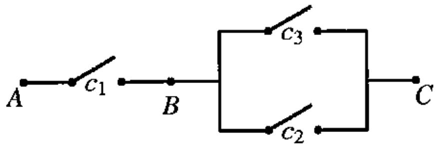
JUN'11 -A

Material permitido: Libro, apuntes y calculadora.

Enunciado 1 La figura siguiente muestra el diagrama de un circuito formado por una serie de un conmutador y un subcircuito de dos conmutadores en paralelo.



Los conmutadores pueden estar *abiertos* o *cerrados*; si están cerrados, puede pasar la corriente; si están abiertos, no pasa; cada conmutador tiene una probabilidad p de estar cerrado, con independencia del estado de los restantes.

$P(C_2 \cup C_3) =$ " $P(C_2) + P(C_3) - P(C_2 \cap C_3)$

1. Calcular la probabilidad de que la corriente pase entre A y C. $P(AC) = P(AB) \cap P(BC)$

2. Si la corriente pasa entre A y B, calcular la probabilidad de que también pase entre A y C. $P(AC|AB) = \frac{P(AC \cap AB)}{P(AB)}$ $P(AB \cap AC)$

3. Si la corriente pasa entre A y C, calcular la probabilidad de que c_2 esté cerrado. $P(C_2|AC) = \frac{P(C_2 \cap AC)}{P(AC)}$

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Comprobar que $f(x)$ cumple las condiciones requeridas para ser una función de densidad. integral = 1; mayor que 0

5. Calcular $P(0.1 < X \leq 0.6)$. $\int_{0'1}^{0'6} 2x\,dx$

Enunciado 3 Observamos dos repeticiones X_1, X_2, independientes del valor de una variable X con distribución uniforme en el intervalo $(0,2)$ y consideramos el estadístico $T = \max(X_1, X_2)$, máximo de los valores de la muestra.

6. **(Sólo para quienes no hayan presentado el trabajo de evaluación continua)** Hallar la función de distribución en el muestreo del estadístico T.

Enunciado 4 Una urna contiene cinco bolas de las que k son azules y el resto rojas, donde k es desconocido y puede tomar uno de los valores 1, 2, 3, 4. De la urna extraemos una muestra aleatoria simple de tres bolas; sea N el número de bolas azules que hay en la muestra.

7. Para cada valor de k, calcular $P(N = 1)$.

8. Hallar el valor de valor de k que hace máxima la probabilidad $P(N = 1)$

9. Si observamos $N = 2$, ¿cuál es el valor del estimador de máxima verosimilitud para k?

Enunciado 5 Obtener la forma canónica del problema de programación lineal siguiente:

Maximizar $z = 7x_1 - 3x_2 + x_3$, sujeto a:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50$ ↳ $x_1 = x_1^+ - x_1^-$
$x_1 + x_2 = 20$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$
con x_1 cualquiera, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$

≤ 20
$\geq 20 \rightarrow \leq -20$

Material permitido: Libro, apuntes y calculadora.

Enunciado 1 Tres bolas se colocan al azar en dos urnas, es decir, se elige al azar en que urna se colocará cada bola, con independencia de las restantes. Consideremos la variable aleatoria X definida por $X =$ "número de bolas que hay en la primera urna".

1. Hallar la tabla de la función de probabilidad de X.
2. Calcular $E\{X^2\}$.
3. Calcular la entropía de X.

$X=0 \quad p(0) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$X=1 \quad p(1) = \frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (hay 3 combinaciones)

$X=2 \quad p(2) = p(1)$

$X=3 \quad p(3) = \frac{1}{8}$

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ 4-4x & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Comprobar que esta función cumple las condiciones requeridas para ser una función de densidad.
5. Calcular $P(X > 0.6)$. $\quad \int_{0'6}^{\infty} f(x) = \int_{0'6}^{1} 4-4x \, dx$
6. **(Sólo para quienes no hayan presentado el trabajo de evaluación continua)** Si (X_1, X_2, X_3) es una muestra aleatoria simple de tamaño 3 de la variable anterior, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

Enunciado 3 El ruido en la transmisión de una señal a través de un canal de comunicación es una variable aleatoria con distribución normal de media y varianza desconocidas. En una muestra aleatoria simple de 10 señales, se midieron los niveles de ruido y se obtuvieron los estadísticos $\sum_{i=1}^{10} x_i = 100$ y $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1036$.

7. Hallar las estimaciones insesgadas de la media y varianza del ruido. $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \hat{\sigma} = S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}}{n-1}$
8. Encontrar un intervalo de confianza con una confianza del 95 % para el valor medio del ruido. $\to \left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
9. Encontrar un intervalo de confianza con una confianza del 90 % para la varianza del ruido. $\to \chi^2_{n-1}$

Enunciado 4 Hallar la formulación matricial del problema de programación lineal siguiente:

Maximizar $z = 7x_1^+ - 7x_1^- - 3x_2 + x_3$, sujeto a:

$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$

$x_1^+ - x_1^- + x_2 \leq 20$

$-x_1^+ + x_1^- - x_2 \leq -20$

$-x_1^+ + x_1^- - x_2 - x_3 \leq -5$

con $x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

JUN'11 - C

Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

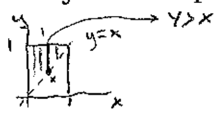
Enunciado 1 Lanzamos una moneda que tiene probabilidad de cara igual a p; si sale cara, la lanzamos otra vez; si sale cruz, la lanzamos dos veces más. Sea X el número de caras que aparecen.

