PAC2

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%)

   (a) Demostreu que la molècula $C_nH_{2n+1}OH$ és un arbre per a tot valor natural de n. Recordeu que la valència del carboni és 4, la de l'oxigen 2, i la de l'hidrogen 1.

   (b) Un arbre de 41 vèrtexs té 4 vèrtexs de grau 7, 3 de grau 4, x de grau 3 i la resta són fulles. Quantes fulles té?

   (c) Quantes arestes té com a mínim un graf simple si té 5000 vèrtexs i 50 components?

   (d) Un *pont* és una aresta tal que, si s'elimina, el graf passa a tenir més components. Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf simple G tenen grau parell, aleshores G no conté cap pont.

Solució:

(a) Sigui $G = (V, A)$, on $V = \{$ àtoms $\}$ i $A = \{$ enllaços entre els àtoms $\}$. El graf G és un arbre si, i només si, és connex i $|V| = |A|+1$. Per definició, tota molècula és connexa. A més, $|V| = n+2n+1+2 = 3n+2$ i $2|A| = 4n + 2n + 1 + 2 + 1 = 6n + 4$. Per tant, $|V| = |A| + 1$ i podem dir que aquesta molècula és un arbre.

(b) Denotem per y el nombre de fulles. Aplicant el lema de les encaixades, obtenim $2(41 - 1) = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + x \cdot 3 + y$, o sigui $80 = 40 + 3x + y$. Per altra banda, $41 = 4 + 3 + x + y$. Resolent el sistema obtenim, $x = 3$ i $y = 31$. Per tant, l'arbre té 31 fulles.

(c) El nombre mínim d'arestes es dóna quan tots els components són arbres. Siguin $G_1 = (V_1, A_1), G_2 = (V_2, A_2), \ldots, G_{50} = (V_{50}, A_{50})$ les components connexes del graf, on $|V_i| = |A_i| + 1$ per tot $i = 1, \ldots, 50$. Aleshores, $|V| = \sum_{i=1}^{50} |V_i| = \sum_{i=1}^{50}(|A_i| + 1) = |A| + 50$. Per tant, el nombre d'arestes és $|A| = 5000 - 50 = 4950$.

(d) Sigui $G = (V, A)$ el graf que conté tots els vèrtexs de grau parell i suposem que existeix una aresta $a = (v, w) \in A$ que és un pont. Si eliminem a, el graf resultant té més components. Sigui G' el component que conté v. El subgraf G' conté tots els vèrtexs de grau parell, excepte v que té grau senar. Pel lema de les encaixades, això no és possible, per tant G no conté cap pont.

---

2. (Valoració d'un 20%)

   (a) Sigui T_1 un arbre 6-ari complet de mida 21480. Quantes fulles té l'arbre?

   (b) Sigui T_2 un arbre 4-ari complet amb altura $h = 2$. Si considerem v_1^0 el vèrtex arrel, v_i^1, per $i = 1, \ldots, 4$ els vèrtexs de primer nivell, i v_j^2, per $j = 1, \ldots, 16$ els de segon nivell, doneu el recorregut en BFS i DFS de l'arbre.

   (c) Dibuixeu l'arbre corresponent a l'expressió aritmètica

   $$\frac{2^r - 1}{r - 1} + 1,$$

   tenint en compte la prioritat habitual dels operadors.

   (d) Doneu el recorregut en preordre, inordre i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

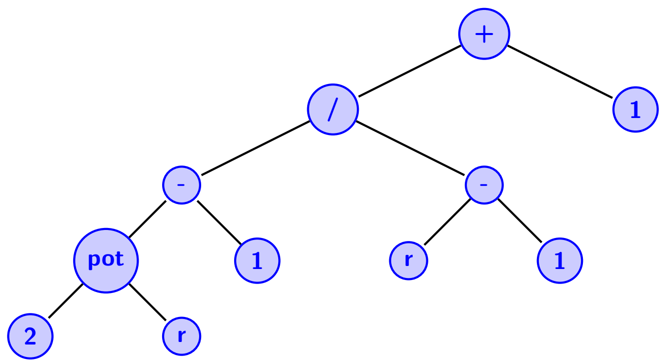
Solució:

(a) Denotem per t el nombre de fulles i per i el nombre de vèrtexs interns. Tenim que $t + i = |V| = |A| + 1 = 21481$. A més, per ser un arbre 6-ari complet tenim que $t = 5i + 1$. Per tant, substituint $i = 21481 - t$ a la segona equació tenim $t = 107405 - 5t + 1$ d'on obtenim $6t = 107406$ o $t = 17901$ fulles.

