Universitat Oberta de Catalunya

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

ASIGNATURA: Grafos y Complejidad

Final 1

1. (Valoración de un 12.5+12.5=25 %)

   El mecanismo de identificación de la empresa *Palindromikus* utiliza 3 consonantes (de un abecedario con 20 consonantes) seguidas de 4 cifras para identificar a sus empleados.

   a) ¿Cuántos empleados diferentes se pueden identificar?

   b) ¿Cuántos empleados tendrán la parte literal y la parte numérica capicúa? (es decir, se leen igual comenzando por delante o por detrás).

Solución:

a) En cada posición donde tenemos que colocar una letra tenemos 20 posibles maneras de hacerlo. De manera similar, en las posiciones donde va un número tenemos 10 posibiliades. En total $20^3 \cdot 10^4$.

b) Sólo podemos colocar la letra que queramos en las dos primeras posiciones, ya que la otra vendrá determinada por la que ponemos en la primera posición. En cuanto a las cifras, podemos colocar las que queramos en las dos primeras posiciones, las dos últimas vienen determinadas por las dos primeras. En total: $20^2 \cdot 10^2 = 40{,}000$.

---

2. (Valoración de un 10 + 5 + 10 %)

   Para cada una de las siguientes afirmaciones, decid justificadamente si son verdaderas o falsas:

   a) Existe un árbol T con 7 hojas, 3 vértices de grado 2, 2 vértices de grado 3, 1 vértice de grado 4.

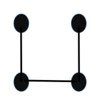
b) Existe un grafo con secuencia de grados $4, 4, 3, 2, 1$.

c) Un grafo con al menos dos vértices puede ser isomorfo a su grafo complementario.

Solución:

a) Falsa. Sabemos que se tiene que cumplir la siguiente igualdad: $2(n-1) = \sum_{v \in V} g(v)$, pero la segunda parte es un número impar, que nunca podrá ser igual al primer término de la igualdad que es par.

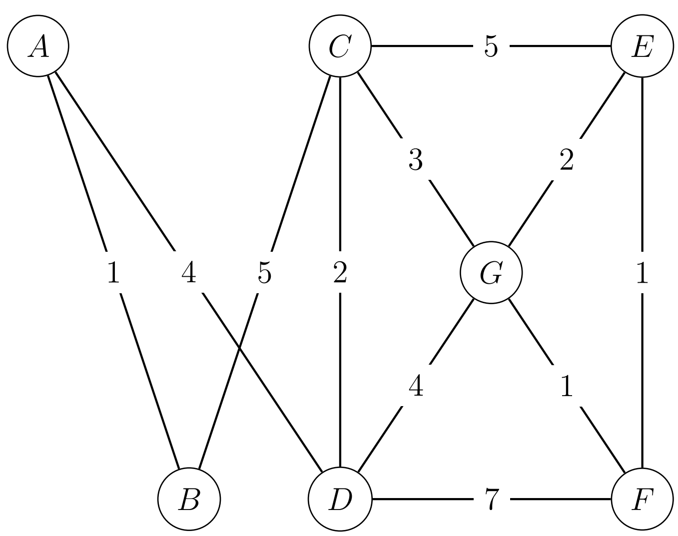
b) Falsa. Si de los cinco vértices, dos son de grado 4, el resto tienen que ser de grado al menos 2, pero uno de los vértices tiene grado 1. También podéis utilizar Havel-Hakimi para ver que no es cierto el enunciado.

c) Verdadera. Este grafo sería un ejemplo: 

---

3. (Valoración de un 10 + 10 + 5 %)

Sea el grafo G



a) Utilizad el algoritmo de Dijkstra en el grafo G con vértice inicial A.

b) Utilizad el algoritmo de Kurskal para obtener el árbol generador minimal del grafo G.

c) ¿Cuál es el camino mínimo para ir de A a F? ¿Qué algoritmo te parece más adecuado para encontrar el camino mínimo: Dijkstra o Kurskal? Justificad la respuesta.

Solución:

a) Los diferentes pasos de Dijkstra comenzando por A serían los siguientes:

A	B	C	D	E	F	G
$(0, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	(∞, A)	$(4, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(6, B)$	$(4, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(6, B)$	$(4, A)$	(∞, A)	$(11, D)$	$(8, D)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(6, B)$	$(4, A)$	$(11, C)$	$(11, D)$	$(8, D)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(6, B)$	$(4, A)$	$(10, G)$	$(9, G)$	$(8, D)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(6, B)$	$(4, A)$	$(10, G)$	$(9, G)$	$(8, D)$

b) La solución de Kurskal es la seguiente con un peso total de 12.

