

# PAC1

05.579 - Autòmats i gramàtiques  
Grau en Enginyeria Informàtica

feb18-jun18

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació



## Presentació

En aquesta Prova d'Avaluació Continuada es treballen els conceptes bàsics de l'assignatura sobre alfabets, mots i llenguatges, així com diferents conceptes sobre autòmats finits i llenguatges regulars.

## Competències

En aquesta PAC es desenvolupen les competències següents:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

## Objectius

Els objectius concrets d'aquesta Prova d'Avaluació Continuada són:

- Saber definir els conceptes d'alfabet, mot i llenguatge.
- Conèixer les operacions sobre llenguatges i mots (concatenació, clausures) i saber utilitzar-les per descriure llenguatges complexos.
- Saber construir expressions regulars independents del context per descriure un llenguatge donat.
- Saber construir autòmats finits per reconèixer les paraules d'un llenguatge donat.
- Conèixer les relacions entre autòmats i expressions regulars i saber passar d'una representació a l'altra amb destresa.

## Recursos

Els següents recursos són d'utilitat per a la realització de la PAC:

Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Alfabets, mots i llenguatges
- Mòdul didàctic 2. Autòmats finits i llenguatges regulars

Complementaris

- Eines de suport com exàmens, proves de validació/síntesi i PACs de semestres anteriors.



## Criteris de valoració

La ponderació dels exercicis és la següent:

- Exercici 1: 40%
- Exercici 2: 20%
- Exercici 3: 25%
- Exercici 4: 15%

## Format i data de lliurament

Cal lliurar un únic document Word, Open Office o PDF amb les respostes a les preguntes. El nom del fitxer ha de ser: **Cognom1-Cognom2-Nom-PAC1.ext** on "ext" fa referència a l'extensió del fitxer.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de Lliurament i Registre d'AC de l'aula abans de les **23:59 del dimarts dia 17 d'abril de 2018**. No s'acceptaran lliuraments fora de termini.

### Nota: Propietat intel·lectual

Sovint és inevitable, en produir una obra multimèdia, fer ús de recursos creats per terceres persones. És per tant comprensible fer-ho en el marc d'una pràctica dels estudis del Grau Multimèdia, sempre i això es documenti clarament i no suposi plagi en la pràctica.

Per tant, en presentar una pràctica que faci ús de recursos aliens, s'ha de presentar juntament amb ella un document en què es detallin tots ells, especificant el nom de cada recurs, el seu autor, el lloc on es va obtenir i el seu estatus legal: si l'obra està protegida pel copyright o s'acull a alguna altra llicència d'ús (Creative Commons, llicència GNU, GPL, ...). L'estudiant haurà d'assegurar-se que la llicència que sigui no impedeix específicament seu ús en el marc de la pràctica. En cas de no trobar la informació corresponent haurà d'assumir que l'obra està protegida pel copyright.

Hauran, a més, adjuntar els fitxers originals quan les obres utilitzades siguin digitals, i el seu codi font si correspon.

Un altre punt a considerar és que qualsevol pràctica que faci ús de recursos protegits pel copyright no podrà en cap cas publicar-se en Mosaic, la revista del Graduat en Multimèdia a la UOC, a no ser que els propietaris dels drets intel·lectuals donin la seva autorització explícita.



## El nombres romans

### *Regles per escriure nombres romans:*

Hi ha dos grups de símbols, amb comportaments diferents:

- Els de les potències de 10 (1, 10, 100, 1000) que corresponen a I, X, C, M.
- Però si només hi haguessin aquests, s'haurien d'escriure molts signes. Els romans devien adonar-se que més de tres signes iguals ja no es capten a cop d'ull i varen fer un altre grup de símbols intermedis, el dels "cinc": 5, 50 i 500, que corresponen a V, L, D.

Els números es llegeixen d'esquerra a dreta, començant pel símbol, o conjunt de símbols, de més valor. En el seu equivalent en base 10, els conjunts de símbols que representen els milers, després les centenes, les desenes i finalment les unitats.