(b) Els recorreguts serien:

BFS	$v_1^0 v_1^1 v_2^1 v_3^1 v_4^1 v_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 v_5^2 v_6^2 v_7^2 v_8^2 v_9^2 v_{10}^2 v_{11}^2 v_{12}^2 v_{13}^2 v_{14}^2 v_{15}^2 v_{16}^2$
DFS	$v_1^0 v_1^1 v_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 v_2^1 v_5^2 v_6^2 v_7^2 v_8^2 v_3^1 v_9^2 v_{10}^2 v_{11}^2 v_{12}^2 v_4^1 v_{13}^2 v_{14}^2 v_{15}^2 v_{16}^2$

(c) L'arbre és

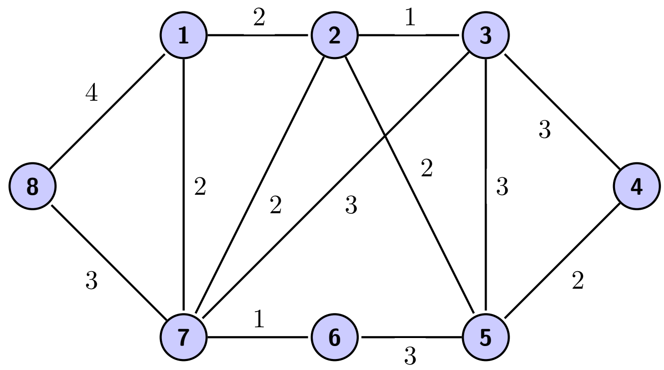


(d) Aquests són els recorreguts:

- Preordre: +,/,-,pot,2,r,1,-,r,1,1;
- Inordre: 2,pot,r,-,1,/,r,-,1,+,1;
- Postordre: 2,r,pot,1,-,r,1,-,/,1,+.

---

3. (Valoració d'un 20%) Considereu el graf

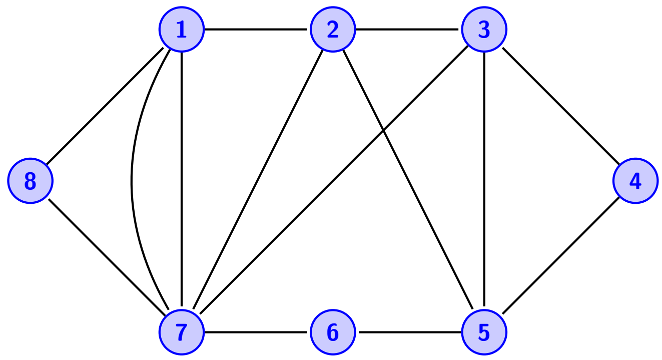


(a) Existeix un circuit eulerià? I un camí eulerià? En cas afirmatiu, doneu un circuit o un camí eulerià fent servir l'algorisme adequat.

(b) Doneu un arbre generador minimal i digueu quin cost té. És únic?

Solució:

(a) Hi ha dos vèrtexs amb grau senar, 1 i 7; per tant, no existeix cap circuit eulerià. Sí que podem trobar un camí eulerià de 1 a 7. Per trobar el camí eulerià, construïm el graf G' afegint l'aresta $\{1,7\}$:



Ara apliquem l'algorisme de Hierholzer per trobar el circuit a G'.