Arestes	**Pesos**	
(A,B)	1	*
(G,F)	1	*
(F,E)	1	*
(C,D)	2	*
(G,E)	2	
(C,G)	3	*
(A,D)	4	*
(D,G)	4	
(B,C)	5	
(C,E)	5	
(D,F)	7	

c) El coste del camino mínimo de F a A es 9: (F,G), (G,D), (D,A). Utilizando el árbol resultante de aplicar Kruskal el camino sería (F,G), (G,C), (C,D), (D,A) con un tiempo de 10. Por tanto, como era de esperar el camino mínimo lo encontramos mediante Dijkstra. Para los que tienen que ir de A a F la mejor solución la tenemos con Dijkstra. Desde un punto de vista de sistema si tenemos que conectar todos los vértices, la mejor solución la da el árbol generado utilizando Kruskal. Es decir, para ir de cualquier punto al vértice A la mejor solución es Dijkstra pero si queremos minimizar el tiempo de viage entre todos los puntos del grafo con el mínimo número de aristas la mejor solución la da Kruskal.

---

4. (Valoración de un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25 %)

   Sean A y B dos problemas cualesquiera tales que $A \leq_p B$. Decid si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y justificad la respuesta:

   a) Si $A \in P$, entonces B también es P.

   b) Si $A \notin P$, entonces podemos asegurar que $B \notin P$.

   c) Si $B \leq_p A$, entonces podemos asegurar que A es Completo.

   d) Si A es NP-Completo, entonces B también es NP-Completo.

Solución:

a) Falso. Si $A \leq_p B$ y $A \in P$ no podemos asegurar que B esté en P. De hecho, podría ser NP o EXP. Como podemos calcular la solución del problema A con un coste polinómico, la función de reducción sería la siguiente:

donde a es una solución de B y b no es solución de B, y podemos precalcular.

b) Cierto. $A \leq_p B$ denota que B es tan difícil como A. Por tanto, si A no es P tampoco lo puede ser B.

c) Falso. Si $A \leq_p B$ y $B \leq_p A$ podemos asegurar que los dos problemas son p-equivalentes. Pero no podemos asegurar que sean Completos para una clase dada.

d) Cierto. Por transitividad si A es NP-Completo entonces B también lo es ya que $A \leq_p B$.

Final 2

1. (Valoración de un 10 +15 =25 %)

   a) Los 25 alumnos de 1º de ESO de una escuela han acabado el examen de matemáticas. Para corregirlo, el profesor propone hacer *peer-review*, es decir, que ellos mismos corrijan los exámenes entre ellos. Para esto recoje los exámenes y los reparten al azar entre los alumnos. Determinad de cuántas maneras puede pasar que el alumno más joven y el más mayor correjan su examen.

   b) Una compañía de teatro interpreta 3 obras de teatro cada año. En ocasiones repite obras de años anteriores, pero nunca repite las mismas tres obras dos años diferentes. Si la compañía hace 25 años que se creó, ¿cuántas obras de teatro se han representado como mínimo? Justificad vuestra respuesta.

Solución:

a) Las maneras en que el alumno más mayor y el más joven corrijan su examen corresponde a todas las maneras de distribuir los 23 exámenes restantes entre los otros 23 alumnos, es decir, $P(23) = 23!$.

b) Sea n el número de obras de teatro que se han representado en estos 25 años. De estas n, cada año explica 3. Dado que en un mismo año no importa el orden en el que se representan las obras, cada año se representan un subconjunto de 3 obras. Queremos encontrar el mínimo valor de n tal que $\binom{n}{3} \geq 25$. Es decir, $n = 7$.

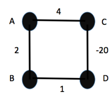
---

2. (Valoración de un 12.5+12.5 %)

   a) El algoritme de Dijkstra se aplica con grafos que tienen pesos positivos. Dad un ejemplo de un grafo que tenga pesos negativos y donde el resultado obtenido al aplicar el algoritmo de Dijkstra no sea la distancia de un vértice en el resto de vértices.

   b) Un grafo G tiene aristes de colores blanco y negro. ¿Cómo aplicarías el algoritmo de Prim para encontrar un árbol generador que tenga el menor número posible de aristas de color negro. Poned un ejemplo.

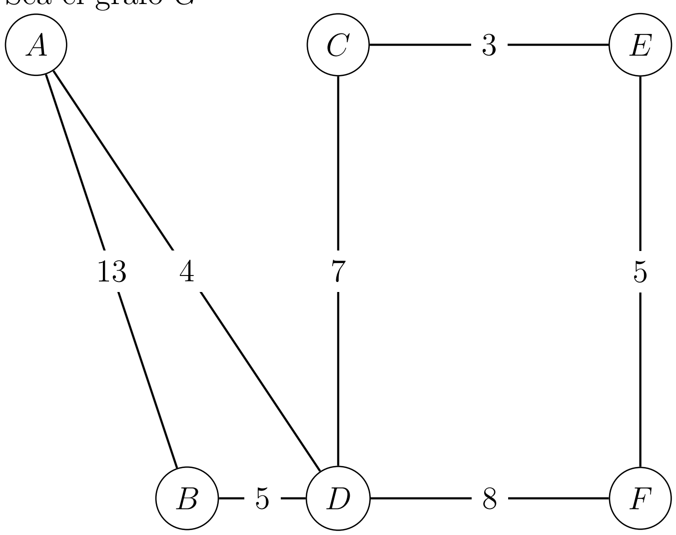
Solución:

a) 

b) Asignad a las aristas blancas el valor 1 y en las aristes negras el valor 2 y aplicad el algoritmo de Prim.

