Àlgebra/ Matemàtiques I

EXAMEN 18-06-2011

1. Realitza els càlculs següents:

   a) Escriu, en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians), l'oposat i el conjugat del nombre complex $z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\times i$

   b) Escriu en forma binòmica els següents nombres complexos: $4_{45^\circ}, 3_{\frac{p}{3}rad}$

   c) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^4-625=0$$

Solució:

a) $z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot i$ Llavors $-z=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot i=\sqrt{6}_{135^\circ}$ i $\bar{z}=\sqrt{3}+\sqrt{3}\times i=\sqrt{6}_{45^\circ}$

b) $4_{45^\circ}=4\cdot(\cos(45^\circ)+i\cdot\sin(45^\circ))=4\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i$

$$3_{\frac{\pi}{3}rad}=3\cdot(\cos(\frac{\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{3}))=3\cdot(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

c) $x^4-625=0\Rightarrow x^4=625\Rightarrow x=\sqrt[4]{625}$ Si ara passem a polar:

$x=\sqrt[4]{625}\Rightarrow x=\sqrt[4]{625_{0^\circ}}=5_{(0^\circ+360^\circ\cdot k)/4}$ i, per tant, fent k=0,1,2,3 trobem que les quatre solucions són: $5_{0^\circ},5_{90^\circ},5_{180^\circ},5_{270^\circ}$

2. Sigui S el subespai de R^3 generat pel conjunt de vectors següent:

$$S=<((1+a)\cdot b,b,b),(0,1+a,0),(0,0,1+a)>,\ a,b\in R$$

   a) Determina en funció d'*a* i *b* la dimensió del subespai S.

   b) En el cas *a*=0 i *b*=1, determina les coordenades del vector v=(2,1,0) en S.

<u>Solució:</u>

a) Primer calculem el rang de la matriu:

$$\begin{vmatrix} (1+a)\cdot b & 0 & 0 \\ b & 1+a & 0 \\ b & 0 & 1+a \end{vmatrix} = b\cdot \begin{vmatrix} (1+a) & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{vmatrix} = b\cdot(1+a)^3$$

Així tindrem que per $b \neq 0$ i $a \neq -1$ la dimensió de S serà 3 ja que el determinant serà no nul i tindrem el màxim nombre de vectors linealment independents.

- Si $b \neq 0$ però a=-1 tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que té dimensió 1 ja que $b \neq 0$.
- Si *b*=0 llavors tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$ amb dos casos: $a \neq -1$ on tindrem rang 2 (ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+a \end{vmatrix} \neq 0$ en aquest cas) o el cas a=-1 on tindrem que tots els vectors són zero i per tant la dimensió de S serà 0.

b) En el cas *a*=0 i *b*=1 tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i per tant busquem un vector (x,y,z) tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Això ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ que resolent-lo trobem el vector (2,-1,-2)

Nota: Per a trobar v en les coordenades de S, també es podria haver calculat la inversa de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i aplicar-la al vector v.

3. Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + (a-1)z = a \end{cases}$$

Solució.

La matriu del sistema és:

$$A \mid A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & a-1 & a \end{array}\right)$$

Estudiem el rang de la matriu *A*. Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores $rang\ A \geq 2$.

Per a veure quan el rang pot ser 3, calculem el determinant d'*A* i obtenim $|A| = 3a - 18$ que només s'anul·la pel valor *a* = 6.

• Cas I. $a \neq 6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$

I si el resolem pel mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ a & -3 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a - 3 + 6a - 4a - 27}{3a - 18} = \frac{5a - 30}{3a - 18} = \frac{5(a-6)}{3(a-6)} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & a & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a - 27 + 3a - 3a + 3}{3a - 18} = \frac{4a - 24}{3a - 18} = \frac{4(a-6)}{3(a-6)} = \frac{4}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-9-9+2a}{3a-18}=\frac{3a-18}{3a-18}=1$$

I per tant la solució única té és: $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},1\right)$ independent del valor que donem al paràmetre $a\neq 6$.

- Cas II. $a=6\Rightarrow |A|=0\Rightarrow rang\ A=2$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem el menor diferent de zero que tenim a la matriu *A* i mirem si s'anul·la el determinant.

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang\ A'=2=rang\ A\Rightarrow SCI$ amb 3-2=1 grau de llibertat (z)

Per a la resolució, una vegada anul·lada la 3a equació i passant la incògnita z als termes independents, obtenim el següent sistema d'equacions equivalent

$\begin{cases} x-2y=3-4z\\ x+y=3z\end{cases}$ que ens porta a la solució $x=\frac{3+2z}{3}, y=\frac{7z-3}{3}, z=z$.

4. Sigui $f:R^3\rightarrow R^2$ l'aplicació lineal definida per

$f(x,y,z)=(z,x+2y-z)$.

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques i digueu quin rang té.
b) Trobeu la dimensió i una base del Nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu la dimensió i una base de la Imatge de f. És f exhaustiva?
d) Trobeu el conjunt d'antiimatges del vector (3,4).

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és : $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

i té rang 2.

b) Com que el rang de A és 2, la dimensió del nucli de f és 3-2=1. Per tant, una base del nucli estarà formada per un vector no nul que sigui solució del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base del nucli de f és doncs:{(2,-1,0)}. L'aplicació f no és injectiva perquè el nucli és diferent de zero.

c) Com que el rang de A és 2, la dimensió de la imatge de f és 2, o sigui, tot l'espai R^2. Una base de la imatge de f és doncs la {(1,0),(0,1)}. L'aplicació f és exhaustiva perquè la imatge té dimensió 2.

d) Per a trobar la antiimatge del vector (3,4) cal resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Ens queda: z=3 i x+2y-z=4. O sigui, x+2y=7. Per tant, x=7-2y. O sigui, les solucions són punts (x,y,z)=(7-2y,y,3)=(7,0,3)+(-2y,y,0)=(7,0,3)+y(-2,1,0). Per tant, el conjunt d'antiimatges és la recta que passa pel punt (7,0,3) i de vector director (-2,1,0).