Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Semestre Tardor 2017

Final 1

1. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

   (a) Quantes paraules diferents de longitud 3 podem construir sobre un alfabet de 10 símbols? I de com a màxim longitud 5 sobre el mateix alfabet?

   (b) Considereu el següent algorisme:

```
funció SumaN(n)
  inici
    suma ← 0
    per i ← 1 fins n
        suma ← suma + i
    fiper
    retorn suma
  fi
```

   i) Calculeu, en funció d'n, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme i la seva complexitat. Ompliu una taula mostrant el nombre d'operacions per a cada línia de l'algorisme.

   ii) Doneu un algorisme alternatiu que tingui una complexitat inferior, sabent que $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

Solució:

(a) Com que l'alfabet té 10 elements, aleshores el nombre de paraules diferents és $VR(10, 3) = 10^3 = 1000$. Si com a màxim considerem paraules de longitud 5, el nombre de paraules diferents és $\sum_{i=1}^{5} VR(10, i) = 10+10^2+10^3+10^4+10^5 = 111110$.

(b) i) La següent taula mostra el nombre d'operacions que es fan a cada línia de l'algorisme:

Línia	Cost
3	1
4	$2n+2$
5	$2n$
7	1
Total	$4n+4$

En total, l'algorisme efectua $4n+4$ operacions i per tant la complexitat és $O(n)$.

ii) Un algorisme alternatiu seria el següent:

```
funció SumaN2(n)
  inici
    retorn n · (n + 1)/2
  fi
```

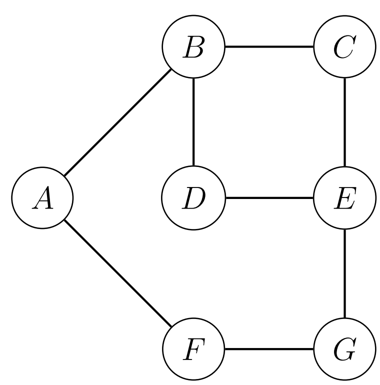
Com que el nombre d'operacions és 4, la complexitat és $O(1)$ que és inferior a l'anterior.

---

2. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%)

(a) Considereu la seqüència (no necessàriament ordenada) de graus 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x d'un graf simple G. Determineu el valor de x per tal que el graf correspongui a un arbre.

(b) Considereu el següent graf:



Responeu les següents preguntes:

i) És bipartit? En cas negatiu justifiqueu per què no ho és i en cas afirmatiu doneu una partició del conjunt de vèrtexs.

ii) És eulerià? En cas negatiu justifiqueu per què no ho és i en cas afirmatiu doneu un circuit eulerià.

iii) És hamiltonià? En cas negatiu justifiqueu per què no ho és i en cas afirmatiu doneu un circuit hamiltonià.

Solució:

(a) Com que l'arbre G conté 16 vèrtex, el nombre d'arestes és 15. Per la fórmula dels graus, tenim que $3+3+3+3+3+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+x = 2 \cdot 15$ i per tant $x = 3$.

(b) i) El graf sí que és bipartit amb la següent partició de vèrtexs: $V_1 = \{A, C, D, G\}$ i $V_2 = \{B, E, F\}$.

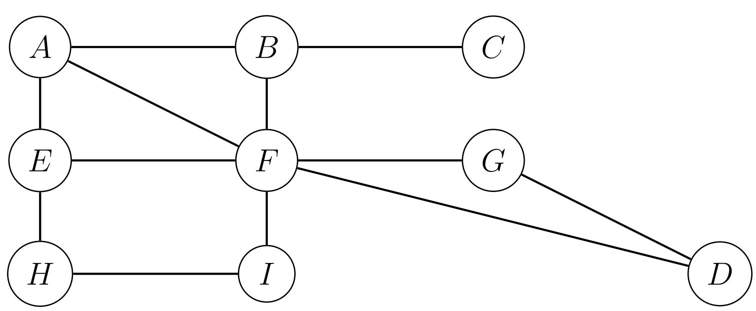
ii) Per determinar si el graf és o no eulerià, comprovem si tots els vèrtexs tenen o no grau parell. Al graf hi ha vèrtexs de grau senar, els vèrtexs B i E, per tant, no és eulerià.

iii) Com que el graf és bipartit, i els dos conjunts de la bipartició no tenen el mateix nombre d'elements, podem concloure que tampoc és hamiltonià.

