PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

   (a) Sigui T un arbre d'ordre 21 tal que el seu conjunt de graus és $\{1, 3, 5, 6\}$. Suposem que T té 15 fulles i un vèrtex de grau 6. Quants vèrtexs té de grau 5?

   (b) Per a quins valors de n el graf bipartit complet $K_{n,12}$ és un arbre? Justifica la resposta.

   (c) Dibuixeu l'arbre corresponent a l'expressió aritmètica

   $$\frac{2a - 5^{b+c}}{b + c} + 5a,$$

   tenint en compte la prioritat habitual dels operadors.

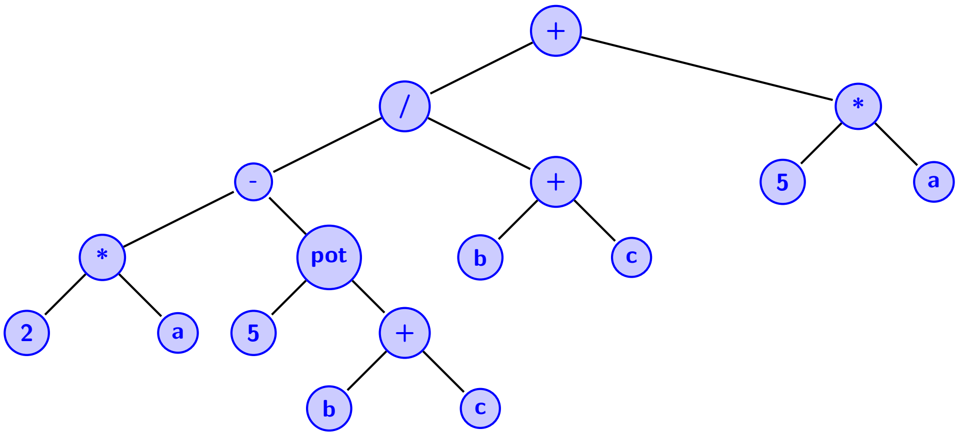
   (d) Doneu el recorregut en preordre, inordre i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

Solució:

(a) Denotem per x i y el nombre de vèrtexs de grau 3 i 5, respectivament. Aplicant el lema de les encaixades, obtenim $2(21 - 1) = 1 \cdot 15 + 3x + 5y + 6 \cdot 1$, o sigui $40 = 21 + 3x + 5y$. Per altra banda, $21 = 15 + 1 + x + y$. Resolent el sistema obtenim, $x = 3$ i $y = 2$. Per tant, l'arbre té 2 vèrtexs de grau 5.

(b) El graf bipartit complet $K_{n,12}$ té $|V| = 12 + n$ vèrtexs i $|A| = 12n$ arestes. Per tal que sigui un arbre, s'ha de complir que $|A| = 12n = 12 + n - 1 = |V| - 1$, o sigui $12n = 11 + n$. Aquesta igualtat només es compleix per $n = 1$. Així tenim que $K_{n,12}$ és un arbre si i només si $n = 1$.

(c) L'arbre és



(d) Aquests són els recorreguts:

- Preordre: + / - * 2 a pot 5 + b c + b c * 5 a;
- Inordre: 2 * a - 5 pot b + c / b + c + 5 * a;
- Postordre: 2 a * 5 b c + pot - b c + / 5 a * +.

---

2. (Valoració d'un 20%) Utilitzant la teoria de grafs, responeu a les qüestions següents:

   (a) En un campionat de brisca s'apunten 277 jugadors. Tenint en compte que els jugadors competeixen sempre per eliminatòries de quatre jugadors, calculeu quantes rondes cal fer fins arribar a proclamar el vencedor. Quantes partides s'hauran celebrat en total?

(b) Si en un campionat de brisca s'han celebrat 350 partides, quants jugadors hi havia inicialment en el campionat? En aquest cas, quantes rondes cal fer fins arribar a proclamar el vencedor?

(c) Quants jugadors han jugat la ronda prèvia en el campionat de brisca on participen 277 jugadors? Indicació: Una ronda prèvia és una ronda en la qual el nombre de jugadors que juguen una partida és menor que el nombre màxim de jugadors que hi pot haver en aquesta ronda. Per exemple, si en una ronda poden jugar un màxim de 16 jugadors i se n'han apuntat 19 jugadors, aleshores 4 jugadors han de jugar una ronda prèvia i, el guanyador, juntament amb els 19-4=15 jugadors restants, ja formaran una ronda completa de 16 jugadors.

