Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 10+15=25%) Considereu el graf $G = (T_3 \times T_2) + C_4$.

   a) Calculeu el diàmetre de G.

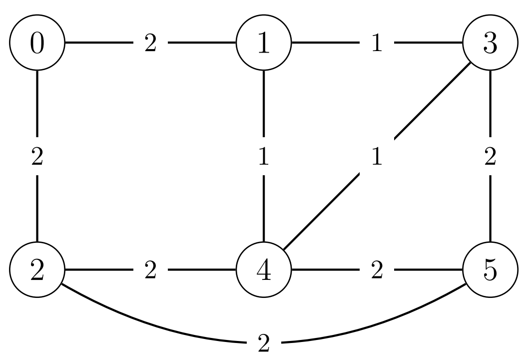
   b) Calculeu el nombre màxim d'arestes que es poden eliminar de G de tal manera que el graf resultant sigui connex.

   Solució:

   a) A G tots els vèrtexs de $T_3 \times T_2$ són adjacents a tots els vèrtexs de C_4. Per tant, G tindrà diàmetre 2.

   b) El nombre d'arestes de G és 35. Com que té ordre 10, el mínim nombre d'arestes per tal que sigui conex és 9. Per tant, podem eliminar $35 - 9 = 26$ arestes.

2. (Valoració d'un 15+10%) Utilitzeu l'algorisme de Prim per calcular un arbre generador minimal del graf,



Si haguéssim utilitzat l'algorisme de Kruskal, hauríem obtingut el mateix arbre? Justifiqueu la reposta.

Solució: La taula següent s'obté aplicant l'algorisme de Prim a partir del vèrtex 0:

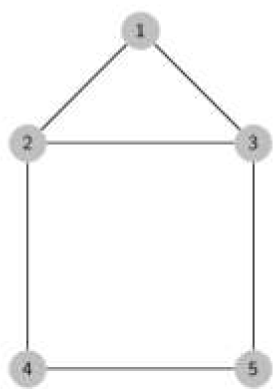
0	1	2	3	4	5
(0,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)*	(2,0)	(2,0)	∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(2,0)*	(2,0)	(1,1)	(1,1)	(∞,0)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)*	(1,1)	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)	(1,1)*	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)*	(1,1)	(1,1)	(2,3)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(1,1)	(1,1)	(2,3)*

D'acord amb aquesta taula, l'arbre generador minimal estarà format per les arestes: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{3,5\}$ amb un pes total de 8.

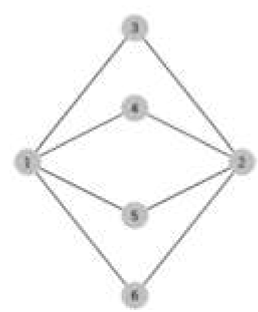
Si haguéssim utilitzat l'algorisme de Kruskal hauríem obtingut un arbre generador minimal amb el mateix pes però podria no coincidir amb el que ha trobat l'algorisme de Prim. Per exemple, podríem haver obtingut l'arbre: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$.

3. (Valoració d'un 10+10+5=25%) Considereu els grafs G_1 i G_2 de la figura.

G_1



G_2



a) Demostreu que G_1 és hamiltonià però no eulerià.

b) Demostreu que G_2 és eulerià però no hamiltonià.

c) Escriviu G_2 com a combinació de grafs elementals.

Solució:

a) És hamiltonià perquè agafant totes les arestes excepte $(2,3)$ tenim un cicle hamiltonià. No és eulerià perquè hi ha vèrtexs amb grau senar.

b) És eulerià perquè tots els vèrtexs tenen grau parell. No és hamiltonià perquè eliminant els dos vèrtexs de grau 4 obtenim més de dos components connexos. També podem justificar que no és hamiltonià perquè un cicle hamiltonià hauria de contenir totes les arestes corresponents als vèrtexs de grau 2, que són totes les del graf, passant llavors més d'un cop per alguns vèrtexs.

c) $N_4 + N_2$, o bé $(K_4UT_2)^C$.

4. (Valoració d'un 12,5+12,5=25%) Considereu els dos problemes de decisió següents:

$HAM - CYCLE$: Donat un graf d'ordre n, $G = (V, A)$, i un enter k, volem determinar si existeix un cicle hamiltonià a G.
$TSD2(k)$: Donat un graf *complet* d'ordre n, $G = (V, A)$, amb pesos a les arestes, volem saber si G té un cicle hamiltonià de pes total inferior o igual a k.

a) Demostreu que el problema de decisió $TSD2(k)$ pertany a NP. Escriviu el problema d'optimització associat a $TSD2(k)$.

b) Considereu la funció $f(G) = (G', k)$ que associa a cada graf $G = (V, A)$ el graf complet $G' = (V, A')$, amb mateixos vèrtexs i amb les arestes ponderades següents:
- Si $(u, v) \in A$, aleshores l'aresta (u, v) de A' té pes 1.
- Si $(u, v) \notin A$, aleshores l'aresta (u, v) de A' té pes 2.
Volem realitzar la reducció $HAM - CYCLE \leq_p TSD2(k)$. Demostreu que per $k = n$ la funció f és una funció de reducció polinòmica correcta. Justifiqueu també si f és calculable en temps polinòmic. *Indicació:* Dibuixeu un exemple per entendre quin graf G' s'associa a G.

