Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) El següent algorisme cerca el divisor més gran d'un nombre enter n ($n > 1$).

   funció *DivisorMesGran*(n)
     inici
       $d \leftarrow 2$
       $limit \leftarrow \sqrt{n}$
       mentre $n \bmod d \neq 0 \ \wedge \ d \leq limit$
             $d \leftarrow d + 1$
       fimentre
       retorn n div d
     fi

   Justifiqueu quines de les següents afirmacions són correctes:

   a) Si n és un nombre primer, l'algorisme no és correcte.

   b) Si $n = 32$, la complexitat de l'algorisme és $O(16)$.

   c) La complexitat de l'algorisme, en funció del valor d'n, és $O(n)$.

   d) Si m és el nombre de bits de la representació binària de n aleshores l'algorisme té una complexitat exponencial en funció d'm.

   Solució:

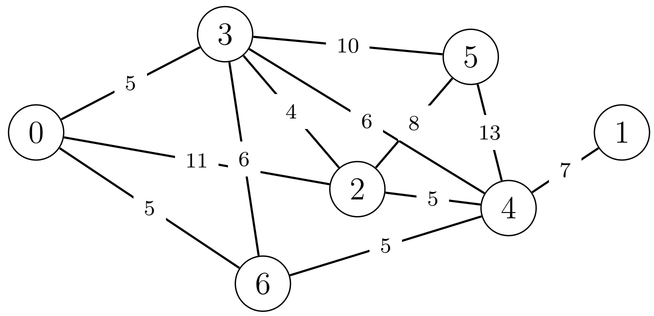
   a) Certa. Si n és primer, el divisor més gran és 1 i aquest algorisme retornaria n div $limit$.

   b) Falsa. La complexitat és una mesura asimptòtica i no té sentit calcular-la per a un valor concret de l'entrada.

   c) Falsa. La complexitat seria $O(n^{1/2})$.

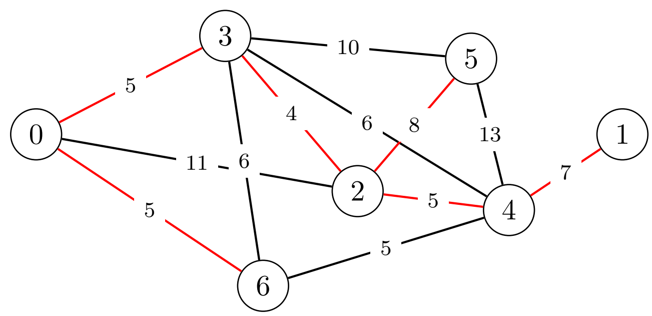
   d) Certa. La complexitat seria $O(2^{m/2})$ que és exponencial.

2. (Valoració d'un 15+10=25%) Utilitzant l'algorisme de Prim, trobeu un arbre generador minimal del graf,



Si haguéssim aplicant l'algorisme de Kruskal hauríem obtingut el mateix graf? Justifiqueu la resposta.

Solució: Aplicant l'algorisme de Prim, amb origen en el vèrtex 0, obtenim l'arbre generador minimal següent:



que té un pes de 34.

Podíem haver obtingut un arbre generador minimal diferent. Observeu que l'algorisme ha triat l'aresta $\{2, 4\}$ que té pes 5 però també podíem haver triat l'aresta $\{4, 6\}$ amb el mateix pes. Per tant, segons l'ordre amb el qual haguéssim triat les arestes en l'algorisme de Kruskal podríem haver obtingut un arbre minimal diferent.

3. (Valoració d'un 10+15=25%)

   a) Enuncieu el lema de les encaixades.

   b) Considereu un mapa de carreteres amb 12 ciutats i 25 trams de carreteres que uneixen les ciutats. Suposeu que de cada ciutat surten 4 o 5 carreteres. Demostreu que el nombre de ciutats de les quals surten 4 carreteres és 10 i les que surten 5 carreteres és 2.

   Solució:

a) Donat un graf $G = (V, A)$, es compleix,

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|.$$

b) Podeu modelar el mapa com un graf $G = (V, A)$ amb $|V| = 12$, $|A| = 25$ i amb k vèrtexs de grau 4 i $12 - k$ vèrtexs de grau 5. Aplicant el lema de les encaixades,

$$4 \cdot k + 5 \cdot (12 - k) = 50, \quad k = 10, \quad 12 - k = 2.$$

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

   a) Si la versió decisional d'un problema de càlcul és tractable aleshores el problema de càlcul també ho és.

   b) Si un problema A és NP-Complet aleshores també és NP-difícil.

   c) El problema "*Donat un graf $G = (V, A)$, decidir si conté un circuit eulerià*" pertany a NP.

   d) Un problema que es pot resoldre en espai polinòmic aleshores també es pot resoldre en temps polinòmic.