(d) Sigui T un arbre binari complet amb altura $h = 3$. Si considerem a el vèrtex arrel, v_i, per $i = 1, \ldots, 2$ els vèrtexs de primer nivell, w_j, per $j = 1, \ldots, 4$ els de segon nivell, i u_k, per $k = 1, \ldots, 8$ els de tercer nivell, doneu el recorregut en BFS i DFS de l'arbre.

Solució: Un campionat de brisca es pot veure com un arbre 4-ari amb arrel complet on cada fulla és un jugador i cada node intern representa una partida. A més, cada nivell de l'arbre representa una ronda del campionat. Per tant, el nombre de rondes és l'altura de l'arbre.

(a) L'altura de l'arbre serà $h \geq \lceil \log_4 t \rceil$ on $t = 277$. Per tant, $h = 5$ ja que l'arbre és complet. Els $t = 277$ jugadors són les fulles de l'arbre. Com que $t = (m-1)i + 1$ tenim que $277 = 3i + 1$, o sigui $i = 92$. Per tant, tindran lloc 92 partides.

(b) En aquest cas hem de calcular el nombre de fulles de l'arbre que té 350 vèrtexs interns. Com que $i = 350$ i $m = 4$, tenim que $t = (m-1)i + 1 = 3 \cdot 350 + 1 = 1051$ jugadors. L'altura de l'arbre serà $h \geq \lceil \log_4 \rceil$ on $t = 1051$, per tant cal fer $h = 6$ rondes.

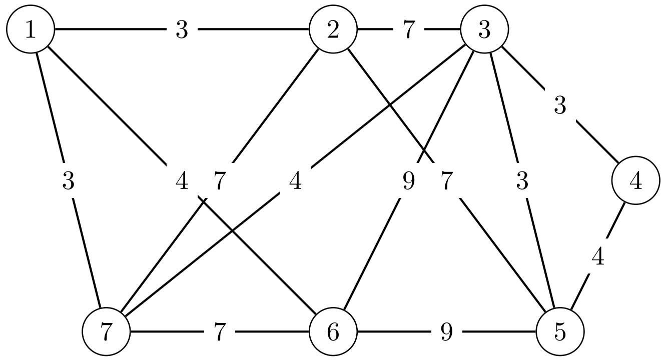
(c) Hem de calcular el nombre de fulles de cada nivell d'un arbre complet i equilibrat. Si les fulles estiguessin totes en el darrer nivell, aleshores el nombre de fulles seria una potència de 4. Com que el nombre de jugadors no és una potència de 4, alguns jugadors hauran de fer una ronda prèvia per tal que quedin un nombre de jugadors que sigui una potència de 4. Com que $256 = 4^4$ és la potència de 4 més propera a 277, si diem x els jugadors que estan a la ronda prèvia, s'ha de complir que $277 - x + \frac{x}{4} = 256$ que dóna $x = 28$ jugadors.

(d) Els recorreguts serien:

BFS	$av_1v_2w_1w_2w_3w_4u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8$
DFS	$av_1w_1u_1u_2w_2u_3u_4v_2w_3u_5u_6w_4u_7u_8$

---

3. (Valoració d'un 20%) Considereu el graf



(a) Apliqueu el següent mètode per calcular un arbre generador d'aquest graf: suprimir una a una les arestes del graf de major a menor cost de tal manera que el graf segueixi sent connex.

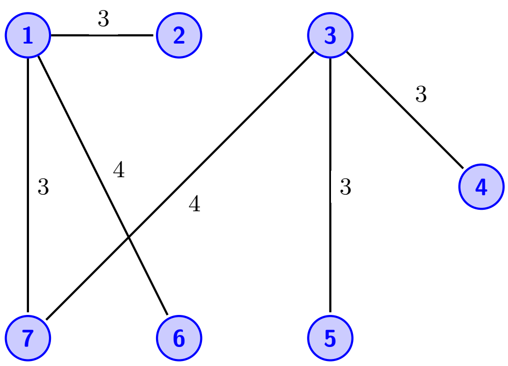
(b) L'arbre obtingut en l'apartat anterior és un arbre generador minimal? Justifiqueu la resposta.

(c) Si l'aresta $\{4, 5\}$ volem que formi part de la solució, l'arbre resultant serà un arbre generador minimal? Justifiqueu la resposta.

(d) Digueu si afecta o no al funcionament normal dels algorismes de Prim i Kruskal que les arestes puguin ser negatives. Si afecta, doneu alguna manera de solucionar el problema.

