Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **1**

Data de proposta: 27/09/2013 **Data d´entrega:** $\leq$ 07/10/2013

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´haurà d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*). **Per utilitzar la i=$\sqrt{-1}$, dels nombres complexos, amb la Wiris haureu d´utilitzar la icona que apareix a l´eina "Símbols" (no la "i" del teclat de l´ordinador).**
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 07/10/2013**

Valoració:

- **Tots els exercicis tenen el mateix valor. A cada exercici tots els apartats tenen la mateixa puntuació.**

SOLUCIÓ

1. Per a tot nombre natural $n \geq 1$, demostra per inducció que el nombre $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ és divisible per 9

Solució:

Apliquem els passos que s´expliquen a l´apartat 2.3 de la pàgina 14 del material imprès (requadre gris):

i. Cal veure que la propietat és certa per a n = 1, és a dir que $1^3 + (1 + 1)^3 + (1 + 2)^3$ és divisible per 9, la qual cosa és certa ja que $1+8+27 = 36$ i 36 és divisible per 9 ($36 = 9\cdot4$)

ii. Cal veure que si la propietat és certa per a un natural n, llavors també ho és per a n + 1.

Efectivament: Hem de veure que si $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ és divisible per 9 implica que $(n+1)^3 + ((n+1) + 1)^3 + ((n+1) + 2)^3$ és divisible per 9.

Sabem que: $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 9p$

Partim de: $(n+1)^3 + ((n+1) + 1)^3 + ((n+1) + 2)^3$= operem=
= $(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27$ = agrupem=
= $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + 9(n^2 + 3n + 3)$ = per un costat, apliquem hipòtesi d´inducció i, per un altre, sabem que $9(n^2 + 3n + 3)$ és múltiple de 9 = $9p + 9(n^2 + 3n + 3)$

Llavors, pel principi d´inducció matemàtica, la propietat és certa per a qualsevol nombre natural.

2. Contesta als següents apartats:
   a. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica:

$$a)\frac{1}{2+i} \quad b)\frac{(i-1)^3}{i+1} \quad c)\frac{-5+3i}{\overline{(1+i)}^2} \quad d)(2+i)\cdot(8+5i)\cdot i \quad e)\frac{1+i}{2+i}:\frac{-1+i}{-2+i}$$

Solució:

Per a això anem a aplicar la definició de nombre "i" que apareix a l´apartat 3.1 de la pàgina 17 del material imprès. Com que tenim una sèrie d´operacions amb nombres complexos en forma binòmica que operarem tal com s´explica a l´apartat 3.3.1 de la pàgina 20.

A més a més, en aquests casos, partirem del complex i multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar el complex del denominador. I, per últim, agrupem part imaginària i part real:

$$a)\frac{1}{2+i} = \frac{1\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

$$b)\frac{(i-1)^3}{i+1} = \frac{(i-1)^4}{(i+1)\cdot(i-1)} = \frac{(-2i)^2}{i^2-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$c)\frac{-5+3i}{\overline{(1+i)}^2} = \frac{-5+3i}{(1-i)^2} = \frac{-5+3i}{-2i} = \frac{(-5+3i)\cdot i}{-2\cdot i^2} = \frac{-5i-3}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$d)(2+i)\cdot(8+5i)\cdot i = (16+10i+8i-5)\cdot i = 16i - 10 - 8 - 5i = -18 + 11i$$

$$e)\ \frac{1+i}{2+i} : \frac{-1+i}{-2+i} = \frac{(1+i)\cdot(-2+i)}{(2+i)(i-1)} = \frac{-2+i-2i-1}{2i-2-1-i} = \frac{-i-3}{-3+i} = \frac{(-i-3)^2}{(-3+i)\cdot(-3-i)} =$$
$$= \frac{-1+6i+9}{9+1} = \frac{8+6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

