PEC3

Presentación

Esta PEC profundiza en el concepto de complejidad computacional que cubre los contenidos estudiados en los módulos 6 y 7 de la asignatura. Los ejercicios trabajan los conceptos de medida de complejidad, la reducción y completitud, la clase NP-completo y algunos de los problemas intratables más importantes que se conocen.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado en Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Entender los conceptos de intratabilidad y no-determinismo.
- Conocer las diferentes clases de complejidad y saber clasificar los problemas en cada una de estas.
- Entender el concepto de reducción entre problemas y saber demostrar cuando un problema es NP-completo.
- Reconocer problemas intratables que aparecen de forma habitual en informática y en ingeniería.
- Entender y saber aplicar las técnicas básicas de reducción polinómica de los problemas NP-completos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %) Sea la siguiente definición:
La **clase** NP es el conjunto de todos los problemas verificadores en tiempo polinómico. Utilizando esta definición de los problemas NP, demostrar que los siguientes conjuntos pertenecen a NP, indicando cuál es el testimonio y cuál es el procedimento que comprueba el resultado del testimonio en tiempo polinómico.

   a) CLIQUE.
   b) HAMILTONIANO.
   c) MOCHILA.

Solución: Para demostrar que CLIQUE, HAMILTONIANO y MOCHILA pertenecen a NP utilizando la definición propuesta, hemos de demostrar que sus verificadores estan en P.

a) VCLIQUE $= \{\langle G, c\rangle | G$ es un grafo y c un CLIQUE$\rangle$. En este caso el programa tendría que hacer un recorrido por los nodos que están dentro de c y comprobar que todos los nodos de c están conectados entre si. Este programa se ejecutaría en tiempo polinómico (para cada nodo, comparar si está conectado con los otros c, tendría coste cuadrático).

b) VHAMILTONIANO $= \{\langle G, h\rangle | G$ es un grafo y h un circuito hamiltoniano$\}$. En este caso el programa tendría que comprobar que el circuito contiene todos los nodos del grafo G sin repetir ninguno, y que cada nodo del circuito está conectado con el siguiente y el primero con el último.

c) VMOCHILA $= \{\langle V, T, m\rangle | V$ es un vector de enteros, T un escalar y $m \subseteq V$ tal que $\sum_{x\in m} x = T\}$. En este caso solo tenemos que hacer un recorrido del vector m y verificar si la suma de todos sus valores es igual a T.

---

2. (Valoración de un 20 %)
Consideremos los siguientes problemas decisionales:

   - $A \in P$.
   - $B \in NP$.
   - $C \in NP$-Completo.
   - $D \in NP$-Difícil.

   Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar brevemente la respuesta:

   a) La reducción $A \leq_p B$ es posible sean cuales sean los problemas A y B.
   b) La reducción $A \leq_p C$ es posible sean cuales sean los problemas A y C.
   c) La reducción $B \leq_p C$ es posible sean cuales sean los problemas B y C.
   d) La reducción $C \leq_p D$ es posible sean cuales sean los problemas C y D.

Solución: Para resolver este ejercicio utilizaremos lo siguiente: todo problema en P se puede reducir mediante una reducción $\leq_p$ a un problema NP. Para hacerlo podemos resolver el problema de P en tiempo polinómico y en caso de tener como resultado Cierto devolveremos un resultado válido del problema NP y en otros casos devolveremos un resultado inválido.

a) La reducción $A \leq_p B$ es posible sean cuales sean los problemas A y B. Cierto, utilizando el razonamineto de antes.

b) La reducción $A \leq_p C$ es posible sean cuales sean los problemas A y C. Cierto, utilizando el razonamineto de antes y teniendo en cuenta que todo problema NP se puede reducir por definición a un problema NP-Completo.

c) La reducción $B \leq_p C$ es posible sean cuales sean los problemas B y C. Cierto, por definición de NP-Completo.

d) La reducción $C \leq_p D$ es posible sean cuales sean los problemas C y D. Cierto, por definición de NP-Difícil ya que un problema NP-Completo es NP y un problema es NP-Difícil si todo problema se puede reducir a él.

---

3. (Valoración de un 20 %)

Un grafo etiquetado es un grafo donde los vértices pueden tener asociada información adicional (que se conoce como *etiqueta*). Por ejemplo, si un grafo representa una red viaria, la etiqueta de cada vértice puede ser el nombre de una ciudad.

