# Universitat Oberta de Catalunya

## SOLUCIÓ PAC 1

1. (4 punts) Prova, usant el principi d'inducció, que per a tot $n \in N$ es verifica la següent igualtat:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

**Solució:**

Apliquem les indicacions que s´expliquen a l'apartat 2.3 de la pàgina 14 del material imprès (requadre gris):

i. Cal veure que la propietat és certa per a n = 1, és a dir, que es compleix: $1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$ la qual cosa és certa ja que $1 = 1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.

ii. Cal veure que si la propietat és certa per a un natural n, llavors també ho és per a

n + 1.

Efectivament:

Hem de veure que si $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ llavors:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Apliquem hipòtesi d'inducció ja que sabem que: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ i ens queda que el que volem demostrar és:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Partim de: $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$ i volem arribar a què és igual a $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Operem amb la calculadora Wiris (també es pot fer a mà) amb l´eina "Simplificar" i observem que, certament, ambdues expressions, un cop simplificades, són iguals.

Fet a mà seria així:

Partim de:

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}+\frac{4\cdot(n+1)^3}{4}$ = (treiem factor comú $\frac{(n+1)^2}{4}$) $=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}+\frac{4\cdot(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2}{4}\cdot(n^2+4n+4)$ = (observem que $(n^2+4n+4)=(n+2)^2$) $=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$

I arribem a allò que volíem demostrar. Llavors, pel principi d'inducció matemàtica, la propietat és certa per a qualsevol nombre natural.

2.Respon als següents apartats:

a) (2 punts) Troba l'invers del conjugat de l´oposat del complex $6-i$. Proporciona el resultat en forma binòmica.

b) (2 punts) Troba l´arrel següent: $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$ Proporciona el resultat en forma binòmica i polar.

**<u>Solució:</u>**

a) Primer trobem l'oposat de $6-i$; que és $-6+i$. A continuació trobem el conjugat; això és: $\overline{-6+i}=-6-i$ I, per últim, el seu invers: $\frac{1}{-6-i}$ Per tant, el que es demana trobar és: $\frac{1}{-6-i}$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar-lo (utilitzant el producte notable que diu que "suma per diferència és igual a diferència de quadrats"):

$$\frac{1}{-6-i}=\frac{1\cdot(-6+i)}{(-6-i)\cdot(-6+i)}=\frac{-6+i}{(-6)^2-i^2}=\frac{-6+i}{36+1}=\frac{-6+i}{37}=\frac{-6}{37}+\frac{1}{37}i$$

**Per tant:**

| |
|---|
| L'invers del conjugat de l´oposat del complex $6-i$ és $\frac{-6}{37}+\frac{1}{37}i$ |

b) Escrivim el complex $\frac{1-i}{1+i}$ en forma polar tal com s´explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos.

Per a això, primer, multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar el denominador:

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2}=\frac{1-2i-1}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

Per tant allò que es demana és: $\sqrt[3]{-i}$

Ara escrivim el complex en forma polar:

$$m=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$$
$$\alpha=arctg\left(\frac{-1}{0}\right)=arctg(-\infty)=270^{o}$$

Observem que no sumem ni restem 180º donat que la part real del complex és nul·la i la part imaginària és negativa (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270^{o}}}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[3]{1_{270^{o}}}=1_{\frac{270^{o}+360^{o}k}{3}}$ per a k=0, 1, 2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=1$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{270^{o}+360^{o}k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=90^{o}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=90^{o}+120^{o}=210^{o}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=90^{o}+240^{o}=330^{o}$

Per tant, les tres arrels del complex $-i$ són:

$$\boxed{1_{90^{o}}=1\cdot(\cos 90^{o}+i\sin 90^{o})=1\cdot(0+i\cdot 1)=i}$$

$$\boxed{1_{210^{o}}=1\cdot(\cos 210^{o}+i\sin 210^{o})=1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$$\boxed{1_{330^{o}}=1\cdot(\cos 330^{o}+i\sin 330^{o})=1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$