Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **4**

Data de proposta: 9/12/2011 **Data d´entrega:** $\leq$ 19/12/2011

Observacions:

- El nom del fitxer ha de ser ser Cognom1_Cognom2_Nom.pdf
- Per ser avaluada, cal escriure la PAC amb un editor de text i entregar-la en format pdf abans de les 24h del 19/12/2011.
- **En la resolució d´aquesta PAC es pot utilitzar la Wiris** (caldrà afegir la corresponent captura de pantalla amb els comentaris necessaris al document de resolució).
- **Justifiqueu tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**

Valoració:

- Tots els apartats dels tres exercicis puntuen el mateix
- **Aquesta part de la PAC representa el 80% de la nota final de la PAC i el 20% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC4 que trobareu a Questionaris.**

COGNOMS i NOM:
ENUNCIAT

1. **Per a cada nombre real *a*, sigui $f_a : R^2 \to R^4$ l'aplicació lineal definida per**

$$f_a(x,y) = (2x - y, -4x + ay, -2ax + 2y, 8x - 2ay).$$

   a) **Trobeu la matriu A de f_a en les bases canòniques e={(1,0),(0,1)} de R^2 i u={(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)} de R^4.**

   b) **Per a cada *a*, qui és el rang(f_a) ? És f_a injectiva, exhaustiva o bijectiva ?**

2. **Sigui $g : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per**

$$g(x,y,z) = (11x + 6y - 3z, -6x - 2y + 2z, 16x + 9y - 4z).$$

   a) **Trobeu la matriu A de g en les bases canòniques.**

   b) **Calculeu el polinomi característic de g i els valors propis de g.**

   c) **Estudieu si g diagonalitza.**

   d) **Trobeu una base de R^3 que contingui almenys dos vectors propis de g.**

3. **Sigui H l'hexàgon de vèrtexs** $(3,0), (2,\sqrt{3}), (0,\sqrt{3}), (-1,0), (0,-\sqrt{3}), (2,-\sqrt{3})$.

   a) **Trobeu un punt (a,a) des del qual un escalatge horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3 transforma l'hexàgon en un poligon que té un vèrtex en el punt (-3,-2). Dibuixeu el polígon resultant.**

   b) **Calculeu les coordenades de l'hexàgon en fer un gir de 90º, en sentit antihorari, entorn del punt (0,0).**

Resolució:

1. a) La matriu A de f_a en les bases canòniques e={(1,0),(0,1)} de R^2 i u={(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)} de R^4 és :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & a \\ -2a & 2 \\ 8 & -2a \end{pmatrix}.$$

b) Considerem el determinant format per les dues primeres files i columnes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & a \end{vmatrix} = 2a-4.$$

Aquest determinant és zero si i només si a=2. Així, doncs,

1r cas. $a \neq 2$: el rang de A és 2 perquè el menor format per les dues primeres files té determinant no nul. Per tant, rang(f_a)=2. Com que dim(R^2)= dim(Nuc(f_a))+rang(f_a), aleshores, la dim(Nuc(f_a))=0. Per tant, f_a és injectiva (perquè el seu nucli és zero) i f_a no és exhaustiva (perquè la dimensió de la imatge de f_a és 2, i en canvi la dimensió de l'espai d'arribada és 4). A més a més, f_a no és bijectiva perquè no és exhaustiva.

2n cas. $a = 2$: ara la matriu queda:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \\ -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Clarament, ara el rang és 1 i rang(f_a)=1. Com que dim(R^2)= dim(Nuc(f_a))+rang(f_a), aleshores, la dim Nuc(f_a)=1. Per tant, f_a no és injectiva (perquè el nucli no és zero) i f_a no és exhaustiva (perquè la dimensió de la imatge de f_a és 1 i en canvi la dimensió de l'espai d'arribada és 4). Com que f_a no és injectiva (ni exhaustiva), tampoc no és bijectiva.

