Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 10+15=25%)

   a) Quantes funcions injectives hi ha del conjunt $N_5 = \{1, 2, \dots, 5\}$ a un conjunt X de 20 elements?

   b) Quants seqüències ternàries de longitud 7 es poden fer de forma que continguin com a mínim 3 zeros?

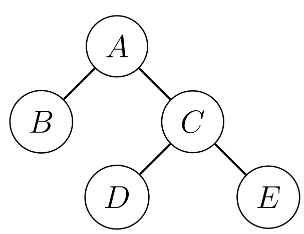
Solució:

a) El nombre de funcions injectives del conjunt $N_5 = \{1, 2, \dots, 5\}$ a un conjunt X de 20 elements coincideix amb el nombre de 5-mostres ordenades sense repetició del conjunt X. Per tant, n'hi ha $V(20, 5) = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$.

b) En total hi ha 3^7 seqüències ternàries de longitud 7. Per obtenir les que contenen com a mínim 3 zeros, hem d'eliminar les seqüències que no contenen cap zero, les que contenen exactament un zero, i les que contenen exactament dos. Per tant, es poden formar $3^7 - 2^7 - 2^6 \cdot 7 - 2^5 \cdot 21 = 2187 - 128 - 64 \cdot 7 - 32 \cdot 21 = 939$ seqüències ternàries.

---

2. (Valoració d'un 10 + 5 + 5 + 5=25%) Considereu el següent arbre binari:



a) Doneu el recorregut en preordre, inordre i postordre de l'arbre.

b) Quantes arestes s'han d'eliminar com a mínim per tal que deixi de ser connex? Obtenim el mateix valor per a qualsevol arbre? Justifica les respostes.

c) Justifiqueu perquè aquest arbre no és eulerià ni té cap camí eulerià i afegiu el mínim nombre d'arestes possibles per tal que sigui eulerià.

d) El graf eulerià que heu obtingut en l'apartat anterior és hamiltonià? En cas positiu doneu un circuit hamiltonià i en cas negatiu justifiqueu perquè.

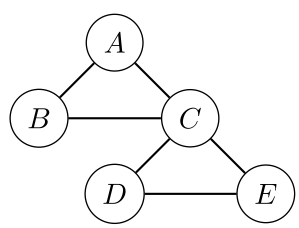
Solució:

a) Els recorreguts de l'arbre són:

- Preordre: A, B, C, D, E.
- Inordre: B, A, D, C, E.
- Postordre: B, D, E, C, A.

b) Si eliminem una aresta, per exemple l'aresta $\{A, B\}$, aleshores l'arbre deixa de ser connex. Un arbre de n vèrtexs és un graf connex que té $n-1$ arestes, que és el mínim nombre d'arestes que necessitem per connectar n vèrtex. Per tant, només que eliminem una aresta, deixaria de ser connex.

c) No és eulerià ja que té vèrtexs de grau senar. Com que té més de 2 vèrtexs de grau senar (en té quatre), tampoc té un camí eulerià. Per tal que sigui un graf eulerià, afegim les arestes $\{\{B, C\}, \{D, G\}\}$:



Ara totes les arestes tenen grau parell.

d) El nou graf obtingut en l'apartat anterior no és hamiltonià. Per exemple, si eliminem el vèrtex C ens queden dues components connexes, que no és possible si el graf és hamiltonià

---

3. (Valoració d'un 5+5+5+5+5=25%)

A continuació es mostren els primers passos de l'algorisme de Dijkstra aplicat sobre un graf simètric.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
$(0, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)^*$	$(12, A)$	(∞, A)	$(6, A)$	(∞, A)	$(5, A)$	(∞, A)	$(4, A)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(12, A)$	$(9, H)$	$(6, A)$	(∞, A)	$(5, A)$	$(7, H)$	$(4, A)^*$	$(9, H)$
$(0, A)$	$(12, A)$	$(9, H)$	$(6, A)$	$(14, F)$	$(5, A)^*$	$(7, H)$	$(4, A)$	$(9, H)$
$(0, A)$	$(12, A)$	$(9, H)$	$(6, A)^*$	$(8, D)$	$(5, A)$	$(7, H)$	$(4, A)$	$(7, D)$

Usant només aquesta taula, que segueix la notació que apareix en els materials, per a cadascuna de les següents afirmacions, digueu raonadament si són certes o falses:

a) El pes del camí mínim de H a A és 4.

b) El pes del camí mínim de A a I és menor o igual que 7.

c) El camí mínim de A a C passa per H.

d) Hi ha una aresta de A a G de pes 7.

e) Hi ha una aresta de D a I de pes 1.

