Espai grapa

Universitat Oberta de Catalunya

Examen 2019/20-1

Asignatura	Código	Fecha	Hora inicio
Matemáticas II	81.507	22/01/2020	18:30

81.507 22 01 20 EX

Espacio para la etiqueta identificativa con el código personal del **estudiante**.
Examen

Ficha técnica del examen

- Comprueba que el código y el nombre de la asignatura corresponden a la asignatura matriculada.
- Debes pegar una sola etiqueta de estudiante en el espacio correspondiente de esta hoja.
- No se puede añadir hojas adicionales, ni realizar el examen en lápiz o rotulador grueso.
- Tiempo total: **2:30 horas** Valor de cada pregunta: **25%**
- En el caso de que los estudiantes puedan consultar algún material durante el examen, ¿cuáles son?: **NINGUNO**
- En el caso de poder usar calculadora, de que tipo? **NO PROGRAMABLE**
- En el caso de que haya preguntas tipo test: ¿descuentan las respuestas erróneas? **NO** ¿Cuánto?
- Indicaciones específicas para la realización de este examen

LAS RESPUESTAS DEBEN JUSTIFICARSE. NO SE VALORARÁ SI SOLO SE DA EL RESULTADO FINAL

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	22/01/2020	18:30

Enunciados

Problema 1. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ b(x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcular su dominio.

(b) **[5 puntos]** Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ que hace que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(c) **[10 puntos]** Calcular el valor del parámetro $b \in \mathbb{R}$ que hace que la recta tangente en el punto $x = 2$ tenga pendiente 4. Calcular la recta tangente en este punto (para el valor concreto de b obtenido).

(d) **[5 puntos]** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función para el caso $b > 0$.

Solución

(a) La función $f(x)$ es una función definida a trozos formada por dos polinomios que son funciones continuas a todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto el suyo domine es todo $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$$

(b) La función $f(x)$ es una función definida a trozos donde el único punto de salto es el punto $x = 1$. La función es pues continua en todos los puntos $x \neq 1$ porque las dos funciones que la definen son polinomios que son funciones continuas a todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo hay que estudiar la continuidad en el punto de salto $x = 1$. En este punto tenemos que:

$$\begin{cases} f(1) = 1 + a \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + a = 1 + a \\ \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} b(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto la función será también continua en $x = 1$ si $1 + a = 0$, es a decir, sí $a = -1$.

$$\boxed{\text{La función es continua en } \mathbb{R} \text{ si } a = -1}$$

(c) Teniendo en cuenta que para $x > 1$ la derivada de la función dada es $f'(x) = 2b(x - 1)$, la recta tangente en el punto $x = 2$ viene dada por

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 2b(x - 2) + b.$$

Por lo tanto, el valor del parámetro $b \in \mathbb{R}$ que hace que la recta tangente en el punto $x = 2$ tenga pendiente 4 es $b = 2$ y en este caso la recta tangente es

$$y = 4(x - 2) + 2 = 4x - 6.$$

$$\boxed{\text{La recta tangente en } x = 2 \text{ tiene pendiente } 4 \text{ si } b = 2 \text{ y en este caso es } y = 4x - 6}$$

(d) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función estudiaremos el signo de la derivada de la función. En este caso, si $x \neq 1$ tenemos que

