Fundamentos de grafos

Joaquim Borges
Robert Clarisó
Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Joan Vancells
Mercè Villanueva

PID_00174686

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

Este módulo es una iniciación a la teoría de grafos, en la que se presentan las definiciones básicas, se demuestran los primeros resultados (entre los que se encuentra la fórmula de los grados), se ven algunos grafos importantes, se analizan algunas operaciones que pueden llevarse a cabo con grafos, se estudia el problema de la existencia de un grafo y, finalmente, se trata el tema del almacenamiento de grafos, problema de gran interés para la algorítmica y la programación.

Es posible que esta disciplina os sea completamente nueva, dado que los puntos de conexión con otras disciplinas matemáticas más usuales son pocos. En todo caso, antes de iniciar su estudio, sería conveniente repasar los contenidos elementales de la combinatoria, el cálculo matricial, las técnicas de demostración inductiva y, naturalmente, tener cierta madurez matemática.

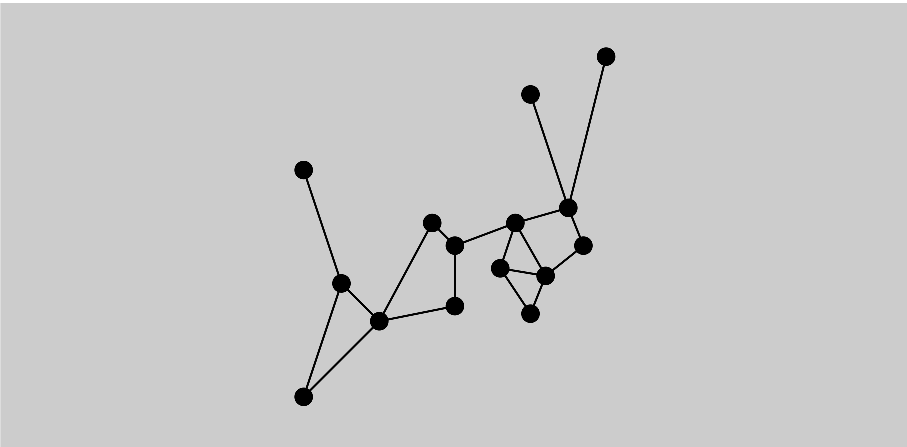
1. Caracterización de un grafo

En muchas situaciones, se establecen una serie de **relaciones** entre diversos **objetos**; un grafo es la estructura constituida por estos objetos y las relaciones que pueden establecerse entre ellos. Los objetos se denominan **vértices** y las relaciones, **aristas**.

Grafo

Un grafo está formado por vértices (que pueden representar objetos) y aristas (que pueden representar las relaciones entre estos objetos).

Los grafos se pueden representar *gráficamente* en el plano. Uno de los métodos más utilizados consiste en representar los vértices por **punto** del plano y las relaciones que puedan establecerse entre estos vértices mediante **arcos de curva** (aristas) que los unan (eventualmente segmentos de recta).



En esta representación gráfica, la posición de un vértice o la longitud de una arista no son relevantes. Únicamente nos fijaremos en qué vértices aparecen y si están conectados entre sí o no. Esto significa que hay muchas formas diferentes de dibujar el mismo grafo.

Así pues, una situación que involucre objetos, entre los cuales se puede establecer algún tipo de interconexión, se puede describir mediante un grafo: las comunicaciones, las reuniones, la fabricación de circuitos y la coloración de mapas.

1.1. Grafo

Notación

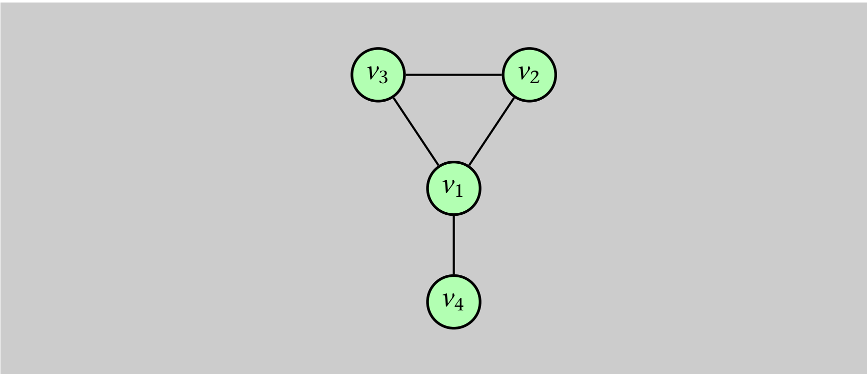
Si no se especifica lo contrario, cuando hablamos de grafos haremos referencia siempre a grafos simples.

Definición 1

Un **grafo (simple)** $G = (V,A)$ es un par ordenado (V,A) donde V es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos son los **vértices**, y A es un subconjunto del conjunto de parejas no ordenadas (es decir, subconjunto de dos elementos diferentes) de elementos de V; el conjunto A es el conjunto de **aristas**.

Ejemplo 1

Se considera el grafo que se representa de la manera siguiente.



En este caso es $G = (V,A)$, donde el conjunto de vértices es $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ y el conjunto de aristas es $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\}\}$

Notación

Si $a = \{u,v\} \in A$, para simplificar la notación se escribe también $a = uv$ o, de forma equivalente, $a = vu$.

Fijaos en que, según esta definición, un vértice no puede estar relacionado consigo mismo, ni puede haber más de una arista entre dos vértices concretos y los dos vértices conectados por una arista tienen la misma importancia. Este es el modelo de grafo simple. Más adelante veremos familias de grafos más generales (dirigidos, pseudografos, multigrafos) donde estas restricciones se relajan para poder describir relaciones más complejas.

Ejercicios

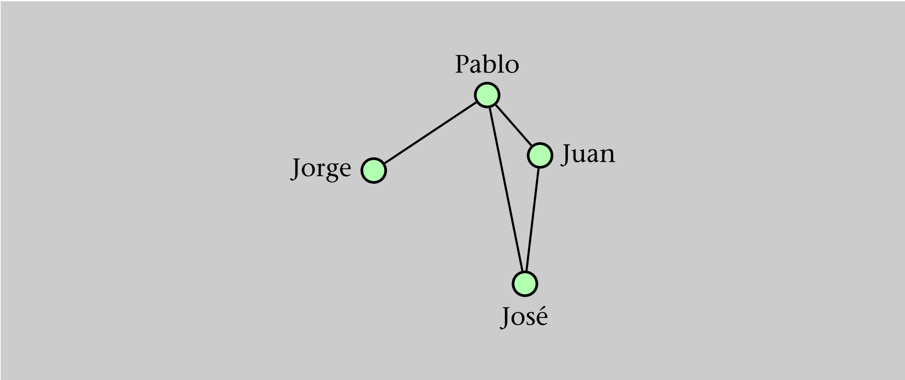
1. Proponed un modelo en términos de teoría de grafos (y haced una representación gráfica) de la situación que se describe a continuación. Se consideran las siguientes personas de una clase: Juan, José, Jorge y Pablo. Jorge conoce a Pablo, y Pablo, Juan y José se conocen mutuamente.

2. Proponed un modelo de grafos representativo de las comunicaciones por carretera entre diversas ciudades y pueblos, y un segundo modelo representativo de la ausencia de comunicaciones por carretera (es decir, existe una arista entre dos centros si, y sólo si, no están comunicados por una carretera); la situación puede ser ficticia o real.

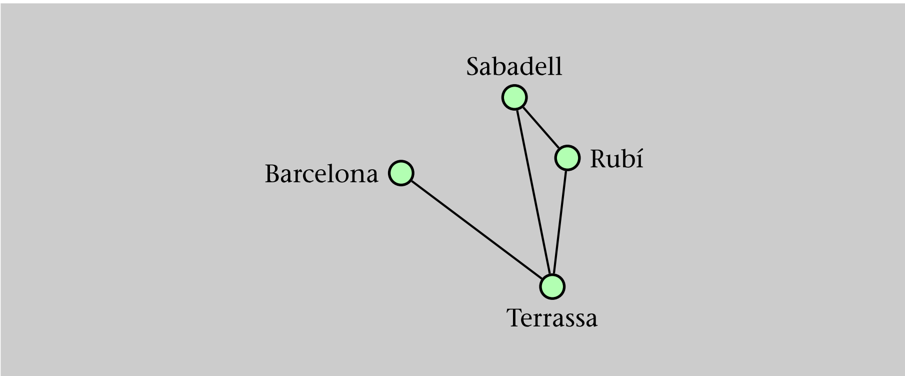
3. Considerad una empresa donde hay diversas personas, P_1,P_2,P_3, y una serie de trabajos que se han de realizar, $T_1,\ldots,T_6$, con la posibilidad de que una persona pueda hacer más de una tarea, según sus capacidades. Formulad (y dibujad) un modelo en términos de teoría de grafos que recoja la situación de individuos que pueden hacer diferentes tareas, y tareas que puedan ser realizadas por diferentes individuos.

Soluciones

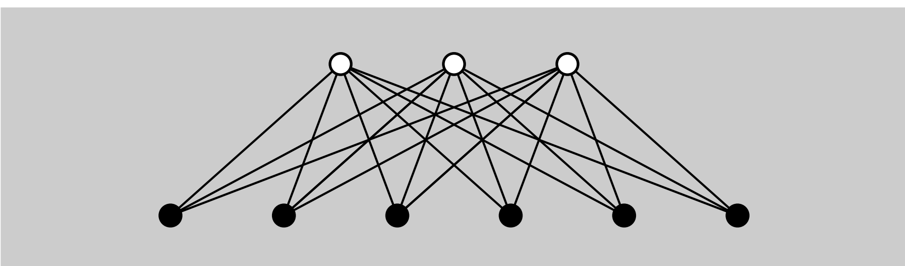
1. Un esquema posible sería el siguiente.



2. Realmente no hay "una" solución. Un posible esquema indicativo, ficticio y trivial, podría ser el siguiente (naturalmente, un modelo real es mucho más complejo).



3. Un posible esquema es el del grafo siguiente. Éste corresponde a un tipo de grafo importante, como se verá más adelante: el de los grafos bipartitos, que se dan en muchas situaciones de este tipo de asignaciones de tareas. Las personas y las tareas se indican con vértices de colores diferentes.



1.2. Vértices y aristas

Definición 2

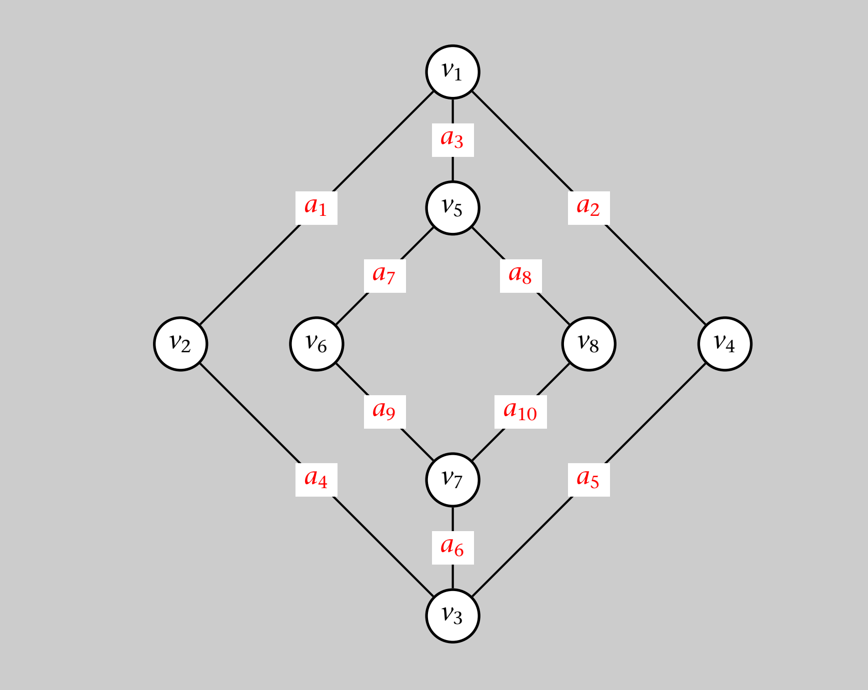
Los vértices $u,v \in V$ son **adyacentes** si, y sólo si, existe la arista uv, es decir, si, y sólo si, $\{u,v\} \in A$. La adyacencia de los vértices u, v se denota $u \approx v$. En este caso se dice que la arista $a = uv$ **une o conecta** los vértices, que son sus **extremos**. Otras denominaciones que indican que los vértices son adyacentes pueden ser:

- Los vértices u, v y la arista uv son **incidentes**.
- Los vértices u y v son vértices **vecinos**.

Igualmente, se dice que dos aristas son **adyacentes** si comparten un extremo.

Ejemplo 2

Se considera el grafo siguiente.



Los vértices v_5, v_6 son adyacentes; no lo son los vértices v_6, v_8. Los vértices v_1, v_2 son los extremos de la arista a_1, que se describe como $a_1 = \{v_1,v_2\} = = v_1v_2 = v_2v_1$. Las aristas a_4, a_5, a_6 son incidentes con v_3. Las aristas a_2, a_5 son adyacentes.

Las propiedades y algoritmos que relacionan el número de vértices y aristas de un grafo son muy importantes. Para enunciarlas son necesarias algunas definiciones.

Definición 3

- Dado un grafo $G = (V,A)$, el **orden del grafo** es el cardinal del conjunto, es decir, el número de vértices del grafo. Evidentemente se cumple que $n = |V| \geq 1$.
- La **medida del grafo** es el cardinal del conjunto de aristas o, en otros términos, el número de aristas del grafo. Puede suceder que un grafo no tenga ninguna arista, de manera que $m = |A| \geq 0$.

No es difícil deducir la siguiente proposición.

Número combinatórico

Recordad que el número $\binom{n}{r}$ se denomina **número combinatórico** o **binomial**. Se puede calcular con la fórmula, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
El número $\binom{n}{r}$ nos indica la cantidad de maneras de seleccionar r elementos de un conjunto que tiene n. Alternativamente, el número $\binom{n}{r}$ indica la cantidad de r-muestras no ordenadas sin repetición que se pueden construir en un conjunto de n elementos.

Proposición 1

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

El número máximo de aristas se consigue teniendo una arista entre cada par de vértices del grafo.

Ejemplo 3

Un grafo con diez vértices puede tener un máximo de $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ aristas: cada uno de los vértices está conectado con los nueve vértices restantes, y es necesario recordar que aunque una arista conecta dos vértices sólo se ha de contabilizar una única vez.

Definición 4

Dado un vértice $v \in V$ del grafo $G = (V,A)$ se define el **grado** $g(v)$ del vértice v como el número de aristas que son incidentes al vértice; de acuerdo con nuestra definición de grafo, el grado coincide con el número de vértices que le son adyacentes, en otros términos

$$g(v) = |\{u \in V \mid v \approx u\}| = |\{u \in V \mid \{u,v\} \in A\}|$$

Los vértices de grado cero se denominan **vértices aislados**.