*Exemple:* (2784: MM DCC LXXX IV)

Cada grup de signes té unes normes d'ús:

- Els signes I, X, C i M no es poden repetir més de tres vegades seguides.
- Els signes V, L i D no es poden repetir, ja que dos equivalen a un dels anteriors.
- Un símbol seguit d'un altre d'igual o inferior valor es suma ( $XXI = 10+10+1 = 21$ ).
- Un símbol I, X, C situat a l'esquerra d'un altre de valor més gran V, X, L, D, M, ambdós símbols formen un conjunt, el qual s'ha de restar el valor del primer al segon ( $XLIX = [50-10]+[10-1] = 49$ ), però amb les normes següents: només poden restar amb els símbols que són potències de 10, no amb els símbols intermedis del "cinc", sobre símbols amb valor immediatament superior, però no d'altres valors més grans (I davant de V o X, X davant de L o C y C davant de D o M) i no poden repetir-se (per exemple: podem escriure IV i IX, però no IL, IC, VX o IIX).

Unitats				Desenes			
		5	V			50	L
1	I	6	VI	10	X	60	LX
2	II	7	VII	20	XX	70	LXX
3	III	8	VIII	30	XXX	80	LXXX
4	IV	9	IX	40	XL	90	XC

Taula 1: Codificació de les unitats i desenes en números romans.

Es tracta, doncs, d'un sistema additiu, perquè cada símbol o grup de símbols té un valor, i es sumen per a obtenir el valor total. Els símbols, per tant, s'han d'escriure en ordre, perquè la seva posició davant o darrera un de l'altre, modifica el seu valor. Però no és un sistema posicional, perquè els símbols tenen valor per ells mateixos, independentment del lloc que ocupen (a diferència del nostre, en què el símbol 9 pot fer de 9, 90, 900... segons el lloc que ocupi).



## Exercici 1 (40%)

A partir de la informació donada a la taula 1, volem construir un **DFA** (Autòmat Finit Determinista) **mínim** que permeti reconèixer el llenguatge  $L_1$ , format pels nombres romans que representen les unitats del sistema decimal, els nombres de l'1 al 9 que es mostren a la taula 1

*Per fer-lo, cal respondre els següents apartats i seguir el procés de desenvolupament, tal i com s'indica en cada punt.*

**1.1) (5%)** Definiu formalment, o expliqueu, els següents elements del llenguatge que reconeix aquest autòmat.

**Alfabet d'entrada:** Els símbols que utilitzem per a representar els nombres romans de 1 al 9 són  $\{I, V, X\}$ . La resta de símbols romans no els utilitzem, per tant, no formarien part del nostre llenguatge.

**El mot buit pertany al llenguatge?** No, aquest llenguatge no conté el símbol  $\lambda$ . No s'ha de representar el número 0, i tot i així, no hi ha cap símbol per a representar el nombre 0 utilitzant nombre romans i formalment el mot buit tampoc representaria el nombre 0.

**Conjunt de mots d'aquest llenguatge:**  $\{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX\}$

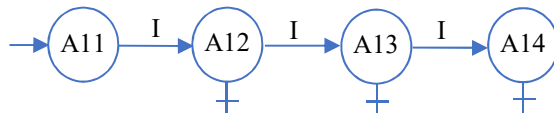
*Doneu el conjunt de mots del llenguatge definits segons els criteris següents:*

