Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA:	ÀLGEBRA – MATEMÀTIQUES I		
PAC Núm.:	**3**		
Data de proposta:	08/11/2013	**Data d´entrega:**	$\leq$ 18/11/2013

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **Utilització de la Wiris: Tots tres exercicis són per a ser resolts manualment (i amb verificació posterior, si es vol, amb la Wiris).** Quan es faci servir la Wiris, caldrà il·lustrar-ho amb la corresponent captura de pantalla, afegint al document de resolució els comentaris necessaris.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 18/11/2013**

Valoració:

- Totes els apartats tenen el mateix valor
- **Aquesta part de la PAC representa el 60% de la nota final de la PAC i el 40% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC3 que trobareu a Qüestionaris.**

RESOLUCIÓ

1. Sigui la matriu M definida per

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m+1 & m-1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 3m-1 \\ -1 & -3 & -3 & -m & m-1 \end{pmatrix}$$

on $m \in \mathbb{R}$

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció del paràmetre real m.

b) Discutiu i solucioneu el sistema homogeni

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolució:

a)
Per a estudiar el rang(M) podem fer-ho bé per transformacions elementals successives que simplifiquin la matriu (mètode de Gauss) o bé càlcul de determinants buscant el major menor no nul (en funció del paràmetre real m). Per la dimensió de la matriu començarem primer pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m+1 & m-1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 3m-1 \\ -1 & -3 & -3 & -m & m-1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & m+1 \\ 0 & 2 & m-1 & 1 & -m \\ 0 & 2 & m-1 & m-1 & 2-2m \\ 0 & 4 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & -m & 2m \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & m+1 \\ 0 & 2 & m-1 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 4-2m & 0 & -4+2m \\ 0 & 0 & -4+2m & -m+2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Restant a la segona fila la primera
Restant a la tercera fila 2 vegades la primera
Restant a la quarta fila 3 vegades la primera
Sumant a la cinquena fila la primera
(2) Restant a la tercera fila la segona
Restant a la quarta fila 2 vegades la segona
Sumant a la cinquena fila 2 vegades la segona

Amb això tenim que el rang(M) serà com a mínim de 2 ja que tenim dues files no nules (les dues primeres). Per a estudiar com, en funció dels valors del paràmetre m, pot augmentar o no el rang, mirem quan s'anul.la el menor format per les tres darrerres files i les tres darreres columnes (de cada fila veiem que podem treure un factor fora del determinant, abans de desenvolupar completament el determinant).

$$\begin{vmatrix} 0 & m-2 & 2-m \\ 4-2m & 0 & -4+2m \\ -4+2m & -m+2 & 0 \end{vmatrix} = (m-2)(4-2m)(m-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$(-2)(m-2)^3(-1) = 2(m-2)^3.$$

Per tant aquest menor s'anul.larà si i només si m = 2.

Per tant, si $m \neq 2 \Rightarrow rang(M) = 5$ ja que les tres darreres files seran independents i ampliaran el rang 2 de les dues primeres.
I si $m = 2 \Rightarrow rang(M) = 2$ ja que les tres darreres files s'anul.len.

En resum:

- Si $m \neq 2 \Rightarrow rang(M) = 5$.
- Si $m = 2 \Rightarrow rang(M) = 2$.

b) Per tractar-se d'un sistema homogeni serà sempre compatible. Ara bé cal veure si la solució és la trivial (0,0,0,0,0) o bé es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

- Si $m \neq 2 \Rightarrow rang(M) = 5$ que coincideix amb el nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD i la solució serà (0,0,0,0,0).

- Si $m = 2 \Rightarrow rang(M) = 2$ i per tant com que és menor que el nombre d'incògnites (5) tenim que el sistema serà Compatible Indeterminat amb (5-2=3) 3 graus de llibertat.

