Universitat Oberta de Catalunya

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

ASIGNATURA: Grafos y Complejidad

Semestre Primavera 2021

Final 1

1. (Valoración de un 15 %+20 %(10 %+10 %)=35 %)

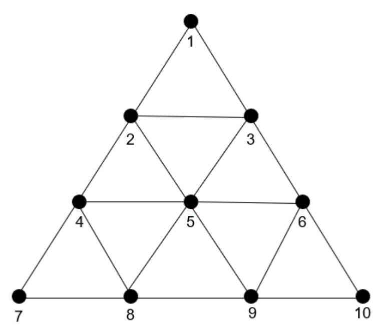
   Responde las siguientes preguntas.

   a) ¿Qué algoritmo usarías para encontrar lo más eficientemente posible un árbol generador minimal en un grafo conexo ponderado G tal que todas las aristas tienen el mismo peso? Considera los siguientes casos:

      1) si G es disperso ($m \approx n$)
      2) si G es denso ($m \approx n(n-1)/2$)

      Justifica tu respuesta con un análisis de costes sobre las diferentes alternativas.

   b) Tenemos el siguiente grafo formado por triángulos equiláteros de lado 1 cm, donde el peso de cada arista coincide con la distancia euclidiana entre sus vértices.



      1) Demuestra si es o no euleriano. En caso afirmativo, encuentra un circuito euleriano y encuentra una cota inferior y una cota superior para su peso.
      2) Indica si es o no hamiltoniano. En caso negativo, demuéstralo. En caso de serlo, encuentra una solución del problema TSP y calcula la longitud total de esta solución.

Solución:

a) Sean n el orden de G y m su medida. Observamos que todo árbol generador tendrá n-1 aristas. Como todas las aristas tienen el mismo peso, llamémosle W, deducimos que todo árbol generador tendrá el mismo peso $W(n-1)$, y por lo tanto cualquier árbol generador será minimal. Basta pues con encontrar un árbol generador cualquiera. Sabemos que para encontrar un árbol generador en un grafo conexo basta con hacer un recorrido en anchura, con coste $O(n+m) = O(m)$ (puesto que G es conexo, $m \geq n-1$).

1) Las alternativas son los algoritmos genéricos para el cálculo de árboles generadores minimales: el algoritmo de Kruskal (con coste $O(m \log m)$) o el de Prim (con coste $O(n^2)$). Como para grafos dispersos tenemos que $O(m \log m) = O(n \log n)$, en ese caso el recorrido en anchura tiene una mejor cota superior de coste que los otros dos algoritmos, y por eso es preferible.

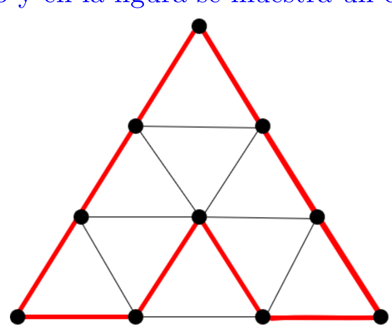
2) Para grafos densos tenemos que $O(m \log m) = O(n^2 \log n)$, con lo que el algoritmo de Kruskal tiene una cota superior de coste peor que el algoritmo de Prim o que el recorrido en anchura. Como estos dos últimos tienen la misma cota de coste $O(n^2)$, podríamos usar cualquiera de los dos.

b) 1) Como todos los vértices son de grado par (2, 4 o 6) y el grafo es conexo, también es euleriano. Un circuito euleriano es por ejemplo:

$$\{1, 2, 3, 5, 2, 4, 5, 8, 4, 7, 8, 9, 6, 5, 9, 10, 6, 3, 1\}$$

Todos los circuitos eulerianos tienen tantas aristas como el grafo. Este grafo tiene 18 aristas, por lo tanto el circuito euleriano también. El peso de cada arista es 1, por lo tanto todos los circuitos eulerianos tienen un peso de 18, siendo este 18 cota inferior y superior a la vez.

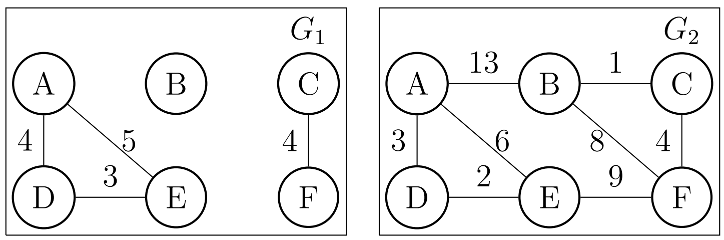
2) El grafo es hamiltoniano y en la figura se muestra un circuito hamiltoniano:



Por construcción, todos los circuitos hamiltonianos tienen n aristas, donde n es el orden del grafo. En este grafo todos los circuitos hamiltonianos tienen longitud 10, y por lo tanto peso 10. Por lo tanto todos los circuitos hamiltonianos son de peso mínimo y son una solución del problema TSP, con una longitud o peso total de 10 cm.

