Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %=5 %+ %5+10 %)

   a) Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y el conjunto $B = \{1, \ldots, 10\}$.

   1) ¿Cuántas funciones de A a B hay? ¿Cuántas de estas funciones son inyectivas? ¿Y cuántas son biyectivas?
   2) ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ cumplen que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$? ¿Cuántas de estas funciones son inyectivas?

   b) ¿Cuántos números capicúa naturales existen de hasta ocho cifras decimales? Calculad primero cuántos números capicúa hay de una cifra, de dos cifras, ..., y de ocho cifras. Un número es capicúa si al invertir el orden de sus cifras obtenemos el mismo número.

Solución:

a) 1) Hay $VR(10, 6) = 10^6 = 1000000$ funciones de A a B, de las cuales $V(10, 6) = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 151200$ son inyectivas. No hay ninguna biyectiva, puesto que los conjuntos A y B no tienen el mismo número de elementos.

2) Hay $10^4 = 10000$ funciones que cumplen esta condición, y de éstas hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ que son inyectivas.

b) Hay exactamente 9 números capicúa de una cifra, y hay el mismo número de dos cifras. De tres o cuatro cifras, hay el mismo número de capicúas, $9 \cdot 10 = 90$. Del mismo modo, de cinco o seis cifras hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, y de siete u ocho hay $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Por lo tanto, en total hay $2(9 + 90 + 900 + 9000) = 19998$ números que son capicúa.

---

2. (Valoración de un 20 %=2 %+5 %+5 %+5 %+3 %)

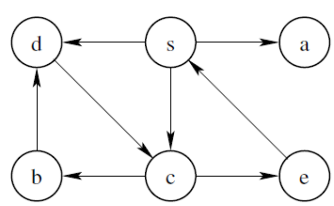
   Considerad una matriz cuadrada $M = (a_{ij})$ de medida $n \times n$, donde los coeficientes son valores enteros. Considerad el siguiente algoritmo:

```
función Func(M)
  inicio
    resultado ← 0
    para i ← 1 hasta n
        sum ← 0
        para j ← 1 hasta n
            sum ← sum + M[i, j]
        finpara
        si sum > resultado entonces
            resultado ← sum
        finsi
    finpara
    retorno resultado
  fin
```

a) Calculad el resultado de la llamada Func(M_1) si

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculad la matriz de adyacencia M_2 del siguiente grafo dirigido con vértices $V = \{a, b, c, d, e, s\}$ y el resultado de la llamada Func(M_2):



c) Si M es la matriz de adyacencia de un grafo G, ¿qué calcula el algoritmo respecto de G?

d) Calculad, en el peor de los casos, el número de operaciones que efectúa el algoritmo en función de n, y rellenad la siguiente tabla como resumen:

Línea	Coste
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
Total	

e) Determinad, en función de n, la complejidad del algoritmo.

Solución:

a) El resultado de la llamada es $Func(M_1) = 4$.

b) La matriz de adyacencia del grafo dado es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $Func(M_2) = 3$.

c) El algoritmo calcula el grado máximo de un grafo G, si M es la matriz de adyacencias del grafo. Si el grafo es dirigido, el algoritmo devuelve el grado de salida máximo.

d) La siguiente tabla muestra el número de operaciones que se hacen para cada línea del algoritmo:

Línea	Coste
3	1
4	$2n+2$
5	n
6	$(2n+2)n = 2n^2+2n$
7	$3n^2$
8	0
9	n
10	n
11	0
12	0
13	1
Total	$5n^2+7n+4$

e) En función de n, de acuerdo con el apartado anterior, la complejidad es $O(n^2)$.

---

3. (Valoración de un 20 %=10 %+5 %+5 %)

a) Sean s_1, s_2, s_3 y s_4 las siguientes secuencias de números enteros:

1) s_1: 6,6,5,4,4,3,3,3,3,3,3
2) s_2: 6,6,5,5,4,3,3,3,3,3,3
3) s_3: 9,9,8,8,6,3,3,3,3,3,3
4) s_4: 4,2,2,1,1,1,1,1,1

Determinad cuales de las secuencias anteriores son gráficas. Para las secuencias que son gráficas, determinad el orden, la medida y si el grafo correspondiente a la secuencia puede ser conexo. Rellenad la siguiente tabla como resumen, pero igualmente justificad todas las respuestas y no deis sólo la tabla de resumen como solución.

	es gráfica	orden	medida	conexo
s_1				
s_2				
s_3				
s_4				

b) Para la primera secuencia que es gráfica, dad un grafo G que tenga esta secuencia de grados, y justificad si el grafo G es bipartito.

c) Dad un grafo con la misma secuencia gráfica que el grafo G del apartado anterior, pero que no sea isomorfo a G. Justificad porqué no es isomorfo.

