# Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

# Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

# Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

# Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20% = 2%+8%+10%)

   Considereu el graf $G = (V, A)$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, amb la següent llista de adjacències:

$$\begin{array}{ll} 1: & 2,4 \\ 2: & 1,3,4,5 \\ 3: & 2,5 \\ 4: & 1,2,6,7 \\ 5: & 2,3,7,8 \\ 6: & 4,7 \\ 7: & 4,5,6,8 \\ 8: & 5,7 \end{array}$$

   (a) Demostreu que $G$ és eulerià.

   (b) Utilitzant l'algorisme adequat, trobeu un circuit eulerià començant pel vèrtex 1. Justifiqueu tots els passos seguits.

   (c) Considereu el graf $G'$ afegint dos vèrtexs més al graf $G$, 9 i 10, connectats entre sí, i on a més a més el vèrtex 9 està connectat amb el vèrtex 7 i el vèrtex 10 amb el vèrtex 8:

      i. És $G'$ eulerià? Per què?

      ii. És possible trobar algun **recorregut** eulerià en $G'$? Per què? Si és així, trobeu-lo manipulant si és necessari el graf per poder utilitzar l'algorisme adequat. Justifiqueu tots els passos.

---

**Solució:**

(a) El graf $G$ és eulerià perquè tot vèrtex té grau parell.

(b) Segons l'algorisme de Hierholzer i començant pel vèrtex 1, les iteracions obtingudes són:

| Iteració | v | C' | C |
|---|---|---|---|
| O | 1 | | {1} |
| 1 | 1 | {1,2,4,1} | {1,2,4,1} |
| 2 | 2 | {2,5,3,2} | {1,2,5,3,2,4,1} |
| 3 | 5 | {5,7,8,5} | {1,2,5,7,8,5,3,2,4,1} |
| 4 | 7 | {7,6,4,7} | {1,2,5,7,6,4,7,8,5,3,2,4,1} |

Per tant, el circuit eulerià és $\{1, 2, 5, 7, 6, 4, 7, 8, 5, 3, 2, 4, 1\}$.

(c) i. El graf $G'$ no és eulerià ja que ara no tots els vèrtexs tenen grau parell. Els vèrtexs 7 i 8 tenen ara grau senar.

ii. Sí, ja que tenen exactament dos vèrtexs (7 i 8) de grau senar. Per trobar un recorregut eulerià, procedirem de la següent manera: afegim una altra aresta entre els vèrtexs de grau senar (7 i 8), d'aquesta manera el graf serà eulerià (ara tots els vèrtexs tenen grau parell), apliquem l'algorisme de Heirholzer per trobar un circuit eulerià, i finalment eliminarem l'aresta extra per quedar-nos amb el recorregut eulerià. Segons l'algorisme obtenim les següents iteracions començant pel vèrtex 8:

| Iteració | v | C' | C |
|---|---|---|---|
| O | 8 | | {8} |
| 1 | 8 | {8,5,7,8} | {8,5,7,8} |
| 2 | 5 | {5,2,3,5} | {8,5,2,3,5,7,8} |
| 3 | 2 | {2,4,1,2} | {8,5,2,4,1,2,3,5,7,8} |
| 4 | 4 | {4,7,6,4} | {8,5,2,4,7,6,4,1,2,3,5,7,8} |
| 5 | 7 | {7,9,10,8,7} | {8,5,2,4,7,9,10,8,7,6,4,1,2,3,5,7,8} |

D'aquesta manera, obtingut el circuit eulerià, eliminem l'aresta afegida entre els vèrtexs 7 i 8, per obtenir el recorregut eulerià:

$$\{8, 5, 2, 4, 7, 9, 10, 8, 7, 6, 4, 1, 2, 3, 5, 7\}.$$

---

2. (Valoració d'un 20% = 5%+5%+5%+5%)

Respongueu a les següents preguntes sobre arbres:

(a) Considereu un arbre complet $m$-ari amb $m > 1$ i $n = 10$ vèrtexs, $V = \{A, \ldots, J\}$. Justifiqueu quins són els valors de $m$ vàlids.

(b) Dibuixeu l'arbre anterior amb el menor valor de $m$ vàlid, i mostreu els recorreguts en preordre i postordre de l'arbre anterior.