---

2. (Valoración de un 15 %+15 %=30 %)



Dados los grafos G_1 y G_2 justifica:

a) Si son conexos, cíclicos y bipartidos, encuentra un ejemplo que requiera el mínimo número de modificaciones, añadiendo o quitando aristas del grafo original, para que sean lo contrario de los grafos originales (por ejemplo, si el grafo es conexo, para que deje de serlo; si no lo es, para que pase a serlo).

b) ¿Qué algoritmos del temario solucionan el problema de encontrar el camino mínimo de un vértice inicial al resto de vértices del grafo? Aplícalo paso por paso en los grafos G_1 y G_2 partiendo del vértice inicial E. ¿Nos aporta alguna información sobre el diámetro del grafo el resultado del algoritmo?

Solución:

a) Sobre G_1:

- **No es conexo**: ya que G_1 es la unión de 3 grafos independientes $G_1 = C_3 \cup N_1 \cup T_2$, por ej. no existe ningún camino del vértice B a cualquier otro vértice. Para hacerlo *conexo* se deberían añadir un mínimo de 2 aristas, por ej. (B, C) y (B, E).

- **Es cíclico**: un componente conexo de G_1 es el subgrafo ciclo de orden 3 (C_3) formado por los vértices A, D y E. Para que sea *acíclico* se debe quitar una de las aristas del subgrafo C_3, por ej. (A, E).
- **No es bipartido**: porque tiene un ciclo de orden impar (justificación anterior). Para que sea *bipartido* se puede aplicar el mismo cambio anterior, por ej. quitar (A, E), de modo que el grafo se podría dividir en dos partes $\{A, B, C, E\}$ y $\{D, F\}$.

Sobre G_2:

- **Es conexo**: existe un camino para todo par de vértices, donde $\{A, D, E\}$ y $\{B, C, F\}$ forman ambos subgrafos ciclo C_3 que se conectan por las aristas (A, B) y (E, F) por lo que todo el grafo es conexo. Para que *no sea conexo* habría que eliminar un mínimo de 2 aristas, por ej. quitar (A, B) y (E, F).
- **Es cíclico**: como mencionamos en el apartado anterior tiene ciclos C_3 (entre otros). Para que sea *acíclico* se deben quitar un mínimo de 3 aristas, por ej. (A, E), (A, B) y (B, F).
- **No es bipartido**: existen múltiples ciclos de grado impar, por ej. el formado entre los vértices A, D y E. Para que sea *bipartido* se deben quitar un mínimo de 2 aristas, por ej. (A, E) y (B, F), de modo que el grafo se podría dividir en dos partes $\{A, C, E\}$ y $\{B, D, F\}$.

b) El algoritmo que calcula el coste mínimo para ir de un vértice inicial a los vértices del resto del grafo es el de Dijkstra. Mostramos su ejecución para los dos grafos del enunciado:

- Para G_1:

Iteración	A	B	C	D	E	F
0	(∞, E)	(∞, E)	(∞, E)	(∞, E)	$(0, E)$	(∞, E)
1	$(\mathbf{5}, \mathbf{E})$	(∞, E)	(∞, E)	$(\mathbf{3}, \mathbf{E})$	$(0, E)*$	(∞, E)
2	$(5, E)$	(∞, E)	(∞, E)	$(3, E)*$	$(0, E)$	(∞, E)
3	$(5, E)*$	(∞, E)	(∞, E)	$(3, E)$	$(0, E)$	(∞, E)

- Para G_2:

Iteración	A	B	C	D	E	F
0	(∞, E)	(∞, E)	(∞, E)	(∞, E)	$(0, E)$	(∞, E)
1	$(\mathbf{6}, \mathbf{E})$	(∞, E)	(∞, E)	$(\mathbf{2}, \mathbf{E})$	$(0, E)*$	$(\mathbf{9}, \mathbf{E})$
2	$(\mathbf{5}, \mathbf{D})$	(∞, E)	(∞, E)	$(2, E)*$	$(0, E)$	$(9, E)$
3	$(5, D)*$	$(\mathbf{18}, \mathbf{A})$	(∞, E)	$(2, E)$	$(0, E)$	$(9, E)$
4	$(5, D)$	$(\mathbf{17}, \mathbf{F})$	$(\mathbf{13}, \mathbf{F})$	$(2, E)$	$(0, E)$	$(9, E)*$
5	$(5, D)$	$(\mathbf{14}, \mathbf{C})$	$(13, F)*$	$(2, E)$	$(0, E)$	$(9, E)$
6	$(5, D)$	$(14, C)*$	$(13, F)$	$(2, E)$	$(0, E)$	$(9, E)$