Solució:

a) Cert. El vèrtex H s'ha explorat en el tercer pas, per tant l'etiqueta 4 correspon al pes del camí mínim de A a H.

b) Cert. El vèrtex I encara no ha estat explorat, però el pes del camí mínim de A a I mai podrà ser superior a 7.

c) Fals. El vèrtex C encara no ha estat explorat, per tant pot ser que l'etiqueta s'actualitzi, i finalment el camí mínim no passi per H.

d) Fals. No hi ha cap aresta de A a G. Hi ha un camí de pes 7 passant per H.

e) Cert. Hi ha un camí de A a D de pes 6. També hi ha un camí de A a I de pes 7 que passa per D, per tant de D a I hi ha una aresta de pes 1.

---

4. (Valoració d'un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25=25%)

   Justifiqueu si poden existir dos problemes A i B, tal que $A \leq_p B$, satisfent les següents condicions: (**Nota:** Els apartats són independents)

   a) $A \notin \mathrm{P}$ i $B \in \mathrm{P}$.

   b) $A \in \mathrm{NP}$ i $B \in \mathrm{P}$.

   c) $A \notin \mathrm{P}$ i $B \notin \mathrm{P}$.

   d) A i B són polinòmicament equivalents.

Solució:

a) No poden existir. Si $B \in \mathrm{P}$, aleshores necessàriament $A \in P$.

b) Sí que poden existir sempre que $A \in \mathrm{P}$. Com que $P \subseteq \mathrm{NP}$, no hi hauria cap contradicció. En canvi, si $A \notin P$, no poden existir per l'argument de l'apartat *a*).

c) Sí que poden existir, ja que podria passar, per exemple, que els dos fossin de la classe NP.

d) Sí que poden existir, sempre que $B \leq_p A$.

Final 2

1. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

   Considereu una matriu quadrada $M = (a_{ij})$ de mida $n \times n$, on els coeficients són valors binaris. Considereu el següent algorisme:

```
1  funció | OperacioMatriu | (M, n)
2    inici
3      L ← [ ]
4      per i ← 1 fins n
5          L[i] ← 0
6      fiper
7      per i ← 1 fins n
8          per j ← i + 1 fins n
9              si M[i][j] = 1 aleshores
10                 L[i] ← L[i] + 1
11                 L[j] ← L[j] + 1
12             fisi
13         fiper
14     fiper
15     retorn L
16   fi
```

   a) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme.

   b) Determineu, en funció de n, la complexitat de l'algorisme.

   c) Sigui $A = [[0,1,0,1,0],[1,0,1,1,1],[0,1,0,0,0],[1,1,0,0,1],[0,1,0,1,0]]$ la matriu d'adjacències d'un graf simètric amb 5 vèrtexs. Calculeu el resultat de la següent crida *OperacioMatriu*$(A, 5)$, i a continuació expliqueu en general què retorna aquest algorisme aplicat a una matriu d'adjacències d'un graf simètric.

Solució:

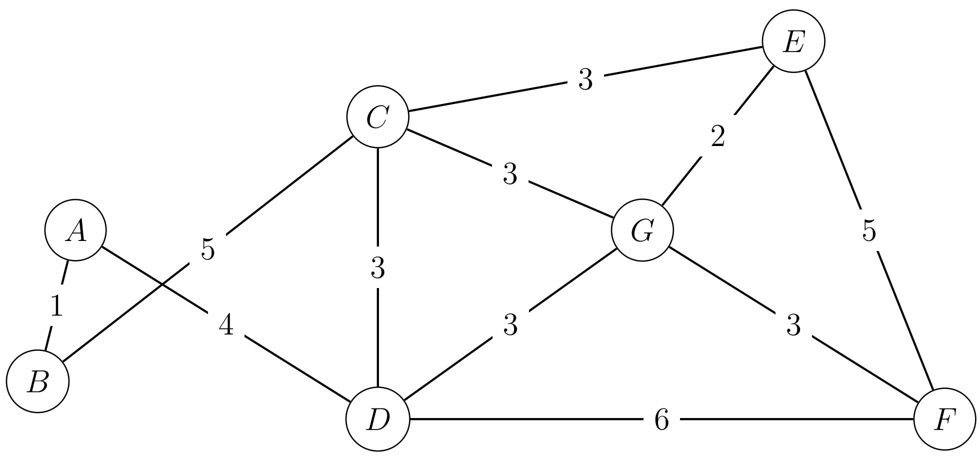
a) En el pitjor dels casos, l'algorisme realitza una assignació inicial en la línia 3, n assignacions en la línia 5, $n(n-1)/2$ comparacions en la línia 9, $2n(n-1)/2$ sumes i $2n(n-1)/2$ assignacions, en les línies 10 i 11. Per tant, el nombre d'operacions és $n + 1 + 5n(n-1)/2 = (5n^2 - 3n + 2)/2$.

b) A partir del resultat anterior, tenim que l'algorisme té complexitat $O(n^2)$.

c) El resultat de la crida *OperacioMatriu*$(A, 5)$ és $[2, 4, 1, 3, 2]$. En general, aquesta funció retorna la seqüència de graus a partir de la matriu d'adjacències del graf.

---

2. (Valoració d'un 12.5+12.5=25%) Considereu el següent graf:



a) És possible trobar un circuit que passi per totes les arestes sense repetir-ne cap? I un camí? En cas negatiu, justifiqueu perquè no és possible i en cas afirmatiu doneu-lo.

b) Volem eliminar el màxim nombre d'arestes de manera que el graf continuï sent connex i el cost total sigui el mínim possible. Feu servir l'algorisme més adequat i digueu quin és el cost mínim obtingut.

Solució:

a) No és possible trobar un circuit que passi per totes les arestes sense repetir-ne cap perquè el graf no és eulerià, ja que té dos vèrtexs de grau senar (E i F). Com que només té dos vèrtexs, sí que existeix un itinerari eulerià: $\{E, C, B, A, D, C, G, D, F, G, E, F\}$. Ara bé, com que hi ha vèrtexs de grau més gran que dos, no existex cap itinerari que passi per totes les arestes sense repetir cap vèrtex; per tant, no existeix cap camí que passi per totes les arestes sense repetir-ne cap.

$b)$ Apliquem l'algorisme de Kurskal:

Arestes	**Pesos**
$\{A, B\}$	1
$\{E, G\}$	2
$\{C, D\}$	3
$\{C, G\}$	3
$\{C, E\}$	3
$\{D, G\}$	3
$\{F, G\}$	3
$\{A, D\}$	4
$\{B, C\}$	5
$\{E, F\}$	5
$\{D, F\}$	6

Triem i marquem amb un asterisc les 6 primeres arestes que no formen cap cicle, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Arestes	**Pesos**
$\{A, B\}^*$	1
$\{E, G\}^*$	2
$\{C, D\}^*$	3
$\{C, G\}^*$	3
$\{\mathbf{C}, \mathbf{E}\}$	3
$\{\mathbf{D}, \mathbf{G}\}$	3
$\{F, G\}^*$	3
$\{A, D\}^*$	4
$\{B, C\}$	5
$\{E, F\}$	5
$\{D, F\}$	6

El cost de l'arbre generador de cost mínim és 16.

---

3. (Valoració d'un 5+5+5+5+5=25%)

Per a cadascuna de les següents afirmacions, digueu raonadament si són certes o falses:

$a)$ El diàmetre d'un graf és el valor del camí mínim entre totes les parelles de vèrtexs d'un graf, i es pot calcular utilitzant l'algorisme de Floyd.

b) Per calcular el camí mínim entre dos vèrtexs d'un graf simètric no ponderat, el millor algorisme és Dijkstra.

c) L'algorisme de Dijsktra pot utilitzar-se encara que hi hagi pesos negatius en les aretes del graf.

d) Per trobar el nombre de components connexes d'un graf, podem utilitzar els algorismes DFS o BFS.

e) En un graf hamiltonià, tots els vèrtexs tenen grau parell.

