Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 5+5+5+5+5=25%) El següent algorisme transforma una seqüència de bits de longitud n ($n \geq 1$) en un nombre decimal.

```
funció CanviBase10(L)
  inici
    n ← Longitud(L)
    resultat ← 0
    per i = 1 fins n
        si L[i] = 1 aleshores
            resultat ← resultat + 2^(n−i)
        fisi
    fiper
    retorn resultat
  fi
```

   Justifiqueu quines de les següents afirmacions són correctes:

   a) El resultat de la crida CanviBase10([1,1,0,0,1]) és 19.

   b) Si $L = [1, 1, 0, 0, 1]$, la complexitat de l'algorisme és $O(32)$.

   c) La complexitat de l'algorisme, en funció del nombre de bits n, és $O(n)$.

   d) El nombre màxim d'operacions s'efectua quan el paràmetre d'entrada L té el màxim nombre d'uns.

   e) Si l'algorisme només accepta seqüències amb un nombre d'uns fixat, igual a 5, la complexitat de l'algorisme, en funció de n seria $O(n)$.

   Solució:

   a) Falsa. El resultat de la crida CanviBase10([1,1,0,0,1]) és 25.

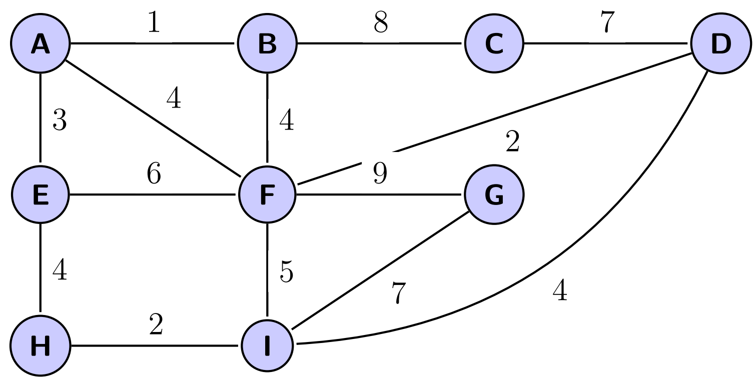
   b) Falsa. La complexitat és una mesura asimptòtica i no té sentit calcular-la per a un valor concret de l'entrada.

   c) Falsa. La complexitat és $O(n(n + 5)/2 + 4) = O(n^2)$.

d) Certa. Efectivament, el nombre màxim d'operacions s'efectua quan $L[i] = 1$ per tot $i = 1, \dots, n$, i això correspon al cas en que la seqüència conté tot uns.

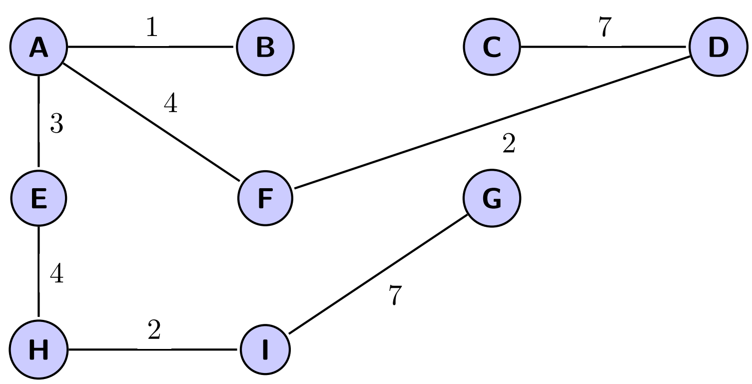
e) Certa. Efectivament, en aquest cas la complexitat seria $O(n)$, ja que el nombre de uns és un valor fixat igual a 5.

2. (Valoració d'un 15+10=25%) Trobeu un arbre generador minimal del següent graf:



Retorneu també el seu cost i indiqueu si l'arbre generador minimal és únic.