El cálculo de Dijkstra sobre un vértice nos da una cota inferior del diámetro del grafo. En el caso de G_1 la máxima distancia de E a un vértice es ∞, por lo que ya sabemos que el diámetro de G_1 es ∞. Respecto G_2 solo sabemos que su diámetro será como mínimo 14, que es la distancia que hay entre E y B.

---

3. (Valoración de un 20 % (5 %+5 %+4 %+3 %+3 %)+15 %=35 %)

   a) 1) Se pide:

   (i) Calcular una forma normal conjuntiva de la expresión lógica (en las variables x, y y z):
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge (y \vee z)).$$

   (ii) Dar todas las ternas (x, y, z) que satisfacen (hacen verdadera) la anterior expresión lógica.

   2) Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas. Todos los apartados son independientes entre sí:

   (i) Si A es NP y $A \leq_p B$, entonces nunca puede ocurrir que $B \in P$.

   (ii) Si B es NP, entonces $B \leq_p KNAPSACK$. ($KNAPSACK$ denota al problema de la mochila).

   (iii) Si $A \leq_p B$ y $A \in P$, entonces $B \in P$.

   b) El gobierno de un país quiere probar un nuevo mecanismo de vacunación. Para ello, utilizando Big Data propone una estrategia de vacunación basada en los contactos que tiene cada persona.

   Sabiendo los contactos que hay entre sus ciudadanos mediante el posicionamiento de dispositivos móviles propone vacunar a la menor cantidad de personas posibles de forma que, para cada relación entre dos personas, una de ellas esté vacunada.

   Consideran que dos personas tienen relación si han estado juntas más de 15 minutos en el pasado y nos proporcionan una lista de todas las interacciones entre personas que han durado más de 15 minutos.

   Identifica un problema complejo conocido que resuelva una situación similar. En particular debes detallar el paralelismo entre el problema conocido y la situación planteada.

   1) Entrada del problema.

2) Salida del problema.
3) Cómo se transforman los elementos del problema conocido en elementos de la situación planteada por este gobierno.

Solución:

a) 1) (i) Por distributividad

$$(x \vee (x \wedge (y \vee z)) \wedge (y \vee (x \wedge (y \vee z))$$

Por distributividad

$$(x \vee x) \wedge (x \vee (y \vee z)) \wedge (y \vee x) \wedge (y \vee (y \vee z)$$

Simplificando

$$x \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$

(ii) Mirando la expresión lógica del enunciado se deduce fácilmente que los valores de verdad son: $(1, 1, 1)$**,** $(1, 1, 0)$**,** $(1, 0, 1)$ (también podría hacerse una tabla de verdad para la expresión lógica).

2) (i) Falso. Puede darse la situación en la que $A \in P$ y $B \in P$.

(ii) Verdadero ya que $KNAPSACK$ es NP-completo.

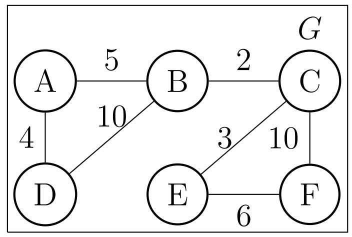
(iii) Falso. Puede tomarse cualquier $B \in EXP$ tal que $B \notin P$.

b) El problema conocido asociado será el recubrimiento de vértices.

1) La entrada del problema será la lista de personas que han tenido contacto durante más de 15 minutos.
2) La salida del problema será el conjunto de personas a vacunar de forma que, en todas las relaciones, una de ellas esté vacunada.
3) La relación entre los elementos del problema vendrá determinada por la creación de un grafo en el que cada vértice representa a un ciudadano; existirá una arista entre dos vértices si los ciudadanos que representan han tenido contacto durante más de 15 minutos.

Final 2

1. (Valoración de un 10 %+20 %=30 %)



Dado el grafo G:

a) Aplica los algoritmos BFS y DFS sobre G paso por paso, comenzando en el vértice C y siempre explorando los vértices adyacentes en orden creciente. Para este apartado, asume que todas las aristas tienen un coste uniforme de 1, y no los costes que aparecen en la figura de arriba y que sí se usarán en el siguiente apartado.

b) ¿Qué algoritmo necesitamos para encontrar el coste mínimo para ir de cualquier vértice a cualquier otro? (entre todo par de vértices). Muestra los pasos del algoritmo al aplicarlo en G y responde: ¿cuál es el coste al ir de $C \to D$?; ¿el coste de ir de $B \to F$?; y ¿cuál es el diámetro de G?