Comprovació amb Wiris:

$$\text{simplifica}\left(\frac{1}{2+i}\right) \rightarrow \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

$$\text{simplifica}\left(\frac{(i-1)^3}{i+1}\right) \rightarrow 2$$

$$\text{simplifica}\left(\frac{-5+3i}{(\text{conjugat}(1+i))^2}\right) \rightarrow -\frac{3}{2} - \frac{5\cdot i}{2}$$

$$\text{simplifica}((2+i)\cdot(8+5i)\cdot i) \rightarrow -18+11\cdot i$$

$$\text{simplifica}\left(\frac{\frac{1+i}{2+i}}{\frac{-1+i}{-2+i}}\right) \rightarrow \frac{4}{5} + \frac{3\cdot i}{5}$$

b. Troba les arrels de l´equació, en forma polar i binòmica i els angles en graus, de la següent equació: $(1+i)\cdot x^3 - 2i = 0$

NOTA: Recorda que la calculadora Wiris utilitza, per defecte, radians (i no graus) per realitzar els càlculs.

Solució:

Queda clar que (observem que és el que s´explica a l´apartat 3.4.1. de la pàgina 30):

$$x^3 = \frac{2i}{1+i} \rightarrow x^3 = \frac{2i\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} \rightarrow x^3 = \frac{2i-2i^2}{1-i^2} \rightarrow x^3 = \frac{2+2i}{2} \rightarrow x^3 = 1+i$$

Per tant, $x = \sqrt[3]{1+i}$ Per determinar les arrels cúbiques d´aquest complex determinem primer el mòdul i l´argument de $z = 1+i$:

$$m = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\frac{1}{1} = arctg1 = 45^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $z = \sqrt{2}_{45^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^o}} = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{\frac{45^o+360^o k}{3}}$$ per a k=0, 1, 2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{45^o+360^o k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 15^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 15^o+120^o = 135^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 135^o+120^o = 255^o$

Per tant, les tres arrels de l´equació són:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[6]{2}_{15^o} \\ \sqrt[6]{2}_{135^o} \\ \sqrt[6]{2}_{255^o} \end{array}}$$

Seguint les instruccions de l´apartat 3.4.2 de la pàgina 33, passem els nombres a forma binòmica:

$$\boxed{\sqrt[6]{2}_{15^o} = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 15^o + i sen 15^o) = \sqrt[6]{2}\cdot(0{,}97 + 0{,}26i) = 1{,}08 + 0{,}29i}$$

$$\boxed{\sqrt[6]{2}_{135^o} = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 135^o + i sen 135^o) = \sqrt[6]{2}\cdot(-0{,}707 + 0{,}707i) = -0{,}79 + 0{,}79i}$$

$$\boxed{\sqrt[6]{2}_{235^o} = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 255^o + i sen 255^o) = \sqrt[6]{2}\cdot(-0{,}26 - 0{,}97i) = -0{,}29 - 1{,}08i}$$

Comprovació amb Wiris:

$$\text{polar}\left(\sqrt[6]{2}, \frac{15\pi}{180}\right) \rightarrow \frac{\sqrt[6]{432}}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \left(\frac{\sqrt[6]{432}}{4} - \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\cdot i$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[6]{2}, \frac{135\pi}{180}\right) \rightarrow -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4}\cdot i}{2}$$

$$\text{polar}\left(\sqrt[6]{2}, \frac{255\pi}{180}\right) \rightarrow -\frac{\sqrt[6]{432}}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \left(-\frac{\sqrt[6]{432}}{4} - \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\cdot i$$

$$\text{resol}\left((1+i)\cdot x^3 - 2i = 0, \mathbb{C}\right) \rightarrow \left\{\left\{x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4}\cdot i}{2}\right\}, \left\{x = \frac{\sqrt[6]{432}}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \left(\frac{\sqrt[6]{432}}{4} - \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\cdot i\right\}, \left\{x = -\frac{\sqrt[6]{432}}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \left(-\frac{\sqrt[6]{432}}{4} - \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\cdot i\right\}\right\}$$