$X=0 \quad p(0)=(1-p)^3$

1. Hallar la función de probabilidad de X. $\quad X=1 \quad p(1)=2p(1-p)^2+p(1-p)$
2. Calcular la varianza de X. $\sigma_X^2=E(X^2)-E(X)^2 \quad X=2 \quad p(2)=p^2+p^2(1-p)$
3. Si $X=2$, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado cara en el primer lanzamiento? $P(\text{cara }1 \mid X=2)=\frac{P(\text{dos caras})}{P(X=2)}=\frac{p^2}{P(X=2)}$

Enunciado 2 El vector aleatorio (X,Y) tiene función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}2x & \text{si } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \tag{1}$$



4. Calcular $P(Y>X)$. $\quad P(Y>X)=\int_0^1\int_x^1 2x\,dy\,dx$
5. Calcular $E\{XY\}$. $\quad E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\,2x\,dy\,dx$

Enunciado 3 De una población con distribución $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ hemos tomado una muestra aleatoria simple de tamaño ocho; los resultados muestrales han sido -0.4, -0.3, 0.6, 0.7, 0.2, -0.1, -0.2, 0.4.

$\bar{x}$ y S^2 para calcular t

6. Calcular el valor del estadístico de STUDENT en esta muestra. $\quad P(t_7 > t)$

Enunciado 4 Un algoritmo genera dígitos binarios; supongamos que la probabilidad, p, de generar un **0** es desconocida; para estimarla vamos a realizar 100 ejecuciones independientes del algoritmo; designemos por N el número de ceros que observamos en las cien ejecuciones.

7. Calcular $P(N=k)$.
8. Supongamos que hemos observado k ceros, $k=0,1,\ldots,100$; calcular el valor de p que hace máxima $P(N=k)$.
9. De lo anterior, deducir el estimador de máxima verosimilitud de p y razonar si es sesgado o insesgado.

Enunciado 5 Encontrar todas las soluciones y programas básicos de un problema de programación lineal caracterizado por:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{con } x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

rang(A) = 2

soluciones programa: columnas 1,2 - 1,3 - 1,4 - 2,3 - 2,4 - 3-4

JUN '11 - D

Material permitido: Libro, apuntes y calculadora.

Enunciado 1 Consideremos dos variables X e Y discretas cuya distribución conjunta está dada por la tabla siguiente

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	0.1	0.1	0.2
$X=1$	0.1	~~0.1~~	0.2
$X=2$	0	0.1	0.1

$Y \leq 1$ $\quad X \leq 1 \mid Y \leq 1$

1. Calcular $P(X \leq 1 \mid Y \leq 1)$.
2. Calcular $E\{XY\}$. $XY = 0 \to 0'1 + 0'1 + 0'2 + 0'1 = 0'5$; $XY = 1 \to 0'1$; $XY = 2 \to 0'2 + 0'1$; $XY = 4 = 0'1$
3. Hallar la distribución de $X \mid Y = 2$. $\to X = 0 \mid Y = 2$, $\to X = 1 \mid Y = 2$, $\to X = 2 \mid Y = 2$

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X con distribución normal de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 0.2$.

4. Hallar la probabilidad $P(X > 0.28)$. $\to Z = \frac{0'28 - \mu}{\sigma} = 1'4$; $P(Z > 1'4)$
5. Hallar el valor x que verifica $P(X < x) = 0.05$. $= P(X > x) \to P(Z > z)$ y destipificar z por x
6. **(Sólo para quienes no hayan presentado el trabajo de evaluación continua)** Si X_1, X_2, $\ldots$, X_6 es una muestra aleatoria simple de X, calcular el valor λ tal que

$$P(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_6^2 \leq \lambda) = 0.10$$

Enunciado 3 Para contrastar si una fuente binaria envía ceros y unos con igual frecuencia observamos 1000 dígitos enviados; suponemos que la fuente no tiene memoria y que las observaciones son independientes; entre los 1000 dígitos había 430 unos y 570 ceros. → 4.6 guía

7. Dar una estimación insesgada de la proporción de unos que emite la fuente. $\bar{X}$
8. Calcular el valor de la discrepancia D de Pearson entre las proporciones de la muestra y las teóricas basadas en la hipótesis de que la fuente emite ceros y unos con igual frecuencia. ¿Cuál es la distribución aproximada de D?
9. Decidir con un nivel de significación igual a 0.05 si podemos aceptar que la fuente emite ceros y unos en igual proporción.

Enunciado 4 Cierto fabricante produce sillas y mesas, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar nueve horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo ocho horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es doble que el de sillas.

10. Plantear un problema de programación lineal cuya solución establezca la producción diaria de mesas y sillas de tal forma que el beneficio sea máximo.

$X_1 \to$ mesas $\qquad Z = 2X_1 + X_2$

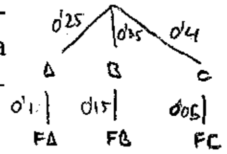
$X_2 \to$ sillas $\qquad 3X_1 + X_2 \leq 9$ (montaje)

$X_1 + 2X_2 \leq 8$ (pintura)

$X_1, X_2 \geq 0$

Material permitido: Libro, calculadora y apuntes personales incluyendo los ejercicios del curso.

