Universitat Oberta de Catalunya. Tardor 2017-18.
<u>Resolució PAC4</u>

Problema 1. (4 punts) Sigui $f: R^3 \to R^2$ l'aplicació lineal de R^3 en R^2 definida per

$$f(1,2,1)=(1,-1), f(0,1,1)=(-1,1), f(1,0,0)=(2,-2)$$

a) Demostreu que $(1,2,1),(0,1,1),(1,0,0)$ són una base de R^3 .

b) Calculeu el subespai imatge de f . Pertany $(1,2)$ a la imatge de f ?

c) Calculeu el subespai nucli de f . És injectiva f ?

d) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.

Resolució:

a) Anomenem u=(1,2,1), v=(0,1,1) i w=(1,0,0). Com que són tres vectors de R^3, per veure que són base és suficient provar que són linealment independents (veure Mòdul 2, Secció 2.4). És a dir, que el determinant de la matriu que formen és no nul (Mòdul 2, Secció 4.6). Desenvolupant per l'última columna, obtenim:

$$det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2\cdot 1-1\cdot 1=1.$$

Com que el determinant és no nul, u,v i w són tres vectors linealment independents de R^3 (veure Mòdul 2, Secció 4.6), o sigui:

$(1,2,1),(0,1,1),(1,0,0)$ **són una base de R^3.**

b) Per trobar la imatge de f és suficient calcular el subespai generat per les imatges d'una base (veure Mòdul 4, Secció 4). O sigui, f(u)=(1,-1), f(v)=(-1,1) i f(w)=(2,-2). Per tant, la imatge de f és el subespai Im(f)=<(1,-1),(-1,1),(2,-2)>. Observem que (-1,1) i (2,-2) són múltiples del primer vector, el (1,-1). Per tant, Im(f)=<(1,-1)> i Im(f) té dimensió 1. D'altra banda, el vector (1,2) no és múltiple del (1,-1).
Per tant, el vector (1,2) no és de Im(f). O sigui:

Im(f)=<(1,-1)> i (1,2) no pertany a la imatge de f.

c) Pel Teorema de la dimensió (o fórmula del rang) (veure Mòdul 4, Secció 4):

dim E= dim Ker(f) + dim Im (f).

Tenim $E=R^3$. Per l'apartat anterior, dim Im(f) =1. Per tant, la dimensió del nucli de f és necessàriament 2. En particular, f no és injectiva. Observem que f(u)=-f(v). O sigui, f(u+v)=f(u)+f(v)=0. Per tant, el vector u+v=(1,2,1)+(0,1,1)=(1,3,2) és del nucli. D'altra banda, f(w)=2f(u). És a dir, f(2u-w)=0. Per tant, el vector 2u-w=(2,4,2)-(1,0,0)=(1,4,2) també és del nucli. Com que (1,3,2) i (1,4,2) són linealment independents, tenim que:

Nuc(f)=<(1,3,2),(1,4,2)> i f no és injectiva.

d) Anomenem B={(1,2,1),(0,1,1),(1,0,0)} a la base de R^3 formada pels vectors u=(1,2,1), v=(0,1,1) i w=(1,0,0). Anomenem C={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} a la base canònica de R^3. Anomenem D={(1,0),(0,1)} a la base canònica de R^2. Anomenem M(C,B) a la matriu del canvi de la base C a la base B i M(B,C) a la matriu del canvi de la base B a la base C. Sabem que M(C,B) és la inversa de M(B,C). Ens demanen que calculem la matriu de f en les bases C i D, és a dir M(f,C,D). Sabem que M(f,C,D)=M(f,B,D)·M(C,B).

Com que f(u)=(1,-1), f(v)=(-1,1), f(w)=(2,2), i aquests vectors ja estan expressats en la base canònica, veiem que la matriu de f en les bases B i D és:

$$M(f,B,D)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Anàlogament, la matriu del canvi de la base B a la base C és

$$M(B,C)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La seva inversa és:

$$M(C,B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Així:

$$M(f,C,D)=M(f,B,D)\cdot M(C,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(veure Apunts Mòdul 4, Secció 6).

Problema 2. (4 punts) Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal de R^3 en R^3 definida per

$$f(x,y,z)=(2x-2y-4z\,,4x+8y+8z\,,-2x-2y).$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f. (Podeu usar Wiris.)
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:
a) Observem que f(1,0,0)=(2,4,-2), f(0,1,0)=(-2,8,-2) i f(0,0,1)=(-4,8,0). Els vectors imatge ja estan expressats en la base canònica. Per tant, posant-los per columnes, obtenim la matriu de f en les bases canòniques (veure Mòdul 4, Secció 3).