3. (Valoración de un 5 + 10 + 10 %)

Sea el grafo G



a) ¿Cumple el grafo G la desigualdad triangular?

b) Demostrad que el graf G no es un grafo hamiltoniano.

c) Demostrad que el graf G es un graf euleriano.

Solución:

a) El grafo no cumple la desigualdad triangular, ya que para toda terna de vértices u, v no se cumple $w(u,v) \leq w(u,x)+w(x,v)$. Por ejemplo, $w(A,B) \geq w(B,D)+w(D,A)$. Tampoco es completo, por tanto, solo con esta condición ya podemos afirmar que no cumple la desigualdad triangular.

b) El grafo no es 2-conexo y tampoco se cumple que para todo $S \in V$, $S \neq \emptyset$, se verifique que $c(G-S) \leq |S|$ donde $c(G-S)$ son las componentes conexas del grafo G después de eliminar los vértices y aristas incidentes de S.
El grafo no es 2-conexo ya que por ejemplo los vértices A y C no tienen dos caminos disjuntos que los unan. Todos pasan por D. La segunda propiedad tampoco se cumple ya que si eliminamos los vértices B y D obtenemos más de dos componentes conexas.

c) El grafo G es euleriano ya que todos los vértices son de grado par.

---

4. (Valoración de un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25 %)

Sean A y B dos problemas cualesquiera y polinómicamente equivalentes. Decid si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:

a) A y B tienen que ser necesariamente de la clase P.

b) A y B tienen que ser necesariamente de la clase NP.

c) A y B pueden ser $NP - Complets$.

d) A y B tienen que ser necesariamente NP-Difíciles.

Solución:

a) Falso. Pueden ser polinómicamente equivalentes y ser NP-Completos.

b) Falso. Los dos problemas pueden ser de la clase EXP. En este caso, los dos son polinómicamente equivalentes y no son NP.

c) Cierto. Si A y B son NP-Completos entonces por definición son polinómicamente equivalentes.

d) Falso. Por ejemplo, A y B pueden ser de la clase P. Entonces A y B son polinómicamente equivalentes y no son NP-Difíciles.

Final 3

1. (Valoración de un 20 +5 =25 %)

Considerad el siguiente fragmento de pseudocódigo:

$FragmentoCodigo$
$b = 1$
per $i \leftarrow 1$ **fins** $n + 1$
    $a = 0$
    per $k \leftarrow 2$ **fins** $i \leftarrow \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$
        $a = a + 1$
    fiper
    $b = b(a + 5)$
fiper

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera del número x, es decir, $\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z}, \mid k \leq x\}$.

a) En términos de n, ¿cuántas operaciones (sumas y multiplicaciones) en total efectúa este algoritmo si n es un número par?

b) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo?

c) Si $n = 4$, ¿cuál es el valor de b después de que se ejecute este fragmento?

Solución:

a) El bucle externo realiza $n + 1 - 1 + 1 = n + 1$ operacions. Como n es par, $n + 1$ es impar. Así :

- en la iteración $i = n$, el bucle externo finaliza en $k = n/2$.
- en la iteración $i = n + 1$, el bucle externo finaliza en $k = (n + 1 - 1)/2 = n/2$.

El bucle interno realiza una única operación, por tanto, su número de iteraciones coincide con el número de operaciones, que serán $1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (\frac{n}{2} - 2 + 1) + (\frac{n}{2} - 2 + 1) = 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i = 2\frac{(n/2-1)(n/2-1+1)}{2} = n^2/4 - n/2$.

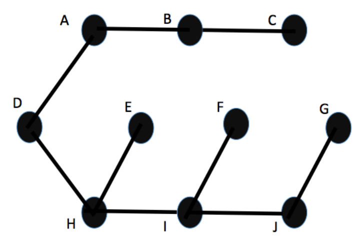
Por tanto, el número total de operaciones será: $n^2/4 - n/2 + 2n + 2 = n^2/4 + 3n/2 + 2$.

b) La complejidad de este fragmento de código es $O(n^2)$.

c) Calcula $b = 5^3 \cdot 6^2$.