Un grafo etiquetado es una tupla $G =< V, E, L_v, F_v >$, donde

- V es el conjunto de nodos del grafo.
- E es el conjunto de aristas.
- L_v es el conjunt de etiquetas de los nodos.
- F_v es una función $V \rightarrow L_v$ que asigna una etiqueta a cada vértice.

La definición del isomorfismo de subgrafos etiquetados:

Instancia: dos grafos $G =< V_1, E_1, L_1, F_1 >$ y $H =< V_2, E_2, L_2, F_2 >$.

Pregunta: contiene G un subgrafo isomorfo a H, o sea, un subconjunto $V \subseteq V_1$ y un subconjunto $E \subseteq E_1$ tal que $|V| = |V_2|$, $|E| = |E_2|$ y tal que existe una funció biyectiva $f : V_2 \rightarrow V$ tal que $\{u, v\} \in E_2$ si y solo si $\{f(u), f(v)\} \in E$ y $F_1(u) = F_2(f(u))$ y $F_1(v) = F_2(f(v))$.

En el ejemplo de la Figura 1 se muestran dos grafos en los cuales existe el isomorfismo de subgrafos con los vértices 2 y 3 del grafo grande, ya que podemos hacer el mapeo $\{(2, 1), (3, 2)\}$. En este caso es una condición imprescindible que las etiquetas coincidan, com es el caso, ya que la etiqueta del vértice 2 del grafo grande es A, la misma que la del vértice 1 del pequeño. La etiqueta del vértice 3 del grande es B, la misma que la del vértice 2 del pequeño. Si cogieramos el subconjunto $\{1, 2\} \subseteq V$ veríamos que no puede haber ningun isomorfismo ya que las etiquetas no coincidirían.

De acuerdo con esto, decir qué complejidad tiene el problema de isomorfismo de subgrafos etiquetados en cada una de las siguientes restricciones adicionales:

a) Las etiquetas de los nodos del grafo no se pueden repetir ni en el grafo grande ni en el pequeño.

b) No hay ninguna restricción sobre el número de veces que se utiliza una etiqueta en ninguno de los dos grafos.

Solución:

a) Es polinómico. Tengamos en cuenta lo siguiente: hace falta que encontremos una biyección entre los vértices del grafo pequeño y un subconjunto de vértices del grafo grande. De todas maneras, y como estamos en el caso del grafo etiquetado, para que haya isomorfismo, hará falta también que las etiquetas coincidan. Por lo tanto, podemos hacer lo siguiente: para cada vértice del grafo pequeño, miramos todos los vértices del grafo grande que tienen la misma etiqueta. En este caso, y debido a la limitación que impone el enunciado, solo tenemos uno (o ninguno) que cumpla esta característica. Si no hay ninguno, entonces no hay ningun grafo isomorfo en el grafo grande. Esto lo hacemos para todos los vértices del grafo pequeño. De esta manera, ya tenemos un candidato para la biyección (y

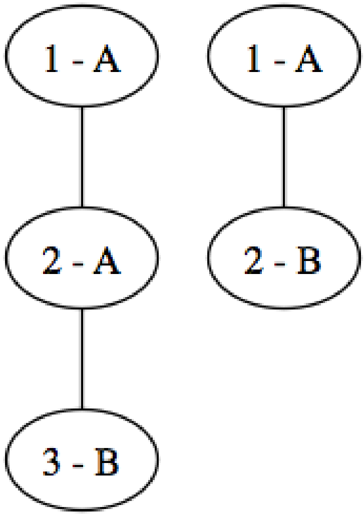

Figura 1: Ejemplo de isomorfismo de subgrafos etiquetado.

de manera implícita, también el único posible subconjunto, si es que existe). Fijémonos en que solo podemos tener una sola biyección candidata (o ninguna). Esto se puede hacer en un tiempo $|V| \times |V'|$, donde $|V|$ es la medida del grafo pequeño y $|V'|$ es la medida del grafo grande. Ahora solo hace falta comprobar que la biyección (si existe) es un isomorfismo, y esto se hace en tiempo polinómico respecto al número de aristas del grafo pequeño. En total, es polinómico.

b) Es exponencial. En el caso más complicado, tenemos que todos los vértices tanto en el grafo grande como en el pequeño, pueden tener la misma etiqueta, en cuyo caso nos encontramos en el problema clásico del isomorfismo de grafos.