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & 8 & 8 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) El polinomi característic de f és (Mòdul 4, Secció 7):

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix} 2-t & -2 & -4 \\ 4 & 8-t & 8 \\ -2 & -2 & 0-t \end{pmatrix}.$$

Aplicant la regla de Sarrus (veure Mòdul 2, Secció 4.6) i operant obtenim:

$$Q(t)=-t^3+10t^2-32t+32=(2-t)\cdot(4-t)^2.$$

Per a trobar les arrels hem fet Ruffini o bé hem usat Wiris. Observem que el polinomi característic descompon en producte de tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 2 amb multiplicitat algebraica 1 i 4 amb multiplicitat algebraica 2.

El polinomi característic és Q(t)=(2-t)(4-t)² i els valors propis són 2 i 4.

c) Per veure si diagonalitza hem de comprovar que la multiplicitat de cada valor propi coincideix amb la dimensió de l'espai vectorial generat pels seus vectors propis associats (veure Mòdul 4, Secció 8).

Usem ara el Mòdul 4, Secció 7, per a trobar vectors propis de f de valor propi 2. És a dir, busquem el nucli de la matriu A-2·I. O sigui, resolem el sistema (A-2I)X=0:

$$(A\text{-}2I)X=\begin{pmatrix}0 & -2 & -4\\ 4 & 6 & 8\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Les equacions són: -2y-4z=0, 4x+6y+8z=0 i -2x-2y-2z=0. O sigui, y=-2z, 2x+3y+4z=0 i x+y+z=0. Substituint la primera en la tercera dóna x=-y-z=2z-z=z. I si substituim x=z i y=-2z en la segona equació ens dóna: 2z-6z+4z=0. És a dir, la segona equació és superflua. Això vol dir que les solucions són de la forma: (x,y,z)=(z,-2z,z)=z(1,-2,1). Per tant, (1,-2,1) és vector propi de f de valor propi 2 i la dimensió de l'espai vectorial associat és 1.

Com abans, trobem ara els vectors propis de f de valor propi 4. És a dir, busquem el nucli de la matriu A-4I. O sigui, resolem el sistema (A-4I)X=0:

$$(A\text{-}4I)X=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -4\\ 4 & 4 & 8\\ -2 & -2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Queda el sistema -2x-2y-4z=0, 4x+4y+8z=0 i -2x-2y-4z=0. Les tres equacions són la mateixa. De la primera equació obtenim x=-y-2z. Els vectors solució són de la forma:
(x,y,z)=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1). Així, veiem que el subespai vectorial generat pels vectors propis de valor propi 4 té dimensió 2 i que està generat per (-1,1,0) i (-2,0,1). Pel Teorema de diagonalització al Mòdul 4, secció 8, tenim:

Com que el polinomi característic descompon completament en factors reals de grau 1 i la multiplicitat de cada VAP coincideix amb la dimensió de l'espai vectorial generat pels seus VEP associats, aleshores f diagonalitza.

d) Hem vist que (1,-2,1) és vector propi de f de valor propi 2. També hem vist que (-1,1,0) i (-2,0,1) són vectors propis de valor propi 4. Els tres vectors junts són linealment independents, ja que el determinant dels tres és no nul (es comprova fent Sarrus).

Una base de R³ formada per vectors propis de f és
B={ (1,-2,1), (-1,1,0), (-2,0,1) }.

Problema 3. (2 punts) Considerem el triangle $A=(0,1), B=(0,3), C=(-1,2)$.

a) Sigui g el gir de 60º en sentit antihorari des de l'origen de coordenades. Calculeu $g(A), g(B), g(C)$.

b) Sigui f l'escalatge de raó 4 des del punt $(-2,0)$. Calculeu $f(A), f(B), f(C)$.

Feu un dibuix amb Wiris dels tres triangles: A,B,C , $g(A),g(B),g(C)$ i $f(A),f(B),f(C)$.

Resolució: a) Recordem el Mòdul 5, Secció 3.1. La matriu del gir en sentit antihorari i 60º o π/3, des de l'origen és:

$$\begin{pmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & 0 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per a trobar les imatges dels punts A,B,C hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -3\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-\sqrt{3}+2}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$g(A) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), g(B) = \left(\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), g(C) = \left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) Recordem ara el Mòdul 5, Secció 4. Per trobar la matriu de l'escalatge de raó 4 des del punt (-2,0), de dreta a esquerra, fem la translació de vector (2,0), després l'escalatge de raó 4, i després fem la translació de vector (-2,0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, f(A)=(6,4), f(B)=(6,12), f(C)=(2,8).