Solució:

a) Per provar que $TSD2(k)$ pertany a NP, un testimoni seria una llista d'arestes. Només cal comprovar que formen un cicle, i que passen per tots els vèrtexs, la qual cosa es pot fer en temps lineal.
El problema d'optimització associat a $TSD2(k)$ seria: "Donat un graf complet d'ordre n, $G = (V, A)$, amb pesos a les arestes, volem trobar el cicle hamiltonià de menor pes sobre G."

b) El resultat d'aplicar $TSD2(k)$ amb $k = n$ sobre el graf G' ens donarà la resposta a si hi ha un cicle hamiltonià a G: si hi ha un cicle hamiltonià a G' amb pes total inferior o igual a n, vol dir que s'haurà assolit recorrent n arestes de valor 1, és a dir, n arestes de G. Observeu que si s'usa una aresta de G' de pes 2 és impossible tenir un cicle de pes inferior o igual a n. De la mateixa manera, si existeix un cicle hamiltonià a G, necessàriament hi ha un a G' de pes total menor o igual que n. D'altra banda, la funció definida es pot calcular en temps polinòmic. Si, per exemple, les arestes vénen donades per una matriu d'adjacències A, només cal canviar-hi els zeros per dosos, i obtindrem la matriu d'adjacències de G' en temps $O(n^2)$.

Final 2

1. (Valoració d'un 15+10%) Donada la següent seqüència: $1, 1, 1, 2, 2, 2, n$, $(n \leq 3)$,

   a) Determineu per quins valors de n obtenim una seqüència gràfica usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

   b) En els casos en què tenim una seqüència gràfica, dibuixeu un graf que hi corresponguí.

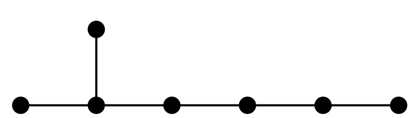
Solució:

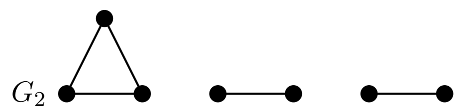
a) $n = 0, 1, 2, 3$. Per $n = 0, 2$ hi hauria tres vèrtexs de grau senar. Per tant, tenim dues possibilitats només:

	3,2,2,2,1,1,1
	1,1,1,1,1,1
	0,1,1,1,1
$n = 3$	1,1,1,1,0
	0,1,1,0
	1,1,0,0
	0,0,0

	1,2,2,2,1,1,1
	2,2,2,1,1,1,1
	1,1,1,1,1,1
$n = 1$	0,1,1,1,1
	1,1,1,1,0
	0,1,1,0
	1,1,0,0
	0,0,0

b) Dos grafs que tenen aquestes seqüències de graus podrien ser:

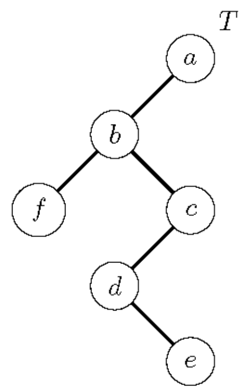
G_1 



2. (Valoració d'un 15+10=25%)

   a) Un arbre de 21 vèrtexs té un vèrtex de grau 6, 2 de grau 5, x de grau 3 i la resta són fulles. Quantes fulles té?

   b) Calculeu els recorreguts en preordre i postordre de l'arbre T,



Solució:

a) Si denotem per y el nombre de fulles, aplicant la fòrmula dels graus:

$$2(21-1) = 1\cdot 6 + 2\cdot 5 + x\cdot 3 + y\cdot 1.$$

D'aquesta equació obtenim, $40 = 16+3x+y$. Per altra banda, tenim $21 = 1+2+x+y$. De les dues equacions deduïm, $x = 3$ i $y = 15$.

b) Recorregut en preordre: a, b, f, c, d, e.

Recorregut en postordre: f, e, d, c, b, a.

3. (Valoració d'un 15+10=25%) Un graf té dotze vèrtexs, numerats de l'1 al 12. Dos vèrtexs v_i i v_j són adjacents si i només si $i + j \leq 10$ i $i \neq j$.

   a) Calculeu la seva mida i digueu quins són els seus de components connexos.

   b) Trobeu el diàmetre del subgraf induït pels vèrtexs numerats de l'1 al 9.

