

## PAC1

### Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

### Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

### Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudo-grafs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.



## Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) A l'antic sistema de matriculació de cotxes, el provincial alfanumèric, les matrícules constaven d'un codi de província (d'un total de 52), 4 dígitos i finalment dues lletres de l'alfabet  $\{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ\}$ . L'any 2000 es va canviar el sistema i actualment les matrícules consten de 3 lletres i 4 dígitos. Les lletres són les de l'alfabet anterior excepte vocals i la lletra Q.

- En quin dels dos sistemes hi ha més matrícules?
- Quantes matrícules del primer tipus hi ha amb totes les xifres senars?
- Quantes matrícules del segon tipus hi ha que tenen alguna lletra repetida?
- Considerem la funció  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que, donada la longitud  $n$  d'un alfabet, ens retorna quantes matrícules del segon tipus hi ha fent servir un alfabet d'aquesta longitud. Justifiqueu si aquesta funció és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent per calcular el màxim comú divisor dels nombres enters  $n$  i  $m$  on  $n > m$ .

```

1  funció Mcd( $n, m$ )
2  inici
3       $r \leftarrow n$ 
4       $p \leftarrow m$ 
5      mentre  $r \bmod p \neq 0$  fer
6           $d \leftarrow p$ 
7           $p \leftarrow r \bmod p$ 
8           $r \leftarrow d$ 
9      fimentre
10     retorn  $p$ 
11 fi
```

- Calculeu el resultat de les següents crides:  $Mcd(7, 5)$ ,  $Mcd(121, 22)$ ,  $Mcd(176715, 23562)$ .
- Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions que efectua l'algorisme.
- Determineu, en funció d' $n$ , la complexitat de l'algorisme.
- Proposeu una millora de l'algorisme. Millora aquest algorisme el nombre d'operacions? I la complexitat?

3. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent escenari que es pot modelar fent servir teoria de grafs i responeu a les preguntes. En Bernat (B) organitza una festa a casa seva. Decideix convidar a 5 amics seus i els hi ofereix que vinguin a la festa amb altres amics. Quan els convidats arriben a la festa, només es saluden entre ells els que ja es coneixien prèviament. En total hi ha 10 persones a la festa  $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ , que estan ordenades en ordre decreixent segons el nombre de persones que coneix cadascuna. Sabem que B i C han saludat a 5 persones i E, F, G, H, I i J només a 1 persona.

- A quantes persones ha saludat A i a quantes D?
- Dibuixeu un graf que es correspongui a l'escenari descrit.
- Doneu un subgraf complet màxim del graf anterior. En termes de l'escenari plantejat, que compleixen les persones que formen part d'aquest subgraf?
- Doneu la seqüència de graus del graf complementari i expliqueu que signifiquen aquests valors a l'escenari plantejat. Fent servir aquesta seqüència, quantes presentacions s'han de fer per tal que tots els assistents a la festa es coneguin entre ells?



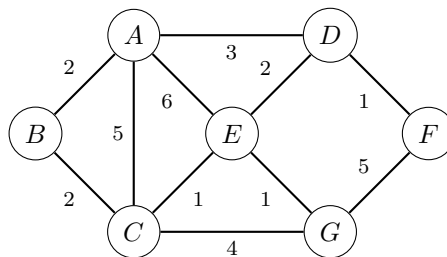
4. (Valoració d'un 20%) Considereu els grafs  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  i  $G_4$  definits de la forma següent:  $G_1 = C_3 \times T_2$ ,  $G_2 = (N_1 + T_6)^c$ ,  $G_3$  té com a llista d'adjacències

$$\begin{array}{lcl} 1 & : & 3 \\ 2 & : & 3, 4 \\ 3 & : & 1, 2 \\ 4 & : & 2 \end{array}$$

i la matriu d'adjacències de  $G_4$  és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Indiqueu justificadament quins grafs són bipartits. En cas afirmatiu, doneu dos conjunts que determinin la bipartició.
- (b) Indiqueu quins grafs són connexos. En cas afirmatiu, justifiqueu quin és el nombre màxim d'arestes que es poden eliminar sense que deixi de ser connex.
- (c) Indiqueu, justificadament, quins dels grafs són autocomplementaris. En cas afirmatiu, doneu l'isomorfisme.
- (d) Doneu, per a cada cas, un subgraf  $r$ -regular màxim.
5. (Valoració d'un 20%) El següent graf representa el conjunt de caps elèctriques d'un comerç i la longitud dels tubs que les uneix



- (a) Hem de passar un cable de 6mm que uneixi totes les caps de manera que des d'una capsa, puguem trobar sempre un camí cap a qualsevol altra. Quina longitud ha de tenir per tal de minimitzar-ne el cost?
- (b) Sota de la capsa  $F$  s'ha instal·lat l'ordinador i a la capsa  $G$  es posa una webcam. Quin és l'itinerari que permet que el cable sigui més curt?
- (c) Quines són les capses que necessiten més longitud de cable per arribar d'una a l'altra?
- (d) Si volem instal·lar webcam a totes les capses, on instal·larem l'ordinador de manera que la longitud de cable mitjana entre l'ordinador i les webcams sigui mínima, suposant que s'ha efectuat el cablejat mínim de l'apartat a)?



## Recursos

### Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

### Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

## Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

## Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC1\_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 22/10/2014**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**