Enunciado 1 Con el fin de ejecutar un proceso se selecciona uno de tres periféricos $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ o $\mathscr{C}$. Las probabilidades de escoger cada uno de ellos son 0.25, 0.35 y 0.40 respectivamente. Como resultado de la elección, se pueden producir perturbaciones que detienen la ejecución del proceso; esto ocurre con una probabilidad de 0.1 si el periférico seleccionado fue el $\mathscr{A}$, de 0.15 si fue el $\mathscr{B}$ y de 0.05 si fue el $\mathscr{C}$.

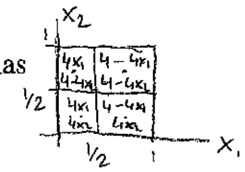


1. Hallar la probabilidad de que el proceso no se ejecute. $P(\text{Fallo}) = P(FA) + P(FB) + P(FC)$ $\to 0'1 \cdot 0'25$
2. Si el proceso se ha ejecutado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido desde $\mathscr{C}$? $P(C|F^c) = \dfrac{P(C \cap F^c)}{P(F^c)}$
3. Si el proceso no se ha ejecutado, ¿cuál es la probabilidad de no haber seleccionado el periférico $\mathscr{A}$? $P(A^c|F) = \dfrac{P(BF) \cap P(FC)}{P(F)}$

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad dada por

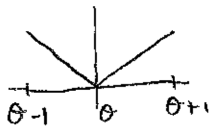
$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ 4-4x & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Comprobar que $f(x)$ cumple las condiciones requeridas para ser una función de densidad. $\begin{cases} \text{integrar} \\ >0 \end{cases}$
5. Calcular $P(X \leq 0.6)$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0'6} f(x)\,dx = \int_0^{0'5} 4x\,dx + \int_{0'5}^{0'6} (4-4x)\,dx$
6. Si (X_1, X_2) es una muestra aleatoria simple de la variable X, describir todas las posibles muestras y hallar la función de densidad conjunta de la muestra.



Enunciado 3 Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} |x-\theta| & \text{si } \theta - 1 < x < \theta + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Para contrastar la hipótesis $H_0: \theta = 0$ frente a $H_1: \theta \neq 0$ a partir de una única observación de X, se emplea la regla de decisión siguiente.

Si $|X| \leq c$, se acepta H_0. Si $|X| > c$, se rechaza H_0

7. Representar gráficamente la función de densidad. $ET1 = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(\text{rechazo} | \theta = 0)$
8. Hallar c para que el contraste basado en la anterior regla de decisión tenga una probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.19. $= P(\{-1 < x < -c\} \cup \{c < x < 1\})$ $\downarrow$ simetría
9. Hallar la potencia del test para $\theta = 1$. $P(c < x < 1) = 0'095$

Enunciado 4 Consideremos el siguiente problema de programación lineal: $= \int_c^1 x\,dx \dashrightarrow$ valor c

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \quad \to 2 \text{ inecuaciones} \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -20 \quad \to \text{cambio signo} \\ & x_1 \text{ cualquiera; } x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$\to$ descomposición

10. Obtener la forma canónica de este problema.

SEP'11 - B

Material permitido: Libro, calculadora y apuntes personales, incluyendo los ejercicios del curso.

Enunciado 1 De una urna que contiene tres bolas blancas y una negra, se realizan extracciones sucesivas, sin devolver las bolas a la urna, hasta que obtener dos bolas blancas consecutivas. Denotamos por X el número de bolas extraídas.

1. Hallar la función de probabilidad de X. BB ← $X = 2$ $p(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ solo hay blancas ya
2. Calcular $E\{X\}$ y σ_X^2. NBB $X = 3$ $p(3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2}$
3. Calcular la entropía $H(X)$ de la variable. $X = 4$ → BNBB $p(4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$

Enunciado 2 Sea X una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(5,2)$.

4. Calcular $P(7 < X < 9)$. → $P\left(\frac{7-5}{2} < z < \frac{9-5}{2}\right)$
5. Hallar el valor x que satisface la condición $P(X > x) = 0.90$. $P(z > z) = 0'9$ → destipificar z
6. Si tomamos una muestra aleatoria simple (X_1, X_2, X_3) de X y consideramos el estadístico $Y = \sum_{i=1}^{3}(X_i - 5)^2$, hallar el valor y que cumple $P(Y < y) = 0.95$.
   ↳ $\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum x_i^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ $P(\frac{1}{4} Y < \frac{1}{4} y) = P(\chi_3^2 < \frac{1}{4} y)$

Enunciado 3 Para contrastar si un algoritmo genera números con distribución uniforme en el intervalo $(0,1]$, se observaron 1000 números generados por el algoritmo. La siguiente tabla recoge el número de observaciones en cada uno de los cinco subintervalos en los que se ha dividido el intervalo $(0,1]$.

Intervalo	(0,0.2]	(0.2,0.4]	(0.4,0.6]	(0.6,0.8]	(0.8,1]
Frecuencia	185	195	205	208	207

7. Calcular las frecuencias esperadas de cada uno de los intervalos de la tabla, bajo la hipótesis de que el algoritmo genera observaciones de una distribución uniforme en $(0,1]$. → en cada intervalo: $n \cdot p_i = 1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$
8. Calcular el valor D de la discrepancia de Pearson entre las frecuencias observadas y las esperadas. ¿Cuál es la distribución aproximada de D? ↳ χ_4^2
9. Decidir con un nivel de significación de 0.01 si se puede aceptar la hipótesis de que el algoritmo genera observaciones de la distribución uniforme en $(0,1]$. ↳ $P(\chi_4^2 > d) = 0'01$

si $D > d$ → $\cancel{H_0}$

si $D < d$ → H_0 ✓

H_0 – $F = U(0,1)$

Enunciado 4 Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 \\
\text{sujeto a:} & 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 112 \\
& x_1 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 73 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
& x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

10. Obtener la formulación matricial del mismo.

SEP'11-R

Material permitido: Libro, calculadora y apuntes personales incluyendo los ejercicios del curso.