Ejemplo 4

Consideremos un grupo de personas que se encuentran en una reunión. Mientras van entrando, algunas de estas personas se saludan. Podemos formular un grafo que describa esta situación: los vértices serán los asistentes a la reunión y las aristas representarán los saludos mutuos. De esta manera, el grado de cada vértice es el número de personas que ha saludado. Es posible que haya personas que no saluden a nadie, cuyo grado será, evidentemente, 0.

Resulta evidente que:

Proposición 2

$$0 \leq g(v) \leq |V| - 1, \quad \forall v \in V$$

Este resultado se puede utilizar para descartar la existencia de grafos con una secuencia de grados concreta.

Ejemplo 5

Se observa que no puede existir ningún grafo con la secuencia de grados 2,2,2,3,3,4,8. En efecto, si existiese dicho grafo $G = (V,A)$, se cumpliría que $|V| = 7$ y, si hubiese un vértice v_0 de grado 8, en virtud de la desigualdad anterior, $|V| \geq g(v_0) + 1 \geq 8 + 1 = 9$, cosa que es imposible.

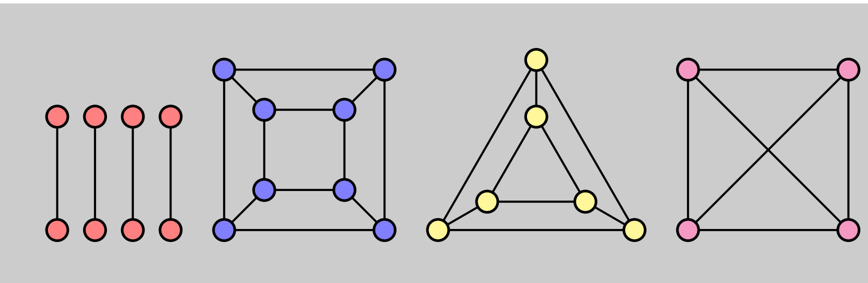
A partir del grado de los vértices de un grafo, puede definirse el grafo regular:

Definición 5

Un grafo es **regular** si todos los vértices son del mismo grado; si el grado común es r, entonces se dice que el grafo es r-**regular**.

Ejemplo 6

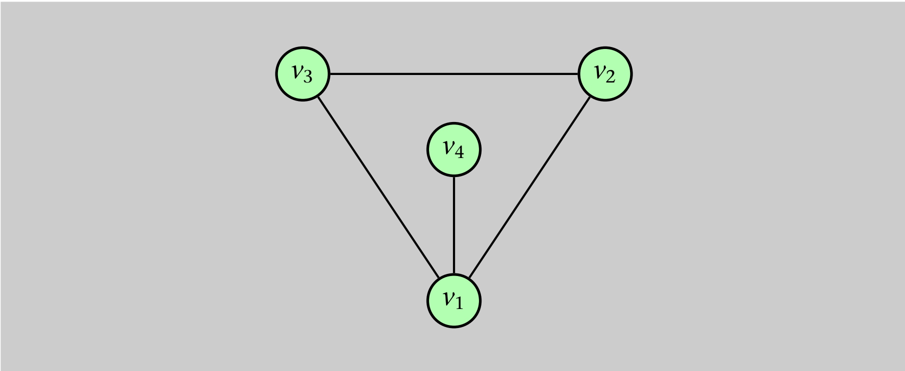
A continuación se presentan diversos ejemplos de grafos regulares.



El primer grafo es 1-regular y el resto son 3-regulares.

Ejercicios

4. Considerad el grafo del esquema adjunto. Describid formalmente el conjunto de vértices y de aristas.



5. Representad gráficamente un grafo de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y conjunto de aristas $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_5\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_5\},\{v_3,v_4\}\}$. Hacer diversas representaciones.

6. Un grafo 4-regular es como mínimo de orden 5. ¿Es esto cierto?

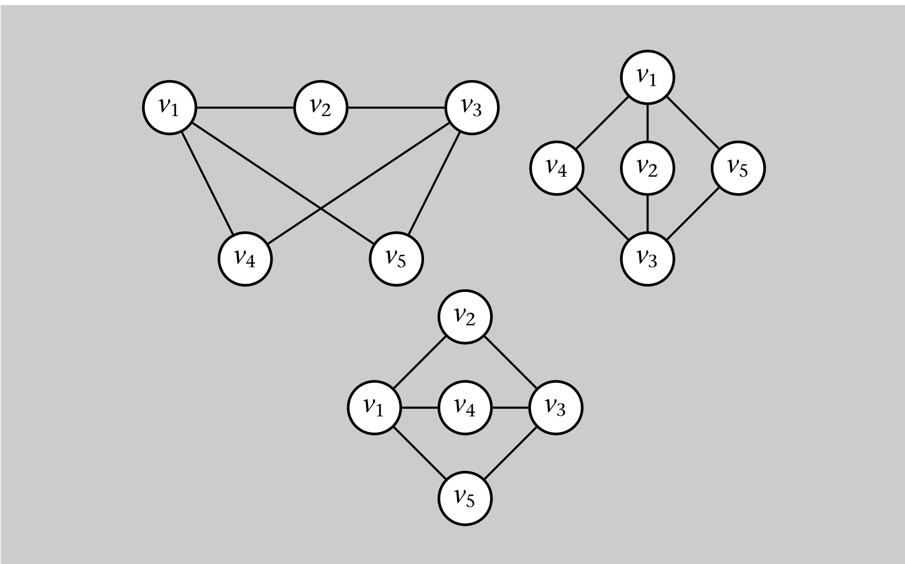
7. ¿Qué grafos son 0-regulares?

8. ¿Qué medidas son posibles, para los grafos de orden 3?

Soluciones

4. Es el grafo $G = (V,A)$, con $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ y $A = \{\{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, \{v_1,v_3\}, \{v_1,v_4\}\}$.

5. A continuación se presentan diversas soluciones.



6. Cierto, ya que $|V| \geq g(v)+1 \geq 4+1 \geq 5$. En general, si un grafo es r-regular, ha de ser de orden como mínimo $r+1$.

7. Los grafos 0-regulares son los grafos sin aristas.

8. Por la proposición 1 tenemos que $0 \leq |A| \leq \binom{3}{2} = 3$. Por lo tanto, las posibles medidas son: 0,1,2,3.

1.3. Subestructuras de un grafo

Definición 6

Dado un grafo $G = (V,A)$, un **subgrafo** de G es un grafo $H = (V',A')$ en el que $V' \subseteq V, A' \subseteq A$, de manera que las aristas del subgrafo unen vértices del subgrafo.

Así, el nuevo conjunto de vértices es un subconjunto del original, y análogamente para las aristas. Esto significa que, si dos vértices son adyacentes en H, entonces también lo son mediante una arista persistente en G y, por lo tanto, también son adyacentes en G. En otros términos, si dos vértices de H no son adyacentes en G, tampoco lo son en H, pero es posible que dos vértices de H sean adyacentes en G, y no lo sean en H.

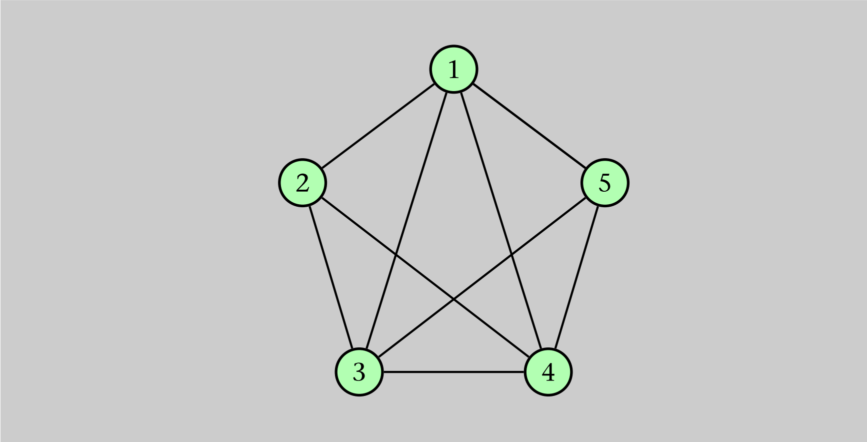
Definición 7

- Dado un grafo $G = (V,A)$, se considera un subconjunto $S \subseteq V$; se define el **subgrafo generado** o **inducido** por S en G como el grafo $\langle S \rangle = (S,A')$, de tal manera que $\{u,v\} \in A' \Leftrightarrow \{u,v\} \in A$ y $u,v \in S$. Así, el conjunto de las aristas de $\langle S \rangle$ son las que, siendo de G, conectan vértices de S.
- Sean $G = (V,A)$ y $H = (V',A')$ dos grafos; se dice que H es **subgrafo generador** o **de expansión** de G si $V' = V$ y $A' \subseteq A$.

El grado de un vértice u relativo a un subgrafo H se escribe $g_H(u)$.

Ejemplo 7

Considerad el grafo representado en la figura siguiente.



Un ejemplo de subgrafo puede ser el siguiente: $H = (V',A')$, $V' = \{1,2,4,5\}$, $A' = \{\{2,4\},\{4,5\}\}$. El grado del vértice 4 en el grafo G es 4 y, en cambio, en el subgrafo H el mismo vértice tiene grado 2.

Un subgrafo generador sería, por ejemplo, $H = \{\{1,2,3,4,5\},\{\{3,4\},\{2,4\}\}\}$.

El subgrafo generado por el conjunto de vértices $S = \{2,3,4,5\}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es S y el conjunto de aristas es $A' = \{\{2,3\},\{3,4\}, \{2,4\},\{3,5\}, \{4,5\}\}$.

1.4. Fórmula de los grados

Fórmula de los grados. Teorema 3

Dado un grafo $G = (V,A)$, se cumple que

$$\sum_{v\in V} g(v) = 2|A|$$

es decir, la suma de los grados de un grafo es el doble del número de aristas.

Demostración: Tan solo es necesario contar el número de aristas del grafo a partir de las aristas que aporta cada vértice. Cada vértice v aporta al cómputo global de aristas la cantidad de $g(v)$ aristas (cantidad que iguala el grado del vértice), de manera que globalmente el número de aristas sería $\sum_{v\in V} g(v)$ si cada arista no fuese compartida por los dos vértices extremos y, en consecuencia, cada arista es contada dos veces. Por lo tanto, la expresión $\sum_{v\in V} g(v)$ cuenta el doble del número de aristas, o sea, $\sum_{v\in V} g(v) = 2|A|$. ∎

Ejemplo 8

Se considera un grafo con secuencia de grados 2,2,2,2,2,2,3,1. Se puede calcular fácilmente el número de aristas del grafo sin otra información, y aplicando la fórmula de los grados:

$$|A| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} g(v) = \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2+3+1) = 8.$$

Con mucha frecuencia, la fórmula de los grados se utiliza en la resolución de problemas de teoría de grafos. También se utiliza un resultado que es muy fácil de demostrar a partir del lema.

Proposición 4

En un grafo cualquiera $G = (V,A)$, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración: En efecto, sea P el conjunto de vértices de grado par y S el conjunto de vértices de grado impar, de manera que se tiene la partición $V = P \cup S$. En consecuencia, se puede escribir a partir de la fórmula de los grados:

$$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = \sum_{v\in P\cup S} g(v) = \sum_{v\in P} g(v) + \sum_{v\in S} g(v) = \sum_{v\in P} 2k_v + \sum_{v\in S}(2k_v + 1).$$

Esto se debe a que los números pares son de la forma $2k$ y los números impares, de la forma $2k+1$, para un k adecuado, dependiendo del número.

Entonces, a partir de las fórmulas anteriores, se puede escribir

$$2|A| = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + \sum_{v\in S} 1 = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + |S|,$$

de donde resulta que el cardinal del conjunto de vértices de grado impar puede escribirse como la diferencia de dos números pares y, en consecuencia, es par:

$$|S| = 2|A| - 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right).$$

∎

Ejemplo 9

No puede existir ningún grafo con esta secuencia de grados: 1,3,3,2,2,2,4. En efecto, si existiese, habría un número impar de vértices de grado impar, cosa que contradiría la proposición 4, consecuencia de la fórmula de los grados.

Ejemplo 10

En una reunión, el número de las personas que saludan a un número impar de personas ha de ser par; es una consecuencia directa de la proposición 4. Se supone que el saludo es mutuo (esto se garantiza en el caso de los apretones de manos).

Ejemplo 11

En una clase, el número de alumnos que conocen a un número impar de alumnos (con conocimiento mutuo) es par.

Ejercicios

9. En una reunión de ocho personas se producen algunos saludos entre los asistentes. Se supone que dos personas saluden a otras tres, otra persona no salude a nadie, dos personas saluden sólo a una, una persona salude a cuatro, y dos personas saluden a dos. ¿Cuántos saludos se producirían?

10. Un asistente a una reunión da la siguiente descripción de ésta: había seis personas; una no conocía a nadie y tampoco saludó a nadie; cada una de las personas restantes saludó a tres asistentes. ¿Puede ser correcta esta descripción?

11. ¿Pueden existir grafos $G = (V,A)$ r-regulares con r impar, de orden $|V|$ impar?

12. En un grafo 2-regular, el número de aristas y de vértices coinciden. ¿Es esto posible?

13. Un grafo con catorce aristas, tres vértices de grado 1, dos vértices de grado 4, un vértice de grado 3 y el resto de grado 2 ha de tener exactamente trece vértices. ¿Es esto cierto?

Soluciones

9. Aplicando la fórmula de los grados, podemos ver que se producirían 8 saludos.

10. La descripción no puede ser cierta, ya que si así lo fuera, el grafo correspondiente a la reunión tendría secuencia de grados 0, 3, 3, 3, 3, 3, es decir, habría un número impar de vértices de grado impar, en contradicción con la proposición 4, consecuencia de la fórmula de los grados.

11. Se aplica la fórmula de los grados: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = r|V|$. Se observa claramente una contradicción, ya que el término de la izquierda es par, mientras que el de la derecha es impar, de acuerdo con las hipótesis. Por lo tanto, no puede existir ningún grafo de estas características.

12. Es cierto, ya que, por la fórmula de los grados se puede escribir $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$, de donde resulta que $|A| = |V|$.

13. Se comprobará la veracidad de la afirmación aplicando la fórmula de los grados, suponiendo que el número de vértices de grado 2 es x. En efecto, se puede escribir $3 + 2 \times 4 + 1 \times 3 + 2x = 2|A| = 28$, de donde $x = 7$. Por lo tanto, el número de vértices es 13.

