Espai grapa

Universitat Oberta de Catalunya

Examen 2019/20-1

Asignatura	Código	Fecha	Hora inicio
Matemáticas II	81.507	18/01/2020	09:00

81.507 18 01 20 EX

Espacio para la etiqueta identificativa con el código personal del **estudiante**.
Examen

Ficha técnica del examen

- Comprueba que el código y el nombre de la asignatura corresponden a la asignatura matriculada.
- Debes pegar una sola etiqueta de estudiante en el espacio correspondiente de esta hoja.
- No se puede añadir hojas adicionales, ni realizar el examen en lápiz o rotulador grueso.
- Tiempo total: **2:30 horas** Valor de cada pregunta: **25%**
- En el caso de que los estudiantes puedan consultar algún material durante el examen, ¿cuáles son?: **NINGUNO**
- En el caso de poder usar calculadora, de que tipo? **NO PROGRAMABLE**
- En el caso de que haya preguntas tipo test: ¿descuentan las respuestas erróneas? **NO** ¿Cuánto?
- Indicaciones específicas para la realización de este examen

LAS RESPUESTAS DEBEN JUSTIFICARSE. NO SE VALORARÁ SI SOLO SE DA EL RESULTADO FINAL

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	18/01/2020	09:00

Enunciados

Problema 1.
Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{\exp(x^2)}{x}$$

(a) **[5 puntos]** Calcular el dominio.

(b) **[5 puntos]** Calcular las asíntotas horizontales y verticales.

(c) **[10 puntos]** Calcular la función derivada $f'(x)$ y expresarla de la forma más simplificada posible.

(d) **[5 puntos]** Calcular los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función es paralela al eje de abcisas.

Solución

(a) La función $f(x)$ es un cociente de la función exponencial elevada a un polinomio que es una función continua en todo $\mathbb{R}$ entre un polinomio. Por lo tanto, el dominio será todo el conjunto de números reales a excepción de aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$$

(b) Las asíntotas verticales se podrán dar en $x = 0$ puesto que en este punto la función podría tender a infinito. Si calculamos los límites obtenemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{1}{0} = \infty \quad (+\infty \text{ si } x \to 0^+ \;\; , \;\; -\infty \text{ si } x \to 0^-).$$

Por lo tanto, en $x = 0$ tenemos una asíntota vertical.

Para saber si tenemos asíntotas horizontales, estudiaremos el comportamiento de la función en el infinito. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{IND} \quad \text{(aplicamos la Regla de l'Hopital)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{1} = (+\infty)(+\infty) = +\infty \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{+\infty}{-\infty} = \text{IND} \quad \text{(aplicamos la Regla de l'Hopital)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2xe^{x^2}}{1} = (-\infty)(+\infty) = -\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función no tiene asíntotas horizontales.

$$\boxed{\text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0}$$

(c) Tenemos que calcular la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}x - e^{x^2}}{x^2} = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2}}{x^2}.$$

Por lo tanto, la función derivada es de la forma mas simplificada posible:

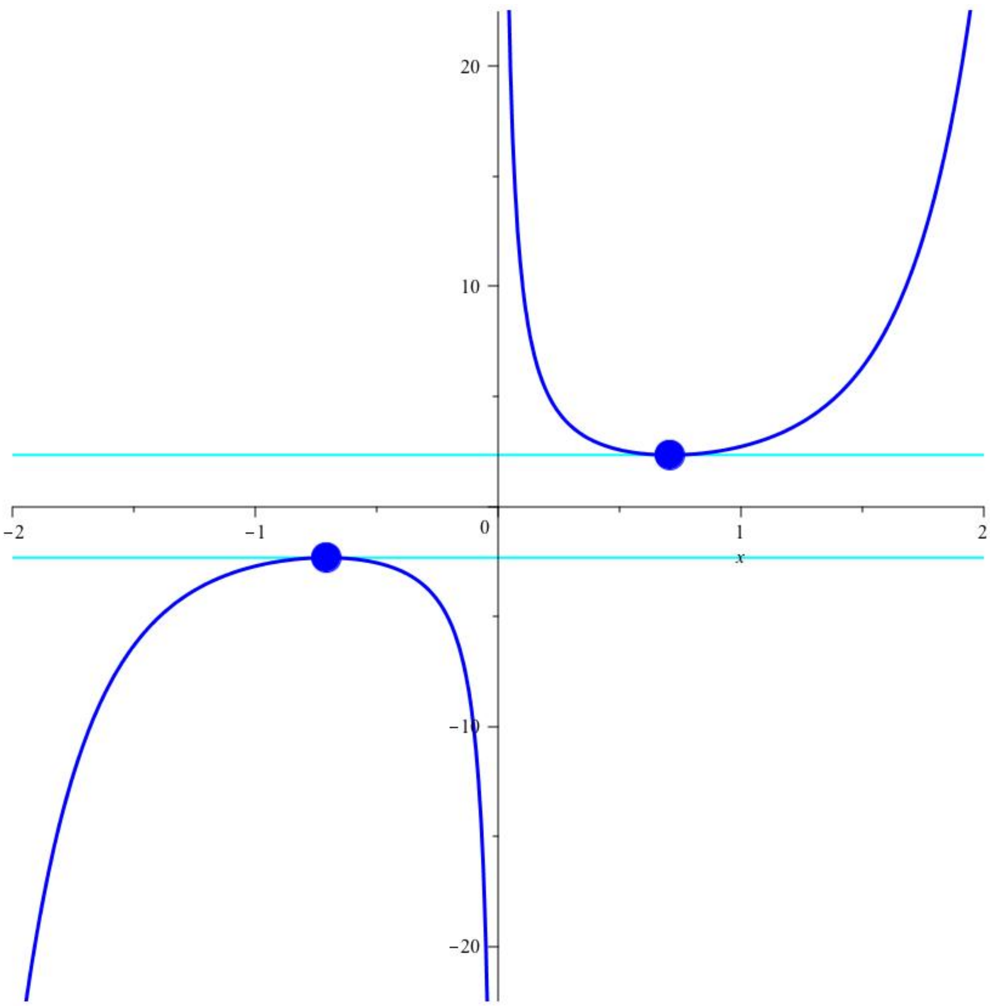
$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2} e^{x^2} = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2}}$$

