Problemas de Grafos y Complejidad

Profesorado de Grafos y Complejidad

Enero de 2012

Capítulo 1

Conceptos previos: Funciones y algoritmos

1. Una función booleana consiste en una correspondencia en la que, a partir de n *inputs* binarios, obtenemos un único *output* binario.

¿Cuántas funciones booleanas podemos construir?

Solución

Nos piden cuántas funciones entre A y B podemos hacer, siendo A el conjunto de todas las secuencias de n bits y B el conjunto $\{0, 1\}$.

Entonces $|A| = 2^n$, $|B| = 2$ y, por lo tanto, de funciones booleanas entre A y B habrá tantas como 2^{2^n}.

2. Encuentra el número de permutaciones de los nueve dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ en las cuales

(a) los bloques 12, 34 y 567 no aparecen

(b) los bloques 12, 23 y 415 no aparecen

Solución

(a) Permutaciones en las que los bloques 12, 34 y 567 no aparecen.

De permutaciones de 9 dígitos hay $P(9)$, pero le debemos descontar aquellas en las que figura el bloque 12.

Podemos considerar que el bloque 12 tiene entidad propia y, entonces, junto con los otras dígitos $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ hacer todas las posibles permutaciones. En total habrá $P(8)$.

Del mismo modo, de permutaciones en las que figura el bloque 34 hay $P(8)$ y de permutaciones en las que figura el bloque 567 hay $P(7)$.

Al restar del total $P(9)$ las permutaciones en las que aparece el bloque 12 y aquellas en las que aparece el bloque 34, hay permutaciones que las hemos restado dos veces. Son aquellas en las que aparece el bloque 12 y, también, 34. Análogamente con los otros bloques.

Por lo tanto el que nos piden es:

$$P(9) - P(8) - P(8) - P(7) + P(7) + P(6) + P(6) - P(5) = 283560$$

(b) Permutaciones en las que los bloques 12, 23 y 415 no aparecen.

El problema es parecido al anterior. La diferencia es que en las permutaciones en las que aparece el bloque 12 estamos seguros que el bloque 415 no aparece, etc.

Lo que nos piden es:

$$P(9) - P(8) - P(8) - P(7) + P(7) + P(6) = 282960$$

3. En el conjunto de todos los números naturales mayores o iguales que 1 y más pequeños o iguales que 10^{10}, ¿hay más números que contienen algún 9, o bien, hay más que no contienen ninguno?

Solución

Calculamos los números entre 1 y 10^{10} que no contienen ningún 9: son los números de 10 cifras que se pueden formar utilizando, sólo, las cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8 (los números de, por ejemplo, 3 cifras se pueden escribir como un número de 10 cifras con las primeras 7 cifras iguales a 0).

Así, se pueden escribir $9^{10} = 3486784401$ números sin ningún 9. Por lo tanto, se pueden escribir $10^{10} - 9^{10} = 6513215559$ números con algún 9. En definitiva, hay más números con algún 9 que sin ningún 9, prácticamente el doble.

4. Un país ha hecho un papel poco brillante en las últimas olimpiadas. Un diario local propone, para apaciguar algo los ánimos, la creación de la vicemedalla; la vicemedalla es la distinción que se otorga a quien obtiene el cuarto lugar en cualquiera de las competiciones. Así, para los redactores de este insigne diario, los cuatro premios importantes son: el primero (oro), el segundo (plata), el tercero (bronce) y el cuarto (vicemedalla). De este modo, los resultados de los deportistas de este país mejoran sustancialmente, porque a su representación hay muchos vicemedallistas (prácticamente tantos como medallistas).

En una prueba atlética participan 12 competidores, 3 de los cuales son compatriotas de los mencionados redactores. Suponemos que todos los participantes acaban correctamente la carrera (es decir, en una de las 12 posiciones, sin abandonar o quedar descalificados). Contesta:

(a) ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar estos 12 corredores?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tres medallas entre los 12 corredores?

(c) Y si se añade el generoso premio de la vicemedalla, ¿de cuántas formas diferentes se pueden repartir los premios?

(d) ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar los 3 compatriotas de los redactores?

(e) ¿En cuántas de estas posibilidades, alguno de estos 3 competidores recibe un premio oficial? ¿Y en cuantas reciben algún premio, si se incluye la vicemedalla?

Solución

(a) Se trata de permutar los 12 corredores; es decir,

$$P()12 = 12! \simeq 4.\,79 \times 10^8$$

(b) Hay tres premios a repartir entre 12 corredores; si enumeramos del 1 al 12 estos corredores, entonces debemos hacer 3-muestras ordenadas sin repetición (evidentemente un participante no puede llevarse dos medallas) de estos 12 números. Por lo tanto, el resultado es:

$$V(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

(c) En este caso el razonamiento es el mismo y el resultado, por lo tanto, es

$$V(12,4) = \frac{12!}{(12-4)!} \simeq 1.\,188 \times 10^4$$

(d) La idea es la misma que al apartado 2: se deben hacer 3-muestras ordenadas de las 12 posiciones posibles. Por ejemplo, si los 3 participantes se denominan, pongamos por caso, P1, P2 y P3,

la muestra (3,4,9) indica que P1 ha sido 3, P2 ha sido 4 y P3 ha sido 9.

la muestra (4,6,1) indica que P1 ha esta 4, P2 ha sido 6 y P3 ha sido 1. Es decir, volvemos a buscar el número de 3-muestras ordenadas de 12 elementos, por lo tanto,

$$V(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

(e) En el primer caso, como contarlas directamente es muy pesado (porque debemos considerar las diferentes posiciones de cada uno de estos 3 competidores), hacemos estos 2 pasos:

1) Buscamos aquellas posibilidades en las que no hay ningún medallista entre los tres compañeros: debemos repartir estos 3 personajes entre las 9 posiciones no premiadas, por lo tanto, las posibilidades son

$$V(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

2) Restémoslas del total de posibilidades, 1320, que hemos encontrado antes:

$$1320 - 504 = 816$$

Es decir, hay 816 posibilidades de que alguno de estos tres esforzados competidores obtenga una medalla.

En el supuesto de que hubiera 4 premios, el razonamiento es el mismo:

$V(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$

Es decir, hay $1320 - 336 = 984$ posibilidades de que obtengan algún premio entre los 3 si se premian los 4 primeros.

5. ¿De cuántas maneras 24 bolas diferentes se pueden colocar en 3 cajas diferentes con tal que haya el doble de bolas en una caja que en las otras dos juntas? ¿Y si no ponemos la condición?

Solución

Una caja debe tener 16 bolas y las otras dos cajas 8 en total. Hay $C(3,1)$ maneras de escoger la primera caja, $C(24,16)$ maneras de llenarla y $C(2,1)^8$ maneras de llenar las dos cajas restantes.

El resultado es, pues, $C(3,1) \cdot C(24,16) \cdot C(2,1)^8$.

Si no tenemos en cuenta la condición el problema se transforma en el cálculo de las variaciones con repetición de 3 objetos cogidos de 24 en 24, o sea, 3^{24}.

6. ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden hacer con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 que sean capicúas?

(Indicación: un número capicúa es el mismo leído de derecha a izquierda que de izquierda a derecha)

Solución

Para hacer un número capicúa de 5 dígitos, sólo debemos escoger tres posiciones puesto que las otras dos quedarán fijadas por las dos primeras. Además, cada dígito se puede repetir en más de una posición. Así, tenemos 8 posibilidades para la x, 8 para la y y 8 para la z.

$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

7. Suponemos que queremos repartir k objetos diferentes entre n personas, $k \leq n$. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer si

(a) cada persona puede recibir como mucho un objeto?

(b) cada persona puede recibir más de un objeto?

Solución

a) $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$; b) n^k

8. En la UOC se reciben solicitudes para matricularse de un master que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: matemáticas, informática, inglés y deportes. Cada asignatura tiene una puntuación entera de entre 4 y 10.

- Atendiendo a las calificaciones, ¿cuántos expedientes académicos diferentes podemos recibir?
- ¿De los expedientes académicos que tienen la máxima nota en *deportes*, en cuántos la nota mediana es 7?

Solución

La cantidad de diferentes expedientes académicos es la cantidad de maneras diferentes de escoger 4 valores enteros entre 4 y 10 de todas las maneras posibles, tantas como $VR(7,4) = 7^4 = 2401$.

De los expedientes académicos que tienen 10 en *deportes*, la nota mediana será 7 en aquellos en que la suma de las calificaciones sea 28 y, la cantidad de estos coincide con la cantidad de soluciones de la ecuación:

$x_1 + x_2 + x_3 + 10 = 28$

cada x_i tiene un valor entero entre 4 y 10.

Restando 4 a cada variable, también podemos considerar las soluciones enteras, no negativas, de la ecuación:

$y_1 + y_2 + y_3 = 6$

Y, de estas, ya sabemos que hay $\binom{3+6-1}{6} = 28$.

9. Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras (cogidas de un abecedario de 20) seguidas de 3 cifras decimales.

(a) ¿Cuántas placas diferentes pueden hacerse?

(b) ¿Cuántas placas diferentes pueden hacerse en las que tanto la parte literal como numérica sea capicúa?

Solución

(a) En cada lugar donde debemos colocar una letra tenemos 20 posibles maneras de hacerlo y los lugares donde va un número tenemos 10 posibilidades. En total $20^4 \cdot 10^3 = 160{,}000{,}000$.

(b) Sólo podemos colocar la letra que queramos en las dos primeras posiciones, puesto que las otras dos letras vienen determinadas por las que ponemos a las primeras posiciones. En cuando a las cifras, podemos colocar las que queramos en las dos primeras posiciones, la última viene determinada por la primera. En total: $20^2 \cdot 10^2 = 40{,}000$.

10. ¿De cuántas maneras podemos ordenar, en una estantería, 14 CD's diferentes de música? ¿Y si hay 3 copias iguales de un CD de Mozart, 4 copias de un de Bach y 7 copias de un de Vivaldi?

Solución

Si todos los CD's son diferentes, la solución viene dada por el número de 14-muestras ordenadas sin repetición (permutaciones sin repetición), o sea, hay $P(14) = 14! = 87178291200$ maneras diferentes de ordenarlos. En cambio, si algunos de los CD's son iguales entre ellos, las maneras de ordenarlos venden dadas por el número de permutaciones con repetición $PR(3,4,7)^{14} = \dfrac{14!}{3!4!7!} = 120120$.

11. Calcula la complejidad de cada uno de los fragmentos del algoritmo siguiente y utilízala para hallar la complejidad total del algoritmo. Asimismo escribe un algoritmo alternativo que dé el mismo resultado con menos complejidad y calcúlala.

```
suma ← 0
 para y ← 1 hasta n
    suma ← suma + 2y
 fin para
```

Solución

La inicialización de la variable *suma* tiene una complejidad $O(1)$. La segunda instrucción tiene una complejidad de $O(n)$ y como que el interior del bucle cuesta 3, la complejidad de todo el bucle es $O(3n) = O(n)$. Aplicando las reglas de la complejidad nos resulta $O(n)$ para todo el algoritmo.

Este algoritmo calcula $\displaystyle\sum_{y=1}^{y=n} 2y = 2\sum_{y=1}^{n} y = 2\frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$ y, esto, es puede calcular directamente con 3 operaciones, o sea complejidad $O(1)$ según el algoritmo:

```
suma ← n^2 + n
```

12.

(a) ¿Cuántas funciones hay de $\{1,2,3\}$ a $\{a,b,c,d\}$? ¿Cuántas son inyectivas?

(b) Da todas las funciones no exhaustivas de $\mathbb{N}_5$ a $\{a,b\}$.

(c) Una agencia de viajes opera en doce ciudades. Si tiene que imprimir billetes de avión entre todas las ciudades en que opera, y en cada billete debe hacer constar la ciudad de origen y la de destino, ¿cuántos billetes diferentes deberá imprimir?

Solución

(a) $VR(4,3) = 4^3 = 64$ en total, de las cuales $V(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ son inyectivas.

(b) Sólo hay dos, la que envía todos los elementos a a, y la que envía todos los elementos a b.

(c) $V(12,2) = 12 \cdot 11 = 132$. Observa que no tiene sentido hacer billetes en los que la ciudad de origen sea la misma que la ciudad de destino.

Capítulo 2

Fundamentos de grafos

13. Prueba que cualquier grafo con un mínimo de 2 vértices, siempre contiene 2 vértices con el mismo grado.

Solución

Es evidente en el supuesto de que $n = 2$; demostrémoslo por induccció (se supone cierto por grafos de orden $n - 1$ y se demuestra por grafos de orden n).

Considerémoslo cierto por un grafo de orden $n - 1$ y demostrémoslo por un grafo de orden n. Los vértices de un grafo de orden n pueden tener grados: 0, 1, 2, 3, ..., $n - 2$ y $n - 1$. Es decir, un total de n posibilitados. Queremos ver que se repiten dos de estos grados, es decir, que no se pueden lograr todas estas posibilidades (que son n, el mismo número que el orden del grafo). Si este grafo no tiene vértice de grado 0, entonces, a la fuerza, se repiten algunos de los otros grados posibles y, por lo tanto, ya estaría demostrado el resultado. Suponemos, en cambio, que hay un vértice de grado 0. Este vértice no está conectado con ningún otro vértice del grafo. Podemos, pues, eliminar este vértice y considerar el resto del grafo. Este otro grafo tiene n-1 vértices y las mismas aristas que el primero grafo (el de orden n). Ahora bien, por hipótesis (todos los grafo se orden $n-1$ tienen 2 vértices con el mismo grado) este grafo de orden $n-1$ tiene dos vértices con el mismo grado. Por lo tanto, el grafo inicial (que es igual a este último grafo de orden $n - 1$ más un vértice de grado 0) también tiene dos vértices con el mismo grado.

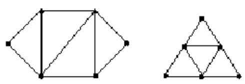
Este resultado también se puede demostrar de manera todavía más sencilla. Los vértices de un grafo de orden n pueden tener, como hemos dicho, n posibles grados. Ahora bien, los grados 0 y $n - 1$ son mutuamente incompatibles (no puede ser que un vértice tenga grado 0 y otro vértice tenga grado n-1, porque este último no podría estar conectado al vértice de grado 0). Por lo tanto, de hecho, sólo hay n-1 posibilidades para los n vértices de un grafo de orden n. Aplicando el principio de las cajas, dos vértices deben tener el mismo grado. En este caso, no hace falta aplicar la inducción.

14. En una reunión con más de 2 personas, cada una tiene amistad exactamente con dos. Demuestra que se pueden distribuir los asistentes a la reunión en mesas redondas (no hace falta que sea una única mesa) de forma que cada persona siente junto a sus amigos.

Solución

De hecho, se debe demostrar que todo grafo 2-regular es isomorfo a un ciclo, o bien, a una reunión de ciclos (si no es conexo). Lo demostraremos por inducción: suponemos que el grafo tiene 3 vértices: el único grafo con 3 vértices 2-regular es C_3. Suponemos que es cierto por un grafo con n vértices: demostrémoslo por un grafo con $n+1$ vértices. Sea v un vértice de este grafo G: este vértice tiene 2 vértices adyacentes, v_1 y v_2. Consideramos el grafo G' que tiene el mismo conjunto de vértices que G, excepto el vértice v, y la arista v_1v_2, además de todas las otras aristas del grafo G que unen vértices de G'. Este grafo es 2-regular y tiene n vértices, por lo tanto, por hipótesis de inducción, el grafo G' es puede poner como reunión de ciclos conexos. En un de estos conexos encontraremos v_1 y v_2 y la arista que los une. Hacemos la manipulación contraria a la anterior: añadimos el vértice v y sus aristas, y eliminamos la arista v_1v_2. Claro está que esta componente conexa continúa siendo un ciclo y, por lo tanto, G es reunión de ciclos.

15. Di si los grafos de la siguiente figura son isomorfos. Razona la respuesta.



Solución

No son isomorfos, puesto que aunque tengan la misma cantidad de vértices, estos no conservan las adyacencias. Fijaos que la secuencia de grados en el primero grafo es: $2,2,3,3,4,4$ y en el segundo $2,2,2,4,4,4$.

16. ¿Cuál de las cuatro afirmaciones siguientes son ciertas? Razona la respuesta.

- En todo grafo hay un número impar de vértices de grado par.
- En todo grafo hay un número par de vértices de grado impar.
- En todo grafo, la suma de los grados de los vértices es un número par.
- En todo grafo de n vértices que tenga un mínimo de n aristas podemos asegurar que hay un ciclo.

Solución

El primer apartado es falso. Por ejemplo podéis pensar en un cuadrado. Todos los vértices son de grado par y hay cuatro.

El segundo apartado es cierto. Este resultado se deduce de la fórmula de grados.

El tercer apartado es cierto. El resultado se deduce de la fórmula de grados. Efectivamente, la suma de los grados de cada vértice es el doble del número de aristas (o sea, un número par).

El cuarto apartado es cierto. Tal y como está escrito el enunciado podemos coger alguna componente conexa en la que el número de aristas sea más grande o igual que el número de vértices. En esta componente conexa habrá un ciclo.

17. Prueba que si G es un grafo cualquiera con más de 4 vértices, entonces G, o bien el grafo complementario G^c contiene un ciclo.

¿Es cierto con grafos de menos de 5 vértices? Razona la respuesta

Solución

Empezamos con la segunda pregunta: es evidente que los grafos de 1 y 2 vértices no tienen ciclos y, por lo tanto, la pregunta no es pertinente. Por grafos de 3 vértices, tenemos el grafo T_3, de forma que no contiene ningún ciclo, ni tampoco su complementario. Por grafos de 4 vértices, tenemos el grafo T_4, de forma que no contiene ningún ciclo, ni tampoco su complementario (que también es T_4).

Si el grafo G contiene n vértices ($n \geq 4$), entonces, el número de aristas de este grafo ha de estar entre 0 y $\frac{n(n-1)}{2}$. Para comprobar que uno de los dos tiene un ciclo, sólo debemos ver que uno de los dos tiene, como mínimo n aristas.

Claro está que, o bien G, o bien, G^c, tienen, como mínimo, la mitad de aristas del grafo completo, es decir, $\frac{n(n-1)}{4}$ aristas. Por lo tanto, haría falta ver que

$$\frac{n(n-1)}{4} \geq n$$

Esto es fácilmente demostrable:

$$\frac{n(n-1)}{4} \geq n \Leftrightarrow n^2 - n \geq 4n \Leftrightarrow n^2 - 5n \geq 0 \Leftrightarrow n(n-5) \geq 0$$

Pero esto es cierto, porque $n \geq 5$.

18. Un cubo de queso está dividido en 27 cubos pequeños iguales (cómo si se tratara de un cubo de Rubik). Los quesos de los que están hechos estos cubos pequeños son de dos tipos diferentes: uno de roquefort y el otro parmesano. Estos pequeños cubos están colocados de forma que dos cubos pequeños del mismo tipo de queso no pueden tener nunca una cara común. Un ratón empieza en una de las esquinas y se come cada uno de estos pequeños cubos, un tras el otro. Siempre pasa de un cubo pequeño a otro que tiene una cara en común con el anterior.

(a) Si se modeliza los posibles trayectos del ratón sobre el queso mediante un grafo, ¿cuál es la secuencia de grados de este grafo (apúntalos de más pequeños a más grandes)? ¿Cuál es la medida de este grafo?

(b) ¿El ratón puede acabar su recurrido al cubo pequeño que ocupa el centro del cubo grande? Razona la respuesta.