Solució: Aplicant l'algorisme de Kruskal, obtenim l'arbre generador minimal següent:



L'arbre generador minimal té un pes de 30. Podíem haver obtingut un arbre generador minimal diferent. Observeu que l'algorisme ha triat l'aresta $\{A, F\}$ que té pes 4 però també podíem haver triat l'aresta $\{B, F\}$ amb el mateix pes. Per tant, segons l'ordre amb el qual haguéssim triat les arestes en l'algorisme de Kruskal podríem haver obtingut un arbre minimal diferent.

3. (Valoració d'un 15+10=25%) Considereu la seqüència $s: \ n, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$.

a) Determineu per a quins valors $1 \leq n \leq 5$ obtenim una seqüència gràfica usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

b) Quina és la mida mínima d'un graf amb seqüència de graus s per ser connex? Per a quin(s) valor(s) de n, s és la seqüència d'un graf amb aquesta mida?

Solució:

a) Pel lemma de les encaixades, sabem que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell, per tant n ha de ser parell. Així, només hem d'analitzar dos casos: $n = 2$ i $n = 4$:

$n = 2$	$n = 4$
$3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$	$4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$
$2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	$2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$
$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0$	$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0$
$1, 1, 1, 1, 0, 0$	$1, 1, 1, 1, 0, 0$
$1, 1, 0, 0, 0$	$1, 1, 0, 0, 0$
$0, 0, 0$	$0, 0, 0$
És gràfica	És gràfica

b) Tot graf connex ha de complir $|A| \geq |V| - 1 = 8$. Per tant, la mida mínima serà $|A| = 8$. Pel lemma de les encaixades tenim que $2|A| = n+3+3+2+2+1+1+1+1 = 14 + n$. Per tant, $16 = 14 + n$, d'on obtenim que per $n = 2$, la seqüència s correspon a una graf amb el mínim nombre d'arestes.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) El problema "Determinar si un graf G té menys de 47 arestes" és un problema de càlcul.

b) Si $A \leq_p B$, aleshores no pot ser que $B \leq_p A$.

c) Determinar si un graf donat té un recorregut eulerià és un problema de complexitat polinòmica.

d) Si existeix un problema A tal que $SAT \leq_p A$ i $A \in P$, aleshores P=NP.

Solució:

a) Fals. És un problema decisional, ja que la solució és SÍ o NO.

b) Fals, A i B podrien ser problemes polinòmicament equivalents.

c) Cert, perquè només cal obtenir la paritat dels veïns de cada vèrtex, i comptar quants cops aquesta paritat és senar.

d) Cert, ja que implicaria que $SAT \in P$, i sabem (pel teorema de Cook) que SAT és NP-complet.

Final 2

1. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

   a) Set persones treballen en unes oficines i cadascú ha d'escollir quin ordinador de sobretaula vol. Disposem d'un catàleg amb 6 models diferents. Quantes comandes diferents en poden fer?

   b) Suposem que a l'empresa hi ha un total de n persones que han d'escollir n ordinadors del catàleg anterior. Definiu la funció $Comanda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que, donat un valor n, ens retorni quantes comandes diferents es poden realitzar. Justifiqueu si la funció *Comanda* és o no una funció bijectiva.

   c) Determineu un algorisme que implementi la funció *Comanda* i digueu quina complexitat té. **Nota: Podeu fer servir funcions auxiliars si ho necessiteu.**

   Solució:

   a) Es tracta d'una 7-mostra amb repetició d'un conjunt de 6 elements, per tant, el nombre de possibles comandes és $VR(6, 7) = 6^7$.

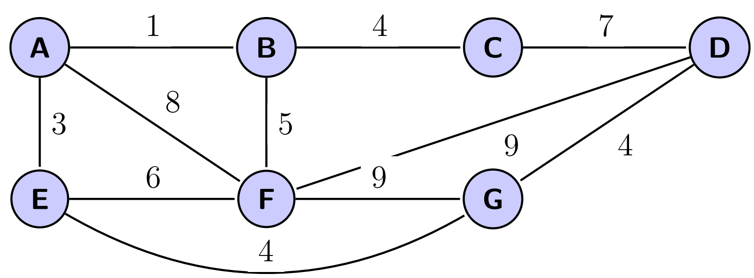
   b) La funció és $Comanda(n) = 6^n$. Aquesta funció és injectiva ja que si $Comanda(n_1) = Comanda(n_2)$, aleshores tenim que $6^{n_1} = 6^{n_2}$ i, per tant, $n_1 = n_2$. Ara bé, no és exhaustiva ja que només les potències de 6 tenen antiimatge; per exemple, 4 no té antiimatge ja que no existeix cap $n \in \mathbb{N}$ tal que $6^n = 4$.

   c) Per calcular 6^n podem fer servir l'algorisme de multiplicar i elevar que té un nombre màxim d'operacions $T(n) = \lfloor 2\log_2(n) \rfloor$.

