Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

   Els següents algorismes calculen el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 = n$: Algorisme 1:

```
funció Solucions(n)
  inici
    sol ← 0
    per x1 ← 0 fins n
        per x2 ← 0 fins n
            si x1 + x2 ≤ n aleshores sol ← sol + 1
            fisi
        fiper
    fiper
    retorn sol
  fi
```

   Algorisme 2:

```
funció Solucions(n)
  inici
    sol ← 0
    per x1 ← 0 fins n
        sol ← sol + n − x1 + 1
    fiper
    retorn sol
  fi
```

   Justifiqueu si són certes les afirmacions següents:

   a) El resultat de la crida Solucions(3) usant l'algorisme 2 és 12.

   b) L'algorisme 1 té complexitat $O(n^2)$.

   c) L'algorisme 2 requereix menys operacions que l'algorisme 1, tot i que tots dos tenen complexitat polinòmica.

d) Sabent que el nombre de solucions de l'equació donada és igual a $\binom{n+2}{2}$, podem afirmar que el problema de calcular el nombre de solucions és $O(1)$.

Solució:

a) Fals, és 10. Els valors que adopta la variable *sol* després de cada iteració del bucle són, respectivament, 4, 7, 9 i 10.

b) Cert, ja que executa dos bucles anidats d'n iteracions, i les operacions dins dels bucles tenen cost constant.

c) Cert, ja que l'algorisme 2 té complexitat $O(n)$.

d) Cert, ja que podem calcular un nombre combinatori en temps constant, independentment d'n:

funció *Solucions*(n)
  inici
    $sol \leftarrow (n+2)(n+1)/2$
    retorn *sol*
  fi

---

2. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

Dibuixeu dos grafs d'ordre 6 no isomorfs que compleixin les següents propietats. Justifiqueu en cada cas perquè no són isomorfs. (**Nota:** Cada apartat és independent.)

a) Grafs 2-regulars.

b) Grafs bipartits de mida 6.

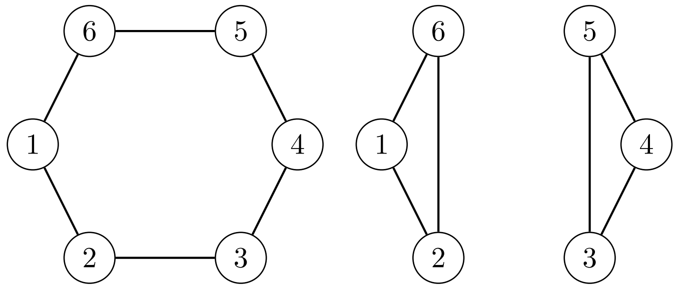
c) Grafs eulerians.

d) Grafs amb seqüència gràfica $[2, 2, 2, 2, 1, 1]$.

e) Arbres binaris.

Solució:

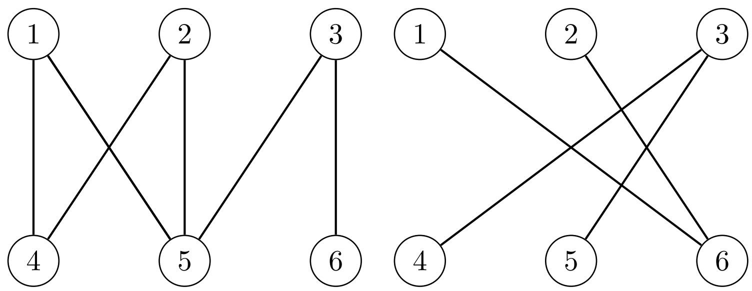
a)



G_1 G_2

No són isomorfs perquè G_1 és connex i G_2 no ho és.

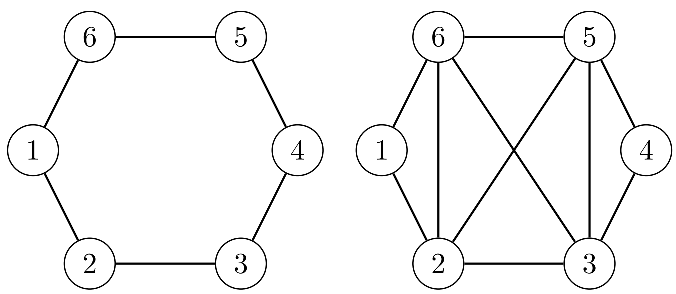
b)



G_1 G_2

No són isomorfs perquè tenen diferent seqüència de graus.

