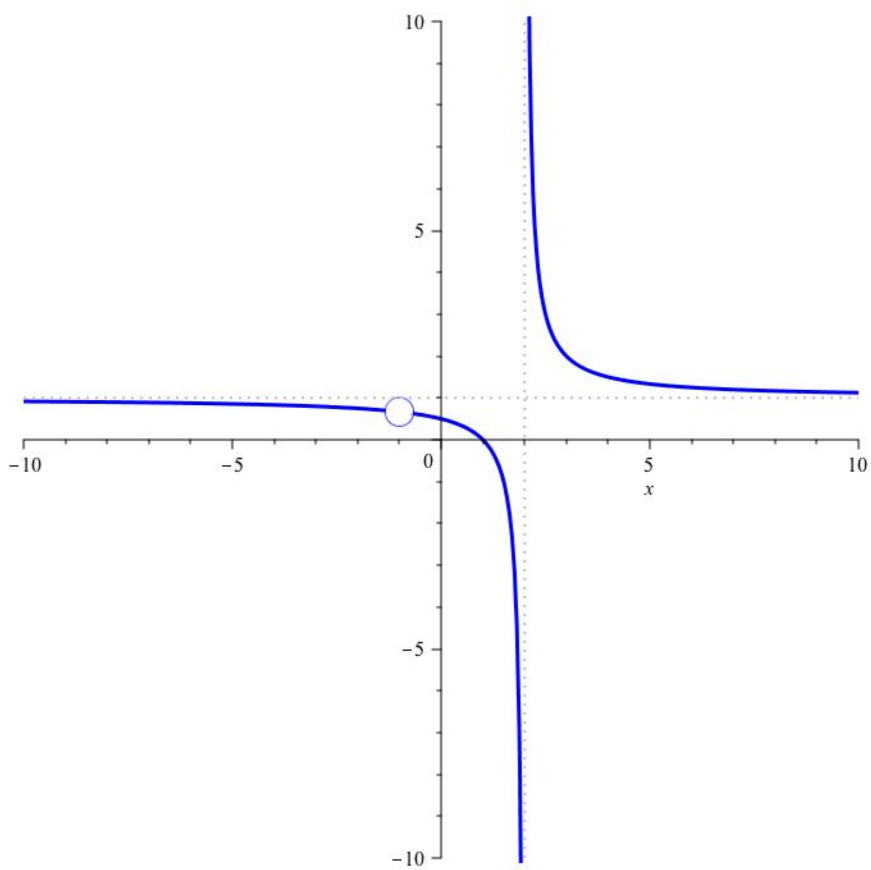
Finalmente, la función derivada para $x \notin \{-1, 2\}$ es:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}}$$

(d) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función estudiaremos el signo de la derivada de la función. En este caso, como la derivada es siempre negativa puesto que $(x-2)^2 \geq 0$ tenemos que la función es decreciente en todo su dominio de definición.

$$\boxed{\text{La función es decreciente en todo su dominio de definición}}$$

A continuación se muestra la gráfica de la función donde se confirman los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	11/01/2020	15:30

Problema 2.

(a) **[10 puntos]** Calcular la integral $\int (3x+1)\cos(3x)\,dx$.

(b) **[15 puntos]** Hacer un dibujo aproximado del área comprendida entre la recta $y = -3$ y la curva $y = 1 - x^2$ y calcular su valor.

Solución

(a) Por el método de integración por partes tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} u = 3x+1 \\ dv = \cos(3x)\,dx \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} du = 3dx \\ v = \frac{1}{3}\sin(3x) \end{array}\right\}$$

entonces,

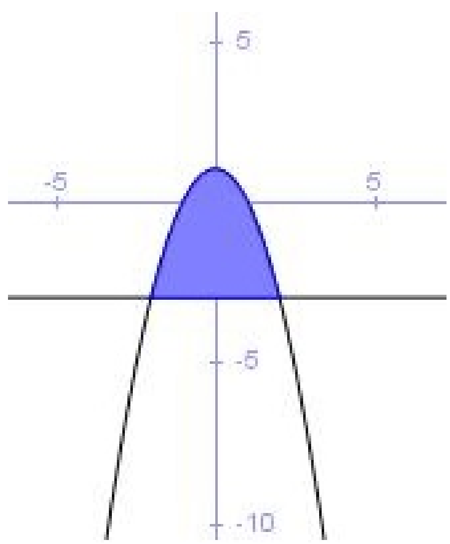
$$\int (3x+1)\cos(3x)\,dx = (3x+1)\frac{1}{3}\sin(3x) - \int 3\frac{1}{3}\sin(3x)\,dx =$$
$$= (3x+1)\frac{1}{3}\sin(3x) - \int \sin(3x)\,dx = (3x+1)\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

(b) Calculamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$1 - x^2 = -3 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$$

así podemos expresar el área de la región como la integral definida de la diferencia:

$$\int_{-2}^{2} 1 - x^2 - (-3)\,dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$
$$= 8 - \frac{2^3}{3} - \left(-8 + \frac{2^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	11/01/2020	15:30

Problema 3.