---

4. (Valoración de un 20 %)

Decir si es posible tener una función de reducción y, en caso afirmativo, dar la función de reducción en cada uno de los siguientes casos:

a) $\emptyset \leq_p \mathsf{PARES}$.

b) $\mathsf{IMPARES} \leq_p \emptyset$.

c) $\mathsf{PARES} \leq_p \mathsf{IMPARES}$.

d) $\mathsf{SAT} \leq_p \mathsf{DOBLE-SAT}$ donde $\mathsf{DOBLE-SAT} = \{\langle\Phi\rangle \mid \Phi$ tiene al menos 2 asignaciones que la satisfacen$\}$.

Solución:

a) La función $f(x) = 1$ permite la reducción $\emptyset \leq_p \mathsf{PARES}$, ya que no existe ningun x que esté en $\emptyset$. Si $f(x) \in \mathsf{PARES} \rightarrow x \in \emptyset$. También se cumple ya que no hay ningún x tal que $f(x)$ sea par.

b) No es posible la reducción. La imagen de los números que pertenecen a $\mathsf{IMPARES}$ tendría que ser un número de $\emptyset$, pero esto no es posible, ya que no hay ningún número que pertenezca a $\emptyset$.

c) La función $f(x) = x + 1$ permite la reducción $\mathsf{PARES} \leq_p \mathsf{IMPARES}$. Si $x \in \mathsf{PARES}$ entonces $f(x) \in \mathsf{IMPARES}$, y si $x \notin \mathsf{PARES}$ entonces $f(x) \notin \mathsf{IMPARES}$

d) La función $f(\Phi) = \Phi \wedge (z \vee \neg z)$, donde z es una variable que no aparece en Φ es una función de reducción de $\mathsf{SAT} \leq_p \mathsf{DOBLE} - \mathsf{SAT}$. Si hay una asignación que satisface la fórmula original, entonces hay dos que satisfacen la nueva fórmula (una con $z =$ Falso y la otra con $z =$ Cierto)

Todas las funciones tienen un coste polinómico.

5. (Valoración de un 20 %)

La compañía propietaria de una red eléctrica tiene que realizar trabajos de mantenimiento de la red eléctrica. La red está formada por un conjunto de N centrales, donde cada par de centrales puede estar conectada o no por una línia de alta tensión. Las tareas de actualització se tienen que hacer a nivel de central, y no es necesario actuar en todas. La actualització se da por válida cuando por cada línia de alta tensión, se ha actualizado una de las dos centrales conectadas por la línea. Para reducir costes, la compañía quiere minimizar el número de centrales donde tiene que hacer una actuación.

a) Indicar qué problema NP-Completo esta intentando resolver esta compañía eléctrica.

b) Indicar si el problema continua siendo NP-Completo cunado la red eléctrica se puede representar mediante:

1) Un grafo K_n.
2) Un grafo C_c.
3) Un grafo T_n.
4) Un grafo E_n.
5) Un grafo R_n.

Solución:

a) Este problema es $\mathsf{VERTEX\_COVER}$, en su versión de cálculo. Ya sabemos que la entrada de un problema $\mathsf{VERTEX\_COVER}$ es un grafo $G = (V, A)$ y la salida es un subconjunto de V, por ejemplo S, tal que: $S \subseteq V \wedge \forall \langle a, b\rangle \in A : a \in S \vee b \in S$ (o sea, como mínimo uno de los dos nodos de cada arista del grafo aparece en S). Nos piden que encontremos el conjunto S más pequeño posible, en lugar de decidir si sería posible encontrar uno de una medida más pequeña que k, como pasa en la versión decisional.

b) En todos los tipos de grafos propuestos el problema se puede resolver con un coste polinómico.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 6. Complejidad computacional.
- Módulo didáctico 7. Problemas intratables.
- Colección de problemas

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlace: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se debe resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta en cada uno de los apartados. Se valorará tanto la corrección de la respuesta como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Se debe entregar **un único documento** PDF con las respuestes de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC3_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 28/05/2014**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**