1.5. Algunos grafos importantes

1.5.1. Grafos elementales

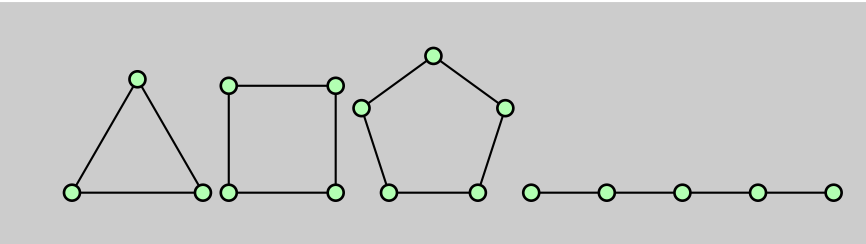
Es necesario conocer alguno de los tipos de grafos más importantes. Los más elementales son:

Definición 8

- El **grafo nulo** N_n de orden $n \geq 1$ es el grafo de n vértices y 0 aristas; de manera que $N_n = (V,\emptyset)$, con $|V| = n$. El grafo N_1 se denomina **grafo trivial**. El orden del grafo nulo N_n es n y la medida 0. Es el más simple de todos los grafos.
- El **grafo ciclo** de orden $n \geq 3$ es $C_n = (V,A)$, donde $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_n,v_1\}\} = \{\{v_i,v_{i+1}\} \mid i = 1,\ldots,n-1\} \cup \{\{v_n,v_1\}\}$.
- El **grafo trayecto** $T_n = (V,A)$ de orden $n \geq 2$ es el grafo para el que $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{n-1},v_n\}\} = \{\{v_i,v_{i+1}\} \mid i = 1,\ldots,n-1\}$. El grafo T_n se puede obtener de la eliminación de una arista del grafo ciclo C_n; si, en cambio, se añade una arista a T_n que conecte el primer vértice y el último se obtiene el ciclo C_n.
- El **grafo completo** de orden n es el grafo de n vértices con todas las aristas posibles; es decir, $K_n = (V,A)$, con $|V| = n$ y $|A| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

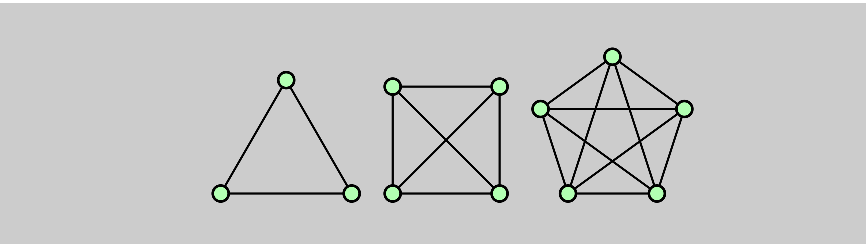
Ejemplo 12

Se puede ver en esta figura los grafos ciclo C_3, C_4, C_5. El último grafo es T_5.



Ejemplo 13

En las figuras que hay a continuación se puede observar algunas representaciones de los grafos completos K_3, K_4, K_5. Observar que $K_3 = C_3$.



Ejercicios

14. ¿Qué grafos ciclos son grafos completos?

15. Los únicos grafos 2-regulares son los ciclos C_n. ¿Es esto cierto?

16. ¿Hay grafos r-regulares para todo r?

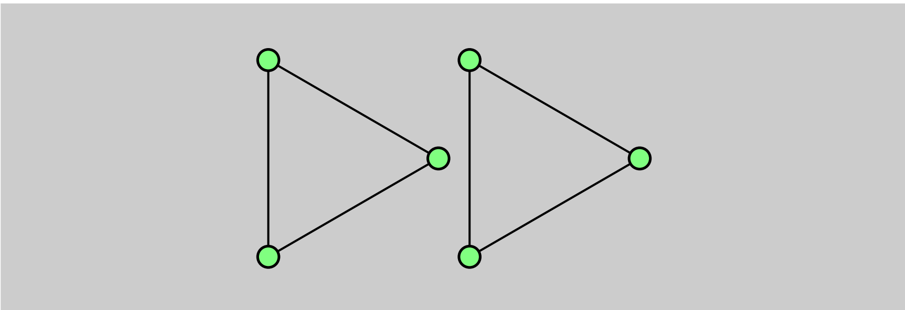
17. ¿Cuál es la medida máxima de un grafo de orden 14? ¿Cómo se denomina este grafo?

18. ¿Podéis dar un ejemplo de un grafo tal que cada vértice sea incidente con cada arista?

Soluciones

14. Únicamente el grafo $C_3 = K_3$.

15. Falso, como se puede ver en el contraejemplo siguiente (grafo de 6 vértices y 6 aristas, que no es ciclo):



16. Sí, puesto que el grafo completo K_{r+1} es r-regular.

17. La medida máxima es $|A| = \binom{14}{2} = 91$ y corresponde al grafo completo K_{14}.

18. Por ejemplo, el grafo trayecto, T_2.

1.5.2. Los grafos bipartitos

Los grafos bipartitos merecen una atención especial.

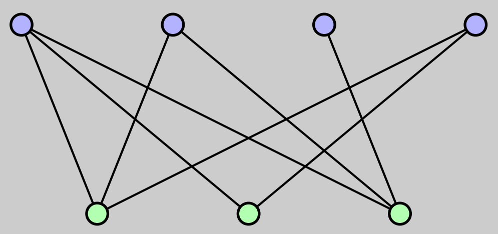
Definición 9

Un grafo $G = (V,A)$ es **bipartito** si existe una partición del conjunto de vértices, es decir si $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que las aristas existentes sólo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2: es decir, $\{u,v\} \in A$ implica que $u \in V_1$, $v \in V_2$ o $v \in V_1$, $u \in V_2$. De manera equivalente, si $\{u,v\} \in A$, $u \in V_1 \Leftrightarrow v \in V_2$.

En particular, esto significa que no hay aristas que conecten vértices de V_1 ni aristas que conecten vértices de V_2.

Ejemplo 14

Este gráfico es un ejemplo de grafo bipartito. Se han indicado con colores diferentes los vértices de cada bipartición.



La idea se puede generalizar a los grafos k-partidos. En este caso se tiene una partición $(V_1, \ldots, V_k)$ del conjunto de vértices, de manera que las aristas que hay conectan vértices que pertenecen a conjuntos diferentes de la partición y no hay aristas conectando vértices de un mismo conjunto V_i.

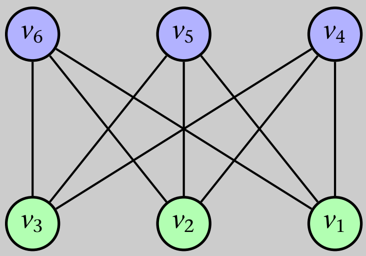
Definición 10

El grafo **bipartito completo** $K_{n,m}$ es un grafo $G = (V,A)$ que es bipartito, siendo $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, con todas las aristas posibles conectando vértices de V_1 con vértices de V_2.

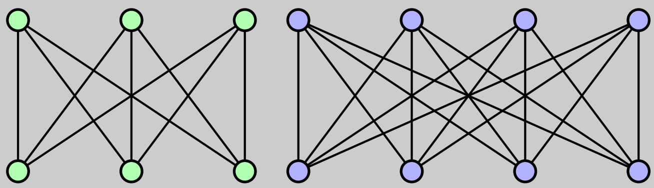
Esto significa en particular que todos los vértices de V_1 son adyacentes a todos los vértices de V_2. En otras palabras, $A = \{\{u,v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$. El orden del grafo es $|V| = n+m$ y su medida es $|A| = nm$. Los vértices de V_1 son todos de grado m y los de V_2 son de grado n. Los grafos bipartitos completos $K_{m,m}$ son m-regulares.

Ejemplo 15

Se indican en colores diferentes los vértices de la bipartición, de manera que se tiene $V_1 = \{v_1,v_2,v_3\}$ y $V_2\{v_4,v_5,v_6\}$.



Estas figuras son representaciones de $K_{3,3}$, $K_{4,4}$ (de izquierda a derecha).

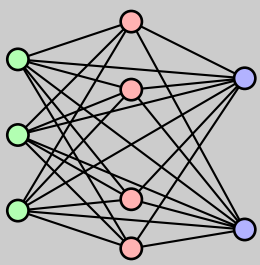


Definición 11

En el caso de un grafo k-**partido completo** se tiene una partición del conjunto de vértices en k subconjuntos, de cardinales respectivos $n_1,n_2,\ldots,n_k$, y existen todas las aristas posibles, con la condición de que no haya ninguna arista que conecte vértices de un mismo subconjunto. El grafo correspondiente se representa por $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Ejemplo 16

La ilustración corresponde al grafo $K_{3,4,2}$.



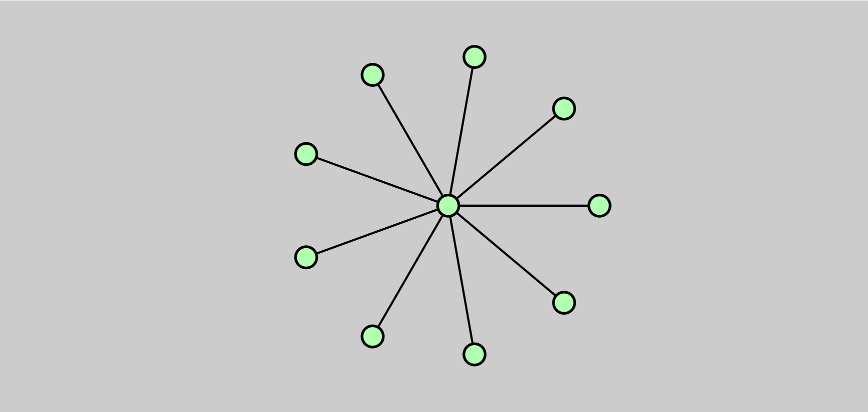
Definición 12

El **grafo estrella** E_n de orden n ($n \geq 3$) es un caso particular de grafo bipartito completo, $E_n = K_{1,n-1}$.

El orden del grafo es n y la medida, $n-1$.

Ejemplo 17

Este gráfico corresponde a $E_{10} = K_{1,9}$.



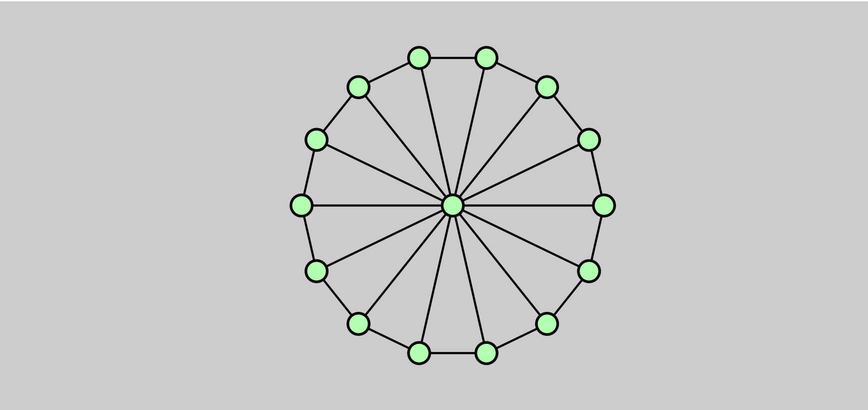
Definición 13

El **grafo rueda** R_n de orden n ($n \geq 4$) tiene un único vértice de grado $n-1$ y, si se elimina este vértice y sus aristas incidentes, se obtiene un ciclo de orden $n-1$.

El orden del grafo rueda es n y su medida es $2(n-1)$.

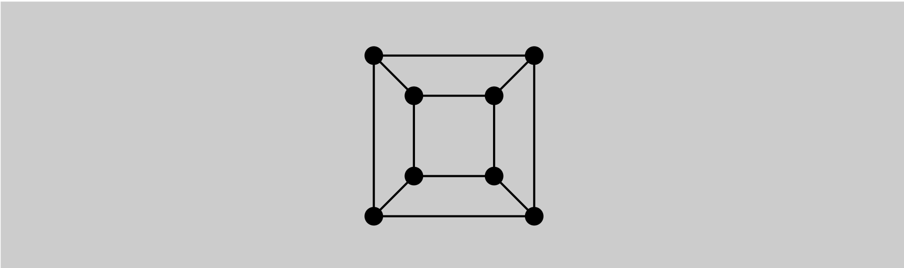
Ejemplo 18

Este es el grafo rueda de orden 15: R_{15}.

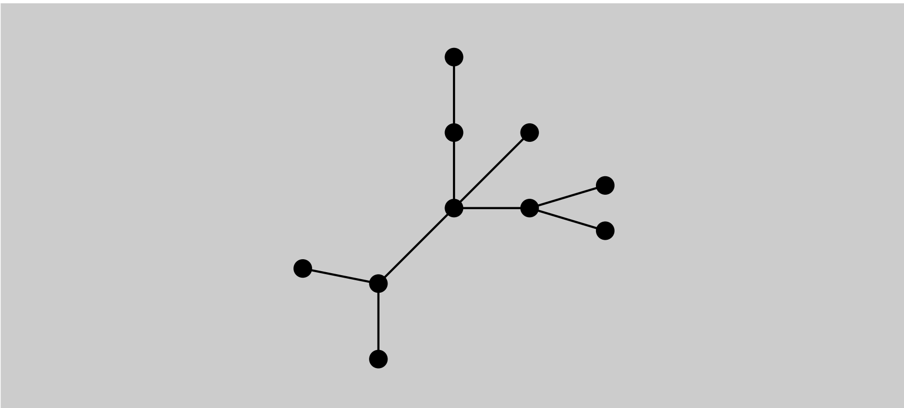


Ejercicios

19. Estudiad si el grafo siguiente es bipartito y, en caso afirmativo, representadlo "en forma bipartida", es decir, en forma que deje ver claramente la estructura bipartida.



20. Considerad el grafo siguiente, probad que es bipartito y dibujadlo en forma bipartida.



21. Considerad un grafo k-partido completo o, más concretamente considerad un $(n_1, \ldots, n_k)$-partido completo. ¿Cuál es el orden y la medida del grafo, y cuáles son los grados de los diferentes vértices? ¿Para qué valores es regular el grafo?

22. ¿Son bipartitos los grafos ciclo C_n?

23. Los grafos trayecto, ¿son todos bipartitos?

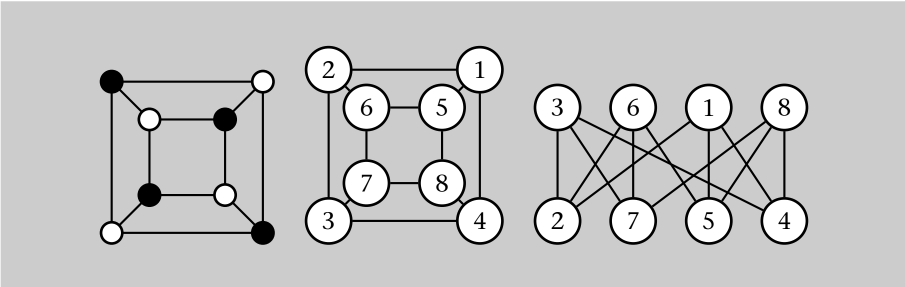
24. Indicad algún grafo completo K_n que sea bipartito.

25. El grafo trayecto T_3 es un caso especial de grafo estrella. ¿Cierto o falso?

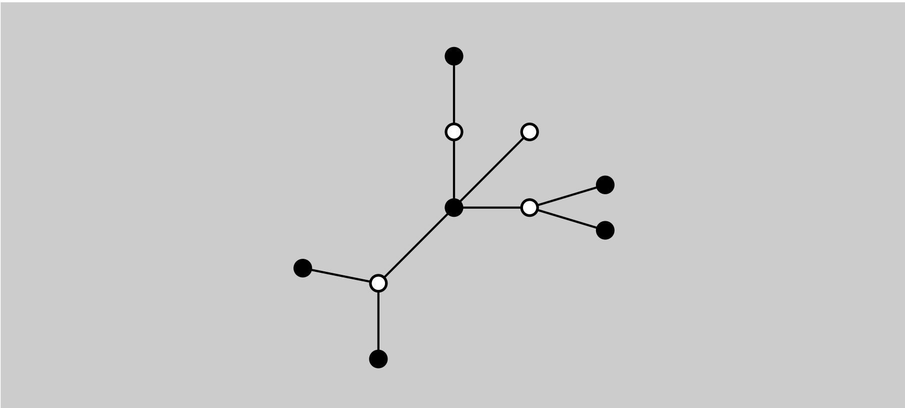
26. Buscad un recorrido cerrado sobre el grafo rueda que visite todos los vértices exactamente una vez.