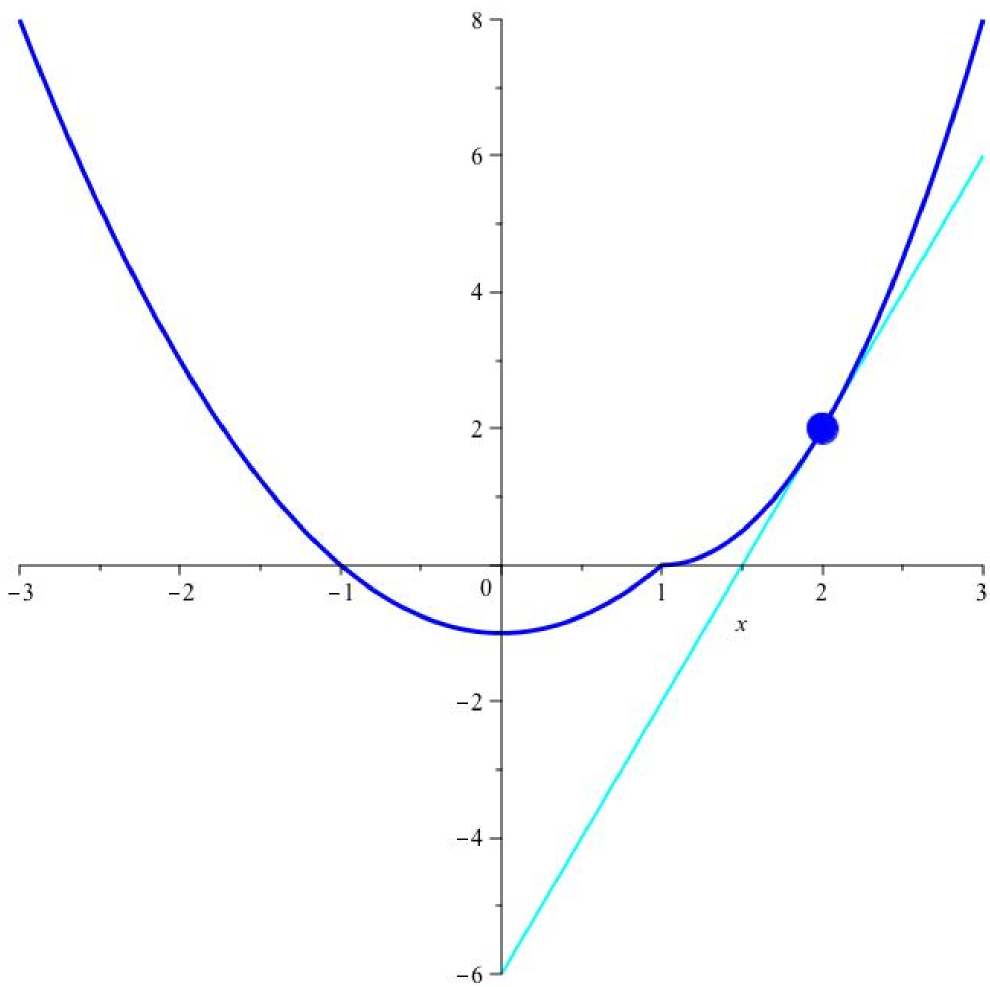
$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 2b(x - 1), & x > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $b > 0$ tenemos que

$x < 0$	$f'(x) = 2x < 0$	la función es decreciente
$0 < x < 1$	$f'(x) = 2x > 0$	la función es creciente
$x > 1$	$f'(x) = 2b(x - 1) > 0$	la función es creciente

$\boxed{\text{Para } b > 0 \text{ la función es decreciente en } (-\infty, 0) \text{ y creciente en } (0, +\infty)}$

A continuación se muestra la gráfica de la función para $a = -1$ y $b = 4$ donde se confirman los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	22/01/2020	18:30

Problema 2.

(a) **[10 puntos]** Calcular la integral $\int (x-3)\, e^{2x} dx$.

(b) **[15 puntos]** Hacer un dibujo aproximado del área comprendida entre la recta $y = 17$ y la curva $y = x^4 + 1$ y calcular su valor.

Solución

(a) Por el método de integración por partes tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} u = x-3 \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

Entonces:

$$\int (x-3)\, e^{2x}dx = (x-3)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

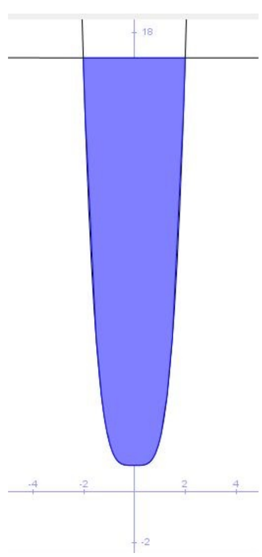
(b) Calculamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$x^4 + 1 = 17 \to x^4 = 16 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$$

así podemos expresar el área de la región como la integral definida de la diferencia:

$$\int_{-2}^{2} 17 - \left(x^4+1\right) dx = \int_{-2}^{2} 16 - x^4 dx = \left[16x - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= 32 - \frac{2^5}{5} - \left(-32 + \frac{2^5}{5}\right) = \frac{256}{5}$$



Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	22/01/2020	18:30

Problema 3.