Solución

(a) Los vértices de este grafo son los cubos pequeños, es decir, 27 vértices; las aristas de este indican que los vértices que unen comparten una cara. Cada uno de los cubos pequeños que se encuentran en los vértices del cubo grande tiene 3 caras en contacto con otros cubos; por lo tanto, el grado del vértice asociado es 3. El grafo tiene 8 vértices de grado 3.
Hay 12 cubos pequeños que comparten 4 caras con otros cubos. Por lo tanto, el grafo tiene 12 vértices de grado 4.
Hay 6 cubos pequeños (que se encuentran en el centro de cada cara) que comparten 5 caras con otros cubos. Por lo tanto, el grafo tiene 6 vértices de grado 5.
Finalmente, el cubo pequeño que ocupa el centro del cubo tiene todas las caras compartidas; por lo tanto, el grafo tiene 1 vértice de grado 6.

En definitiva, la secuencia de grados es:
333333334444444444445555556

La medida del grafo, por el lema de los grados, es la suma de grados dividido por 2: 54 aristas.

(b) Tal y como está definido el grafo, es bipartito: los vértices que representan cubos pequeños del mismo tipo de queso no son nunca adyacentes. Por lo tanto, los vértices del grafo se pueden dividir en dos grupos: uno, de 13 vértices (cubos pequeños de un tipo de queso) y el otro, de 14 vértices (cubos pequeños del otro tipo de queso). Si se empieza a un vértice cualquiera, tras 26 movimientos por el grafo (26 vértices nuevos + vértice inicial = 27 vértices), nos encontraremos en un vértice de la misma partición que el inicial (es decir, en un cubo de queso del mismo tipo). Ahora bien, el pequeño cubo central es, evidentemente, de un queso diferente al del cubo inicial, que se encuentra en una esquina. Por eso es por lo que el ratón no puede acabar su recurrido en el centro del cubo.

19. Sea G un grafo conexo con n vértices. Demuestra que si el grado de cada vértice es el mismo en G que en G^c (G^c es el grafo complementario de G) entonces G es regular y n es impar.

Solución

Sea n_i el grado del vértice $v_i \in G$. Entonces el vértice $v_i \in \overline{G}$ tendrá grado $n - n_i - 1 = n_i$. De aquí, $2n_i = n - 1$ y $n_i = \frac{n-1}{2}$ $\forall y$. Por lo tanto G es regular. Además, para que $\frac{n-1}{2}$ sea un entero hace falta que n sea impar.

20. Denotamos por $K_{m,n}$ el grafo bipartito completo de orden $m + n$.

(a) ¿Para qué valores de n y m el grafo $K_{m,n}$ es regular?

(b) Describe el grafo $K^c_{m,n}$ (el grafo complementario de $K_{m,n}$) como combinación de los grafos K_m y K_n

(c) Si G_s representa un grafo bipartito de orden s, ¿cuál será el número máximo de aristas que puede tener G_s en función de s?

Solución

(a) Si los vértices de $K_{m,n}$ están divididos en dos conjuntos V_1, V_2, entonces todos los vértices de V_1 tienen grado n y todos los de V_2 tienen grado m. Así, $K_{m,n}$ será regular cuando $n = m$.

(b) A $K^c_{m,n}$ todos los vértices de V_1 serán adyacentes entre sí. También todos los de V_2 serán adyacentes entre sí. Además, ningún vértice de V_1 será adyacente a ningún vértice de V_2. Así, $K^c_{m,n} = K_m \cup K_n$

(c) Si $G_s = (V_1 \cup V_2, A)$ y decimos $x = |V_1|$ entonces, $s - x = |V_2|$ y $|A| = x(s - x)$. Consideramos la función $f(x) = x(s - x)$, entonces queremos calcular x de manera $f(x)$ sea máximo. $f(x)$ tendrá un máximo cuando $f'(x) = s - 2x = 0$ y $f''(x) = -2 < 0$. De aquí, $x = s/2$ y el número máximo de aristas será $\frac{s}{2}(s - \frac{s}{2}) = \frac{s^2}{4}$.

21. En una competición de ajedrez hay n participantes. Responde, usando la teoría de grafos, las cuestiones siguientes (los apartados son independientes):

(a) Supón que cada competidor ha jugado, como mínimo (aun cuando puede haber jugado más veces), una partida con alguno de los otros competidores. Demuestra que siempre se pueden encontrar dos competidores que hayan jugado el mismo número de partidas.

(b) Supón que ya se han jugado $n+1$ partidas en total. Demuestra que existe un participante que ya ha jugado como mínimo 3 partidas.

Solución

(a) Consideramos el grafo de vértices, los participantes, y de aristas, las partidas jugadas. Este grafo tiene n vértices de grado más grande o igual que 1. El grado de cada vértice puede ir de 1 hasta $n - 1$. Por lo tanto, hay de haber dos vértices con el mismo número de aristas.

(b) Si se han jugado $n+1$ partidas significa que $|A| = n+1$. Sabemos que la suma de grados del grafo se igual al doble de las aristas. Si nadie hubiera jugado 3 partidas, el máximo de partidas jugados serían 2 por persona. En este caso, la suma de todos los grados seria $2n$, por lo tanto, sólo habría n aristas. Así, hay algún vértice que debe tener grado más grande de 2, es decir, hay un jugador, como mínimo, que ya ha jugado 3 partidas.

22. Dado un grafo $G = (V, A)$ de orden n y medida m, definimos el *grafo línea* de G, $L(G)$, como el grafo que tiene por conjunto de vértices el conjunto de aristas de G y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si las correspondientes aristas de G son adyacentes (tienen un vértice en común). Por ejemplo, si $G = (V, A)$ con $V = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$; entonces $L(G)$ será el grafo con vértices $V' = \{v_1 = \{a, b\}, v_2 = \{a, d\}, v_3 = \{b, d\}, v_4 = \{c, d\}\}$ y aristas $A' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$.

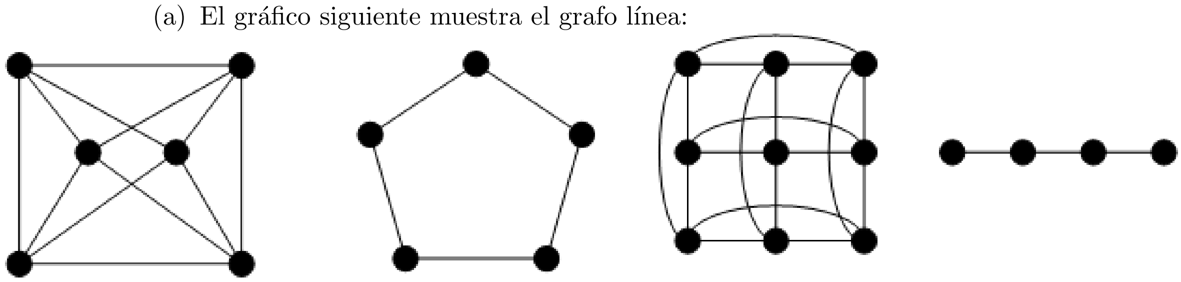
(a) Calcula y dibuja los grafos línea de los grafos siguientes: K_4, C_5, $K_{3,3}$, T_5.

(b) ¿Es cierto que si G es regular, entonces $L(G)$ también es regular?

(c) Demuestra que si G es k-regular entonces la medida de $L(G)$ es $(k-1)m$.

Solución

(a) El gráfico siguiente muestra el grafo línea:



$L(K_4)$ $L(C_5)$ $L(K_{3,3})$ $L(T_5)$

(b) Si G es regular y cada vértice tiene grado k entonces cada arista de G es adyacente a $k-1+k-1$ aristas de G. Por lo tanto, cada vértice de $L(G)$ será adyacente a $2k-2$ vértices de $L(G)$.

(c) Si G es k-regular entonces $L(G)$ será $2k-2$-regular. Aplicando el lema de los grados a $L(G)$:

$$\text{medida de } L(G) = \frac{1}{2}\sum_{y=1}^{m} gy = \frac{1}{2}\sum_{y=1}^{m}(2k-2) = (k-1)m$$

23. Considera estas dos listas:

Lista 1

1	:	2, 3
2	:	1, 3, 7, 8
3	:	1, 2, 5, 7
4	:	8, 10
5	:	3, 6, 7, 8, 9,10
6	:	5, 8, 9, 10
7	:	2, 3, 5, 9
8	:	2, 4, 5, 6, 9
9	:	5, 6, 7, 8, 10
10	:	4, 5, 7, 9

Lista 2

1	:	8
2	:	3, 4, 5, 6,,7, 8
3	:	2, 4, 5, 6, 7, 8
4	:	2, 3
5	:	2, 3, 6
6	:	2, 3, 5
7	:	2, 3, 4, 5
8	:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(a) Utilizando sólo el algoritmo de Havel -Hakimi di cuáles de ellas no son listas de adyacencias correctas.

(b) ¿Es suficiente el algoritmo de Havel -Hakimi para determinar si una lista de adyacencias es correcta? Justifica la respuesta.

Solución

(a) La 1a lista tiene esta secuencia de grados

$$6, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2$$

Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi a la 1 lista:

$$\begin{array}{r}
6,5,5,4,4,4,4,4,2,2 \\
4,4,4,3,3,3,3,2,2 \\
3,3,3,3,2,2,2,2 \\
2,2,2,2,2,2,2 \\
2,2,2,2,1,1 \\
2,1,1,1,1 \\
1,1,0,0 \\
0,0,0,0
\end{array}$$

por lo tanto, la secuencia es gráfica; ahora bien, no podemos todavía asegurar que la lista sea correcta.

La 2 lista tiene esta secuencia de grados:

$$7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 1$$

Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi a esta secuencia:

7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 1
5, 5, 3, 2, 2, 1, 0
4, 2, 1, 1, 0, 0
1, 0, 0, -1, 0

De lo cual se deduce que la lista de adyacencias no es correcta, y no representa ningún grafo.

(b) No, porque el algoritmo no detecta si las adyacencias son correctas, sólo detecta que el número de estas adyacencias sea correcto. Por ejemplo, la lista 1 tiene una secuencia de grados perfectamente correcta, pero si miramos atentamente la lista, vemos que el vértice 6 y el 10 deberán ser adyacentes, según el listado de vértices adyacentes al vértice 6, pero al listado de vértices adyacentes al vértice 10 no aparece el vértice 6. Por lo tanto, esta lista 1 no es correcta, aun cuando su secuencia de grados lo sea.

24. Sea la siguiente secuencia de grados: $1, 3, 3, 4, 5, n$.

(a) Determina para que valores de n (≥ 1) obtenemos una secuencia gráfica usando el algoritmo de Havel-Hakimi.

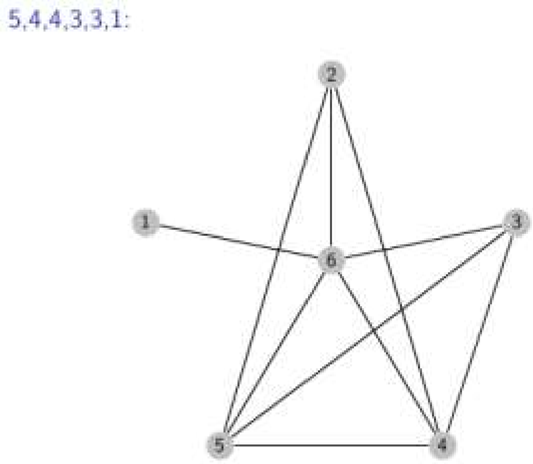
(b) Escoge uno de los casos en que tenemos una secuencia gráfica, y dibuja un grafo que se corresponda.

(c) Calcula el orden, la medida y el diámetro del grafo dibujado (en el apartado *b*).

Solución

(a) Para $n \geq 6$ no hay solución, ya que como el grafo tiene orden 6 ningún vértice puede tener más de 5 vecinos. Por otro lado, si n es impar la suma de los grados del grafo es también impar, contradiciendo la fórmula de los grados. De manera que sólo nos quedan los casos $n = 2$ y $n = 4$, que podemos comprobar con el algoritmo de Havel-Hakimi que son secuencias gráficas.

(b) Una posibilidad sería:



(c) Tienen orden 6 y diámetro 2 (ya que todo vértice es adyacente a un vértice central). En el caso $n = 2$ la medida es 9, y en el caso $n = 4$ es 10.

25. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(a) Todo recorrido cerrado es un ciclo.

(b) La longitud de un recorrido puede ser arbitrariamente grande.

(c) En un grafo bipartito, todo circuito debe tener longitud 4 o mayor.

Solución

(a) Falso, un recorrido puede contener diversos ciclos.

(b) Verdadero, porque en un recorrido podemos pasar diversas veces por las mismas aristas (por ejemplo, en un C_3 podemos hacer un recorrido de n vueltas y tendremos longitud $3n$).

(c) Verdadero, porque un circuito de longitud 3 implicaria la existencia de un ciclo de longitud impar en el grafo (hecho que no puede suceder en un grafo bipartito).

26.

(a) ¿Cuantas aristas podemos eliminar en un grafo completo sin que deje de ser conexo? (sin eliminar ningún vértice)

(b) ¿Y de $C_3 + T_2$?

Solución

(a) Un grafo completo de orden n tiene $\binom{n}{2}$ aristas. Podemos eliminar hasta, por ejemplo, dejar un T_n. Podemos comprobar, usando inducción, que $n-1$ es la medida mínima de un grafo conexo de orden n, ya que se verifica para $n = 1$, y cada nuevo vértice que añadimos nos obliga a añadir una arista como mínimo. Por lo tanto, podemos eliminar $\binom{n}{2} - (n-1)$ aristas.

(b) $C_3 + T_2 = K_5$, por lo tanto $\binom{5}{2} - (5-1) = 6$

27. Dada la siguiente secuencia: $1, 1, 1, 2, 2, 2, n$, $(n \leq 3)$,

(a) Determina para qué valores de n obtenemos una secuencia gráfica usando el algoritmo de Havel-Hakimi.

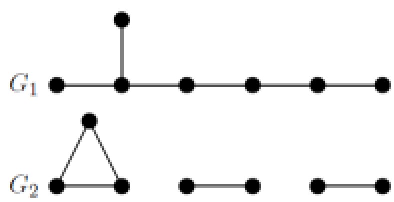
(b) En los casos en que tenemos una secuencia gráfica, dibuja un grafo que se corresponda.

Solución

(a) $n = 0, 1, 2, 3$. Para $n = 0, 2$ habría tres vértices de grado impar. Por lo tanto, tenemos dos posibilidades solamente:

$n = 3$	3,2,2,2,1,1,1 1,1,1,1,1,1 0,1,1,1,1 1,1,1,1,0 0,1,1,0 1,1,0,0 0,0,0
$n = 1$	1,2,2,2,1,1,1 2,2,2,1,1,1,1 1,1,1,1,1,1 0,1,1,1,1 1,1,1,1,0 0,1,1,0 1,1,0,0 0,0,0

(b) Dos grafos que tienen estas secuencias de grados podrían ser:



28. ¿Hay algún grafo con secuencia de grados 9, 9, 9, 9, 8, 6, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1? Justifica la respuesta.

Solución

Usaremos el algoritmo de Havel-Hakimi para averiguar si la secuencia dada corresponde a una secuencia gráfica:

9	9	9	9	8	6	5	2	2	2	1	1	1	1	1
	8	8	8	7	5	4	1	1	1	1	1	1	1	1
		7	7	6	4	3	0	0	0	1	1	1	1	1
		7	7	6	4	3	1	1	1	1	1	0	0	0
			6	5	3	2	0	0	0	1	1	0	0	0
			6	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
				4	2	1	0	0	-1	0	0	0	0	0

Vemos que aparece un valor negativo, por lo tanto, **no** existe ningún grafo que tenga esta secuencia de grados.

29.

(a) Considera estas 2 secuencias de números enteros:

8, 7, 6, 5, 5, 3, 2, 1   7, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 1

Di si son secuencias gráficas y justificadlo (no puedes utilizar el algoritmo de Havel-Hakimi).

(b) Considera estas 2 secuencias de números enteros:

7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1   7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 1

Utiliza el algoritmo de Havel-Hakimi para justificar si son secuencias gráficas.

En los casos que sean secuencias gráficas, construye y dibuja un grafo que tenga esta secuencia.

Solución

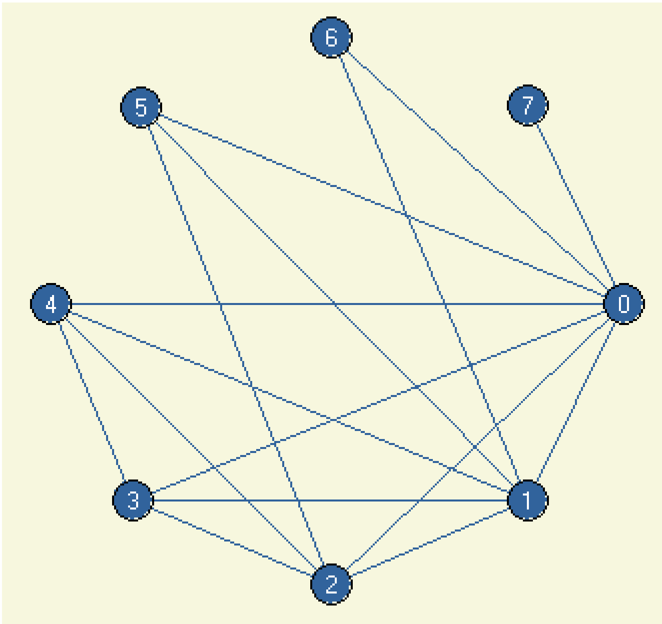
Todas las secuencias tienen 8 elementos, por lo tanto, habrán de representar grafos de orden 8. La primera secuencia no puede ser de ningún grafo puesto que el grado de cada vértice debe ser inferior a la medida (Proposición 2 del módulo 2).

La segunda secuencia tampoco puede ser de un grafo puesto que contiene un número impar de vértices de grado impar (Proposición 4 del módulo 2).

Para la tercera secuencia aplicamos el algoritmo de Havel -Hakimi:

7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1
5, 4, 3, 3, 2, 1, 0
3, 2, 2, 1, 0, 0
1, 1, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0

Por lo tanto, se trata de la secuencia del grafo:



Para la cuarta secuencia aplicamos también el algoritmo de Havel-Hakimi:

$$
\begin{array}{r}
7,\ 6,\ 6,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1 \\
5,\ 5,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0 \\
4,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0 \\
1,\ 0,\ 0,\ \text{-}1,\ 0
\end{array}
$$

De lo cual se deduce que no puede ser la secuencia de grados de ningún grafo.

Capítulo 3

Recorridos y conectividad

30. Demuestra que un grafo 4-regular no conexo tiene, como mínimo, 10 vértices.

Solución

Tomamos 2 cualquiera de los componentes conexos del grafo. En cada una de estas dos componentes, hay un vértice de orden 4, por lo tanto, deben tener, como mínimo 5 vértices. Por lo tanto, deberemos concluir que, como mínimo, el grafo tiene 10 vértices.

