Universitat Oberta de Catalunya

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

ASIGNATURA: Grafos y Complejidad

Final 1

1. (Valoración de un 5+5+5+10=25 %)

   El siguiente algoritmo realiza un cambio de base de un número entero no negativo n expresado en base 10 a base 2.

   ```
   función CambioBase2(n)
     inicio
       m ← 0
       pot ← 1
       mientras n > 0
                 m ← (n mod 2) * pot + m
                 n ← n div 2
                 pot ← 10 * pot
       finmientras
       retorno m
     fin
   ```

   Justificar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) Si $n = 100$ la complejidad del algoritmo es $O(\log 100) = O(1)$.

   b) Si $n = 100$, la complejidad del algoritmo es $O(\log_2 100)$.

   c) La complejidad del algoritmo es $O(\log_2 n)$.

   d) La complejidad del algoritmo es $O(\log n)$.

   Solución:

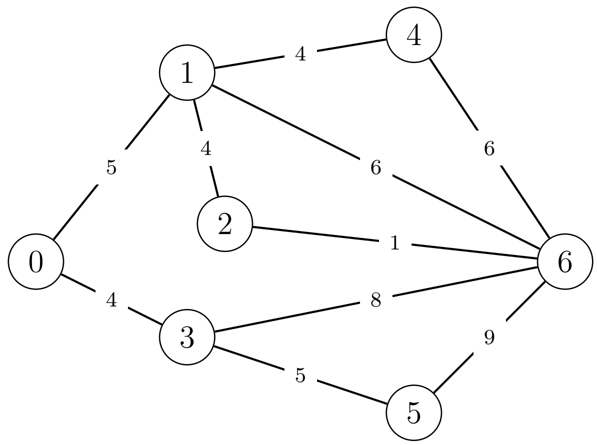
   a) Falsa. La complejidad es una medida asintótica y no tiene sentido calcularla para un valor determinado de la entrada.

   b) Falsa. Por el mismo motivo que el anterior.

   c) Cierta. La complejidad del cambio de base es $O(\log_2 n)$.

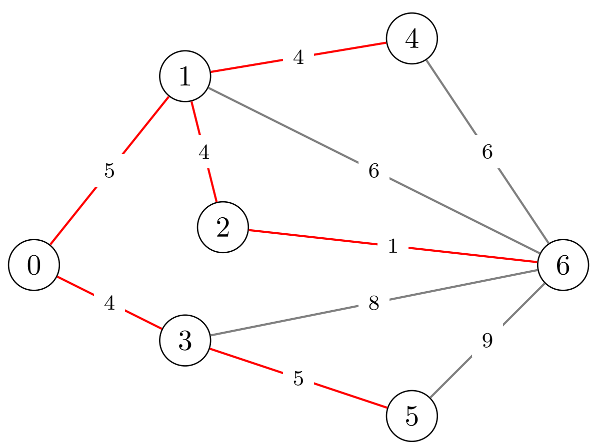
   d) Cierta. Puesto que $O(\log n) = O(\log_b n)$ para cualquiera base $b > 0$.

2. (Valoración de un 15+10=25 %) Utilizando el algoritmo de Kruskal, encontrar un árbol generador minimal del grafo,



¿El árbol minimal obtenido es único? Justificar la respuesta.

Solución: Aplicando el algoritmo de Kruskal obtenemos el árbol generador minimal siguiente:



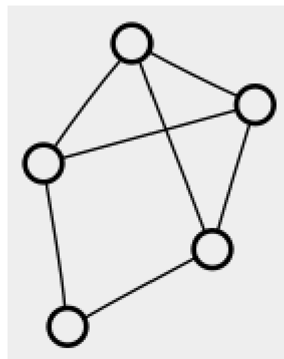
El árbol obtenido es único puesto que en cada paso hemos elegido todas las posibles aristas de peso más pequeño. Las de peso 1, 4 y 5. Las que quedan ya son de peso más grande.

3. (Valoración de un 5+10+10=25 %)

   a) Demostrar que un grafo con un vértice aislado no puede ser autocomplementario.

b) Si un grafo tiene grado mínimo k, ¿qué medida mínima puede tener?

c) Demostrar que el siguiente grafo es hamiltoniano, pero no tiene ningún camino euleriano ni es bipartito.