(c) Quina és l'altura de l'arbre dibuixat i quines són les seves fulles? És un arbre equilibrat?

(d) I si busquéssim un arbre complet amb $n = 94$ vèrtexs, podria seguir essent $m$-ari amb els valors d'$m$ vàlids del primer apartat?

---

**Solució:**

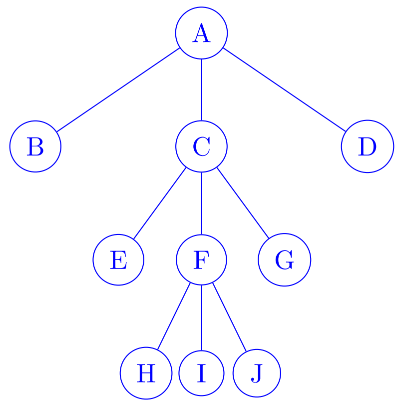



Figura 1: Exemple d'arbre complet 3-ari amb $n = 10$.

(a) Un arbre complet $m$-ari amb $m > 1$ i amb $n = 10$, només pot tenir $m \in \{2, \ldots, 9\}$, ja que un dels vèrtexs és l'arrel. Utilitzant la Proposició 6 del Mòdul 4, en un arbre, tenim que $t = (m-1)i + 1$, on $t$ és el número de fulles, i $i$ els vèrtexs interns. Sabem que el conjunt de vèrtexs és $t + i = 10$, pel que $t = 10 - i$. Si el substituïm en l'operació anterior obtenim $10 - i = (m-1)i + 1$, i es resol en $\frac{9}{i} = m$, o bé $\frac{9}{m} = i$, el que implica que $m$ és divisor de 9, i com que $m \in \{2, \ldots, 9\}$ només passa si $m = 3$ o $m = 9$.

(b) El menor valor de $m$ és 3 i l'arbre obtingut és el que es mostra en la Figura 1. El recorregut en preordre és $\{A, B, C, E, F, H, I, J, G, D\}$ i en postordre $\{B, E, H, I, J, F, G, C, D, A\}$.

(c) En l'arbre de la Figura 1, l'altura és 3, les seves fulles són $\{B, E, H, I, J, G, D\}$ i no és equilibrat, ja que totes les seves fulles no estan en els últims dos nivells, per exemple B està en el nivell 1 quan altres como H en 3, el que justifica que l'arbre no pot ser equilibrat.

(d) En el primer apartat justifiquem com $m = 3$ o $m = 9$, així que si $n = 94$ i l'arbre és complet, podem comprovar que existeix si compleix la mateixa Proposició 6 abans mencionada. Sabem que $n = t + i = 94$, pel que $t = 94 - i$. Després, per $m = 3$, ens queda $(94 - i) = (3-1)i + 1$, de manera que $93 = 3i$ i com 3 és divisor de 93, l'arbre 3-ari existeix. Per $m = 9$ tenim $(94 - i) = (9-1)i + 1$, resulta en $93 = 9i$, que no és divisible, pel que no pot existir un arbre complet 9-ari d'ordre 94.

---

3. (Valoració d'un 20% = 4%+12%+2%+2%)

En el poble de Winden, any 2020, s'ha activat una màquina que permet fer salts en el temps. En concret es pot viatjar entre els anys 1921, 1954, 1987, 2020 i 2053 (s'ha detectat que les línies temporals queden vinculades en cicles de 33 anys). En canvi, viatjar en el temps té un gran cost energètic i s'ha comprovat que depèn de la següent funció, $c(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{4} |d_i^{a_1} - d_i^{a_2}|$, on $a_1$ i $a_2$ són dos dels anys entre els que es pot viatjar en el temps, i $d_i^{a_j}$ indica el dígit en la posició $i$ de l'any $a_j$. Per exemple, el cost de viatjar de 1921 a 2053 es calcula $c(1921, 2053) = |1-2| + |9-0| + |2-5| + |1-3| = 15$. Un cop establim un vincle entre dos anys, es pot viatjar en els dos sentits.

(a) Quin és el cost de viatjar d'un any a un altre? Doneu el resultat en forma de matriu.