31. La tabla siguiente muestra los tipos de cambio que una sucursal bancaria permite hacer entre varios tipos de monedas. Por ejemplo, si $r_{AB} = 0{,}8$ significa que para convertir la moneda A en la moneda B deberemos multiplicar el valor de la moneda A por 0,8. Observa que si $r_{AB} = 0{,}8$ y $r_{BC} = 0{,}85$ entonces $r_{AC} = 0{,}8 \times 0{,}85 = 0{,}68$ será el tipo de cambio para pasar de A a C si primer hacemos el cambio a la moneda B. Del mismo modo, $r_{BA} = \frac{1}{r_{AB}}$ es el tipo de cambio por pasar de la moneda B a la moneda A. Cuando una casilla a la derecha de la diagonal está vacía, esto indica que la sucursal no permite cambiar directamente entre ambas monedas. Por ejemplo, la sucursal no permite cambiar euros y rublos directamente.

	Euro	$USA	£	Yen	$Can	SFranc	Rub
Euro	1	0.81	1.47	0.007			
$USA		1			0.75		28.50
£			1	0.005	0.42		
Yen				1		86.36	
$Can					1		21.36
SFranc					0.96	1	22.20
Rub							1

Usando la teoría de grafos,

(a) Dibuja el grafo que representa esta situación.

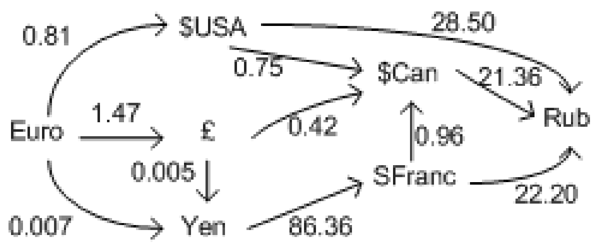
(b) Justifica, usando el grafo y el algoritmo más convenientes, si es posible hacer la conversión de euros a cualquiera de las otras monedas.

(c) Calcula, usando el algoritmo adecuado, el menor número de cambios que hace falta hacer para convertir Euros en francos suizos (SFranc).

(d) Utilizando el algoritmo de Dijkstra y modificando el grafo convenientemente, justifica como calcularías el tipo de cambio de valor mínimo para convertir Euros en Rublos.

Solución

(a) Podemos representar la conversión entre monedas como un grafo dirigido y ponderado:



en el que solo hemos representado los arcos en un sentido. También existirán arcos en el otro sentido con pesos $r_{BA} = \frac{1}{r_{AB}}$.

(b) Para ver si es posible hacer la conversión entre las 7 monedas debemos comprobar si el grafo subyacente es conexo. Aplicando el test de conexión basado en el algoritmo DFS se puede comprobar que el grafo subyacente es conexo y, por lo tanto, que es posible la conversión entre cualquier par de monedas.

(c) En este caso debemos considerar el grafo dirigido anterior pero sin pesos, es decir, no ponderado. Ahora, aplicaremos el algoritmo BFS para encontrar el mínimo número de cambios. El camino mínimo es Euro $\rightarrow$ Yen $\rightarrow$ SFranc, y, por lo tanto, haría falta hacer dos cambios.

(d) El algoritmo de Dijkstra encuentra la distancia mínima entre dos vértices del grafo. Pero observa que a cada paso la distancia a un nuevo vértice se obtiene sumando la del vértice anterior. Como que el tipo de cambio es un producto, no es aplicable el algoritmo directamente. Una manera de solucionar el problema es observar que

$$r_{ABC} = r_{AB} \cdot r_{BC} \Leftrightarrow \log r_{ABC} = \log r_{AB} + \log r_{BC}$$

Por lo tanto, podemos sustituir el peso de cada arista por su logaritmo. Ahora ya es aplicable el algoritmo de Dijkstra y al final obtendríamos el $\log r_{Euro-Rublo}$ mínimo. Finalmente,

$$r_{Euro-Rublo} = \exp(\log r_{Euro-Rublo})$$

32.

(a) Dibuja todos los grafos conexos (no isomorfos entre ellos) de orden 3 y de orden 4, y escríbelos como grafos elementales o combinaciones de ellos.

(b) ¿Qué ciclos C_n son autocomplementarios? ¿Qué trayectos? ¿Qué grafos estrella?

(c) ¿Qué ciclos son bipartitos? ¿Qué trayectos? ¿Y qué grafos rueda?

Solución

(a) Para $n = 3$ tenemos C_3 y T_3. Para $n = 4$ tenemos C_4, T_4, $K_4 = R_4$,E_4, $C_3 + N_1$ y $(T_2 \cup N_2)^C$.

(b) Un grafo autocomplementario debe tener exactamente $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ aristas (si tiene más o tiene menos, el grafo complementario tendrá medida diferente y no podrá ser isomorfo al grafo original). El grafo ciclo C_n tiene medida n. Por lo tanto, debe verificarse $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = n$, de donde obtenemos como única solución $n = 5$. Por lo tanto, sólo C_5 es autocomplementario. Para los trayectos, la medida de T_n es $n-1$. Es decir, es necesario que $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = n-1$, de donde $n = 4$ y sólo tenemos T_4 como solución. En el caso de los grafos estrella, ninguno es autocomplementario, ya que en el complementario el vértice central queda aislado y se tiene un grafo no conexo.

(c) Usando la caracterización de los grafos bipartitos —son los que no tienen ciclos de longitud impar—, deducimos que lo son los ciclos de longitud par, todos los trayectos (independientemente de su longitud) y ningún grafo rueda.

33. Sea el grafo $G = (T_3 \times T_2) + C_4$.

(a) Calcula el diámetro de G.

(b) Calcula el número máximo de aristas que se pueden eliminar de G de tal manera que el grafo resultante sea conexo.

Solución

(a) En G todos los vértices de $T_3 \times T_2$ son adyacentes a todos los vértices de C_4. Por lo tanto, G tendrá diámetro 2.

(b) El número de aristas de G es 35. Dado que tiene orden 10, el mínimo número de aristas de manera que sea conexo es 9. Por lo tanto, podemos eliminar $35 - 9 = 26$ aristas.

34. Un grafo tiene doce vértices, numerados del 1 al 12. Dos vértices v_i y v_j son adyacentes si y sólo si $i + j \leq 10$ y $i \neq j$.

(a) Calcula su medida y di cuales son sus componentes conexos.

(b) Halla el diámetro del subgrafo inducido por los vértices numerados del 1 al 9.

Solución

(a) Hay 20 aristas:
$(1,2),(1,3),\ldots,(1,9)$,
$(2,3),(2,4),\ldots,(2,8)$,
$(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)$,
$(4,5),(4,6)$.
En total, $8+4+6+2=20$.
Todos los vértices son adyacentes al 1 excepto el 10, el 11 y el 12, que son vértices aislados. Por lo tanto, hay cuatro componentes: uno formado por los vértices 1 al 9, y uno por cada uno de los vértices 10, 11 y 12.

(b) El diámetro de este componente conexo es dos, ya que hay vértices no adyacentes, pero todo vértice es adyacente al 1.

35. Sea G una red de nodos $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Si aplicamos el algoritmo de Dijkstra a partir del nodo 0 se obtiene la tabla siguiente:

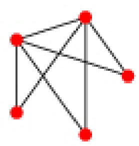
0	1	2	3	4	5	6
(0,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)*	(8,0)	(12,0)	(9,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)*	(12,0)	(9,0)	(∞,0)	(17,1)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)*	(21,3)	(16,3)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)	(11,3)*	(9,0)	(21,3)	(16,3)	(19,2)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)	(16,3)*	(19,2)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)	(16,3)	(19,2)*
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)*	(16,3)	(19,2)

(a) A partir de la tabla, reconstruye todo lo que sea posible de la red G.

(b) ¿Podemos asegurar que el diámetro de G es más grande o igual que 21? Justifica la respuesta.

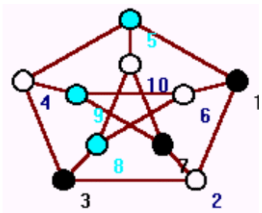
Solución

(a) La red sería:



(b) Según el algoritmo de Dijkstra la distancia máxima del vértice 0 al resto de vértices es 21. Por lo tanto, el diámetro tiene que ser como mínimo 21.

36. Utilizando el algoritmo BFS, encuentra un árbol generador de este grafo:



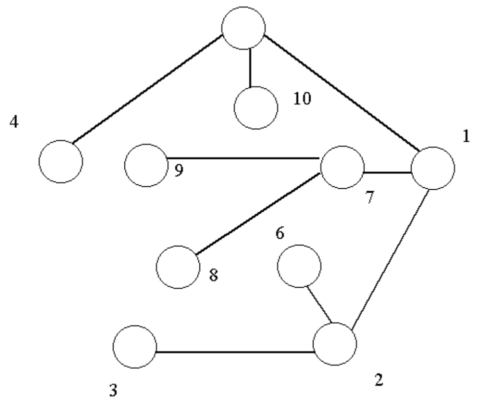
(El concepto de árbol generador se explica en el módulo 4).

Solución

El vértice inicial es 1

Cola	Vértice añadido	Vértice eliminado	Arista añadida	Aristas	Vértices
1	1			∅	1
12	2		12	12	1,2
125	5		15	12,15	1,2,5
1256	6		16	12,15,16	1,2,5,6
256		1		12,15,16	1,2,5,6
2563	3		23	12,15,16,23	1,2,5,6,3
25637	7		27	12,15,16,23,27	1,2,5,6,3,7
5637		2		12,15,16,23,27	1,2,5,6,3,7
56374	4		54	12,15,16,23,27,54	1,2,5,6,3,7,4
5637410	10		510	12,15,16,23,27,54,510	1,2,5,6,3,7,4,10
637410		5		12,15,16,23,27,54,510	1,2,5,6,3,7,4,10
6374108	8		68	12,15,16,23,27,54,510,68	1,2,5,6,3,7,4,10,8
63741089	9		69	12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
3741089		6		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
741089		3		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
41089		7		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
1089		4		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
89		10		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
9		8		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9
∅		9		12,15,16,23,27,54,510,68,69	1,2,5,6,3,7,4,10,8,9

Este es el árbol generador:



37. La tabla siguiente representa la matriz de adyacencia de un grafo con pesos positivos en las aristas:

0	5	6	4	3	7
5	0	2	4	8	5
6	2	0	4	8	8
4	4	4	0	2	5
3	8	8	2	0	4
7	5	8	5	4	0

Utilizando el algoritmo DFS, encuentra un árbol generador de este grafo (el concepto de árbol generador se explica en el módulo 4). Haz la tabla (donde se vea el contenido de la pila) que registra el funcionamiento del algoritmo.

El árbol generador obtenido con este algoritmo ¿es un árbol generador minimal?

Solución

La tabla siguiente muestra el algoritmo DFS:

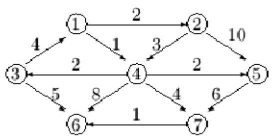
Pila	Vértice Añadido	Vértice eliminado	Arista añadida
1	1	-	-
12	2	-	12 (5)
123	3	-	23 (2)
1234	4	-	34 (4)
12345	5	-	45 (2)
123456	6	-	56 (4)
12345	-	6	-
1234	-	5	-
123	-	4	-
12	-	3	-
1	-	2	-
$\emptyset$	-	1	-

El peso total de este árbol es 17. Pero, si aplicamos el algoritmo de Kruskal:

$$(2,3),(4,5),(1,5),(2,4),(5,6)$$

obtenemos un árbol generador minimal de peso 15. Por lo tanto, el árbol obtenido con el algoritmo DFS no es minimal.

38. Dado el grafo dirigido (*dígrafo*) y ponderado de la figura



usa el algoritmo de Dijkstra para encontrar la distancia mínima del vértice 1 al resto de vértices. A cada paso i usa una tabla como la que mostramos para indicar los estados del algoritmo (esta tabla representa el estado inicial):

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	0	0	0	0	0	0
$E()$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Solución

Tablas que se obtienen:

$i=0$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	0	0	0	0	0	0
$E()$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

$i=1$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	0	0	1	0	0	0
$E()$	0	2	∞	1	∞	∞	∞

$i=2$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	1	0	1	0	0	0
$E()$	0	2	3	1	3	9	5

$i=3$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	1	0	1	1	0	0
$E()$	0	2	3	1	3	9	5

$i=4$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	1	1	1	1	0	0
$E()$	0	2	3	1	3	9	5

$i=5$

vértices	1	2	3	4	5	6	7
V_i	1	1	1	1	1	0	1
$E()$	0	2	3	1	3	8	5

$i=6$	vértices	1	2	3	4	5	6	7
	V_i	1	1	1	1	1	1	1
	$E()$	0	2	3	1	3	6	5

39. Un gran número de personas vuelan atravesar la frontera entre una localidad C_0 y otra C_8. Las posibles rutas están representadas por la tabla siguiente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	4	6	8	0	0	0	0	0
1	4	0	2	0	2	0	0	0	0
2	6	2	0	3	5	7	0	0	0
3	8	0	3	0	0	0	0	0	0
4	0	2	5	0	0	0	4	8	0
5	0	0	7	0	0	0	3	0	7
6	0	0	0	0	4	3	0	0	6
7	0	0	0	0	8	0	0	0	4
8	0	0	0	0	0	7	6	4	0

donde el valor de la posición (i, j) representa la distancia entre la ciudad C_i y la ciudad C_j (0 significa que no es posible ir de una ciudad a otra). Usando la teoría de grafos,

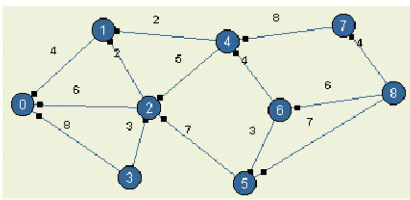
(a) Dibuja el grafo ponderado.

(b) Encuentra la distancia mínima entre la ciudad C_0 y la ciudad C_8. Haz una tabla que muestre el algoritmo utilizado.

(c) Encuentra a partir de la tabla el camino que habrán de seguir las personas.

Solución

El gráfico siguiente muestra el grafo:



(a) Aplicamos el algoritmo de Dijkstra con vértice inicial C_0 y obtenemos la tabla siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
(0,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(10,4)	(14,4)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(10,4)	(14,4)	(∞,0)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(10,4)	(14,4)	(16,6)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(10,4)	(14,4)	(16,6)
(0,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)	(6,1)	(13,2)	(10,4)	(14,4)	(16,6)

(b) De esta tabla se deduce que la distancia mínima de C_0 a C_8 es 16.

(c) A partir de la última fila de la tabla podemos reconstruir el camino: A C_8 se llega desde C_6, a C_6 desde C_4, a C_4 desde C_1 y a C_1 desde C_0. Así el camino mínimo es: $C_0 \to C_1 \to C_4 \to C_6 \to C_8$.

40. Una empresa suiza de aviación amplió el verano pasado su negocio, abriendo vuelos diarios entre 6 ciudades. Esta tabla da las distancias entre estas 6 ciudades:

	Berlín	Dublín	Helsinki	Ginebra	Praga	Palermo
Berlín	–	1530	1430	1139	348	2533
Dublín	1530	–	2665	1570	1819	3440
Helsinki	1430	2665	–	2381	1739	4007
Ginebra	1139	1570	2381	–	948	1990
Praga	348	1819	1739	948	–	2294
Palermo	2533	3440	4007	1990	2294	–

(a) Por motivos meteorológicos, hoy estas líneas no despegarán, ni en un sentido ni en el otro: Praga/Dublín, Praga/Ginebra, Palermo/Helsinki, Palermo/Ginebra, Berlín/Dublín y Berlín/Helsinki. Utiliza alguno de los algoritmos que conoces para encontrar la manera de ir de Dublín en Praga recorriendo la mínima distancia posible.

(b) Debido a una crisis de la empresa, el mes próximo cerrará algunas de las líneas. ¿Cuáles son las líneas que habría de utilizar para mantener conectadas todas estas ciudades con el mínimo de líneas posible, de forma que los desplazamientos sean el más cortos posible? (Utiliza el algoritmo de Prim)

Solución

(a) Utilizamos el algoritmo de Dijkstra:

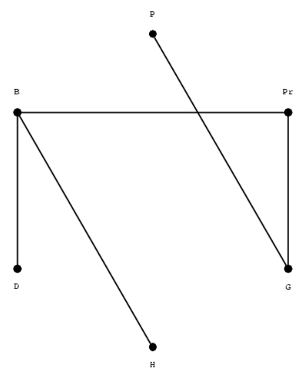
B	D	H	G	Pr	P
∞	$(0, D)$	$(2665, D)$	$(1570, D)$	∞	$(3440, D)$
$(2709, G)$	$(0, D)$	$(2665, D)$	$(1570, D)$	∞	$(3440, D)$
$(2709, G)$	$(0, D)$	$(2665, D)$	$(1570, D)$	$(4404, H)$	$(3440, D)$
$(2709, G)$	$(0, D)$	$(2665, D)$	$(1570, D)$	$(3057, B)$	$(3440, D)$

Por lo tanto, el camino es Dublín/Ginebra/Berlín/Praga.

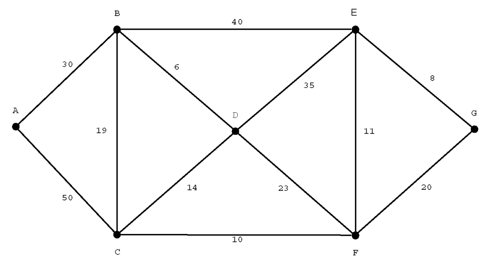
(b)

B	D	H	G	Pr	P
(348,Pr)	(1819,Pr)	(1739,Pr)	(948,Pr)	(0,Pr)*	(2294,Pr)
(348,Pr)*	(1530,B)	(1430,B)	(948,Pr)	(0,Pr)	(2294,Pr)
(348,Pr)	(1530,B)	(1430,B)	(948,Pr)*	(0,Pr)	(1990,G)
(348,Pr)	(1530,B)	(1430,B)*	(948,Pr)	(0,Pr)	(1990,G)
(348,Pr)	(1530,B)*	(1430,B)	(948,Pr)	(0,Pr)	(1990,G)
(348,Pr)	(1530,B)	(1430,B)	(948,Pr)	(0,Pr)	(1990,G)*

Por lo tanto, el árbol resultante es:



41. Dado este grafo ponderado:



(a) Encuentra el camino más corto de A a G utilizando el algoritmo de Dijkstra e indicando todos los pasos que haces.

(b) ¿Es único este camino?

Solución

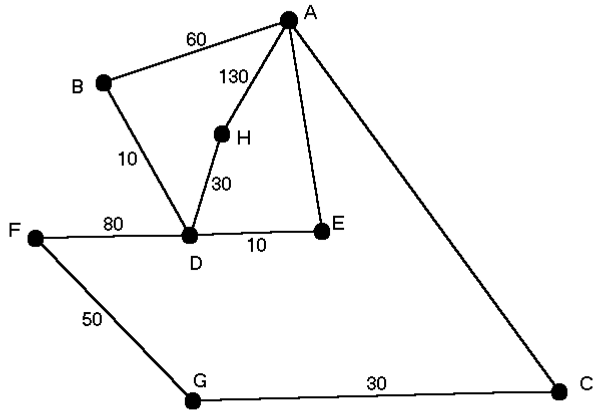
(a)

A	B	C	D	E	F	G
$(0, A)$	$(30, A)$	$(50, A)$	∞	∞	∞	∞
$(0, A)$	$(30, A)$	$(49, B)$	$(36, B)$	$(70, B)$	∞	∞
$(0, A)$	$(30, A)$	$(49, B)$	$(36, B)$	$(70, B)$	$(59, D)$	∞
$(0, A)$	$(30, A)$	$(49, B)$	$(36, B)$	$(70, B)$	$(59, D)$	∞
$(0, A)$	$(30, A)$	$(49, B)$	$(36, B)$	$(70, B)$	$(59, D)$	$(79, F)$
$(0, A)$	$(30, A)$	$(49, B)$	$(36, B)$	$(70, B)$	$(59, D)$	$(78, E)$

por lo tanto, el camino es $ABEG$.