---

3. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

Sigui $G = (V, A)$ el graf següent:



Considereu que totes les arestes tenen el mateix cost. En els dos primers apartats, en cas de poder escollir més d'un vèrtex en el mateix pas de l'algorisme, trieu primer aquell que té una lletra menor en ordre lexicogràfic (o sigui, en l'ordre $A, B, C, D, E, F, G, H, I$).

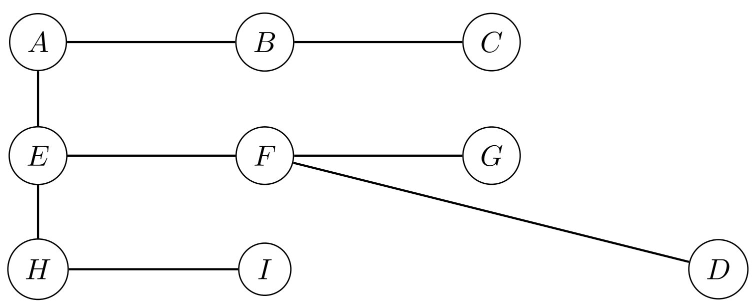
(a) Aplicant l'algorisme BFS a partir del vèrtex H, trobeu un recorregut dels vèrtexs del graf (**Nota:** No cal donar la taula de l'algorisme). A partir d'aquest resultat, doneu un arbre de distàncies començant pel vèrtex H.

(b) Aplicant l'algorisme de Dijkstra, doneu un arbre de distàncies per al graf G començat pel vèrtex H.

(c) Alguns dels arbres generadors obtinguts en els apartats anteriors és minimal? Justifica la resposta.

Solució:

(a) Aplicant l'algorisme BFS a partir del vèrtex H, el recorregut dels vèrtexs del graf és $[H, E, I, A, F, B, D, G, C]$, i obtenim el següent arbre de distàncies:



Encara que no es demana en l'enunciat, els passos de l'algorisme són els següents:

Q	Vèrtex afegit	Vèrtex eliminat	R	distància
H	H		H	1
H,E	E		H,E	1
H,E,I	I		H,E,I	1
E,I	-	H	H,E,I	1
E,I,A	A	-	H,E,I,A	2
E,I,A,F	F	-	H,E,I,A,F	2
I,A,F	-	E	H,E,I,A,F	2
A,F	-	I	H,E,I,A,F	2
A,F,B	B	-	H,E,I,A,F,B	3
F,B	-	A	H,E,I,A,F,B	3
F,B,D	D	-	H,E,I,A,F,B,D	3
F,B,D,G	G	-	H,E,I,A,F,B,D,G	3
B,D,G	-	F	H,E,I,A,F,B,D,G	3
B,D,G,C	C	-	H,E,I,A,F,B,D,G,C	4
D,G,C	-	B	H,E,I,A,F,B,D,G,C	4
G,C	-	D	H,E,I,A,F,B,D,G,C	4
C	-	G	H,E,I,A,F,B,D,G,C	4
$\emptyset$	-	C	H,E,I,A,F,B,D,G,C	4