Solució:

a) Hi ha 20 arestes:
$(1,2),(1,3),\ldots,(1,9),$
$(2,3),(2,4),\ldots,(2,8),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),$
$(4,5),(4,6).$
En total, $8+4+6+2=20$.
Tots els vèrtexs són adjacents a l'1 excepte el 10, l'11 i el 12, que són vèrtexs aïllats. Per tant, hi ha quatre components: un format pels vèrtexs 1 al 9, i un per cadascun dels vèrtexs 10, 11 i 12.

b) El diàmetre d'aquest component connex és dos, ja que hi ha vèrtexs no adjacents, però tot vèrtex és adjacent a l'1.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Sigui A un problema de la classe NP. Digueu si les següents afirmacions són verdaderes o falses, justificant la resposta:

   a) A no es pot resoldre en temps polinòmic.

   b) A es pot resoldre en espai polinòmic.

   c) Si $A \leq_p B$, llavors B també pertany a la classe NP.

   d) A és verificable en temps polinòmic.

   Solució:

   a) Fals, ja que P està inclòs a NP. Per tant, tot problema de la classe P pertany tant a P com a NP.

   b) Verdader, ja que la classe NP està inclosa a la classe $PSPACE$.

   c) Fals. Seria cert si la reducció fos $B \leq_p A$.

   d) Verdader, per definició de la classe NP.

Final 3

1. (Valoració d'un 5+5+5+10=25%) Digueu si les següents afirmacions són verdaderes o falses, justificant la resposta:

   a) Tot graf hamiltonià també és eulerià.

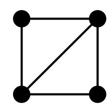
   b) Tot graf eulerià conté un recorregut eulerià.

   c) Un circuit eulerià conté tots els vèrtexs del graf.

d) Tot graf 2-connex és hamiltonià.

Solució:

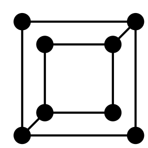
a) Fals. Com ho prova el següent contraexemple,



b) Fals. En un graf eulerià tots els vèrtexs tenen grau parell. Si conté un recorregut eulerià hauria de tenir exactament dos vèrtexs de grau senar.

c) Cert. Un circuit eulerià passa per totes les arestes del graf, per la qual cosa també ha de passar per tots els vèrtexs.

d) Fals. Com ho prova el següent contraexemple:



2. (Valoració d'un 15+10=25%) Sigui G una xarxa de nodes $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si apliquem l'algorisme de Dijkstra a partir del node 0 s'obté la taula següent:

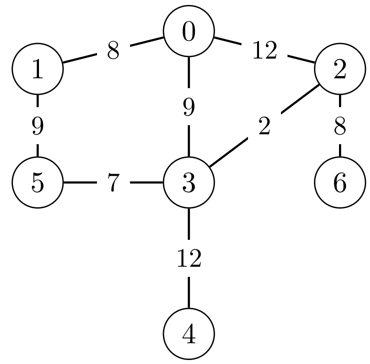
0	1	2	3	4	5	6
(0,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)*	(8,0)	(12,0)	(9,0)	(∞,0)	(∞,0)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)*	(12,0)	(9,0)	(∞,0)	(17,1)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)*	(21,3)	(16,3)	(∞,0)
(0,0)	(8,0)	(11,3)*	(9,0)	(21,3)	(16,3)	(19,2)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)	(16,3)*	(19,2)
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)	(16,3)	(19,2)*
(0,0)	(8,0)	(11,3)	(9,0)	(21,3)*	(16,3)	(19,2)

a) A partir de la taula, reconstruïu tot el que pugueu de la xarxa G.

b) Podem assegurar que el diàmetre de G és més gran o igual que 21? Justifiqueu la resposta.

Solució:

a) La xarxa seria:



b) Segons l'algorisme de Dijkstra la distància màxima del vèrtex 0 a la resta de vèrtexs és 21. Per tant, el diàmetre ha de ser com a mínim 21.

3. (Valoració d'un 12,5+12,5=25%)

   a) Un arbre amb arrel té 5 vèrtexs interns i 11 fulles. A més, tots els vèrtexs interns tenen el mateix nombre k de fills. Useu el lema de les encaixades per trobar el valor de k.

   b) Dibuixeu l'arbre binari corresponent a l'expressió aritmètica $(3 * x + y/6)^2$ (usant la prioritat d'operacions habitual). Escriviu la seqüència de vèrtexs que s'obté en explorar l'arbre usant DFS.