   Solució:

   a) Fals. Es justament al revés, si el problema decisional és intractable aleshores el problema de càlcul també ho és.

   b) Cert, ja que A és NP-Complet si A és NP-difícil i $A \in NP$.

   c) Cert. Un testimoni seria una llista amb el grau de tots els seus vèrtexs.

   d) Fals. Si fos així significaria que PSPACE $\subseteq$ P i, per tant, que P = NP.

Final 2

1. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%) Considereu els dos segments de programa següents, on n és un nombre enter ($n > 1$) i b és un nombre enter fixat ($0 < b < n$),

$i \leftarrow n$
<u>mentre</u> i mod $b \neq 0$
    $i \leftarrow i - 1$
<u>fimentre</u>
	$i \leftarrow n$
	<u>mentre</u> i div $b \neq 0$
	    $i \leftarrow i - 1$
	<u>fimentre</u>

Recordeu que a mod b significa el residu de la divisó entre a i b. També, a div b significa el quocient de la divisió entre a i b.

a) Si $n = 100$ i b és fix, quin és el nombre d'iteracions que executa cada algorisme?

b) Calculeu, en funció d'n, el nombre màxim d'iteracions que fa cada algorisme.

c) Calculeu, en funció d'n (suposant b fix), la complexitat dels dos algorismes.

d) Des del punt de vista de la complexitat, es pot afirmar que els dos algorismes són equivalents?

Solució:

a) El primer algorisme es pararà quan i sigui múltiple de b. Com que $0 < b < 100$, el nombre d'iteracions variarà entre 0 (quan b sigui un divisor de 100) fins $100 - b$ quan no hi hagi cap múltiple de b entre b i 100, és a dir, el mínim b tal que $2b > 100$, $b = 51$. Per tant, 49 iteracions.

En el segon algorisme es fan iteracions fins que $i < b$. Per tant, es faran $100 - b + 1$ iteracions.

b) El primer algorisme fa un màxim de $\frac{n}{2}$ iteracions i el segon sempre en fa $n - b + 1$.

c) El primer algorisme tindrà una complexitat $O(\frac{n}{2}) = O(n)$ i el segon tindrà una complexitat $O(n)$.

d) Encara que el nombre d'iteracions és diferent, des del punt de vista de la complexitat podem afirmar que els dos algorismes són equivalents ja que tenen la mateixa complexitat.

2. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Aplicant l'algorisme de Dijkstra a un graf ponderat de 6 vèrtexs obtenim la taula,

0	1	2	3	4	5
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(14,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(20,1)$	$(22,1)$	$(14,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(20,1)$	$(22,1)$	$(14,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(20,1)$	$(22,1)$	$(14,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(20,1)$	$(22,1)$	$(14,0)$
$(0,0)$	$(10,0)$	$(15,0)$	$(20,1)$	$(22,1)$	$(14,0)$

Justifiqueu si són certes o falses les següents afirmacions:

a) La distància mínima del vèrtex 0 al vèrtex 4 és 22.

b) El diàmetre del graf és 22.

c) La distància del vèrtex 3 al vèrtex 2 és menor o igual que 35.

d) El graf és connex.

Solució:

a) Cert. En la darrera fila de la taula, la columna corresponent al vèrtex 4 ens diu que la $d(0,4) = 22$.

b) Fals. En la taula, 22 és el màxim de les distàncies mínimes entre el vèrtex 0 i la resta de vèrtexs. Això, però, no ens permet assegurar que la distància entre altres vèrtexs no pugui ser més gran.

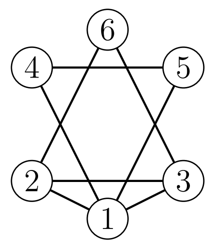
c) Cert. Com que $d(0,2) = 15$ i $d(0,3) = 20$ podem afirmar que la $d(2,3)$ no pot ser més gran que $15 + 20 = 35$.

d) Cert. Com que en la darrera fila de la taula no hi ha cap valor ∞, significa que des del vèrtex 0 podem accedir a la resta de vèrtexs i, per tant, des de qualsevol vèrtex podem accedir a la resta.

3. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

a) Doneu una condició necessària, però no suficient, per tal que un graf $G = (V, A)$ sigui hamiltonià.

b) Apliqueu aquesta condició per demostrar que el graf següent no és hamiltonià.