(a) **[15 puntos]** Calcular la antitransformada de Laplace de la función siguiente:

$$F(s) = \frac{3\,s^2 + s + 4}{(s+1)\,(s^2+2)}$$

(b) **[10 puntos]** Considerar el problema de valor inicial siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \quad y(0) = 5$$

Justificar cual de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{x+1}, \\ y_2(x) &= \frac{5}{5x+1}, \\ y_3(x) &= \frac{5}{x+1}, \end{aligned}$$

es solución del problema de valor inicial.

INDICACIÓN:
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ y $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

Solución

(a) Para calcular el antitransformada de Laplace de la función $F(s)$ hay que expresar $F(s)$ como suma de fracciones simples. En este caso,

$$F(s) = \frac{3\,s^2+s+4}{(s+1)\,(s^2+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2} = \frac{A(s^2+2)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+2)}$$

Cómo los numeradores tienen que ser iguales, lo tienen que ser para cualquier valor de la variable s

$$3s^2+s+4 = A(s^2+2)+(Bs+C)(s+1) \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De este modo, escogiendo tres valores de s podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. En efecto,

$$\begin{aligned} &s=-1 \;\Leftrightarrow\; 6=3A \;\Leftrightarrow\; A=2 \\ &s=0 \;\Leftrightarrow\; 4=2A+C \;\Leftrightarrow\; C=4-2A=0 \\ &s=1 \;\Leftrightarrow\; 8=3A+2(B+C) \;\Leftrightarrow\; B=(8-3A)/2=1 \end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A=2,\ B=1,\ C=0$$

Por lo tanto,

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{s}{s^2+2}$$

de forma que:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} = 2e^{-t} + \cos(\sqrt{2}t).$$

(b) La función $y_1(x)$ no puede ser solución del problema de valor inicial ya que no satisface la condición inicial, puesto que $y_1(0)=1\neq 5$. Las funciones $y_2(x)$ y $y_3(x)$ si que satisfacen la condición inicial,

$$y_2(0)=y_3(0)=5.$$

Miramos ahora si $y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$y_2(x) = \frac{5}{5x+1},\ y_2'(x) = -\frac{25}{(5x+1)^2} \;\Rightarrow\; y_2'+y_2^2 = -\frac{25}{(5x+1)^2} + \frac{25}{(5x+1)^2} = 0,$$

por lo tanto, $y_2(x)$ si que satisface la ecuación diferencial. Finalmente, $y_3(x)$ no verifica la ecuación diferencial, ya que:

$$y_3(x) = \frac{5}{x+1},\ y_3'(x) = -\frac{5}{(x+1)^2} \;\Rightarrow\; y_3'+y_3^2 = -\frac{5}{(x+1)^2} + \frac{25}{(x+1)^2} = \frac{20}{(x+1)^2} + \frac{25}{(x+1)^2} \neq 0.$$

Por lo tanto, solo $y_2(x)$ es solución del problema de valor inicial.

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	11/01/2020	15:30

Problema 4. Considerar $f(x) = e^{(1-x)/2}$.

(a) **[15 puntos]** Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $a = 1$.

(b) **[10 puntos]** Según la expresión del residuo de Taylor, indicar el orden del polinomio que se debería usar como mínimo para aproximar $f(2)$ con un error inferior a 10^{-3}.

Solución

(a) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $a = 1$, necesitamos las derivadas de la función hasta orden 3:

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\, e^{(1-x)/2},\; f''(x) = \frac{1}{4}\, e^{(1-x)/2},\; f'''(x) = \frac{-1}{8}\, e^{(1-x)/2}.$$

Así pues, $f(1) = 1$, $f'(1) = -1/2$, $f''(1) = 1/4$ y $f'''(1) = -1/8$.

El polinomio de Taylor de orden tres será:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(0)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3 = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{48}(x-1)^3, \end{aligned}$$

que podemos dejar así o calcular las potencias:

$$p_3(x) = \frac{79}{48} - \frac{13}{16}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{48}x^3.$$

(b) Según el apartado 2.4 del módul del polinomio de Taylor, alrededor de $a = 1$, el residuo correspondiente al polinomio p_3 en el punto 2 es

$$R_n(2) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!},$$

donde $z \in (1, 2)$ es un valor desconocido.

Empecemos por ejemplo con $n = 3$. Tenemos que calcular la derivada cuarta:

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{16}\, e^{(1-x)/2}$$

que es una función decreciente, por lo tanto, podem acotarla por su valor en 1:

$$|R_3(2)| \leq \frac{1}{16}\frac{1}{24} = 2.6 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

Puesto que no conseguimos el objetivo, tenemos que usar órdenes más altos:

$$|R_4(2)| \leq \frac{1}{32}\frac{1}{120} = 2.6 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$$

Así pues, sólo hace falta orden 4 para conseguir la cota del error deseada.