Soluciones

19. El grafo es efectivamente bipartito, como se puede ver si se asignan dos colores diferentes a los vértices, de manera que no haya vértices del mismo color adyacentes (ésta es una manera fácil de comprobar si un grafo es o no bipartito); entonces las dos clases de la bipartición son los subconjuntos de vértices del mismo color. Asignando etiquetas a los vértices, también se puede ver una representación que muestra claramente la estructura bipartida.



20. Se propone la distribución bipartida de los vértices, que se pone de manifiesto en la bicoloración del esquema siguiente:



21. El orden del grafo es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. La medida del grafo es

$$\frac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k)).$$

El grafo es regular si $n_i = \frac{n}{k}$, es decir, cuando todas las n_i son iguales. Por lo tanto, el orden del grafo tiene que ser divisible por k.

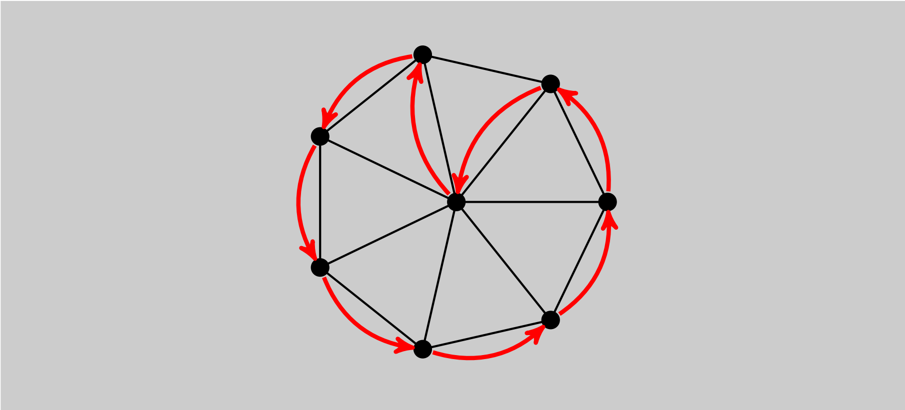
22. Depende de la paridad de n (con esta indicación podéis completar la respuesta).

23. Cierto (acabar de justificar la respuesta).

24. El grafo K_2 es bipartito. Para $n > 2$, los grafos K_n no lo son.

25. Cierto, puesto que $T_3 = E_3 = K_{1,2}$.

26.



1.6. Secuencias gráficas

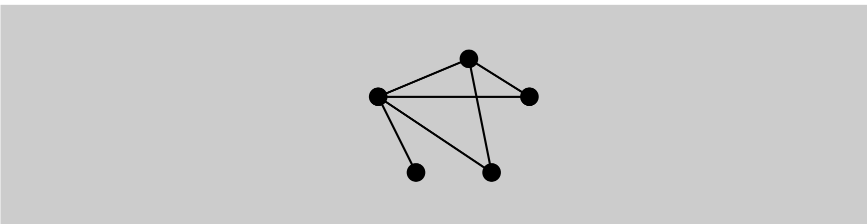
Uno de los primeros problemas que se puede plantear es si, dada una secuencia de números enteros, es posible construir un grafo que la tenga como secuencia de grados. A partir de la fórmula de los grados, es fácil darse cuenta de que esto no siempre es posible.

Definición 14

Una secuencia de números enteros no negativos, $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V,A)$ de orden n tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo 19

La secuencia $s : 4,3,2,2,1$ es una secuencia gráfica. Corresponde al grafo siguiente.



Ejemplo 20

La secuencia $s : 4,3,3,2,1$ no es una secuencia gráfica, puesto que no cumple la proposición 4, consecuencia de la fórmula de los grados.

De la definición de grado de un vértice y de la fórmula de los grados, se pueden establecer dos condiciones necesarias para la existencia de un grafo dada una secuencia de enteros no negativos $s : d_1,d_2,\dots,d_n$:

1) $d_i \leq n-1$, por $1 \leq i \leq n$.

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

Ahora bien, estas condiciones no son suficientes.

Ejemplo 21

La secuencia $s : 4,4,4,2,1,1$ tendría que corresponder a un grafo de orden 6. Cumple las dos condiciones anteriores. En cambio, no hay ningún grafo que tenga esta secuencia de grados. Esto demuestra que las condiciones anteriores son necesarias pero no suficientes.

Caracterización de Havel-Hakimi. Teorema 5

Una secuencia $s : d_1,d_2,\dots,d_n$ de números enteros no negativos, con $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, es una secuencia gráfica si, y sólo si, la secuencia $d_2-1,d_3-1,\dots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\dots,d_n$ es gráfica.

Demostración: Podéis ver la obra de Gimbert, Moreno, Ribó y Valls (1998).
∎

Ejemplo 22

Según esta caracterización, la secuencia del ejemplo $s : 4,4,4,2,1,1$, será gráfica si lo es la secuencia que resulta de eliminar el primer término (4) y restar 1 a los cuatro siguientes. Por lo tanto, la secuencia $s : 4,4,4,2,1,1$ se transforma en $s' : 3,3,1,0,1$. Debemos establecer ahora si s' es gráfica, es decir, reordenando, si $s' : 3,3,1,1,0$ es gráfica. El primer término es 3, por lo tanto, debemos restar 1 a los tres siguientes términos; la secuencia resultante es $s'' : 2,0,0,0$. Pero esta secuencia no se corresponde con ninún grafo, y por ello ni s'', ni s' ni, tampoco, la secuencia s son gráficas.

1.6.1. Algoritmo de Havel-Hakimi

El teorema de Havel-Hakimi permite, de manera recursiva, reconocer si una secuencia es gráfica.

Formulación del algoritmo de Havel-Hakimi

Entrada: una secuencia de números enteros $s : d_1,d_2,\dots,d_n$

Salida: dice si la secuencia es gráfica.

Algoritmo:

Si existe $d_i > n - 1$, entonces la secuencia no es gráfica, **fin**.
mientras no haya ningún $d_i < 0$ y s no sea idénticamente 0.
Clasificar s en orden decreciente.
Eliminar d_1 de s y restar 1 unidad a los d_1 elementos siguientes.
finmientras
Si existe $d_i < 0$, entonces la secuencia no es gráfica, **fin**.
Si la secuencia resultante es la secuencia idénticamente 0,
entonces s es una secuencia gráfica.

Implementación del algoritmo de Havel-Hakimi

Para implementar el algoritmo se observa que en cada iteración la longitud de la secuencia disminuye en una unidad. La secuencia será gráfica si tras $n - 1$ iteraciones se obtiene solamente un 0.

```
algoritmo Havel-Hakimi(s)
  inicio
    grafica ← FALSO
    clasificar_descendente(s)
    si (max(s) ≤ n – 1) entonces
      para i ← 1 hasta n – 1
          pivote ← d1
          s ← s– < d1 >
          para j ← 1 hasta pivote
              dj ← dj – 1
          finpara
          si (pivote < LONGITUD(s))
            entonces intercalar_descendente(s,pivote)
          finsi
      finpara
      si (s = 0)
        entonces grafica ← CIERTO
      finsi
  finsi
  retorno (grafica)
fin
```

Se observa que,

1) La función *clasificar_descendente*(s) ordena s en orden descendente.

2) La función *intercalar_descendente*(s,d_1) ordena s fusionando dos subsecuencias ya ordenadas. Como las dos subsecuencias que forman s ya están ordenadas, se trata de intercalarlas.

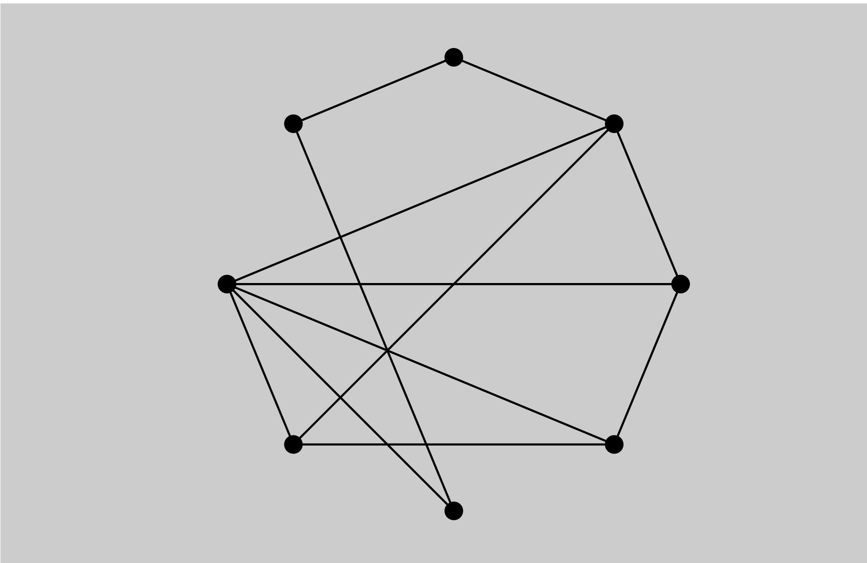
3) Tras $n - 1$ iteraciones la secuencia contendrá un solo elemento.

Ejemplo 23

La tabla siguiente muestra la simulación del algoritmo para la secuencia s : 2,2,4,3,3,2,3,5.

Iteración	Secuencia	Operación
Inicialmente	2,2,4,3,3,2,3,5	
	5,4,3,3,3,2,2,2	Clasificación
1	3,2,2,2,1,2,2	Primera subsecuencia
	3,2,2,2,2,2,1	Se intercalan subsecuencias
2	1,1,1,2,2,1	Segunda subsecuencia
	2,2,1,1,1,1	Se intercalan subsecuencias
3	1,0,1,1,1	Tercera subsecuencia
	1,1,1,1,0	Se intercalan subsecuencias
4	0,1,1,0	Cuarta subsecuencia
	1,1,0,0	Se intercalan subsecuencias
5	0,0,0	Quinta subsecuencia
Fin		

Por lo tanto, la secuencia es gráfica. Un grafo que tiene esta secuencia de grados es:



Análisis del algoritmo de Havel-Hakimi

Para analizar este algoritmo, hay que observar que en cada iteración del bucle la longitud de la secuencia disminuye en una unidad. El número total de iteraciones será $n-1$.

Las principales operaciones que se hacen son:

1) Clasificar la secuencia en orden descendente. Esto se puede hacer con los algoritmos clásicos de ordenación como el *quick sort* o el *merge sort* con una complejidad $O(n \log n)$.

2) En el cuerpo del bucle se hacen dos tipos de operaciones:

– Restar una unidad d_1 ($d_1 \leq n-1$) veces.
– Intercalar dos subsecuencias.

Aunque normalmente no se hará una intercalación en cada iteración, se puede suponer el peor de los casos. Es decir, en cada iteración se restan k–1 unidades (k es la longitud de la subsecuencia) y se realiza una intercalación. Las intercalaciones se pueden hacer con una complejidad lineal, $O(n)$ y el número de restas será

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

que da una complejidad $O(n^2)$.

Resumiendo, se puede concluir que este algoritmo tiene, en el peor de los casos, una complejidad $O(n^2)$.

Ejercicios

27. Usando el algoritmo de Havel-Hakimi, decidid si las secuencias siguientes son gráficas.

a) s : 5,5,7,6,4,2,4,5

b) s : 2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,8,8,8,8,8

c) s : 2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,8,8,8,8,9

28. ¿Puede pasar que grafos con estructuras diferentes tengan la misma secuencia de grados?

29. Demostrad que la secuencia de números enteros 2,2,2,2,2,2,3,1 es la secuencia de grados de un grafo. Proponed dos ejemplos diferentes de grafos que tengan esta secuencia de grados.

Soluciones

27. a) Sí que es gráfica:

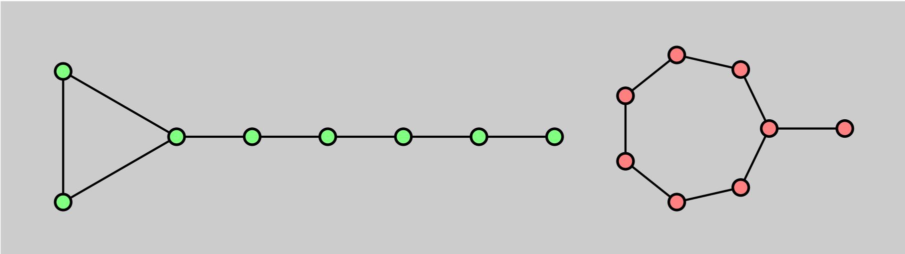
Iteración	Secuencia	Operación
Inicialmente	5,5,7,6,4,2,4,5	
	7,6,5,5,5,4,4,2	Clasificación
1	5,4,4,4,3,3,1	Primera subsecuencia
2	3,3,3,2,2,1	Segunda subsecuencia
3	2,2,1,2,1	Tercera subsecuencia
	2,2,2,1,1	Se intercalan subsecuencias
4	1,1,1,1	Cuarta subsecuencia
5	0,1,1	Quinta subsecuencia
	1,1,0	Se intercalan subsecuencias
6	0,0	Sexta subsecuencia
7	0	Séptima subsecuencia
Fin		

b) No es gráfica (aplicad el algoritmo para obtener este resultado).

c) Esta sí que es una secuencia gráfica (aplicad el algoritmo para obtener este resultado).

28. Sí; por ejemplo, considerad un grafo ciclo y el grafo constituido por la reunión de 2 ciclos.

29. Se aplicaría el algoritmo de Havel-Hakimi para demostrar que la secuencia es gráfica. Dos posibles grafos que tienen esta secuencia de grados son:



2. Estructura y manipulación de grafos

Muy a menudo es interesante conocer el conjunto de grafos isomorfos entre sí, que son grafos que tienen esencialmente la misma estructura. También es útil conocer modelos de grafos más generales que los que se han presentado hasta ahora, y que surgen de manera natural; es el caso de los multigrafos y pseudografos, y también de los grafos orientados.

Por otro lado, es conveniente disponer de herramientas que permitan manipular grafos, básicamente con el fin de transformar un grafo o de combinar dos o más. Finalmente, se estudiará uno de los grandes problemas prácticos: la representación y el almacenamiento de un grafo en términos de estructuras de datos.

2.1. Transformar un grafo

Dado un grafo $G = (V,A)$ se pueden realizar manipulaciones diversas:

1) Eliminar un vértice $u \in V$. Así se obtiene el grafo $G' = G - u$, que es el grafo (V',A'), donde $V' = V \setminus \{u\}$ y A' es el conjunto de aristas de G no incidentes con u. Esta operación se puede generalizar trivialmente a un conjunto $W \subseteq V$: $G' = G - W = (V \setminus W, \{\{a,b\} \mid a,b \notin W\})$. Esta operación sólo tiene sentido si el grafo no es el trivial.