Enunciado 1 Lanzamos tres veces una moneda que tiene probabilidad p de cara. En cada lanzamiento, ganamos un euro si sale cara y perdemos un euro si sale cruz. Sea X_i, $i = 1$, 2, 3, la ganancia que se obtenemos en el i-ésimo lanzamiento. Consideremos las variables $U = X_1 + X_2$ y $V = X_2 + X_3$, correspondientes a las ganancias de los dos primeros y dos últimos lanzamientos respectivamente.

1. Encontrar la tabla de la distribución conjunta del vector (U, V).

2. Hallar la función de probabilidad de la variable condicionada $U \mid V = 0$.

3. Calcular $E\{UV\}$.

4. Sea (X_1, X_2, X_3) la muestra aleatoria de ganancias observadas en los tres lanzamientos; describir el número de muestras posibles y hallar la función de probabilidad de la muestra.

Enunciado 2 Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x-3)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

5. Calcular $P(X > 2 \mid X > 1)$. $P(x>1) = \int_1^3 f(x)dx$ $\quad P(x>2 \cap x>1) = \int_2^3 f(x)\,dx$

6. Calcular el valor esperado de X.

Enunciado 3 El tiempo que transcurre hasta que cierto modelo de equipo electrónico comienza a presentar errores sistemáticos es una variable aleatoria X, que tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, 2)$. Una muestra aleatoria de 16 de estos equipos proporcionó los siguientes valores de X medidos en miles de horas:

10 8 7.5 10.5 9 11 11.5 13 9.3 10 10.7 9.5 12 9 12.5 6.5

7. Dar una estimación insesgada de μ. $\to \overline{X}$

8. Hallar un intervalo de confianza para la media desconocida con un nivel del confianza del 90%.

9. Obtener una regla de decisión para contrastar la hipótesis nula de que la media es $\mu = 9$ frente a la alternativa de que es mayor con una probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.01. ¿Qué decisión se tomaría en base a la evidencia proporcionada por la muestra extraída?

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal definido por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

10. Encontrar todas las soluciones y programas básicos.

columnas

$\binom{4}{2} \to 6$ soluciones

rang(A)

JUN'12-A

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Tres bolas se colocan al azar en dos urnas, es decir, primero se elige al azar una urna para colocar la primera bola, con independencia de la primera elección se elige una urna al azar para colocar la segunda bola y, con independencia de las dos elecciones anteriores se elige una urna para colocar la tercera bola. Consideramos la variable aleatoria definida por $Y =$ "número de bolas que hay en la primera urna"

1. Calcular la función de probabilidad de la variable Y.

2. Calcular la entropía, $H(Y)$, de la variable Y.

Enunciado 2 El vector aleatorio (X,Y) tiene función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Calcular $P(Y > X > 0.2)$.

5. Calcular $E\{X - 2Y\}$.

Enunciado 3 De una población con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de media y varianza desconocidas se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 21$, que presentó los siguientes resúmenes estadísticos: $\sum_{i=1}^{21} x_i = 42$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 210$.

6. Encontrar un intervalo de confianza para μ, con una confianza del 95 %.

7. Hallar un intervalo de confianza, con una confianza del 95 %, suponiendo que la desviación típica de la población es $\sigma = 1$.

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal

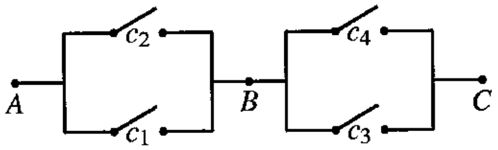
Minimizar $z = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3$ sujeto a:
$x_1 + x_2 - x_3 = 5$
$2x_1 + x_3 \leq 7$
$-x_1 - x_2 + x_3 \geq -1$
donde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y x_3 es cualquier número

8. Obtener la forma canónica del problema anterior.

JUN'12 - B

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 La figura siguiente muestra el diagrama de un circuito formado por dos subcircuitos puestos en serie, cada subcircuito está formado por dos conmutadores en paralelo.

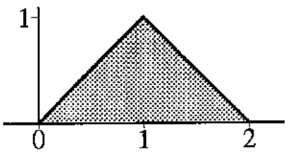


Los conmutadores pueden estar *abiertos* o *cerrados*; si están cerrados, puede pasar la corriente; si están abiertos, no pasa; cada conmutador tiene una probabilidad p de estar cerrado, con independencia del estado de los restantes.

1. Calcular la probabilidad de que la corriente pase entre A y C.

2. Si la corriente pasa entre A y C, calcular la probabilidad de que los cuatro conmutadores estén cerrados.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad definida por:



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Calcular $P(X < 0.5 \mid X < 1.5)$

4. Calcular la varianza de X.

Enunciado 3 Sea X una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(0,2)$. Consideramos una muestra aleatoria simple de, $(X_1, X_2, \ldots, X_7)$, de la variable X.

5. Hallar el valor z que cumple la condición $P\left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_7^2} < z\right) = 0.95$.

Enunciado 4 De una población con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de media y varianza desconocidas se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 21$, que presentó los siguientes resúmenes estadísticos: $\sum_{i=1}^{21} x_i = 42$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 210$.