- Indiqueu els submots propis del mot VII:  $\{I, II, V, VI\}$
- $\{w \in L_1 \mid w = w^R\} : \{I, II, III, V\}$
- $\{w \in L_1 \mid |w| = 3\} : \{III, VII\}$
- $\{w \in L_1 \mid |w|_I = 2\} : \{II, VII\}$
- $\{w_1 \in L_1 \mid w_2 \in L_1 \mid w_1 \neq w_2 \mid (w_1 \cdot w_2) \in L_1^C\}$  (només cal donar 3 parelles de mots de la forma següent:  $(w_1 \cdot w_2)$ ) :  
 $\{(I \cdot III), (I \cdot IV), (I \cdot VI), (I \cdot VII), (I \cdot VIII), (I \cdot IX), (II \cdot III), (II \cdot IV), (II \cdot V), (II \cdot VI), (II \cdot VII), (II \cdot VIII), (II \cdot IX), (III \cdot IV), (III \cdot V), (III \cdot VI), (III \cdot VII), (III \cdot VIII), (III \cdot IX), (IV \cdot I), (IV \cdot II), (IV \cdot III), (IV \cdot V), (IV \cdot VI), (IV \cdot VII), (IV \cdot VIII), (IV \cdot IX), (V \cdot VI), (V \cdot VII), (V \cdot VIII), (V \cdot IX), (VI \cdot III), (VI \cdot IV), (VI \cdot V), (VI \cdot VII), (VI \cdot VIII), (VI \cdot IX), (VII \cdot II), (VII \cdot III), (VII \cdot IV), (VII \cdot V), (VII \cdot VI), (VII \cdot VIII), (VII \cdot IX), (VIII \cdot I), (VIII \cdot II), (VIII \cdot III), (VIII \cdot IV), (VIII \cdot V), (VIII \cdot VI), (VIII \cdot VII), (VIII \cdot IX)\}$

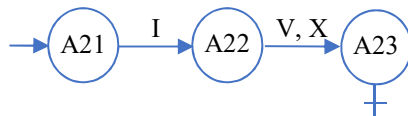


**1.2) (10%)** Doneu els DFAs mínims que permetin reconèixer els llenguatges següents:  
Dibuixeu els autòmats. **No cal dibuixar les transicions a l'estat pou.**

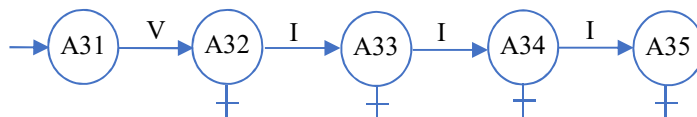
1.2.a)  $L_{11} = \{ I, II, III \}$



1.2.b)  $L_{12} = \{ IV, IX \}$



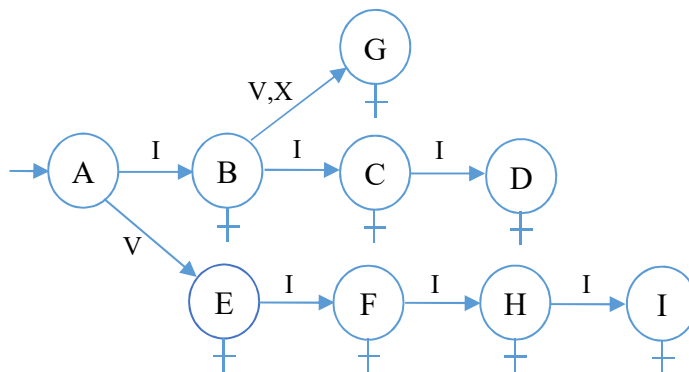
1.2.c)  $L_{13} = \{ V, VI, VII, VII \}$



**1.3) (10%)** Feu la unió per producte cartesià dels 3 autòmats obtinguts a l'apartat anterior, doneu la taula de transicions i dibuixeu el DFA obtingut. **No cal dibuixar les transicions a l'estat pou.**

Fem la unió per producte cartesià i obtenim la següent taula de transicions

		I	V	X
→A	→ (A11,A21, A31)	(A12,A22)	(A32)	
+B	+(A12,A22)	(A13)	(A23)	(A23)
+C	+(A13)	(A14)	∅	∅
+D	+(A14)	∅	∅	∅
+E	+(A32)	(A33)	∅	∅
+F	+(A33)	(A34)	∅	∅
+G	+(A23)	∅	∅	∅
+H	+(A34)	(A35)	∅	∅
+I	+(A35)	∅	∅	∅
	∅	∅	∅	∅



**1.4) (15%)** Doneu el DFA (Autòmat Finit Determinista) **mínim** que permeti reconèixer el llenguatge L1 format pels nombres romans que representen les unitats del sistema decimal, els nombres de l'1 al 9, a partir de l'autòmat obtingut al punt anterior. **No cal dibuixar les transicions a l'estat pou.** Cal mostrar tots els passos seguits per a obtenir l'autòmat mínim i justificar perquè és mínim.