(d) Los puntos donde la recta tangente es paralela al eje de abscisas, son los puntos donde la recta tangente te pendiente 0. Cómo que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en este punto, tenemos que buscar los puntos de derivada cero. En este caso

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2} e^{x^2} = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1/2 \iff x = \pm 1/\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\text{La recta tangente es paralela al eje de abscisas en los dos puntos } \left(\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}e^{1/2}\right)}$$

A continuación se muestra la gráfica de la función donde se confirman los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	18/01/2020	09:00

Problema 2.

(a) **[10 puntos]** Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x-2}dx$.

(b) **[15 puntos]** Haz un dibujo aproximado del área comprendida entre la recta $y=2$ y la curva $y=x^4+1$ y calcula su valor.

Solución

(a) El grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, así, tenemos que dividir los polinomios:

$$\begin{array}{rl} x^2+x & \underline{|x-2} \\ \underline{x^2-2x} & x+3 \\ 3x & \\ \underline{3x-6} & \\ 6 & \end{array}$$

Entonces, tenemos que $x^2+x=(x-2)(x+3)+6$ y, podemos calcular la integral:

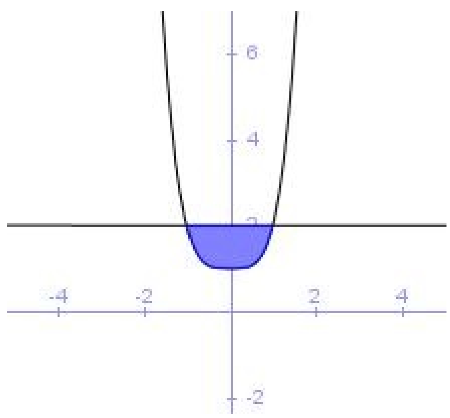
$$\int \frac{x^2+x}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x+3)+6}{x-2}dx = \int \left(x+3+\frac{6}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+3x+6\ln|x-2|+C$$

(b) Calculamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$x^4+1=2 \to x^4=1 \to x=\pm 1$$

así, expresamos el área de la región como la integral definida de la diferencia:

$$\int_{-1}^{1} 2-\left(x^4+1\right)dx = \int_{-1}^{1} 1-x^4dx = \left[x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 1-\frac{1}{5}-\left(-1+\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}$$



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	18/01/2020	09:00

Problema 3.

(a) **[15 puntos]** Calcular la antitransformada de Laplace de la función siguiente:

$$F(s) = \frac{2\,s^2 - 3\,s + 2}{(s-3)\,(s^2+2)}$$

(b) **[10 puntos]** Considerar el problema de valor inicial siguiente:

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(0) = 0$$

Justificar cual de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x, \\ y_2(x) &= -x, \\ y_3(x) &= x^2, \end{aligned}$$

NO es solución del problema de valor inicial.