Solución:

a) Tal como dice el enunciado, el coste de todas las aristas es uniforme, por lo que la distancia para ir de un vértice a otro será el mínimo número de aristas que hay entre ambos vértices. Entonces, para BFS se realizan los siguientes pasos:

Cola	Vértice añadido	Vértice eliminado	Vértices visitados
$\{C\}$	C	–	$\{C\}$
$\{C,B\}$	B	–	$\{B,C\}$
$\{C,B,E\}$	E	–	$\{B,C,E\}$
$\{C,B,E,F\}$	F	–	$\{B,C,E,F\}$
$\{B,E,F\}$	–	C	$\{B,C,E,F\}$
$\{B,E,F,A\}$	A	–	$\{A,B,C,E,F\}$
$\{B,E,F,A,D\}$	D	–	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{E,F,A,D\}$	–	B	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{F,A,D\}$	–	E	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{A,D\}$	–	F	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{D\}$	–	A	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\emptyset$	–	D	$\{A,B,C,D,E,F\}$

Y para DFS hacemos lo siguiente:

Pila	Vértice añadido	Vértice eliminado	Vértices visitados
$\{C\}$	C	–	$\{C\}$
$\{C,B\}$	B	–	$\{B,C\}$
$\{C,B,A\}$	A	–	$\{A,B,C\}$
$\{C,B,A,D\}$	D	–	$\{A,B,C,D\}$
$\{C,B,A\}$	–	D	$\{A,B,C,D\}$
$\{C,B\}$	–	A	$\{A,B,C,D\}$
$\{C\}$	–	B	$\{A,B,C,D\}$
$\{C,E\}$	E	–	$\{A,B,C,D,E\}$
$\{C,E,F\}$	F	–	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{C,E\}$	–	F	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\{C\}$	–	E	$\{A,B,C,D,E,F\}$
$\emptyset$	–	C	$\{A,B,C,D,E,F\}$

b) El algoritmo que resuelve el problema de calcular la distancia mínima entre todo par de vértices es el de Floyd. Las matrices para calcular las distancias mínimas entre pares son las siguientes:

$$(d^0_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 2 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 3 & 10 \\ 4 & 10 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 10 & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, (d^1_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 2 & \mathbf{9} & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 3 & 10 \\ 4 & \mathbf{9} & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 10 & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(d^2_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \mathbf{7} & 4 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 2 & 9 & \infty & \infty \\ \mathbf{7} & 2 & 0 & \mathbf{11} & 3 & 10 \\ 4 & 9 & \mathbf{11} & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 10 & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, (d^3_{i,j}) = (d^4_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & \mathbf{10} & \mathbf{17} \\ 5 & 0 & 2 & 9 & \mathbf{5} & \mathbf{12} \\ 7 & 2 & 0 & 11 & 3 & 10 \\ 4 & 9 & 11 & 0 & \mathbf{14} & \mathbf{21} \\ \mathbf{10} & \mathbf{5} & 3 & \mathbf{14} & 0 & 6 \\ \mathbf{17} & \mathbf{12} & 10 & \mathbf{21} & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d^5_{i,j}) = (d^6_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 4 & 10 & \mathbf{16} \\ 5 & 0 & 2 & 9 & 5 & \mathbf{11} \\ 7 & 2 & 0 & 11 & 3 & \mathbf{9} \\ 4 & 9 & 11 & 0 & 14 & \mathbf{20} \\ 10 & 5 & 3 & 14 & 0 & 6 \\ \mathbf{16} & \mathbf{11} & \mathbf{9} & \mathbf{20} & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

El coste final para ir tanto de $C \to D$ como de $B \to F$ es 11 según el resultado final de Floyd. Y el diámetro de G es 20, que es la distancia entre $D \leftrightarrow F$.

---

2. (Valoración de un 20 % (5 %+5 %+4 %+3 %+3 %)+15 %=35 %)

   a) 1) Se pide:

   (i) Calcular una forma normal conjuntiva de la expresión lógica (en las variables x, y y z):
   $$\neg((x \vee \neg y) \wedge \neg z)$$

   (ii) Dar todas las ternas (x, y, z) que satisfacen (hacen verdadera) la anterior expresión lógica.

