Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **2**

Data de proposta: 10/10/2013 **Data d´entrega:** ≤ 21/10/2013

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per a comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´hauran d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*).
- A l'adreça d'Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 23.59h. del dia 21/10/2013.**

Valoració:

- **Tots els problemes tenen el mateix valor i dintre de cada problema tots els apartats valen igual.**
- **Aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC2 que trobareu a Qüestionaris.**

RESOLUCIÓ

1) Primer de tot definim les següents matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & z & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Digues quines de les següents operacions estan ben definides i per tant es poden fer. En cas que ho estiguin, fes l'operació i calcula'n el resultat; en cas que no, justifica el perquè.

I. rang($A\cdot B$)
II. det(b·c)
III. det(A·b)

b) Si x=z=0. Calcula t tal que rang($B\cdot A$) sigui màxim.

Resolució:

a)

i) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & z & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ t+1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ t+1 & 2 \end{vmatrix}=-3t-3$$

De manera que si $3t+3=0$ és a dir, $t=-1$ llavors rang(A·B)=1 i si $t\neq -1$ llavors rang(A·B)=2.

ii) Sí que es pot fer l'operació i el resultat és:

$$b\cdot c=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$|b\cdot c|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

iii) No es pot fer l'operació ja que A·b no és una matriu quadrada!

b) Calculem B·A amb x=z=0:

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & t+1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenim que $\begin{vmatrix} 1 & t & 0 & t+1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$ Per tant el rang no pot ser 4 per a cap t.

Calculem el determinant del menor $\begin{vmatrix} 1 & t & t+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ independentment del valor de t. Així doncs el rang tampoc pot ser 3 per a cap t.

D'altra banda tenim el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

Així doncs el rang de B·A és 2 i no depèn de t!

2) Siguin V i W els subespais vectorials de R^4 generats pels següents vectors:
V=< (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 3), (0, -1, -3, -6) >
W=< (1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 0, 3, 0) >
Sigui v=(0,7,4,x).

a) Quina dimensió tenen V i W? Troba una base de cadascun dels dos. Quin valor ha de prendre x per a que v pertanyi a V. I per a que pertanyi a W?
b) Són V i W el mateix subespai de R^4? Raona la teva resposta.

Resolució:

a) Ara anem a veure el rang dels vectors que defineixen V:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

però podem trobar el menor 3x3:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant la dimensió de V és 3 i una base la poden formar els vectors del determinant anterior { (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 3) }.

Anem a veure el rang dels vectors que defineixen W:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

però podem trobar el menor 3x3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant la dimensió de W és 3 i una base la poden formar els vectors del determinant anterior { (1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0) }.

Per a que v pertany a V hauria de ser linealment dependent amb els vectors de la base de V. Per això calculem el determinant format pels vectors de la base de V més v i demanem que sigui 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

I això és independent de x. Per tant, v pertany a V per a tot x.
Per a que v pertany a W procedim anàlogament i calculem el determinant format pels vectors de la base de W més v i demanem que sigui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 6x$$

I serà 0 quant x=0. Per tant, v pertany a W si x=0.

b) Per comprovar si són el mateix subespai vectorial, com que hem vist que les dimensions són iguals, n'hi haurà prou amb mirar si un subespai conté l'altre. Per comprovar això podem mirar si els elements d'una base d'un espai formen part de l'altre espai.
Així mirarem si els elements de la base de W formen part de V.

Comencem per (1, 0, 0, 0) i plantegem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que ens dóna el sistema d'equacions sense solució:

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Per tant V i W no són el mateix subespai de R^4 tot i tenir la mateixa dimensió.

3) Sigui E = <(x, y, z) | x+y=-z > un subespai vectorial de dimensió 2 a R^3 i sigui el vector v = (1, 1, -2).

a. Comproveu que A={ (1, 0, -1), (0, 1, -1)} és una base d'E i calculeu les coordenades de v en la base A. Sabem que B={ (2, 2, -4), (-1, -2, 3)} és també una base d'E, calculeu ara les coordenades de v en la base B.
b. Calculeu la matriu del canvi de base d'A a B i comproveu la coherència del resultat amb l'apartat anterior.

Resolució:

a) Com que sabem que la dimensió del subespai vectorial és 2, per comprovar que A és una base d'E és suficient veure que els vectors d'A estan inclosos a E i que són linealment independents.

Veurem que els vectors són d'E si verifiquen l'equació que determina els elements d'E, així:
(1,0,-1)=>1+0=-(-1) i per tant (1,0,-1) és d'E
(0,1,-1)=>0+1=-(-1)·i per tant (0,1,-1) és d'E

Per veure que són linealment independents, comprovarem que la matriu formada per aquests dos vectors és de rang 2:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

ja que podem trobar un menor 2x2 amb determinant diferent de zero.
D'aquesta manera ja tenim que A és una base d'E.

Per calcular les coordenades de v en la base A només cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(1, 1, -2)=a(1, 0, -1)+b(0, 1, -1)

i aquest sistema té una única solució amb a=1 i b=1. Per tant, les coordenades de v en la base A són (1,1).
Nota: si el sistema no hagués tingut solució, voldria dir que v no pertany a E.

Per calcular les coordenades de v en la base B farem com abans, només cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(1, 1, -2)=a(2, 2, -4)+b(-1, -2, 3)

i aquest sistema té una única solució amb a=1/2 i b=0. Per tant, les coordenades de v en la base B són (1/2, 0).

b) Per escriure la matriu de canvi de base de la base A a la base B, posarem els vectors d'A com a combinació lineal dels vectors de la base B, així:

(1, 0, -1)=x(2, 2, -4)+y(-1, -2, 3)

i aquest sistema té una única solució amb x=1 i y=1, (1, 1) és el primer vector de la base A escrit en base B. Anàlogament

$$(0, 1, -1)= x(2, 2, -4)+y(-1, -2, 3)$$

i aquest sistema té una única solució amb x=-1/2 i y=-1, (-1/2, -1) és el segon vector de la base A escrit en base B.

Així la corresponent matriu de canvi de base d'A a B és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que efectivament, transforma el vector v en base A, el (1,1) a (1/2, 0) que és el vector v en la base B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$