Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Primera PAC. Mòduls 1, 2 i 3.
Semestre de tardor de 2011 (del 5 al 26 d'octubre).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar: **PAC1_Cognom1cognom2nom.pdf**
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 10%)

   a) Quantes funcions hi ha de $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b, c, d\}$? Quantes són injectives?

   b) Doneu totes les funcions no exhaustives de $\mathbb{N}_5$ a $\{a, b\}$.

   c) Una agència de viatges opera en dotze ciutats. Si ha d'imprimir bitllets d'avió entre totes les ciutats en què opera, i a cada bitllet ha de fer constar la ciutat d'origen i la de destinació, quants bitllets diferents haurà d'imprimir?

   Solució:

   a) $VR(4, 3) = 4^3 = 64$ en total, de les quals $V(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ són injectives.

   b) Només n'hi ha dues, la que envia tots els elements a a, i la que envia tots els elements a b.

   c) $V(12, 2) = 12 \cdot 11 = 132$. Fixeu-vos que no té sentit fer bitllets on la ciutat d'origen sigui la mateixa que la ciutat destinació.

2. (Valoració d'un 10%)
Donat el següent algorisme per comprovar si l'equació $x^3 + y^3 = z^3$ té solucions enteres positives per a valors de x, y i z menors o iguals que un valor n fixat:

```
funció Equacio(n)
  inici
    sol ← FALS
    per x ← 1 fins n
        per y ← 1 fins n
            per z ← 1 fins n
                si x³ + y³ = z³
                  aleshores sol ← CERT
                fisi
            fiper
        fiper
    fiper
    retorn (sol)
  fi
```

a) Calculeu el nombre d'operacions que efectua l'algorisme (suposeu que calculem x^3 fent $x \cdot x \cdot x$, i considereu la multiplicació com a operació elemental).

b) Digueu quin ordre de complexitat té.

Solució:

a) La primera assignació i el retorn consumeixen una unitat de temps cadascuna. El primer bucle $2n+2$ (vegeu exemple 16 de la pàgina 28 del mòdul 1). El segon bucle també $2n+2$, però s'executa n vegades, per tant $n(2n+2)$ unitats de temps en total. Anàlogament, el tercer bucle s'executa n^2 vegades amb un cost total de $n^2(2n+2)$. Per últim, la comparació, que s'executa n^3 vegades, requereix 9 unitats de temps cada cop, com a màxim (sis per fer les multiplicacions, una per la suma, una per la comparació en si, i una en cas que es verifiqui la condició i s'executi l'assignació de la línia següent), $9n^3$ en total. Sumant-t'ho tot obtenim el cost: $11n^3 + 4n^2 + 4n + 4$ unitats de temps.

b) $O(n^3)$

Com a curiositat, segons el teorema de Fermat, enunciat pel matemàtic francès al segle XVII i demostrat per Andrew Wiles el 1995, l'equació $x^k + y^k = z^k$ no té cap solució per a x, y, z, k enters positius si $k \geq 3$.

3. (Valoració d'un 15%) Sigui la següent seqüència de graus: $1, 3, 3, 4, 5, n$.

   a) Determineu per quins valors de n (≥ 1) obtenim una seqüència gràfica usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

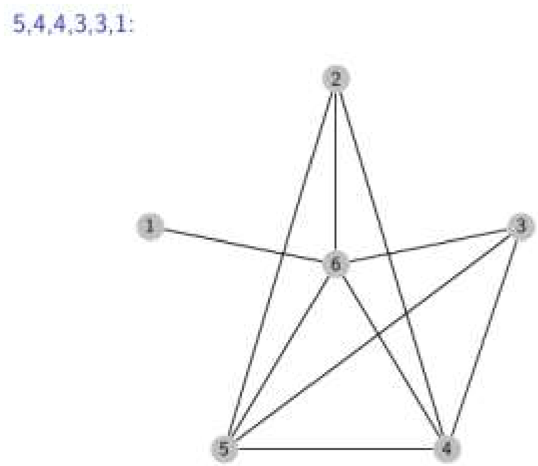
   b) Trieu un dels casos en què tenim una seqüència gràfica, i dibuixeu un graf que hi correspongui.

   c) Calculeu l'ordre, la mida i el diàmetre del graf dibuixat (a l'apartat *b*).

Solució:

   a) Per a $n \geq 6$ no hi ha solució, ja que com el graf té ordre 6 cap vèrtex pot tenir més de 5 veïns. D'altra banda, si n és senar la suma dels graus del graf és també senar, i contradiríem el lema de les encaixades. De manera que només ens queden els casos $n = 2$ i $n = 4$, que podem comprovar amb l'algorisme de Havel-Hakimi que són seqüències gràfiques.

   b) Una possibilitat seria:



   c) Tenen ordre 6 i diàmetre 2 (ja que tot vèrtex és adjacent a un vèrtex central). En el cas $n = 2$ la mida és 9, i en el cas $n = 4$ la mida és 10.

4. (Valoració d'un 20%)

   a) Dibuixeu tots els grafs connexos (no isomorfs entre ells) d'ordre 3 i d'ordre 4, i escriviu-los com a grafs elementals o combinacions d'ells.

   b) Quins cicles C_n són autocomplementaris? Quins trajectes? Quins grafs estrella?

c) Quins cicles són bipartits? Quins trajectes? I quins grafs roda?