   2) Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas. Todos los apartados son independientes entre sí:

   (i) Si $A \in P$ y $B \leq_p A$, entonces $B \in P$.

   (ii) Si $TSP \leq_p A$ y $A \in NP$, entonces A es NP-completo. (TSP denota el problema del viajante de comercio).

   (iii) Si $A \leq_p B$ y $B \leq_p C$ entonces $A \leq_p C$.

   b) Una empresa de construcción debe realizar diferentes tareas para diferentes clientes. Las tareas pueden realizarse en cualquier orden, pero algunas de ellas requerirán ser realizadas por la misma persona o utilizar la misma maquinaria. Sabiendo que cada tarea lleva un día, la empresa quiere saber cuántos días tardará, como mínimo, en realizar todas las tareas que tiene encargadas.

   Algunos ejemplos son:

- Dos (o más) trabajos que tienen que ser realizados utilizando el equipo de mediciones.
- Dos (o más) trabajos que deben ser realizados por la arquitecta.
- Dos (o más) trabajos que deben ser realizados por la arquitecta utilizando el equipo de mediciones.

Es decir, un mismo trabajo puede requerir una persona específica, una máquina específica o ambas.

Identifica un problema complejo conocido que resuelva una situación similar. En particular debes detallar el paralelismo entre el problema conocido y la situación planteada

1) Entrada del problema.
2) Salida del problema.
3) Cómo se transforman los elementos del problema conocido en elementos de la situación planteada por la empresa.

Solución:

a) 1) (i) Por las Leyes de De Morgan:

$$\neg(x \vee \neg y)) \vee z$$

Por las Leyes de De Morgan:

$$(\neg x \wedge y) \vee z$$

Por distributividad

$$(\neg x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

(ii) Mirando $(\neg x \wedge y) \vee z$ se tiene que los valores de verdad son $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

2) (i) Verdad. Por las propiedades de las reducciones.

(ii) Verdad ya que TSP es NP-completo.

(iii) Verdad. Por la transitividad de las relaciones.

b) El problema asociado será la coloración de vértices.

1) La entrada del problema será la lista de tareas con sus restricciones de usuario y maquinaria.
2) La salida será el número de días que tardará la empresa, como mínimo, en realizar las tareas encargadas.
3) El paralelismo vendrá dado por la elaboración de un grafo en el que cada tarea esté representada por un vértice y dos vértices tengan una arista en común si comparten o bien la persona que debe realizarlas o bien la máquina que se utiliza.
   El resultado del problema será el número cromático del grafo.

---

3. (Valoración de un 15 % (5 %+5 %+5 %) +20 % (10 %+10 %)=35 %)

   Responde las siguientes preguntas.

   a) Supongamos que tenemos un grafo conexo ponderado $G = (V, A)$. Tenemos también un subconjunto $S \subseteq A$ de las aristas, y queremos calcular, de entre los árboles generadores de G **que incluyen todas las aristas de** S, uno que tenga peso mínimo.

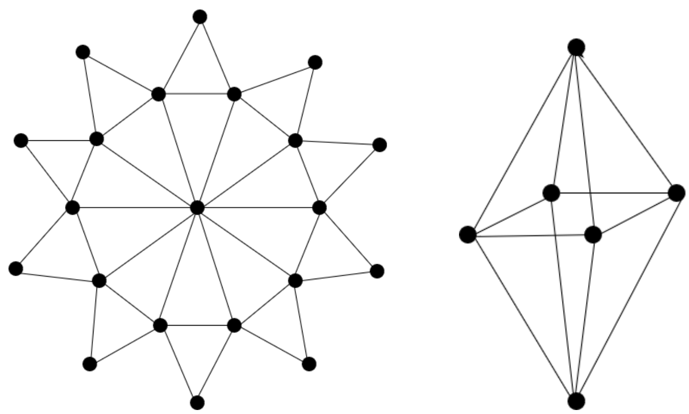
   1) ¿Qué propiedad tiene que cumplir S para que este problema tenga solución?
   2) ¿Cómo resolverías algorítmicamente este problema?
   3) Considera el grafo G con vértices $\{A, B, C, D\}$ y con pesos asignados a las aristas tal como está indicado en la tabla siguiente:

	A	B	C	D
A	$-$	4	$-$	3
B	4	$-$	1	2
C	$-$	1	$-$	5
D	3	2	5	$-$

   Un guión $-$ indica que no existe arista entre ese par de vértices.