Solució:

(a) Si apliquem el mètode proposat obtenim l'arbre generador:



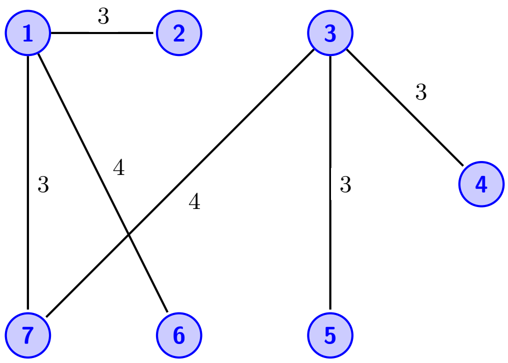
(b) Fem servir l'algorisme de Kruskal. Fem un llistat amb les arestes de menys a més pes:

Arestes	Pesos
$\{1, 2\}$	3
$\{1, 7\}$	3
$\{3, 4\}$	3
$\{3, 5\}$	3
$\{4, 5\}$	4
$\{1, 6\}$	4
$\{3, 7\}$	4
$\{2, 3\}$	7
$\{2, 5\}$	7
$\{2, 7\}$	7
$\{6, 7\}$	7
$\{3, 6\}$	9
$\{5, 6\}$	9

Triem les 6 primeres que no formen cap cicle i les marquem amb un asterisc, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Arestes	Pesos
$\{1, 2\}^*$	3
$\{1, 7\}^*$	3
$\{3, 4\}^*$	3
$\{3, 5\}^*$	3
$\mathbf{\{4, 5\}}$	
$\{1, 6\}^*$	4
$\{3, 7\}^*$	4
$\{2, 3\}$	
$\{2, 5\}$	
$\{2, 7\}$	
$\{6, 7\}$	
$\{3, 6\}$	
$\{5, 6\}$	

Per tant, l'arbre generador és:



amb pes total 20. Observem que té el mateix cost que l'arbre obtingut en l'apartat anterior, per tant podem asegurar que l'arbre generador obtingut en l'apartat anterior és minimal.

(c) No, si prenem l'aresta $\{4.5\}$ hauria de ser a canvi d'una aresta del mateix cost, $\{1,6\}$ o $\{3,7\}$, i en ambdos casos obtenim un graf no connex i amb un cicle entre els nodes 3, 4 i 5 que no seria arbre generador minimal. De fet, en aquest graf l'arbre generador minimal és únic.

(d) No afecta, simplement començaríem triant les arestes negatives i el pes total podria ser negatiu.

---

4. (Valoració d'un 20%)

(a) En el joc del dòmino, és possible completar un joc tancat, és a dir, una seqüència tancada amb totes les fitxes? I si eliminem les fitxes que continguin un 6?

(b) En una reunió de la Unió Europea s'han de celebrar conferències bilaterals entre alguns caps d'estat $\{A, B, C, D, E, F\}$. Les conferències que s'han de celebrar són les següents: A amb B, D, E i F; B amb C, D i F; C amb E; D amb E i F; i E amb F. Únicament es disposa d'una sala per a les conferències. És possible organitzar les conferències de forma que un participant de cada conferència també participi en la següent, però cap participi en tres conferències consecutives?

(c) Doneu un graf amb 8 vèrtexs que sigui eulerià però no hamiltonià, i un altre graf amb 10 vèrtexs que sigui hamiltonià però no eulerià.

(d) Determineu si els grafs següents tenen circuit hamiltonià: el graf estrella E_{13}, el graf bipartit complet $K_{23,22}$, i el graf $G(V, A)$ on $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}\}$. Si un graf en té, assenyaleu-lo; i si no en té, demostreu-ho usant algun criteri general.

Solució:

(a) Sigui $G(V, A)$ el graf on V representa les diverses puntuacions: blanc, un punt , ..., sis punts; i que té una aresta per a cada fitxa del dòmino. L'existència d'una seqüència circular està condicionada al fet que aquest graf sigui eulerià, cosa que es compleix ja que a G tots els vèrtexs tenen grau 8 (notem que els llaços compten doble). Si eliminem les fitxes que contenen un 6, en el nou graf associat, tots els vèrtexs tenen grau senar. Per tant, no és possible que hi hagi cap seqüència tancada que contingui totes les fitxes.

(b) Sigui $G(V, A)$ el graf on $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ i hi ha una aresta entre dos vèrtexs si es realitza una reunió entre els corresponents caps d'estat. En aquest cas, es tracta de comprovar si el graf G és eulerià. Com que els graus dels vèrtexs de G són 4,4,2,4,4,4, el graf és eulerià.

(c) Per exemple, el graf $K_{2,6}$ és un graf eulerià, ja que tots els vèrtexs tenen grau parell, 2 o 6, però no és hamiltonià perquè $2 \neq 6$. Per exemple, el graf cicle C_{10} afegint una aresta entre dos vèrtexs no consecutius, és clarament un graf hamiltonià, però no és eulerià ja que té dos vèrtexs de grau senar 3.