(b) El camino ABDFEG también une A y G con el mínimo peso.

42. Dado este grafo ponderado incompleto:



Observa este inicio de una tabla de un algoritmo:

A	B	C	D	E	F	G	H
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(60,A)	(50,A)	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(∞,A)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)*	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(80,A)	(130,A)

(a) Completa los pesos del grafo anterior.

(b) ¿De qué algoritmo se trata? ¿Qué hace este algoritmo?

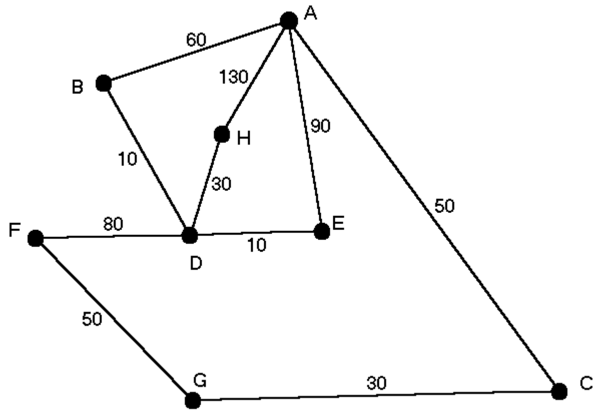
(c) Ésta es la tabla completa del algoritmo anterior:

A	B	C	D	E	F	G	H
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(60,A)	(50,A)	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(∞,A)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)*	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)*	(50,A)	(70,B)	(90,A)	(∞,A)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)*	(80,D)	(150,C)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)*	(150,C)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	(130,G)	(80,C)*	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	(130,G)*	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	(130,G)	(80,C)	(130,A)*

Encuentra los errores, explícalos y corrígelos.

Solución

(a)



(b) El algoritmo de Dijkstra, porque sólo puede tratarse de la tabla de la algoritmo de Dijkstra o de la de Prim. En la tercera fila, bajo la G, pone (80,C). Si fuera el algoritmo de Prim debería poner (30,C), porque 30 es el peso de la arista CG. Por lo tanto, se trata del algoritmo de Dijkstra .

El algoritmo de Dijkstra encuentra la distancia mínima de cualquier vértice al vértice A.

(c) La tabla correcta sería esta :

A	B	C	D	E	F	G	H
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(60,A)	(50,A)	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(∞,A)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)*	(∞,A)	(90,A)	(∞,A)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)*	(50,A)	(70,B)	(90,A)	(∞,A)	(80,C)	(130,A)
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)*	(80,D)	**(150,D)**	(80,C)	**(100,D)**
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)*	**(150,D)**	(80,C)	**(100,D)**
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	**(130,G)**	(80,C)*	**(100,D)**
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	**(130,G)**	(80,C)	**(100,D)***
(0,A)	(60,A)	(50,A)	(70,B)	(80,D)	**(130,G)***	(80,C)	**(100,D)**

En la quinta fila, cuando accedemos al vértice D, la distancia de A a H pasando por B y D es 100, menor que 130; por lo tanto, se debe cambiar, (130,H) por (100,D). También, el (150,C) de la columna F se ha de sustituir por (150,D) puesto que por llegar a F debemos pasar por D. Estos errores se propagan y, por ello, en las dos últimas filas de la tabla, se debe intercambiar el orden en que se escogen los vértices.

43. La tabla siguiente muestra el coste de volar entre varias ciudades según la tabla oficial de precios de una línea aérea:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	5	-	-	-	-
B		0	3	1	-	-	-
C			0	2	2	-	-
D				0	4	2	-
E					0	2	3
F						0	5
G							0

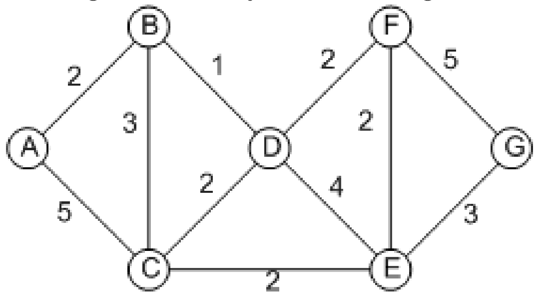
Se debe suponer que la tabla es simétrica y que el símbolo - entre dos ciudades significa que no hay conexión directa.

(a) Explica el algoritmo que utilizarías para buscar la ruta más económica por volar de la ciudad A a el resto de ciudades. Muestra la tabla de evolución del algoritmo. ¿Cuál será el coste mínimo por ir de la ciudad A a la ciudad G? Di, también, cuál es la ruta que logra este mínimo.

(b) La ruta calculada en el apartado anterior, aunque óptima por el que hace referencia al coste total, no tiene porque ser la que logre el mínimo número de interconexiones (en cada interconexión hace falta hacer un aterrizaje y un despegue). Explica como modificarías el algoritmo para que permita calcular la ruta de coste mínimo con el mínimo número de interconexiones. Muestra ahora la tabla resultante y cuál sería la nueva ruta.

Solución

(a) Aplicaríamos el algoritmo de Dijkstra sobre el grafo:



La tabla de evolución del algoritmo será:

A	B	C	D	E	F	G
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(2,A)	(5,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(2,A)*	(5,A)	(3,B)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(2,A)	(5,A)	(3,B)*	(7,D)	(5,D)	(∞,A)
(0,A)	(2,A)	(5,A)*	(3,B)	(7,D)	(5,D)	(∞,A)
(0,A)	(2,A)	(5,A)	(3,B)	(7,D)	(5,D)*	(10,F)
(0,A)	(2,A)	(5,A)	(3,B)	(7,D)*	(5,D)	(10,F)
(0,A)	(2,A)	(5,A)	(3,B)	(7,D)	(5,D)	(10,F)*

De esta tabla se deduce que el coste total mínimo será 10 y que la ruta óptima calculada será: A, B, D, F, G.

(b) Si queremos minimizar el número de interconexiones habremos de tenerlo en cuenta en el algoritmo y etiquetar cada vértice u con tres valores $(E(u), Y(u), v)$ siendo $E(u)$ es el coste acumulado por llegar al vértice u, $Y(u)$ es el número de interconexiones por llegar al mismo vértice y v es el vértice del cual provenimos.

Además, hará falta seleccionar a cada paso del algoritmo aquel vértice con mínimo $E(u)$ y, si hay igualdad, el de mínimo $Y(u)$. Lo mismo habremos de hacer al mismo tiempo que se actualizan las etiquetas.

La tabla resultante será:

A	B	C	D	E	F	G
(0,0,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)
(0,0,A)*	(2,1,A)	(5,1,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)
(0,0,A)	(2,1,A)*	(5,1,A)	(3,2,B)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)	(∞,∞,A)
(0,0,A)	(2,1,A)	(5,1,A)	(3,2,B)*	(7,3,D)	(5,3,D)	(∞,∞,A)
(0,0,A)	(2,1,A)	(5,1,A)*	(3,2,B)	(7,2,C)	(5,3,D)	(∞,∞,A)
(0,0,A)	(2,1,A)	(5,1,A)	(3,2,B)	(7,2,C)	(5,3,D)*	(10,4,F)
(0,0,A)	(2,1,A)	(5,1,A)	(3,2,B)	(7,2,C)*	(5,3,D)	(10,3,E)
(0,0,A)	(2,1,A)	(5,1,A)	(3,2,B)	(7,2,C)	(5,3,D)	(10,3,E)*

De esta tabla se deduce que la ruta óptima es: A, C, E, G.

44. La tabla siguiente:

s	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$(0, s)$	$(10, s)$	$(6, s)$	$(1, v_2)$	$(30, v_6)$	$(15, v_7)^*$	$(14, v_2)$

representa una de las filas (no necesariamente la última) de la tabla que se obtiene tras aplicar el algoritmo de Dijkstra sobre el grafo G con vértice inicial s.

A partir de estos valores, justifica si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:

(a) El camino de peso mínimo de s a v_6 tiene peso 15 .

(b) El camino de peso mínimo de s a v_6 debe pasar por v_2.

(c) El camino de peso mínimo de s a v_5 debe pasar por v_2.

(d) Hay un camino de s a v_5 que tiene peso 30.

Solución

En el algoritmo de Dijkstra, a cada paso se fija la distancia de uno de los vértices del grafo.

(a) Cierta. En esta fila hemos fijado la etiqueta del vértice v_6 que ya no se modificará. Por lo tanto, esta etiqueta nos dará el valores del peso del camino mínimo de s a v_6.

(b) Cierta. La etiqueta de v_6 nos dice que el camino de peso mínimo de s a v_6 pasa por v_7, y la etiqueta de v_7 nos dice que también pasa por v_2.

(c) Falsa. Como que no sabemos si esta fila es la última de la tabla, no podemos afirmar que el camino de peso mínimo de s a v_5 pase por v_2.

(d) Cierta. Como que la etiqueta de v_5 es menor que ∞ podemos asegurar que hay un camino de peso 30 entre s y v_5.

Capítulo 4

Árboles

45. ¿Cuál es el número de vértices de un árbol que tiene 3 vértices de grado 2, 2 vértices de grado 3, 1 vértice de grado 4 y el resto de grado 1?

Solución

Suponemos que este árbol tiene n vértices. Por lo tanto, el número de aristas es $n - 1$. También sabemos que la suma de los grados de los vértices es igual al doble de las aristas. Por lo tanto, la suma de los grados es $10 + n$. O sea:

$$10 + n = 2(n - 1)$$

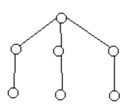
resolvemos esta ecuación y $n = 12$. Es un grafo de 12 vértices.

46. Halla todos los árboles que tienen 1 vértice de grado 3, 3 vértices de grado 2 y el resto de vértices, de grado 1.

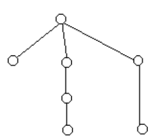
Solución

Según la relación entre los grados de los vértices y el número de aristas, se debe cumplir que: $1 \times 3 + 3 \times 2 + n = 2(1 + 3 + n - 1)$ Por lo tanto, el árbol tiene 3 hojas. Además, el grafo tiene 7 vértices.

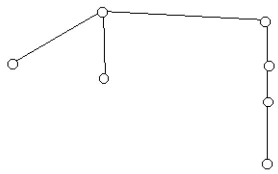
Supongamos que el vértice de grado 3 es adyacente a los 3 vértices de grado 2; este es el único árbol con estas características:



Suponemos que 2 vértices de grado 2 son adyacentes al vértice de grado 3:



Suponemos que sólo 1 de los vértices de grado 2 es adyacente al de grado 3:



Cualquiera otra disposición de vértices y aristas es isomorfa a una de éstas. Por lo tanto, esencialmente, hay 3 posibles árboles de estas características.

47. José Colmillo, un antiguo noble de la estirpe de los Colmillo de Ripoll tuvo 4 hijos, 10 de sus descendentes tuvieron 3 hijos cada uno y 15 tuvieron 2. El resto de descendientes murieron sin descendencia. ¿Cuántos descendentes tuvo José?

Solución

Esta situación (los descendientes de diferentes generaciones de en José Colmillo) se puede modelizar con un árbol. Este árbol tiene 1 vértice de grado 4 (la raíz), 10 vértices de grado 4 (los que corresponden a los nodos que tienen tres hijos) y 15 vértices de grado 3. El resto de vértices, n, tienen grado 1. Es puede aplicar la conocida fórmula, que asegura que la suma de grados es el doble del número de vértices menos 1: $89 + n = 2(26 + n - 1)$. En definitiva, $n = 39$. En José Colmillo tuvo 39 descendentes que murieron sin descendencia, y 26 + 39 - 1 = 64 descendientes en total.

48. G es un árbol en el que, a parte de las hojas, hay 4 vértices de grado 2, 1 de grado 3, 2 de grado 4 y 1 de grado 5. Calcula el número total de vértices de este grafo.

Solución

Es sabido que la suma de grados de los vértices de un grafo es el doble de las aristas. Además, un árbol tiene un vértice más que el número de aristas. Por lo tanto, la suma de grados es igual al doble del número de vértices menos 1, es decir,

$$\sum g(v) = 2(v - 1)$$

si n es el número de vértices de grado 1, la suma de grados es $24 + n$, por lo tanto,

$$24 + n = 2(7 + n)$$

Así $n = 10$ y el número total de vértices es 18.

49. Justifica si es cierta o falsa la siguiente afirmación: Un árbol de n vértices en el cual la mitad de los vértices son hojas debe tener un mínimo de 4 vértices.

Solución

Llamemos F al conjunto de hojas. Aplicando el lema de los grados,

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \notin F} g(v) = |F| + \sum_{v \notin F} g(v) \\ &\geq |F| + 2(n - |F|) = \frac{3n}{2} \end{aligned}$$

De aquí, $n \geq 4$.

50. Justifica si es cierta o falsa la siguiente afirmación: si un grafo es conexo y tiene la secuencia de grados $1, 1, 1, 3, 3, 3$ entonces contiene un circuito.

Solución

Si G es conexo y no contiene ningún circuito entonces es un árbol. Pero, G contiene 6 vértices y $12/2 = 6$ aristas. Así no puede ser un árbol y, por lo tanto, contiene un circuito.

51. Justifica si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:

(a) Si un grafo G no tiene ciclos entonces todo subgrafo de G tampoco tiene ciclos.

(b) Si un grafo es conexo y tiene la secuencia de grados 1, 1, 1, 3, 3, 3 entonces contiene un ciclo.

Solución

(a) Cierto. Si un subgrafo de G tuviera un ciclo entonces este mismo ciclo también lo seria de G.

(b) Cierto. Un grafo conexo sin ciclos debe ser un árbol. Este grafo tiene 6 vértices y, por el lema de los grados, 6 aristas. Entonces no puede ser un árbol.

52. Si $G = (V, A)$ es un bosque con 28 vértices y 21 aristas, ¿cuántos componentes conexos tiene? Justifica la respuesta.

Solución

Si $G = (V, A)$ es un bosque, sabemos que todos sus componentes son árboles. Para cada uno de estos árboles $G_i = (V_i, A_i)$ se cumple que $|A_i| = |V_i| - 1$. Así, considerando todo el bosque en conjunto, y suponiendo que hay k componentes,

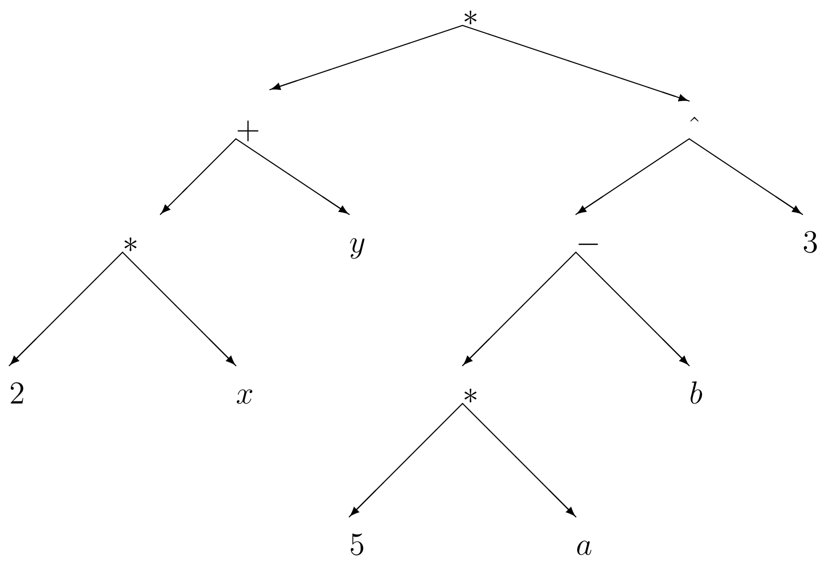
$$|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = |V| - k$$

Sustituyendo los valores del enunciado en esta expresión

$$21 = 28 - k \Rightarrow k = 7 \text{ componentes.}$$

53. Dibuja el árbol, con raíz, de la siguiente expresión aritmética: $(2x+y)(5a-b)\,\hat{}\,3$. Usa el árbol para encontrar la representación de la expresión en notación prefija, en notación infija y en notación postfija.

Solución



La representación prefija es el recorrido en preorden del árbol: $* \; + \; * \; 2 \; x \; y \; \hat{} \; - \; * \; 5 \; a \; b \; 3$

La representación infija es el recorrido en inorden del árbol: $2 \; * \; x \; + \; y \; * \; 5 \; * \; a \; - \; b \; \hat{} \; 3$

La representación postfija es el recorrido en postorden del árbol: $2 \; x \; * \; y \; + \; 5 \; a \; * \; b \; - \; 3 \; \hat{} \; *$

54.

(a) Un árbol de orden 12 tiene dos vértices de grado 4 y ninguno de grado 2. Si supiésemos que tiene algún vértice de grado mayor o igual a 5, ¿cuál sería su secuencia de vértices?

(b) Continuando con el apartado anterior, si, en cambio, supiéramos que no tiene ningún vértice de grado mayor o igual a 5, ¿cuál sería entonces su secuencia de vértices?

(c) Halla cuántos árboles generadores minimales diferentes (no isomorfos) tiene $K_{3,3}$, cuántos tiene $K_{3,4}$, y cuántos $K_{3,5}$. Considera que todas las aristas tienen peso 1.

Solución

Sea x_i el número de vértices de grado i. Tenemos que $12 = x_1+x_3+2+x_5+x_6+....$ Por la fórmula de los grados, $22 = x_1+3x_3+8+5x_5+6x_6+....$ Simplificando y restando las dos igualdades, obtenemos $4 = 2x_3+4x_5+5x_6+....$ Esto implica que $x_6 = x_7 = ... = 0$.

(a) De $4 = 2x_3+4x_5$ deducimos que $x_5 = 1$ y $x_3 = 0$, de donde se obtiene que la solución es 1,1,1,1,1,1,1,1,1,4,4,5.

(b) De $4 = 2x_3+4x_5$ se deduce $x_3 = 2$, y entonces $x_1 = 8$, siendo la solución 1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,4,4.

(c) El número de soluciones es 3, 7 y 10, respectivamente.

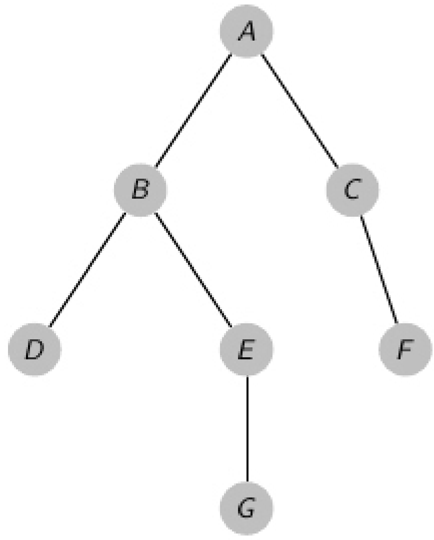
55.

(a) Exploramos un árbol con raíz usando BFS y obtenemos el siguiente orden de los vértices: A, B, C, D, E, F, G. Si lo exploramos usando DFS obtenemos la secuencia A, B, D, E, G, C, F. Dibuja el árbol.

(b) Considera la expresión aritmética siguiente: $3 * x\hat{}2 + (x - y)/9$. Dibuja el árbol correspondiente, teniendo en cuenta la prioridad habitual de los operadores.