6. Hallar estimaciones insesgadas de cada uno de los parámetros μ y σ.

7. Encontrar un intervalo de confianza para la media poblacional, con una confianza del 99 %.

Enunciado 5 Dado el problema de programación lineal

Maximizar $z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$, sujeto a:
$x_1 - x_2 - x_3 \leq 7$
$3x_1 + x_2 = 3$
$-x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 5$
donde x_1 puede ser cualquiera, mientras que $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$

8. Hallar la forma canónica del problema anterior.

JUN'12-C

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Tres bolas se colocan al azar en dos urnas, es decir, primero se elige al azar una urna para colocar la primera bola, con independencia de la primera elección se elige una urna al azar para colocar la segunda bola y, con independencia de las dos elecciones anteriores se elige una urna para colocar la tercera bola. Consideramos la variable aleatoria definida por $Y =$ "número de bolas que hay en la primera urna"

1. Calcular la función de probabilidad de la variable Y.

2. Calcular la entropía, $H(Y)$, de la variable Y.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Calcular $P(X > 0.6 \mid X > 0.4)$.

4. Calcular $E\{X^2 - X + 1\}$.

5. Si (X_1, X_2, X_3) es una muestra aleatoria simple de tamaño 3 de la variable anterior, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

Enunciado 3 Una variable aleatoria X tiene distribución normal $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A fin de contrastar la hipótesis de que su media es $\mu = 1$ frente a la alternativa $\mu = 2$, se ha tomado una muestra aleatoria de 25 observaciones de X, la suma de los valores de la muestra es $\sum_{i=1}^{25} x_i = 400$.

6. Plantear el contraste de las hipótesis del enunciado. A la vista del resultado de la muestra, señalar qué decisión se adoptará con un nivel de significación de 0.01.

7. Calcular la potencia del contraste obtenido en el apartado anterior cuando el valor de la media es $\mu = 2$.

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$ sujeto a las condiciones:
$x_1 - x_2 \leq 12$
$x_1 + x_3 = 17$
$x_2 + x_3 \geq 2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

8. Obtener su formulación matricial.

JUN '12 -D

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Consideremos dos variables X e Y discretas cuya distribución conjunta está dada por la tabla siguiente

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	0	0.1	0.1
$X=1$	0.1	0.1	0.2
$X=2$	0.1	0.2	0.1

1. Calcular $P(X>0 \mid Y=1)$.
2. Calcular $E\{X-2Y+1\}$.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X con distribución normal de media $\mu=0$ y desviación típica $\sigma=1.5$.

3. Hallar la probabilidad $P(X>0.15)$.
4. Hallar el valor x que verifica $P(X>x)=0.05$.
5. Si $X_1, X_2, \ldots, X_5$ es una muestra aleatoria simple de X, calcular el valor λ tal que

$$P(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_5^2 \leq \lambda)=0.10$$

Enunciado 3 Para contrastar si una moneda está equilibrada, se hizo un experimento que consistió en lanzar la moneda 500 veces, apareciendo 275 caras y 225 cruces.

6. Hallar el valor D de la discrepancia de Pearson entre las proporciones de la muestra y las teóricas suponiendo que la moneda está equilibrada. ¿Cuál es la distribución aproximada de D?
7. Decidir si, con un nivel de significación de 0.05, se puede aceptar la hipótesis de que la moneda está equilibrada.

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal

Maximizar $z=4x_1+3x_2-x_3$ sujeto a las restricciones:
$x_1+x_2+x_3 \leq 105$
$x_1-x_2-x_3 \geq 7$
$3x_1-x_2+7x_3=69$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

8. Obtener su formulación matricial.

SEP'12

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Lanzamos tres veces una moneda cuya probabilidad de salir cara es p. Sea X la variable aleatoria "número de caras en los dos primeros lanzamientos", e Y la variable aleatoria "número de caras en los tres lanzamientos".

1. Hallar la tabla de la distribución conjunta de (X,Y).

2. Calcular $E\{X \mid Y = 2\}$.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

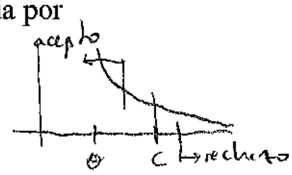
3. Calcular $P(0.1 < X < 0.2 \mid X < 0.3)$.

4. Calcular $E\{X^2 + 1\}$.

5. Si (X_1, X_2, X_3, X_4) es una muestra aleatoria simple de tamaño 4 de la variable anterior, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

Enunciado 3 Una variable aleatoria tiene función de densidad dada por

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$



Para contrastar la hipótesis nula $H_0\colon\ \theta = 0$ frente a la alternativa $H_1\colon\ \theta > 0$ mediante una observación de X, se emplea la siguiente regla de decisión

$$\begin{cases} \text{Si } X \leq c, \text{ se acepta } H_0 \\ \text{Si } X > c, \text{ se rechaza } H_0 \end{cases}$$

6. Hallar el valor de c tal que el test de hipótesis que utiliza la regla anterior tenga probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.05. $ET\,I = 0'05 = P(X\,(\theta=0) > c) = \int_c^{\infty} e^{-x}\,dx =$

$= -e^{-x}\Big|_c^{\infty} =$

$= e^{-c}$

$c = 2'9957 = -\ln(0'05)$

7. Calcular la potencia del test para $\theta = 2$.

$\hookrightarrow P(X > 2'9957 \mid \theta = 2)$

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal

$$\text{Minimizar} - 2x_1 + 3x_2$$

sujeto al conjunto de restricciones:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & +2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

8. Hallar gráficamente su solución o soluciones.

SEP'12 -R

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Lanzamos tres veces una moneda que tiene probabilidad p de cara. En cada lanzamiento, ganamos un euro si sale cara y perdemos un euro si sale cruz. Sea X_i, $i = 1, 2, 3$, la ganancia que se obtiene el i-ésimo lanzamiento. Consideremos las variables $U = X_1 + X_2$ y $V = X_1 - X_3$.