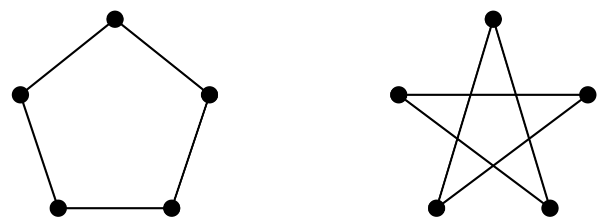
c) És cert que si un graf és hamiltonià, el seu complementari no ho serà?

Solució:

a) Condició: Si $G = (V, A)$ és un graf hamiltonià, per a tot $S \subset V$, $S \neq \emptyset$ es verifica $c(G - S) \leq |S|$ on $c(G - S)$ representa el nombre de components connexos del graf obtingut de G després d'eliminar els vèrtexs (i les arestes incidents) de S.

b) En el graf proposat, si considerem $S = \{1\}$ aleshores $c(G - s) = 2 > |S| = 1$ i per tant no pot ser hamiltonià.

c) Aquesta afirmació no és certa. Per exemple, el graf C_5 es hamiltonià i el seu complementari també:



4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) Un problema d'optimització és un problema decisional.

b) Si $A \leq_p B$ i $B \in \mathrm{NP}$, aleshores $A \in \mathrm{NP}$.

c) El problema "*Donat un graf* $G = (V, A)$ *d'ordre* 100*, decidir si conté un subgraf complet de* 50 *vèrtexs*" és a P.

d) Un problema per al qual coneixem que es pot resoldre per un algorisme de complexitat temporal $O(2^n)$ no pot pertànyer a P.

Solució:

a) Fals. Als problemes decisionals la resposta és *SÍ* o *NO*, mentre que un problema d'optimització és un cas particular de problema de càlcul.

b) Cert, per les propietats de les reduccions.

c) Cert. És suficient comprovar si algun dels subconjunts de 50 vèrtexs del graf forma un subgraf complet. Encara que el nombre de subconjunts és molt elevat, aquest és un nombre constant i després d'un temps constant es podrien comprovar tots els subconjunts.

d) Fals. Podria existir un altre algorisme per resoldre'l amb complexitat polinòmica.

Final 3

1. (Valoració d'un 10+5+10=25%) El DNI està format per 8 xifres ($d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8$, $0 \leq d_i \leq 9$) i una de les 23 lletres `TRWAGMYFPDXBNJZSQVHLCKE` que es calcula a partir de les 8 xifres, i que té un únic valor possible per a cada nombre. Utilitzant la tècnica de les funcions,

a) Quants DNI diferents podrem assignar?

b) Si la darrera xifra numèrica, d_8, només pot tenir un valor parell, quants DNI diferents podrem assignar?

c) Si les 5 darreres xifres ($d_4d_5d_6d_7d_8$) haguéssin de ser diferents entre elles (les tres primeres poden prendre qualsevol valor), quants DNI podrem assignar?

Solució: $\mathbb{N}_8$ representa el conjunt de xifres i $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunt de valors. La lletra queda determinada per les xifres.

a) El nombre de DNI serà el nombre de funcions de $\mathbb{N}_8$ a D, $VR(10, 8) = 10^8 = 100000000$.

b) Si traiem la darrera xifra, hem de calcular el nombre de funcions de $\mathbb{N}_7$ a D, $VR(10, 7) = 10^7 = 10000000$. La darrera xifra podrà prendre 5 valors diferents. El total serà, $5 \cdot VR(10, 7) = 50000000$.

c) En aquest cas distingim les 3 primeres xifres i les 5 darreres. Les 3 primeres xifres és el nombre de funcions de $\mathbb{N}_3$ a D, $VR(10, 3) = 1000$. Les 5 darreres, és el nombre de funcions injectives de $\mathbb{N}_5$ a D, $V(10, 5) = 30240$. En total, 30240000 DNI.

2. (Valoració d'un 15+10=25%)

a) Considereu un graf $G = (V, A)$ d'ordre n amb n parell. Si cada vèrtex de G és adjacent a tots els altres, excepte a un, determineu la mida m de G.

b) A partir del graf G de l'apartat anterior, calculeu l'ordre i la mida dels grafs $G + T_2$ i $G \times T_2$ on T_2 és el graf trajecte d'ordre 2.

Solució:

a) Cada vèrtex de G tindrà grau $n - 2$. Aplicant el lema de les encaixades,

$$2m = \sum_{v \in G} g(v) = n(n-2), \quad m = \frac{n(n-2)}{2}.$$

Fixeu-vos que m només té un valor enter vàlid si, com diu l'enunciat, l'ordre n del graf és parell.

b) $\text{Ordre}(G + T_2) = \text{Ordre}(G) + \text{Ordre}(T_2) = n + 2$.