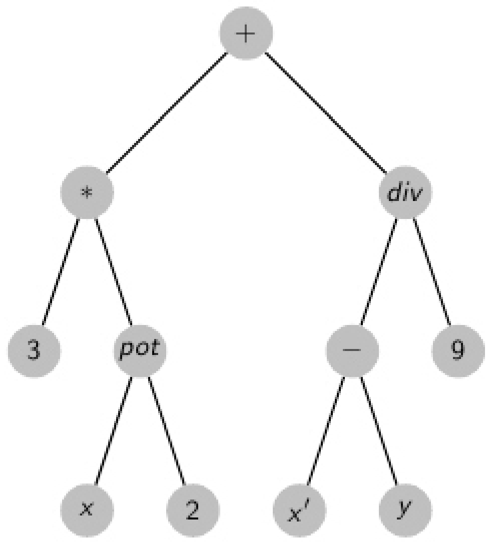
(c) Escribe los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol del apartado anterior.

Solución



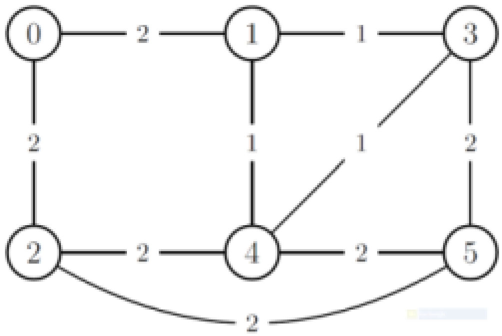
(a)

A debe ser la raíz, y B el primer hijo de A. Si A no tuviese más hijos, como BFS comienza con ABC, C debería ser hijo de B, pero entonces DFS también comenzaría con ABC. Por lo tanto, C también es hijo de A. Si A tuviese un tercer hijo, por BFS sería D, y contradeciría DFS, en donde D va antes que C. En conclusión, A tiene hijos B y C.
Ahora podemos deducir, a partir de DFS, que D, E y G cuelgan de B (es decir, el subárbol que tiene raíz B los contiene), mientras que F cuelga de C.
Finalmente, a partir de BFS deducimos que los hijos de B son D y E, y por DFS que G cuelga de E.



(b) En preorden: $+ * 3 \ \hat{}\ x\ 2\ /\ -\ x\ y\ 9$
En inorden: $3 * x\ \hat{}\ 2 + x - y\ /\ 9$
En postorden: $3\ x\ 2\ \hat{}*\ x\ y - 9\ /\ +$

56. Utiliza el algoritmo de Prim para calcular un árbol generador minimal del grafo,



Si hubiésemos utilizado el algoritmo de Kruskal, ¿habríamos obtenido el mismo árbol? Justificad la respuesta.

Solución
La tabla siguiente se obtiene aplicando el algoritmo de Prim a partir del vértice 0:

0	1	2	3	4	5
(0,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)*	(2,0)	(2,0)	∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(2,0)*	(2,0)	(1,1)	(1,1)	(∞,0)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)*	(1,1)	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)	(1,1)*	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)*	(1,1)	(1,1)	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)	(1,1)	(2,3)*

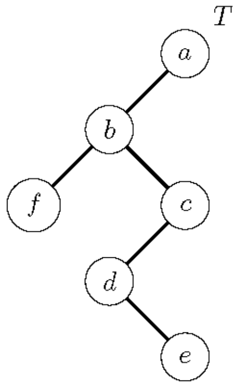
De acuerdo con esta tabla, el árbol generador minimal estará formado por las aristas: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{3,5\}$ con un peso total de 8.

Si hubiésemos utilizado el algoritmo de Kruskal habríamos obtenido un árbol generador minimal con el mismo peso pero podría no coincidir con el que ha hallado el algoritmo de Prim. Por ejemplo, podríamos haber obtenido el árbol: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$.

57.

(a) Un árbol de 21 vértices tiene un vértice de grado 6, 2 de grado 5, x de grado 3 y el resto son hojas. ¿Cuántas hojas tiene?

(b) Calcula los recorridos en preorden y postorden del árbol T,



Solución

(a) Si denotamos por y el número de hojas, aplicando la fórmula de los grados:

$$2(21-1) = 1\cdot 6 + 2\cdot 5 + x\cdot 3 + y\cdot 1.$$

De esta ecuación obtenemos, $40 = 16 + 3x + y$. Por otro lado, tenemos $21 = 1 + 2 + x + y$. De las dos ecuaciones deducimos $x = 3$ i $y = 15$.

(b) Recorrido en preorden: a, b, f, c, d, e.

Recorrido en postorden: f, e, d, c, b, a.

58.

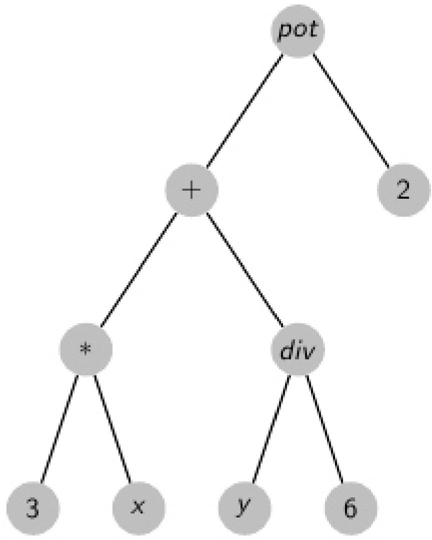
(a) Un árbol con raíz tiene 5 vértices internos y 11 hojas. Además, todos los vértices internos tienen el mismo número k de hijos. Usa la fórmula de los grados para encontrar el valor de k.

(b) Dibuja el árbol binario correspondiente a la expresión aritmética $(3 * x + y/6)^2$ (usando la prioridad de operaciones habitual). Escribe la secuencia de vértices que se obtiene al explorar el árbol usando DFS.

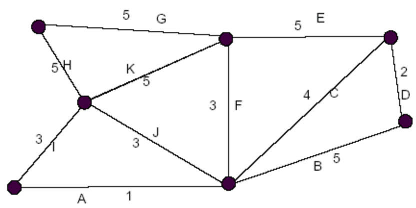
Solución

(a) De cada vértice interno salen $k+1$ aristas: k hacia los hijos y 1 hacia el padre. La única excepción es la raíz, de donde sólo salen las k aristas correspondientes a los hijos. Como de las hojas sólo sale una arista, la fórmula de los grados nos dice $2m = (k+1)4 + k + 11$, donde m es la medida del árbol. Por otro lado, en los árboles la medida es una unidad inferior al orden, de manera que $m = 15$, de donde $30 = (k+1)4 + k + 11$. Operando y aislando la k obtenemos $k = 3$.

(b) ˆ $+ * 3\ x\ /\ y$ 6 2 sería la secuencia obtenida.



59. Utiliza el algoritmo de Kruskal para encontrar un árbol generador minimal del siguiente grafo:



Indica el orden en el que vamos cogiendo las aristas en cada paso del algoritmo y da el peso del árbol construido.

Solución

Empezamos por inicializar la variable $k := 1$ y el conjunto de aristas $Ak - 1 = \varnothing$.

El resto de pasos del algoritmo vienen dados por:

$A1 = \{A\}, \qquad k = 2$

$A2 = \{A, D\}, \qquad k = 3$

$A3 = \{A, D, Y\}, \qquad k = 4$

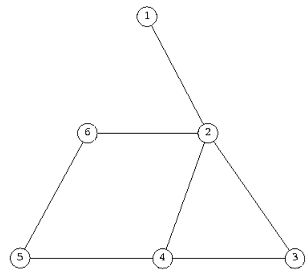
$A4 = \{A, D, Y, F\}, \qquad k = 5$

$A5 = \{A, D, Y, F, C\}, \qquad k = 6$

$A6 = \{A, D, Y, F, C, H\}, \qquad k = 7$

El árbol generador de peso mínimo está formato por las aristas $A6 = \{A, D, Y, F, C, H\}$ y su peso vale 18.

60. Una empresa química almacena 6 productos diferentes en 6 depósitos subterráneos diferentes. Las reglas de almacenamiento de estos productos no permiten que se construya un túnel directo entre los depósitos de algunos pares de estos productos. Si enumeramos los productos del 1 al 6, este grafo presenta los túneles directos entre los productos que **no** se pueden construir.



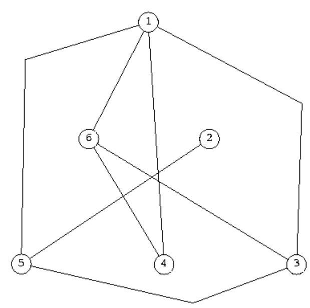
Entre los otros pares de productos sí que se pueden construir túneles directos. El coste de un túnel entre dos depósitos es proporcional a la suma entre los números que representan estos productos (por ejemplo, el coste del túnel entre el depósito 1 y el 6 es 7).

(a) Construye el grafo que representa los túneles que se pueden construir.

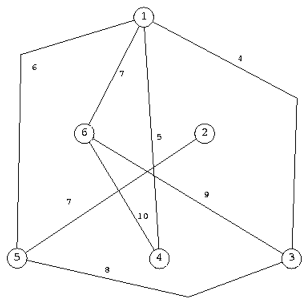
(b) ¿Cuáles son los túneles que se deben construir de forma que el coste de toda la obra sea mínima?

Solución

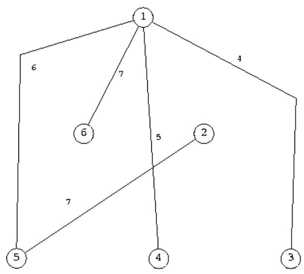
(a) Se trata del grafo complementario:



(b) Los costes de la construcción de cada túnel son:



Siguiendo el algoritmo de Prim, podemos comprobar fácilmente que este es el árbol generador minimal resultante:



61. El nuevo gobierno del archipiélago de *Sealand* ha decidido unir sus 6 islas mediante puentes que permitan conectarlas directamente. Los costes de construcción de los puentes dependen de la distancia entre las islas y se resumen en la tabla siguiente:

	A	B	C	D	E	F
A	–	5	6	4	3	7
B	–	–	2	4	8	5
C	–	–	–	4	8	8
D	–	–	–	–	2	5
E	–	–	–	–	–	4
F	–	–	–	–	–	–

(a) Determina cuales son los puentes que se deben construir para que todas las islas queden conectadas y el coste total de la obra sea mínimo.

(b) Si las dos islas más grandes, la C y D han de estar conectadas entre sí, ¿cuál sería la solución? Razona la respuesta.

Solución

(a) Definimos el grafo $G(V, A)$ siendo $V = \{x | x$ es una de las 6 islas $\}$ y $A = \{(x, y) | x, y$ se han de unir por un puente $\}$. Además, para cada $(x, y) \in A$ definimos su peso como

$$w(x, y) = \text{ coste de la construcción del puente que une } x \text{ y } y$$

El grafo resultante es K_6 y hace falta buscar un árbol generador de peso total mínimo. Aplicando el algoritmo de Kruskal obtenemos el árbol:

$$(B, C), (D, E), (A, E), (E, F), (B, D)$$

con un coste total $w(G) = 15$.

(b) En este caso, la arista (C, D) tendrá que estar a la solución. Pero entonces tendríamos un circuito. Por lo tanto, podemos eliminar la arista de peso más grande de este circuito que seria la arista (B, D). Así el nuevo árbol será:

$$(B, C), (D, E), (A, E), (E, F), (C, D)$$

y el coste total continúa siendo $w(G) = 15$.

62. La tabla siguiente recoge la distancia (en millas) entre varias ciudades del estado de Indiana (USA):

	Bloomington	Evansville	Fort Wayne	Gary	Indianapolis	South Bend
Evansville	119	−−	−−	−−	−−	−−
Fuerte Wayne	174	290	−−	−−	−−	−−
Gary	198	277	132	−−	−−	−−
Indianapolis	52	168	121	153	−−	−−
South Bend	198	303	79	58	140	−−
Terre Haute	58	113	201	164	71	196

Se quiere construir un sistema de carreteras que comunique estas siete ciudades.

(a) Suponiendo que el coste de construcción de una milla de carretera está fijado, determina qué carreteras se deben construir para que el coste total de la construcción sea mínimo.

(b) ¿La solución es única? Justifica la respuesta.

Solución

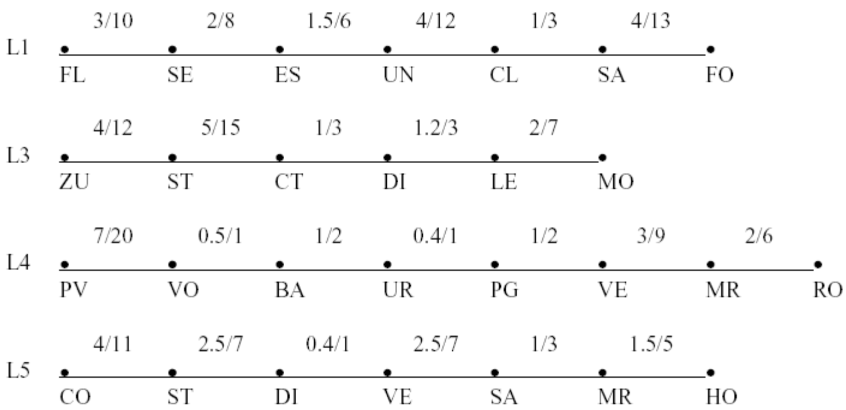
(a) Definimos el grafo $G = (V, A)$, siendo $V = \{x | x$ representa cada una de las 7 ciudades $\}$ y $A = \{(x, y) | x, y$ se han de unir por una carretera$\}$. Además, para cada $(x, y) \in A$, definimos su peso como $w(x, y) =$ distancia en millas entre x y y. El grafo resultante es K_7 y hace falta busca un árbol generador de peso total mínimo. Aplicando el algoritmo de Kruskal obtenemos el árbol:

$$(I, B)(B, TH), (SB, G), (FW, SB), (TH, E), (I, FW)$$

con un peso total $w(G) = 480$.

(b) En este caso, obtenemos un único árbol generador de peso mínimo puesto que en la aplicación del algoritmo de Kruskal siempre hemos escogido la única arista posible.

63. El gráfico siguiente muestra (de forma resumida) el plano del metro de Barcelona. Cada recta representa una línea de metro y cada punto una estación. Los valores que hay entre dos estaciones consecutivas representan la distancia en kilómetros y el tiempo mediano que tardan los trenes. Por ejemplo, el valor 4/12 que hay entre las estaciones de la línea 1, UN(Universidad) y CL(Clot) significa que hay 4 kilómetros y se tarda 12 minutos. Observa que hay estaciones que se encuentran en más de una línea.



Para cada uno de los problemas siguiente indica qué grafo considerarías (da los vértices, las aristas y los pesos), a qué tipo de problema de grafos corresponde y qué algoritmo utilizarías por resolverlo:

(a) Calcular el tiempo mediano mínimo necesario por conectar dos estaciones.

(b) Calcular la cantidad mínima de cable necesario por conectar todas las estaciones.

(c) Calcular el número mínimo de trasbordos que hace falta hacer para comunicar dos estaciones.

(d) Comprobar si, desde la estación de Clot (CL), es posible acceder a todas las otras estaciones del metro.

Solución

(a) $V = \{v_i | v_i \in$ Estaciones $\}$, $A = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j$ son adyacentes $\}$, $w(v_i, v_j) =$tiempo mediano. Es un problema de distancia entre vértices y utilizaríamos el algoritmo de Dijkstra.

(b) $V = \{v_i | v_i \in$ Estaciones $\}$, $A = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j$ son adyacentes $\}$, $w(v_i, v_j) =$ distancia. Es un problema de árboles generadores y podríamos utilizado el algoritmo de Kruskal o el de Prim.

(c) $V = \{v_i | v_i \in$ Líneas $\}$, $A = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j$ tienen una estación en común $\}$, $w(v_i, v_j) = 1$. Es un problema de distancia mínima en grafo no ponderado. Aplicariamos el algoritmo de Dijsktra.

(d) $V = \{v_i | v_i \in$ Estaciones $\}$, $A = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j$ son adyacentes $\}$, $w(v_i, v_j) = 1$. Es un problema de conectividad. Podríamos aplicar el DFS para comprobar si todos los vértices son accesibles.

64. Dada esta tabla:

	A	B	C	D	E
A		6	3	8	7
B			5	2	4
C				4	5
D					3
E					

(a) Enuncia un problema (sin resolverlo) basado en esta tabla que sólo se pueda resolver con el algoritmo de Dijkstra . Explícalo.

(b) Enuncia un problema (sin resolverlo) basado en esta tabla que se deba resolver con el algoritmo de Prim y no con el algoritmo de Kruskal. Explícalo.

(c) Aplica el algoritmo de Prim al grafo ponderado generado por la tabla anterior, haciendo la tabla correspondiente.

Solución

(a) El algoritmo de Dijkstra permite encontrar el camino más corto de un vértice a cualquiera de los otros. Por lo tanto, un problema podría ser: Una compañía de autobuses tiene varias líneas que unen las ciudades A, B, C, D y E. La tabla da la relación de precios del viaje entre dos de estas ciudades. La compañía radicada en la ciudad A, donde tiene la sede, quiere reducir plantilla, y sólo quedarse con aquellas líneas más competitivas; es decir, aquellas que permitan hacer todos los recorridos desde A (aunque no sean directas), de forma que el precio por el pasajero sea el menor posible. ¿Qué líneas debe mantener?

(b) El algoritmo de Prim encuentra un árbol generador minimal, de forma conexa. Por lo tanto, un problema resuelto por este algoritmo, y que no se pueda resolver por el algoritmo de Kruskal, podría ser: Un terremoto destruye todas las carreteras de un pequeño país (y, en particular, las que unen las ciudades A, B, C, D, E, las más importantes del país). El presidente ordena rehacer aquellas que sean imprescindibles para que las ciudades se mantengan unidas (partiendo de A, que es la capital y donde se encuentran todas las empresas de reconstrucción). Además, dada la situación del país tras el terremoto, se debe procurar que el coste sea el menor a cada paso de la reconstrucción. ¿Qué carreteras se deberán reconstruir?

Sólo se puede aplicar el algoritmo de Prim porque la reconstrucción sólo se puede hacer de forma conexa (las otras ciudades están incomunicadas y no tienen maquinaria para rehacer las carreteras).

(c) Esta es la tabla del algoritmo de Prim:

A	B	C	D	E
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(6,A)	(3,A)	(8,A)	(7,A)
(0,A)	(5,C)	(3,A)*	(4,C)	(5,C)
(0,A)	(2,D)	(3,A)	(4,C)*	(3,C)
(0,A)	(2,D)*	(3,A)	(4,C)	(3,C)
(0,A)	(2,D)	(3,A)	(4,C)	(3,C)*

Por lo tanto, las aristas escogidas deben ser BD, AC, DC, DE

65. Queremos conectar 5 ordenadores mediante un red, el máximo de económica posible, que permita la comunicación (directa o indirecta) entre dos ordenadores cualesquiera. La tabla siguiente muestra los costes de conexión física entre los 5 ordenadores:

	A	B	C	D	E
A	-	5	2	4	7
B	5	-	2	3	2
C	2	2	-	5	1
D	4	3	5	-	2
E	7	2	1	2	-

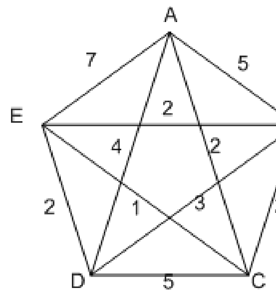
(a) Dibuja el grafo correspondiente al problema.