Solución:

a) La secuencia s_1 no es gráfica puesto que la suma de todos los valores $6+6+5+4+4+3+3+3+3+3+3=43$ no es par, o equivalentemente, contiene un número impar de números impares. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi, podemos comprobar si el resto de secuencias son gráficas o no:

s_2: 6,6,5,5,4,3,3,3,3,3,3
5,4,4,3,2,2,3,3,3,3
5,4,4,3,3,3,3,3,2,2
3,3,2,2,2,3,3,2,2
3,3,3,3,2,2,2,2,2
2,2,2,2,2,2,2,2
1,1,2,2,2,2,2
2,2,2,2,2,1,1
1,1,2,2,1,1
2,2,1,1,1,1
1,0,1,1,1
1,1,1,1,0
0,1,1,0
1,1,0,0
0,0,0
es gráfica

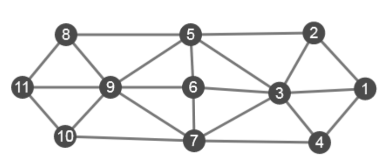
s_3: 9,9,8,8,6,3,3,3,3,3,3
8,7,7,5,2,2,2,2,2,3
8,7,7,5,3,2,2,2,2,2
6,6,4,2,1,1,1,1,2
6,6,4,2,2,1,1,1,1
5,3,1,1,0,0,1,1
5,3,1,1,1,1,0,0
2,0,0,0,0,0,0
-1,-1,0,0,0,0
no es gráfica

s_4: 4,2,2,1,1,1,1,1,1
1,1,0,0,1,1,1,1
1,1,1,1,1,1,0,0
0,1,1,1,1,0,0
1,1,1,1,0,0,0
0,1,1,0,0,0
1,1,0,0,0,0
0,0,0,0,0
es gráfica

Para la secuencia s_2 tenemos que $6+6+5+5+4+3+3+3+3+3+3=44$, por lo tanto la medida es 22. Para s_4 la medida es 7 puesto que $4+2+2+1+1+1+1+1+1=14$. Un grafo con 9 vértices, si tiene menos de 8 aristas no puede ser conexo. Por lo tanto, obtenemos la siguiente tabla resumen:

	es gráfica	orden	medida	conexo
s_1	no		-	-
s_2	sí	11	22	sí
s_3	no		-	-
s_4	sí	9	7	no

b) Por ejemplo, el grafo siguiente G tiene s_2 como secuencia gráfica:



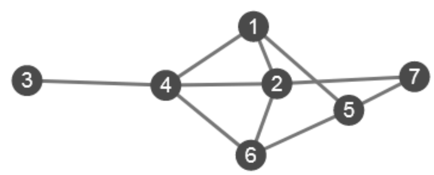
El grafo no es bipartito puesto que tiene ciclos de longitud impar, por ejemplo, $\{1,3,4\}$.

c) Por ejemplo, si en el grafo anterior G eliminamos la arista que va del vértice 1 al 3, y la arista del vértice 9 al 11; y añadimos una arista entre los vértices 1 y 11, y otra entre los vértices 3 y 9, obtenemos un grafo con la misma secuencia gráfica, pero no es isomorfo a G. Fijémonos que en el nuevo grafo, los dos vértices de grado 6 son adyacentes, pero en el grafo G no están conectados.

---

4. (Valoración de un 20 %=10 %+5 %+5 %)

Sea G el grafo siguiente:



a) Dad el recorrido BFS para el grafo G empezando por el vértice 5, eligiendo siempre el vértice menor en caso de poder escoger más de un vértice en el mismo paso del algoritmo. ¿Es también 5671423 un recorrido BFS para el grafo G? ¿Y el recorrido 5126743?

b) ¿Cuáles de estos dos algoritmos (BFS/DFS) se pueden usar para calcular la distancia mínima entre dos vértices de un grafo, si todas las aristas tienen el mismo peso? Determinad la distancia mínima entre los vértices 3 y 5 del grafo G, si todas las aristas tienen peso 10.

c) ¿Cuáles de estos dos algoritmos (BFS/DFS) se pueden usar para saber si un grafo es conexo o determinar el número de componentes conexas? ¿Y para saber si es bipartito?

