SOLUCIÓ EXAMEN 23 GENER 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Siguin els complexos: $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 1 + 3i, \quad z_3 = 7 + 4i$. Calculeu: $\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{z_1}$ representa el conjugat de z_1.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[3]{2 - 2i}$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica i polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{z_1}$; això és, el conjugat de z_1 que és $2 + i$.

Ara trobem: $\overline{z_1} \cdot z_2$ que és: $(2 + i) \cdot (1 + 3i) = 2 + 6i + i - 3 = -1 + 7i$

A continuació busquem $\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) = -1 - 7i$

I, per últim, calculem:

$$\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3 = (-1 - 7i) \cdot (7 + 4i) = -7 - 4i - 49i + 28 = 21 - 53i$$

Per tant:

$$\boxed{\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3 = 21 - 53i}$$

b) Escrivim el complex $2 - 2i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = arctg(-1) = 315^{\circ}$$

Observem que no sumem ni restem cap quantitat donat que la part real del complex és positiva (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}} = \sqrt{2}_{\frac{315^{\circ} + 360^{\circ} k}{3}} \qquad \text{per a k=0, 1, 2}$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{315^{o}+360^{o}k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=105^{o}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=105^{o}+120^{o}=225^{o}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=105^{o}+240^{o}=345^{o}$

Per tant, les tres arrels terceres del complex $2-2i$ són:

$$\boxed{\sqrt{2}_{60^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 105^{o}+i\sin 105^{o})=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{225^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 225^{o}+i\sin 225^{o})=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1-i}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{345^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 345^{o}+i\sin 345^{o})=}\boxed{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)}$$

Problema 2: Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 2 de R^4 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1+a_2=a_3,\ a_4-a_1=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \mid b_1=b_3,\ b_4=0\}$

I sigui v=(0,5,0,0)

a) (1,25 punts) Comproveu que W={(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calculeu les coordenades en la base anterior.

b) (1,25 punts) Trobeu una base de B i justifiqueu que ho és. Pertany v a B? En cas afirmatiu calculeu les coordenades en la base que heu trobat. Són A i B el mateix subespai vectorial de R^4? Justifiqueu la resposta.

<u>Solució</u>

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 2, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1+a_2=a_3$, $a_4-a_1=0$ per als dos vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no té solució. Per tant v no pertany a A.

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions $b_1 = b_3$, $b_4=0$ per als dos vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs T és una base de B.

Per veure si v pertany a B mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=0,y=5. Per tant les coordenades de v en B en la base que hem trobat són (0,5)

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^4 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

Problema 3: Sigui la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

amb $a \in R$.

a) (1,25 punts) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.

b) (1,25 punts) Discutiu i solucioneu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre *a*.

Solució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
  A la tercera fila restar-li la primera
(2) Operar a les files segona i tercera
(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent a una amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu *M*, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=1,\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & (a+1)^2\\ 1 & 1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0,\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & a-1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x=1, y=0,\ z=0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Problema 4: Sigui f l'aplicació de R^3 en R^3 definida per f(x,y,z)=(2y,2x+3y,2z).

a) (0,5 punt) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.

b) (0,5 punt) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.

c) (0,5 punt) Estudieu si f diagonalitza.

d) (1 punt) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

b) El polinomi característic de f és:

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix}-t & 2 & 0\\ 2 & 3-t & 0\\ 0 & 0 & 2-t\end{pmatrix}.$$

Desenvolupant per l'última columna, obtenim:

$$Q(t)=\det\begin{pmatrix}-t & 2\\ 2 & 3-t\end{pmatrix}(2-t)=[(-t)(3-t)-4](2-t)=(t^2-3t-4)(2-t)=(t-4)(t+1)(2-t).$$

Buscant les arrels del polinomi t^2-3t-4 veiem que són -1 i 4. O sigui, el polinomi característic descompon en el producte de 3 factors reals diferents de grau 1. Els valors propis són -1, 2 i 4, tots tres de multiplicitat algebraica 1 (veure Apunts, mòdul 5, pàgina 28).

c) Com que f té tres valors propis diferents, podem assegurar que f diagonalitza.

d) Trobem vectors propis de f de valor propi -1. És a dir, busquem el nucli de la matriu A-(-1)I=A+I. O sigui, resolem el sistema (A+I)X=0:

$$(A+I)X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema x+2y=0, 2x+4y=0, 3z=0 és (x,y,z)=(-2y,y,0)=y(-2,1,0).

Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 2. És a dir, busquem el nucli de A-2I. O sigui, resolem el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2I)X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema -2x+2y=0, 2x+y=0 és (x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1).

Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 4. És a dir, busquem el nucli de A-4I. O sigui, resolem el sistema (A-4I)X=0:

$$(A-4I)X=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema -4x+2y=0, 2x-y=0, z=0 és (x,y,z)=(x,2x,0)=x(1,2,0).

Tenim que (-2,1,0), (0,0,1), (1,2,0) és una base de R^3 formada per vectors propis de f. Ja sabíem per l'apartat anterior que f diagonalitza i que, per tant, una base d'aquestes havia d'existir.

NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$