De l'apartat anterior, de la matriu reduïda tenim que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ és el menor que ens garanteix el rang, podem eliminar les equacions tercera, quarta i cinquena (per ser combinació lineal de les dues primeres) i traspassant els termes de z, t i u al terme independent obtenim el següent sistema equivalent:

$$\begin{cases} x - y & = & -z - 3u \\ 2y & = & -z - t + 2u \end{cases}.$$

Utilitzant z, t i u com a incògnites indeterminades, podem expressar y i x en termes de z, t i u, i obtenim

y = (-z-t+2u)/2

x = y-z-3u = (-z-t+2u)/2 -z-3u= (-3z-t-4u)/2.

En resum:

- Si $m \neq 2$ el sistema és SCD i la solució és (0,0,0,0,0).
- Si $m = 2$ el sistema és SCI amb 3 g.ll. i la solució és de la forma $\left(\frac{-3z - t - 4u}{2}, \frac{-z - t + 2u}{2}, z, t, u \right)$.

2. Considereu els següents plans de $\mathbb{R}^3$:

   $\pi_1 : x + y + z = 2,\ \ \pi_2 : 2x + (k-4)y + z = k - 4$ i $\pi_3 : kx + 10y + 4z = 11$

   on k és un paràmetre real ($k \in \mathbb{R}$).

   a) Estudieu, segons els valors de k, la posició relativa dels tres plans.
   b) Calculeu, per a aquells valors de k que tingui sentit, els punts, rectes o plans intersecció dels tres plans π_1, π_2 i π_3.

Resolució:

a)

Per a estudiar la posició relativa plantegem la matriu 3x4 corresponent al sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites format pels tres plans, per tal d'estudiar si té o no solució i denotem per A i A' la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & k-4 & 1 & k-4 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{array} \right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ja tenim que rang(A) ≥ 2. Per tant el rang(A) només valdrà 3 quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k-4 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(k-4) + 20 + k - k(k-4) - 10 - 8 = -k^2 + 9k - 14$, que només s'anul.la quan $k = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{-2} = \frac{-9 \pm 5}{-2} = \{2, 7\}$.

Per tant:

- Cas I: Si $k \neq 2,7 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ aleshores el sistema és SCD i per tant els tres plans s'intersecten en un punt.

- Cas II: Si $k = 2 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

En substituir el valor de k, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 - 4 - 4 + 8 - 22 = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 > 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir que els tres plans no tenen cap punt en comú.

- Cas III: Si $k = 7 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

Com abans, en substituir el valor de k, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 + 21 - 14 - 12 - 22 = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir que els tres plans s'intersecten en una recta.

En resum:

- Si $k \neq 2,7$ els tres plans es tallen en un punt
- Si $k = 2$ els tres plans no tenen cap punt en comú
- Si $k = 7$ els tres plans s'intersecten en una recta

b)
Pel que s'ha vist a l'apartat anterior, es tracta de trobar el punt intersecció en el cas $k \neq 2,7$ i la recta intersecció en el cas $k = 7$.

- Cas $k \neq 2,7$

El corresponent sistema és SCD i el resoldrem pel mètode de Cramer, en funció dels valors del paràmetre k.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k-4 & k-4 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-(k-2)(k-7)} = \frac{8(k-4)+10(k-4)+11-11(k-4)-20-4(k-4)}{-(k-2)(k-7)} = \frac{3k-21}{-(k-2)(k-7)} = \frac{3(k-7)}{-(k-2)(k-7)} = \frac{-3}{k-2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k-4 & 1 \\ k & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-(k-2)(k-7)} = \frac{4(k-4)+22+2k-k(k-4)-11-16}{-(k-2)(k-7)} = \frac{-k^2+10k-21}{-(k-2)(k-7)} = \frac{-(k-3)(k-7)}{-(k-2)(k-7)} = \frac{k-3}{k-2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & k-4 & k-4 \\ k & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-(k-2)(k-7)} = \frac{11(k-4)+40+k(k-4)-2k(k-4)-10(k-4)-22}{-(k-2)(k-7)} = \frac{-k^2+5k+14}{-(k-2)(k-7)} = \frac{-(k+2)(k-7)}{-(k-2)(k-7)} = \frac{k+2}{k-2}.$$

Per tant el punt intersecció és $\left(\frac{-3}{k-2}, \frac{k-3}{k-2}, \frac{k+2}{k-2}\right)$, per als diferents valors de $k \neq 2,7$.