(b) Aplicant l'algorisme de Dijsktra a partir del vèrtex H, obtenim la següent taula:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	$(0,H)$	(∞,H)
(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	$(1,H)$	(∞,H)	(∞,H)	$(0,H)^*$	$(1,H)$
$(2,E)$	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)	$(1,H)^*$	$(2,E)$	(∞,H)		$(1,H)$
$(2,E)$	(∞,H)	(∞,H)	(∞,H)		$(2,E)$	(∞,H)		$(1,H)^*$
$(2,E)^*$	$(3,A)$	(∞,H)	(∞,H)		$(2,E)$	(∞,H)		
	$(3,A)$	(∞,H)	$(3,F)$		$(2,E)^*$	$(3,F)$		
	$(3,A)^*$	$(4,B)$	$(3,F)$			$(3,F)$		
		$(4,B)$	$(3,F)^*$			$(3,F)$		
		$(4,B)$				$(3,F)^*$		
		$(4,B)^*$						

i per tant l'arbre de distàncies és el mateix que obtenim en l'apartat anterior.

(c) Sí, tots són arbres generadors minimals. En un graf amb n vèrtexs, si totes les arestes tenen el mateix cost, c, tots els arbres generadors són també arbres generadors minimals de cost $(n-1)c$.

4. (Valoració d'un 7.5+7.5+10=25%)

   (a) Digueu si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la resposta:

      i) Si A és NP-Difícil, aleshores A és NP-Complet.

      ii) Si A té complexitat $O(n^5)$ i és polinòmicament equivalent a un altre problema B, aleshores B pot tenir complexitat $O(\log n)$.

   (b) Passeu la fórmula $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a FNC i digueu si és o no satisfactible i, en cas afirmatiu, doneu un testimoni.

Solució:

(a) i) Falsa, és certa justament la inversa: si A és NP-Complet, aleshores A és NP-Difícil. Podria ser NP-Difícil; i.e. $\forall B \in NP$, $B \leq_p A$, però si $A \notin NP$ aleshores no és NP-Complet.

   ii) Certa, ja que si són polinòmicament equivalents, els dos pertanyen a la mateixa classe de complexitat. Dins de la classe P hi ha els problemes amb complexitat $O(n^5)$ i $O(\log n)$.

(b) En FNC seria $a \wedge (b \vee c)$. És satisfactible pels valors $a = 1, b = 0, c = 1$; per $a = 1, b = 1, c = 0$; i per $a = 1, b = 1, c = 1$.

Final 2

1. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

   (a) Quantes paraules diferents de longitud 7 podem construir sobre un alfabet de 9 símbols si volem que aparegui el primer element de l'alfabet exactament tres vegades?

   (b) Considereu el següent algorisme, on M és una matriu quadrada $n \times n$:

```
funció Max(M, n)
  inici
    maxValue ← 0
    per i ← 1 fins n
        per j ← 1 fins n
            si M[i][j] > maxValue aleshores
                maxValue ← M[i][j]
            fisi
        fiper
    fiper
    retorn maxValue
  fi
```

   i) Calculeu, en funció d'n, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme en el pitjor dels casos (ompliu una taula mostrant el nombre d'operacions per a cada línia). **Nota:** Considereu que accedir al valor $M[i][j]$ és una operació.

   ii) Determineu la complexitat de l'algorisme, a partir de l'apartat anterior.

Solució:

(a) Primer triem 3 de les 7 posicions per col·locar el primer element de l'alfabet. Això ho podem fer de $\binom{7}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 5/3! = 7 \cdot 5 = 35$ maneres diferents. A continuació, ens queden 4 posicions, on podem col·locar qualsevol dels elements de l'alfabet excepte el primer, per tant tenim $8^4 = 2^{12} = 4096$ opcions. Finalment, el nombre de paraules diferents amb la condició de l'enunciat és $\binom{7}{3} \cdot 8^4 = 35 \cdot 4096 = 143360$.

(b) i) La següent taula mostra el nombre d'operacions que es fan a cada línia de l'algorisme:

Línia	Cost
3	1
4	$2n+2$
5	$n(2n+2)$
6	$2n^2$
7	$2n^2$
11	1
Total	$6n^2+4n+4$

ii) En total, l'algorisme efectua $6n^2+4n+4$ operacions i per tant la complexitat és $O(n^2)$.