Solución:

a) El complementario es conexo, ya que en G^c todo vértice será adyacente al vértice aislado de G.

b) Como todo vértice tiene k o más vecinos, la suma de grados será por lo menos nk, donde n es el orden del grafo. Esta suma es igual al doble de la medida del grafo, por la fórmula de los grados. Por lo tanto, $2m \geq nk$, de donde $m \geq \lceil nk/2 \rceil$.

c) Es hamiltoniano porque hay un ciclo que contiene todos los vértices. No tiene ningún camino euleriano porque el número de vértices de grado impar es superior a dos. No es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar (C_3 y C_5).

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)
Decir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes, justificando la respuesta:

a) Un problema que puede resolverse en tiempo $O(n^{73})$ tiene complejidad polinómica.

b) El problema *"Dado un grafo, decidir si es hamiltoniano"* no pertenece a NP.

c) $A \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C)$ es una fórmula en FNC (forma normal conjuntiva).

d) Si A es NP-difícil, entonces $A \in NP$.

Solución:

a) Cierto, por definición.

b) Falso. Un testigo sería una lista ordenada de los vértices que forme un ciclo hamiltoniano.

c) Cierto, es una conjunción de disyunciones.

d) Falso. Sería cierto si A fuese NP-completo.

Final 2

1. (Valoración de un 5+10+10=25 %) En almacenamiento distribuido como el que utiliza Google, la información se replica en varios servidores para facilitar la búsqueda y la recuperación de información. Podemos imaginar un sistema de almacenamiento distribuido como un grafo bipartito $G(I \cup S, A)$. El conjunto I representa el conjunto de unidades de información y el conjunto S representa el conjunto de servidores. Utilizando la teoría de grafos, responder las siguientes cuestiones:

   a) Si disponemos de 6 servidores y cada servidor no puede contener más de 4 unidades de información, ¿cuál es el número máximo de unidades de información que puede almacenar el sistema?

   b) Si suponemos que cada unidad de información debe replicarse en 3 servidores, ¿cuál es el número máximo de unidades de información distintas que puede almacenar el sistema?

   c) En el mismo sistema, es decir, con 6 servidores y cada servidor no puede contener más de 4 unidades de información, ¿cuál es el número máximo de unidades de información que podemos almacenar según el número de replicaciones que elijamos?

   Solución: En el grafo bipartito G, llamamos n al número de elementos de I. El número de elementos de S es 6.

   a) Si cada servidor no puede contener más de 4 unidades de información, entonces el número máximo de unidades de información que puede almacenar el sistema será $n = 4 \cdot 6 = 24$.

   b) Si cada unidad de información se replica en 3 servidores significa que cada vértice de I tiene grado 3. Por lo tanto, $3n = 24$ y $n = 8$.

   c) Si b es el número de replicaciones y n el número de unidades de información, entonces $bn = 24$ con $b \leq 6$. Las posibilidades para (b, n) serán, $(1, 24)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 6)$ y $(6, 4)$.

2. (Valoración de un 5+10+10+5=25 %) Aplicando el algoritmo de Floyd a un grafo ponderado de 7 vértices obtenemos la matriz,

$$d^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 11 & 12 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & 13 & 7 & 3 \\ 11 & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & 11 \\ 12 & 11 & 13 & 6 & 0 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 11 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El diámetro del grafo es 13.

b) El grafo es conexo.

c) Aplicando 7 veces el algoritmo de Dijkstra con origen en cada vértice, obtendríamos el mismo resultado que aplicando el algoritmo de Floyd.

d) El algoritmo de Dijkstra es más eficiente que el algoritmo de Floyd cuando lo utilizamos para calcular el diámetro del grafo.

Solución:

a) Cierto. El valor màximo de la matriz es 13 que es el diàmetro del grafo.

b) Cierto. Todas las entradas de la matriz son finitas lo cual significa que entre cada pareja de vértices existe un camino.

c) Cierto. La fila i-ésima de la matriz es la distancia mínima del vértice i al resto de vértices que tiene que coincidir con la obtenida con el algoritmo de Dijkstra.

d) Falso. El algoritmo de Dijsktra tiene una complejidad $O(n^2)$ y el algoritmo de Floyd $O(n^3)$ pero, si aplicamos el algoritmo de Dijkstra n veces, obtendremos la misma complejidad $O(n^3)$.