   Aplica el algoritmo de tu respuesta anterior para encontrar un árbol generador que sea mínimo entre los que incluyen la arista $\{C, D\}$. Indica las aristas del árbol, y su peso.

   b) Para los siguientes grafos:



1) Demuestra si son o no son eulerianos. En caso afirmativo, encuentra un circuito euleriano.
2) Indica si son o no hamiltonianos. En caso negativo, demuéstralo. En caso de serlo, a) encuentra un circuito hamiltoniano y b) calcula el peso de la solución del TSP, suponiendo que todas las aristas tengan peso w.

Solución:

a) En primer lugar, hace falta que el grafo inducido por S no tenga ningún ciclo. En caso contrario no puede existir ningún árbol que incluya todas las aristas de S.

Para resolver el problema planteado se puede aplicar el algoritmo de Kruskal, con el siguiente cambio: en lugar de empezar con un bosque vacío, se empieza con el bosque determinado por las aristas de S.

Apliquemos este algoritmo al problema del enunciado. Ordenamos las aristas por orden creciente de peso:

Arista	Peso
$\{B, C\}$	1
$\{B, D\}$	2
$\{A, D\}$	3
$\{A, B\}$	4
$\{C, D\}$	5

Empezamos con la arista $\{C, D\}$, que está fijada. Luego seguimos la lista ordenada hasta tener un árbol generador:

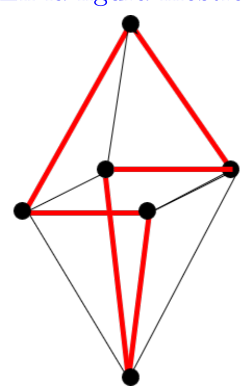
1) $\{B, C\}$: la tomamos
2) $\{B, D\}$: no la tomamos, crearíamos un ciclo
3) $\{A, D\}$: la tomamos

Con esto ya tenemos un árbol generador, definido por las aristas $\{C, D\}$, $\{B, C\}$ y $\{A, D\}$, con coste $5 + 1 + 3 = 9$.

b) 1) El grafo de la flor no es euleriano, pues es conexo y tiene vértices de grado 5 (impar).
Los vértices del octaedro tienen todos grado 4, por lo tanto como es conexo el octaedro es un grafo euleriano. Si nombramos 1, 2 a los dos vértices superior e inferior, y 3,4,5,6 a los vértices del cuadrado de la base, un posible circuito euleriano es

$$\{1, 3, 2, 4, 3, 6, 2, 5, 6, 1, 5, 4, 1\}$$

2) El grafo de la flor no es hamiltoniano, pues si seleccionamos los 10 vértices de la circunferencia, el número de componentes conexas del grafo obtenido al eliminarlos es 11 (los 11 vértices restantes quedan desconectados).
El octaedro es hamiltoniano. En la figura mostramos un circuito hamiltoniano:



Por construcción, todos los circuitos hamiltonianos tienen n aristas, donde n es el orden del grafo. En este grafo todos los circuitos hamiltonianos tienen longitud 6, y por lo tanto peso $6w$. En consecuencia todos los circuitos hamiltonianos son de peso mínimo y son una solución del problema TSP, con un peso total de $6w$.

Final 3

1. (Valoración de un 10 %(2.5 %+2.5 %+2.5 %+2.5 %)+10 %(5 %+5 %)+15 %=35 %)

   a) Responde, **justificando las respuestas** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

      1) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ podemos formar exactamente 160 cifras de cuatro dígitos que acaben en un número par.
      2) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ hay exactamente 3 funciones inyectivas de A en B satisfaciendo que la imagen del 1 es c y la imagen del 2 es b.
      3) Es posible construir un grafo simple con 15 vértices y 120 aristas.
      4) Es posible construir un grafo simple con n vértices tal que algún vértice tiene grado n.

   b) Responde a las siguientes cuestiones sobre grafos:

      1) Dibuja un grafo que sea conexo, acíclico y bipartito.
      2) Sea G_1 un grafo cuya matriz de adyacencia es

	A	B	C
A	0	1	1
B	1	0	0
C	1	0	0

y G_2 un grafo cuya matriz de adyacencia es

	D	E
D	0	1
E	1	0

Se pide dar la matriz de adyacencia del grafo suma de G_1 más G_2. Esto es, de $G = G_1 + G_2$.

   c) Usar el algoritmo de Kruskal para calcular un árbol generador minimal del grafo cuya tabla de distancias es

	A	B	C	D	E	F	G
A	$-$	1	$-$	4	$-$	$-$	$-$
B	1	$-$	2	6	4	$-$	$-$
C	$-$	2	$-$	$-$	5	6	$-$
D	4	6	$-$	$-$	3	$-$	4
E	$-$	4	5	3	$-$	8	7
F	$-$	$-$	6	$-$	8	$-$	3
G	$-$	$-$	$-$	4	7	3	$-$

donde el símbolo $-$ indica que no hay ninguna arista entre los vértices asociados a esa posición, explicando con detalle el desarrollo del algoritmo.