2. (Valoración de un 5 + 10 + 10 %)

Supongamos que después de aplicar el algoritmo DFS en un grafo G con vértice inicial D, obtenemos el siguiente árbol:



Decid qué afirmacions son ciertas, justificando las repuestas:

a) El vértice A seguro que se ha visitado antes que el vértice C.

b) El vértice A seguro que se ha visitado antes que el vértice G.

c) El vértice G se puede haber visitado después del vértice A y antes del vértice C.

Solución:

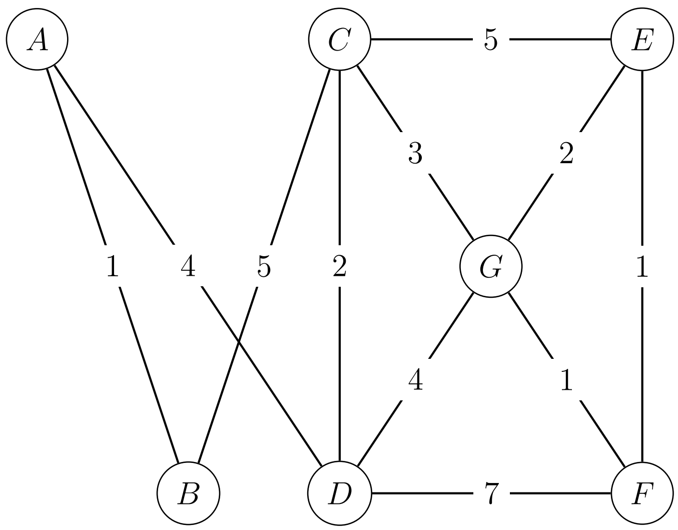
a) Cierto. Antes de visitar un nodo hace falta haber visitado todos sus ascendentes.

b) Cierto. En el algoritmo DFS, se visitan los vértices escogiendo primero siempre el de índice mínimo según la ordenación de los vértices disponibles, por tanto en este caso, visitaría antes A que H y por tanto, que G.

c) Falso. Una vez visita el vértice A entonces visitará todos los descendientes del nodo A antes de retroceder al nodo A.

3. (Valoración de un 10 + 15 %)

   Sea el grafo G



   a) Calculad el árbol generador minimal utilizando el algoritmo de Prim.

   b) Supóned que el grafo se corresponde con una red regional y queremos construir la red de ferrocarril de manera que en todo momento haya el máximo número de ciudades conectadas con el origen mediante el ferrocarril. ¿Qué algoritmo utilizaríais?

Solución:

a) Los pasos del algoritmo son los siguientes.

A	B	C	D	E	F	G
$(0, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	(∞, A)	$(4, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(5, B)$	$(4, A)$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, A)$	(∞, A)	$(7, D)$	$(4, D)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, A)$	$(5, C)$	$(7, D)$	$(3, C)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, A)$	$(2, E)$	$(5, F)$	$(3, C)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, A)$	$(2, E)$	$(1, E)$	$(3, C)$
$(0, A)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, A)$	$(2, E)$	$(1, E)$	$(3, C)$

EL árbol contiene las siguientes aristes $(A, B), (A, D), (D, C), (C, G), (G, E), (E, F)$ con un peso total de 13.

b) Utilizando Kruskal obtenemos el mismo peso pero en el algoritmo de Kruskal el orden en que se incorporan las aristas es diferente. En el algoritmo de Prim las aristas que se van incorporando son conexas con las aristas existentes y con Kruskal se escoge una aresta de peso mínimo que no necesariamente tiene que estar connectada con las aristas existentes. Por tanto, para asegurar que hay el máximo número de ciudades conectadas con ferrocarril utilizaríamos el algoritmo de **Prim.**

---

4. (Valoración de un 6.25 + 6.25 + 6.25 + 6.25 %)

Decid si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:

a) Si $A \leq_p B$ y B es NP-Completo entonces A es NP.

b) Si A es P también es NP.

c) Si $A \leq_p B$ y A es EXP entonces B no puede ser P.

d) Si A tiene una función verificadora con coste polinómico entonces A está en P.

Solución:

a) Cierto. Por definición un problema es NP-Completo cuando todo problema NP se puede reducir a él y el problema es NP. Si B es NP-Completo y A se puede reducir a B, entonces podemos asegurar que A será NP.

b) Cierto. La clase P está incluida dentro de la clase NP. Por tanto todo problema P también es NP.

c) Cierto. No se ha podido demostrar si P es igual a NP, o si NP es igual a EXP. Pero sí que sabemos que $P \subset EXP$. Por tanto, si A es EXP y $A \leq_p B$ por definición B seguro que no es P.

d) Falso. Si podemos verificar una solución con tiempo polinómico entonces solo podemos decir que es NP. No podemos afirmar que sea P.