(b) Encuentra la solución al problema planteado (conexiones entre los ordenadores y coste total de la conexión) usando la teoría de grafos. Muestra en una tabla los pasos del algoritmo escogido para llegar a la solución.

(c) Por necesidades de administración, queremos que los ordenadores C y D estén conectados directamente. ¿Cuál sería ahora la solución del problema? ¿Podemos encontrar esta solución a partir del anterior sin necesidad de repetir el algoritmo?

Solución

(a)



(b) La tabla siguiente muestra los pasos del algoritmo de Prim

A	B	C	D	E
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(5,A)	(2,A)	(4,A)	(7,A)
(0,A)	(2,C)	(2,A)*	(4,A)	(1,C)
(0,A)	(2,C)	(2,A)	(2,E)	(1,C)*
(0,A)	(2,C)*	(2,A)	(2,E)	(1,C)
(0,A)	(2,C)	(2,A)	(2,E)*	(1,C)

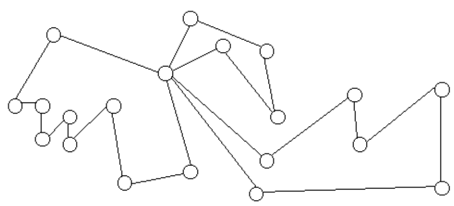
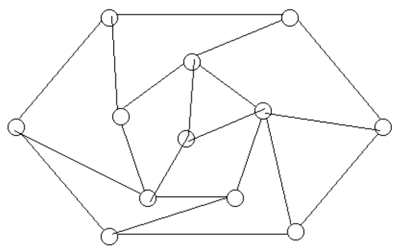
Según la tabla, las conexiones serian (B,C), (C,A), (D,E) y (E,C) con un coste total de 7 .

(c) Si añadimos la arista (C,D) con un coste 5 entonces tendremos un ciclo (C,D,E,C). Para que la solución sea óptima, sólo hace falta eliminar la arista de coste máximo del ciclo que no sea (C,D). La nueva solución será (B,C), (C,A), (C,D) y (E,C) con un coste total de 10 .

Capítulo 5

Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos

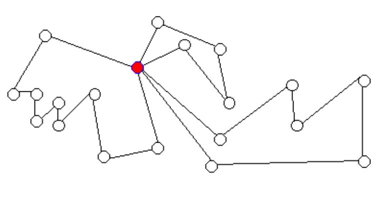
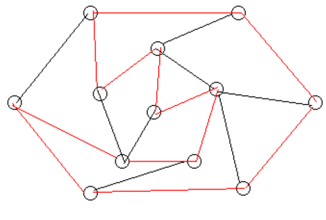
66. Comprueba si estos dos grafos conexos son eulerianos o hamiltonianos, y explica el motivo.

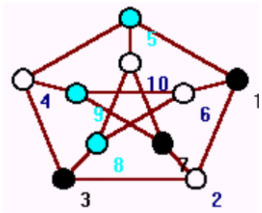
Solución

El grafo de la izquierda es euleriano porque todos los vértices son de grado par. El grafo de la derecha no es euleriano porque hay varios vértices de grado impar.

El grafo de la izquierda no es hamiltoniano porque no es 2-conexo: si quitamos el vértice rojo el grafo se desconecta. En cambio, el grafo de la derecha es hamiltoniano: la línea roja marca un ciclo hamiltoniano.

67. Estudia si este grafo es hamiltoniano o euleriano:



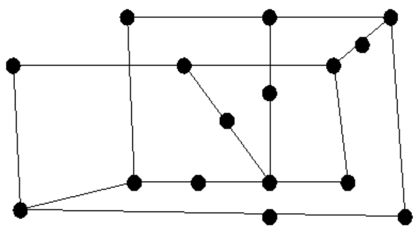
Solución

Evidentemente, no es euleriano porque hay un vértice (de hecho, más) que tiene grado impar (por ejemplo, el vértice 5). Vamos a ver si es hamiltoniano. Consideramos este conjunto de vértices: 2, 4, 6 y 10. Cada uno de ellos tiene grado 3. Ahora bien, sólo 2 de estas 3 aristas se encontrarán en el ciclo hamiltoniano; por lo tanto, estos 4 vértices aportan 8 aristas al ciclo hamiltoniano. Ahora bien, el ciclo hamiltoniano necesita 10 aristas y las aristas que restan, tras escoger 2 de cada uno de los vértices del conjunto anterior son estas 3: 38, 79, 15. Se puede suponer que las aristas del ciclo son 38 y 79 y 15 no pertenece al ciclo; por lo tanto

- 45, 510, 16 y 12 pertenecen al ciclo (porque no pertenece 15).
- se puede escoger entre 23 y 27: si se escoge 23, entonces se continúa por 710. A partir de aquí ya no se puede seguir: 68 o 49 cierran dos ciclos más pequeños. Si se escoge 27, pasa algo de parecido.

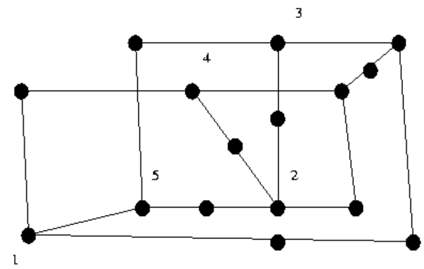
Si escogemos cualquier otro par de aristas de este grupo de 3, pasa exactamente lo mismo. Por lo tanto, el grafo no es hamiltoniano.

68. Estudia si el siguiente grafo es hamiltoniano. Razona la respuesta.

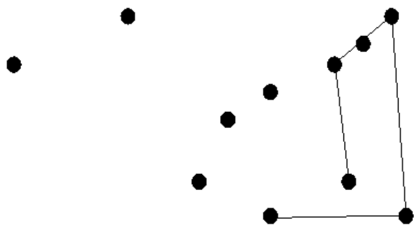


Solución

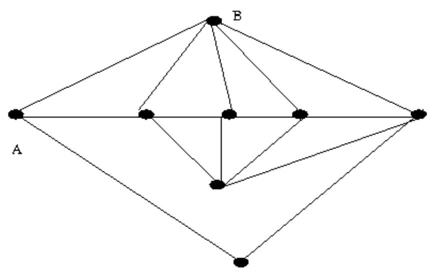
No es hamiltoniano, porque si eliminamos las 5 aristas numeradas:



quedan 6 componentes conexas:



69. El esquema siguiente corresponde a una red de comunicaciones entre varias ciudades.



Los vértices son las ciudades y las aristas, las comunicaciones: Se debe hacer un recorrido de inspección y mantenimiento de la red empezando y acabando a A. El recorrido debería pasar por todos los tramos o carreteras una única vez.

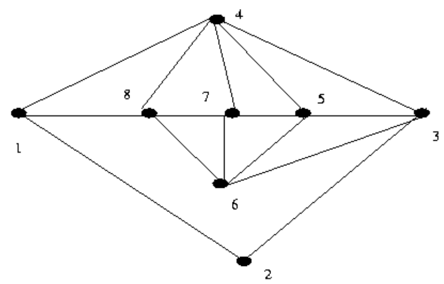
(a) ¿Es posible diseñar un recorrido de este tipo?

(b) ¿Es posible diseñar un recorrido de estas características que empiece a A y acabe a B?

Solución

(a) No es posible. El grafo que modeliza esta situación no es euleriano porque el vértice A tiene grado 3 aristas incidentes.

(b) Sí. Sólo hace falta seguir este camino, donde los números indican la sucesión de vértices: 1234563576847814



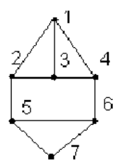
70. La matriz de adyacencia de un grafo es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Di cuál de las siguientes características son aplicables a este grafo y razona la respuesta: es conexo, es completo, es bipartito, es un grafo estrella, es hamiltoniano, es euleriano.

Solución

El grafo es el siguiente:



- Es conexo, puesto que dados dos vértices cualesquiera siempre podemos encontrar un camino que va de uno a otro.
- No es completo, puesto que hay vértices que no son adyacentes, por ejemplo los vértices 1 y el 5.
- No es bipartito, puesto que existe un triángulo (vértices 1, 2 y 3) y esto en un grafo bipartito es imposible.

- No es un grafo estrella. La matriz de adyacencia debería tener una fila y una columna todo con unos y el resto ceros.
- Sí es hamiltoniano. Existe un camino cerrado sin vértices repetidos que pasa por todos los del grafo. Por ejemplo el camino: 1, 4, 6, 7, 5, 2, 3, 1.
- No es euleriano, puesto que hay vértices, por ejemplo el 1, que son de grado impar y en un grafo euleriano todos los vértices son de grado par.

71. Se define el *hipercubo* de dimensión n $(n \geq 1)$ como el grafo Q_n que tiene como vértices todos los vectores binarios de n coordenadas, siendo dos vértices adyacentes si, y sólo si, los correspondientes vectores difieren exactamente en 1 coordenada (están a distancia 1). Por ejemplo, para $n = 2$ Q_2 tendría 4 vértices: $\{00, 01, 10, 11\}$ y el vértice 00 es adyacente al 01 pero no al 11.

(a) Determina el número de vértices y el número de aristas de Q_n.

(b) ¿Para qué valores de n el grafo Q_n es regular?

(c) ¿Para qué valores de n el grafo Q_n es bipartito?

(d) ¿Para qué valores de n el grafo Q_n es euleriano?

Solución

(a) $|V| = 2^n$. Cada vértice tiene exactamente n adyacencias. Así,

$$2|A| = \sum_{i=1}^{2^n} n = n \cdot 2^n$$

De aquí $|A| = n \cdot 2^{n-1}$.

(b) Tal y como hemos indicado en el punto 1, cada vértice tiene exactamente n adyacencias. Así, Q_n es regular para todo n.

(c) Definimos $V_1 = \{x \in Q_n | x \text{ tiene un número par de } 0\}$ y $V_2 = V - V_1$.

Entonces, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y si $(x, y) \in A$, x y y difieren exactamente en una coordenada. Así, si x tiene un número par de ceros, entonces y tendrá un número impar.

(d) Como que cada vértice tiene grado n entonces, Q_n será euleriano cuando n sea par.

72. En el juego del dominó:

(a) ¿Es posible obtener una secuencia circular que contenga todas las fichas?

(b) Lo mismo que antes, si prescindimos de todas las fichas que contienen 6 puntos en alguno de los lados.

(c) ¿Y si sólo consideramos las fichas que, sumando los puntos de los dos lados, da un resultado menor o igual que N puntos ($0 \leq N \leq 12$)?

(d) Si eliminamos la ficha [1|2], es posible obtener una secuencia (circular o no) que contenga todas las otras fichas?

Nota: Por secuencia circular entendemos una disposición de las fichas de forma que dos fichas adyacentes tienen los mismos puntos. Por ejemplo, las fichas [0 | 6][6 | 6][6 | 1][1 | 0] forman una secuencia circular.

Solución

El dominó está formado por 28 fichas. 7 dobles y 21 fichas con puntos diferentes a cada lado. Definimos el grafo $G(V, A)$ por $V = \{x | x = 0, \ldots, 6\}$ y $A = \{(x, y) | x, y$ es una ficha $\}$. El grafo resultante es un grafo completo de 7 vértices y un lazo en cada vértice (*pseudografo*). Así cada vértice tendrá grado 8. Definido así, se trata de un problema de grafos eulerianos.

(a) Sí que es posible construir un circuito euleriano porque todos los vértices tienen grado par.

(b) Si prescindimos de las fichas que tienen seis puntos en alguno de los lados, entonces cada vértice tendrá grado impar y no podremos construir el circuito.

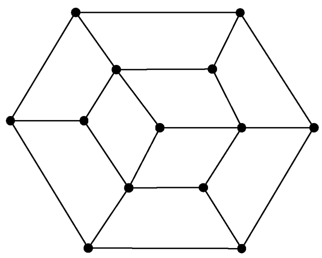
(c) Sólo será posible para $N = 0, 11, 12$.

(d) Si eliminamos la ficha [1|2] entonces no podremos formar circuito pero sí un itinerario puesto que habrá exactamente dos vértices de grado impar.

73. Responde estas cuestiones razonadamente:

(a) Demuestra que si G es un grafo bipartito con un número impar de vértices, G no es hamiltoniano.

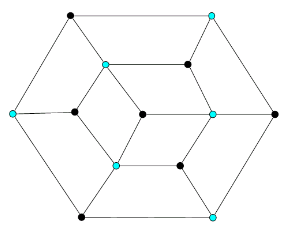
(b) ¿Este grafo es hamiltoniano?



Solución

(a) En un grafo bipartito un ciclo ha de tener un número par de vértices. Por lo tanto, un grafo bipartito con un número impar de vértices no puede ser hamiltoniano.

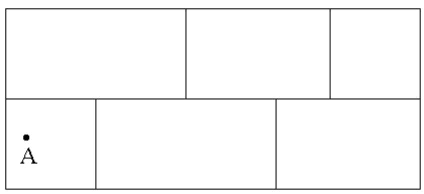
(b) Sólo hace falta ver que es bipartito, cosa evidente:



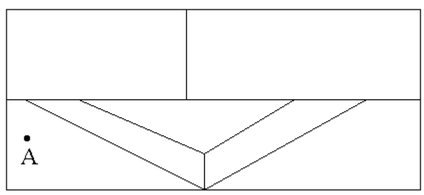
74.

(a) ¿Para qué valores de n el grafo completo de grado n es euleriano? ¿y el grafo $K_{n,m}$?

(b) Dada esta figura, di si es posible dibujar una línea continua que, partiendo del punto A, corte exactamente una vez cada segmento de recta interior al rectángulo, (esta línea no puede pasar por las intersecciones de segmentos). Explícalo en términos de teoría de grafos. En caso afirmativo, dibújala.



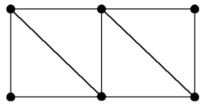
(c) Repite el problema con la figura siguiente:



Solución

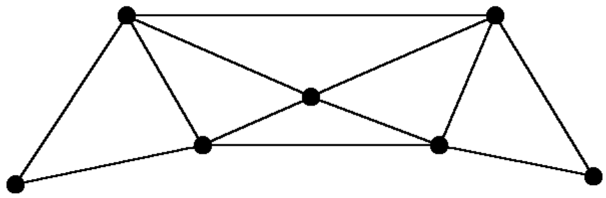
(a) En el caso de K_n, cuando n es impar, porque el grado de cada vértice es $n-1$, par. En el caso de $K_{n,m}$, cuando n y m son impares, por razones similares.

(b) Si modelizamos la figura anterior en forma de grafo, obtenemos:

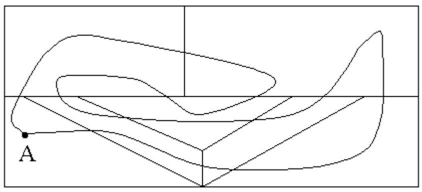


Debemos ver si este grafo es euleriano. Claramente, no lo es porque hay vértices de grado impar.

(c) En este caso, el grafo correspondiente a la figura anterior es:



que claramente es euleriano. Una línea que corta todos los segmentos sin repetir ninguno puede ser:



75. Un código de Gray es una ordenación de las palabras binarias de longitud n, que cumple estas dos condiciones:

- Dos palabras consecutivas sólo difieren en un dígito.
- La primera y la última palabras sólo difieren en un dígito.

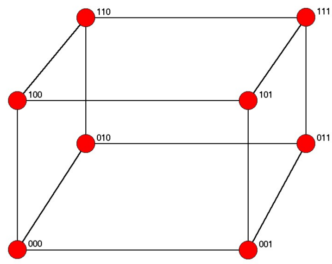
Si $n = 3$:

(a) Define y dibuja el grafo que modele la primera condición de las dos anteriores.

(b) Usa tus conocimientos sobre grafos para determinar una codificación de Gray.

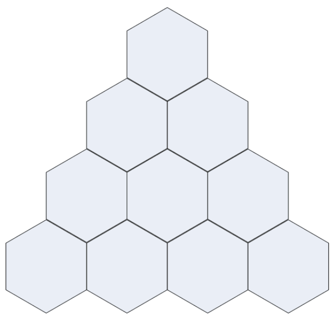
Solución

(a) Este problema se puede modelar mediante un grafo, los vértices del cual son las palabras binarias de longitud 3 y dos palabras son adyacentes si difieren exactamente en un dígito. El grafo obtenido es el cubo:



(b) Para resolver el problema sólo debemos encontrar un ciclo hamiltoniano al cubo. Por ejemplo, un ciclo hamiltoniano seria 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100, 000.

76. Una empresa fabrica bombones de chocolate hexagonales de diferentes tipos de chocolate. Con estos bombones crea la denominada *pirámide hexagonal de chocolate*: se trata de poner diferentes filas de hexágonos unidos de forma que hagan una pirámide, es decir, en la primera fila ponen un hexágono; en la segunda dos; en la tercera, tres; etc. Por ejemplo, esta sería la *pirámide hexagonal* de 4 filas:



Una persona compra una de estas pirámides con n filas. A partir del día siguiente, cada día se comerá una pieza, empezando por el hexágono de arriba. El resto de días se comerá un hexágono que tenga una arista en común con la pieza que ha comido el día anterior.

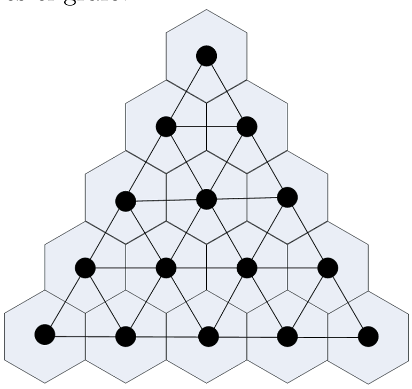
(a) Modela esta situación utilizando un grafo, y da su secuencia de grados y su medida en función de n.

(b) La persona en cuestión quiere adquirir otra pirámide de este tipo construida con tres tipos de hexágonos, cada tipo hecho con un chocolate diferente. Esta pirámide quiere comérsela de igual manera, pero imponiendo, además, que en tres días consecutivos no repita el tipo de chocolate. ¿Como construirías la pirámide para que esto fuera posible? Indica la secuencia de hexágonos que debería seguir esta persona a la hora de comer una pirámide con 5 filas, y di cómo se describiría en términos de grafos esta secuencia.

(c) ¿Hay ninguna pirámide hexagonal del tipo descrito al apartado anterior que tenga el mismo número de piezas de cada uno de los tres tipos de chocolate? Si la respuesta es afirmativa, di la condición que debe cumplir el número de filas, n, de la pirámide. Pon algunos ejemplos.