INDICACIÓN:
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ y $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

Solución

(a) Para calcular el antitransformada de Laplace de la función $F(s)$ hay que expresar $F(s)$ como suma de fracciones simples. En este caso,

$$F(s) = \frac{2s^2 - 3s + 2}{(s-3)(s^2+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{Bs + C}{s^2+2} = \frac{A(s^2+2) + (Bs+C)(s-3)}{(s-3)(s^2+2)}$$

Cómo los numeradores tienen que ser iguales, lo tienen que ser para cualquier valor de la variable s

$$2s^2 - 3s + 2 = A(s^2+2) + (Bs+C)(s-3) \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De este modo, escogiendo tres valores de s podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. En efecto,

$$\begin{aligned} s = 3 &\;\Leftrightarrow\; 11 = 11A \;\Leftrightarrow\; A = 1 \\ s = 0 &\;\Leftrightarrow\; 2 = 2A - 3C \;\Leftrightarrow\; C = (2A-2)/3 = 0 \\ s = 1 &\;\Leftrightarrow\; 1 = 3A - 2(B+C) \;\Leftrightarrow\; B = (3A-1)/2 = 1 \end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = 1, \; B = 1, \; C = 0$$

Por lo tanto,

$$F(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2+2}$$

de forma que:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} = e^{3t} + \cos(\sqrt{2}t).$$

(b) Las tres funciones pueden ser solución del problema de valor inicial ya que las tres satisfacen la condición inicial

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que mirar en los tres casos si las funciones dadas satisfacen la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} &y_1(x) = x, \; y_1'(x) = 1 \;\Rightarrow\; xy_1' - y_1 = x - x = 0 \qquad \text{cert} \\ &y_2(x) = -x, \; y_2'(x) = -1 \;\Rightarrow\; xy_2' - y_2 = -x + x = 0 \qquad \text{cert} \\ &y_3(x) = x^2, \; y_3'(x) = 2x \;\Rightarrow\; xy_3' - y_3 = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \qquad \text{fals} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_1(x)$ y si $y_2(x)$ que son solución del problema de valor inicial, mientras que $y_3(x)$ no.

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	18/01/2020	09:00

Problema 4. Considerar la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(8+x^3)^4}$$

(a) **[10 puntos]** Encontrar una primitiva de $f(x)$ usando el cambio de variable $t = 8 + x^3$.

(b) **[5 puntos]** Indicar cuales de las siguientes integrales son impropias, justificando la respuesta:

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-2}^{\infty} f(x)\,dx$$

(c) **[10 puntos]** Estudiar cuales de las integrales impropias son convergentes.

Solución

(a) El cambio de variable $t = 8 + x^3$ implica que $dt = 3x^2 dx$. Vemos que en la función está el término x^2, por lo tanto, haremos la sustitución $x^2 dx = dt/3$:

$$\int \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx = \int \frac{1}{t^4}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{-4}\, dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{9t^3} + C.$$

Finalmente, deshacemos el cambio $t = 8 + x^3$ y elegimos, por ejemplo, $C = 0$:

$$\int \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx = -\frac{1}{9(8+x^3)^3}.$$

(b) La primera integral es sobre un intervalo finito, pero la función no está bien definida en el punto $x = -2$ porque tiene $8 + x^3$ en el denominador y se anula en $x = -2$, por lo tanto es una integral impropia.

La segunda integral es sobre un intervalo infinito, por lo tanto también es una integral impropia.

Finalmente, la tercera integral es impropia por dos razones: el límite de integración superior es infinito y, además, la función no está definida en el lÃmite inferior.

(c) Para estudiar la converencia de las tres integrales, usaremos la primitiva calculada en el primer apartado.

Para la primera integral, tenemos que calcular el límite siguiente:

$$\lim_{a\to -2^+}\int_a^0 \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx = \lim_{a\to -2^+}\left[-\frac{1}{9(8+x^3)^3}\right]_a^0 = -\frac{1}{4608} + \lim_{a\to -2^+}\frac{1}{9(8+a^3)^3} = +\infty$$

por lo tanto, **la integral no es convergente**.

Para la segunda integral, tenemos que calcular el límite siguiente:

$$\lim_{b\to +\infty}\int_0^b \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx = \lim_{b\to +\infty}\left[-\frac{1}{9(8+x^3)^3}\right]_0^b = -\lim_{b\to +\infty}\frac{1}{9(8+b^3)^3} + \frac{1}{4608} = 0 + \frac{1}{4608} = \frac{1}{4608}$$

por lo tanto, **la integral es convergente**.

La última integral tiene que separarse en dos partes por un punto donde la función esté bien definida y estudiar por separado cada integral. Aprovecharemos las integrales que acabamos de calcular:

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(8+x^3)^4}\, dx$$

Puesto que una de ellas ya hemos visto que no era convergente, llegamos a la conclusión que, **la tercera integral es divergente**.