---

2. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

(a) Dibuixeu l'arbre corresponent a l'expressió aritmètica $\frac{a+b}{c^2}+7*d$. Ompliu la següent taula:

Alçada	
Arrel	
Vèrtexs interns	
Vèrtexs terminals	
És complet?	
És equilibrat?	
Recorregut en postordre:	

(b) Sigui una xarxa amb nodes $\{A, B, C, D\}$. Els temps necessaris per connectar directament nodes de la xarxa ve donat per la següent taula:

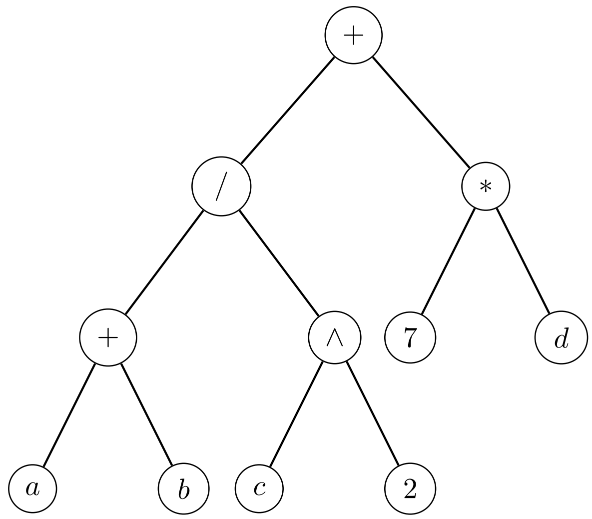
	A	B	C	D
A	0	8	3	7
B	8	0	2	1
C	3	2	0	-
D	7	1	-	0

i) Determineu el temps mínim per connectar cada parella de nodes de la xarxa fent servir l'algorisme més eficient. Indiqueu quin algorisme feu servir i doneu tots els passos fins arribar a la solució.

ii) Doneu el diàmetre del graf i digueu quins dos vèrtexs estan a distància el valor del diàmetre.

Solució:

(a) L'arbre corresponent a l'expressió aritmètica és:



Alçada	3
Arrel	$+$
Vèrtexs interns	$+, /, +, \wedge, *$
Vèrtexs terminals	$a, b, c, 2, 7, d$
És complet?	Sí
És equilibrat?	Sí
Recorregut en postordre:	$a, b, +, c, 2, \wedge, /, 7, d, *, +$

(b) i) Apliquem l'algorisme de Floyd

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & \infty \\ 7 & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{10} \\ 7 & 1 & \mathbf{10} & 0 \end{pmatrix} \quad d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{3} \\ 7 & 1 & \mathbf{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{5} & 3 & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ \mathbf{6} & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

A la matriu final obtenim el temps mínim per connectar cada parella de nodes.

ii) El diàmetre del graf és el valor més gran d'entre totes les distàncies mínimes entre parelles de vèrtexs. Per tant, a partir de la matriu final de l'algorisme de Floyd, podem dir que el diàmetre és 6 i es troba entre els vèrtexs A i D.

---

3. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

La taula següent indica els costos en les arestes d'un graf complet K_5 que verifica la desigualtat triangular:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	2	3	4	1
v_2	2	0	1	3	1
v_3	3	1	0	4	2
v_4	4	3	4	0	4
v_5	1	1	2	4	0

Volem trobar un cicle començant pel vèrtex v_1 i que passi per tots els vèrtexs de manera que la distància total recorreguda sigui la mínima possible.

(a) Trobeu una primera fita inferior de la distància total mínima, a partir de trobar un arbre generador minimal del graf corresponent.

(b) Utilitzeu l'algorisme TSP-aproximat amb desigualtat triangular per trobar una fita superior de la distància total mínima.

(c) A partir de la fita superior anterior, doneu una fita inferior de la distància total mínima.