      <u>funció</u> $Comanda(n)$
        <u>inici</u>
          <u>retorn</u> $(MultiplicarElevar(6, n))$
        <u>fi</u>

      Per tant, el nombre total d'operacions es correspon al nombre de les de l'algorime de multiplicar i elevar i té una complexitat de $O(\log n)$.

2. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%) Considerem el següent graf:



a) Trobeu la distància mínima entre el vèrtex A i el vèrtex G del graf anterior.

b) Recupereu el camí de cost mínim a partir de la taula que heu elaborat per resoldre l'apartat a).

c) A partir de la taula de l'apartat a), podem recuperar també el camí mínim del vèrtex A al vèrtex D? I del vèrtex A al vèrtex F? Justifiqueu la resposta.

d) Quin algorisme aplicaríeu (no és necessari aplicar l'algorisme) si volem calcular el diàmetre del graf anterior? Justifiqueu la resposta.

Solució:

a) Aplicant l'algorisme de Dijkstra començant pel vèrtex A s'obté la següent taula:

A	B	C	D	E	F	G
$(0, A)^*$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)^*$	(∞, A)	(∞, A)	$(3, A)$	$(8, A)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(5, B)$	(∞, A)	$(3, A)^*$	$(6, B)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(5, B)^*$	(∞, A)	$(3, A)$	$(6, B)$	$(7, E)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(5, B)$	$(12, C)$	$(3, A)$	$(6, B)^*$	$(7, E)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(5, B)$	$(12, C)$	$(3, A)$	$(6, B)$	$(7, E)^*$

Per tant, la distància mínima és 7.

b) El camí des del vèrtex A és $A - E - G$.

c) No podem recuperar el camí del vèrtex A al vèrtex D, ja que el vèrtex D encara no ha estat seleccionat com a pivot. En canvi, sí que podem recuperar el camí del vèrtex A al vèrtex F perquè F ha estat seleccionat com a pivot, i la distància mínima i camí sabem que és 6 i $A - B - F$, respectivament.

d) Per trobar el diàmetre del graf, podem aplicar primer l'algorisme de Floyd al graf. El diàmetre correspon al màxim entre totes les distàncies mínimes obtingudes amb l'algorisme.

3. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

   a) Determineu si el graf simple $G(V, A)$ amb $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7), (8, 9), (7, 9), (6, 8)\}$ és bipartit. Justifiqueu la resposta. Quin algorisme aplicaríeu en general per determinar si un graf és bipartit?

   b) Determineu, justificant la resposta, si el graf simple anterior és hamiltonià.

   c) És cert que si un graf és eulerià, el seu complementari també ho serà? Justifiqueu la resposta.

   Solució:

   a) Sí, es pot fer una partició de V en dos subconjunts, V_1 i V_2, de manera que tota aresta relacioni un vèrtex de V_1 i un de V_2. Podem prendre, per exemple, $V_1 = \{1, 5, 7, 8\}$ i $V_2 = \{2, 3, 4, 6, 9\}$. Podem aplicar l'algorisme BFS o DFS etiquetant els vèrtexs segons pertanyen a V_1 o V_2.

   b) Una condició necessària perquè un graf bipartit sigui hamiltonià, és $|V_1| = |V_2|$. Com que $|V_1| \neq |V_2|$, podem assegurar que el graf no és hamiltonià.

   c) Aquesta afirmació no és certa. Per exemple, el graf C_6 és eulerià ja que tots els seus vèrtexs tenen grau parell igual a dos, però el seu complementari té tots els vèrtexs de grau 3, i per tant no pot ser eulerià.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

   a) Tot problema de càlcul és un problema d'optimització.

   b) Si l'entrada d'un algorisme és el nombre enter 78 (en base 10), la mida de l'entrada és 7.

   c) El problema "Determinar si un graf és 3-colorable" pertany a NP.

   d) Si els problemes A i B són NP-complets, aleshores $A \leq_p B$ i $B \leq_p A$.