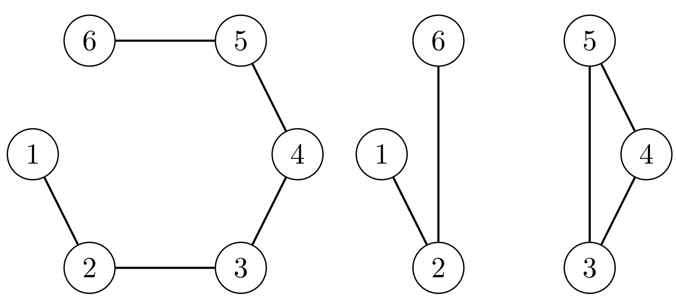
c)



G_1 G_2

No són isomorfs perquè G_1 i G_2 tenen diferent mida.

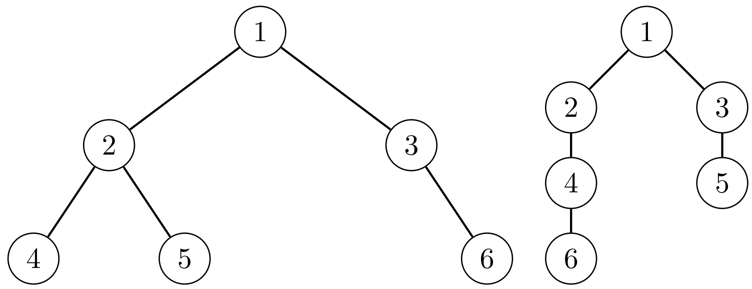
d)



G_1 G_2

No só isomorfs perquè G_1 és connex i G_2 no ho és.

e)



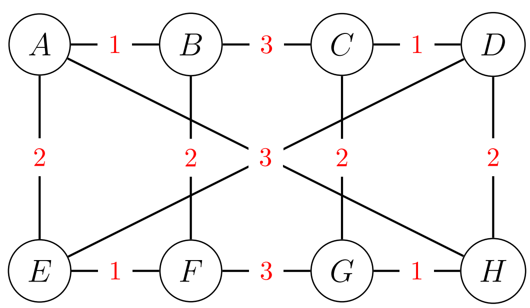
G_1 G_2

No són isomorfs perquè tenen diferent seqüència de graus.

---

3. (Valoració d'un 10+15=25%)

Considerem el següent graf (les dues diagonals tenen cost 3):

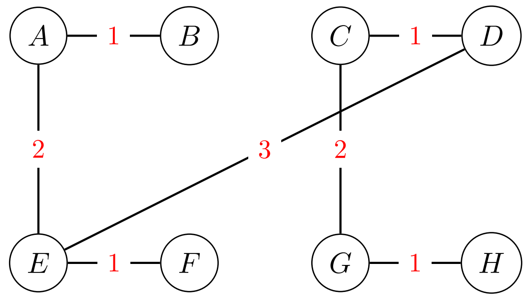


a) Doneu, fent servir l'algorisme corresponent, un arbre generador minimal i digueu quin és el seu cost. Justifiqueu quants arbres generadors minimals diferents podem obtenir.

b) Doneu, fent servir l'algorisme corresponent, la distància mínima del vèrtex B a cadascun dels altres vèrtexs. Doneu el camí de cost mínim de B a la resta de vèrtexs. L'arbre generador que obtenim considerant aquests camins és mínimal?

