

## Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

## Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

## Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinòmica dels problemes NP-complets.

## Descripció de la PAC

### 1. (Valoració d'un 20% = 10% + 10%)

Donats els següents problemes:

- 1) FLOYD: Donat un graf  $G$ , retorna la matriu de distàncies mínimes entre cada parell de vèrtexs.
- 2) CLIQUE: Donat un graf  $G$ , retorna l'ordre  $t$  del subgraf complet ( $K_t$ ) més gran que podem trobar a  $G$ .
- 3) PARTICIO: Donat un conjunt d'enters  $S$ , retorna SÍ si es pot dividir el conjunt original en dos subconjunts  $S_1, S_2 \subset S$  tals que  $S_1 \cup S_2 = S$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  i

$$\sum_{s_1 \in S_1} s_1 = \sum_{s_2 \in S_2} s_2.$$

En cas contrari, retorna NO.

- 4) SUMA: Donat un conjunt  $S$  de  $n$  nombres, retorna la seva suma.
- 5) CONJUNT\_DOMINANT: Donat un graf  $G$ , retorna el menor subconjunt  $S$  de vèrtexs tal que, tot vèrtex  $v \notin S$  serà adjacent a un vèrtex de  $S$ .

Responen les preguntes següents:

- (a) Per cada problema, indiqueu el seu tipus (decisió, càlcul, optimització). Indiqueu també la menor classe de complexitat a la que pertany (en el cas dels problemes de càlcul o d'optimització, indiqueu la classe de complexitat de la seva versió decisonal). Justifiqueu breument la resposta.
  - (b) Quines de les següents reduccions són possibles? (en el cas de problemes de càlcul o d'optimització, considereu la seva versió decisonal). Justifiqueu la vostra resposta. En el cas que l'última reducció sigui possible, proposeu una funció de reducció.
    - i. FLOYD  $\leq_p$  CLIQUE.
    - ii. CONJUNT\_DOMINANT  $\leq_p$  FLOYD.
    - iii. CONJUNT\_DOMINANT  $\leq_p$  CLIQUE.
    - iv. SUMA  $\leq_p$  FLOYD.
- ### 2. (Valoració d'un 15% = 5% + 10%)

Considereu les següents expressions lògiques:

- 1)  $(a \vee b) \wedge c$ ,
- 2)  $(a \wedge b) \vee (c \wedge \bar{a})$ ,

3)  $(\bar{a} \wedge (b \vee \bar{c})) \wedge (a \vee b)$ .

- (a) Transformeu a FNC aquelles que no estiguin en FNC.  
(b) Empleneu la següent taula de veritat. Existeix algun conjunt de valors que faci certes totes les expressions? I algun que les faci totes falses?

$a$	$b$	$c$	1)	2)	3)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

3. (Valoració d'un 20% = 5% + 5% + 5% + 5%)

Una entitat bancària que ha sofert diferents processos de reestructuració i integració amb altres entitats financeres, ha inclòs noves plataformes de pagament i interacció amb els seus usuaris i està en procés d'implantació de noves estratègies de classificació de clients mitjançant tècniques d'aprenentatge automàtic.

Cada dia es duen a terme milers de processos automatitzats per actualitzar els riscos dels clients, assegurar que totes les transaccions han acabat correctament, decidir l'efectiu a portar als caixers, etc.

Al banc detecten que cada vegada més processos no arriben a finalitzar-se mai, sent precís que els responsables del sistema els reiniciïn o executin pas a pas, o que es realitzin processos manuals perquè acabin correctament.

- S'encarrega a l'empresa Grafs i Complexitat (GiC) que realitzi una anàlisi de processos. El conjunt de tots els processos a analitzar és  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  i es construeix un mapa de dependències on el procés  $p_j$  estarà connectat amb  $p_k$  si  $p_j$  depèn de  $p_k$ .
- Inicialment l'equip de GiC comença identificant els cicles d'ordre 3. Es determina que un dels objectius principals de l'anàlisi consistirà a identificar cicles de qualsevol longitud dins del mapa de processos.
- En alguna reunió es posa l'accent en que, si es dibuixa el diagrama d'un procés  $p \in P$  i els processos dels quals depèn, en un cas ideal, es tractaria d'un arbre.
- Com a recomanació general a l'entitat bancària es recomana introduir mecanismes de traçabilitat en els processos (la informació de traçabilitat ens diu quan comença i acaba

un procés, quin va ser el procés anterior i quin és el procés següent que s'executarà). Donat que el nombre de processos és extremadament alt i el temps de programació escàs, s'opta per assegurar que cada procés o bé inclogui informació de traçabilitat o la inclogui algun dels seus veïns.