Solució:

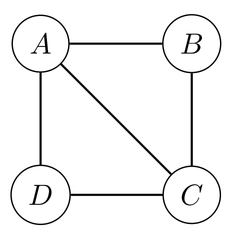
a) Fals. L'algorisme de Floyd permet trobar el pes mínim entre totes les parelles de vèrtexs d'un graf ponderat, i a partir d'aquest resultat podríem obtenir el mínim, però el diàmetre d'un graf és la distància màxima entre qualsevol parella de vèrtexs.

b) Fals. Si el graf és no ponderat, el millor algorisme per calcular el camí mínim (amb nombre d'arestes) entre dos vèrtex és el BFS.

c) Fals. L'algorisme de Dijsktra no es pot utilitzar si hi ha pesos negatius en les arestes.

d) Cert. Per calcular el nombre de components connexes necessitem fer un recorregut per tots els vèrtexs del graf. Podem adaptar els algorismes DFS o BFS, i al mateix temps que fem el recorregut, podem comptar el nombre de components.

e) Fals. Per exemple, el següent graf és hamiltonià, amb circuit hamiltonià $\{A, B, C, D\}$, però no tots els vèrtexs tenen grau parell:



---

4. (Valoració d'un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25%)
Digueu si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la resposta:

a) Si es troba un algorisme polinòmic per resoldre el problema SAT, aleshores P=NP.

b) Si $A \leq_p B$, aleshores A i B són polinòmicament equivalents.

c) Determinar el nombre de components connexos d'un graf és un problema de complexitat polinòmica.

d) Si A és NP-Difícil, aleshores A és NP-Complet.

Solució:

a) Cert. Com que SAT és NP-Complet, si SAT pertany a P, tot problema $A \in$ NP podria reduir-se a un P. Per tant, P = NP.

b) Fals. S'hauria de complir també que $B \leq_p A$.

c) Cert. Podem fer servir els algorismes BFS o DFS que tenen complexitat polinòmica.

d) Fals. La inversa és certa, o sigui si A és NP-Complet, aleshores A és NP-Difícil.

Final 3

1. (Valoració d'un 5+5+5+10=25%)

   Considereu el següent algorisme:

```
funció | Ordena3 | (n)
  inici
    L ← [ ]
    total ← 0
    word ← [ ]
    per i ← 1 fins n
        word[1] ← i
        per j ← 1 fins n
            si (j ≠ i)
              aleshores
                    word[2] ← j
                    per k ← 1 fins n
                        si (k ≠ i) and (k ≠ j)
                          aleshores
                                word[3] ← k
                                total ← total + 1
                                L[total] ← word
                        fisi
                    fiper
            fisi
        fiper
    fiper
    retorn total
  fi
```

   a) Determineu, en funció de n, la complexitat de l'algorisme.

   b) Doneu els cinc primers elements de L si fem la crida *Ordena3*(4).

   c) Calculeu el resultat de la següent crida *Ordena3*(8), i a continuació expliqueu en general què retorna aquest algorisme.

   d) És possible modificar l'algorisme donat per tal que la complexitat sigui $O(1)$? En cas afirmatiu, doneu l'algorisme, i en cas negatiu, justifiqueu perquè no és possible.

Solució:

a) Cadascun dels bucles s'executa n vegades. Les comandes de les línies 13-15, s'executen n vegades del primer bucle per $n-1$ vegades del segon bucle (treiem el cas $j=i$) per $(n-3)$ vegades del trecer bucle (treiem els casos $k=j$ i $k=i$). Per tant, podem dir que la complexitat de l'algorisme és $O(n(n-1)(n-2)) = O(n^3)$.

b) Els cinc primers elements de L en la crida *Ordena3*(4) són: $[1,2,3]$, $[1,2,4]$, $[1,3,2]$, $[1,3,4]$, $[1,4,2]$.

c) El resultat de la crida *Ordena3*(8) és 336. L'algorisme en general retorna el nombre de 3-mostres ordenades sense repetició d'un conjunt de n elements.

d) Sí que és possible. El nombre de 3-mostres ordenades sense repetició d'un conjunt de n elements és $\frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$ que és una operació. L'algorisme modificat seria:

```
funció | Ordena3 | (n)
  inici
    retorn n * (n − 1) * (n − 2);
  fi
```