$\text{Mida}(G + T_2) = \text{Mida}(G) + \text{Mida}(T_2) + \text{Ordre}(G) \cdot \text{Ordre}(T_2) = \frac{n(n-2)}{2} + 1 + 2n = \frac{n^2+2n+2}{2}$.

$\text{Ordre}(G \times T_2) = \text{Ordre}(G) \cdot \text{Ordre}(T_2) = 2n$.

$\text{Mida}(G \times T_2) = 2\text{Mida}(G) + \text{Ordre}(G) = n(n-2) + n = n^2 - n$.

3. (Valoració d'un 10+5+10=25%) Considereu el graf ponderat G, de 7 vèrtexs, determinat per la taula següent,

	0	1	2	3	4	5	6
0			11	5			5
1					7		
2	11			4	5	8	
3	5		4		6	10	6
4		7	5	6		13	5
5			8	10	13		
6	5			6	5		

a) Apliqueu l'algorisme de Dijkstra al graf G començant pel vèrtex 0.

b) Representeu gràficament l'arbre que s'obté considerant els camins obtinguts en l'algorisme de Dijkstra.

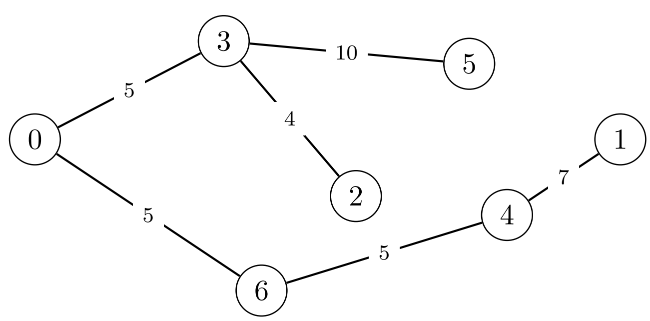
c) Aquest arbre és un arbre generador minimal?

Solució:

a) Aplicant l'algorisme de Dijkstra començant pel vèrtex 0 s'obté la taula,

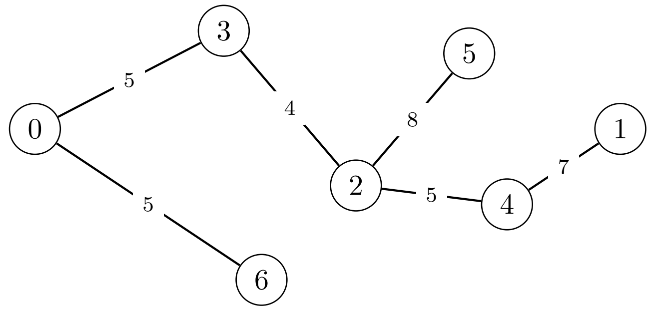
0	1	2	3	4	5	6
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(11,0)$	$(5,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(11,3)$	$(15,3)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(10,6)$	$(15,3)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(10,6)$	$(15,3)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(17,4)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(10,6)$	$(15,3)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(17,4)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(10,6)$	$(15,3)$	$(5,0)$
$(0,0)$	$(17,4)$	$(9,3)$	$(5,0)$	$(10,6)$	$(15,3)$	$(5,0)$

b) Els camins obtinguts seran: $0-6-4-1$, $0-3-2$, $0-3-5$, i l'arbre,



amb un pes total 36.

c) Per saber si l'arbre anterior és un arbre generador minimal hem de comparar el seu pes amb el d'un arbre generador minimal. Si apliquem l'algorisme de Kruskal obtenim l'arbre,



que té un pes de 34. Per tant, l'arbre obtingut amb l'algorisme de Dijkstra no és un arbre generador minimal.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) $A \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$ és una fòrmula en FNC (forma normal conjuntiva).

b) Si la complexitat d'un algorisme numèric A és $O(N)$ on N és l'entrada de l'algorisme, aleshores la complexitat de l'algorisme A és exponencial.

c) Si $A \leq_p B$ i B és NP-complet, aleshores $A \in$ NP.

d) Un problema verificable en temps $O(3^n)$ pertany a NP.

Solució:

a) Fals, hauria de ser una conjunció de disjuncions, i no a la inversa.

b) Cert. En aquest cas cal expressar la complexitat en funció del nombre de bits d'N i, en aquest cas, la complexitat seria $O(2^n)$ on n és la longitud binària d'N.

c) Cert. Si B és NP-Complet, aleshores $B \in$ NP i, per les propietats de les reduccions, $A \in$ NP.

d) Fals. NP és el conjunt dels problemes verificables en temps polinomial.