(a) **[15 puntos]** Calcular la antitransformada de Laplace de la función siguiente:

$$F(s) = \frac{-s^2+2}{s^2\,(s+2)}$$

(b) **[10 puntos]** Considerar el problema de valor inicial siguiente:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0, \quad y(0) = 5$$

Justificar cual de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x}, \\ y_2(x) &= 5e^{x}, \\ y_3(x) &= 5e^{2x}, \end{aligned}$$

es solución del problema de valor inicial.

INDICACIÓN:
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ y $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

Solución

(a) Para calcular el antitransformada de Laplace de la función $F(s)$ hay que expresar $F(s)$ como suma de fracciones simples. En este caso,

$$F(s) = \frac{-s^2+2}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As(s+2)+B(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)}$$

Cómo los numeradores tienen que ser iguales, lo tienen que ser para cualquier valor de la variable s

$$-s^2+2 = As(s+2)+B(s+2)+Cs^2 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De este modo, escogiendo tres valores de s podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. En efecto,

$$\begin{aligned}
&s=-2 \;\Leftrightarrow\; -2=4C \;\Leftrightarrow\; C=-1/2\\
&s=0 \;\Leftrightarrow\; 2=2B \;\Leftrightarrow\; B=1\\
&s=-1 \;\Leftrightarrow\; 1=-A+B+C \;\Leftrightarrow\; A=B+C-1=-1/2
\end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A=-1/2,\; B=1,\; C=-1/2$$

Por lo tanto,

$$F(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

de forma que:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

(b) La función $y_1(x)$ no puede ser solución del problema de valor inicial ya que no satisface la condición inicial, puesto que $y_1(0)=1\neq 5$. Las funciones $y_2(x)$ y $y_3(x)$ si que satisfacen la condición inicial,

$$y_2(0)=y_3(0)=5.$$

Miramos ahora si $y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$y_2(x)=5e^x,\; y_2'(x)=5e^x \;\Rightarrow\; y_2'-2y_2 = 5e^x-10e^x = -5e^x \neq 0,$$

por lo tanto, $y_2(x)$ no satisface la ecuación diferencial. Finalmente, $y_3(x)$ si verifica la ecuación diferencial, ya que:

$$y_2(x)=5e^{2x},\; y_2'(x)=10e^{2x} \;\Rightarrow\; y_2'-2y_2 = 10e^{2x}-10e^{2x} = 0,$$

Por lo tanto, solo $y_3(x)$ es solución del problema de valor inicial.

Examen 2019/20-1

Asignatura	**Código**	**Fecha**	**Hora inicio**
Matemáticas II	81.507	22/01/2020	18:30

Problema 4. Considerar $f(x) = \ln(2 + x)$.

(a) **[15 puntos]** Calcular su polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $a = 0$.

(b) **[10 puntos]** Según la expresión del residuo de Taylor, ¿qué error cometeríamos si aproximásemos $\ln(2.5)$ con el polinomio del apartado anterior?

Solución

(a) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $a = 0$, necesitamos las derivadas de la función hasta orden 3:

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = (2+x)^{-1},\ f''(x) = -(2+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(2+x)^{-3}.$$

Así pues, $f(0) = \ln(2)$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$ y $f'''(0) = \frac{1}{4}$.

El polinomio de Taylor de orden tres será:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3.$$

(b) Puesto que $f(x) = \ln(2+x)$ y nos piden calcular $\ln(2.5)$, tendremos que usar $x = 0.5$. Según el apartado 2.4 del módul del polinomio de Taylor, alrededor de $a = 0$, el residuo correspondiente al polinomio p_3 en el punto 0.5 es

$$R_3(0.5) = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}(0.5-0)^4,$$

donde $z \in (0, 0.5)$ es un valor desconocido. Tenemos que calcular la derivada cuarta:

$$f''''(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$

que, en valor absoluto, es una función decreciente cuando $x > 0$, por lo tanto, podem acotarla por su valor en 0:

$$|R_3(0.5)| < \frac{3}{8*24}0.5^4 = 0.015625 \cdot 0.5^4 = 9.8 \cdot 10^{-4}.$$

Y éste es el error máximo que cometeríamos si aproximásemos $\ln(2.5)$ con $p_3(0.5)$.