Solución:

a) El recorrido BFS para el grafo G es 5167243 y la tabla siguiente muestra la simulación en la aplicación del algoritmo:

Q	Vértice añadido	Vértice eliminado	*dist*
5	5	-	[5]
51	1	-	[5,1]
516	6	-	[5,1,6]
5167	7	-	[5,1,6,7]
167	-	5	[5,1,6,7]
1672	2	-	[5,1,6,7,2]
16724	4	-	[5,1,6,7,2,4]
6724	-	1	[5,1,6,7,2,4]
724	-	6	[5,1,6,7,2,4]
24	-	7	[5,1,6,7,2,4]
4	-	2	[5,1,6,7,2,4]
43	3	-	[5,1,6,7,2,4,3]
3	-	4	[5,1,6,7,2,4,3]
$\emptyset$	-	3	[5,1,6,7,2,4,3]

El recorrido 5671423 es también un recorrido BFS para el grafo G, pero en cambio 5126743 no lo es. En el primer caso, simplemente se han intercambiado de orden los tres vértices 1, 6, 7 adyacentes al vértice inicial 5 y que por lo tanto están en la misma profundidad 1; y los dos vértices en profundidad 2, adyacentes a los vértices 1, 6, 7 y que por lo tanto están en profundidad 2. En el segundo caso, aparece el vértice 2 que está en profundidad 2 antes del vértice 6 y 7 que se encuentran en profundidad 1.

b) Sólo el algoritmo BFS puede servir también para determinar la distancia mínima entre dos vértices, siempre y cuando todas las aristas del grafo tengan el mismo peso. Como la exploración se hace primeramente en anchura, el nivel de profundidad en que se ha explorado un vértice coincide con la distancia mínima que hay hasta el vértice a partir del cual se ha aplicado el algoritmo BFS. Así, la distancia mínima entre el vértice 3 y el vértice 5 es 30 puesto que tiene que pasar antes por 4 y 1.

c) Los dos algoritmos se pueden adaptar y usar para saber si el grafo es conexo o para determinar el número de componentes conexas. Del mismo modo, también con los dos algoritmos se puede saber si un grafo es bipartito.

---

5. (Valoración de un 20 %=10 %+5 %+5 %)

Sea G el grafo dirigido con matriz de costes representada por la siguiente tabla, donde la entrada de la fila i y columna j representa el coste del arco del vértice correspondiente de la fila i al correspondiente de la columna j.

a) Aplicando el algoritmo de Dijkstra, ¿cuál es la distancia mínima para ir del punto origen G al punto destino A? Utilizad la tabla siguiente para resolver el ejercicio.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	−	38	−	16	−	−
B	−	0	−	36	8	23	−
C	−	−	0	49	46	−	−
D	−	16	−	0	−	6	−
E	37	−	−	6	0	13	−
F	5	9	−	−	19	0	8
G	48	12	3	47	−	36	0

A	B	C	D	E	F	G
(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	$(0,G)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

b) A partir de la tabla anterior, recuperad también el camino de distancia mínima de G a A explicando los pasos seguidos.

c) A partir de la tabla anterior, ¿podemos saber cuál es el camino de distancia mínima del punto G al punto F? ¿Y del punto A al punto G? ¿Y del punto B al F? Justificad todas las respuestas.

Solución:

a) La tabla correspondiente a la aplicación del algoritmo de Dijkstra es la siguiente:

A	B	C	D	E	F	G
(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	(∞,G)	$(0,G)*$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)*$	$(47,G)$	(∞,G)	$(36,G)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)*$	$(3,G)$	$(47,G)$	$(49,C)$	$(36,G)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(47,G)$	$(20,B)*$	$(35,B)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)*$	$(20,B)$	$(33,E)$	$(0,G)$
$(48,G)$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)$	$(20,B)$	$(32,D)*$	$(0,G)$
$(37,F)*$	$(12,G)$	$(3,G)$	$(26,E)$	$(20,B)$	$(32,D)$	$(0,G)$

Por lo tanto, la distancia mínima para ir de G a A es 37.

b) A partir de la tabla anterior, tenemos que el camino de coste mínimo es (G, B, E, D, F, A). A partir de la etiqueta del punto A, $(37, F)$, sabemos que el camino viene de F. A partir de la etiqueta de F, $(32, D)$, a F llegamos desde D. A partir de la etiqueta de D, $(26,E)$, venimos de E. A partir de la etiqueta de E, (20,B), venimos de B. Finalmente, con la etiqueta de B, (12,G), llegamos al punto G.

c) A partir de la tabla anterior, podemos saber también cual es el camino de distancia mínima del punto G al punto F, puesto que el algoritmo ha finalizado después de haber seleccionado el vértice F. En cambio, no podemos saber el camino de distancia mínima del punto A al punto G, puesto que el grafo no es simétrico. Finalmente, del punto B al punto F no lo podemos saber, puesto que no empieza por el punto G, que es el punto a partir del cual se ha aplicado el algoritmo de Dijkstra.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 25/10/2018**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**