- Cas $k = 7$

Com hem vist a l'apartat anterior, en aquest cas els tres plans s'intersecten en una recta que és la formada per la intersecció de dos d'ells, per exemple el primer i el segon. Així doncs la recta resulta de la resolució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+3y+z &= 3 \end{cases}$$

o equivalentment (restant a la segona equació dues vegades la primera)

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ \quad y-z &= -1 \end{cases}.$$

Aillant de la segona tenim y = z-1 i substituint a la primera x = 2-y-z = 2-z+1-z = 3-2z. Per tant els punts de la recta són de la forma $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$. És a dir, és la recta que passa pel punt $(3,-1,0)$ i que té vector director $(-2,1,1)$.

Resumint:

- Cas $k \neq 2,7$, els tres plans es tallen en el punt $\left(\frac{-3}{k-2}, \frac{k-3}{k-2}, \frac{k+2}{k-2}\right)$
- Cas $k = 7$, els tres plans tenen per intersecció la recta $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x & -y & +az & = & -2 \\ 2x & +y & +z & = & 2 \\ x & -4y & +bz & = & -8 \\ -x & -2y & +z & = & -4 \end{cases}$$

a) Demostreu que el sistema és compatible per a qualsevol valor dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Per al cas $a = 2$ resoleu el sistema (utilitzeu el mètode de Cramer si el sistema és compatible determinat i el mètode de Gauss si el sistema és compatible indeterminat).

Resolució:

a)
Per a veure que el sistema és sempre compatible és suficient comprovar que rang(A)=rang(A') per a qualsevol valor dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$.

Si comencem a triangular la matriu A' observem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & b & -8 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 3 & 1-2a & 6 \\ 0 & -3 & b-a & -6 \\ 0 & -3 & 1+a & -6 \end{pmatrix}$$

després de

- restar a la segona equació 2 vegades la primera
- restar a la tercera equació la primera
- sumar a la quarta equació la primera,

on podem comprovar que la segona columna i la quarta són proporcionals i per tant que el rang de la matriu ampliada A' no pot ser mai superior al rang de la matriu associada, A, per la qual cosa el sistema serà sempre compatible.

Per a arribar al mateix resultat també es pot fer una discussió general del sistema i veure que en tots els casos resulta compatible.

b)

Per a = 2 la matriu del sistema és

$$A' = (A|v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & b & -8 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ ens assegura que rang(A) ≥ 2. El rang(A) serà com a màxim 3 en funció dels dos possibles adjunts

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & b \end{vmatrix} = 3b - 15 \text{ i } A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Com que $A_2 = 0$, només depèn de quan s'anul.li A_1, que és quan b = 5.

Per tant:

- Cas I: b ≠ 5. Com que $A_1 \neq 0$, rang(A) = 3 = rang(A') = 3 = nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD

I aplicant el mètode de Cramer obtenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & b \end{vmatrix}}{3b-15} = \frac{0}{3b-15} = 0,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & b \end{vmatrix}}{3b-15} = \frac{6b-30}{3b-15} = 2 \text{ i } z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -8 & -4 & -8 \end{vmatrix}}{3b-15} = 0.$$

- Cas II: b = 5. Com que $A_1 = 0$, rang(A) = 2 = rang(A') < 3 = nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCI amb (3-2=1) 1 g.ll.

La solució la podem obtenir resolent el sistema format per les dues primeres equacions, que són les que intervenen en el menor no nul:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= -2 \\ 2x + y + z &= 2 \end{cases},$$

o equivalentment (quan triangulem per Gauss i a la segona equació li restem 2 vegades la primera)

$$\begin{cases} x - y + 2z &= -2 \\ 3y - 3z &= 6 \end{cases}.$$

Aillant de la segona equació obtenim y = 2+z i substituint a la primera equació
x = -2-2z+y = -2-2z+2+z = -z. Per tant els punts solució són de la forma $(-z, 2+z, z)$.

En resum:

- Cas I: b ≠ 5. SCD amb solució $(0,2,0)$.
- Cas II: b = 5, SCI amb 1 g.ll i solució $(-z, 2+z, z)$.