Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Tercera PAC. Mòduls 6 i 7.
Semestre de tardor de 2011 (del 30 de novembre al 21 de desembre).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar:
  PAC3_Cognom1cognom2nom.pdf
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 25%) Donades les següents fórmules booleanes:

   I $a \wedge ((b \wedge \bar{b}) \vee \bar{c})$

   II $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   III $(a \wedge b \wedge c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   IV $a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

   a) Digueu quines són satisfactibles i quines no. Per a cadascuna de les que ho són, doneu *totes* les assignacions de variables que la satisfan.

   b) Digueu quines fórmules estan en forma normal conjuntiva.

   c) Quines fórmules de l'enunciat podrien ser instàncies del problema $3SAT$?

   d) Enuncia el problema $3SAT$ com un problema d'optimització (*Indicació:* considera com a criteri a optimitzar el nombre de clàusules de la fórmula que s'aconsegueixen satisfer).

e) En un conegut problema de matemàtica recreativa, cal deixar a un dels dos costats d'un riu a un llop, una cabra i un enciam. No podem deixar en un mateix costat del riu al llop amb la cabra, ni a la cabra amb l'enciam (ja que el primer es menjaria al segon). Escriviu una fórmula en forma normal conjuntiva que es satisfagui si i només si es compleixen aquestes condicions.

2. (Valoració d'un 25%) Siguin A, B i C tres problemes que verifiquen $A \leq_p B$ i $B \leq_p C$. Digueu si les següents afirmacions són verdaderes o falses, justificant la resposta:

   a) $A \leq_p C$.

   b) Si $B \leq_p A$, aleshores $A = B$.

   c) Si $C \leq_p A$, aleshores A i C són polinòmicament equivalents.

   d) Si $A \in NP$ i C és $NP - complet$, llavors B és $NP - complet$.

   e) Si $C \in P$, aleshores $A \in P$.

   f) Si $A \in NP$, aleshores $C \notin P$.

   g) $C \not\leq_p A$.

3. (Valoració d'un 25%) Considereu els dos problemes de decisió següents:
   $CAMI - HAM$: Donat un graf $G = (V, A)$, i dos vèrtexs u i v, determinar si existeix un camí hamiltonià de u a v a G.

   $CAMI - HAM - DIR$: Donat un graf *dirigit* $G = (V, A)$, i dos vèrtexs u i v, determinar si existeix un camí hamiltonià de u a v a G.

   a) Demostreu que el problema $CAMI - HAM - DIR$ pertany a NP.

   b) Volem fer la reducció de $CAMI - HAM - DIR$ a $CAMI - HAM$, és a dir, $CAMI - HAM - DIR \leq_p CAMI - HAM$. Donat el graf dirigit G, li associem el graf no dirigit G' amb els següents vèrtexs: per a cada vèrtex A de G diferent de u i v, tenim tres vèrtexs a G', als que anomenem A_{entra}, A_{mig} i A_{surt}. A G' també tenim u_{surt} i v_{entra}. Penseu quines arestes ha de tenir G' per a que l'assignació que fa correspondre G' a G sigui una funció de reducció de $CAMI - HAM - DIR$ a $CAMI - HAM$, i demostreu que efectivament és una reducció polinòmica.

c) Sabent que $CAMI-HAM$ és $NP-complet$, què podem afirmar sobre $CAMI-HAM-DIR$? Podria ser que $CAMI-HAM-DIR$ pertangués a P?

4. (Valoració d'un 25%) Considereu els dos problemes de decisió següents:

   $CAMI-CURT$: Donat un graf $G=(V,A)$, dos vèrtexs u i v, i un nombre natural k, determinar si existeix un camí de u a v de llargada igual o més petita que k.

   $CAMI-LLARG$: Donat un graf $G=(V,A)$, dos vèrtexs u i v, i un nombre natural k, determinar si existeix un camí de u a v de llargada igual o més gran que k.

   a) Demostreu que $CAMI-CURT \in P$, donant un algorisme per resoldre'l en temps polinòmic.

   b) Demostreu que $CAMI-LLARG \in NP$.

   c) Demostreu que si $CAMI-LLARG \in P$, aleshores el problema del camí hamiltonià en grafs no dirigits ($CAMI-HAM$) també seria a P.