1. Encontrar la tabla de la distribución conjunta del vector (U, V).

2. Hallar la función de probabilidad de la variable condicionada $U \mid V = 0$.

3. Sea (X_1, X_2, X_3) la muestra aleatoria de ganancias observadas en los tres lanzamientos; describir el número de muestras posibles y hallar la función de probabilidad de la muestra.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Calcular $P(0.1 < X \leq 0.6 \mid X > 0.4)$

5. Calcular $E\{(X+1)^2\}$.

Enunciado 3 Para contrastar la hipótesis de que un dado está equilibrado, es decir, de que todas sus caras tienen igual probabilidad $1/6$ de aparecer, se llevaron a cabo 600 lanzamientos, obteniéndose la siguiente tabla de frecuencias de aparición de cada uno de los resultados:

Resultado	1	2	3	5	5	6
Frecuencia	70	90	80	150	110	100

6. Calcular el valor de la discrepancia D de PEARSON entre las frecuencias observadas y las teóricas basadas en la hipótesis de que el dado está equilibrado. ¿Cuál es la distribución aproximada de D?

7. Decidir con un nivel de significación de 0.01 si podemos admitir que el dado está equilibrado.

Enunciado 4 Una compañía explota dos minas. La mina A produce diariamente una tonelada de carbón de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad. La mina B produce 2 toneladas de carbón de cada una de las clases. Para cumplir sus contratos, la compañía necesita producir al menos 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 toneladas de calidad media y 150 toneladas de baja calidad. La gastos de explotación durante un día de la mina A ascienden a 150 unidades monetarias, mientras que los de la mina B ascienden a 200 unidades monetarias.

8. ¿Cuantos días de trabajo en cada mina permiten cumplir los compromisos de la compañía con un coste mínimo?

JUN'13 - A

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces.

1. Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea menor que cinco.

2. Si la puntuación del segundo dado ha sido un número par, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida en el primer dado sea menor que la del segundo?

Enunciado 2 Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{5} & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [1,2] \end{cases}$$

3. Hallar la probabilidad condicionada $P(X > 5/4 \mid X < 7/4)$.

4. Calcular $E\{2X-1\}$.

Enunciado 3 Del conjunto de cuatro tarjetas $\left\{\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\right\}$ se realizan dos extracciones con reemplazamiento para obtener una muestra.

5. Consideremos el estadístico M igual al máximo de los números que aparecen en la muestra. Hallar el valor del estadístico en cada muestra posible y encontrar su distribución.

Enunciado 4 El voltaje, X, de una señal analógica es una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 1$. Una muestra aleatoria de 16 mediciones ha proporcionado una suma de voltajes igual a $\sum_{i=1}^{16} x_i = 24$.

6. Plantear una regla de decisión que permita contrastar la hipótesis nula $H_0\colon \mu = 1$ frente a la alternativa $H_1\colon \mu = 2$ con una probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.05.

7. Hallar la potencia del contraste cuando $\mu = 2$.

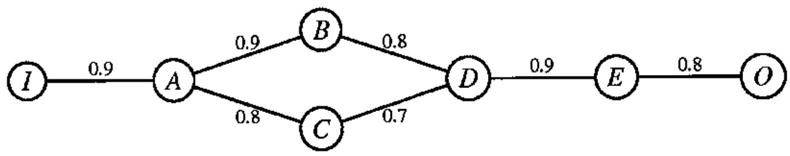
Enunciado 5 Una empresa fabrica dos marcas de colonia, A y B. La composición de la colonia A es 15% extracto de jazmín, 20% alcohol y el resto agua, mientras que la composición de B es 30% extracto de jazmín, 15% alcohol y el resto agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de colonia B. El precio de venta por litro de la colonia A es 500 euros mientras que el de B es 2000 euros.

8. Hallar el número de litros de cada marca de colonia que ha de producirse diariamente de manera que el valor de lo producido sea máximo.

JUN'13-B

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Una red de computadores conecta los nodos I y O mediante una estructura como la que se muestra en la figura siguiente, donde aparecen reflejadas las probabilidades de que la conexión inmediata entre cada par de nodos contiguos esté abierta. Se supone que cada conexión inmediata entre dos nodos contiguos está abierta o cerrada con independencia del estado del resto de conexiones inmediatas.

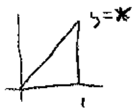


1. Calcular la probabilidad de que la conexión entre los nodos I y O esté abierta.

2. Si la conexión entre los nodos A y D está abierta, ¿cuál es la probabilidad de que la conexión entre los nodos I y O también esté abierta?