La taula de DFA obtingut a l'aparat anterior és:

		I	V	X
A	→ (A11,A21, A31)	B	E	∅
B	+(A12,A22)	C	G	G
C	+(A13)	D	∅	∅
D	+(A14)	∅	∅	∅
E	+(A32)	F	∅	∅
F	+(A33)	H	∅	∅
G	+(A23)	∅	∅	∅
H	+(A34)	I	∅	∅
I	+(A35)	∅	∅	∅
	∅	∅	∅	∅

$\equiv_0$

A0 = { A, ∅ }

B0 = { B, D, C, D, E, F }

	I	V	X
→A	B - B0	E - B0	∅ - A0
+B	C - B0	G - B0	G - B0
+C	D - B0	∅ - A0	∅ - A0
+D	∅ - A0	∅ - A0	∅ - A0
+E	F - B0	∅ - A0	∅ - A0
+F	H - B0	∅ - A0	∅ - A0
+G	∅ - A0	∅ - A0	∅ - A0
+H	I - B0	∅ - A0	∅ - A0
+I	∅ - A0	∅ - A0	∅ - A0
∅	∅ - A0	∅ - A0	∅ - A0



$\equiv_1$

$A1 = \{ A \}$

$A2 = \{ \emptyset \}$

$B1 = \{ B \}$

$B2 = \{ C, E, F, H \}$

$B3 = \{ D, G, I \}$

	I	V	X
$\rightarrow A$	$B - B1$	$E - B2$	$\emptyset - A2$
$+B$	$C - B2$	$G - B3$	$G - B3$
$+C$	$D - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+D$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+E$	$F - B2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+F$	$H - B2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+G$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+H$	$I - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+I$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$\emptyset$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$

$\equiv_2$

$A1 = \{ A \}$

$A2 = \{ \emptyset \}$

$B1 = \{ B \}$

$B21 = \{ C, H \}$

$B22 = \{ E, F \}$

$B3 = \{ D, G, I \}$

	I	V	X
$\rightarrow A$	$B - B1$	$E - B22$	$\emptyset - A2$
$+B$	$C - B21$	$G - B3$	$G - B3$
$+C$	$D - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+D$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+E$	$F - B22$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+F$	$H - B21$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+G$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+H$	$I - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+I$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$\emptyset$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$

$\equiv_3$

$A1 = \{ A \}$

$A2 = \{ \emptyset \}$

$B1 = \{ B \}$

$B21 = \{ C, H \}$

$B221 = \{ E \}$

$B222 = \{ F \}$

$B3 = \{ D, G, I \}$

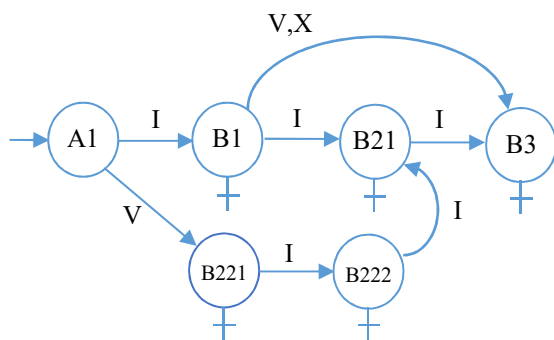
		I	V	X
$\rightarrow A$	A1	$B - B1$	$E - B221$	$\emptyset - A2$
$+B$	B1	$C - B21$	$G - B3$	$G - B3$
$+C$	B21	$D - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+D$	B3	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+E$	B221	$F - B222$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+F$	B222	$H - B21$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+G$	B3	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+H$	B21	$I - B3$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$+I$	B3	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$
$\emptyset$	A2	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$	$\emptyset - A2$





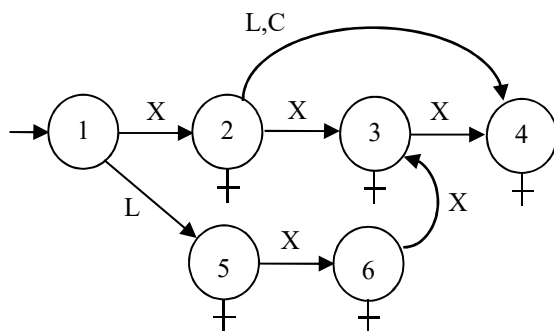
Ara ja no hi ha cap més divisió a la taula de transicions i per tant aquest serà l'autòmat mínim. La taula de transicions i la representació gràfica de l'autòmat mínim és la següent:

	I	V	X
→A1	B – B1	E – B221	Ø - A2
+B1	C – B21	G – B3	G – B3
+B21	D – B3	Ø - A2	Ø - A2
+B3	Ø - A2	Ø - A2	Ø - A2
+B221	F - B222	Ø - A2	Ø - A2
+B222	H – B21	Ø - A2	Ø - A2
+A2	Ø - A2	Ø - A2	Ø - A2



## Exercici 2 (20%)

A partir de la informació donada sobre la representació de números romans, hem obtingut el **DFA**(Autòmat Finit Determinista) **mínim** que es mostra a continuació i que permet reconèixer el llenguatge L2, format pels nombres romans que representen les desenes del sistema decimal, els nombres 10, 20, 30, ... fins al 90, que es mostren a la taula 1.

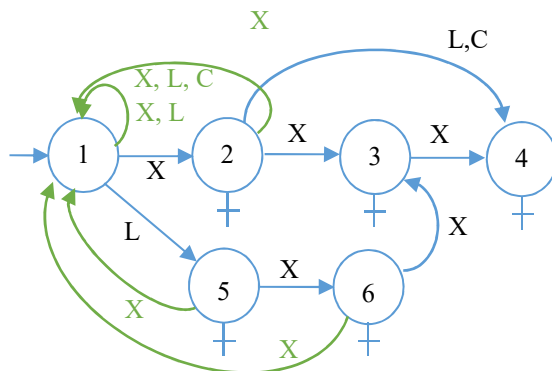




**2.1) (5%)** El DFA mínim obtingut a la pregunta anterior és equivalent a aquest autòmat? Justifiqueu la resposta. Quin o quins canvis creieu que es podrien fer per fer-los equivalents?

No són equivalents perquè els llenguatges que reconeixen són diferents. No obstant això, si canviem els símbol X per I, L per V, C per X, l'autòmat reconeix el llenguatge L1 i són equivalents per la unicitat de l'autòmat mínim.

**2.2) (10%)** Volem construir un DFA que accepti qualsevol combinació dels mots del llenguatge L2. Per a construir aquest autòmat cal fer el tancament positiu de Kleene del llenguatge L2. Obtingueu l'autòmat (**no cal que sigui determinista, ni mínim**) que reconeix el tancament positiu de Kleene del llenguatge L2.



**2.3) (5%)** Amb aquest autòmat que reconeix el tancament positiu del llenguatge L2 continuarem acceptant nombres romans escrits correctament? Justifiqueu la resposta.

No, perquè els números es llegeixen d'esquerra a dreta, començant pel símbol, o conjunt de símbols, de més valor. Es tracta, doncs, d'un sistema additiu, perquè cada símbol o grup de símbols té un valor, i es sumen per a obtenir el valor total. Els símbols, per tant, s'han d'escriure en ordre, perquè la seva posició davant o darrera un de l'altre, modifica el seu valor. Però no és un sistema posicional, perquè els símbols tenen valor per ells mateixos, independentment del lloc que ocupen (a diferència del nostre, en què el símbol 9 pot fer de 9, 90, 900... segons el lloc que ocupi). I en aquest llenguatge estem combinant mots que representen desenes.



### Exercici 3 (25%)

Volem obtenir l'autòmat (**no cal que sigui determinista, ni mínim**) que reconeix el llenguatge L3, format pels nombres romans de l'1 al 99, a partir del **DFA**(Autòmat Finit Determinista) **mínim** que reconeix el llenguatge L1 (autòmat que reconeix les unitats obtingut a la pregunta 1), i del DFA **mínim** que reconeix el llenguatge L2 (autòmat que reconeix les desenes donat a la pregunta 2).