Solución:

a) 1) Falsa. El número de cifras de cuatro dígitos que acaban es 2 es $VR(4,3) = 4^3$. La misma cantidad de cifras hay que acaban en 4, de donde el total es $2 \cdot 4^3 = 128$.

2) Verdadera. Hay tantas aplicaciones como valores distintos de b y de c podamos dar a $f(3)$. De aquí la respuesta es 3.

3) Falsa. Sabemos que $m \leq C(n,2)$, (m denota al número de aristas y n al de vértices), de donde si fuera posible tendríamos que $120 \leq C(15,2) = 105$, lo que es una contradicción.

4) Falsa. Sabemos que $g(v) \leq |V|-1$, de donde si la afirmación fuera cierta entonces $n \leq n-1$, lo que es una contradicción.

b) De la definición de suma de grafos se deduce que la solución es

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	0	1	1
C	1	0	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	1	1	1	1	0

c) Si ordenamos las aristas del grafo por orden creciente nos queda por ejemplo

$$(\{A,B\},1),(\{B,C\},2),(\{D,E\},3),(\{F,G\},3),(\{A,D\},4),$$

$$(\{B,E\},4),(\{D,G\},4),(\{C,E\},5),(\{B,D\},6),(\{C,F\},6),$$
$$(\{E,G\},7),(\{E,F\},8),$$

donde usamos la notación (arista, peso de la arista).
Paso 1. Seleccionamos la arista $(\{A,B\},1)$.
Paso 2. Seleccionamos la arista $(\{B,C\},2)$.
Paso 3. Seleccionamos la arista $(\{D,E\},3)$.
Paso 4. Seleccionamos la arista $(\{F,G\},3)$.
Paso 5. Seleccionamos la arista $(\{A,D\},4)$.
Paso 6. Consideramos la arista $(\{B,E\},4)$ y la rechazamos.
Paso 7. Seleccionamos la arista $(\{D,G\},4)$.
De aquí el árbol generador minimal lo forman los siete vértices con las aristas

$$(\{A,B\},2),(\{B,C\},2),(\{D,E\},3),(\{F,G\},3),$$
$$(\{A,D\},4),(\{D,G\},4).$$

---

2. (Valoración de un 5 %+15 %(5 %+ 5 % + 5 %)+ 15 %=35 %)

   a) ¿Qué algoritmo utilizarías para comprobar si una secuencia dada de números naturales no nulos se corresponde con la secuencia de grados de algún grafo? Utilízalo para comprobar si se cumple o no que la secuencia $3,3,3,2,2,1$ es una secuencia gráfica (detalla el desarrollo del algoritmo).

   b) Responde, **justificando las respuestas**, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

      1) Si la secuencia de grados de un grafo conexo es $7,6,5,5,5,4,4,2$ entonces el grafo es euleriano.
      2) Si la secuencia de grados de un grafo conexo es $3,2,2,2,2,2,2,1$ entonces el grafo contiene un recorrido euleriano.
      3) Si G es un grafo (V_1,V_2)-bipartito tal que $|V_1|=|V_2|$, entonces el grafo es necesariamente hamiltoniano.

c) Tenemos un grafo dirigido y ponderado G cuya matriz de distancias es

	A	B	C	D	E
A	$-$	50	30	100	10
B	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
C	$-$	5	$-$	$-$	$-$
D	$-$	20	50	$-$	$-$
E	$-$	$-$	$-$	10	$-$

donde el símbolo $-$ indica que no hay ninguna arista en los vértices asociados a esa posición.

Se pide identificar qué algoritmo nos hallaría las distancias más cortas desde **el nodo origen** A a los restantes nodos del grafo (las medidas de los caminos más cortos desde A a los restantes nodos). Aplicadlo, detallando el procedimiento, al grafo G.

Solución:

a) Nos preguntan si la secuencia dada es una secuencia gráfica. Usaremos el algoritmo de Havel-Hakimi. Apliquemos por tanto este algoritmo a la secuencia 3,3,3,2,2,1.

Primera subsecuencia. 2,2,1,2,1

Ordenación. 2,2,2,1,1

Segunda subsecuencia. 1,1,1,1

Tercera subsecuencia. 0,1,1

Ordenación. 1,1,0

Cuarta subsecuencia. 0,0

Quinta subsecuencia. 0.