2) Eliminar la arista $a \in A$. Así se obtiene un grafo, con los mismos vértices, definido por $G' = G - a = (V, A \setminus \{a\})$. La operación se puede generalizar trivialmente a un subconjunto de aristas $B \subseteq A$, en cuyo caso $G - B = (V, A \setminus B)$.

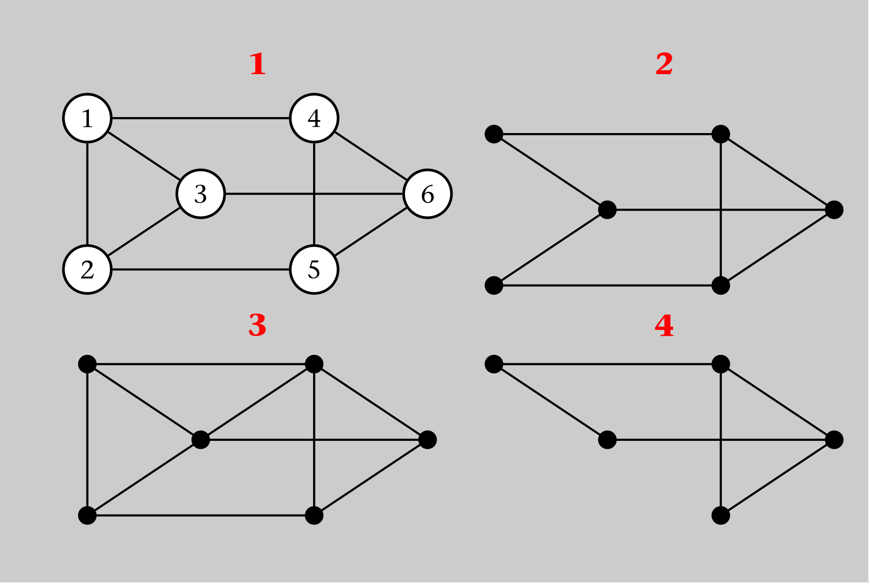
3) Añadir los vértices de un conjunto W tal que $W \cap V = \emptyset$. Así se obtiene un nuevo grafo definido por $G' = G + W = (V \cup W, A)$; en el caso particular de un vértice, la notación se simplifica y se sustituye por $G+u$. Como se verá, esta operación se puede definir en términos de unión con el grafo nulo. Con la adición de vértices no se añaden aristas nuevas.

4) Añadir una arista $\{u,v\}$, siendo u y v dos vértices no adyacentes. Así se obtiene el grafo $G' = (V, A \cup \{\{u,v\}\})$. Este nuevo grafo se puede representar por $G + uv$. El proceso se puede generalizar a conjuntos de más de una arista.

La condición de no adyacencia de los vértices es fundamental, puesto que de lo contrario se crearía una arista múltiple y, por lo tanto, no se estaría en el dominio de los grafos simples, tal y como se ha definido.

Ejemplo 24

Sobre el primer grafo se efectúan operaciones de eliminación de vértices y aristas, y de adición de aristas. El cuarto grafo es el resultado de eliminar del original el vértice 2. El segundo grafo resulta de eliminar la arista $\{1,2\}$ y el tercer grafo se genera con la adición de la nueva arista $\{3,4\}$.

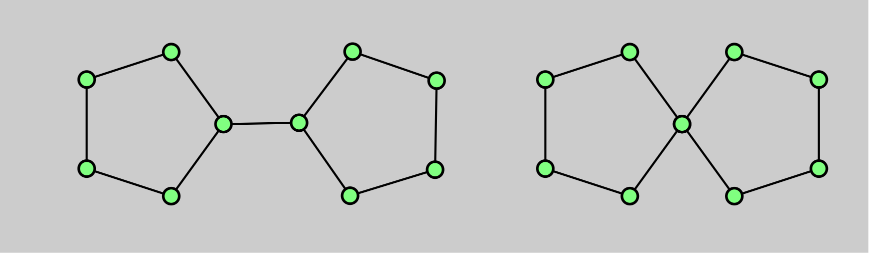


5) Hacer la contracción de la arista $a = \{u,v\}$. En este caso se elimina la arista a, se identifican en un único nuevo vértice w los dos vértices extremos u, v, que desaparecen y, finalmente, el vértice w hereda exclusivamente las adyacencias de los vértices u, v.

La operación de contracción se puede aplicar a todo un conjunto de aristas.

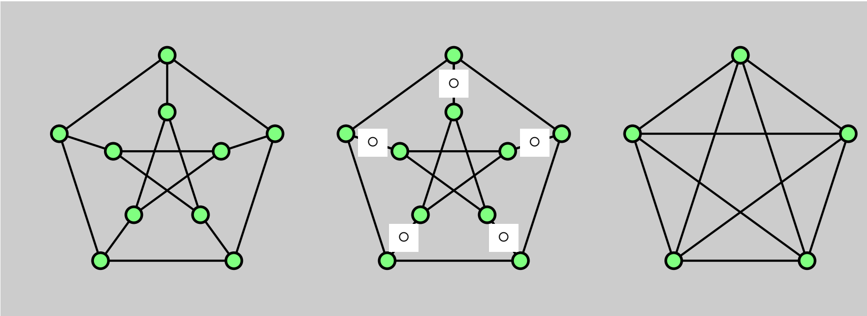
Ejemplo 25

Observad en esta figura el resultado de hacer la contracción de una arista del grafo de la izquierda:



Ejemplo 26

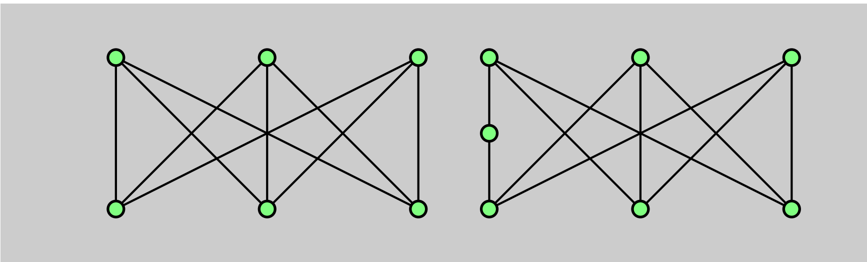
Observad las figuras siguientes, que presentan la contracción de algunas aristas del denominado *grafo de Petersen*, de manera que se deriva el grafo completo K_5 (en la segunda ilustración se marcan las aristas que se contraen):



6) Subdivisión elemental de la arista $a = \{u,v\}$. En este caso se inserta un vértice de grado 2; es decir, dado $w \notin V$, se realizan las operaciones siguientes: eliminación de la arista a, adición del nuevo vértice w y adición de las nuevas aristas $\{u,w\}$ y $\{w,v\}$. También se puede describir como $G - a + w + uw + wv$.

Ejemplo 27

Observad el resultado una operación de subdivisión elemental en una arista del grafo $K_{3,3}$.



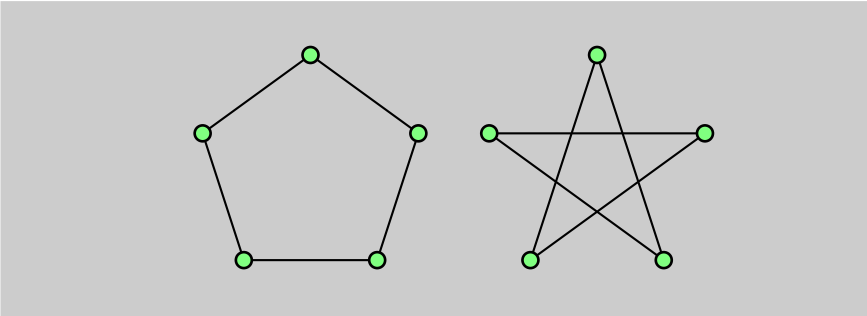
Definición 15

Dado el grafo $G = (V,A)$, se define el **complementario** de este grafo, G^c, como el grafo que se construye sobre el mismo conjunto de vértices, de tal modo que dos vértices son adyacentes en G^c si, y sólo si, no lo son en G.

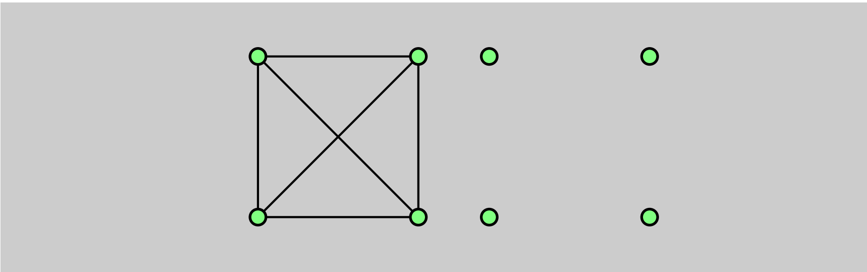
Naturalmente, se cumple que el complementario del complementario es el original: $(G^c)^c = G$.

Ejemplo 28

La figura siguiente muestra el grafo C_5 y su complementario (que vuelve a ser C_5).



Y ésta, K_4 y su complementario, N_4.



Ejercicios

30. ¿Cuál es el orden y la medida del grafo complementario G^c en términos del orden n y la medida m del grafo original?

31. Si G es un grafo de orden n con secuencia de grados $g_1, g_2, \ldots, g_n$, ¿cuál será la secuencia de grados de su complementario, G^c?

32. Hay veces en las que es necesario estudiar si existen grafos con una determinada secuencia de grados. Un procedimiento que se puede aplicar es considerar la secuencia de grados que tendrían los grafos complementarios, si hubiera algún grafo con la secuencia de grados dada. Proponer algún ejemplo donde este procedimiento no aportaría nada nuevo, es decir, donde la secuencia de grados del grafo complementario es la misma que la dada.

33. El complementario de un grafo regular, ¿es regular? ¿Se puede afirmar que un grafo es regular si, y sólo si, lo es el complementario?

Soluciones

30. El orden es el mismo y la medida es $\binom{n}{2} - m$.

31. La secuencia será, $n-1-g_1, n-1-g_2, \ldots, n-1-g_n$.

32. Un grafo con secuencia de grados 2, 2, 2, 2, 2 tiene como complementario un grafo con secuencia 2, 2, 2, 2, 2.

33. Sí (acabad de justificar la respuesta).

2.2. Combinar dos o más grafos

Las operaciones que se presentan a continuación se generalizan fácilmente a más de dos grafos.

Definición 16

Dados los grafos $G_1 = (V_1,A1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, su **unión** es:

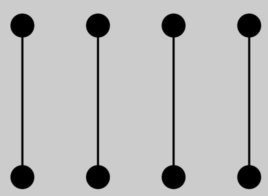
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$$

Ejemplo 29

Si G es un grafo de orden n, entonces $G \cup G^c = K_n$.

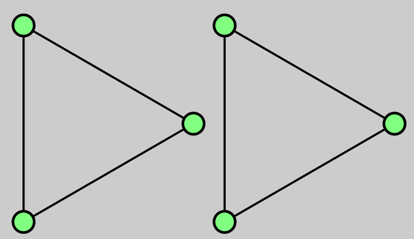
Ejemplo 30

El grafo siguiente se puede describir como $K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2$.



Ejemplo 31

El grafo siguiente se puede describir como $G = C_3 \cup C_3$.



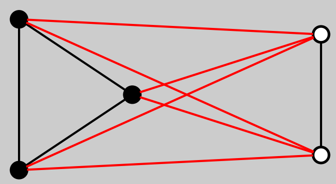
Definición 17

Dados los grafos $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, su **suma** es el grafo que tiene los vértices y las aristas de los grafos originales, más las aristas que conecten todos los vértices del primero con todos los vértices del segundo:

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2,(A_1 \cup A_2 \cup \{\{u,v\} \mid u \in V_1,\, v \in V_2\}))$$

Ejemplo 32

En el gráfico siguiente se puede ver la suma del 3-ciclo (en negro) con el 2-trayecto (en blanco):



Ejemplo 33

Los grafos rueda y estrella se pueden expresar como grafos suma; en efecto, se puede escribir: $R_n = N_1 + C_{n-1}$ y $E_n = N_1 + N_{n-1}$.

Definición 18

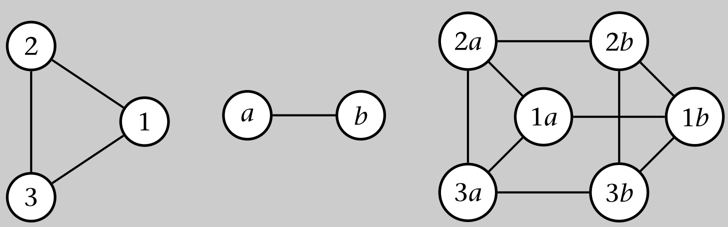
Dados los grafos $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, se define el **producto** $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2,A)$ de manera que los vértices (u_1,v_1), (u_2,v_2) son adyacentes si, y sólo si, se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

1) $u_1 = u_2$ y $v_1 \approx v_2$

2) $u_1 \approx u_2$ y $v_1 = v_2$

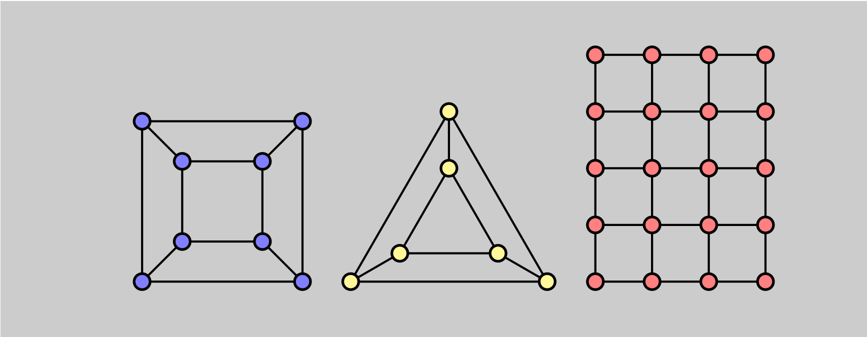
Ejemplo 34

El producto de los dos primeros grafos es el tercer grafo:



Ejemplo 35

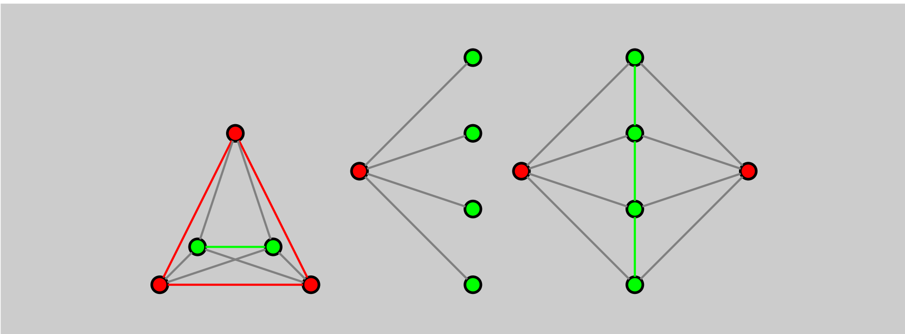
A continuación, se muestran diversos ejemplos de grafos producto (de izquierda a derecha): $T_2 \times C_4$, $T_2 \times C_3$, $T_5 \times T_4$.