**3.1) (5%)** Doneu 5 mots del llenguatge L3, que no pertanyin ni al llenguatge L1, ni al llenguatge L2.

X·I, X·II X·IV, X·V, X·VI, X·VII, X·VIII X·IX, ... , XC·I, XC·II, XC·II, XC·IV, XC·V, XC·VI, XC·VII, XC·VIII, XC·IX.

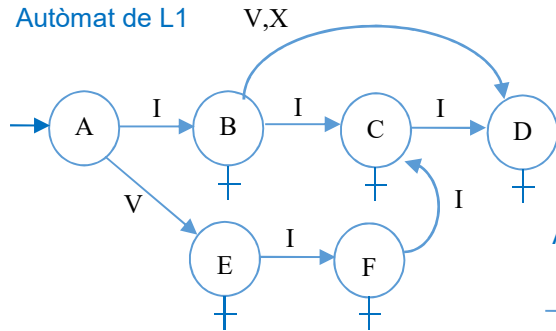
**3.2) (5%)** Quines operacions cal fer per a obtenir l'autòmat (**no cal que sigui determinista, ni mínim**) que reconeix el llenguatge L3, format pels nombres romans de l'1 al 99, a partir del **DFA**(Autòmat Finit Determinista) **mínim** que reconeix el llenguatge L1 (autòmat que reconeix les unitats) i del DFA **mínim** que reconeix el llenguatge L2 (autòmat que reconeix les desenes)?

Fem la concatenació entre L1 i L2,  $L_2 \cdot L_1$ , posem L2 al davant perquè els números es llegeixen d'esquerra a dreta començant pel símbol, o conjunt de símbols, de més valor. Amb aquesta operació, però, no n'hi ha prou, i caldrà afegir els mots reconeguts per L1 i L2. En definitiva:  $L = (L_2 \cdot L_1) \cup (L_1 \cup L_2)$ .

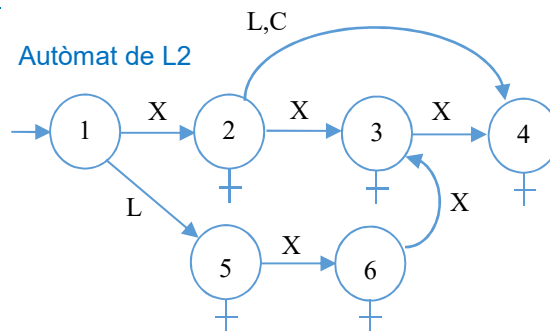


**3.3) (10%)** Apliqueu aquesta operació sobre els DFA mínims que reconeixen els llenguatges L1 i L2 per a obtenir l'autòmat (**no cal que sigui determinista, ni mínim**) que reconeix el llenguatge L3.