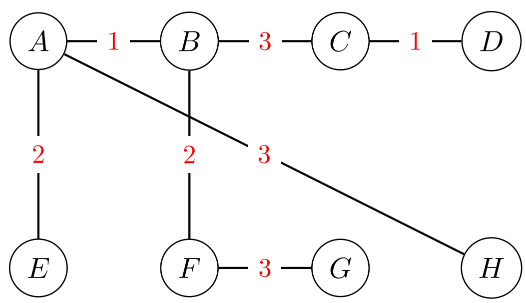
Solució:

a) Aplicant l'algorisme de Kruskal, considerem les arestes $\{(A,B),(C,D),(E,F),(G,H),$ $(A,E),(C,G)\}$:



El cost de l'arbre és 11. Per obtenir l'arbre generador minimal aplicant l'algorisme de Kruskal, necessitem escollir totes les arestes de cost 1, $\{(A,B),(C,D),(E,F),(G,H),(D,E)\}$. De les arestes de cost 2, per tal de no obtenir cap cicle, necessitem escollir una del conjunt $\{(A,E),(B,F)\}$ i una altra del conjunt $\{(H,D),(C,G)\}$. L'aresta que falta s'ha d'escollir del conjunt $\{(A,H),(B,C),(D,E),(F,G)\}$. Per tant, podem fer $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ eleccions diferents i, per tant, podem construir 16 arbres generados minimals diferents.

b) Aplicant l'algorisme de Dijkstra començant pel vèrtex B obtindrem els camins mínims: $B-A$ (1), $B-C$ (3), $B-C-D$ (4), $B-A-E$ (3), $B-F$ (2), $B-F-G$ (5) i $B-A-H$ (4). L'arbre que obtenim és:



El cost total de l'arbre que obtenim és 15 i per tant no és un arbre generador minimal.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

Digueu si les següents afirmacions són certes o falses, justificant la vostra resposta:

a) Si una fòrmula f és una entrada correcta del problema 3SAT aleshores també ho és del problema SAT.

b) L'entrada $\{1, 2, 4, 6, 10\}$ del problema $PARTICIO$ no té solució.

c) Un problema que no pertany a NP no pot ser *NP-difícil*.

d) Si $A \leq_p B$ aleshores A i B no són polinòmicament equivalents.

Solució:

a) Cert. El problema 3SAT és més restrictiu amb les entrades: cada clàusula ha de tenir exactament 3 literals.

b) Cert, ja que la suma de tots els elements és senar. També es pot raonar que el 6 i el 10 haurien d'anar en subconjunts diferents (ja que sumen més que tota la resta), llavors el 4 hauria d'anar amb el 6 (per un argument similar), i seria impossible d'assignar l'1 i el 2 de manera que les sumes dels dos subconjunts fossin iguals.

c) Fals. Només tenim garantit que qualsevol $Prob \in NP$ es pot reduir polinòmicament al problema donat, que tant pot pertànyer com no a NP.

d) Fals. Podria ser que també $B \leq_p A$, i aleshores A i B serien polinòmicament equivalents.

Final 2

1. (Valoració d'un 7.5+7.5+10=25%)

   a) El nostre alfabet consta de 21 consonants i 5 vocals. Quantes paraules de 5 lletres (amb significat o no) es poden formar?

   b) Quantes de les paraules anteriors contenen almenys una vocal?

   c) Considerem ara un altre alfabet amb x lletres en total. Sigui $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funció que a cada x assigna el nombre de paraules de 5 lletres. Demostreu que és injectiva però no bijectiva.

Solució:

a) Hem de calcular el nombre de funcions de $\mathbb{N}_5$ en el conjunt de 26 lletres, o sigui, $VR(26, 5) = 26^5 = 11881376$.

b) Repetint l'apartat anterior, però considerant que només disposem de les 21 consonants, obtenim que el nombre de paraules sense vocals és $VR(21, 5) = 21^5 = 4084101$. El nombre de paraules amb alguna vocal és el resultat de la resta 11881376-4084101=7797275.

c) La funció és $f(x) = x^5$. Aquesta funció és injectiva, ja que si $f(x) = f(y)$ vol dir que $x^5 = y^5$, per la qual cosa $x = y$. D'altra banda no és bijectiva perquè no és exhaustiva, ja que molts elements no tenen antiimatge. Per exemple, cap x verifica $f(x) = 2$.