Solució:

(a) Considerem les arestes ordenades per cost: v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_1v_2, v_3v_5, v_1v_3, v_2v_4, v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5. Triem i marquem amb un asterisc les 4 primeres arestes que no formen cap cicle: $v_1v_5^*$, $v_2v_3^*$, $v_2v_5^*$, v_1v_2, v_3v_5, v_1v_3, $v_2v_4^*$, v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5. La subxarxa estarà formada per les arestes següents: v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5 i v_2v_4, amb un cost de 6. Per tant, una fita inferior seria 6.

(b) A partir de l'arbre generador minimal calculat en l'apartat a), donem un recorregut en preordre, $P = \{v_1, v_5, v_2, v_3, v_4\}$. Així obtenim el cicle hamiltonià $H = \{v_1, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1\}$ de longitud 11. Per tant, una fita superior seria 11.

(c) A partir de la fita superior anterior, podem obtenir la fita inferior de $\lceil 11/2 \rceil = 6$ que coincideix amb la calculada en l'apartat a).

---

4. (Valoració d'un 7.5+7.5+10=25%)

   (a) Digueu si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la resposta:

      i) Trobar un arbre generador d'un graf connex G és un problema d'optimització.

      ii) Si $A \in P$, aleshores $A \in EXP$.

   (b) La fórmula booleana $a \wedge (b \vee c)$ és instància del problema 3SAT? En cas negatiu, feu la traducció a clàusula en 3SAT.

Solució:

(a) i) Falsa, és un problema de càlcul. Seria d'optimització si volguéssim trobar un arbre generador minimal.

   ii) Certa, ja que la classe de complexitat P està continguda en EXP.

(b) Està en FNC, però no és instància del problema 3SAT. Per convertir-la en una instància del problema 3SAT hem d'afegir variables auxiliars. La clàusula a es converteix en $(a \vee x \vee y) \wedge (a \vee \bar{x} \vee y) \wedge (a \vee x \vee \bar{y}) \wedge (a \vee \bar{x} \vee \bar{y})$, i la clàusula $(b \vee c)$ en $(b \vee c \vee z) \wedge (b \vee c \vee \bar{z})$. Per tant, la traducció a clàusula 3SAT és $(a \vee x \vee y) \wedge (a \vee \bar{x} \vee y) \wedge (a \vee x \vee \bar{y}) \wedge (a \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (b \vee c \vee z) \wedge (b \vee c \vee \bar{z})$.

Final 3

1. (Valoració d'un 10+7.5+7.5=25%)

Sigui T una llista de nombres de longitud n ($n \geq 1$). Definim el següent algorisme:

```
1 funció Alg(T)
2    inici
3       n ← Longitud(T)
4       suma ← 0
5       per i = 1 fins n
6            suma ← suma + T[i]
7       fiper
8       retorn suma mod 2
9    fi
```

on $x \mod 2$ significa el reste de dividir x entre 2 i es considera una operació.

(a) Calculeu, en funció d'n, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme i la seva complexitat. Ompliu una taula mostrant el nombre d'operacions per a cada línia de l'algorisme.

(b) Quin és el resultat de la crida $Alg(L)$, on $L = [5, 4, 4, 2, 2, 1]$? A partir d'aquest resultat, podem afirmar que la seqüència L és gràfica? Justifiqueu la resposta.

(c) Determineu si alguna de les seqüències següents són gràfiques:

$$L_1 = [5, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1] \quad i \quad L_2 = [5, 5, 7, 6, 4, 2, 4, 5].$$

Solució:

(a) La següent taula mostra el nombre d'operacions que es fan a cada línia de l'algorisme:

Línia	Cost
3	2
4	1
5	$2n + 2$
6	$3n$
8	2
Total	$5n + 7$

En total, l'algorisme efectua $5n + 7$ operacions i per tant la complexitat és $O(n)$.

