PAC3

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinómica dels problemes NP-complets.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Definiu cadascun dels problemes següents en forma de funció, i classifiqueu-los com a problemes de decisió, càlcul o optimització. Reformuleu els de càlcul i els d'optimització com a problemes de decisió i indiqueu a quina classe de complexitat pertanyen:
   (a) Donat un graf $G = (V, A)$ i dos vèrtexs $u, v \in V$, determinar si existeix un camí de u a v.
   (b) Donat un graf $G = (V, A)$ connex, obtenir un arbre generador de G amb el nombre màxim de fulles (vèrtexs de grau 1).
   (c) Donada una llista d'enters ordenada L de longitud n i un enter e, trobar la posició que ocupa e a L.
   (d) Donat un graf $G = (V, A)$, obtenir una partició dels seus vèrtexs, (V_1, V_2), de manera que $TALL(V_1, V_2) = |\{(u, v) \in A \mid u \in V_1, v \in V_2\}|$ sigui màxim.

2. (Valoració d'un 15%) Considereu les fórmules següents,
   - $(a \wedge \bar{b}) \vee c$.
   - $(a \vee \bar{b}) \wedge ((\bar{b} \vee c) \wedge a)$.
   - $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{c}) \wedge (b \vee c)$.
   - $a \vee (b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c)$.

   (a) Trobeu totes les assignacions que satisfan cadascuna.
   (b) Indiqueu quines estan en FNC i quines no. Passeu a FNC les que no ho estan.
   (c) Quines fórmules són possibles entrades del problema SAT? I, un cop passades totes a FNC, quines ho són del problema 3SAT?

3. (Valoració d'un 30%) Volem trobar un arbre generador d'un graf connex en que cap vèrtex tingui un grau major que un cert nombre k. Anomenem al problema ARBGENGAF (arbre generador de grau afitat).
   (a) Descriviu de manera formal el problema ARBGENGAF.
   (b) El problema ARBGENGAF és un problema de decisió, de càlcul o d'optimització? Descriviu de manera formal els altres dos problemes associats.
   (c) Demostreu que el problema ARBGENGAF és verificable en temps polinòmic.
   (d) Expliqueu quines semblances hi ha entre el problema decisional ARBGENGAFDEC corresponent al problema ARBGENGAF i el problema decisional HAM_CYCLE que consisteix en determinar si existeix un cicle hamiltonià en un graf.
   (e) Demostreu que HAM_CYCLE $\leq_p$ ARBGENGAFDEC.
   (f) A partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors, a quina classe de complexitat podem afirmar que pertany el problema ARBGENGAFDEC?

4. (Valoració d'un 20%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:
   (a) El problema "Determinar si existeix un subgraf complet d'un graf G d'ordre k" pertany a NP perquè si ens donen un subgraf complet de k vèrtexs del graf G tenim un testimoni.
   (b) Si $A \leq_p B$ i $B \leq_p A$, aleshores A i B són NP-complets.
   (c) Si A és NP-difícil segur que no és NP-complet.
   (d) Si es demostrés que un determinat problema $A \notin P$ i $A \in NP$ però no és NP-complet, aleshores s'hauria demostrat que $P = NP$.

5. (Valoració d'un 15%) Considereu el problema de la motxilla.

(a) Quina és la solució del problema si $C = 30$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$ amb pesos $w = \{17, 11, 14, 7\}$ i valors $v = \{34, 33, 56, 35\}$?

(b) Sabem que el problema de la motxilla és intractable i per tant, és interessant trobar algorismes que donin una solució aproximada en temps polinòmic. Us donem una heurística voraç perquè la proveu amb l'exemple donat: ordenar els objectes per valor/pes (de major a menor) i anar-los escollint mentre no superem la capacitat total C (els objectes que ens portin a superar-la els rebutgem). Quina és la solució? En cas que retorni l'òptim, doneu un exemple en que no sigui així.

(c) Què haurem de canviar en l'enunciat del problema perquè l'algorisme de l'apartat anterior ens retorni sempre l'òptim? Justifiqueu la resposta.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 18/12/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**