EXAMEN 3 - 20 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(3+2i)^{-1}$

(b) ¿Qué valor, o valores, tendrá que tomar n, número real, para que el número $\frac{10+10i}{5+ni}$ sea un número complejo real? Una vez hayáis encontrado el valor, o valores, de n, expresad el número complejo $5+ni$ en forma polar.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+21} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-2^2i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
Por tanto, la respuesta es: $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

(b) Primero miraremos a qué número complejo corresponde la fracción dada. Para esto multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador. Posteriormente aplicaremos la definición de número complejo real que hay en la página 20 del material:
$\frac{10+10i}{5+ni} = \frac{(10+10i)(5-ni)}{(5+ni)(5-ni)} = \frac{50-10ni+50i-10ni^2}{25-n^2i^2} = \frac{(50+10n)+(50-10n)i}{25+n^2} = \frac{50+10n}{25+n^2} + \frac{50-10n}{25+n^2}i$
La definición de un número complejo real es que la parte imaginaria tiene que ser nula (ver página 20 del material), por tanto, imponemos que la parte imaginaria sea 0:
$\frac{50-10n}{25+n^2} = 0 \Longleftrightarrow 50-10n = 0 \Longleftrightarrow 10n = 50 \Longleftrightarrow n = 5$
Por tanto, el valor solicitado es $n = 5$
Para expresar el número $5+5i$ en forma polar lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = 45^o$
Tenemos, por tanto, que $5+5i = 5\sqrt{2}_{45^o}$
NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45^o y en 225^o. Como el afijo del punto buscado es $(5,5)$ el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 45^o.

Com se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $5+5i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,5)$, por tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in^5 |a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0\}.$$

Y sea $v = (-3, 3, -3, 3, -3)$.

(a) Comprobad que $A = \{(1,-1,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ las matrices de cambio de base de una base B a la base A, y de una base D a la base B respectivamente. ¿Cuál es la base D?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1 + a_2 = 0$ y $a_2 + a_3 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -3$, $y = 3$ y $z = -3$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-3, 3, -3)$.

(b) Sabemos que:

$$C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O alternativamente, podríamos realizar el procedimiento mostrado a continuación dos veces (para calcular primero la base B y luego la base D).
La matriz de cambio de base de D a A expresa los vectores de la base D en función

de los vectores de A. Así, usando las columnas de la matriz $C_{D\to A}$ tenemos que los tres vectores de la base D serán:

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(1,-1,1,0,0)+0\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(-1,1,-1,0,-1)\\ 0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+0\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,0)\\ 0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,-1)\end{aligned}$$

Por tanto, $D=\{(-1,1,-1,0,-1),(0,0,0,-1,0),(0,0,0,-1,-1)\}$.

3. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real m e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{aligned}x-3y+2z&=m\\ x+7y-2z&=1\\ 2x-11y+6z&=2\end{aligned}\right\}$$

Se pide:

(a) Determinad razonadamente el valor de m para el cual el sistema es compatible.

(b) Para este valor de m, obtenido en el apartado anterior, calculad el conjunto de soluciones del sistema.

(c) Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $m=0$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&7&-2\\2&-11&6\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&m\\1&7&-2&1\\2&-11&6&2\end{array}\right)$$

Notemos que $|A|=0$, pero A tiene menores de orden 2 no nulos: $\begin{vmatrix}1&-3\\1&7\end{vmatrix}\neq 0$, entonces podemos afirmar que $\mathrm{rang}(A)=2$.
Para que el sistema sea compatible se tiene que verificar que $\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(M)$. Por lo tanto, tenemos que calcular el valor del parámetro m que anula el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&-3&m\\1&7&1\\2&-11&2\end{vmatrix}=25-25m\implies 25-25m=0\implies m=1.$$

Así pues, podemos afirmar:

$$\boxed{\text{Si } m=1 \ \to\ \mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(M)\ \to\ \text{Sistema compatible}}.$$

