Universitat Oberta de Catalunya

Àlgebra Curs 2015-2016 Semestre Tardor

PAC 3

RESOLUCIÓ

Problema 1 (1.5 punts): Per a quins valors del paràmetre real a els plans $\pi_1: 2ax + 2y + (a+5)z = 2$ i $\pi_2: x + ay + 3z = a$ defineixen una recta intersecció?

Resolució:

Podem plantejar la intersecció dels dos plans com el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 2ax + 2y + (a+5)z &= 2 \\ x + ay + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

que per tal que defineixi una recta intersecció, cal que sigui compatible indeterminat amb un grau de llibertat (una incògnita lliure).

En termes de rangs, si M és la matriu de coeficients i M' la matriu ampliada, el que es tracta és que $rang(M) = rang(M') = 2$, ja que així el sistema serà compatible indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 2 & a+5 & 2 \\ \boxed{1} & a & 3 & a \end{array}\right)$$

Com que $m_{21} = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(M) \geq 1$. Per tant, per tal que $rang(M) = 2$, hem de veure per a quins valors del paràmetre a podem garantir que existeix un menor d'ordre 2 diferent de 0. Tenint en compte que el rang d'una matriu no depèn de per quin menor no nul es comenci a orlar, els dos menors que resulten d'orlar m_{21} són:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2$$

$$\begin{vmatrix} 2a & a+5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6a - (a+5) = 5a - 5.$$

Observem que el primer menor s'anul·la pels valors $a = 1$ i $a = -1$ i que el segon s'anul·la únicament quan $a = 1$. És a dir que per $a = 1$ s'anul·len tots els menors d'ordre 2 de M.

Per tant, únicament quan $\boxed{a \neq 1}$ tenim que $rang(M) = 2$ i per tant també $rang(M') = 2$, perquè no hi ha més files per a augmentar el rang, i tindrem el sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat que estem buscant.

Nota: El mateix resultat s'obté, de forma anàloga, si es parteix, per exemple, de $m_{12} = 2 \neq 0$ o de $m_{23} = 3 \neq 0$.

Problema 2 (3 punts): Discutiu, i solucioneu quan sigui possible, el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& m \\ 2x+y+2mz &=& 2m \\ x-y+(m^2+m-4)z &=& 2m-2 \end{array}\right\}$$

segons els valors del paràmetre real *m*.

Resolució:

La forma matricial del sistema és la següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 2 & 1 & 2m & 2m \\ 1 & -1 & m^2+m-4 & 2m-2 \end{array}\right).$$

Si denotem per *M* i *M'* la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament, com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$ tenim que $rang(M) \geq 2$ i tindrem que $rang(M) = 3 \Leftrightarrow |M| \neq 0$.

Calculem per a quins valors s'anul·la el determinant de *M*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 2m \\ 1 & -1 & m^2+m-4 \end{vmatrix} = m^2+m-4-2m+2m-m+2m-2(m^2+m-4)$$
$$= -m^2+4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Per tant, per a la discussió del sistema d'equacions lineals tenim els següents casos:

- Cas I: $m \neq \pm 2$

Com que $|M| \neq 0$ tenim que $rang(M) = 3 = rang(M')$ i per tant es tracta d'un Sistema Compatible Determinat.

- Cas II: $m = 2$

Com que $|M| = 0$ tenim que $rang(M) = 2$.

Per a calcular el $rang(M')$ hem d'orlar el menor amb la tercerca equació i la columna dels termes independents i tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

i per tant $rang(M') = 2 = rang(M)$ amb el que el sistema és Compatible Indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat.

- Cas III: $m = -2$

Com que $|M| = 0$ tenim que $rang(M) = 2$.

Per a calcular el $rang(M')$ hem d'orlar el menor amb la tercerca equació i la columna dels termes independents i tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6+4-4+2-4+12 = 4 \neq 0$$

i per tant $rang(M') = 3 > 2 = rang(M)$ amb el que el sistema és Incompatible.

En resum:

- Cas I: $m \neq \pm 2$, Sistema Compatible Determinat
- Cas II: $m = 2$, Sistema Compatible Indeterminat amb 1 g.ll.
- Cas III: $m = -2$, Sistema Incompatible

Per tant resoldrem el sistema per als casos I i II.

- Cas I: $m \neq \pm 2$

Podem resoldre el sistema aplicant la regla de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 2m & 1 & 2m \\ 2m-2 & -1 & m^2+m-4 \end{vmatrix}}{-m^2+4} = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 0 & -1 & 0 \\ 2m-2 & -1 & m^2+m-4 \end{vmatrix}}{-m^2+4}$$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} m & m \\ 2m-2 & m^2+m-4 \end{vmatrix}}{-m^2+4} = \frac{m(m^2+m-4-(2m-2))}{m^2-4}$$

$$= \frac{m(m^2-m-2)}{m^2-4} = \frac{m(m+1)(m-2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m(m+1)}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 2 & 2m & 2m \\ 1 & 2m-2 & m^2+m-4 \end{vmatrix}}{-m^2+4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 2m \\ 1 & -1 & 2m-2 \end{vmatrix}}{-m^2+4} = \frac{2m-2-2m+2m-m+2m-2(2m-2)}{-m^2+4} = \frac{-m+2}{-m^2+4}$$

$$= \frac{-(m-2)}{-(m-2)(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

Per tant, per a cada $m \neq \pm 2$, la solució és $\left(\frac{m(m+1)}{m+2}, 0, \frac{1}{m+2}\right)$.

- Cas II: $m = 2$

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Sabem que el sistema és compatible indeterminat. Si triangulem la matriu obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(després de primer

- restar a la segona fila dues vegades la primera
- restar a la tercera fila la primera

i després

- canviar de signe la segona fila
- anul·lar la tercera per ser múltiple de la segona.)

Per tant el sistema és equivalent a

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2 \\ y & = & 0 \end{array}\right\}$$

i substituint la segona equació en la primera i aillant obtenim que els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(2-2z, 0, z)}$.

Problema 3 (1.5 punts): Siguin A i B dues matrius invertibles d'ordre n i v el vector solució del sistema $A \cdot x = b$, on x indica el vector d'incògnites. Justifiqueu que el sistema $B \cdot x = A^{-1} \cdot b - v$ té solució única i trobeu la solució.

Resolució:

Que el vector v sigui solució del sistema $A \cdot x = b$, on x indica el vector d'incògnites vol dir que $A \cdot v = b$ o, equivalentment, com que A és invertible, $A^{-1} \cdot A \cdot v = A^{-1} \cdot b$ i per tant es compleix $A^{-1} \cdot b - v = 0$.

Així doncs el sistema $B \cdot x = A^{-1} \cdot b - v$ és un sistema homogeni i com que la matriu B és invertible (quadrada amb determinant diferent de zero), és un sistema homogeni de rang màxim igual al nombre d'incògnites. Per tant el sistema és compatible determinat, i la solució única serà el vector 0.