Solució:

a) Per a $n = 3$ tenim C_3 i T_3. Per a $n = 4$ tenim C_4, T_4, $K_4 = R_4$,E_4, $C_3 + N_1$ i $(T_2 \cup N_2)^C$.

b) Un graf autocomplementari ha de tenir exactament $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ arestes (si en té més o en té menys, el graf complementari tindrà mida diferent i no podrà ser isomorf al graf original). El graf cicle C_n té mida n. Per tant, s'ha de verificar $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = n$, d'on obtenim com a única solució $n = 5$. Per tant, només C_5 és autocomplementari. Per als trajectes, la mida de T_n és $n-1$. És a dir, cal que $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = n-1$, d'on $n = 4$ i només tenim T_4 com a solució. En el cas dels grafs estrella, cap és autocomplementari, ja que en el complementari el vèrtex central queda aïllat i es té un graf no connex.

c) Usant la caracterització dels grafs bipartits —són els que no tenen cicles de longitud senar—, deduïm que ho són els cicles de longitud parella, tots els trajectes (independentment de la seva longitud) i cap graf roda.

5. (Valoració d'un 10%) Digueu si les següents afirmacions són verdaderes o falses, justificant la resposta:

a) Tot recorregut tancat és un cicle.

b) La longitud d'un recorregut pot ser arbitràriament gran.

c) En un graf bipartit, tot circuit ha de tenir longitud 4 o més.

Solució:

a) Fals, un recorregut pot contenir diversos cicles.

b) Verdader, perquè en un recorregut podem passar diverses vegades per les mateixes arestes (per exemple, en un C_3 podem fer un recorregut de n voltes i tindrem longitud $3n$).

c) Verdader, perquè un circuit de longitud 3 implicaria l'existència d'un cicle de longitud senar al graf (fet que no pot succeir en un graf bipartit).

6. (Valoració d'un 10%)

a) Quantes arestes podem eliminar en un graf complet sense que deixi de ser connex? (sense eliminar cap vèrtex)

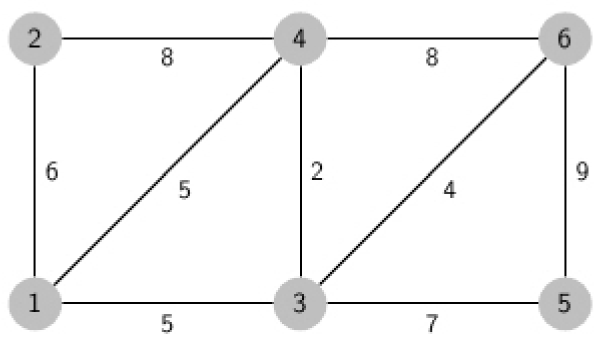
b) I de $C_3 + T_2$?

Solució:

a) Un graf complet d'ordre n té $\binom{n}{2}$ arestes. Podem eliminar-ne fins, per exemple, deixar un T_n. Podem comprovar, usant inducció, que $n-1$ és la mida mínima d'un graf connex d'ordre n, ja que es verifica per $n=1$, i cada nou vèrtex que afegim ens obliga a afegir una aresta com a mínim. Per tant, podem eliminar $\binom{n}{2}-(n-1)$ arestes.

b) $C_3+T_2=K_5$, per tant $\binom{5}{2}-(5-1)=6$

7. (Valoració d'un 25%) Un missatger transporta paquets entre sis oficines d'una ciutat. El següent graf mostra el temps (en minuts) que triga d'una a l'altra desplaçant-se en moto:



a) Construïu la matriu d'adjacències corresponent.

b) Trobeu la distància mínima des de la segona oficina a totes les altres, utilitzant l'algorisme apropiat.

c) Quin és l'itinerari òptim de l'oficina 2 a la 6?

d) En quina oficina s'hauria d'estar el missatger, de manera que l'oficina més llunyana li quedés el més a prop possible?

e) Calculeu el diàmetre del graf.

Solució:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 5 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 0 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 0 & 9 \\ \infty & \infty & 4 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Usem l'algorisme de Dijkstra:

1	2	3	4	5	6
(∞,2)	(0,2)*	(∞,2)	(∞,2)	(∞,2)	(∞,2)
(6,2)*	(0,2)	(8,2)	(8,2)	(∞,2)	(∞,2)
(6,2)	(0,2)	(11,1)	(8,2)*	(∞,2)	(∞,2)
(6,2)	(0,2)	(10,4)*	(8,2)	(∞,2)	(16,4)
(6,2)	(0,2)	(10,4)	(8,2)	(17,3)	(14,3)*
(6,2)	(0,2)	(10,4)	(8,2)	(17,3)*	(14,3)

c) $2 \to 4 \to 3 \to 6$.

d) Apliquem l'algorisme de Floyd per trobar les distàncies entre totes les parelles d'oficines:

$$d^1 = d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 5 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 11 & 8 & \infty & \infty \\ 5 & 11 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 0 & 9 \\ \infty & \infty & 4 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 5 & 12 & 9 \\ 6 & 0 & 11 & 8 & 18 & 15 \\ 5 & 11 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & 9 & 6 \\ 12 & 18 & 7 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 15 & 4 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^4 = d^5 = d^6 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 5 & 12 & 9 \\ 6 & 0 & 10 & 8 & 17 & 14 \\ 5 & 10 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 0 & 9 & 6 \\ 12 & 17 & 7 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 14 & 4 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Des de l'oficina 4, l'oficina més llunyana és a 9 minuts.

e) Les dues oficines més allunyades són la 2 i la 5, que es troben a 17 minuts. Per tant, el diàmetre és 17.