2. (Valoració d'un 5+5+5+5+5=25%) Determineu si existeix un graf G que compleixi les següents condicions. En cas negatiu, justifiqueu perquè no pot existir. En cas afirmatiu, dibuixeu un graf que la satisfagui. (**Nota:** Els apartats són independents)

a) G és un arbre amb seqüencia de graus $[4,3,3,2,1,1,1,1]$.

b) Al graf G, la llista de vèrtexs visitats per l'algorisme DFS és $[A,B,C,D,E,F,G,H]$ i la llista de vèrtexs visitats per l'algorisme BFS és $[A,B,E,C,D,F,H,G]$.

c) G és eulerià i el seu complementari no ho és.

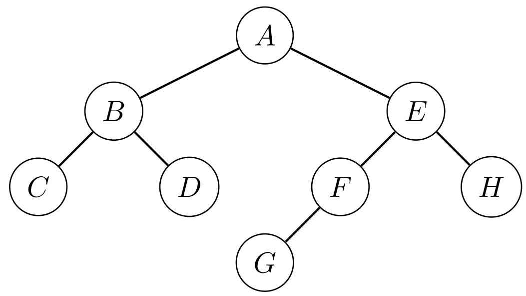
d) La seqüencia de graus de G és $[2,2,2,2,2,2]$ i no és isomorf a C_6.

e) G és complet i no ès hamiltonià.

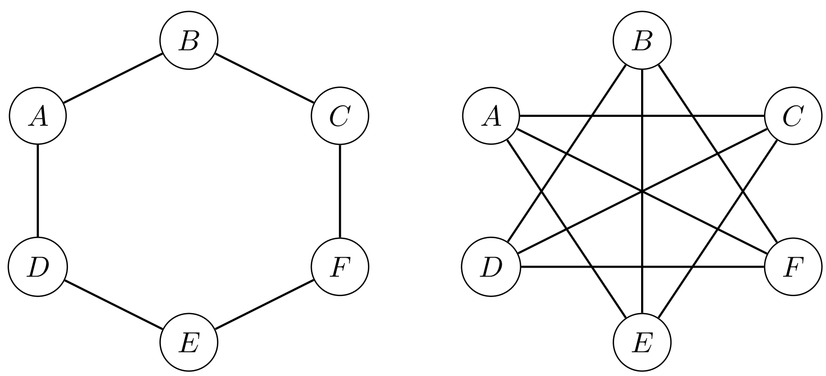
Solució:

a) Aplicant Havel-Hakimi, sí que existeix un graf G amb la seqüència de graus donada. A més, tenim que $|V| = 8$ i $|A| = \frac{4+3+3+2+1+1+1+1}{2} = 8$. Com $|V| \neq |A| - 1$, aleshores G no és un arbre.

b) Sí que existeix. Un graf amb aquestes llistes de vèrtexs visitats seria:

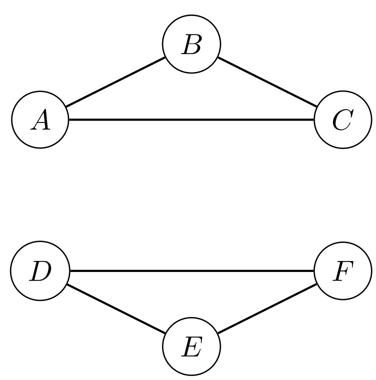


c) Si considerem G i el seu complementari:



Tenim que G és 2-regular i, per tant, eulerià, i G^c no és eulerià perquè és 3-regular.

d) Considerem G i el graf:



La seqüència gràfica de G és $[2,2,2,2,2,2]$, però no és isomorf a C_6 perquè no és connex.

e) Si G és complet, clarament és hamiltonià. Per exemple, si els vèrtexs de G són $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, com que els graf és complet, sempre existeix el circuit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$.