Solución

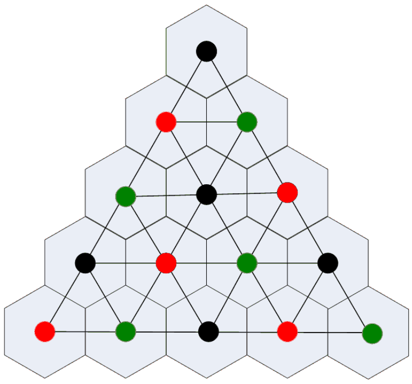
(a) Para $n = 5$ éste es el grafo:



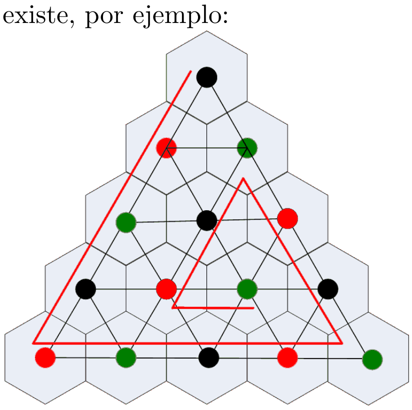
Observamos que hay tres vértices de grado 2, $3 \cdot 3 = 9$ vértices de grado 4 y tres vértices de grado 6. En general, una pirámide hexagonal de n filas tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ vértices. De estos, tres vértices tienen grado 2, $3(n-2)$ vértices tienen grado 4 y el resto, es decir, $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$ tienen grado 6. La medida será, pues:

$$\frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 3(n-2) + 6 \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{2}}{2} = \frac{3n(n-1)}{2}$$

(b) Si coloreamos (o enumeramos) los vértices del grafo, de forma que cada color se asocia a un chocolate diferente, veremos que obtendremos un grafo como el siguiente:



si observamos la diagonal empezando por el vértice superior bajando por la izquierda, siempre tendrá una secuencia de colores (1=negro, 2=rojo, 3=verde): 123123123123123... La siguiente diagonal paralela al anterior será: 312312312312312... La siguiente diagonal tendrá una secuencia: 231231231231231... Y a partir de aquí se vuelven a repetir las secuencias diagonales. Por lo tanto, ésta es la distribución de colores (chocolates) que buscamos. Ahora se trata de recorrer todos los vértices del grafo sin repetición, y de manera que cada grupo de tres vértices seguidos tengan colores diferentes. Esta secuencia, si existe, será un camino hamiltoniano. Es fácil ver que existe, por ejemplo:



además, este camino se puede hacer para cualquier pirámide hexagonal, de forma parecida.

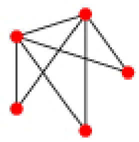
(c) Sólo hace falta encontrar grafos de este tipo de orden múltiplo de 3, puesto que si el orden de un grafo es múltiplo de 3, siguiendo el camino hamiltoniano que hemos encontrado en el apartado anterior, pasaremos por el mismo número de vértices de cada color.

El orden del grafo es $\frac{n(n+1)}{2}$ y debe ser múltiplo de 3. Por lo tanto, $n(n+1)$ debe ser múltiplo de 6. Es fácil encontrar muchas n que cumplen esta condición: 2, 3, 5, 6, 8, 9 ...

77.

(a) Halla un grafo que cumpla todas las condiciones del teorema 4 del módulo 5 (no es necesario que sea bipartito), y aún y así no sea hamiltoniano.

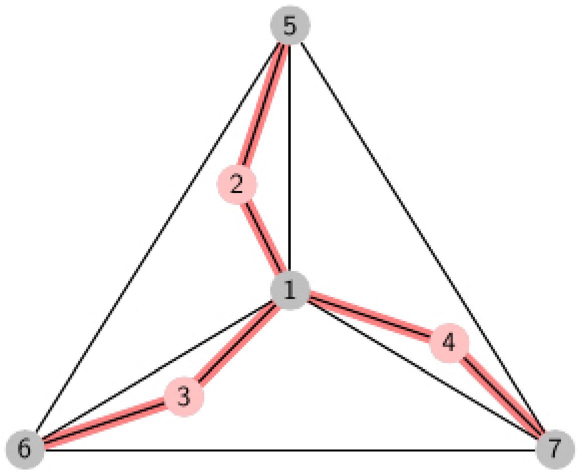
(b) Demuestra que el siguiente grafo no es hamiltoniano usando alguna condición necesaria de hamiltoneidad:



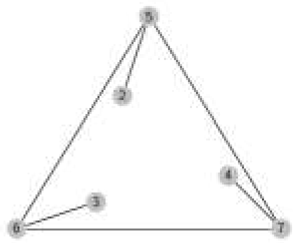
(c) Utiliza el algoritmo de Hierholzer para encontrar un recorrido euleriano en el grafo del apartado anterior.

Solución

(a) Esta sería una solución posible.



Dado que los vértices $2, 3$ y 4 tienen grado 2, las dos aristas que salen de cada uno de ellos tendrían que estar incluidas en cualquier ciclo hamiltoniano, en caso de existir. Esto obliga a pasar dos veces por el vértice central, por lo que no podemos tener un ciclo hamiltoniano.
Además, cumple todas las condiciones del teorema. La más difícil de comprobar es la tercera: tenemos que ver que si quitamos k vértices el número de componentes conexos es, como mucho, k. Los valores de k para los cuales debemos hacer la comprobación son 1, 2 i 3 (para k mayor no nos quedarían suficientes vértices para tener más de k componentes). Podemos ver que, si no eliminamos el vértice central, podemos eliminar hasta tres vértices sin que el grafo deje de ser conexo. Si, en cambio, eliminamos el vértice central, obtenemos el grafo siguiente:



Puede verse que eliminando un segundo vértice no pueden quedar más de dos componentes conexos (se obtienen dos si, por ejemplo, eliminamos el vértice 5). Si, además de eliminar el vértice central (véase figura), eliminamos dos vértices más, como máximo obtendremos tres componentes (se obtienen tres eliminando el 5 y el 6, por ejemplo).

(b) Eliminando los dos vértices de grado 4 quedan tres componentes conexos, cuando según una condición necesaria no deberían quedar más de dos.

(c) Si numeramos los vértices de manera que los de orden 4 sean el 1 y el 2, y los de orden 2 sean 3, 4 y 5, los pasos del algoritmo nos dan como una solución $\{1,4,2,5,1,2,3,1\}$:

Iteración	v	C'	C	A
0	1	–	$\{1\}$	$\{12,13,14,15,23,24,25\}$
1	1	$\{1,2,3,1\}$	$\{1,2,3,1\}$	$\{14,15,24,25\}$
2	1	$\{1,4,2,5,1\}$	$\{1,4,2,5,1,2,3,1\}$	$\emptyset$

Recuerda que la solución depende de que ciclo elijamos en cada paso.

78. La siguiente tabla representa el coste aproximado (en millones de euros) de conectar dos poblaciones con una carretera. El coste no es proporcional a la distancia, ya que hay diferentes patrocinadores que abaratan la obra dependiendo de que poblaciones se comuniquen:

	B	C	D	E	F
A	12	7	8	3	9
B		4	11	9	7
C			2	7	8
D				9	4
E					13

(a) ¿Cómo habría que hacerlo si queremos conectar las seis ciudades con el menor coste posible? ¿Cuál será este coste?

(b) Como no pueden hacerse todos los tramos a la vez por falta de presupuesto, se decide ir haciéndolos progresivamente, comenzando desde el punto F. ¿Qué tramos se harán, y en que orden? ¿Cuál será el coste en este caso?

(c) Si quisiéramos hacer un circuito que pasara por las seis ciudades y volviese al punto inicial, ¿podríamos usar el algoritmo TSP-aproximado? Justifica la respuesta.

Solución

(a) Si consideramos el grafo que tiene como vértices las diferentes ciudades, nos están pidiendo que calculemos un árbol generador minimal. Si aplicamos el algoritmo de Kruskal obtenemos las aristas: CD, AE, BC, DF, AC con un coste total de 20.

(b) Si aplicamos el algoritmo de Prim comenzando desde F obtenemos las aristas:
FD, DC, BC, CA, AE. El coste total también es 20.

(c) No, porque no se verifica la desigualdad triangular. Por ejemplo, $c(C,D) + c(D,F) < c(C,F)$, donde c representa el coste de conectar las dos ciudades.

79. Consideramos el siguiente conjunto de puntos sobre el plano:
$\{A = (0,5), B = (2,7), C = (5,7), D = (4,3), E = (8,3), F = (2,0)\}$.
La siguiente tabla nos da las distancias entre pares de puntos:

	B	C	D	E	F
A	$\sqrt{8}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{29}$
B		3	$\sqrt{20}$	$\sqrt{52}$	7
C			$\sqrt{17}$	5	$\sqrt{58}$
D				4	$\sqrt{13}$
E					$\sqrt{45}$

Queremos hacer un recorrido que pase por todos los puntos una sola vez y vuelva al punto inicial, y que tenga la menor longitud posible. Usando la teoría de grafos, responde las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué es lo que buscamos?

(b) Aplica el algoritmo adecuado para hallar una cota superior. Justifica que puede aplicarse. A partir de esta cota superior, obtén una cota inferior.

(c) Explica como calcularías una cota inferior de la longitud del recorrido aplicando un algoritmo diferente al del apartado anterior (no es necesario que hagas el cálculo, sólo que indiques el procedimiento).

Solución

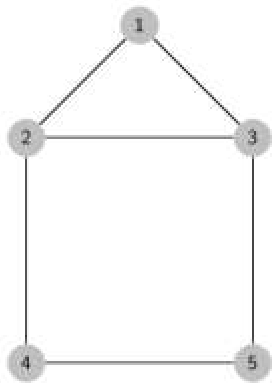
(a) Un ciclo hamiltoniano de peso mínimo, es decir, una solución al problema del TSP.

(b) Usamos TSP-aproximado, ya que se verifica la desigualdad triangular por ser puntos del plano euclídeo. Si aplicamos el algoritmo de Prim desde A obtenemos, en este orden, las aristas AB, BC, AD, DF y DE. El árbol en preorden queda $ABCDFE$. Entonces el ciclo es $ABCDFEA$, con longitud $\sqrt{8} + 3 + \sqrt{17} + \sqrt{13} + \sqrt{45} + \sqrt{68} = 26,68$, que es la cota superior. La cota inferior es la mitad, o sea, 13,34.

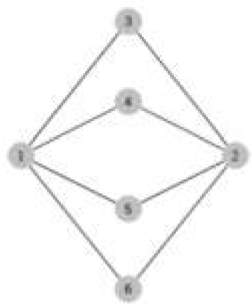
(c) Aplicaríamos el algoritmo de Kruskal, que nos da un árbol generador minimal, la longitud del cual es una cota inferior de la longitud buscada.

80. Considera los grafos G_1 y G_2 de la figura.

G_1



G_2



(a) Demuestra que G_1 es hamiltoniano pero no euleriano.

(b) Demuestra que G_2 es euleriano pero no hamiltoniano.

(c) Escribe G_2 como combinación de grafos elementales.

Solución

(a) Es hamiltoniano porque seleccionando todas las aristas excepto $(2, 3)$ obtenemos un ciclo hamiltoniano. No es euleriano porque hay vértices con grado impar.

(b) Es euleriano porque todos los vértices tienen grado par. No es hamiltoniano porque eliminando los dos vértices de grado 4 obtenemos más de dos componentes conexos. También podemos justificar que no es hamiltoniano porque un cicle hamiltoniano tendría que contener todas las aristas correspondientes a los vértices de grado 2, que son todas las del grafo, pasando entonces más de una vez por algunos vértices.

(c) $N_4 + N_2$, o bien $(K_4 U T_2)^C$.

81. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(a) Todo grafo hamiltoniano también es euleriano.

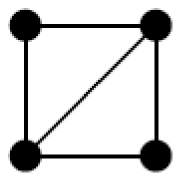
(b) Todo grafo euleriano contiene un recorrido euleriano.

(c) Un circuito euleriano contiene todos los vértices del grafo.

(d) Todo grafo 2-conexo es hamiltoniano.

Solución

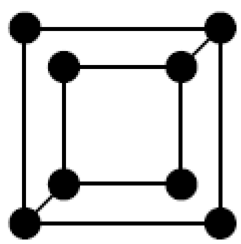
(a) Falso. Como prueba el siguiente contraejemplo,



(b) Falso. En un grafo euleriano todos los vértices tienen grado par. Si contiene un recorrido euleriano tendría que tener exactamente dos vértices de grado impar.

(c) Verdadero. Un circuito euleriano pasa por todas las aristas del grafo, por lo cual también tiene que pasar por todos los vértices.

(d) Falso. Como prueba el siguiente contraejemplo:



82. Considera el problema del viajante de comercio sobre el grafo definido por la tabla de pesos

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	–	8	2	6	2
v_2	8	–	10	2	–
v_3	2	10	–	–	8
v_4	6	2	–	–	2
v_5	2	–	8	2	–

(a) ¿Cuántas son las posibilidades que deberemos probar si quisiéramos resolver el problema exhaustivamente?

(b) Encuentra, de manera razonada, una aproximación a la solución óptima de este problema.

(c) ¿Por qué no podemos aplicar el algoritmo TSP-aproximado para encontrar una solución aproximada al problema?

Solución

(a) Si n es el orden del grafo, deberemos probar $\frac{(n-1)!}{2}$ posibilidades (aunque, como el grafo no es completo, algunas no corresponden a posibilidades reales). En nuestro caso, $\frac{4!}{2} = 12$.

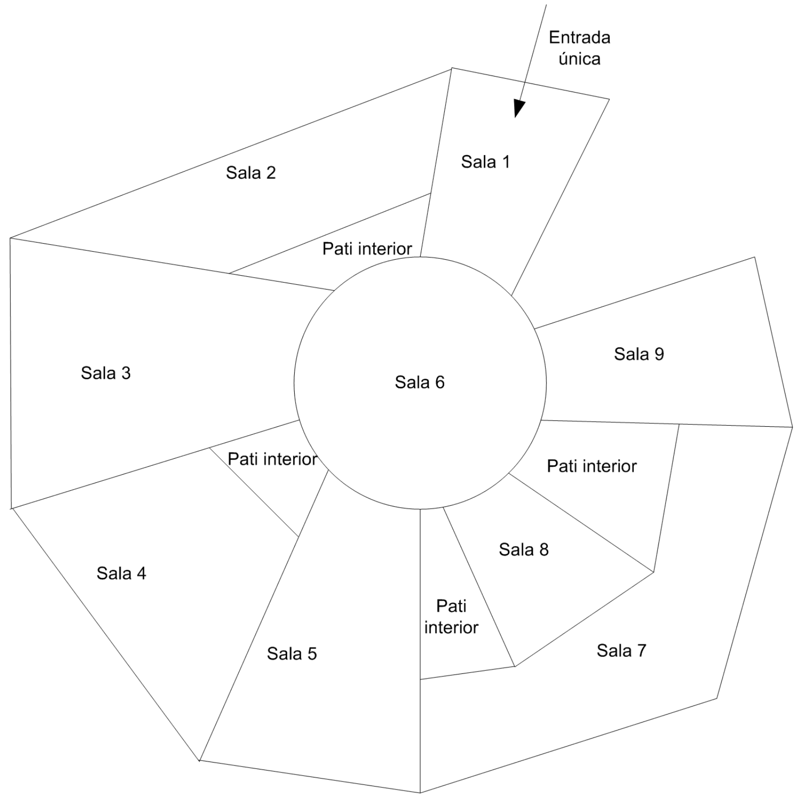
(b) Podemos aplicar el algoritmo de Kruskal o el de Prim para encontrar un árbol generador minimal del grafo. La tabla siguiente resume los pasos del algoritmo de Prim:

1	2	3	4	5
$(0,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$
$(0,1)^*$	$(8,1)$	$(2,1)$	$(6,1)$	$(2,1)$
$(0,1)$	$(8,1)$	$(2,1)^*$	$(6,1)$	$(2,1)$
$(0,1)$	$(8,1)$	$(2,1)$	$(2,5)$	$(2,1)^*$
$(0,1)$	$(2,4)$	$(2,1)$	$(2,5)^*$	$(2,1)$
$(0,1)$	$(2,4)^*$	$(2,1)$	$(2,5)$	$(2,1)$

De esta tabla se deduce que el ciclo hamiltoniano de peso mínimo deberá tener una longitud mínima de 8 .

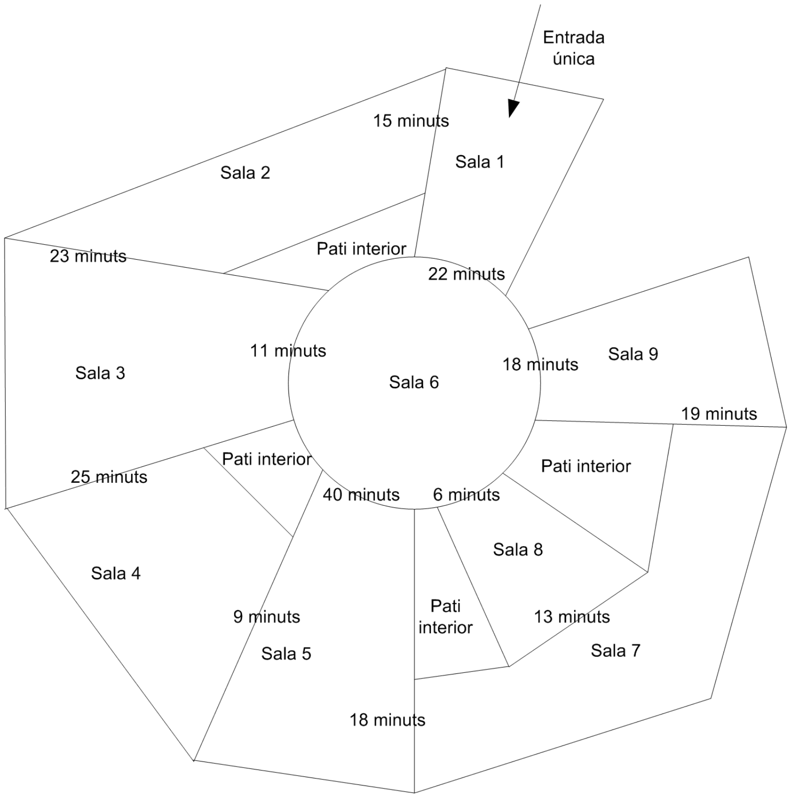
(c) En este caso no podemos utilizar el algoritmo TSP-aproximado porque el grafo no cumple la desigualdad triangular. Por ejemplo, $8 = w(v_3, v_5) > w(v_3, v_1) + w(v_1, v_5) = 4$.

83. Aprovechando el caos de la posguerra, una banda internacional de ladrones quiere asaltar el museo arqueológico de un país devastado por la guerra. Han conseguido un plano del museo, que es este:



(a) El primer plan consiste en entrar por la entrada y recorrer todas las salas vaciando todas las vitrinas, intentando no repetir el paso por ningún sala (para no perder tiempo). Hace falta tener en cuenta que los patios no son accesibles y que desde una sala se puede ir a cualquier otra sala adyacente. Formula este plan en términos de teoría de grafos y averigua si es posible llevarlo a cabo (también en términos de teoría de grafos)

(b) El jefe de esta banda de malhechores se entera que el museo dispone de un dispositivo que, cuando hay peligro, cierra automáticamente todas las puertas entre salas, excepto la puerta de entrada. Este plano reproduce el tiempo que tardarían en encontrar el código de apertura de cada una de las puertas (siempre que se pasa por una puerta, tanto para entrar como para salir con el botín, tardarían el tiempo indicado).