3. (Valoración de un 5+5+5+10=25 %)

Sea la secuencia $4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

a) Demostrar que es gráfica usando el algoritmo de Havel-Hakimi.

b) Dibujar un grafo que tenga esta secuencia.

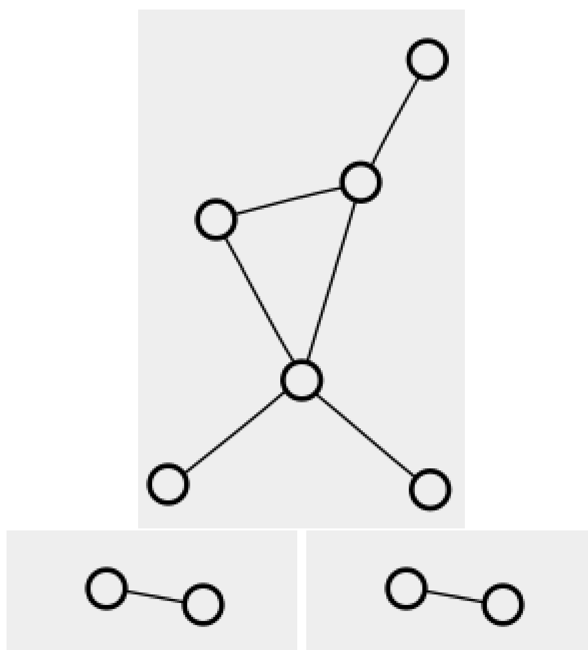
c) Demostrar que un árbol no puede tener esta secuencia.

d) Demostrar que un grafo conexo no puede tener esta secuencia. (Indicación: usar el apartado anterior; y pensar como puede ser un ciclo de este grafo).

Solución:

a) Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi:
4,3,2,1,1,1,1,1,1,1
2,1,0,0,1,1,1,1,1
2,1,1,1,1,1,1,0,0
0,0,1,1,1,1,0,0
1,1,1,1,0,0,0,0
0,1,1,0,0,0,0
1,1,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0

b) Una posibilidad sería:



c) No puede ser un árbol porque el número de aristas, que es $(4+3+2+1\cdot 7)/2 = 8$, no es igual al número de vértices (10) menos uno.

d) Supongamos que G es conexo y tiene la secuencia de grados dada. Hemos visto que G no puede ser un árbol en el apartado anterior. Como G es conexo pero no un árbol, debe contener un ciclo. Un vértice de grado 1 no puede estar en el ciclo, por lo que el ciclo debe estar formado por los vértices de grado 2, 3 y 4. Si intentamos añadir vértices de grado 1 al ciclo, manteniendo el grafo conexo, sólo podemos poner 3 (y obtendríamos el grafo de la solución del segundo apartado, quitando los dos T_2).

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)
Decir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes, justificando la respuesta:

    a) Un problema que puede resolverse en tiempo $O(n^{1000})$ es intratable.

    b) Si $A \leq_p B$ y $A \notin P$, entonces $B \notin P$.

    c) El problema *"Dado un grafo, decidir si contiene un subgrafo completo de medida 6"* es verificable en tiempo polinómico.

    d) Un problema que puede resolverse en tiempo $O(3^n)$ tiene complejidad polinómica.

    Solución:

    a) Falso, ya que puede resolverse en tiempo polinómico.

    b) Cierto, por las propiedades de las reducciones.

    c) Cierto, un testigo sería dar seis vértices que formen un K_6.

    d) Falso, en principio tendría complejidad exponencial.

Final 3

1. (Valoración de un 15+10=25 %) Considerar la siguiente secuencia de números enteros ordenada en orden decreciente,

$$5, 4, 3, 3, 2, y, x$$

    a) Para qué valores de y y x corresponden a la secuencia de grados de un grafo.

