EXAMEN 1

1. Demostrad por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

Solución

Aplicaremos la teoría del principio de inducción, apartado 2.3 de la página 14 del material del curso.
Para $n = 1$, tenemos que $1^3 - 1 = 0$, que es múltiplo de 6.
Supongamos cierta la hipótesis para n, es decir, supongamos cierto que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 y probemos que la hipótesis es cierta para $n + 1$, es decir, queremos probar que $(n + 1)^3 - (n + 1)$ es múltiplo de 6.
Calculando obtenemos:
$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n$.
Por hipótesis de inducción, sabemos que $n^3 - n$ es múltiplo de 6, probaremos que $3n^2 + 3n$ también lo es y de esta manera quedará demostrado el caso $n + 1$, ya que la suma de dos múltiplos de 6 siempre es otro múltiplo de 6.
En efecto, partimos de: $3n^2 + 3n = 3n(n + 1)$.
Por un lado, tenemos que $3n(n + 1)$ es múltiplo de 3 por estar multiplicado por 3.
Por otro lado, nos hace falta comprobar que también es múltiplo de 2. Tenemos que $n(n + 1)$ es el producto de dos números naturales consecutivos y, por tanto, podemos asegurar que uno de los dos números será par y, por tanto, su producto también será par.
Por tanto, $3n^2 + 3n$ es múltiplo de 6 (por ser múltiplo de 2 y de 3).
Con lo que hemos demostrado que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + 3z = & k \\ 3x + y + k^2 z = & 2 \\ (2a + 2)x + (a + 1)z = & 0 \end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:
a) Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius, discutid el sistema en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinad las soluciones del sistema para el valor de k que hace que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & k^2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & k^2 & 2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & k^2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)+2k^2(a+1)-6(a+1)-3(a+1) = (a+1)(2k^2-8)$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -2 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  Calculamos, para $k = 2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes
  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$
  Así pues, $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Si $k = -2$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  Calculamos, para $k = -2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes
  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8a+8 \neq 0.$$
  Así pues, tenemos que se verifica $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(M) = 3$, y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = \;\; 2 \\ 3x + y + 4z = \;\; 2 \\ (2a+2)x + (a+1)z = \;\; 0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & -2a-2 & -5a-5 & -4a-4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - 3 \cdot F1 \rightarrow F2$, $F3 - (2a+2) \cdot F1 \rightarrow F3$, (2): $F3 - (a+1) \cdot F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = \;\; 2 \\ -2y - 5z = \; -4 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{4-5z}{2}$ y sustituyendo este valor de y en la primera ecuación y despejando la x se obtiene $x = \frac{-z}{2}$.

Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma $\left(x = \dfrac{-z}{2},\ y = \dfrac{4-5z}{2},\ z\right)$.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 + a_4 = 0\}.$$

Y sea $v = (1, 2, 3, -1)$.

a) Comprobad que $A = \{(1,1,1,-1), (0,0,1,0), (0,1,1,0)\}$ es una base de E. Demostrad si el vector v pertenece al subespacio E. En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sean

$$M = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7) \\ (a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ 0 & a(a-6) & 0 \\ (a-8)(a-1) & 0 & (a-8)(a-4) \end{pmatrix},$$

donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.
¿Pueden M o N ser matrices de cambio de base de una base B a la base A? ¿Cuáles son las coordenadas de la base B en la base conónica de $\mathbb{R}^4$, para los casos en que M o N lo sean?

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1+a_4=0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Así pues, A es una base de E.
Para comprobar si $v \in E$ estudiamos si el siguiente sistema tiene solución [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x=1$, $y=1$ y $z=1$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(1,1,1)$.

b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base en E deberán de ser 3×3. Pero esto no nos descarta ninguna. También sabemos que deben ser invertibles, por tanto, vamos a ver si M y N lo son [Ver módulo 2, sección 4.7]. Podemos calcular el determinante y tenemos:

$$Det(M) = (a-1)(a-3)(a-5)(a-7)(a-9).$$

De forma que para $a = 1, 3, 5, 7, 9$ el determinante de M es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base en E, para el resto de valores sí.

$$Det(N) = a^2(a-2)(a-4)(a-6)(a-8).$$

De forma que para $a = 0, 2, 4, 6, 8$ el determinante de N es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base en E, para el resto de valores sí.
Para calcular la base B en cada caso, podemos multiplicar directamente y obtenemos la base B (columnas de la matriz resultado) [Ver módulo 2, sección 4.7].
Para los casos $a = 0, 2, 4, 6, 8$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M =$$

$$= \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ (a-1)(a-3)+(a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \\ (a-1)(a-3)+(a-4)(a-2)a & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7)+(a-9) \\ -(a-1)(a-3) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y para los casos $a = 1, 3, 5, 7, 9$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot N =$$

$$= \begin{pmatrix} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ a(a-2)+(a-8)(a-1) & (a-9)(a-3) & (a-8)(a-4) \\ a(a-2)+(a-8)(a-1) & (a-9)(a-3)+a(a-6) & (a-8)(a-4) \\ -a(a-2) & -(a-9)(a-3) & 0 \end{pmatrix}$$