Ejercicios

34. Describid, en términos de las operaciones entre grafos y a partir del grafo nulo, los grafos bipartitos completos $K_{n,m}$.

35. Expresad los grafos siguientes en términos de combinaciones de grafos elementales.



Soluciones

34. $K_{n,m} = N_n + N_m$

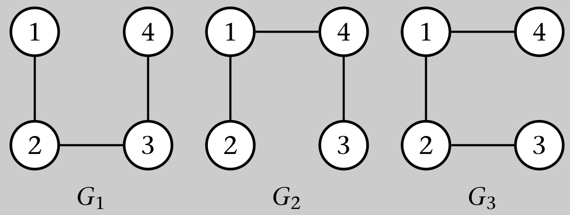
35. El grafo de la izquierda es $T_2 + C_3$ (también es $K_4 + N_1$), el central es $N_1 + N_4$, el de la derecha es $N_2 + T_4$.

2.3. Grafos isomorfos

Los grafos se pueden describir de maneras diferentes atendiendo a la numeración o al etiquetado concreto de los vértices, lo que puede dar lugar a descripciones conjuntistas muy diferentes.

Ejemplo 36

Los grafos siguientes son grafos con los vértices *etiquetados* y son obviamente diferentes (atendiendo a las etiquetas).



En concreto, para todos ellos $V = \{1,2,3,4\}$ y, además,

$$G_1 = (V,\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\})$$
$$G_2 = (V,\{\{1,2\},\{1,4\},\{3,4\}\})$$
$$G_3 = (V,\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\})$$

que son claramente diferentes, puesto que lo son los respectivos conjuntos de aristas. Aun cuando las estructuras son las mismas, el etiquetado no es irrelevante; puede ser clave para ciertos modelos y aplicaciones si el grafo es el modelo para un proyecto de comunicaciones y los vértices del grafo son poblaciones concretas, entonces es de mucha importancia práctica saber qué vértice queda conectado con cuál o cuáles otros.

Definición 19

Dos grafos $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A2)$ son **idénticos** si, y sólo si, $V_1 = V_2$, $A_1 = A_2$.

Dos grafos $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$ son **isomorfos** si, y sólo si, existe una biyección $\varphi : V_1 \to V_2$ que conserva las adyacencias y las no adyacencias, es decir, $u \approx v \Leftrightarrow \varphi(u) \approx \varphi(v)$. En este caso, se dice que φ es un isomorfismo y $G_1 \cong G_2$.

Proposición 6

Condiciones necesarias de isomorfismo (ninguna de ellas es suficiente):

1) Dos grafos isomorfos son del mismo orden.

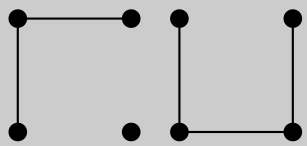
2) Dos grafos isomorfos tienen la misma medida.

3) Si $\varphi : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de los grafos $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, entonces, por la propiedad de conservación de las adyacencias y las no adyacencias, los vértices correspondientes por la aplicación φ tienen que tener los mismos grados, es decir $g_{G_1}(u) = g_{G_2}(\varphi(u))$. De aquí se deriva, en particular, que las secuencias de grados de dos grafos isomorfos tienen que coincidir. Esta propiedad se puede utilizar para buscar isomorfismos, puesto que sólo pueden asociarse vértices con los mismos grados, cosa que es útil si hay vértices con grados singulares o hay pocos vértices con los mismos grados.

Demostración: Consecuencia inmediata de la definición de isomorfismo entre dos grafos. ∎

Ejemplo 37

Un ejemplo simple de aplicación es el caso siguiente; los grafos no son isomorfos porque no son de la misma medida o, alternativamente, porque no tienen la misma secuencia de grados:



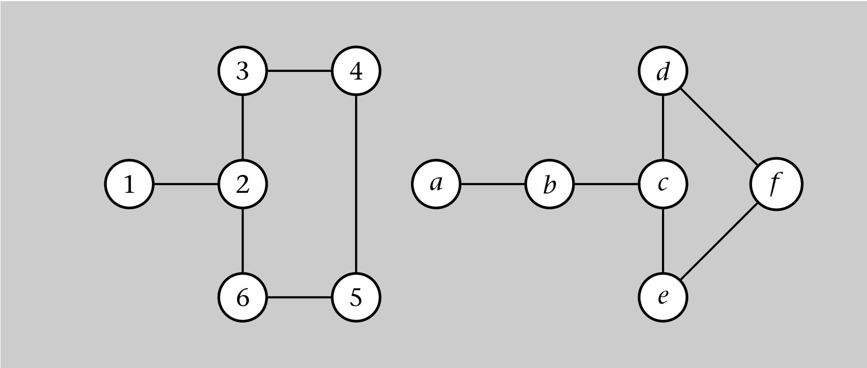
Ejemplo 38

Pero estas tres condiciones no son suficientes como lo demuestra el ejemplo siguiente: $G_1 = C_6$, $G_2 = C_3 \cup C_3$, tienen el mismo orden, la misma medida y la misma secuencia de grados, pero no son isomorfos.

La idea general de un isomorfismo es que conserva toda la estructura del grafo, en particular todos los tipos de subgrafos. Esto puede ser útil para concluir que dos grafos no son isomorfos. Por ejemplo, si un grafo tiene un triángulo y el otro no, entonces no pueden ser isomorfos.

Ejemplo 39

Observad que los grafos de la figura siguiente son del mismo orden, de la misma medida y de la misma secuencia de grados. Por lo tanto, la pareja pasa todos los tests anteriores sin que se pueda llegar a ninguna conclusión.

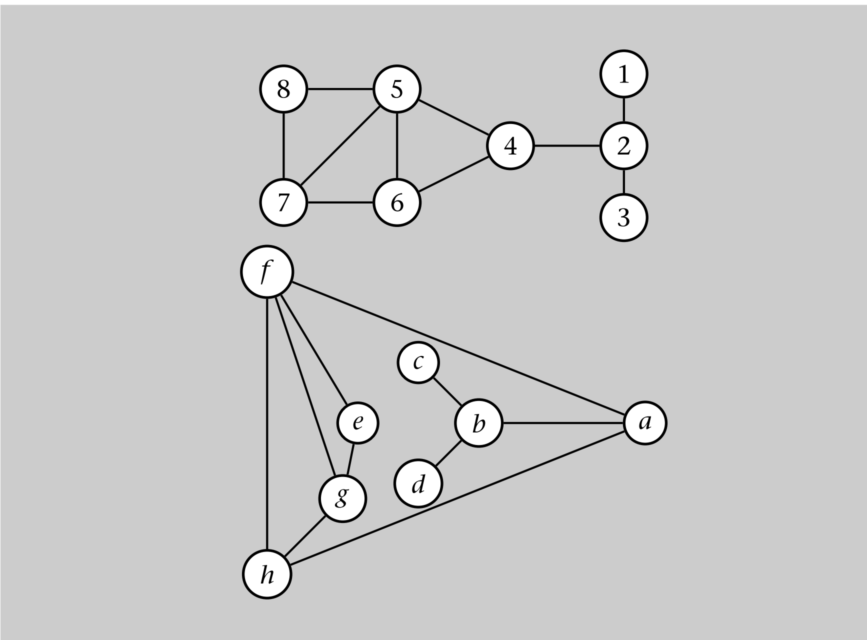


Sea $G_1 = (V_1,A_1)$ el de la izquierda y $G_2 = (V_2,A_2)$ el de la derecha. Se puede comprobar que no son isomorfos: se supone que existe algún isomorfismo $\varphi : V_1 \to V_2$; entonces, dado que los grados de los vértices correspondientes tienen que ser los mismos, la imagen del único vértice de grado 1 de la izquierda tiene que ser el único vértice de grado 1 de la derecha, de manera que $\varphi(1) = a$ y al único vértice de grado 3 de la izquierda debe corresponderle el único vértice del mismo grado de la derecha, de manera que $\varphi(2) = c$. Ahora bien, la adyacencia no se conserva, puesto que $1 \approx 2$ y en cambio las imágenes a, c no son adyacentes. Por lo tanto, no puede haber ningún isomorfismo entre los dos grafos.

Se pueden utilizar otros argumentos sobre la estructura: los dos grafos anteriores no pueden ser isomorfos, puesto que el de la izquierda contiene un ciclo C_5, es decir, un subgrafo isomorfo a un 5-ciclo, lo que no sucede con el de la derecha.

Ejemplo 40

Veamos ahora a continuación un ejemplo de isomorfismo. Se establecerá la correspondencia isomórfica guiados por la conservación de grados, de adyacencias y no adyacencias. Se indica por G_1 el grafo de la izquierda y por G_2 el grafo de la derecha, y se verá como se puede definir $\varphi : V_1 \to V_2$ de manera que sea un isomorfismo.



El proceso de asignación de imágenes pasa por varias fases:

1) Los vértices de grado 1 tienen que tener como imágenes vértices de grado 1. Por lo tanto, hay dos posibilidades (se escogerán la primera y, si conviniera, después se eligiría la segunda):

$$1 \mapsto c \qquad 3 \mapsto d$$

2) El único vértice de grado 4 tiene que tener por imagen el único vértice de grado 4, es decir:

$$5 \mapsto f$$

3) El único vértice de grado 2 tiene que tener como imagen el único vértice de grado 2, es decir:

$$8 \mapsto e$$

4) Falta por asignar las imágenes de los vértices 2,4,6,7, que son de grado 3, a los que corresponderá vértices de grado 3, con criterios de conservación de adyacencias y no adyacencias; 1,3 son adyacentes a 2 y, por lo tanto, la imagen de 2 tendrá que ser adyacente a las imágenes de 1,3, de manera que resultará:

$$2 \mapsto b$$

4 es adyacente a 5,2 y, en consecuencia, la imagen tiene que ser adyacente a las imágenes correspondientes, es decir, a a, de manera que se tendrá

$$4 \mapsto a$$

6 es adyacente a 4,5 y, en consecuencia,

$$6 \mapsto h$$

Finalmente, $7 \mapsto g$ por razones similares.

Una última comprobación permite ver que hay conservación de adyacencias y no adyacencias, y obviamente la correspondencia es biyectiva.

Definición 20

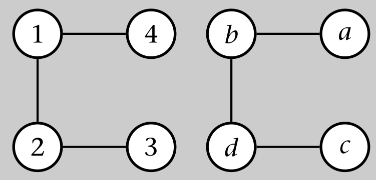
Un grafo es **autocomplementario** si es isomorfo a su complementario.

Ejercicios

36. Dos grafos son isomorfos si, y sólo si, lo son los complementarios respectivos. ¿Cierto o falso?

37. ¿Cómo se relacionan n y r en el caso de grafos de orden n r-regulares autocomplementarios?

38. Estableced una correspondencia isomórfica entre los dos grafos que se muestran a continuación:



Soluciones

36. Cierto (acabad de justificar la respuesta).

37. En estos grafos n tiene que ser impar y $r = (n-1)/2$.

38. Por ejemplo, $\varphi(1) = b$, $\varphi(2) = d$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = a$.

2.4. Extensiones del concepto de grafo (simple)

Hay situaciones que no se pueden modelar a partir de un grafo simple. Por eso, es necesario extender el concepto de grafo a estas situaciones. Y, desde este punto de vista, las definiciones que hemos visto hasta ahora continúan siendo correctas, como extensiones del concepto de grafo simple.

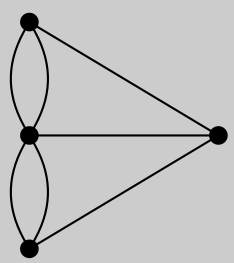
2.4.1. Multigrafos y pseudografos

Definición 21

Un **multigrafo** es un grafo que admite aristas múltiples.

Ejemplo 41

En el caso de los puentes de Königsberg, representado más abajo, aparecen aristas múltiples que conectan una pareja de vértices. También aparece esta situación cuando se considera un grafo de comunicaciones entre localidades y hay más de un camino directo que las comunica.



Nota histórica

El estudio de grafos tiene uno de sus momentos fundacionales en el siglo XVIII, con la formulación por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg: consiste en averiguar si hay alguna manera de organizar un recorrido por la ciudad de Köningsberg, con el mismo punto de llegada que de salida y que pase por todos los puentes (aristas del grafo) sin repetir ninguno.

Definición 22

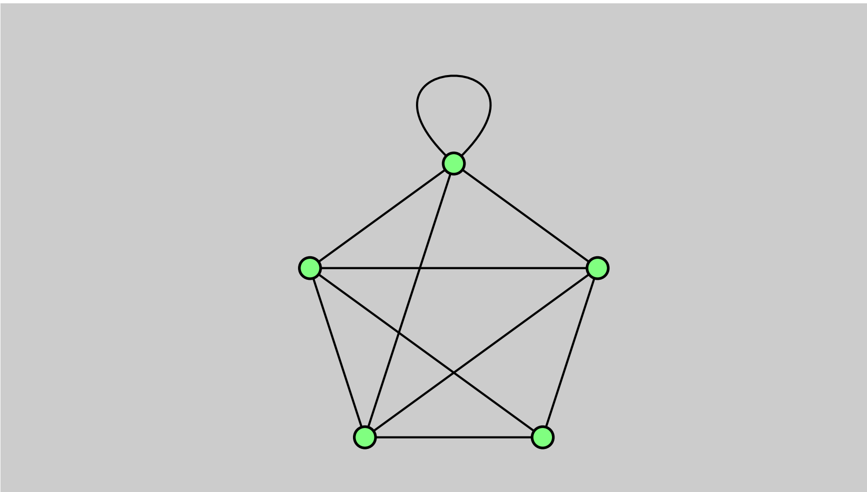
Un **pseudografo** es un grafo que admite aristas del tipo $\{u,u\}$ conectando un vértice consigo mismo (**bucles** o **lazos**), posiblemente de forma múltiple, y también aristas múltiples entre pares de vértices.

Los grados de los vértices se cuentan según la definición original. De ahí que para cada bucle se incrementa en 2 el grado del vértice.

Los grafos *simples* son los que corresponden a la definición original, por contraposición con estas nuevas extensiones.

Ejemplo 42

Esta figura representa un pseudografo:



Ejercicios

39. Indicad la secuencia de grados de los grafos de los puentes de Königsberg.

40. Analizad si la fórmula de los grados se puede extender a los multigrafos y pseudografos.

Soluciones

39. La secuencia de grados del grafo de Königsberg es 3,3,3,5.

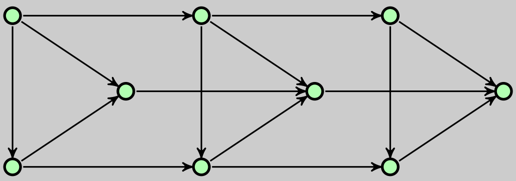
40. Sí (acabad de justificar la respuesta).