Iteració	v	C'	C
0	1		$\{1\}$
1	1	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,1\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,1\}$
2	2	$\{2,5,3,7,2\}$	$\{1,2,5,3,7,2,3,4,5,6,7,8,1\}$
3	1	$\{1,7,1\}$	$\{1,2,5,3,7,2,3,4,5,6,7,8,1,7,1\}$

El circuit eulerià a G' és $\{1,2,5,3,7,2,3,4,5,6,7,8,1,7,1\}$. Ara eliminem l'aresta $\{7,1\}$ i tenim el camí eulerià a G: $\{1,2,5,3,7,2,3,4,5,6,7,8,1,7\}$.

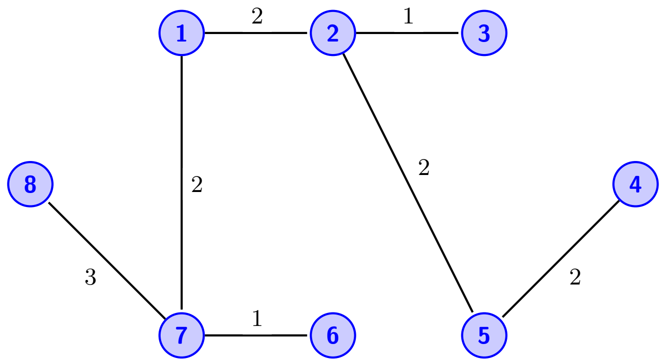
(b) Fem servir l'algorisme de Kruskal. Fem un llistat amb les arestes de menys a més pes:

Arestes	Pesos
$\{2,3\}$	1
$\{6,7\}$	1
$\{1,2\}$	2
$\{1,7\}$	2
$\{2,5\}$	2
$\{2,7\}$	2
$\{4,5\}$	2
$\{3,4\}$	3
$\{3,5\}$	3
$\{3,7\}$	3
$\{5,6\}$	3
$\{7,8\}$	3
$\{1,8\}$	4

Triem les 7 primeres que no formen cap cicle i les marquem amb un asterisc, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Arestes	Pesos
$\{2,3\}^*$	1
$\{6,7\}^*$	1
$\{1,2\}^*$	2
$\{1,7\}^*$	2
$\{2,5\}^*$	2
$\boldsymbol{\{2,7\}}$	
$\{4,5\}^*$	2
$\boldsymbol{\{3,4\}}$	
$\boldsymbol{\{3,5\}}$	
$\boldsymbol{\{3,7\}}$	
$\boldsymbol{\{5,6\}}$	
$\{7,8\}^*$	3
$\{1,8\}$	

Per tant, l'arbre generador és:



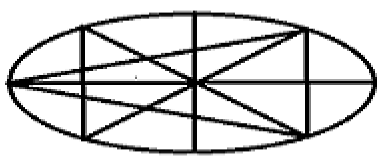
amb pes total 13. Aquest arbre no és únic. Per exemple, si prenem l'aresta $\{2,7\}$ en comptes de l'aresta $\{1,7\}$ tenim un arbre generador minimal diferent.

---

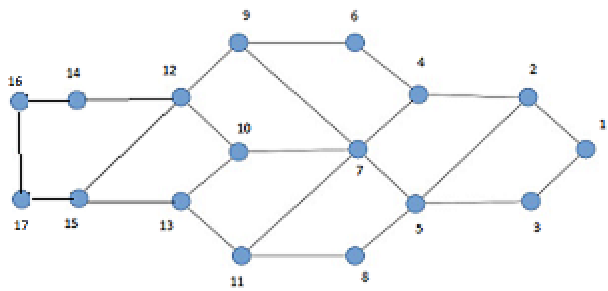
4. (Valoració d'un 20%)

   (a) Sigui $G=(V,A)$ un graf regular d'ordre n parell ($n \geq 4$) que no és complet ni nul, i sigui G^c el seu graf complementari. És cert que almenys un dels dos grafs G o G^c és eulerià?

   (b) Quantes vegades (com a mínim) s'ha d'aixecar el llapis del paper per dibuixar la figura sense repetir cap línia? Justifiqueu la resposta en termes de grafs.



   (c) Determineu si el graf següent té circuit hamiltonià. Si en té, assenyaleu-lo; i si no en té, demostreu-ho usant algun criteri general.