Enunciado 2 El vector aleatorio (X,Y) tiene función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



3. Calcular $P(Y > 0.2)$. $= \int_0^1 \int_0^x 3x\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^1 3x\,dx\,dy$

4. Calcular $E\{X+Y\}$.

Enunciado 3 Consideremos una muestra aleatoria simple $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$ de una población con distribución $\mathcal{N}(0,3)$ y los estadísticos

$$Y = X_2^2 + X_3^2 + \cdots + X_6^2, \qquad T = \frac{X_1}{\sqrt{Y/5}}$$

5. Hallar el valor de t tal que $P(|T| > t) = 0.1$.

Enunciado 4 El tiempo de funcionamiento, en miles de horas, de ciertos dispositivos electrónicos es una variable X con distribución $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Para una muestra aleatoria de nueve de estos dispositivos se registraron los siguientes tiempos de funcionamiento

$$7 \quad 10 \quad 8.5 \quad 8 \quad 11.5 \quad 7.2 \quad 8.8 \quad 10.3 \quad 9.7$$

6. Hallar la estimación de máxima verosimilitud de μ.

7. Plantear el contraste de la hipótesis: "el tiempo medio de funcionamiento es $\mu = 10$" frente a la alternativa de que es menor. ¿Qué decisión se adoptaría, ante la evidencia que proporciona la muestra, si se toma un nivel de significación de 0.01?

Enunciado 5 De un problema de programación lineal se conoce:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_i \ge 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4$$

8. Encontrar todos los programas básicos.

JUN'13-C

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Lanzamos un dado equilibrado; si el resultado es par, elegimos al azar un número en el conjunto $\{1,2,3,4\}$; si el resultado es impar, el número se elige al azar en el conjunto $\{3,4,5\}$. Sea X la variable aleatoria que denota el número elegido.

1. Hallar el valor esperado de X, $E\{X\}$.

2. Calcular la entropía $H(X)$ de la variable X.

Enunciado 2 Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Calcular la función de densidad de la variable $Y = X^2$.

4. Calcular $E\{X+1\}$.

Enunciado 3 Se considera una muestra aleatoria simple (X_1, X_2, X_3, X_4) de una población con distribución $\mathcal{N}(1,2)$ y el estadístico

$$Y = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + (X_3 - 1)^2 + (X_4 - 1)^2$$

5. Hallar el valor de y que cumple $P(Y > y) = 0.05$.

Enunciado 4 El tiempo de conexión de los usuarios a una determinada red es una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de media y varianzas desconocidas. Una muestra aleatoria de 15 usuarios proporcionó los siguientes resúmenes estadísticos para los tiempos de conexión en minutos: $\sum_{i=1}^{15} x_i = 300$ y $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 6105$.

6. Hallar las estimaciones insesgadas de μ y de σ^2.

7. Encontrar un intervalo de confianza, con una confianza del 90%, para la media μ del tiempo de conexión.

Enunciado 5 Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kilogramos de color azul, 400 kilogramos de color verde y 225 kilogramos de color rojo. Desea fabricar dos modelos de alfombra A y B. Para fabricar una alfombra del modelo A necesita 1 kilogramo de lana azul y 2 kilogramos de lana verde, mientras que para fabricar una alfombra de modelo B precisa de 2 kilogramos de lana azul, 1 kilogramo de lana verde y 1 kilogramo de lana roja. Cada alfombra A se vende por 2000 euros, mientras que cada alfombra B se vende por 3000 euros. Se supone que todas las alfombras fabricadas se venden.

8. Resolver el problema de programación lineal que permite calcular el número de alfombras de cada modelo que deben fabricarse para maximizar el ingreso por ventas.

$x_A \rightarrow$ alfombra A

$x_B \rightarrow$ alfombra B

$z = 2000\, x_A + 3000\, x_B$

$x_A + 2x_B \leq 500$

$2x_A + x_B \leq 400$

$x_B \leq 225$

$x_A, x_B \geq 0$

JUN'13-D

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 De una urna que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5 se realizan dos extracciones con reemplazamiento; denotaremos por X_1 y X_2 las puntuaciones obtenidas en cada extracción. Se consideran las variables aleatorias $X = \min(X_1,X_2)$ e $Y = \max(X_1,X_2)$.

1. Hallar la tabla de la distribución conjunta de (X,Y).

2. Calcular la esperanza condicionada $E\{X \mid Y = 4\}$.

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que tiene función de densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Calcular la probabilidad condicionada $P(X > 0.6 \mid X > 0.4)$.

4. Calcular $E\{X^2 - X + 1\}$.

5. Si (X_1,X_2,X_3) es una muestra aleatoria simple de tamaño 3 de la variable anterior, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

Enunciado 3 Una variable aleatoria tiene función de densidad dada por → SEP'12-A

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{donde } \theta > 0$$

Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ frente a la alternativa $H_1 : \theta > 1$ mediante una observación de la variable X, se emplea la siguiente regla de decisión

$$\begin{cases} \text{Si } X > c, \text{ se acepta } H_0 \\ \text{Si } X \leq c, \text{ se rechaza } H_0 \end{cases}$$

6. Hallar el valor de c que hace que el test de hipótesis que utiliza la regla anterior tenga probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.1.

7. Calcular la potencia del test cuando $\theta = 3$.

Enunciado 4 De un problema de programación lineal se conoce:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4$$

8. Encontrar todos los programas básicos.

SEP'13 -A

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Razonar si las afirmaciones siguientes son ciertas o falsas:

1. Si dos sucesos A y B son disjuntos, entonces son independientes.

2. Dados tres sucesos, A, B y C, si A es independiente de B y A es independiente de C, entonces A es independiente de $B \cup C$.