(b) Com minimitzaríeu el cost energètic global, de forma que es pugui visitar un any des de qualsevol altre (directa o indirectament)? Justifiqueu la resposta utilitzant teoria de grafs.

(c) Hi ha altres possibilitats mínimes a banda de la que s'exposa en l'apartat anterior?

(d) Dibuixeu l'arbre resultant, on l'arrel és l'any 2020.

---

**Solució:**

(a) La matriu de costos és:

| | 1921 | 1954 | 1987 | 2020 | 2053 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1921 | 0 | 6 | 12 | 11 | 15 |
| 1954 | 6 | 0 | 6 | 17 | 11 |
| 1987 | 12 | 6 | 0 | 23 | 17 |
| 2020 | 11 | 17 | 23 | 0 | 6 |
| 2053 | 15 | 11 | 17 | 6 | 0 |

Taula 1: Cost energètic de viatges entre anys.

(b) Minimitzar el cost energètic global tal que es pugui viatjar d'un any a un altre de forma directa o indirecta equival a trobar l'arbre generador minimal. El resultat l'obtenim a l'aplicar l'algorisme de Kruskal a la matriu anterior (veure Taula 2), amb un cost global mínim de 29.

(c) L'alternativa és utilitzar l'aresta (1954, 2053) enlloc de la (1921, 2020), pel que l'arbre generador minimal no és únic.

(d) L'arbre resultat de la Taula 2, amb 2020 com arrel és el de la Figura 2.

---

4. (Valoració d'un 20% = 6%+6%+8%)

Justifiqueu les respostes sobre grafs eulerians i hamiltonians emprant la teoria de grafs:

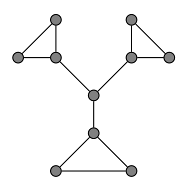
| Aresta | Cost |
|---|---|
| $(1921, 1954)^*$ | 6 |
| $(1954, 1987)^*$ | 6 |
| $(2020, 2053)^*$ | 6 |
| $(1921, 2020)^*$ | 11 |
| $(1954, 2053)$ | 11 |
| $(1921, 1987)$ | 12 |
| $(1921, 2053)$ | 15 |
| $(1954, 2020)$ | 17 |
| $(1987, 2053)$ | 17 |
| $(1987, 2020)$ | 23 |

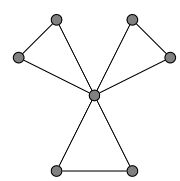
Taula 2: Algorisme de Kruskal sobre la matriu de costos anterior (el graf és simètric).

(a) Dibuixeu un graf d'ordre $n = 5$ i mida $m = 7$ que sigui eulerià i no hamiltonià.

(b) Dibuixeu un graf amb el mateix ordre i mida de l'apartat anterior però que sigui hamiltonià i no eulerià.

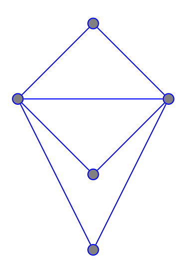
(c) Són els següents dos grafs eulerias i/o hamiltonians?





**Solució:**

(a) El següent graf és una solució al problema, on tots els vèrtexs tenen grau parell (eulerià) però si traiem els dos extrems (esquerra i dreta) ens queden 3 components connexos (no hamiltonià).



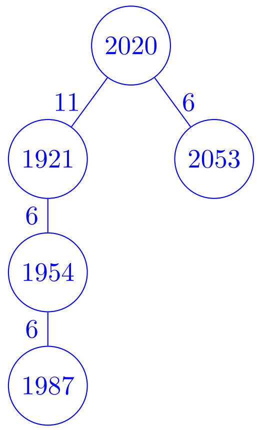
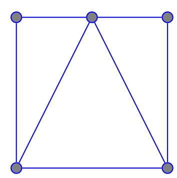



Figura 2: Arbre generador minimal de viatges en el temps.

(b) Si eliminem les dues arestes internes del següent graf ens queda un graf cicle $C_5$, que és hamiltonià. Per altra banda, tenim dos vèrtexs de grau senar, pel que existeix un recorregut eulerià, però no un circuit.