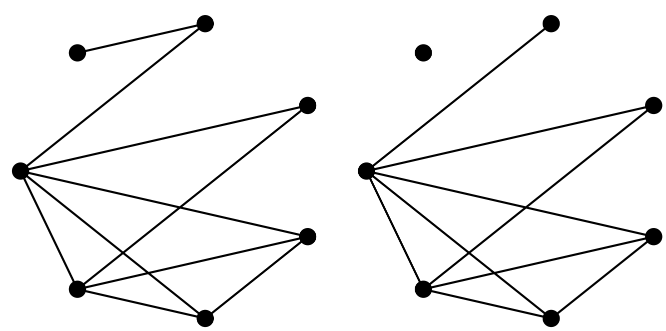
    b) Para los valores de y y x obtenidos en el apartado anterior, dibujar un grafo que la tenga como secuencia de grados.

    Solución:

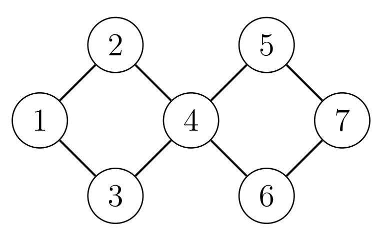
    a) Puesto que la secuencia está ordenada, deducimos que $0 \leq x \leq y \leq 2$. Además, puesto que el número de vértices de grado impar tiene que ser par deducimos que y o x tienen que ser impares pero no los dos. Así tenemos dos posibilidades,

- $y = 2$, $x = 1$: Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi:
  5,4,3,3,2,2,1
  3,2,2,1,1,1
  1,1,0,1,1
  1,1,1,1,0
  0,1,1,0
  1,1,0,0
  0,0,0
- $y = 1$, $x = 0$:
  5,4,3,3,2,1,0
  3,2,2,1,0,0
  1,1,0,0,0
  0,0,0,0

b) Una representación gráfica de los dos grafos podría ser:



2. (Valoración de un 15+10=25 %) Dado el grafo,



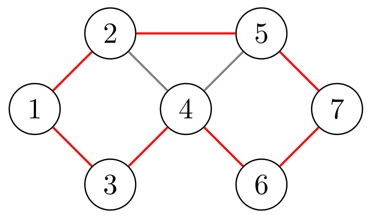
a) Demostrar que es euleriano pero no hamiltoniano.

b) Añadir el número mínimo de aristas al grafo anterior de forma que no sea euleriano pero si hamiltoniano.

Solución:

a) Todos los vértices tienen grado par, por tanto es un grafo euleriano. Si eliminamos el vértice 4 obtenemos dos componentes conexas, por tanto no puede ser hamiltoniano.

b) Si añadimos la arista $\{2, 5\}$ entonces el grafo tendrá dos vértices de grado impar y, por tanto, no podrá ser euleriano. Ahora sí podemos construir el siguiente ciclo hamiltoniano:



3. (Valoración de un 10+15=25 %)

a) Dada la expressión aritmética $3 * (x + 1)^2$, con la prioridad habitual de operaciones, dibujar el árbol asociado y dar el recorrido del árbol en preorden y en postorden.

b) Dar el orden y la medida de los grafos $T_3 + N_2$, $K_4 \cup C_4$ i $N_1 \times T_4$.

Solución:

a) En preorden: $* \ 3 \ \hat{}\ + \ x \ 1 2$
En postorden: $3 \ x \ 1 \ + \ 2 \ \hat{}\ *$

b) El orden es $n(T_3 + N_2) = 5$. La medida es $m(T_3 + N_2) = m(T_3) + m(N_2) + n(T_3) \cdot n(N_2) = 8$.
$n(K_4 \cup C_4) = 8$. $m(K_4 \cup C_4) = m(K_4) + m(C_4) = 6 + 4 = 10$.
$N_1 \times T_4 = T_4$, que tiene orden 4 y medida 3.

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)
Decir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes, justificando la respuesta:

a) Si $A \leq_p B$ y $A \notin NP$, entonces $B \notin NP$.

b) Si $A \leq_p B$ y A es NP-completo, entonces B es NP-completo.

c) Un problema verificable en tiempo $O(n^{50})$ pertenece a NP.

d) El problema "*Dado un grafo, decidir si es euleriano*"pertenece a P.

Solución:

a) Cierto, por las propiedades de las reducciones.

b) Falso, porque B no tiene porqué pertenecer a NP.

c) Cierto, por definición de NP.

d) Cierto, ya que sería suficiente mirar la paridad de los grados de los vértices.