Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **2**

Data de proposta: 21/03/2014 **Data d´entrega:** ≤ 31/03/2014

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´haurà d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*).
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 31/03/2014**
- **Aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC2 que trobareu a Qüestionaris.**

CRITERIS DE VALORACIÓ generals de les PACs

- Els resultats obtinguts per l´estudiant a les PACs es qualificaran en funció de la següent escala numèrica de 0 a 10, amb expressió de dos decimals, a la qual s´afegirà la seva corresponent qualificació qualitativa, segons l´escala ECTS:
  [0-3): Suspens baix (D)
  [3-5): Suspens alt (C-)
  [5-7): Aprovat (C+)
  [7-9): Notable (B)
  [9,10]: Excel·lent (A)
- La realització fraudulenta de la PAC comportarà la nota de suspens a la PAC, amb independència del procés disciplinari que pugui seguir-se vers l´estudiant infractor. Recordeu que les PACs s'han de resoldre de forma individual, no es poden formar grups de treball.
- Una vegada publicada la nota definitiva de la PAC, no es pot recuperar ni guardar-se la nota d´aquesta ,ni optar a millorar la qualificació.
- Les respostes incorrectes no descompten res.
- Les PACs entregades fora del termini establert no puntuen i constaran com a no presentades.
- Recordeu que la nota d'AC es computa a partir de les 3 millors PACs que entregueu, de les 4 que hi ha durant el curs. Per optar a MH, però, cal que entregueu les 4 PACs.

- Les respostes a mà i escanejades no tenen cap puntuació.
- La puntuació de cada exercici està indicada a l'enunciat. Dins de cada exercici tots els apartats tenen el mateix valor.

CRITERIS DE VALORACIÓ específics de la PAC 2

En la realització de la PAC 2, es valorarà:

- L´ús correcte i coherent de conceptes teòrics estudiats al mòdul (10% del valor de cada exercici),
- La justificació de tots els procediments que es fan, així com la claredat, concreció i qualitat en l´exposició de la solució dels exercicis (10% del valor de cada exercici),
- La capacitat de presentar adequadament la PAC 2 (ordre, format, correcció ortogràfica i d´estil, recursos tipogràfics utilitzats, taules….) (10% del valor de cada exercici),
- Amb la resta de puntuació es valorarà la correcta resolució de l'exercici.

Recorda que aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC2 que trobareu a Qüestionaris.

SOLUCIÓ

1. (1 punt) Siguin A i B dues matrius quadrades invertibles. És veritat que:

$$(B^{-1}\cdot A^{-1} - (A\cdot B)^{-1} + A)\cdot B = A\cdot B \ \ ?$$

Justifica la teva resposta.

Resolució:

Sí que és veritat.
Multipliquem els dos costats de la igualtat per B^{-1} per la dreta (recordem que la multiplicació de matrius no és commutativa i no és el mateix multiplicar per l'esquerra que per la dreta):

$$(B^{-1}\cdot A^{-1} - (A\cdot B)^{-1} + A)\cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B \cdot B^{-1}$$
$$B^{-1}\cdot A^{-1} - (A\cdot B)^{-1} + A = A$$

Ara restem A als dos costats de la igualtat i tenim:

$$B^{-1}\cdot A^{-1} - (A\cdot B)^{-1} = 0$$

És a dir:

$$B^{-1}\cdot A^{-1} = (A\cdot B)^{-1}$$

I això és veritat per la definició de matriu inversa. Anem-ho a veure multiplicant els dos costats de la igualtat per B per l'esquerra:

$$B \cdot B^{-1}\cdot A^{-1} = B \cdot (A\cdot B)^{-1}$$
$$A^{-1} = B \cdot (A\cdot B)^{-1}$$

I ara per A per l'esquerra:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1}$$
$$I = A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1}$$
$$I = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

Que és justament la definició de matriu inversa aplicada a A·B.

2. (6 punts) Els ordinadors poden representar els colors mitjançant un sistema conegut com RGB. En el sistema RGB els colors es representen com una terna (r, g, b) on cada nombre representa la quantitat de tres colors bàsics: "Red", "Green" i "Blue". Suposem que aquest sistema RGB té estructura d'espai vectorial, és a dir, podem generar colors mitjançant sumes i restes d'altres colors o multiplicant colors per constants.

   Ara suposem que tenim dos colors: $c_1=(20,0,0)$ i $c_2=(3,3,0)$, que generen el subespai vectorial de colors A.

   i) Quina dimensió té l'espai vectorial de colors A?
      Podem generar el color v=(1,2,1) amb els colors c_1 i c_2? Si és que sí, amb quina quantitat de cadascun?
      Pertany w=(50,30,0) a A? Si és que sí, quines són les coordenades en la base $\{c_1, c_2\}$?

   ii) Si B=<(1,0,0),(0,1,0)> és el subespai vectorial de colors format pels dos primers vectors de la base canònica, són A i B el mateix subespai vectorial de colors?

   iii) Troba la matriu de canvi de base de la de B a la de A.

Resolució:

i) Calculem el rang dels vectors amb els quals està definit A:

$$rang\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant la dimensió d'A és 2.

