# Àlgebra/ Matemàtiques I

## EXAMEN 22/6/2011

1. Realitza els càlculs següents:

   a) Demostra que si $z=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i)$ llavors $z^9=z$.

   b) Escriu en forma binòmica els següents nombres complexos: $4_{135^o}, 3_{\frac{2\pi}{3}rad}$

   c) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^5-243=0$$

<u>Solució:</u>

a) Sí, és veritat. Anem a fer la potència de z que ens demanen, per això primer passem z a polars:

$z=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i)=1_{\frac{\pi}{4}}$ i ara substituïm a l'equació:

$z^9=(1_{\frac{\pi}{4}})^9=1_{\frac{\pi}{4}\cdot 9}=1_{\frac{9\pi}{4}}=1_{\frac{8\pi+\pi}{4}}=1_{2\pi+\frac{\pi}{4}}=1_{\frac{\pi}{4}}=z$. Observem que coincideix amb el que es diu a l'enunciat.

b) $4_{135^o}=4\cdot(\cos(135^o)+i\cdot\sin(135^o))=4\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i$

$$3_{\frac{2\pi}{3}rad}=3\cdot(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}))=3\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2})=-3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$$

c) $x^5-243=0\Rightarrow x^5=243\Rightarrow x=\sqrt[5]{243}$ Si ara passem a polar:

$x=\sqrt[5]{243}\Rightarrow x=\sqrt[5]{243_{0^o}}=3_{(0^o+360^o\cdot k)/5}$ i, per tant, fent k=0,1,2,3,4 trobem que les cinc solucions són: $3_{0^o}, 3_{72^o}, 3_{144^o}, 3_{216^o}, 3_{288^o}$

2. Siguin A i B els subespais de $R^3$ generat pels conjunts de vectors següents:

   $A = <(a,0,0),(-1,0,1),(0,0,1)>$, $a \in R$

   $B = <(1,0,-3),(2,0,2)>$

   a) Troba la dimensió de A en funció d'*a*. Troba la dimensió de B. Troba una base per cada subespai.

   b) Determina si els vectors v=(-4,0,1) i w=(0,1,-3) pertanyen o no a A i a B. En cas que hi pertanyin, calcula'n les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

Solució:

a) Calculem els rang de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 independentment d'*a*. Com a base podríem usar el segon i tercer vectors que són linealment independents (contenen el menor anterior):
$Base - A = \{(-1,0,1),(0,0,1)\}$

Per B: Tenim el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb que està definit: $Base - B = \{(1,0,-3),(2,0,2)\}$

b) Per al vector v=(-4,0,1) i el subespai A tenim el sistema

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} -x = -4 \\ 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=4, y=-3. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (4,-3).

Per al vector v=(-4,0,1) i el subespai B tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 0 = 0 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=-5/4, y=-11/8. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (--5/4,-11/8).

Per al vector w=(0,1,-3) i el subespai A tenim que $w \notin A$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} -x = 0 \\ 0 = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

Per al vector w=(0,1,-3) i el subespai B tenim que $w \notin B$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

3. Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 2 \\ x & + & ay & = & -5 \\ -x & + & 8y & = & 1-6a \end{cases}$$

<u>Resolució.</u>

La matriu del sistema és

$$A \,|\, A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & -5 \\ -1 & 8 & 1-6a \end{array}\right).$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 2$ independentment del valor d'*a*.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem aquest menor amb les diferents possibilitats i estudiem quan s'anul·len:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & -5 \end{vmatrix} = -15+28a-4-7-6a-40 = 22a-66 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 1-6a \end{vmatrix} = 3-18a+224+4+7-48+8-48a = -66a+198 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

Així doncs, tenim:

- Cas I. $a \neq 3 \Rightarrow rang\ A' = 3 \neq rang\ A = 2 \Rightarrow SI$
- Cas II $a = 3 \Rightarrow rang\ A' = 2 = rang\ A \Rightarrow SCD$

I en aquest últim cas la resolució, una vegada eliminades, per exemple, la 1a i la 2a equacions obtenim:

$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ -x + 8y = -17 \end{cases}$ que té solució $x = 1$ i $y = -2$.

4. Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y, z) = (-9x - 2z, 100x + y + 20z, 55x + 12z)$.

   a) Trobeu la matriu $A$ de $f$ en les bases canòniques.

   b) Calculeu el polinomi característic i els valors propis de $f$.

   c) Estudieu si $f$ diagonalitza.

   d) En el cas en que $f$ diagonalitza, trobeu una base formada per vectors propis.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -2 \\ 100 & 1 & 20 \\ 55 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Com que el polinomi característic de $f$ és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}-9-t & 0 & -2\\ 100 & 1-t & 20\\ 55 & 0 & 12-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}-9-t & -2\\ 55 & 12-t\end{vmatrix}=$$

$$(1-t)(t^2-3t+2)=(1-t)(t-1)(t-2)=(1-t)^2(2-t)$$

Els valors propis de $f$ són 1 amb multiplicitat algebraica 2, i 2 amb multiplicitat algebraica 1.

c) La multiplicitat geomètrica del valor propi 1 és:

$$\dim(Nucli(A-I))=3-rang(A-I)=3-rang\begin{pmatrix}-10 & 0 & -2\\ 100 & 0 & 20\\ 55 & 0 & 11\end{pmatrix}=3-1=2.$$

Per tant la multiplicitat algebraica i la multiplicitat geomètrica per al valor propi 1 coincideixen. Per al valor propi 2, com que l'exponent de (2-t) en el polinomi característic és 1, automàticament la multiplicitat algebraica coincideix amb la multiplicitat geomètrica. Es compleixen, doncs, les dues condicions per a que f sigui diagonalitzable: que el polinomi característic de f descomposi en termes lineals i que les multiplicitats geomètriques i algebraiques coincideixin per a tot valor propi.

d) Per trobar els vectors propis de f de valor propi 1 i 2 cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-I)X=0 i (A-2I)X=0. O sigui:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 0 & -2\\ 100 & 0 & 20\\ 55 & 0 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};(A-2I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 0 & -2\\ 100 & -1 & 20\\ 55 & 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Les solucions són els subespais: <(1,0,-5), (0,1,0)> i <(-2,20,11)>, respectivament. La base formada per vector propis de f és doncs.

{(1,0,-5), (0,1,0),(-2,20,11)}.