Presentación

En este documento se detallan las instrucciones para la realización de la PEC 2 así como el enunciado y la resolución de la actividad.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis y de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer la utilidad y saber operar con matrices.
- Conocer la utilidad y saber operar con determinantes.
- Conocer y aplicar las técnicas básicas de discusión, resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la teoría de matrices y determinantes.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC 2 se trabajarán las matrices, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales. En particular, se pondrá énfasis en saber operar tanto con matrices como con determinantes y en la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales y en su discusión y resolución.

Recursos

Recursos Básicos

- El módulo 2 (apartados 3, 4 -hasta el 4.5- y 5) y el módulo 3 en pdf editados por la UOC.
- La calculadora CalcMe.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic guide uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927
- El aula Laboratorio CalcME.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales. A este valor se le añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0-3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3-5)$: Suspenso alto (C-)

- $[5-7)$: Aprobado (C+)
- $[7-9)$: Notable (B)
- $[9,10]$: Excelente (A)

- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.

- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, ésta no se guardará para otros semestres.

- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.

- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.

- Es necesario resolver el cuestionario Moodle que complementa esta PEC.

- Del cuestionario pueden realizarse 5 intentos. La nota del cuestionario es la máxima puntuación obtenida en los 5 intentos.

- En la realización de la PEC, se valorará:
  - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta *PEC2-evaluación*.

- La PEC se debe escribir usando un editor de texto (latex, libreoffice, word,...) y entregar en formato PDF. El nombre del fichero deberá ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.

- **Dentro del documento de la PEC debéis escribir, en la primera página, vuestro nombre y apellidos y vuestro IDP completo.**
- Recordad que es necesario justificar las respuestas.
- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/
- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados.
- Recordad que **el límite de entrega de la PEC 2 son las 23.59h del día 02/11/2020**

1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a-2 & a-2 & 2-a \\ 2a-8 & 4-a & a-4 \\ a-6 & 2a-12 & a-6 \end{pmatrix}$

   Sustituid el parámetro "a" de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

   a) (Valoración de un 10 %) Determinad, de manera razonada, su rango.

   b) (Valoración de un 15 %) Utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius, razonad si el sistema de ecuaciones lineales que tiene esta matriz como matriz ampliada es un SCD, o un SCI o bien un SI.

Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de "a", de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro "a" por tu valor.

a) Dado que la matriz M es cuadrada de orden 3, estudiamos su rango utilizando que el rango es 3, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.5, páginas de la 29 a la 32].

$$|M| = \begin{vmatrix} a-2 & a-2 & 2-a \\ 2a-8 & 4-a & a-4 \\ a-6 & 2a-12 & a-6 \end{vmatrix} = -9a^3 + 108a^2 - 396a + 432 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \\ a = 6 \end{cases}$$

En consecuencia

- Si $a \neq 2$ y $a \neq 4$ y $a \neq 6 \quad \rightarrow \boxed{\text{rang}(M) = 3}$.
- Si $a = 2$, entonces $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$.
- Si $a = 4$, entonces $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.
- Si $a = 6$, entonces $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$.

b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, el sistema asociado es:

$$\left.\begin{array}{r} (a-2)\,x+(a-2)y=2-a \\ (2a-8)x+(4-a)y=a-4 \\ (a-6)x+(2a-12)\,y=a-6 \end{array}\right\}$$

Observamos que el sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, así pues, siempre que el rango de la matriz ampliada M sea 3, el sistema será incompatible, puesto que la matriz de los coeficientes del sistema, A, no puede tener rango 3, puesto que solo tiene 2 columnas.

En consecuencia, utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12]:

- Si $a \neq 2$, $a \neq 4$ y $a \neq 6$, entonces $\boxed{\text{Sistema Incompatible}}$, ya que rango$(A) \neq$ rango(M) .
- Si $a = 2$, entonces, por el apartado anterior, rango$(M) = 2$. Calculamos, para $a = 2$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}\,(A) = 2\,, \text{ ya que } \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que rango$(A) = 2 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas.
- Si $a = 4$, entonces, por el apartado anterior, rango$(M) = 2$. Calculamos, para $a = 4$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}\,(A) = 2\,, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que rango$(A) = 2 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas.
- Si $a = 6$, entonces, por el apartado anterior, rango$(M) = 2$. Calculamos, para $a = 6$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}\,(A) = 2\,, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que rango$(A) = 2 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x + ay - \ z = & a^2 + a \\ (a-1)\,x - 2y + 3z = & a^2 + 3a - 4 \\ 2x + \ y - az = & -2a^2 + 3a + 2 \\ 5x + 2y - 4z = & -a + 4 \end{array}\right\}$$

(Valoración de un 25 %) Sustituid el parámetro "a" por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC y, utilizando el método de Gauss, calculad la solución del sistema detallando todas las operaciones que hagais para ir transformando la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada inferior y las posteriores operaciones para finalizar con la obtención de la solución.

Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de "a", de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro "a" por tu valor.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ a-1 & -2 & 3 & a^2+3a-4 \\ 2 & 1 & -a & -2a^2+3a+2 \\ 5 & 2 & -4 & -a+4 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & -2a+1 & -a+2 & -4a^2+a+2 \\ 0 & -5a+2 & 1 & -5a^2-6a+4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & 0 & \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2} & \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \\ 0 & 0 & \frac{4a^2+9a-6}{-a^2+a-2} & \frac{8a^3+18a^2-12a}{-a^2+a-2} \end{array}\right) \underset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & 0 & \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2} & \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-(a-1){\cdot}F1 \to F2, \qquad F3-2{\cdot}F1 \to F3, \qquad F4-5{\cdot}F1 \to F4$

(2): $F3-\left(\frac{-2a+1}{-a^2+a-2}\right){\cdot}F2 \to F3, \qquad F4-\left(\frac{-5a+2}{-a^2+a-2}\right){\cdot}F1 \to F4$

(3): $F4-\left(\frac{4a^2+9a-6}{a^3-a^2+7a-6}\right)\cdot F3 \to F4$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay-\ z &=& a^2+a \\ \left(-a^2+a-2\right)y+(a+2)\,z &=& -a^3+a^2+4a-4 \\ \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2}z &=& \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene

$\frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2}z=\frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \to z=\frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{a^3-a^2+7a-6} \to z=\frac{2a\cdot\left(a^3-a^2+7a-6\right)}{a^3-a^2+7a-6} \to \boxed{z=2a}$.

Si hacemos la sustitución de $z=2a$ en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos

$\left(-a^2+a-2\right)y+(a+2)\,2a=-a^3+a^2+4a-4 \to y=\frac{-a^3-a^2-4}{-a^2+a-2} \to y=\frac{(a+2)\left(-a^2+a-2\right)}{-a^2+a-2} \to \boxed{y=a+2}$.

Si sustituimos en la primera ecuación las dos condiciones anteriores se obtiene

$x+a\,(a+2)-2a \ =a^2+a \to \boxed{x=a}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función del parámetro a, es:

$$\boxed{(x=a,\ y=a+2,\ z=2a)\,.}$$

---

3. Dados los tres planos siguientes:

$\pi_1: 2x+y+(k-2)\,z=k+3 \qquad \pi_2: kx+2y-2z=3k+2 \qquad \pi_3: (2k+2)\,x+5y-5z=14$

Se pide:

a) (Valoración de un 25 %) Determinad, de manera razonada, la posición relativa de estos tres planos en función de los diferentes valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

b) (Valoración de un 25 %) Determinad para qué valor del parámetro k los tres planos π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un único punto que verifica que su primera coordenada es 57, es decir $x=57$.

Solución:

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las 3 ecuaciones que definen estos planos [Ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a la 31)

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+(k-2)\,z=k+3 \\ kx+2y-2z=3k+2 \\ (2k+2)\,x+5y-5z=14 \end{array}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k-2 \\ k & 2 & -2 \\ 2k+2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & k-2 & k+3 \\ k & 2 & -2 & 3k+2 \\ 2k+2 & 5 & -5 & 14 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k-2 \\ k & 2 & -2 \\ 2k+2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k^2 - 5k + 4 = (k-1)\cdot(k-4)$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 4$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en un punto}}$.
- Si $k = 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando las filas y columnas primera y segunda).
  Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que rango(M) =rango$(A) = 2 \neq$ n^o incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. En consecuencia $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$.
- Si $k = 4$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando las filas 1ª y 2ª y las columnas 2ª y 3ª).
  Calculamos, para $k = 4$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 14 \\ 5 & -5 & 14 \end{vmatrix} = 126 \neq 0$. Así pues, tenemos que rango$(A) = 2 \neq$ rango$(M) = 3$, entonces el sistema es incompatible y por tanto $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $k \neq 1$ y $k \neq 4$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un único punto. Por tanto, podemos calcular, en función de $k \neq 1$ y $k \neq 4$, la solución de estos sistemas compatibles determinados.

Utilizaremos el método de Cramer [Ver apuntes módulo 3, apartado 7, páginas de la 22 a la 24] para determinar la solución, en función de k, del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

Notemos que podemos aplicar el método de Cramer, ya que la matriz del sistema es cuadrada y para $k \neq 1$ y $k \neq 4$ su determinante es no nulo.

Aplicando la regla de Cramer se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & k-2 \\ 3k+2 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{A} = \frac{15k^2 - 33k + 18}{k^2 - 5k + 4} = \frac{3\,(k-1)\,(5k-6)}{(k-1)\,(k-4)} = \frac{3\,(5k-6)}{k-4} = \frac{15k-18}{k-4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k+3 & k-2 \\ k & 3k+2 & -2 \\ 2k+2 & 14 & -5 \end{vmatrix}}{A} = \frac{-6k^3 + 17k^2 - 43k + 32}{k^2 - 5k + 4} = \frac{11k - 6k^2 - 32}{k-4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & k+3 \\ k & 2 & 3k+2 \\ 2k+2 & 5 & 14 \end{vmatrix}}{A} = \frac{7k^2 - 35k + 28}{k^2 - 5k + 4} = \frac{7\,(k-1)\,(k-4)}{(k-1)\,(k-4)} = 7.$$

A continuación, si imponemos, en la solución hallada, $x = 57$ obtenemos
$\frac{15k-18}{k-4} = 57 \to 15k - 18 = 57\,(k-4) \to 15k - 18 = 57k - 228 \to 42k = 210 \to \boxed{k = 5}$.
Por tanto, para $k = 5$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 intersecan en un único punto y dicho punto es el $(57, -127, 7)$.