2. a) La matriu A de g en les bases canòniques és :

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & 2 \\ 16 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) El polinomi característic de g és:

$$q(t)=\begin{vmatrix} 11-t & 6 & -3 \\ -6 & -2-t & 2 \\ 16 & 9 & -4-t \end{vmatrix}=$$

$$(11-t)(-2-t)(-4-t)+(-6)9(-3)+16\cdot 6\cdot 2-16(-2-t)(-3)-(-6)6(-4-t)-(11-t)9\cdot 2=$$

$$(-t^3+5t^2+58t+88)+162+192-(96+48t)-(144+36t)-(198-18t)=-t^3+5t^2-8t+4.$$

Busquem ara les arrels d'aquest polinomi. Si busquem arrels enteres cal que divideixen el terme independent. Provant el 2, veiem que 2 és arrel doble de q(t). Concretament:

$$q(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4 = (2-t)^2(1-t).$$

Així, doncs, el polinomi característic de g descomposa en factors lineals. Per tant, es compleix la primera condició de diagonalització. A més a més, veiem que el 2 és valor propi de g de multiplicitat algebraica 2 i el 1 és valor propi de g de multiplicitat algebraica 1.

c) Per veure si g diagonalitza, cal veure si es compleix també la segona condició de diagonalització: que per a tot valor propi de g, la seva multiplicitat geomètrica coincideix amb la multiplicitat algebraica.

Per al valor propi 1, la multiplicitat geomètrica sempre és com a mínim 1, i com que com a màxim és la multiplicitat algebraica, en aquest cas, la multiplicitat geomètrica del valor propi 1 només pot ser igual a 1.

Per al valor propi 2, que té multiplicitat algebraica 2, hem de calcular la multiplicitat geomètrica, que d'entrada pot ser 1 o 2. Si és 1, no diagonalitzarà. Si és 2, si que diagonalitzarà. Calculem-la doncs. Sabem que la multiplicitat geomètrica del valor propi 2 es calcula de la forma següent:

$$\dim(Nuc(A-2I)) = 3 - rang(A-2I) = 3 - rang\begin{pmatrix} 11-2 & 6 & -3 \\ -6 & -2-2 & 2 \\ 16 & 9 & -4-2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - rang\begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -6 & -4 & 2 \\ 16 & 9 & -6 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Així, doncs, la multiplicitat geomètrica del valor propi 2 és 1 i no coincideix amb la seva multiplicitat algebraica. Per tant, g no diagonalitza.

d) Calculem els vectors propis de valor propi 1. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-1·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A-I)X=0. Fem-ho doncs:

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 16 & 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector: (3,-2,6).

Calculem ara els vectors propis de valor propi 2. Per a això cal calcular una base del Nuc(A-2·I). O sigui, hem de resoldre el sistema (A-2I)X=0. Fem-ho:

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -6 & -4 & 2 \\ 16 & 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base solució d'aquest sistema és la formada pel vector: (3,-2,5).

Com que g no diagonalitza, no podem trobar una base de R^3 formada per vectors propis de g. Ara bé, el que sí que podem fer es agafar una base que contingui els dos vectors propis (3,-2,6) i el (3,-2,5), perquè són linealment independents.

Aleshores, una base de R^3 amb el màxim nombre de vectors propis de g és la formada per aquests dos i un tercer vector que sigui linealment independent amb aquests dos. Per exemple: (1,0,0), (3,-2,6), (3,-2,5). També funcionaria la base: (0,1,0), (3,-2,6), (3,-2,5). En canvi, no podem agafar el conjunt de vectors: (0,0,1), (3,-2,6), (3,-2,5), perquè aquests tres no són base.

3. a) Per fer un escalatge des del punt (a,a), primer cal portar el punt (a,a) a l'origen. Per a això necessitem la matriu de la translació T que transporta el (a,a) a l'origen. O sigui:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després hem de fer l'escalatge horitzontal de raó 2 i vertical de raó 3. La matriu és:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després cal desfer la translació, o sigui, aplicar la inversa de T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Composant les tres transformacions, obtenim la matriu:

$$T^{-1} \cdot E \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a \\ 0 & 3 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara els transformats dels vèrtexs de l'hexàgon H:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -a \\ 0 & 3 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-a & 4-a & -a & -a-2 & -a & 4-a \\ -2a & -2a+3\sqrt{3} & -2a+3\sqrt{3} & -2a & -2a-3\sqrt{3} & -2a-3\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imposant que un dels vèrtexs sigui el punt (-3,-2) l'única possibilitat és que sigui el quart vèrtex i s'aconsegueix per al valor a=1. Per tant, el punt buscat és el (1,1).

b) La matriu del gir de 90º, entorn del punt (0,0), és:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Els transformats dels vèrtexs de l'hexàgon H pel gir G són, doncs:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L’hexàgon obtingut és el de vèrtexs: $(0,3),(-\sqrt{3},2),(-\sqrt{3},0),(0,-1),(\sqrt{3},0),(\sqrt{3},2)$.