(b) Para $m = 1$, el sistema que se tiene que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Sabemos por el apartado anterior que para $m = 1$ este sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 - F1 \rightarrow F2$ y $F3 - 2{\cdot}F1 \rightarrow F3$

(2) $2{\cdot}F3 + F2 \rightarrow F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 10y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $z = \frac{5}{2}y$. Si hacemos esta sustitución en la primera ecuación y aislamos la x obtenemos que $x = 1 - 2y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{\left(x = 1 - 2y,\ y = y,\ z = \tfrac{5}{2}y\right)}.$$

(c) Para $m = 0$ el sistema a considerar es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 0 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema son:

$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$ $\qquad$ $\pi_2 : x + 7y - 2z = 1$ $\qquad$ $\pi_3 : 2x - 11y + 6z = 2$

A partir de los resultados obtenidos en el apartado (a), [ver apuntes módulo 3, apartado 8, página 32] podemos afirmar que para $m = 0$ el $\text{rang}(A) = 2$ y el $\text{rang}(M) = 3$, por lo tanto, el sistema es incompatible y esto quiere decir que

$$\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}.$$

Comentario: notemos que se puede afinar algo más la conclusión anterior. Si nos fijamos que no hay planos coincidentes (puesto que, no hay ninguna fila proporcional en la matriz M) y además no hay planos paralelos (puesto que, no hay filas proporcionales en la matriz A), podemos afirmar que los tres planos son secantes dos a dos en tres rectas paralelas.

4. Sean $A=(1,-1)$, $B=(4,-1)$, $C=(1,-3)$ y $D=(4,-3)$. Considerad la figura formada por los segmentos AB, BC y CD.

(a) Sea g un giro de ángulo $\alpha\in(0,2\pi)$ desde el origen en sentido antihorario. Calculad la matriz de g.

(b) Usando la matriz anterior, encontrad el ángulo α de manera que el segmento que va de $g(A)$ a $g(B)$ sea paralelo al eje y y el punto $g(B)$ quede en el primer cuadrante. Calculad $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ y $g(D)$.

(c) Sea f un escalado de razón $\frac{1}{3}$ y desde el punto $P=(a,b)$. Calculad la matriz de f y encontrad los valores que deberían tener a y b si queremos que $f(A)=(0,0)$.

Solución

(a) Para simplificar notaciones, denotamos $c=\cos(\alpha)$ y $s=\sin(\alpha)$. La matriz del giro de ángulo α en sentido antihorario y desde el punto $(0,0)$ es la siguiente (Ver el Módulo 5, Sección 3):

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Las imágenes de A,B,C,D por g son:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4\\ -1 & -1 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c+s & 4c+s & c+3s & 4c+3s\\ s-c & 4s-c & s-3c & 4s-3c\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos el vector $g(B)-g(A)=(4c+s,4s-c)-(c+s,s-c)=(3c,3s)$.
Imponiendo que sea paralelo al eje y, obtenemos $3c=0$. O sea, $c=0$.
Imponiendo que $g(B)=(s,4s)$ esté en el primer cuadrante obtenemos que $s>0$.
Por tanto, $\alpha=90^{\mathrm{o}}$.
Entonces $s=1$ y, sustituyendo s y c por sus valores en la matriz anterior, obtenemos las imágenes de los puntos dados: $g(A)=(1,1)$, $g(B)=(1,4)$, $g(C)=(3,1)$ y $g(D)=(3,4)$.

(c) La matriz del escalado desde el punto $P=(a,b)$ y de razón $\frac{1}{3}$ se obtiene multiplicando las tres matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la imagen de A utilizando la matriz anterior

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2a}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

Si queremos que $f(A) = (0,0)$, igualamos esos puntos. Obtenemos dos ecuaciones: $\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} = 0$ $-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} = 0$. Y de ellas podemos deducir que $a = -\frac{1}{2}$ y que $b = \frac{1}{2}$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$