(b) El resultat és $Alg([5,4,4,2,2,1]) = 0$, ja que l'algorisme retorna $5+4+4+2+2+1 = 18 \mod 2 = 0$. Aquest resultat no determina si la seqüència és gràfica o no. Necessitem aplicar l'algorisme de Havel i Hakimi si ho volem saber. Si el resultat de l'algorisme hagués estat 1, sí que podríem afirmar que la seqüència no és gràfica per la fórmula dels graus.

(c) Si apliquem l'algorisme, obtenim $Alg(L_1) = 1$, per tant L_1 no és una seqüència gràfica. En canvi $Alg(L_2) = 0$, i necessitem aplicar l'algorisme de Havel i Hakimi per determinar si L_2 és gràfica.

$$\boxed{\begin{array}{r} 5,5,7,6,4,2,4,5 \\ 7,6,5,5,5,4,4,2 \\ 5,4,4,4,3,3,1 \\ 3,3,3,2,2,1 \\ 2,2,1,2,1 \\ 2,2,2,1,1 \\ 1,1,1,1 \\ 0,1,1 \\ 1,1,0 \\ 0,0 \end{array}}$$

Per tant, L_2 sí que és una seqüència gràfica.

---

2. (Valoració d'un 5+10+10=25%)

Determineu si existeix un graf que compleixi les següents condicions. Justifiqueu la resposta. (**Nota:** Els apartats són independents)

(a) G és bipartit complet i no hamiltonià.

(b) G és un arbre 2-ari complet equilibrat d'alçada 5 amb 31 arestes.

(c) G és un arbre amb seqüència no ordenada de graus $[5,3,2,2,2,1,1,x]$, per algun valor x.

Solució:

(a) Qualsevol graf $K_{n,m}$ on $n \neq m$ no és hamiltonià.

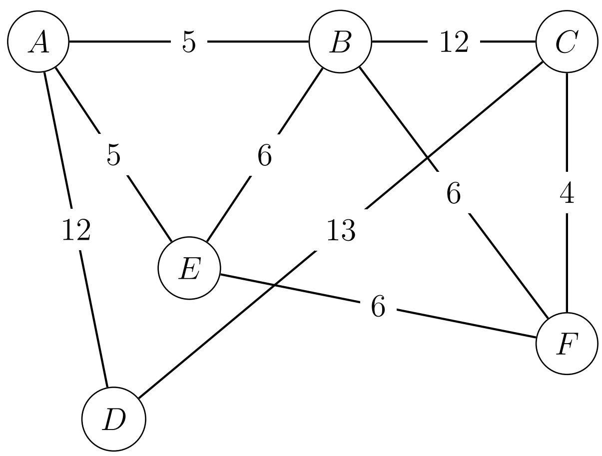
(b) Un arbre 2-ari, complet i equilibrat d'alçada 5 té com a mínim $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2 = 33$ vèrtexs. Per ser un arbre $|A| = |V| - 1$ i el nombre mínim d'arestes és 32. Per tant, no pot existir un graf amb aquestes condicions.

(c) Com que té 8 vèrtexs, l'arbre ha de tenir 7 arestes. Per tant, $2 \cdot 7 = 5 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + x$, d'on obtenim $x = -2$ que no és possible.

---

3. (Valoració d'un 10+15=25%)

Considereu el següent graf:



En cada cas, digueu quin algorisme es fa servir per resoldre l'exercici i doneu tots els passos fins obtenir la solució.

(a) Trobeu un arbre generador de cost mínim i doneu el seu cost.