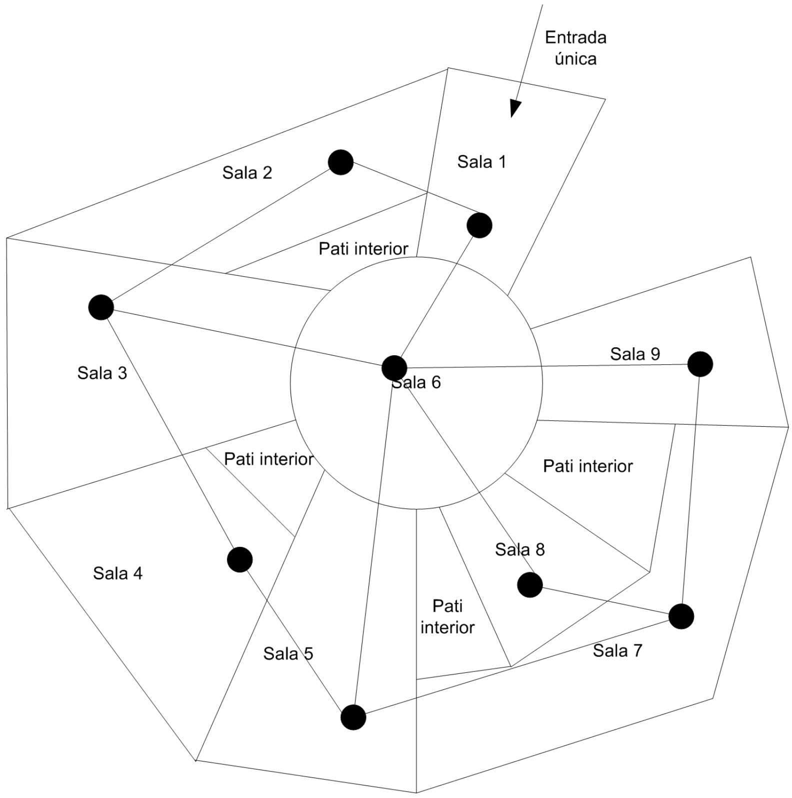
I. Indica, sin resolver, como se puede modelar el problema de asaltar el museo utilizando el menor tiempo posible en términos de la teoría de grafos. ¿Qué algoritmo utilizarías para solucionarlo?

II. ¿El problema cumple todas las condiciones para poder ser resuelto por este algoritmo?

III. Sabemos que la alarma del museo sonará cuando los ladrones entren al museo. La policía del país, que no tiene muchos recursos, tardará dos horas en llegar al museo tras saltar la alarma. ¿Conseguirán estos ladrones salir con el botín sin encontrarse con la policía? Utiliza recursos de teoría de grafos para contestar esta pregunta.

Solución

(a) Construyendo el grafo simple correspondiente a esta situación



hace falta ver si es hamiltoniano; es fácil comprobar que el grafo es bipartito, pero al tener orden impar no se puede dividir el conjunto de vértices en dos conjuntos con el mismo número de vértices. Por lo tanto, el proyecto de los malhechores no se puede llevar a término tal y como lo habían planificado.

(b) I. Se trata de intentar resolver el $TSP-aproximado$ utilizando el grafo anterior, con los pesos dados por el tiempo que se tarda en abrir las puertas. Pero como sabemos que el grafo no es completo, no se puede aplicar el $TSP-aproximado$. Deberemos transformar el grafo inicial con el algoritmo de Floyd, y así obtendríamos un grafo completo con las distancias mínimas entre vértices. Ahora, podríamos aplicar el algoritmo $TSP - aproximado$.

II. Si el grafo es el original, no, porque no cumple la desigualdad triangular: entre la sala 5 y 6, la puerta tarda en abrirse 40 minutos, pero yendo por las salas $5-7-8-6$, se tarda $18+13+6=37$ minutos.

En cambio, sí que se puede hacer si utilizamos el grafo resultante de aplicar el algoritmo de Floyd .

III. Afortunadamente, la policía siempre llegará a tiempo, porque es obvio que el mínimo de tiempo que tardará la banda al pasar todas las puertas es igual al peso del árbol generador minimal del grafo del apartado a. En este caso, el peso es de $6+9+11+13+15+18+18+22=112$ minutos. Cómo tendrán que recorrer alguna sala más para salir (recordamos que no es hamiltoniano), tardarán más de 120 minutos para salir.

Capítulo 6

Complejidad computacional

84. Dadas las siguientes fórmulas booleanas:

I $a \wedge ((b \wedge \bar{b}) \vee \bar{c})$

II $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

III $(a \wedge b \wedge c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

IV $a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

(a) Di cuáles son satisfactibles y cuáles no. Para cada una de las que lo son, da *todas* las asignaciones de variables que la satisfacen.

(b) Di qué fórmulas están en forma normal conjuntiva.

(c) ¿Qué fórmulas del enunciado podrían ser instancias del problema $3SAT$?

(d) Enuncia el problema $3SAT$ como un problema de optimitación (*Indicación:* considera como criterio a optimizar el número de cláusulas de la fórmula que se consigue satisfacer).

(e) En un conocido problema de matemática recreativa, hay que dejar a uno de los dos lados de un río a un lobo, una cabra y una lechuga. No podemos dejar en un mismo lado del río al lobo con la cabra, ni a la cabra con la lechuga (ya que el primero se comería al segundo). Escribe una fórmula en forma normal conjuntiva que se satisfaga si y sólo si se cumplen estas condiciones.

Solución

(a) I la satisfacen $\{a = 1, b = 0, c = 0\}$ y $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$.
II la satisfacen $\{a = 1, b = 0, c = 0\}$, $\{a = 1, b = 0, c = 1\}$, $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$ y $\{a = 1, b = 1, c = 1\}$.
III es insatisfactible.
IV la satisface solamente $\{a = 1, b = 1, c = 0\}$.

(b) II y IV.

(c) Sólo II.

(d) Dada una fórmula en FNC, con exactamente tres literales por cláusula, determinar el mayor número natural k tal que existe una asignación de las variables que hace ciertas k cláusulas.

(e) Si denotamos a las dos orillas del río A y B, la fórmula sería: .
$(\bar{l_A} \vee \bar{c_A}) \wedge (\bar{c_A} \vee \bar{e_A}) \wedge (\bar{l_B} \vee \bar{c_B}) \wedge (\bar{c_B} \vee \bar{e_B})$, donde l_A simboliza que el lobo está en A, y análogamente para el resto de variables.

85. Sean A, B y C tres problemas que verifiquen $A \leq_p B$ y $B \leq_p C$. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(a) $A \leq_p C$.

(b) Si $B \leq_p A$, entonces $A = B$.

(c) Si $C \leq_p A$, entonces A y C son polinómicamente equivalentes.

(d) Si $A \in NP$ y C es $NP - completo$, entonces B es $NP - completo$.

(e) Si $C \in P$, entonces $A \in P$.

(f) Si $A \in NP$, entonces $C \notin P$.

(g) $C \nleq_p A$.

Solución

(a) Verdadero, por la propiedad transitiva de las reducciones.

(b) Falso, $A \leq_p B$ y $B \leq_p A$ significa que A y B son polinómicamente equivalentes, no que sean iguales.

(c) Verdadero, como consecuencia del apartado (a) y de la reducción $C \leq_p A$ del enunciado.

(d) Falso, necesitaríamos tener $C \leq_p B$ y saber que B es NP.

(e) Verdadero, por las propiedades de las reducciones.

(f) Falso, $A \in NP$ no implica que $A \notin P$.

(g) Falso. El enunciado permitiría que A, B y C fuesen el mismo problema ($A = B = C$) y entonces tendríamos que $C \leq_p A$.

86. Sea A un problema de la clase NP. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(a) A no puede resolverse en tiempo polinómico.

(b) A puede resolverse en espacio polinómico.

(c) Si $A \leq_p B$, entonces B también pertenece a la clase NP.

(d) A es verificable en tiempo polinómico.

Solución

(a) Falso, ya que P está incluído en NP. Por lo tanto, todo problema de la clase P pertenece tanto a P como a NP.

(b) Verdadero, ya que la clase NP está incluída en la clase $PSPACE$.

(c) Falso. Sería cierto si la reducción fuese $B \leq_p A$.

(d) Verdadero, por definición de la clase NP.

Capítulo 7

Problemas intratables

87. Consideramos los dos problemes de decisión siguientes:
$CAMINO-HAM$: Dado un grafo $G=(V,A)$, y dos vértice u y v, determinar si existe un camino hamiltoniano de u a v en G.

$CAMINO-HAM-DIR$: Dado un grafo *dirigido* $G=(V,A)$, y dos vértices u y v, determinar si existe un camino hamiltoniano de u a v en G.

(a) Demuestra que el problema $CAMINO-HAM-DIR$ pertenece a NP.

(b) Queremos hacer la reducción de $CAMINO-HAM-DIR$ a $CAMINO-HAM$, es decir, $CAMINO-HAM-DIR \leq_p CAMINO-HAM$. Dado el grafo dirigido G, le asociamos el grafo no dirigido G' con los siguientes vértices: para cada vértice A de G diferente de u y v, tenemos tres vértices en G', a los que llamamos A_{entra}, A_{medio} y A_{sale}. En G' también tenemos u_{sale} i v_{entra}. Piensa que aristas debe tener G' para que la asignación que hace corresponder G' a G sea una función de reducción de $CAMINO-HAM-DIR$ a $CAMINO-HAM$, y demuestra que efectivamente es una reducción polinómica.

(c) Sabiendo que $CAMINO-HAM$ es $NP-completo$, ¿qué podemos afirmar sobre $CAMINO-HAM-DIR$? ¿Podría ser que $CAMINO-HAM-DIR$ perteneciese a P?

Solución

(a) Un testigo sería la lista de vértices consecutivos que forma el camino. Tenemos que comprobar que los vértices adyacentes en la lista lo son en el grafo ($O(n)$), que todos los vértices de la lista son diferentes ($O(n^2)$), y que están todos los vértices en la llista ($O(n)$). En conclusión, el algoritmo tiene complejidad $O(n^2)$. *Observación:* No es la manera óptima de hacerlo, pero nos es suficiente demostrar que el coste es polinómico.

(b) Para cada arco (A,B) de G, en G' ponemos una arista $\{A_{sale}, B_{entra}\}$. Para cada vértice A de G diferente de u y v, en G' ponemos una arista de

A_{entra} a A_{medio}, y de A_{medio} a A_{sale}.
Para ver que la asignación que hace corresponder G' a G es una función de reducción, tenemos que ver que G tiene un camino hamiltoniano si y sólo si lo tiene G'. Si hay un camino hamiltoniano $u, u_1, u_2, ..., v$ en G, entonces hay este camino hamiltoniano en G':
$u_{sale}, u_{1,entra}, u_{1,medio}, u_{1,sale}, u_{2,entra}, u_{2,medio}, u_{2,sale}, ..., v_{entra}$.
Por otro lado, todo camino hamiltoniano en G' ha de contener las aristas del tipo $\{A_{entra}, A_{medio}\}$ y $\{A_{medio}, A_{sale}\}$, ya que es la única manera de pasar por A_{medio}. El resto de aristas, que serán del tipo $\{A_{sale}, B_{entra}\}$, nos dan los arcos (A, B) de un camino hamiltoniano en G.

Falta ver que el coste de la reducción es polinómico: el grafo G' tiene 3 vértices y 2 aristas por cada vértice de G y 1 arista por cada arco. Por lo tanto, la medida de G' es lineal respecto a la medida de G. Por lo tanto la reducción $f : G \to G'$ tiene complejidad polinómica.

(c) A partir de la reducción del apartado anterior, sólo sabemos que $CAMINO-HAM-DIR$ está en NP. No podemos afirmar que sea NP-completo porque ello requeriría una reducción diferente a la que hemos llevado a cabo: $CAMINO-HAM \leq_p CAMINO-HAM-DIR$.

Sobre la pertenencia de $CAMINO-HAM-DIR$ a P no podemos decir nada.

88. Consideramos los dos problemas de decisión siguientes:

$CAMINO-CORTO$: Dado un grafo $G = (V, A)$, dos vértices u y v, y un número natural k, determinar si existe un camino de u a v de longitud igual o menor que k.

$CAMINO-LARGO$: Dado un grafo $G = (V, A)$, dos vértices u y v, y un número natural k, determinar si existe un camino de u a v de longitud igual o mayor que k.

(a) Demuestra que $CAMINO-CORTO \in P$, dando un algoritmo para resolverlo en tiempo polinómico.

(b) Demuestra que $CAMINO-LARGO \in NP$.

(c) Demuestra que si $CAMINO-LARGO \in P$, entonces el problema del camino hamiltoniano en grafos no dirigidos ($CAMINO-HAM$) también estaría en P.

Solución

(a) Un algoritmo para hacerlo sería: ejecutar el algoritmo de Dijsktra, dando u como vértice de partida. A partir del resultado, comprovar si $dist(u, v) \leq k$. Este algoritmo tiene complejidad $O(n^2)$.

(b) Un testigo sería la lista de vértices que forma el camino. Tenemos que comprobar que los vértices adyacentes en la lista lo son en el grafo ($O(n)$) y que todos los vértices de la lista son diferentes ($O(n^2)$ si se hacen comparaciones directas entre los elementos o $O(n)$ utilizando una tabla de dispersión). En conclusión, este algoritmo tiene complejidad polinómica y verifica las entradas de $CAMINO-LARGO$, demostrando por tanto que $CAMINO-LARGO \in NP$.

(c) Dado G, si aplicamos los algoritmos óptimos para los problemas $CAMINO-CORTO$ y $CAMINO-LARGO$, para u, v y k fijados, obtendremos que existe un camino de u a v de longitud exactamente k si y sólo si ambos algoritmos retornan el valor CIERTO. Y esto se haría en tiempo polinómico por hipótesis (aplicar dos algoritmos de coste polinómico consecutivamente tiene coste polinómico). Entonces, en el caso particular $k = n-1$, podemos determinar en tiempo polinómico si existe o no un camino de u a v de longitud exactamente $n-1$, donde n es el orden de G. Solamente debemos observar que esto es precisamente un camino hamiltoniano: un camino de longitud $n-1$.

89. Considera los dos problemas de decisión siguientes:

$HAM-CYCLE$: Dado un grafo de orden n, $G = (V, A)$, y un entero k, queremos determinar si existe un ciclo hamiltoniano en G.

$TSD2(k)$: Dado un grafo *completo* de orden n, $G = (V, A)$, con pesos en las aristas, queremos saber si G tiene un ciclo hamiltoniano de peso total inferior o igual a k.

(a) Demuestra que el problema de decisión $TSD2(k)$ pertenece a NP. Escribe el problema de optimización asociado a $TSD2(k)$.

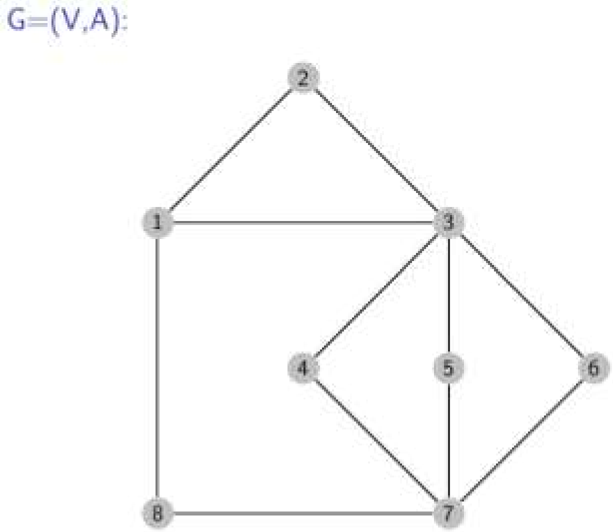
(b) Considera la función $f(G) = (G', k)$ que asocia a cada grafo $G = (V, A)$ el grafo completo $G' = (V, A')$, con los mismos vértices y con las aristas ponderadas siguientes:
- Si $(u, v) \in A$, entonces la arista (u, v) de A' tiene peso 1.
- Si $(u, v) \notin A$, entonces la arista (u, v) de A' tiene peso 2.
Queremos realizar la reducción $HAM-CYCLE \leq_p TSD2(k)$. Demuestra que para $k = n$ la función f es una función de reducción polinómica correcta. Justifica también si f es calculable en tiempo polinómico. *Indicación:* Dibuja un ejemplo para entender que grafo G' se asocia a G.

Solución

(a) Para probar que $TSD2(k)$ pertenece a NP, un testimonio sería una lista de aristas. Sólo es necesario comprobar que forman un ciclo, y que pasan por todos los vértices, lo que puede hacerse en tiempo lineal.
El problema de optimitzación asociado a $TSD2(k)$ seria: "Dado un grafo completo de orden n, $G = (V, A)$, con pesos en las aristas, queremos hallar el ciclo hamiltoniano de menor peso sobre G."

(b) El resultado de aplicar $TSD2(k)$ con $k = n$ sobre el grafo G' nos dará la respuesta a si hay un cicle hamiltoniano en G: si hay un ciclo hamiltoniano en G' con peso total inferior o igual a n, implica que se habrá obtenido recorriendo n aristas de valor 1, es decir, n aristas de G. Observad que si se usa una arista de G' de peso 2 es imposible tener un ciclo de peso inferior o igual a n. De la misma manera, si existe un ciclo hamiltoniano en G, necesariamente hay uno en G' de peso total menor o igual que n.
Por otro lado, la función definida se puede calcular en tiempo polinómico. Si, por ejemplo, las aristas vienen dadas por una matriz de adyacencias A, sólo es necesario cambiar los ceros por doses, y obtendremos la matriz de adyacencias de G' en tiempo $O(n^2)$.

90. Sean los dos problemas de decisión siguientes:
$INDEPENDENT-SET$: Dado un grafo $G = (V, A)$ de orden n y un entero k, queremos determinar si existe un conjunto independiente de medida superior o igual a k en G. (Recordad que un *conjunto independiente* es un conjunto de vértices tal que no hay ninguna arista de G que una dos vértices del conjunto).
$VERTEX-COVER$: Dado un grafo $G = (V, A)$ de orden n y un entero k, queremos saber si G tiene un recubrimiento de vértices de medida inferior o igual a k. (Recordad que un *recubrimiento de vértices* es un conjunto de vértices tales que toda arista de G, (u, v), verifica que al menos uno de los dos vértices, u o v, pertenece al conjunto).



(a) Marca sobre el grafo de la figura un recubrimiento de vértices de G formado por 3 vértices. Comprueba que el complementario de este subconjunto de vértices forma un conjunto independiente.

(b) Demuestra que, para cualquier grafo, el complementario de un recubrimiento de vértices forma un conjunto independiente y que, recíprocamente, el complementario de un conjunto independiente es un recubrimiento de vértices.

(c) Usa el resultado anterior para dar una función de reducción que permita demostrar que $VERTEX - COVER \leq_p INDEPENDENT - SET$.

Solución

(a) El subconjunto de aristas $B = \{1, 3, 7\}$ es un recubrimiento de vértices. Su complementario es $B^C = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, que es, efectivamente, un conjunto independente.

(b) Sea B un recubrimiento de vértices. Si B^C no fuese un conjunto independiente existiría una arista que uniría dos vértices de B^C. Entonces tendríamos una arista sin ninguno de sus dos extremos en B y, por lo tanto, B no seria un recubrimiento de vértices. Recíprocamente, si tenemos un conjunto independiente B, el complementario B^C debe ser un recubrimiento de vértices: si tuviésemos una arista (u, v) tal que ni u ni v perteneciesen a B^C entonces (u, v) sería una arista que uniría dos vértices de B, contradiciendo que B es un conjunto independiente.

(c) La función que necesitamos simplemente calcula $n - k$. Esto se hace en tiempo constante. Por lo que hemos observado en el apartado anterior, si $INDEPENDENT - SET$ con parámetro $n - k$ tiene solución, entonces $VERTEX - COVER$ con parámetro k (sobre el mismo grafo) también tiene.