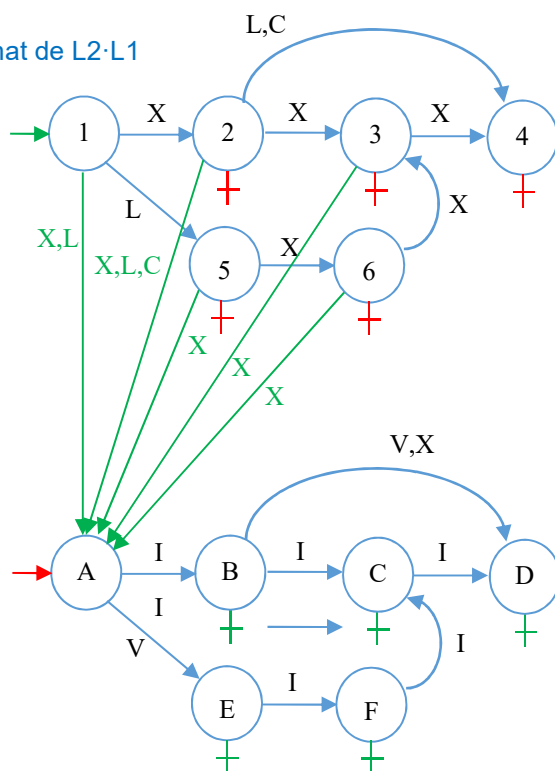
Autòmat de L1



Autòmat de L2



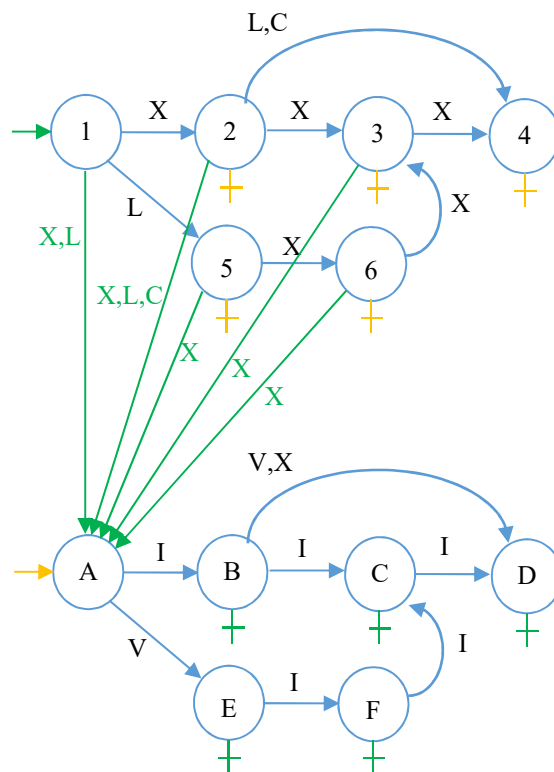
Autòmat de L2·L1





També es podria representar de la manera següent:

Sobre l'autòmat que reconeix L2·L1, deixar els estats de l'autòmat que reconeix L2 com acceptadors i fer que l'estat inicial de l'autòmat que reconeix L1 també sigui estat inicial de l'autòmat.



**3.4) (5%)** Sobre l'autòmat obtingut a l'apartat anterior, que reconeix el llenguatge L3, format pels números romans de l'1 al 99, per a cadascuna de les paraules següents, doneu la seqüència d'estats, des de l'estat inicial i fins que s'hagin processat tots els símbols de la paraula. Indiqueu també si la paraula serà acceptada o no acceptada.

*(estado inicial) ... (estados intermedios) ... [(estado final)/(estado pozo)] ([NO] aceptada)*

- a) IX : **ABD** (acceptada).
- b) IC : **A**(estat pou) (**NO** acceptada). No es pot posar I davant de C  
Per fer 99 hauriem d'escriure XCIX.
- c) VI : **AEF** (acceptada).
- d) XI : **1AB** (acceptada).
- e) XL : **124** (acceptada).



## Exercici 4 (15%)

Donat l'autòmat finit determinista  $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ , on  $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\Sigma = \{c, d, m\}$ ,  $q_0=1$ ,  $F=\{2, 3, 4, 5, 6\}$  i  $\delta$  definida per la taula següent:

$\delta$	c	d	m
$\rightarrow 1$	2	5	$\emptyset$
<b>+2</b>	3	4	4
<b>+3</b>	4	$\emptyset$	$\emptyset$
<b>+4</b>	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
<b>+5</b>	6	$\emptyset$	$\emptyset$
<b>+6</b>	3	$\emptyset$	$\emptyset$

Determineu una expressió regular que representi el llenguatge L reconegut per aquest autòmat definint els llenguatges associats a cada estat de l'autòmat.

$$L1 = cL2 + dL5$$

$$L2 = cL3 + dL4 + mL4 + \lambda$$

$$L3 = cL4 + \lambda$$

$$L4 = \lambda$$

$$L5 = cL6 + \lambda$$

$$L6 = cL3 + \lambda$$

$$L3 = c(\lambda) + \lambda = c + \lambda$$

$$L6 = c(c + \lambda) + \lambda = cc + c + \lambda$$

$$L5 = c(cc + c + \lambda) + \lambda = ccc + cc + c + \lambda$$

$$L2 = c(c + \lambda) + d(\lambda) + m(\lambda) + \lambda = cc + c + d + m + \lambda$$

$$\begin{aligned} L1 &= c(cc + c + d + m + \lambda) + d(ccc + cc + c + \lambda) \\ &= ccc + cc + cd + cm + c + dccc + dcc + dc + d \end{aligned}$$