---

3. (Valoració d'un 5+5+5+5+5=25%)

Un missatger transporta paquets entre cinc oficines d'una ciutat. Sigui G el graf simètric ponderat, on el pes de cada arc representa el temps (en minuts) que triga el missatger en anar d'una oficina a l'altra desplaçant-se en moto. Aplicant l'algorisme de Floyd, obtenim els valors de $d^4_{i,j}$ i $d^5_{i,j}$ $(i,j = 1, \ldots, 5)$ següents:

$$(d^4_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 7 & 2 & 6 \\ 14 & 0 & 8 & 13 & 7 \\ 7 & 8 & 0 & 5 & 14 \\ 2 & 13 & 5 & 0 & 8 \\ 6 & 7 & 14 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d^5_{i,j}) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & 0 & 8 & 13 & 7 \\ c & 8 & 0 & 5 & 14 \\ d & 13 & 5 & 0 & 8 \\ e & 7 & 14 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a cadascuna de les següents afirmacions, digueu raonadament si són certes o falses:

a) Els valors a b c d e de la primera columna i la primera fila de la matriu $(d^5_{i,j})$ són 0 14 7 2 6, respectivament.

b) Per anar de l'oficina 2 a la 1 no surt a compte passar per l'oficina 5.

c) El diàmetre del graf és 14.

d) Els valors obtinguts a la fila 4 de $(d^5_{i,j})$ coincidexen amb els que obtenim aplicant Dijkstra des del vèrtex 4.

e) L'oficina que en mitjana es troba més a prop de la resta d'oficines és la 3.

Solució:

a) Fals. Els valors a b c d e de la primera columna i la primera fila de la matriu $(d^5_{i,j})$ són 0 13 7 2 6, respectivament. L'entrada $d^5_{1,1}$ és clarament 0. L'entrada $d^5_{1,5}$ no es modifiquen passant per 5. Aplicant l'algorisme obtenim que $d^5_{1,2} = \min(d^4_{1,2}, d^4_{1,5} + d^4_{5,2}) = \min(14, 6+7) = 13$, $d^5_{1,3} = \min(d^4_{1,3}, d^4_{1,5} + d^4_{5,3}) = \min(7, 6+14) = 7$ i $d^5_{1,4} = \min(d^4_{1,4}, d^4_{1,5} + d^4_{5,4}) = \min(2, 6+8) = 2$.

b) Fals. Com que l'entrada $d^5_{1,2}$ s'ha modificat respecte a la matriu anterior, podem assegurar que el camí mínim per anar de l'oficina 2 a la 1 ha de passar per l'oficina 5.

c) Cert. El diàmetre del graf és el màxim valor que apareix en la darrera matriu $(d^5_{i,j})$ de l'algorisme de Floyd.

d) Cert. A $(d^5_{i,j})$ tenim el temps mínim que hi ha entre cada parella de vèrtexs. A la fila 4 hi ha, per tant, els temps mínims per a anar de l'oficina 4 a la resta d'oficines i això és el que retorna Dijkstra si comencem pel vèrtex 4.

e) Fals. Si sumem els valors de la fila i de $(d^5_{i,j})$ i dividim per 5 ens dóna la mitjana de les distàncies de l'oficina i a la resta. Els valors mínims s'obtenen a les files 1 i 4. Per tant, les oficines 1 i 4 són les que es troben en mitjana més a prop de la resta, i no la 3.

---

4. (Valoració d'un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la resposta:

a) Si $A \leq_p B$ i B és NP-Complet, aleshores $A \in$ NP.

b) Si la complexitat d'un algorisme numèric és $O(N^3)$, on N és el nombre enter que representa l'entrada de l'algorisme, aleshores la complexitat de l'algorisme és exponencial.

c) Un problema per al qual coneixem que es pot resoldre amb un algorisme de complexitat temporal $O(3^n)$ no pot pertànyer a P.

d) $A \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$ és una fórmula FNC (forma normal conjuntiva).

Solució:

a) Cert. Si B és NP-Complet, aleshores en particular $B \in$ NP. Per les propietats de les reduccions, tenim que $A \in$ NP.

b) Cert. En aquest cas, cal expressar la complexitat en funció del nombre de bits d'N. Per tant, la complexitat és $O(2^{3n}) = O(8^n)$, on n és la longitud binària d'N.

c) Fals. Podria existir un altre algorisme per resoldre'l amb complexitat polinòmica.

d) Fals. Hauria de ser una conjunció de disjuncions, i no a la inversa.