   Solució:

   a) Fals. És a l'inrevès, tot problema d'optimització és un problema de càlcul.

   b) Cert, perquè la seva representació binària, 1001110, consta de 7 bits.

   c) Cert, ja que si ens donen una possible coloració com a testimoni podem comprovar que és correcta en temps polinòmic.

   d) Cert. Donada una classe de complexitat C, tots els problemes que són C-complets són polinòmicament equivalents.

Final 3

1. (Valoració d'un 15+10=25%)

   a) Considereu el següent algorisme que retorna el terme n de la successió de Fibonacci, per $n > 2$.

```
1  funció Fibonacci(n)
2    inici
3      F1 ← 0
4      F2 ← 1
5      F3 ← 1
6      per i = 3 fins n
7          F3 ← F1 + F2
8          F1 ← F2
9          F2 ← F3
10     fiper
11     retorn (F3)
12   fi
```

   Quantes operacions realitza l'algorisme quan es fa la crida $Fibonacci(n)$? Doneu la complexitat de l'algorisme en funció de n.

   b) Sabem que el terme n-èssim d'una altra successió ve donat per l'expressió $S_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - 2^n$. Dissenyeu un algorisme que retorni S_n fent servir la fòrmula anterior i digueu quina complexitat té. **Nota: Podeu fer servir funcions auxiliars si ho necessiteu.**

Solució:

a) Les línies 3, 4 i 5 efectuen una operació elemental cada una. La línia 6 efectua una inicialització, $n-1$ comparacions i $n-2$ increments de la variable, per tant un total de $2n-2$ operacions elementals. La línia 7 efectua una operació elemental amb la suma, una amb l'assignació i les línies 8 i 9 una operació elemental. El nombre d'iteracions és $n-2$, i per tant el total d'operacions elementals durant el bucle és $4(n-2)$.

Per tant, el nombre total d'operacions elementals serà, $3 + 2n - 2 + 4(n-2) = 6n - 7$. D'acord amb les propietats de la complexitat, aquest algorisme tindrá una complexitat $O(n)$.

b) Per calcular les potències podem fer servir l'algorisme de multiplicar y elevar que té un nombre màxim d'operacions $T(n) = \lfloor 2\log_2(n) \rfloor$.

1 **funció** $Sucessio(n)$
2 **inici**
3 $a \leftarrow MultiplicarElevar(3, n)$
4 $b \leftarrow MultiplicarElevar(2, n)$
5 **retorn** $(\frac{1}{2}a - b)$
6 **fi**

Les línies 3 i 4 realitzen $\lfloor 2\log_2(n) \rfloor + 1$ operacions cadascuna; les de l'algorisme de multiplicar i elevar i la de l'assignació. Finalment, la línia 5 realitza una divisió, un producte i una resta. Per tant, el nombre total d'operacions és $T(n) = 2\lfloor 2\log_2(n)\rfloor + 5$ i l'algorisme té una complexitat $O(\log n)$.

2. (Valoració d'un 15+10=25%)