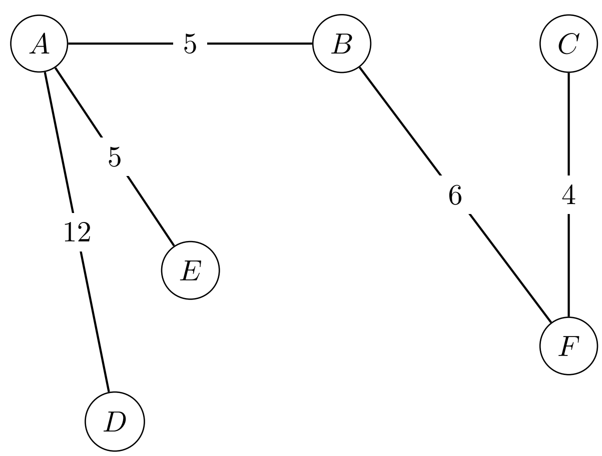
(b) Determineu el cost del camí de distància mínima del vèrtex B a la resta de vèrtexs. Doneu l'arbre de distàncies mínimes de B a la resta de vèrtexs. És un arbre generador minimal?

Solució:

(a) Apliquem l'algorisme de Kruskal. Considerem les arestes ordenades per cost. Triem i marquem amb un asterisc les 5 primeres arestes que no formen cap cicle, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Aresta	Pesos
$\{C,F\}^*$	4
$\{A,B\}^*$	5
$\{A,E\}^*$	5
$\{\mathbf{B},\mathbf{E}\}$	6
$\{B,F\}^*$	6
$\{\mathbf{E},\mathbf{F}\}$	6
$\{A,D\}^*$	12
$\{B,C\}$	12
$\{C,D\}$	13

Un arbre generador és:

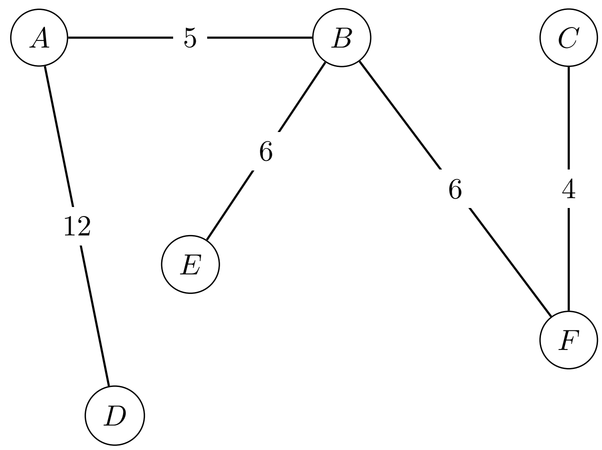


que té cost 32.

(b) Aplicant l'algorisme de Dijsktra, obtenim la següent taula:

A	B	C	D	E	F
(∞,B)	$(0,B)$	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)
$(5,B)$	$(0,B)^*$	$(12,B)$	(∞,B)	$(6,B)$	$(6,B)$
$(5,B)^*$		$(12,B)$	$(17,A)$	$(6,B)$	$(6,B)$
		$(12,B)$	$(17,A)$	$(6,B)^*$	$(6,B)$
		$(10,F)$	$(17,A)$		$(6,B)^*$
		$(10,F)^*$	$(17,A)$		
			$(17,A)^*$		

L'arbre de distàncies mínimes, obtingut a partir de la taula anterior, és:



Aquest arbre té cost 33 i, per tant, no és un arbre generador minimal.

---

4. (Valoració d'un 7.5+7.5+10=25%)

   (a) Digueu si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la resposta:

   i) Si $A \leq_p B$ i B és NP-Complet, aleshores $A \in$ NP.

   ii) Un problema per al qual coneixem que es pot resoldre amb un algorisme de complexitat temporal $O(3^n)$ no pot pertànyer a P.

   (b) La fórmula booleana $(\bar{a} \vee b) \wedge ((\bar{b} \wedge c) \vee a)$ és instància del problema SAT? En cas negatiu, feu la traducció a clàusula en SAT.

Solució:

(a) i) Cert. Si B és NP-Complet, aleshores en particular $B \in$ NP. Per les propietats de les reduccions, tenim que $A \in$ NP.

ii) Fals. Podria existir un altre algorisme per resoldre'l amb complexitat polinòmica.

(b) No, ja que no està en FNC. La traducció a una instància del problema SAT és la següent: $(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a) \wedge (c \vee a)$.
