Solució examen 1

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

b) Calcula les arrels cinquenes del complex següent: $z=\sqrt[5]{10+10i}$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Solució:

a) Operem amb l´expressió, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=\frac{2-3i-3-2i}{3+2i-2-i}=\frac{-1-5i}{1+i}=\frac{(-1-5i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{-1-5i+i+5i^2}{2}=$$
$$=\frac{-6-4i}{2}=-3-2i$$

Per tant:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=-3-2i$$

b) Escrivim el complex $z´=10+10i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$
$$\alpha=arctg\left(\frac{10}{10}\right)=arctg1=45^{\circ}$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle donat que la part real i la part imaginària del complex són positives (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $z=\sqrt[5]{10+10i}=\sqrt[5]{(10\sqrt{2})_{45^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{10\sqrt{2}_{45}}=\left(\sqrt[10]{200}\right)_{\frac{45^{\circ}+360^{\circ}k}{5}}$$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[10]{200}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{45^\circ + 360^\circ k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 9^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 9^\circ + 72^\circ = 81^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 9^\circ + 144^\circ = 153^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 9^\circ + 216^\circ = 225^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 9^\circ + 288^\circ = 297^\circ$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $z = \sqrt[5]{10+10i}$ són:

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{9^\circ} = 1{,}6777 + 0{,}26573i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{81^\circ} = 0{,}26573 + 1{,}6777i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{153^\circ} = -1{,}5135 + 0{,}77117i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{225^\circ} = -1{,}2011 - 1{,}2011i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{297^\circ} = 0{,}77117 - 1{,}5135i}$$

2.

Sigui E un subespai de R^3 generat pels següents vectors:

E=< $(a+1, 0, -8)$, $(7, a-1, a)$, $(0, 0, a-1)$ >.

a) Determina en funció d'*a* la dimensió del subespai E.
b) Per al cas $a = 0$ troba una base d'E. Pertany v=(1,0,1) a E? Quines són les seves coordenades en la base que has trobat?

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 7 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ -8 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 7 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-1)(a+1) = (a-1)^2(a+1)$$

Així per $a \neq -1$ i $a \neq 1$ tenim que el determinant que formen els vectors serà no nul i per tant tindrem el màxim nombre de vectors linealment independents. En aquest cas la dimensió és 3.

Cas $a=-1$ Podem trobar un menor d'ordre 2 diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant tenim 2 vectors linealment independents i això implica que l'espai generat per E és de dimensió 2.

Cas $a=1$ Podem trobar un menor d'ordre 2 diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant tenim 2 vectors linealment independents i això implica que l'espai generat per E és de dimensió 2.

b) En l'apartat anterior ja hem vist que per $a=0$ els tres vectors són linealment independents. Per tant podem usar com a base els tres vectors amb els quals E està definit: Base={(1,0,-8),(7,-1,0),(0,0,-1)}

Per veure si v pertany a E i a la vegada trobar-ne les coordenades en el cas que hi pertanyi, resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=1, y=0, z=-9. Per tant les coordenades de v en la base trobada són (1,0,-9)

3.

Sigui la matriu *A* definida per

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k+3 & k+1 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{on } k \in \mathbb{R}$$

a) Calculeu el rang de la matriu *A* en funció del paràmetre real *k*.
b) Discutiu i solucioneu el sistema homogeni

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Resolució:

a)

Per a estudiar el rang(A) podem fer-ho bé per transformacions elementals successives que simplifiquin la matriu (mètode de Gauss) o bé càlcul de determinants buscant el major menor no nul (en funció del paràmetre real k). Per la dimensió de la matriu començarem primer pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & k+3 & k+1\\ 1 & 1 & k+2 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\sim^{(1)}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & k+1 & k+1\\ 0 & 2 & k+1 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim^{(2)}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & k+1 & k+1\\ 0 & 0 & 0 & -k\\ 0 & 0 & -2k & -2k\end{pmatrix}$$

(1) Restant a la segona fila 2 vegades la primera
Restant a la tercera fila la primera

Restant a la quarta fila 3 vegades la primera

(2) Restant a la tercera fila la segona
Restant a la quarta fila 2 vegades la segona

Amb això tenim que el rang(M) serà com a mínim de 2 ja que tenim dues files no nules (les dues primeres). Per a estudiar com, en funció dels valors del paràmetre k, pot augmentar o no el rang, mirem quan s'anul.la el menor format per les dues darrerres files i les dues darreres columnes.

$$\begin{vmatrix}0 & -k\\ -2k & -2k\end{vmatrix} = -2k^2.$$

Per tant aquest menor s'anul.larà si i només si k = 0.

Per tant, si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ ja que les dues darreres files seran independents i ampliaran el rang 2 de les dues primeres.

I si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ ja que les dues darreres files s'anul.len.

En resum:

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$.
- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

b) Per tractar-se d'un sistema homogeni serà sempre compatible. Ara bé cal veure si la solució és la trivial (0,0,0,0) o bé es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ que coincideix amb el nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD i la solució serà (0,0,0,0).

- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ i per tant com que és menor que el nombre d'incògnites (4) tenim que el sistema serà Compatible Indeterminat amb (4-2=2) 2 graus de llibertat.

De l'apartat anterior, de la matriu reduïda tenim que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ és el menor que ens garanteix el rang, podem eliminar les equacions tercera i quarta (per ser combinació lineal de les dues primeres) i traspassant els termes de z, t i u al terme independent obtenim el següent sistema equivalent:

$$\begin{cases} x - y & = & -z \\ \quad 2y & = & -z - t \end{cases}.$$

Utilitzant z i t com a incògnites indeterminades, podem expressar y i x en termes de z i t, i obtenim

y = (-z-t)/2

x = y-z = (-z-t)/2 -z= (-3z-t)/2.

En resum:

- Si $k \neq 0$ el sistema és SCD i la solució és (0,0,0,0).

- Si $k=0$ el sistema és SCI amb 2 g.ll. i la solució és de la forma $\left(\frac{-3z-t}{2},\frac{-z-t}{2},z,t\right)$.

4.

Sigui P el quadrat de vèrtexs (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1).

a) Sigui *G* el gir de 45º en sentit antihorari des del punt (0,1). Sigui Q la imatge de P per *G*. Calculeu Q.

b) Sigui *E* l'escalatge uniforme de raó *a* des del punt (0,0). Sigui R la imatge de Q per *E*. Trobeu *a* de manera que un costat de R estigui damunt la recta $x=2$.

Resolució:

Per fer un gir de 45º des del punt (0,1), primer fem la translació que porta el (0,1) a l'origen (veure apunts M6, Notació matricial eficient): $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després fem el gir de 45ª en sentit antihorari: $gir=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després desfem la translació: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim G, el gir de 45º en sentit antihorari des del punt (0,1):

$$G=T^{-1}\cdot gir\,T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculem Q, la imatge del quadrat P pel gir G:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El quadrat Q és el de vèrtexs: $(\sqrt{2},1),(0,1),(0,1-\sqrt{2}),(\sqrt{2},1-\sqrt{2})$.

b) La matriu de E, l'escalatge uniforme de raó a des de l'origen és $E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

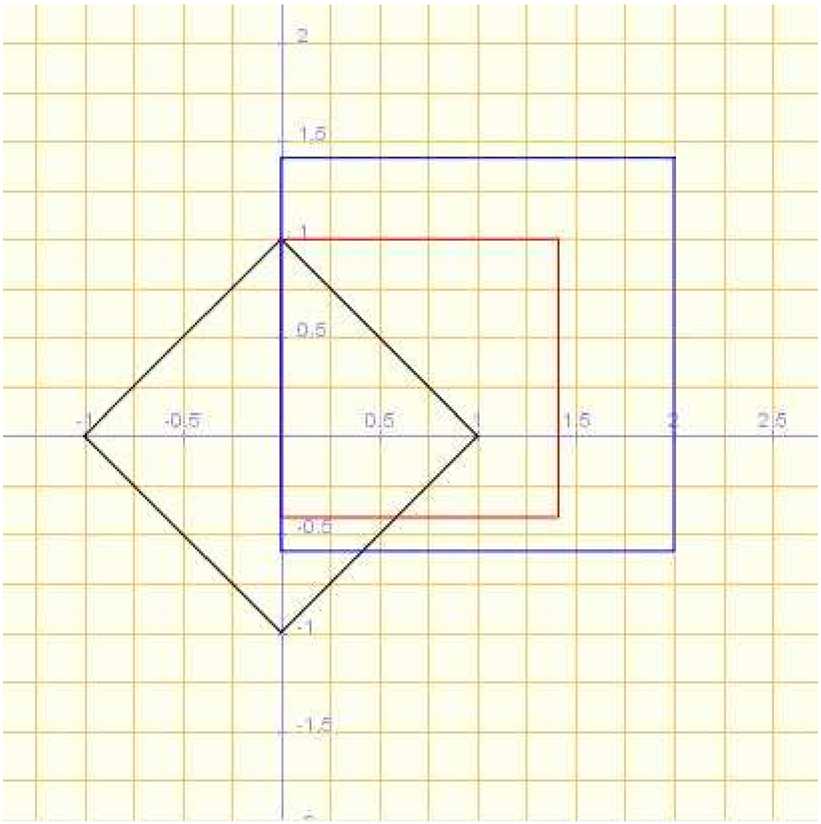
Per a obtenir R, la imatge del quadrat Q per l'escalatge E fem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & 0 & 0 & a\sqrt{2} \\ a & a & a(1-\sqrt{2}) & a(1-\sqrt{2}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R té vèrtexs $(a\sqrt{2},a)$, $(0,a)$, $(0,a(1-\sqrt{2}))$, $(a\sqrt{2},a(1-\sqrt{2}))$. L'única manera possible que un costat de R estigui damunt la recta $x=2$ es que $a\sqrt{2}=2$. O sigui,

$$\boxed{a = 2/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}}$$

En el dibuix fet amb la Wiris, en negre tenim P, en vermell Q i en blau R.


2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
-0.5
-1
-1.5