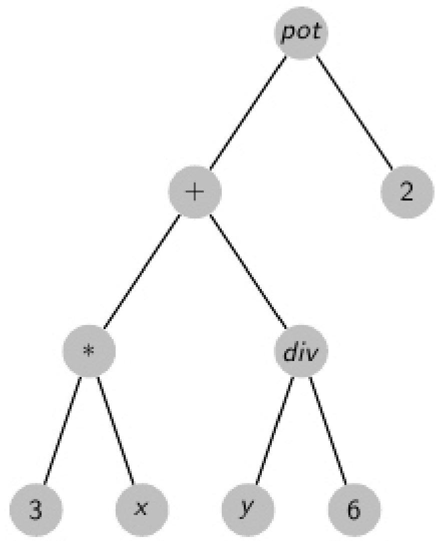
   Solució:

   a) De cada vèrtex intern surten $k+1$ arestes: k cap als fills i 1 cap al pare. L'única excepció és l'arrel, d'on només en surten les k arestes corresponents als fills. Com de les fulles només surt una aresta, el lema de les encaixades ens diu $2m = (k+1)4 + k + 11$, on m és la mida de l'arbre. D'altra banda, en els arbres la mida és una unitat inferior a l'ordre, de manera que $m = 15$, d'on $30 = (k+1)4 + k + 11$. Operant i aïllant la k obtenim $k = 3$.

   b) $\hat{}\ + * 3\ x\ /\ y\ 6\ 2$ seria la seqüència obtinguda.

4. (Valoració d'un 5+10+10=25%) Siguin els dos problemes de decisió següents:

   $INDEPENDENT-SET$: Donat un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i un enter k, volem determinar si existeix un conjunt independent de mida superior o igual a k a G. (Recordeu que un *conjunt independent* és un conjunt de vèrtexs tals que no hi ha cap aresta de G que uneixi dos vèrtexs del conjunt).
   $VERTEX-COVER$: Donat un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i un enter k, volem saber si G té un recobriment de vèrtexs de mida inferior o igual a k. (Recordeu que



un *recobriment de vèrtexs* és un conjunt de vèrtexs tals que tota aresta de G, (u, v), verifica que almenys un dels dos vèrtexs, u o v, pertany al conjunt).

a) Marqueu sobre el graf de la figura un recobriment de vèrtexs de G format per 3 vèrtexs. Comproveu que el complementari d'aquest subconjunt de vèrtexs forma un conjunt independent.

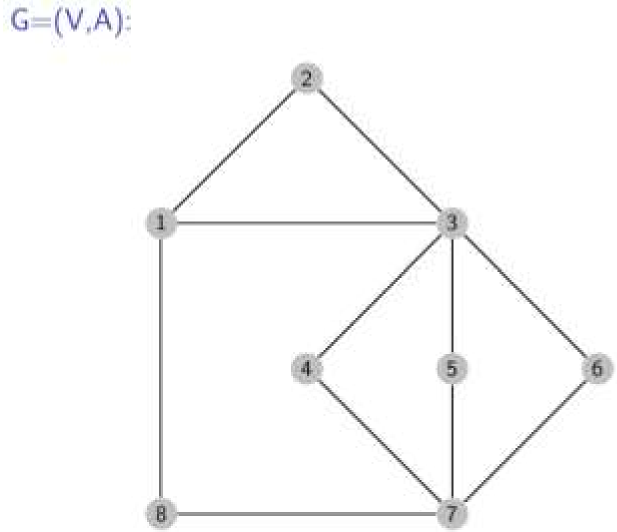
b) Demostreu que, per qualsevol graf, el complementari d'un recobriment de vèrtexs forma un conjunt independent i que, recíprocament, el complementari d'un conjunt independent és un recobriment de vèrtexs.

c) Useu el resultat anterior per donar una funció de reducció que permeti demostrar que $VERTEX - COVER \leq_p INDEPENDENT - SET$.

Solució:

a) El subconjunt d'arestes $B = \{1, 3, 7\}$ és un recobriment de vèrtexs. El seu complementari és $B^C = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, que és, efectivament, un conjunt independent.

b) Sigui B un recobriment de vèrtexs. Si B^C no fos un conjunt independent existiria una aresta que uniria dos vèrtexs de B^C. Aleshores tindríem una aresta sense cap dels seus dos extrems a B i, per tant, B no seria un recobriment de vèrtexs. Recíprocament, si tenim un conjunt independent B, el complementari B^C ha de ser



un recobriment de vèrtexs: si tinguéssim una aresta (u, v) tal que ni u ni v pertanyessin a B^C aleshores (u, v) seria una aresta que uniria dos vèrtexs de B, contradint que B és un conjunt independent.

c) La funció que necessitem simplement calcula $n-k$. Això es fa en temps constant. Pel que hem observat a l'apartat anterior, si $INDEPENDENT-SET$ amb paràmetre $n-k$ té solució, aleshores $VERTEX-COVER$ amb paràmetre k (sobre el mateix graf) també en té.