Contesteu raonadament a les següents preguntes, tenint en compte que un inventari inicial ha identificat 25.000 processos i 20.000 dependències:

- (a) Indiqueu si es tracta d'un graf dirigit o no dirigit, i identifiqueu quins són els vèrtexs i les arestes. Què vol dir en termes del graf que existeixin més processos que dependències?
- (b) Per què es requereixen identificar tots els cicles? Què representa un cicle de longitud  $n$ ?
- (c) Per què en un cas ideal les dependències dels processos tenen forma d'arbre?
- (d) Indiqueu quin problema, dels descrits en els materials, permet identificar els processos en els quals s'han d'implantar mecanismes de traçabilitat. Indiqueu el nombre màxim d'opcions que hauria de verificar un algorisme per trobar la solució (o solucions) òptimes al nostre problema. Si aquest algorisme és capaç de verificar 1000 opcions per segon, quant temps trigaria a obtenir totes les solucions?

4. (Valoració d'un 15% = 5% + 5% + 5%)

Indiqueu (i justifiqueu) si les següents afirmacions són certes o falses. Cada apartat és independent.

- (a) Si  $A \in NP$  i  $B$  és  $NP$ -Complet, llavors  $A \leq_p B$  i  $B \leq_p A$ .
- (b) Siguin  $A$ ,  $B$  i  $C$  tres problemes. Si  $A \in P$ , i sabem que  $C \leq_p B$  i  $B \leq_p A$ , aleshores  $C \in P$ .
- (c) Si  $A$  és un problema les solucions del qual poden validar-se en temps polinomial, aleshores  $A \leq_p 3SAT$ .

5. (Valoració d'un 30%=15%+15%)

El problema KNAPSACK, o problema de la motxilla, consisteix a optimitzar la solució d'un problema tenint en compte una restricció de cost.

Es diu problema de la motxilla ja que la seva descripció original establia la necessitat de maximitzar el valor d'un conjunt d'objectes a transportar en una motxilla.

En la descripció original es vol maximitzar el valor econòmic dels objectes transportats (el valor) sense excedir la capacitat de la motxilla (el cost).

Existeixen altres definicions del problema de la motxilla en les quals el valor pot referir-se, per exemple, a la quantitat d'informació que va en un fitxer i el cost al seu espai d'emmagatzematge en disc.

La forma més habitual de plantejar el problema de la motxilla és la coneguda com 0 – 1 **Knapsack** que limita la quantitat de còpies de cada objecte que podem utilitzar a una o a cap.

(a) **Algorisme Voraç**

Encara que el problema d'optimització associat a KNAPSACK és NP-Difícil, es pot escriure un algorisme voraç que retorna una solució aproximada.

Donat un conjunt d'objectes, cadascun amb un cost i un valor, podem calcular el seu benefici com

$$benefici = \frac{valor}{cost}.$$

Sigui  $C$  un conjunt d'objectes ordenats de forma decreixent pel seu benefici. Associem cada objecte  $i$  de  $C$  amb el camp  $COST$  que conté el cost de l'objecte. Computacionalment, podem accedir al cost de l'objecte utilitzant la instrucció  $i.COST$  que es considera 1 operació computacional. Sigui  $c$  la capacitat. El següent podria ser un algorisme voraç per obtenir una solució aproximada al problema.

```
(1) funció  $V(C, c)$ 
(2)   inici
(3)   ocupacio ← 0
(4)   objectes ← {}
(5)   per  $i \in C$ 
(6)     si  $ocupacio + i.COST \leq c$ 
(7)       aleshores
(8)         ocupacio ← ocupacio +  $i.COST$ 
(9)         objectes ← objectes  $\cup i$ 
(10)    fisi
(11)  fiper
(12)  retorn objectes
(13)  fi
```

- i. Indiqueu la complexitat d'aquest algorisme voraç.
- ii. Trobeu una instància del problema (capacitat de la motxilla i llista d'objectes amb cost, valor i benefici) per a la que l'algorisme voraç proporcioni un resultat no òptim.
- iii. Arran d'aquest exemple, diríeu que l'algorisme funciona millor quan la capacitat és molt major que el cost mitjà dels objectes? Per què?

(b) **Instàncies de Knapsack**

Indiqueu, dels següents problemes, quins poden ser una instància de KNAPSACK. Si ho són indiqueu també què representaria el cost, el valor i la capacitat.

- i. Cobertura de xarxa mòbil: Donat un pressupost màxim per antenes de telefonia mòbil i coneixent el límit d'usuaris al que pot donar servei cada tipus d'antena, maximitzar la cobertura de xarxa mòbil. **Nota:** No tingueu en compte consideracions sobre la ubicació de les antenes, només la seva capacitat de servei.
- ii. Emergències: Donada una xarxa de carreteres, tenim un graf associat en el qual cada ciutat és un node i les arestes representen les connexions per carretera. Volem assegurar que cada ciutat o una de les seves veïnes, té un centre d'atenció d'emergències.
- iii. Selecció: Un repartidor vol maximitzar el benefici de la seva ruta de repartiment minimitzant el seu cost de transport. Per preparar la seva ruta disposa d'una llista de ciutats i el cost de viatjar entre cadascuna d'elles així com el benefici esperat a cada ciutat.

## Recursos

### Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

### Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

## Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

## Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC3\_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 20/12/2018**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**