2.4.2. Grafos orientados o dirigidos

Existen aplicaciones en las cuales las situaciones no se describen correctamente si no se asignan orientaciones o sentidos de recorrido a las aristas del grafo. Esto da lugar a grafos orientados, también denominados *dirigidos* o *digrafos*.

Ejemplo 43

Esta figura representa un grafo orientado:



Definición 23

- Un **digrafo** (o **grafo dirigido**) $G = (V,A)$ es un par ordenado, en el que V es un conjunto finito y A es un subconjunto del producto cartesiano $V \times V$.
- Un **arco** (o **arista orientada**) es un par ordenado $(u,v) \in V \times V$; en el caso $u = v$, se tiene un bucle orientado. Los arcos (u,v) y (v,u) son diferentes; el **origen** del arco $a = (u,v)$ es el vértice u y el **final** o **extremo** es el vértice v.
- El **orden** del digrafo es el número de vértices y la **medida** es el número de arcos.

Notación

$\{u,v\}$ indica que no hay orden entre u y v, mientras que (u,v) distingue el primer vértice u del segundo v. Utilizaremos $\{u,v\}$ para las aristas de los grafos simples y (u,v) para los arcos de los digrafos.

Definición 24

Para cada vértice $v \in V$ del digrafo se define $g^+(v)$, **grado de salida**, como el número de arcos que tienen el vértice v como origen; o, dicho de otro modo, el cardinal del conjunto $\{(v,u) \mid (v,u) \in A\}$.

Análogamente, el **grado de entrada** $g^-(v)$ es el número de arcos cuyo extremo es el vértice v o, de manera equivalente, el cardinal del conjunto $\{(u,v) \mid (u,v) \in A\}$.

Definición 25

Dado el digrafo $G = (V,A)$, se define el **grafo subyacente** (V,A') de manera que $\{u,v\} \in A'$ si, y sólo si, $(u,v) \in A$ o $(v,u) \in A$.

Se pueden considerar también combinaciones de los conceptos anteriores e híbridos, en los cuales por ejemplo no todas las aristas sean orientadas.

Ejercicios

41. Indicad cuál es el grado de entrada y salida de cada vértice del grafo del ejemplo 43.

42. Formulad una versión para digrafos de la fórmula de los grados expresada en términos de los grados de entrada y de salida de los vértices.

Soluciones

41. Grados de entrada: 0, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 3.
Grados de salida: 3, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 0.

42. $\sum_{v \in V} g^{+}(v) + \sum_{v \in V} g^{-}(v) = 2|A|$ o, precisando más, $\sum_{v \in V} g^{+}(v) = \sum_{v \in V} g^{-}(v) = |A|$.

2.5. Representación y almacenamiento

Ni la representación abstracta ni la representación gráfica de un grafo en el plano son apropiadas para describir el grafo, si se lo quiere manipular mediante un programa; se tienen que proponer métodos alternativos para la descripción y el almacenamiento. En primer lugar, siempre es necesario enumerar los vértices. A continuación, se puede construir la matriz de adyacencias, o bien la lista de adyacencias.

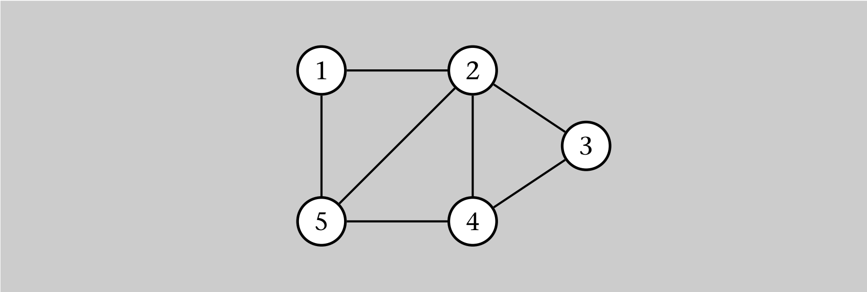
2.5.1. La matriz de adyacencias

Definición 26

Dado el grafo $G = (V,A)$, se define la **matriz de adyacencias** de un grafo simple (relativa a una ordenación de los vértices) como la matriz $B = (b_{ij})$ dada por $b_{ij} = 1$ si, y sólo si, los vértices v_i y v_j son adyacentes y $b_{ij} = 0$, en caso contrario.

Ejemplo 44

La matriz de adyacencias del grafo



será una matriz cuadrada de orden 5×5:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Observación

La matriz de adyacencias de un grafo simple:

- Es simétrica.
- Sólo contiene 0 y 1.
- Tiene la diagonal principal ocupada por 0.

En el caso de multigrafos, pseudografos y grafos orientados, se tiene que tener en cuenta que:

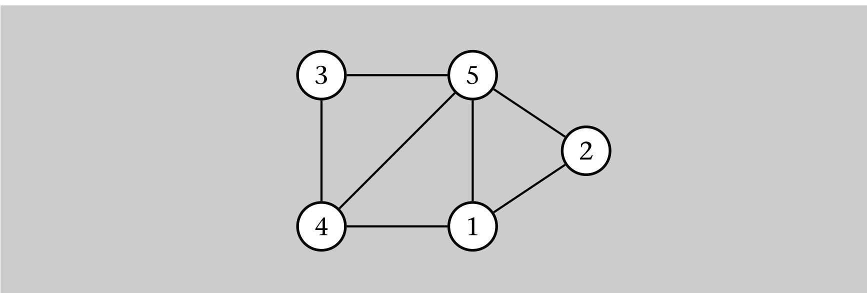
1) Los 0 de la diagonal podrían ser 1 si hubiera lazos.

2) La matriz podría contener valores mayores que uno si hubiera aristas múltiples.

3) La matriz podría no ser simétrica en el caso de grafos orientados.

Ejemplo 45

Este ejemplo muestra cómo la matriz de adyacencias depende de una ordenación determinada de los vértices del grafo. Si se modifica la ordenación de los vértices del grafo del ejemplo anterior se obtiene otra matriz de adyacencias:



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede generalizar el concepto de matriz de adyacencias para multigrafos, pseudografos.

Ejemplo 46

La matriz de adyacencias del grafo de Königsberg es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada posición contiene el número de aristas que conectan los dos vértices correspondientes.

Una de las ventajas de la matriz de adyacencias es la simplicidad de la estructura de datos para el almacenamiento, puesto que se puede almacenar en una tabla (*array*) bidimensional.

Para un grafo de orden n sería,

$$G : \underline{\textbf{tabla}}\ [1\,..\,n, 1\,..\,n]\ \textit{entero}$$

De las características de esta estructura de almacenamiento se pueden deducir las propiedades siguientes:

1) Es una estructura muy fácil de manipular y el tiempo necesario para acceder a cada posición es constante.

2) El espacio necesario para almacenar un grafo de orden n es proporcional a n^2. Como el número de aristas es, como máximo, $\frac{1}{2}n(n-1)$, siempre habrá ceros en la matriz y se tendrá espacio de almacenamiento ocupado innecesariamente.

3) Si el grafo no es dirigido, la matriz será simétrica y todavía se tendrá más espacio ocupado innecesariamente. En estos casos se puede utilizar una **matriz de adyacencias triangular** para almacenar el grafo con un ahorro del 50% en el espacio ocupado.

4) Para realizar un recorrido de todas las aristas del grafo, será necesario hacer $n(n-1)/2$ consultas, independientemente de la medida m del grafo. Igualmente, para visitar los vértices adyacentes a un vértice, será necesario hacer $n-1$ consultas independientemente del grado de este vértice. Por lo tanto, el tiempo que

Observación

La desventaja principal de la matriz de adyacencias es el espacio ocupado de forma innecesaria.

Observación

La ventaja principal de la matriz de adyacencias es la simplicidad estructural.

tardaremos en hacer recorridos será proporcional a n^2 y no a la medida m del grafo.

2.5.2. La lista de adyacencias

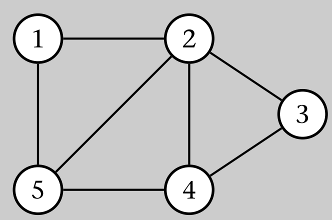
Para conseguir evitar el principal inconveniente de la matriz de adyacencias (el espacio ocupado de manera innecesaria) se puede optar por almacenar el grafo en forma de lista de adyacencias.

Definición 27

Dado el grafo $G = (V,A)$, se define la **lista de adyacencias** de un grafo simple como una lista de vértices adyacentes a un vértice dado.

Ejemplo 47

Para el grafo,



la lista de adyacencias será:

$$\begin{array}{ccl} 1 & : & 2, 5 \\ 2 & : & 1, 3, 4, 5 \\ 3 & : & 2, 4 \\ 4 & : & 2, 3, 5 \\ 5 & : & 1, 2, 4 \end{array}$$

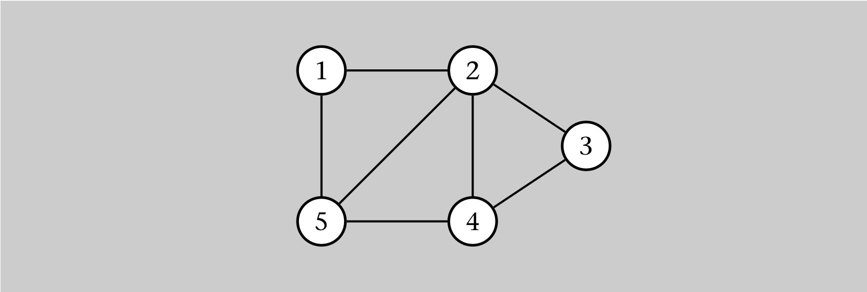
Como en la matriz de adyacencias, la representación depende de la ordenación concreta de los vértices. Además, también se puede generalizar esta estructura para multigrafos, pseudografos y grafos orientados.

Para almacenar la lista de adyacencias se necesita una tabla (*array*) de n punteros, donde el i-ésimo elemento apunta a una lista enlazada de todas las aristas incidentes al vértice i. Para un grafo de orden n sería,

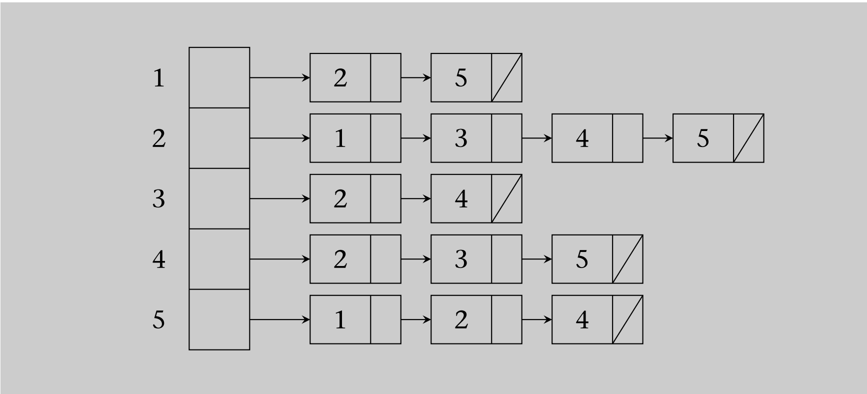
$$G : \underline{\textbf{tabla}}\ [1\,..\,n]\ \underline{\textbf{puntero}}\ \textit{lista de vértices}$$

Ejemplo 48

Para el grafo



la estructura de datos será,



Comparando esta estructura de datos con la de la matriz de adyacencias se observa que:

1) El espacio necesario para almacenar un grafo de n vértices y m aristas, mediante el uso de una lista de adyacencias, es proporcional a $n+2m$ ($n+m$ si el grafo es dirigido).

2) La estructura es más difícil de manipular que la matriz de adyacencias. En particular, el tiempo necesario para comprobar si dos vértices son adyacentes no es constante; es proporcional a g_i, si g_i es el grado del vértice i.

3) La elección de una estructura de datos u otra dependerá de las medidas del grafo y de los algoritmos que tengan que utilizarse. Como regla general, la matriz de adyacencias es adecuada para grafos *densos* (los que tienen muchas aristas), en los que $m \sim n^2$. En cambio, la representación como lista de adyacencias es adecuada para grafos poco densos, aquellos que $m << n^2$.

4) Por otra parte, recorrer las aristas del grafo requiere realizar $2m$ operaciones, tiempo que puede ser inferior al de la representación por matriz de adyacencias si el grafo tiene pocas aristas. Igualmente, es más eficiente el recorrido de los vértices adyacen-

Observación

La desventaja principal de la lista de adyacencias es la dificultad de manipulación.

Observación

La ventaja principal de la lista de adyacencias es la minimización del espacio de almacenamiento.

tes a un vértice, dado que depende del grado de este vértice y no de n. Esto quiere decir que la representación por lista de adyacencias es más rápida para implementar recorridos del grafo.

En la práctica, aunque la lista de adyacencias es más difícil de manipular, tiene mejor comportamiento en la mayoría de los algoritmos.

Ejercicios

43. Escribid las matrices de adyacencias y las listas de adyacencias (con las ordenaciones naturales de los vértices) del grafo nulo N_5, del grafo completo K_5, del grafo bipartito completo $K_{2,3}$, del grafo trayecto T_5, del grafo ciclo C_5, del grafo estrella E_5 y del grafo rueda R_5.

44. Indicad cómo se puede calcular el grado de un vértice a partir de la matriz de adyacencias y a partir de la lista de adyacencias. Indicad, también, el número de operaciones elementales que serían necesarias.

45. ¿Cómo puede detectar un programa los grafos nulos y completos a partir de la matriz de adyacencias?

46. Completad la tabla siguiente, indicando, para cada entrada, qué tipo de representación sería la más adecuada (matriz de adyacencias o lista de adyacencias) y el número de operaciones elementales que serían necesarias para cada uno de los problemas propuestos.

Problema	Representación	Operaciones
Comprobar si el vértice *i* es adyacente al vértice *j*		
Calcular el grado del vértice *i*		
Añadir una arista entre el vértice *i* y el vértice *j*		
Comprobar si el grafo es nulo		
Eliminar la arista entre el vértice *i* y el vértice *j*		
Calcular la medida del grafo		
Comprobar si el grafo es regular		

Soluciones

43. Las matrices de adyacencias y listas de adyacencias para estos casos concretos son las siguientes:

Grafo nulo (N_5)
$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Grafo completo (K_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Grafo bipartito completo ($K_{2,3}$)
$$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Grafo trayecto (T_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Grafo estrella (E_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Grafo rueda (R_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Grafo ciclo (C_5)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo nulo (N_5)	Grafo completo (K_5)	Grafo bipartito completo ($K_{2,3}$)
1 :	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 3, 4, 5
2 :	2 : 1, 3, 4, 5	2 : 3, 4, 5
3 :	3 : 1, 2, 4, 5	3 : 1, 2
4 :	4 : 1, 2, 3, 5	4 : 1, 2
5 :	5 : 1, 2, 3, 4	5 : 1, 2

Grafo trayecto (T_5)	Grafo estrella (E_5)	Grafo rueda (R_5)	Grafo ciclo (C_5)
1 : 2	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 5
2 : 1, 3	2 : 1	2 : 1, 3, 5	2 : 1, 3
3 : 2, 4	3 : 1	3 : 1, 2, 4	3 : 2, 4
4 : 3, 5	4 : 1	4 : 1, 3, 5	4 : 3, 5
5 : 4	5 : 1	5 : 1, 2, 4	5 : 1, 4

44. Si se supone que se calcula el grado del vértice etiquetado i.

Matriz de adyacencias: sumando los términos de la fila i-ésima. Será necesario hacer n operaciones elementales (n sumas).

