SOLUCIÓ EXAMEN 20/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els càlculs següents:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{i^3}{(1+i)^2}$

b) Calculeu les arrels sextes del nombre complex: $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem amb l'expressió, recordant que $i^2 = -1$:

$$\frac{i^3}{(1+i)^2} = \frac{i^2 \cdot i}{(1+2i+i^2)} = \frac{(-1)\cdot i}{(1+2i-1)} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

b) Escrivim el complex z en forma polar:

$$m = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

$$\alpha = arctg\,\frac{4\sqrt{3}}{4} = arctg\sqrt{3} = 60^{o}$$

Tenim per tant: $z = 4 + 4\sqrt{3}i = 8_{60^{o}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8_{60}} = \left(\sqrt[6]{8}\right)_{\frac{60+360k}{6}} = \left(\sqrt[6]{2^3}\right)_{\frac{60+360k}{6}}$$ per k=0, 1, 2, 3, 4, 5

El mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{60+360k}{6}$ per k=0, 1, 2, 3, 4, 5

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 10^{o}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 10^{o} + 60^{o} = 70^{o}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 10^{o} + 120^{o} = 130^{o}$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 10^{o} + 180^{o} = 190^{o}$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 10^{o} + 240^{o} = 250^{o}$

- Si k=5, tenim que $\beta_3 = 10^o + 300^o = 310^o$

Així doncs, les arrels sextes del nombre complex $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ són:

$$\sqrt{2}_{10^o}, \sqrt{2}_{70^o}, \sqrt{2}_{130^o}, \sqrt{2}_{190^o}, \sqrt{2}_{250^o}, \sqrt{2}_{310^o}$$

Exercici 2

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de R^6 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \mid a_1=a_4, a_2=2\cdot a_5, a_6=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \mid b_1=b_4, 2\cdot b_2=b_6, b_5=0\}$

I sigui v=(0,0,3,0,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n es coordenades en la base que has trobat.

c) Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^6? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, a2=2·a5, a6=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podriem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 3 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ que té solució x=-3, y=0, z=3.

Per tant v per tant a A i les seves coordenades en la base anterior són (-3,0,3).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 0, 0)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, 2·a2=a6, a5=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Així doncs T és una base d'B.

Per veure si v pertany a B mirem si té solució el següent sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$ que té solució x=0, y=0, z=3.

Per tant v per tant a B i les seves coordenades en la base anterior són (0,0,3).

b) Per veure si A i B generen el mateix subespai vectorial de R^6, com que els dos tenen dimensió 3, cal veure si un està contingut en l'altre. Això ho podem comprovar mirant la condició pels elements de la base.

Si comencem per (0, 2, 0, 0, 1, 0) que és d'A, ja veiem directament que no pertany a B ja que no compleix la condició a5=0.

Per tant A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^6.

Exercici 3

Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & a\,z & = & a+1 \end{cases} .$$

Resolució:

La matriu del sistema és:

$$A\,|\,A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & a & a+1 \end{array}\right)$$

Estudiem el rang de la matriu *A*. Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores $rang\ A \geq 2$. Per a veure quan el rang pot ser 3, calculem el determinant d'*A* i obtenim $|A| = 3a - 15$ que només s'anul.la pel valor *a* = 5.

- Cas I. $a \neq 5 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$

I si el resolem pel mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ a+1 & -3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a + 3a + 3 - a - 1 - 27}{3a - 15} = \frac{5a - 25}{3a - 15}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & a+1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a + 1 - 27 + 6a + 6 - 3a}{3a - 15} = \frac{4a - 20}{3a - 15}$$

I per tant la solució única té la forma: $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$ per a cada valor que donem al paràmetre $a \neq 5$.

- Cas II. $a = 5 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang\ A = 2$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem el menor diferent de zero que tenim a la matriu *A* i mirem si s'anul.la el determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\ A' = 2 = rang\ A \Rightarrow SCI$$ amb 3-2=1 grau de llibertat (z)

Per a la resolució, una vegada anul.lada la 3a equació i passant la incògnita z als termes independents, obtenim el següent sistema d'equacions equivalent

$$\begin{cases} 2x & - & y & = & 3-z \\ x & + & y & = & 3z \end{cases}$$ que ens porta a la solució $x = \dfrac{3+2z}{3}, y = \dfrac{7z-3}{3}, z = z$.

Exercici 4

Sigui $f: R^3 \to R^2$ l'aplicació lineal definida per
$f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Trobeu una base del Nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de la Imatge de f. És f exhaustiva?
d) Trobeu l'antiimatge del vector (1,1).

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és :
.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Una base del Nucli de f és: (1,-2,-2). La funció no és injectiva
c) Una base de la Imatge de f és: (2,0), (1,1). La funció és exhaustiva
d) El conjunt de vectors que formen l' antiimatge del vector (1,1) són de la forma (x,y,z) = (0,1,0)+λ(-1/2, 1, 1).