---

2. (Valoració d'un 25%)

   Justifiqueu si les següents afirmacions són certes o falses.

   a) Existeix una xarxa de 8 ordinadors $\{O_1, O_2, \ldots, O_8\}$ de manera que O_1 està connectat amb la resta, O_2 i O_3 tenen 5 connexions cadascun, O_4, O_5, O_6 i O_7 en tenen 2 i O_8 només està connectat amb O_1.

   b) El graf $C_4 \times T_3$ és eulerià.

   c) El graf amb seqüència gràfica $[3, 3, 3, 3, 2, 1, 1]$ és un arbre.

d) Existeix un graf connex amb la mateixa mida que el seu graf complementari.

e) Tot graf complet és r-regular.

Solució:

a) Fals. La seqüència de graus seria $[7, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 1]$. Si apliquem l'algorisme de Havel i Hakimi tenim:

7,5,5,2,2,2,2,1
4,4,1,1,1,1,0
3,0,0,0,1,0
3,1,0,0,0,0

La seqüència no és gràfica i per tant no pot existir una xarxa amb aquestes propietats.

b) Fals. A $C_4 \times T_3$ hi ha 8 vèrtexs amb grau 3, senar, i per tant no és eulerià.

c) Fals. El graf amb seqüència gràfica $[3, 3, 3, 3, 2, 1, 1]$ compleix que $|V| = 7$ i, pel lema de les encaixades, $|A| = \frac{1}{2}16 = 8$. En aquest cas no tenim que $|A| = |V| - 1$ i el graf no és un arbre.

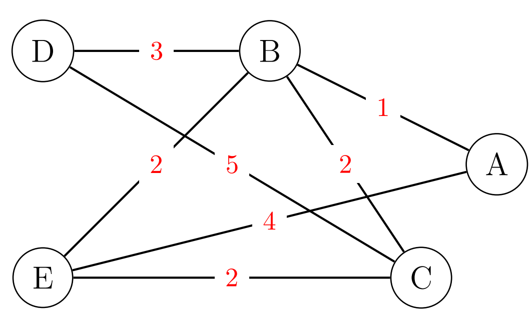
d) Cert. Per exemple, el graf C_5 és un graf d'ordre 5 2-regular. El seu complementari també és 2-regular i per tant té la mateixa mida.

e) Cert. En un graf complet d'ordre n tots els seus vèrtexs tenen grau $n - 1$ i, per tant és un graf $(n - 1)$-regular.

---

3. (Valoració d'un 10+15=25%)

Considereu el següent mapa amb la distància en quilòmetres de les carreteres que uneixen les diferents ciutats.

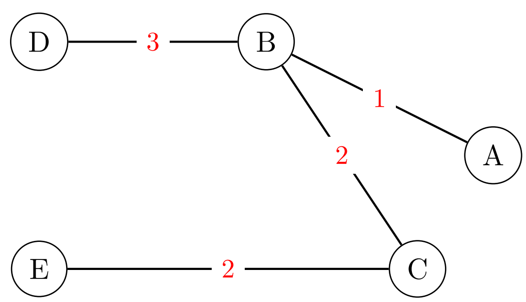


a) Volem asfaltar les carreteres entre les ciutats, però tenim un pressupost molt limitat. Decidim asfaltar carreteres de manera que poguem arribar d'una ciutat a qualsevol altra a través de carreteres asfaltades però que el cost total per asfaltar sigui mínim. Quants quilòmetres de carretera hem d'asfaltar? Amb aquestes carretes asfaltades, obtenim el camí més curt entre qualsevol parella de ciutats?

b) Volem establir la central d'autobusos interurbans a una ciutat de manera que per arribar d'aquesta ciutat a qualsevol altra, la distància mitjana sigui mínima. A quin ciutat ho hem de fer?

Solució:

a) Hem de trobar l'arbre generador minimal del graf. Fent servir l'algorisme de Kruskal, ens quedem amb les arestes $\{(A, B), (B, C), (C, E), (B, D)\}$, asfaltant un total de 8 quilòmetres. El mapa de carreteres asfaltades és



No obtenim el camí mínim entre qualsevol parella de ciutats. Per exemple, entre A i E el camí que obtenim amb les carreteres noves és de 5 quilòmetres però hi ha una carretera directa de distància 4.

b) Aplicant l'algorisme de Floyd obtenim la següent sèrie de matrius:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 2 \\ \infty & 3 & 5 & 0 & \infty \\ 4 & 2 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 2 \\ \infty & 3 & 5 & 0 & \infty \\ 4 & 2 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 2 \\ \infty & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad d^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La distància mitjana serà la suma de cada fila (o columna) dividida per 5:

A	B	C	D	E
2.2	1.6	2.4	3.4	2.4

La ciutat per establir la central d'autobusos és la B.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

   Digueu si les següents afirmacions són certes o falses, justificant la vostra resposta:

   a) La fórmula $(a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{c})$ està en forma normal conjuntiva (FNC).

   b) Un problema resoluble en temps exponencial és intractable.

   c) Un problema $Prob$ és verificable en temps polinòmic si té una funció verificadora v calculable en temps polinòmic.

   d) Si $A \leq_p B$ i $B \notin NP$, aleshores $A \notin NP$.

Solució:

a) Fals, no és una conjunció de clàusules.

b) Fals, ja que pot ser també resoluble en temps polinòmic.

c) Cert, per definició de la classe NP.

d) Fals, per exemple, podria ser que $A \in P$ i $B \in EXPSPACE \setminus NP$. Seria cert a la inversa: si $A \leq_p B$ i $A \notin NP$, aleshores $B \notin NP$.

Final 3

1. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

    a) Volem reproduir un CD de 8 pistes, $\{Pista1, Pista2, ..., Pista8\}$, en ordre aleatori. De quantes maneres diferents es pot fer?

    b) I si només volem que es reprodueixin 5 pistes diferents qualssevol? (també en ordre aleatori)

    c) Quantes de les maneres de l'apartat anterior comencem amb la $Pista1$?

    d) Calculeu el nombre de funcions de $\mathbb{N}_5$ en el conjunt $\{Pista1, Pista2, ..., Pista8\}$.

Solució:

a) Hem de calcular el nombre de permutacions de 8 elements, $P(8) = 8! = 40320$.

b) Ens demanen el nombre de funcions injectives d'$\mathbb{N}_5$ en el conjunt de 8 pistes, $V(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

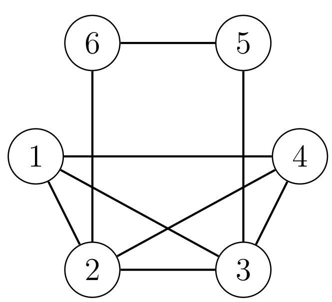
c) Fixada la primera pista, cal escollir-ne 4 més d'entre les 7 restants: $V(7, 4) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

d) És el nombre de 5-mostres amb repetició del conjunt: $VR(8, 5) = 8^5 = 32768$.

---

2. (Valoració d'un 5+5+15=25%)

    Considereu el següent graf G, amb la corresponent taula de pesos.



	1	2	3	4	5	6
1		8	5	1		
2	8		1	3		1
3	5	1		2	1	
4	1	3	2			
5			1			1
6		1			1	

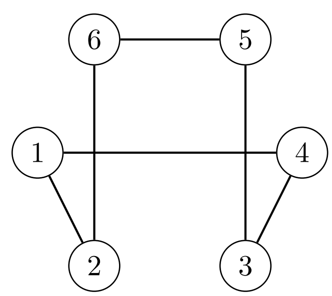
a) Doneu un subgraf r-regular màxim de G, G', que contingui tots els vèrtexs. Digueu si els grafs G i G' són o no bipartits. En cas afirmatiu, doneu la bipartició i en cas negatiu justifiqueu per què.

b) Justifiqueu si G i G' són eulerians o hamiltonians.

c) Doneu, fent servir l'algorisme corresponent, el camí mínim de 1 a 2. Quins són els vèrtexs més llunyans a 1?.