Concluímos que 3,3,3,2,2,1 sí es una secuencia gráfica.

b)
1) Falsa. Ya que no todos los vértices del grafo son de grado par (Teorema 1 de la Unidad *Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.*)
2) Verdadera. Ya que hay exactamente dos vértices de grado impar (Corolario 3).
3) Falsa. Por el Teorema 4 sabemos que la condición del enunciado es necesaria cuando un grafo es hamiltoniano, pero no es suficiente para que un grafo sea hamiltoniano.

c) El algoritmo que nos resuelve este problema es el algoritmo de Dijkstra. Vamos a aplicarlo: Inicio. Partimos del vértice A. Los vértices restantes son $[B, C, D, E]$. La matriz de distancias desde A a los vértices $[B, C, D, E]$ es $[50, 30, 100, 10]$. Paso 1. Se elige el vértice E. Los vértices restantes son $[B, C, D]$. La matriz de distancias desde A a los vértices $[B, C, D, E]$ es $[50, 30, 20, 10]$. Paso 2. Se elige el vértice D. Los vértices restantes son $[B, C]$. La matriz de distancias desde A a los vértices $[B, C, D, E]$ es $[40, 30, 20, 10]$. Paso 3. Se elige el vértice C. Los vértices restantes son $[B]$. La matriz de distancias desde A a los vértices $[B, C, D, E]$ es $[35, 30, 20, 10]$. De aquí la distancia mínima de A a los vértices $[B, C, D, E]$ es $[35, 30, 20, 10]$.

---

3. (Valoración de un 10 %(5 %+5 %)+10 %(3 %+3 %+4 %)+ 10 %(5 %+5 %)=30 %)

   a) Se pide:

   (i) Dar una expresión lógica f (en las variables x, y, z) que sólo sea satisfecha con las asignaciones $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ y $(x, y.z) = (0, 0, 0)$.

   (ii) Calcular la FNC de la expresión lógica f que hayas obtenido en el apartado (i).

   b) Decid si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones para todo par de problemas decisionales A y B, justificando las respuestas. Todos los apartados son independientes entre sí:

   (i) Si A es NP y $B \leq_p A$, entonces nunca puede ocurrir que $B \in P$.

   (ii) Si B es NP y $B \leq_p A$ entonces A es NP-completo.

   (iii) Si $A \leq_p B$ y $B \in P$, entonces $A \in NP$.

   c) Un empresario ha montado una empresa de reparto de paquetería a domicilio, teniendo en cuenta la demanda de las misma a consecuencia de la COVID. Responded a las siguientes preguntas, independientes entre sí.

   1) Para el día 19 de Junio, tiene que repartir cinco tipos distintos de objetos, teniendo cada tipo de objetos un peso dado y aportando un beneficio específico en su reparto. Al empresario le gustaría saber cuál es la manera de cargar el único camión de que dispone, cuya carga máxima es de 500Kg, de tal manera que le dé el mayor beneficio posible. Se pide establecer qué tipo de problema tratado durante el curso le daría la solución y cómo sería el paralelismo con el mismo.

2) Tenemos 3 repartidores, una lista de repartos a realizar, y otra lista con pares de repartos que no los puede realizar el mismo repartidor (porque se tienen que hacer simultáneamente, o al contrario porque la diferencia de horas de entrega sobrepasa la jornada laboral). Se trata de minimizar el número de repartidores necesarios. Se pide establecer qué tipo de problema tratado durante el curso le daría la solución y cómo sería el paralelismo con el mismo.

Solución:

a) Podemos tomar $(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$.

b) Calculemos su FNC: Por distributividad

$$((\neg x \wedge y \wedge z) \vee \neg x) \wedge ((\neg x \wedge y \wedge z) \vee \neg y) \wedge$$

$$((\neg x \wedge y \wedge z) \vee \neg z).$$

Nuevamente

$$(\neg x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge$$

$$(y \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg z) \wedge$$

$$(z \vee \neg z).$$

De donde nos queda
$\neg x \wedge (y \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg z)$.

c) 1) Falso, puede pasar que A y B sean P.

2) Falso, por las propiedades de las reducciones.

3) Cierto, A es P y por tanto NP.

d) 1) El problema asociado es el de la mochila. La capacidad que tenemos sería de 500 Kg. (la capacidad del camión), el coste es el peso de la carga que vamos cargando y el valor el beneficio de la empresa.

2) El problema asociado es el de la coloración de grafos. El grafo tendrá como vértices a los elementos de la lista de repartos y habrá una arista entre ellos si hay una incompatibilidad entre los repartos por un mismo repartidor (segunda lista). El número cromático asociado al grafo nos da el número mínimo de repartidores necesarios.