$a=0$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \\ 3 & 35 & 26 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=1$	$\begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ -1 & 16 & 21 \\ -1 & 11 & 21 \\ 1 & -16 & 0 \end{pmatrix}$
$a=2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 15 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=3$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$a=4$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=5$	$\begin{pmatrix} 15 & -8 & 0 \\ 3 & -8 & -3 \\ 3 & -13 & -3 \\ -15 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
$a=6$	$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & -3 \\ 15 & -1 & -4 \\ -15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=7$	$\begin{pmatrix} 35 & -8 & 0 \\ 29 & -8 & -3 \\ 29 & -1 & -3 \\ -35 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
$a=8$	$\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & -1 \\ 35 & 3 & 2 \\ -35 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=9$	$\begin{pmatrix} 63 & 0 & 0 \\ 71 & 0 & 5 \\ 71 & 27 & 5 \\ -63 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sean $A = (a+1, 1)$, $B = (0, 0)$ y $C = (2a+2, 0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC.
Se pide:

a) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

b) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razones 2 en el eje x y a en el eje y respecto al punto A seguido de una translación. Determinad el vector de la translación.

c) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución

a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 2a+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2a-2 & 2a+2 \\ 2a-2 & a-2 & a-2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las imágenes de los puntos dados: $f(A) = (0, 2a-2)$, $f(B) = (-2a-2, a-2)$ y $f(C) = (2a+2, a-2)$.

$a = 0$	$f(A) = (0, -2)$ $f(B) = (-2, -2)$ $f(C) = (2, -2)$	$a = 1$	$f(A) = (0, 0)$ $f(B) = (-4, -1)$ $f(C) = (4, -1)$
$a = 2$	$f(A) = (0, 2)$ $f(B) = (-6, 0)$ $f(C) = (6, 0)$	$a = 3$	$f(A) = (0, 4)$ $f(B) = (-8, 1)$ $f(C) = (8, 1)$
$a = 4$	$f(A) = (0, 6)$ $f(B) = (-10, 2)$ $f(C) = (10, 2)$	$a = 5$	$f(A) = (0, 8)$ $f(B) = (-12, 3)$ $f(C) = (12, 3)$
$a = 6$	$f(A) = (0, 10)$ $f(B) = (-14, 4)$ $f(C) = (14, 4)$	$a = 7$	$f(A) = (0, 12)$ $f(B) = (-16, 5)$ $f(C) = (16, 5)$
$a = 8$	$f(A) = (0, 14)$ $f(B) = (-18, 6)$ $f(C) = (18, 6)$	$a = 9$	$f(A) = (0, 16)$ $f(B) = (-20, 7)$ $f(C) = (20, 7)$

b) La matriz del escalado desde el punto $A = (a+1, 1)$ y de razones 2 y a se obtiene multiplicando tres matrices que, de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-(a+1), -1)$, la del escalado y la de la traslación de vector $(a+1, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico" del módulo 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la traslación de vector (r, s) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición del escalado con esta traslación sería el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones" del módulo 5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1+r \\ 0 & a & -a+1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que r y s deben cumplir

$$-a-1+r = -2a-2,$$

de donde $r = -a-1$ y que

$$-a+1+s = a-2,$$

de donde $s = 2a-3$.

$a=0$	$(r,s)=(-1,-3)$	$a=1$	$(r,s)=(-2,-1)$
$a=2$	$(r,s)=(-3,1)$	$a=3$	$(r,s)=(-4,3)$
$a=4$	$(r,s)=(-5,5)$	$a=5$	$(r,s)=(-6,7)$
$a=6$	$(r,s)=(-7,9)$	$a=7$	$(r,s)=(-8,11)$
$a=8$	$(r,s)=(-9,13)$	$a=9$	$(r,s)=(-10,15)$

c) La condición que deben cumplir los puntos fijos es que $f(x, y) = (x, y)$.
La imagen del punto (x, y) por f es:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2a-2 \\ ay+a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos pues que $(2x-2a-2, ay+a-2) = (x, y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-2a-2 = x \\ ay+a-2 = y \end{cases}$$

- En el caso $a \neq 1$ despejando las incógnitas x e y obtenemos:

  $$\begin{cases} x = 2a+2 \\ y = \frac{2-a}{a-1} \end{cases}$$

  Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(2a+2, \frac{2-a}{a-1})$.
- En el caso que $a = 1$ el sistema no tiene solución y por lo tanto no hay puntos fijos.

$a = 0$	$(x, y) = (2, -2)$	$a = 1$	no tiene puntos fijos
$a = 2$	$(x, y) = (6, 0)$	$a = 3$	$(x, y) = (8, -1/2)$
$a = 4$	$(x, y) = (10, -2/3)$	$a = 5$	$(x, y) = (12, -3/4)$
$a = 6$	$(x, y) = (14, -4/5)$	$a = 7$	$(x, y) = (16, -5/6)$
$a = 8$	$(x, y) = (18, -6/7)$	$a = 9$	$(x, y) = (20, -7/8)$