Enunciado 2 Tenemos cinco tarjetas numeradas del 1 al 5.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5}$$

Las permutamos al azar y las ordenamos en fila boca arriba. Designamos por X la variable aleatoria que cuenta el número de tarjetas intercaladas entre las tarjetas $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$. Por ejemplo, si la permutación es

$$\boxed{3} \quad \boxed{2} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{1}$$

entonces $X = 2$.

3. Hallar la función de probabilidad de X.

4. Calcular su entropía $H(X)$.

5. Si (X_1,X_2) es una muestra aleatoria simple de tamaño 2 de la variable anterior, encontrar la función de probabilidad de la muestra.

Enunciado 3 Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media y varianza desconocidas. Una muestra aleatoria de tamaño once de dicha variable proporcionó las siguientes observaciones

$$12 \quad 8.5 \quad 10 \quad 10.5 \quad 9.2 \quad 8.8 \quad 11 \quad 9.5 \quad 11.5 \quad 8.7 \quad 10.3$$

6. Dar una estimación insesgada de la varianza de la variable.

7. Encontrar un intervalo de confianza, con una confianza del 95%, para la varianza de la variable.

Enunciado 4 Dado el problema de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - 3x_2$$

sujeto al conjunto de restricciones:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & +2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

8. Hallar gráficamente su solución o soluciones.

SEP'13 - B

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Se elige un número al azar en el conjunto $\{1,2,3\}$; a continuación, se lanza una moneda equilibrada tantas veces como indique el número obtenido. Sea X la variable aleatoria que denota el número de caras que han aparecido.

1. Hallar la función de probabilidad de X. $X=0,1,2,3$ y cada uno según resultado del experimento anterior

2. Si resulta $X=2$, calcular la probabilidad de que el número elegido haya sido el 3. ↳ 1 caso de $X=3$

Enunciado 2 Consideremos una variable aleatoria X que se distribuye según una normal $\mathcal{N}(1,2)$.

3. Calcular $P(X<2 \mid X>0)$.

4. Hallar el valor de a que cumple la condición $P(\mid X-1 \mid < a) = 0.95$.

Enunciado 3 De una población con distribución $\mathcal{N}(2,\sigma)$ se ha tomado una muestra de tamaño nueve que proporcionó las siguientes observaciones

$$3 \quad 3.5 \quad 2.25 \quad 2 \quad 3 \quad 2.5 \quad 1.5 \quad 1 \quad 1.75$$

5. Calcular el valor del estadístico T de STUDENT en esta muestra. ¿Cuál sería la probabilidad de obtener un valor del estadístico T mayor al que ha proporcionado la muestra? (el resultado debe darse con la precisión que sea posible)

Enunciado 4 Una variable aleatoria tiene función de densidad dada por:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{\theta-x} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$

donde $\theta \geq 0$. Para una muestra aleatoria (X_1, X_2) de tamaño 2 de la variable anterior se define $T = \min(X_1, X_2)$. A fin de contrastar la hipótesis nula H_0: $\theta = 1$ frente a la alternativa H_1: $\theta > 1$, se emplea la siguiente regla de decisión:

Si $T < c$, entonces se acepta H_0
Si $T \geq c$, entonces se rechaza H_0

6. Calcular la probabilidad $P(T>t)$ para cada $t>0$.

7. Hallar el valor de c tal que el test de hipótesis basado en la regla anterior tenga probabilidad de error de tipo I menor o igual que 0.05.

Enunciado 5 Dado el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z = 7x_1 + x_2 \text{ sujeto a} \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &2x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

8. Resolverlo gráficamente.

SEP '13 -R

Es obligatorio entregar la hoja de enunciados
Material permitido: Libro, calculadora y apuntes y ejercicios del curso.

Enunciado 1 Una urna contiene cinco bolas numeradas de 1 a 5. Plantear un modelo probabilístico para el experimento consistente en realizar dos extracciones sin reemplazamiento de la urna y observar los números de las bolas extraídas.

1. Calcular la probabilidad de que no haya dos números pares entre los extraídos.

2. Si no hay dos números pares entre los extraídos, cuál es la probabilidad de que alguno sea 1?

Enunciado 2 Sea X una variable aleatoria con función de densidad f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

3. Calcular $P(X > 3 \mid X > 2)$.

4. ¿Tiene esperanza matemática esta variable aleatoria?

Enunciado 3 Consideremos una muestra aleatoria simple (X_1, X_2, X_3, X_4) de una población con distribución $\mathcal{N}(0,2)$ y los estadísticos $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$ y $Z = \log Y$.

5. Hallar el valor z^* tal que $P(Z < z^*) = 0.9$.

Enunciado 4 Una urna contiene bolas blancas, negras y rojas. A fin de contrastar la hipótesis de que los tres colores aparecen representados en la urna en la misma proporción se realizaron 300 extracciones con reemplazamiento, obteniéndose 120 bolas blancas, 110 bolas negras y 70 bolas rojas.

6. Hallar el valor D de la discrepancia de Pearson entre las proporciones de colores que se observan en la muestra y las teóricas bajo la hipótesis de que los tres colores están representados por igual en la urna.

7. Decidir si, con un nivel de significación de 0.01, se puede admitir la hipótesis de que los tres colores están representados en la misma proporción.

Enunciado 5 Consideremos la función $f(x,y) = 3x - 6y + 4$ definida en el recinto dado por las tres condiciones:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1, \qquad -x + 2y \geq 0, \qquad y \leq 2$$

8. Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x,y)$ y determinar en qué puntos se alcanzan esos valores.