Plantegem el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions sense solució:

$$\begin{cases} 20x + 3y = 1 \\ 3y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Per tant no podem generar el color v=(1,2,1) amb els colors c_1 i c_2
Ara plantegem el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 20x + 3y = 50 \\ 3y = 30 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Que té per solució y=10 i x=1. Per tant w sí que pertany a A i les seves coordenades en la base $\{c_1, c_2\}$ són (1,10).

ii) Hem vist que la dimensió d'A és 2. Tenim que la dimensió de B també és 2 ja que:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Com que tenen la mateixa dimensió, per veure que són el mateix espai vectorial n'hi ha prou amb veure que un és dins de l'altre. I per fer això n'hi ha prou amb veure-ho pels elements de la base. Anem a veure que podem generar la base d'A amb B.
Per al primer vector, c_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Que té solució x=20, y=0. Per tant c_1 pertany a B.

Per al segon vector, c_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Que té solució x=3, y=3. Per tant c_2 pertany a B.

Així doncs A i B són el mateix subespai vectorial de colors.

iii) Per calcular la matriu de canvi de base de la de B a la de A ho podem fer de moltes formes. Una d'elles és calcular la matriu de canvi de base de la d'A a la de B i després buscar la inversa.
Per calcular la matriu de canvi de base de la d'A a la de B, ens cal expressar els vectors de la base d'A en funció dels de la base de B, i això és justament el que hem fet en l'apartat anterior. Així doncs la matriu de canvi de base de la d'A a la de B és:

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ara calculem la inversa obtindrem la matriu de canvi de base de la de B a la d'A. Tenim:

$$M^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{20} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. (3 punts) Sigui F el subespai vectorial de R^6 generat pel conjunt de vectors següent:

   F=<(ab-b, -b, -2bc, -3b, -4b, -5b), (0, a-1, 2, 2c, 2, 2), (0, 0, a-1, 3, 3c, 3), (0, 0, 0, a-1, 4, 4c), (0, 0, 0, 0, a-1, 5), (0, 0, 0, 0, 0, a-1)}, $a,b,c \in R$.>
   Sigui v=(0,-1,0,2,5,9)
   i) Calcula la dimensió de F en funció d'a, b i c.
   ii) Per al cas a=1, b=1 i c=1 troba una base de l'espai vectorial. Pertany v a F en aquest cas? En cas afirmatiu troba les seves coordenades en la base anterior.

Resolució:

i) Calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} ab-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2bc & 2 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ -3b & 2c & 3 & a-1 & 0 & 0 \\ -4b & 2 & 3c & 4 & a-1 & 0 \\ -5b & 2 & 3 & 4c & 5 & a-1 \end{pmatrix}$$

Calculem el determinant 6x6:

$$\begin{vmatrix} ab-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2bc & 2 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ -3b & 2c & 3 & a-1 & 0 & 0 \\ -4b & 2 & 3c & 4 & a-1 & 0 \\ -5b & 2 & 3 & 4c & 5 & a-1 \end{vmatrix} = b\cdot(a-1)^6$$

Tenim que si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió de F és 6.
Si b=0 calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 3 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3c & 4 & a-1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4c & 5 & a-1 \end{pmatrix}$$ per fer-ho calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2c & 3 & a-1 & 0 & 0 \\ 2 & 3c & 4 & a-1 & 0 \\ 2 & 3 & 4c & 5 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^5$$

Així doncs si b=0 i $a \neq 1$ llavors el rang de F és 5.

Si b=0 i a=1 tenim:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3c & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4c & 5 & 0 \end{pmatrix} = 4$$ ja que podem trobar el menor 4x4 amb determinant diferent de zero: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2c & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3c & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4c & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ independentment de c.

Per tant la dimensió de F és 4 en aquest cas.

Ara queda el cas a=1 i $b \neq 0$. Volem calcular el rang:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2bc & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3b & 2c & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4b & 2 & 3c & 4 & 0 & 0 \\ -5b & 2 & 3 & 4c & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5$$ ja que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero: $\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2bc & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3b & 2c & 3 & 0 & 0 \\ -4b & 2 & 3c & 4 & 0 \\ -5b & 2 & 3 & 4c & 5 \end{vmatrix} = -120b \neq 0$

Així resumint tenim:

Si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió de F és 6.

Si b=0 i $a \neq 1$ o bé a=1 i $b \neq 0$ llavors la dimensió de F és 5.

Si b=0 i a=1 llavors la dimensió de F és 4.

b) En el cas a=1, b=1 i c=1 sabem per l'apartat anterior que la dimensió de F és 5.

Tenim que F està definit pels vectors:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Llavors els vectors {(0,-1,-2,-3,-4,-5), (0,0,2,2,2,2), (0,0,0,3,3,3), (0,0,0,0,4,4), (0,0,0,0,0,5)} són linealment independents perquè contenen el menor anterior i són base de F quan a=1, b=1 i c=1.

Mirem si v pertany a F en aquest cas plantejant el sistema amb la base trobada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x = -1 \\ -2x + 2y = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 2 \\ -4x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ -5x + 2y + 3z + 4t + 5u = 9 \end{cases}$$

Que té solució x=1, y=1, z=1, t=1, u=1.

Per tant v pertany a F i les seves coordenades en la base anterior són (1,1,1,1,1).