Solució:

(a) Primer de tot, si G és k-regular, aleshores G^c és $(n-k-1)$-regular. Si k és parell, G és eulerià, excepte si $k=0$. Si k és senar, com que n és parell, $n-k-1$ és parell i G^c és eulerià, excepte si $n-k-1=0$, o sigui si G és el graf complet $(k=n-1)$.
L'argument anterior, però, no garanteix que el graf G^c sigui connex, si G és connex. Per exemple, si G és el graf bipartit complet $K_{3,3}$, el seu complementari G^c està format per la unió de dos cicles $C_3 \cup C_3$. En aquest cas, ni $G = K_{3,3}$ ni $G^c = C_3 \cup C_3$ són eulerians, el primer perquè el grau de tots els vèrtexs és senar, i el segon perquè no és connex.

(b) La figura donada es pot interpretar com un graf que conté 6 vèrtexs de grau senar i la resta de grau parell. El nombre mínim de vegades que hem d'aixecar el llapis del paper per dibuixar la figura es pot calcular a partir del mínim nombre de recorreguts eulerians que necessitem per recórrer totes les arestes del graf. Com que hi ha 6 vèrtexs de grau senar, necessitem 3 recorreguts eulerians, i per tant com a mínim hem d'aixecar el llapis 2 cops.

(c) El graf és clarament hamiltonià, ja que $\{1, 2, 4, 6, 9, 12, 14, 16, 17, 15, 13, 10, 7, 11, 8, 5, 3, 1\}$ forma un cicle hamiltonià.

---

5. (Valoració d'un 20%) El nou transportista responsable del sistema de préstec interbibliotecari ha de fer un recorregut per diverses universitats catalanes amb l'objectiu de repartir els llibres demanats en préstec i recollir els que han estat retornats. L'acaben de contractar i abans de mitja hora ha de sortir des de la UAB. Volem determinar un recorregut que passi per totes les universitats una sola vegada i torni a la UAB, i que sigui el més ràpid possible.

	UAB	UB	UPC	URV	UdL	UdG
UAB		30	30	120	80	80
UB			10	75	100	90
UPC				70	100	90
URV					120	150
UdL						155
UdG						

La taula indica el temps en minuts per anar d'una universitat a l'altra.

(a) (5%) Quin problema volem resoldre? Si volem calcular la solució òptima, quants recorreguts hauríem de comprovar com a mínim?

(b) (10%) Apliqueu l'algorisme més adequat per trobar una fita superior. A partir d'aquesta fita superior, trobeu una fita inferior.

(c) (5%) Podeu obtenir una altra fita inferior utilitzant un algorisme diferent al de l'apartat anterior? Justifiqueu la resposta, i en cas afirmatiu trobeu aquesta fita inferior.

Solució:

(a) Es tracta de trobar un cicle hamiltonià de pes mínim, és a dir, una solució al problema del TSP. Com que hi ha 6 ciutats, hauríem de comprovar $5!/2 = 60$ recorreguts i triar el més ràpid.

(b) Utilitzem el TSP-aproximat. Si apliquem l'algorisme de Prim des de la UAB obtenim, en aquest ordre, les arestes (UAB,UB), (UB,UPC), (UPC,URV), (UAB,UdL), (UAB,UdG). L'arbre en preordre queda (UAB,UB,UPC,URV,UdL,UdG). Aleshores el cicle és (UAB,UB,UPC,URV,UdL,UdG,UAB), amb longitud $30 + 10 + 70 + 120 + 155 + 80 = 465$, que és la fita superior. A partir d'aquesta fita superior no podem obtenir la fita inferior donada per la meitat, o sigui 232,5, ja que el graf no compleix la desigualtat triangular. Per exemple, $w(\text{UAB,URV}) = 120 > 30 + 75 = w(\text{UAB,UB}) + w(\text{UB,URV})$.

(c) Podem aplicar l'algorisme de Kruskal, que ens dóna un arbre generador minimal, la longitud del qual és una fita inferior del temps òptim buscat. Aplicant aquest algorisme, obtenim el mateix resultat que amb l'algorisme de Prim, o sigui $30 + 10 + 70 + 80 + 80 = 270$.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 01/05/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**