   a) Dibuixeu l'arbre corresponent a l'expressió aritmètica

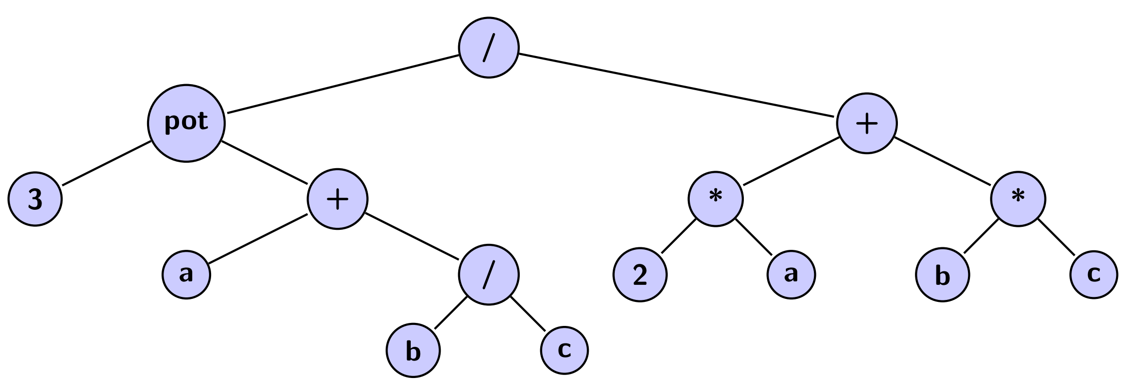
   $$\frac{3^{a+\frac{b}{c}}}{2a+bc}$$

   tenint en compte la prioritat habitual dels operadors.

   b) Doneu el recorregut en preordre, inordre i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

Solució:

a) L'arbre és



b) Aquests són els recorreguts:

- Preordre: /,pot,3,+,a,/,b,c,+,*,2,a,*,b,c;

- Inordre: 3,pot,a,+,b,/,c,/,2,*,a,+,b,*,c;
- Postordre: 3,a,b,c,/,+,pot,2,a,*,b,c,*,+,/.

3. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Aplicant l'algorisme de Dijkstra a un graf ponderat de 6 vèrtexs obtenim la següent taula:

A	B	C	D	E	F
$(0, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	$(\infty, 0)$
$(0, A)$	$(2, A)$	$(1, A)$	(∞, A)	(∞, A)	$(4, A)$
$(0, A)$	$(2, A)$	$(1, A)^*$	$(2, C)$	(∞, A)	$(4, A)$
$(0, A)$	$(2, A)^*$	$(1, A)$	$(2, C)$	$(4, B)$	$(4, A)$
$(0, A)$	$(2, A)$	$(1, A)$	$(2, C)^*$	$(3, D)$	$(4, A)$
$(0, A)$	$(2, A)$	$(1, A)$	$(2, C)$	$(3, D)^*$	$(4, A)$
$(0, A)$	$(2, A)$	$(1, A)$	$(2, C)$	$(3, D)$	$(4, A)$

Justifiqueu si són certes o falses les següents afirmacions:

a) El graf és eulerià.

b) El diàmetre del graf és 4.

c) El cost d'un arbre generador minimal és inferior o igual a 9.

d) El cost de l'aresta $\{E, B\}$ és 4.

Solució:

a) Fals. El vèrtex A té grau 3 i, per tant, el graf no pot ser eulerià.

b) Fals. En la taula, 4 és el màxim de les distàncies mínimes entre el vèrtex A i la resta de vèrtexs. Això, però, no ens permet assegurar que la distància entre altres vèrtexs no pugui ser més gran.

c) Cert. Si considerem les arestes $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{A, F\}\}$ tenim un arbre generador de cost 9. Per tant, un arbre generador minimal ha de tenir cost menor o igual a 9.

d) Fals. Segons podem veure a la segona fila, el cost de l'aresta $\{E, B\}$ és 4 menys el cost de l'aresta $\{A, E\}$, que és 2; per tant, el cost de l'aresta $\{E, B\}$ és 2.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) La fórmula booleana següent està en FNC (forma normal conjuntiva):
$(a \vee b) \wedge (\overline{b} \vee c) \wedge \overline{a}$

b) Si un algorisme per resoldre un problema *Prob* té complexitat (temporal) exponencial, aleshores *Prob* és intractable.

c) Si un problema A és NP-complet, aleshores A és NP-difícil.

d) Si A és un problema NP-complet i $B \in NP$, aleshores $B \leq_p A$.

Solució:

a) Cert. És una conjunció de clàusules.

b) Fals, la complexitat temporal serà, com a molt, exponencial, però podria ser inferior.

c) Cert per definició. A més, podem afirmar que $A \in NP$.

d) Cert, perquè en particular A és NP-difícil.