Solució:

a) La seqüència de graus de G ès $[3, 4, 4, 3, 2, 2]$. Per tant el graf r-regular màxim de G ha de complir que $r \leq 2$. El subgraf G' amb $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $A = \{(1, 4), (5, 6), (2, 6), (3, 5), (1, 2)\}$ és 2-regular; per tant, és màxim. El graf G' es:



El graf G no és bipartit ja que té cicles de longitud senar; per exemple $(1, 2, 3)$. En canvi G' sí que és bipartit; podem considerar la bipartició $V_1 = \{1, 3, 6\}$ i $V_2 = \{2, 4, 5\}$.

b) El graf G no és eulerià perquè té dos vèrtexs de grau senar. En canvi sí que és hamiltonià, podem considerar, per exemple, el circuit $(1, 2, 6, 5, 3, 4, 1)$. Aquest darrer circuit és un circuit eulerià i hamiltonià de G'; per tant, G' és eulerià i hamiltonià.

c) Apliquem l'algorisme de Dijkstra per trobar el camí més curt de 1 a 2. La taula és la següent:

1	2	3	4	5	6
(0,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)*	(8,1)	(5,1)	(1,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)	(4,4)	(3,4)	(1,1)*	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)	(4,4)	(3,4)*	(1,1)	(4,3)	(∞,1)
(0,1)	(4,4)*	(3,4)	(1,1)	(4,3)	(5,2)
(0,1)	(4,4)	(3,4)	(1,1)	(4,3)*	(5,2)

El camí mínim de 1 a 2 és $1-4-2$. Mirant la taula, el vèrtex més llunyà és 6 a una distància de 5.

---

3. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

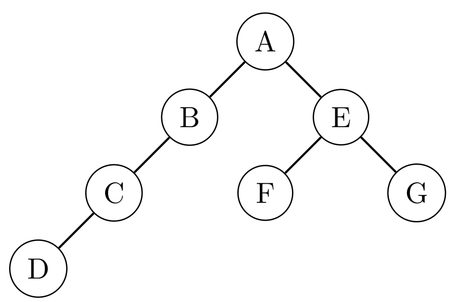
   a) Dibuixeu un arbre binari tal que el seu recorregut en DFS és A, B, C, D, E, F, G i en BFS és A, B, E, C, F, G, D. Doneu el recorregut en postordre de l'arbre obtingut.

   b) Afegiu el mínim nombre d'arestes al graf de l'apartat a) per obtenir un graf eulerià. Doneu el circuit eulerià.

   c) És hamiltonià el graf obtingut a b)? En cas afirmatiu doneu el circuit hamiltonià i en cas negatiu justifiqueu perquè no ho és.

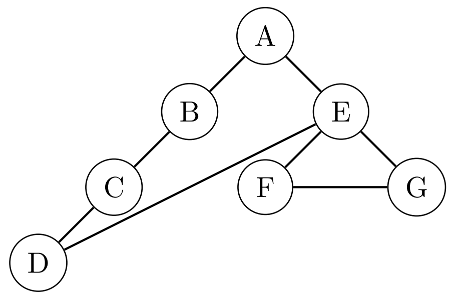
Solució:

a) L'arbre binari que obtenim amb aquests dos recorreguts és:



El recorregut en postordre és D, C, B, F, G, E, A.

b) Com que tenim 4 vèrtexs de grau senar, $\{D, E, F, G\}$ hem d'afegir dues arestes per obtenir un graf eulerià. Com que les arestes (E, F) i (E, G) ja hi són al graf, aleshores afegim les arestes (F, G) i (D, E). El graf que obtenim és:



Un circuit eulerià seria: $D, C, B, A, E, G, F, E, D$.

c) El graf de l'apartat anterior no és hamiltonià. Si eliminem el vèrtex E, aleshores ens queden dues components connexes i, per tant, el graf no compleix les propietats de grafs hamiltonians.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

Digueu si les següents afirmacions són certes o falses, justificant la vostra resposta:

a) Trobar un arbre generador d'un graf connex G és un problema d'optimització.

b) L'algorisme per ordenar un vector anomenat $merge-sort$ té complexitat quasi-lineal.

c) Si $A \in P$, aleshores $A \in NP$.

d) Un problema $Prob$ és resoluble en temps polinòmic si té una funció verificadora v calculable en temps polinòmic.

Solució:

a) Fals, és un problema de càlcul. Seria d'optimització si volguéssim trobar un arbre generador minimal.

b) Cert, ja que és $O(n \cdot \log n)$.

c) Cert, ja que la classe de complexitat P està continguda en NP.

d) Fals. Un problema $Prob$ que té una funció verificadora v calculable en temps polinòmic pertany a NP, però no necessàriament ha de ser resoluble en temps polinòmic (és a dir, pertànyer a P).
