EXAMEN 1 - 11 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:
a) Pasad a forma binómica el siguiente complejo: $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$
b) Calculad todas las raíces cuadradas del siguiente número complejo: $5-6i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución
a) Utilizamos la relación que dice que un número complejo, en forma binaria, $a+bi$, para pasarlo a forma polar tenemos que saber que $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$.

$\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} \to 2\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto, $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$

b) Escribimos el complejo $5-6i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-6}{5}\right) = 310°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{-6}{5}$ en 130^o y en 310^o. Como que el afijo del punto buscado es $(5,-6)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 310^o. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, para no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $(5,-6)$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,-6)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $5-6i = \sqrt{61}_{310°}$

Como que se nos piden las raíces cuadradas tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt{5-6i} = \sqrt{\sqrt{61}_{310°}} = \sqrt[4]{61}_{\frac{310°+360°k}{2}} \qquad \text{para } k = 0,1$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{61}$

Los argumentos de las raíces cuadradas son $\beta = \frac{310°+360°k}{2}$ para $k = 0,1$

Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 155°$

Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 155° + 180° = 335°$

Por lo tanto, las dos raíces cuadradas del complejo $5-6i$ son:
$\sqrt[4]{61}_{155^\circ}, \sqrt[4]{61}_{335^\circ}$

2. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F =< (3, \lambda^2, 1), (-\lambda^2, 0, 0), (1, 0, -\lambda) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculad la dimensión de F según λ y una base en cada caso.
b) Sea $v = (0, 0, -6)$. En el caso $\lambda = 0$, ¿$v \in F$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado en el apartado anterior.
c) Sea $B = \{(0, 0, -6), (-6, 0, -2)\}$. En el caso $\lambda = 0$, calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base que habéis encontrado para $\lambda = 0$ en el primer apartado.

Solución
a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F.

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5$$

Así, si $\lambda \neq 0$ la dimensión de F es 3. Es decir, F es $\mathbb{R}^3$. En este caso una base puede ser la formada por los vectores con los que está definido F o la formada por cualesquiera 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes.
Si $\lambda = 0$ calculamos el rango:

$$rang \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así, si $\lambda = 0$ la dimensión de F es 2 y una base puede ser $A = \{(3, 0, 1), (1, 0, 0)\}$.

b) Para ver si $v \in F$ y a la vez calcular sus coordenadas en caso afirmativo, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -6$ y $y = 18$. Por tanto $v \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(-6, 18)$.

c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Para el primer vector de B hemos calculado sus coordenadas en A en el apartado anterior. El segundo vector de B vemos que es -2 veces el primero de A (también podríamos resolver un sistema lineal análogo al apartado anterior). Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el plano $\pi : 2x + ky - 2z = 6$ y la recta $r : \left.\begin{array}{r} x + y - z = \quad k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$

Se pide:
a) Determinad, razonadamente, para qué valores del parámetro k la recta r no tiene ningún punto en común con el plano π.
b) Para $k = 0$, calculad el punto de corte de la recta r con el plano π.

Solución
a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de una recta r (dada por dos ecuaciones) y un plano π se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (Ver apuntes módulo 3, página 32)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + ky - 2z = 6 \\ x + y - z = k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$$

Cuando este sistema sea incompatible tendremos que la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común.

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ k & 2 & -1 & 3k \end{array}\right)$$

Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango(M) $=$n^o incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $k = 2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

- Si $k = 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

Así pues, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k=1 \text{ o } k=2\text{, entonces la recta } r \text{ no tiene ningún punto en común con el plano } \pi}$$

b) Para $k = 0$ el plano π y la recta r tienen por ecuaciones:

$$\pi : 2x - 2z = 6 \qquad\qquad r : \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sabemos, por el apartado anterior, que para $k = 0$ la recta r corta al plano π en un único punto, es decir, recta y plano tienen un único punto en común, que es el que se obtiene al resolver el sistema compatible determinado formado por las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{2\cdot F2-F1\to F2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2\to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2z &= 6 \\ 2y &= -6 \\ -z &= 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } (x = -3, y = -3, z = -6)$$

Así pues, $\boxed{\text{para } k = 0 \text{ la recta } r \text{ corta al plano } \pi \text{ en el punto } (-3, -3, -6)}$.

4. Sean $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, 2)$. Sean $D = (3, 2)$ y $E = (1, 4)$.
a) Sea g un giro de ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ desde el origen en sentido antihorario. Dad la matriz de g.
b) Encontrad α de manera que el triángulo $g(A), g(B), g(C)$ tenga un lado paralelo al eje x.
c) Sea h un escalage de razón λ y desde el punto $P = (a, b)$. Dad la matriz de h.
d) Encontrad la matriz del escalage f tal que $f(B) = D$ y $f(C) = E$.
e) Calculad $f(A)$, donde f es el escalage que se ha encontrado en el apartado anterior.

Solución
a) Para simplificar la notación escribimos $c = \cos(\alpha)$ y $s = \sin(\alpha)$. La matriz del giro g es:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Las imágenes de A, B, C por g son:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c-s & c-2s \\ 0 & 2s+c & s+2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el vector $g(B) - g(C) = (c+s, s-c)$. Imponiendo que sea paralelo al eje x, obtenemos $s - c = 0$. O sea, $s = c$. Por lo tanto, la tangente de α es 1. Es decir $\alpha = 45^{\text{o}}$.

c) La matriz del escalage desde el punto $P = (a, b)$ y de razón λ se obtiene multiplicando las tres matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a(1-\lambda) \\ 0 & \lambda & b(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) El punto de intersección de las rectas BD y CE es el $(1,0)$. Por lo tanto, el escalage tiene que ser desde el punto $P = (1,0)$. Por otra parte, observamos que $PD = D - P = (3,2) - (1,0) = (2,2)$ y que $PB = B - P = (2,1) - (1,0) = (1,1)$. O sea, $PD = 2PB$. Análogamente, $PE = E - P = (1,4) - (1,0) = (0,4)$ y $PC = C - P = (1,2) - (1,0) = (0,2)$. O sea, $PE = 2PC$. Así, el escalage tiene que ser de razón 2. Concluimos que f es el escalage de razón 2 desde el punto $P = (1,0)$. La matriz de este escalage es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La imagen de A por este escalage f se obtiene al multiplicar el vector columna $(0,0,1)$ por dicha matriz. Obtenemos $f(A) = (-1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$