(d) El graf estrella E_{13} es pot considerar un graf bipartit complet $K_{1,12}$, i sabem que com que $1 \neq 12$ aquest no és hamiltonià. Pel mateix motiu, com que $23 \neq 22$ el graf bipartit complet $K_{23,22}$ tampoc és hamiltonià. Finalment, el graf $G(V, A)$ donat no és 2-connex, ja que tots els camins han de passar pel vèrtex 1, per tant tampoc és hamiltonià.

---

5. (Valoració d'un 20%) En les properes vacances volem fer un recorregut turístic en avió per algunes capitals europees. La següent taula mostra les distàncies en quilòmetres entre aquestes ciutats.

	Barcelona	Paris	Londres	Berlín	Viena
Barcelona		830	1140	1500	1350
Paris			345	880	1035
Londres				930	1235
Berlín					525
Viena					

(a) (5%) Quin algorisme utilitzaríeu (sense aplicar-lo) per calcular quins vols directes cal fer entre les cinc ciutats de forma que les ciutats estiguin connectades i la suma de les distàncies dels vols directes sigui mínima? I si volem saber si podem realitzar el viatge començant i acabant a Barcelona sense fer cap vol més d'una vegada, quin algorisme utilitzaríeu (sense aplicar-lo)? Justifiqueu la resposta.

(b) (10%) Utilitzeu l'algorisme més adequat per trobar, de forma aproximada, la ruta que hauríem de fer de forma que, començant i acabant a Barcelona sense fer cap vol més d'una vegada, el nombre total de quilòmetres en avió recorreguts fos el mínim possible. Primer trobeu una fita inferior pel nombre total de quilòmetres recorreguts, i a continuació una fita superior que no superi el doble de la solució òptima.

(c) (5%) Apliqueu el següent algorisme d'heurística voraç: ordenar les arestes de menor a major distància i anar-les escollint sempre i quan no sigui la tercera aresta que incideix en un mateix vèrtex i no es tanqui un recorregut abans d'haver visitat tots els vèrtexs (si es compleix una d'aquestes dues condicions es rebutja l'aresta). Compareu el resultat obtingut amb el de l'apartat anterior.

Solució:

(a) En el primer cas utilitzaríem l'algorisme de Kruskal o Prim, ja que es tracta de trobar l'arbre generador minimal del graf K_5 amb els costos donats per la taula del enunciat. En el segon cas, utilitzaríem l'algorisme de Hierholzer, ja que es tracta de trobar un recorregut eulerià en el mateix graf K_5.

(b) Podem calcular una fita inferior a partir del pes de l'arbre generador minimal. Aplicant l'algorisme de Kruskal o Prim, obtenim que aquest cost és $830 + 345 + 880 + 525 = 2580$. Com que les distàncies compleixen la desigualtat triangular, podem calcular de forma aproximada, la ruta mínima utilitzant l'algorisme TSP-aproximat, de forma que el cost no superi el doble de la solució òptima. Si apliquem l'algorisme de Prim des de Barcelona obtenim, en aquest ordre, les arestes (Barcelona,Paris), (Paris,Londres), (Paris,Berlin), (Berlin,Viena). L'arbre en preordre queda (Barcelona,Paris,Londres,Berlin,Viena). Aleshores la ruta seria (Barcelona,Paris,Londres,Berlin,Viena,Barcelona), amb longitud $830 + 345 + 930 + 525 + 1350 = 3980$. Aquest valor representa una fita superior que no supera el doble de la solució òptima.

(c) Ordenem les arestes de menor a major distància: (Paris,Londres), (Berlin,Viena), (Barcelona,Paris), (Paris,Berlin), (Londres,Berlin), (Paris,Viena), (Barcelona,Londres), (Londres,Viena), (Barecelona, Viena), (Barcelona,Berlin). Escollim les tres primeres, rebutgem (Paris,Berlin) perquè seria la tercera aresta que incideix al vèrtex Paris, escollim la cinquena, rebutgem (Paris,Viena) perquè Paris sortiria per tercer cop, rebutgem (Barcelona,Londres) perquè seria la tercera aresta que incideix al vèrtex Londres i a més tancariem el recorregut sense incloure tots els vèrtexs, rebutgem (Londres,Viena) per les mateixes raons, i finalment escollim la novena que tanca el recorregut complert. Per tant, obtenim la ruta (Barcelona,Paris,Londres,Berlin,Viena,Barcelona), la mateixa que en l'apartat anterior. No té perquè coincidir sempre, a diferència de l'algorisme TSP-aproximat aquest no asegura una fita inferior i superior, però a la pràctica dòna resultats prou ajustats.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 20/11/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**