(c) Si traiem el vèrtex central en els dos, ens queden 3 components connexes, pel que cap d'ells és hamiltonià. I només el segon té tots els vèrtexs de grau parell, o sigui que el primer graf no és eulerià mentre que el segon sí que ho és.

---

5. (Valoració d'un 20% = 10%+10%)

Un repartidor ha de lliurar 6 paquets en 6 punts diferents $A, B, C, D, E, F$ d'una població en el menor temps possible, sortint de l'oficina $O$ i tornant a ella per aparcar la furgoneta. Podem suposar que els punts de lliurament estan distribuïts en el pla euclidià amb les següents coordenades: $O(0,0), A(5,5), B(1,5), C(6,2), D(3,0), E(2,3), F(4,4)$, i que la ruta entre cada parella de punts es pot recórrer en línia recta.

(a) Justifiqueu que el graf obtingut compleix les condicions necessàries per aplicar l'algorisme TSP-aproximat al calcular la ruta, i utilitzeu-lo en aquest cas. Quina distància ha recorregut el repartidor? Justifiqueu la resposta detallant tots els passos que s'han seguit.

(b) Si la casa del repartidor és a $H(6,0)$, la distància hagués estat menor si hagués sortit de casa seva (i tornat allà) en comptes de sortir des de l'oficina? Justifiqueu la resposta detallant els passos que s'han seguit.

---

**Solució:**

(a) Com es tracta de distàncies en el pla, el graf és complet i verifica la desigualtat triangular. La matriu de costos és la següent (vegeu la Taula 3):

| | O | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | 0 | $\sqrt{50}$ | $\sqrt{26}$ | $\sqrt{40}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{32}$ |
| A | $\sqrt{50}$ | 0 | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{2}$ |
| B | $\sqrt{26}$ | $\sqrt{16}$ | 0 | $\sqrt{34}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{10}$ |
| C | $\sqrt{40}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{34}$ | 0 | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{8}$ |
| D | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{13}$ | 0 | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{17}$ |
| E | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{10}$ | 0 | $\sqrt{5}$ |
| F | $\sqrt{32}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{8}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{5}$ | 0 |

Taula 3: Distàncies entre punts amb el vèrtex O.

Utilitzant l'algorisme de Prim o Kruskal obtenim que l'arbre generador minimal és el format per les arestes $\{O,D\}$, $\{D,E\}$, $\{E,B\}$, $\{E,F\}$, $\{F,A\}$, $\{F,C\}$. Des de O, un recorregut en preordre de l'arbre seria $\{O,D,E,B,F,A,C\}$. El cicle hamiltonià obtingut és

$$\{O,D,E,B,F,A,C,O\}$$

i la distància recorreguda és

$$3+\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{40}\approx 22.4616698.$$

(b) La matriu de costos és la següent (vegeu la Taula 4):
Usant un cop més l'algorisme de Prim o Kruskal, obtenim que l'arbre generador minimal seria el format per les arestes $\{H,C\}$, $\{H,D\}$, $\{C,F\}$, $\{F,A\}$, $\{F,E\}$, $\{E,B\}$. Des d'$H$, un recorregut en preordre seria $\{H,C,F,A,E,B,D\}$. Per tant, el cicle hamiltonià és

$$\{H,C,F,A,E,B,D,H\}$$

| | H | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | 0 | $\sqrt{26}$ | $\sqrt{41}$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{25}$ | $\sqrt{20}$ |
| A | $\sqrt{26}$ | 0 | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{2}$ |
| B | $\sqrt{41}$ | $\sqrt{16}$ | 0 | $\sqrt{34}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{10}$ |
| C | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{34}$ | 0 | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{8}$ |
| D | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{13}$ | 0 | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{17}$ |
| E | $\sqrt{25}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{10}$ | 0 | $\sqrt{5}$ |
| F | $\sqrt{20}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{8}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{5}$ | 0 |

Taula 4: Distàncies entre punts considerant com origen el vèrtex H.

i la distància recorreguda és

$$2+\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{29}+3 \approx 20,46942.$$

Per tant, sí que li hagués anat millor sortint des de casa seva que fer-ho des de l'oficina.

# Recursos

## Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

## Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

# Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**. En cas que hagueu consultat recursos externs per respondre algun apartat, és necessari referenciar-los.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

# Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 19/11/2020**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**