Lista de adyacencias: contar el número de elementos de la lista i-ésima. Acceder a la lista i-ésima necesita una operación y contar el número de elementos depende del grado g_i del vértice i-ésimo. En total, $g_i + 1$ operaciones elementales.

45. Lo puede detectar comprobando los elementos de la matriz. Si todos son ceros, es el grafo nulo; si todos son 1, excepto la diagonal, entonces el grafo es completo.

46. En esta tabla, n es el orden del grafo, m, la medida y g_i indica el grado del vértice i.

Problema	Representación	Operaciones
Comprobar si el vértice i es adyacente al vértice j	Matriz	1
Calcular el grado del vértice i	Lista	$g_i + 1$
Añadir una arista entre el vértice i y el vértice j	Matriz	1
Comprobar si el grafo es nulo	Lista	n
Eliminar la arista entre el vértice i y el vértice j	Matriz	1
Calcular la medida del grafo	Lista	$2m + n$
Comprobar si el grafo es regular	Lista	$2m + n$

Ejercicios de autoevaluación

1. El Sr. Castillo y su mujer invitaron a cuatro parejas a una fiesta. Cuando todos ya habían llegado, algunas de las personas de la sala saludaron (dando la mano) a otras personas del grupo. Naturalmente, ninguna persona dio la mano a su cónyuge ni ninguna persona dio la mano dos veces a otra persona. Pudo haber personas que no saludasen a nadie.

Al final, el Sr. Castillo, se da cuenta de que ninguno de sus invitados (su mujer incluida) han saludado al mismo número de personas.

Utilizad la teoría de grafos e interpretad y responded a cada una de las preguntas siguientes:

a) ¿Es posible que el Sr. Castillo también diera la mano a un número de personas diferente al de las demás?

b) ¿Es posible que el Sr. Castillo diera sólo un número impar de apretones de manos?

c) ¿Hay alguna persona que no dio la mano a nadie?

d) ¿Cuántas veces dio la mano el Sr. Castillo? ¿Y la Sra. Castillo?

2. Probad que cualquier grafo $G = (V,A)$ con un mínimo de dos vértices siempre tiene un mínimo de dos vértices del mismo grado. En otras palabras, no hay ningún grafo de orden superior o igual a 2 con todos los grados de los vértices diferentes.

3. Dado un grafo $G = (V,A)$, si k_i es el número de vértices de grado i, indicad qué relaciones hay entre: $|A|$, $|V|$, $\sum_{i\geq 0} ik_i$, $\sum_{i\geq 0} k_i$.

4. Sea $G = (V,A)$ un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Probad que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

5. Sea $G = (V,A)$ un grafo de n vértices, t de los cuales son de grado k y el resto, de grado $k+1$. Probar que $t = (k+1)n - 2m$, siendo m el número de aristas.

6. Si $G = (V,A)$ es un grafo bipartito de orden n, ¿cuál será el número máximo de aristas de este grafo?

7. Demostrad que no puede haber ningún grafo con vértices de grados 3, 3, 3, 1.

8. Estudiad si pueden haber grafos con las secuencias de grados siguientes:

a) 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4

b) 6, 3, 3, 2, 2, 2

c) 4, 4, 3, 2, 1

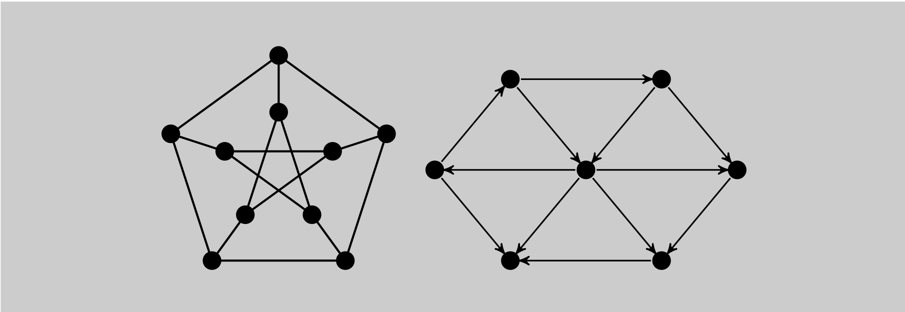
9. ¿Para qué valores de d, entero no negativo, la secuencia siguiente es gráfica?

$$d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$$

10. Si $G = (V,A)$ es un grafo de orden $n = 6$, demostrad que G o su complementario G^c contiene algún triángulo (3-ciclo).

Este resultado es bastante sorprendente si no se interpreta en términos de reuniones y relaciones de amistad o conocimiento mutuo entre asistentes a una reunión: en una reunión de seis personas, o bien hay tres que se conocen dos a dos, o bien hay tres que no se conocen dos a dos

11. ¿Cuál es la representación en matriz y lista de adyacencias de los dos grafos siguientes?

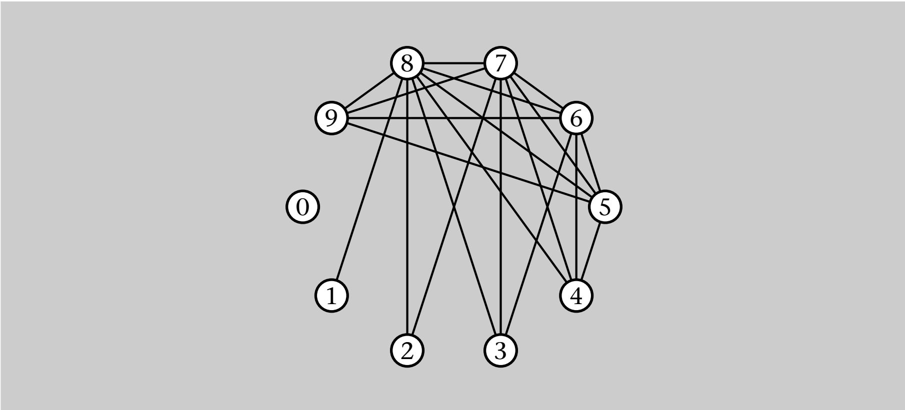


Obtened, también, el espacio ocupado en cada caso.

12. Dependiendo de la medida m de un grafo de orden n puede llegar a ser más eficiente utilizar la representación en matriz de adyacencias que la representación en lista de adyacencias. Calculad, en función de n y m, cuándo es más eficiente utilizar un tipo de representación u otro.

Soluciones

1. A partir de la información del problema puede construirse el grafo que se muestra a continuación:



La respuesta es consecuencia inmediata de las propiedades del grafo.

2. Sea $G = (V,A)$ un grafo de orden n $(n \geq 2)$. Ya que para cada vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq g(v) \leq n-1$, sólo pueden existir los grados $0,1,\ldots,n-1$. Si todos fueran diferentes, éstos tendrían que ser los grados correspondientes a los vértices del grafo. Pero si un vértice tiene grado $n-1$ es imposible que otro tenga grado 0.

Una observación interesante es que este resultado se puede interpretar en términos de reuniones y saludos entre asistentes a una reunión de la manera siguiente: en una reunión donde se saluda hay un mínimo de dos personas que han hecho el mismo número de saludos. Esto es fácil de ver con el modelo siguiente de la reunión en términos de teoría de grafos: los vértices representan los asistentes a la reunión y dos vértices son adyacentes si, y sólo si, las personas correspondientes se saludan. El grado de cada vértice es el número de saludos de la persona correspondiente. Sólo hace falta aplicar el resultado que se ha demostrado.

3. Las relaciones son: $|V| = \sum_{i\geq 0} k_i$ y $2|A| = \sum_{i\geq 0} ik_i$.

4. Por hipótesis se tiene que $g(v) \geq 6$, $\forall v \in V$. Ahora se puede aplicar la fórmula de los grados:

$$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) \geq \sum_{v\in V} 6 = 6|V| \geq 6 \times 10 = 60.$$

Inmediatamente se deriva el resultado que se debe demostrar.

5. Se puede escribir $V = V_k \cup V_{k+1}$, donde V_k es el conjunto de vértices de grado k y V_{k+1} es el conjunto de vértices de grado $k+1$. Aplicando la fórmula de los grados se obtiene la relación $2m = kt + (k+1)(n-t)$. De la relación obtenida se deriva inmediatamente la relación buscada.

6. Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n-x$ será el número de vértices de V_2. El número total de aristas será $x(n-x)$. Por lo tanto, hace falta maximizar la función $f(x) = x(n-x)$. La solución será $\lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$.

7. Se demostrará por medio de dos métodos diferentes,

Método A. Si existe un grafo G con la secuencia de grados 3, 3, 3, 1; también debería existir el grafo G^c con la secuencia de grados 0, 0, 0, 2, obviamente imposible.

Método B. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi:

$$\begin{array}{r} 3, 3, 3, 1 \\ 2, 2, 0 \\ 1,\text{-}1 \end{array}$$

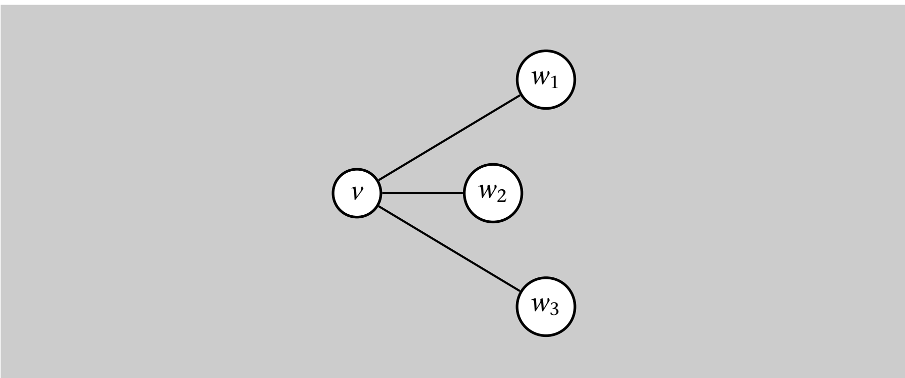
8. **a)** No, porque contradice la proposición 4, consecuencia de la fórmula de los grados.

b) No, porque no cumple la relación $0 \leq g(v) \leq n-1$.

c) No, aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi.

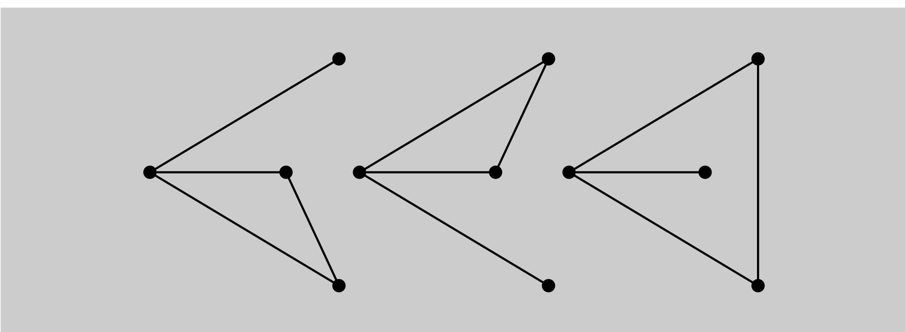
9. La única posibilidad es que $d = 0$ y la secuencia quedaría $0,1,2,\ldots,n-1$. Pero, por la definición de grado, no puede haber un vértice de grado 0 y otro de grado $n-1$.

10. Sea $v \in V$. Se puede suponer que v es adyacente a tres vértices de G, como mínimo. En efecto, si esto no fuera así, es decir, si no hubiera tres vértices adyacentes a v, habría como máximo dos de adyacentes con v y, por lo tanto, quedaría un mínimo de tres no adyacentes con v en G, los cuales serían adyacentes a v en el grafo complementario G^c. Esto quiere decir que, fijado $v \in G$, hay tres vértices adyacentes con v a G, o bien hay tres vértices adyacentes con v a G^c.

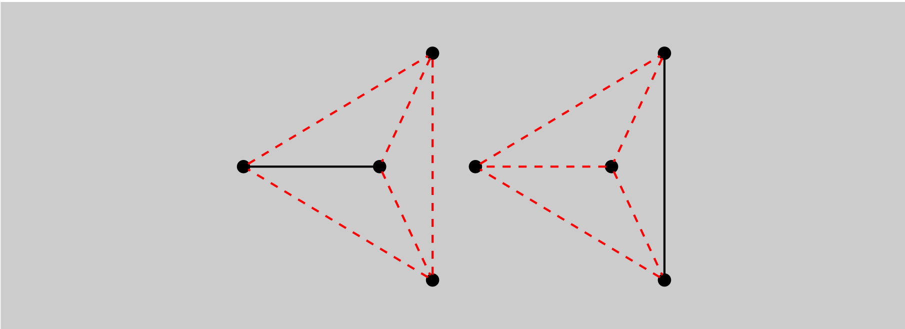


En cualquiera de los casos se seguirían razonamientos similares; por ello, no hay pérdida de generalidad al suponer que v es adyacente con tres vértices a G, como mínimo.

Sean w_1,w_2,w_3 vértices adyacentes con v en el grafo G. Si alguno de los w_i es adyacente a algún otro de los w_j, entonces ya se tiene el 3-ciclo o triángulo, cuya existencia se había que demostrar, como se puede ver en los esquemas que siguen:



De lo contrario, resultará la situación del esquema de más abajo (subfigura izquierda), donde las aristas inexistentes se han indicado con trazo discontinuo; entonces, en el grafo complementario G^c, los vértices w_1,w_2,w_3 son adyacentes dos a dos, demostrando así la existencia de un 3-ciclo, como se ve en la subfigura derecha del esquema siguiente, donde se han indicado con línea discontinua las aristas inexistentes.



11. El primer grafo es el grafo de Petersen que tiene orden 10 y medida 15. En la representación en matriz de adyacencias ocuparía $10^2 = 100$ unidades de memoria. Como lista de adyacencias ocuparía $10 + 2 \cdot 15 = 40$ unidades de memoria.

El segundo grafo es un grafo dirigido de orden 7 y medida 12. En la representación en matriz de adyacencias ocuparía $7^2 = 49$ unidades de memoria. Como lista de adyacencias ocuparía $7 + 12 = 19$ unidades de memoria.

12. La matriz de adyacencias necesita n^2 unidades de memoria. La lista de adyacencias n+2m (si no si tiene en cuenta el espacio necesario para almacenar los enlaces). Por lo tanto, será mejor utilizar la lista si $n + 2m < n^2$ o $m < \frac{n^2-n}{2}$.

Se observa que $\frac{n^2-n}{2}$ es el número de aristas del grafo completo de n vértices. Esto demuestra que la lista de adyacencias siempre ocupa menos memoria que la matriz de adyacencias, excepto cuando el grafo es completo, caso en el que tienen la misma ocupación de memoria.

Bibliografía

Biggs, N. L. (1994). *Matemática Discreta*. (1a. edición, traducción de M. Noy). Barcelona: Ediciones Vicens Vives.