# Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

# Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

# Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

# Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %=10 %+10 %)

   *a*) En una imagen digital queremos codificar la cantidad d eluz en cada punto con una cadena de 8 bits. ¿Cuántos valores son posibles en cada punto?

   *b*) De estos ocho bits, ¿cuántos contienen exáctamente 4 unos?

   ---

   **Solución:**

   *a*) En cada punto habrá $VR(2,8) = 256$ posibles valores.

   *b*) Una vez determinadas las posiciones de los unos, el byte queda completamente depterminado. Así habrán $\binom{8}{4} = 70$ cadenas.

   ---

2. (Valoración de un 20 %=2.5 %+2.5 %+5 %+5 %+5 %)

   Considerar el siguiente algoritmo:

   **<u>función</u>** $|\,func\,|\,(n,m)$
     **<u>inicio</u>**
       $p \leftarrow 0$
       **<u>mientras</u>** $n \neq 0$
           **<u>si</u>** $n \mod 2 = 1$
             $p \leftarrow p + m$
           **<u>finsi</u>**
           $n \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
           $m \leftarrow 2 \cdot m$
       **<u>finmientras</u>**
       **<u>retorno</u>** $p$
     **<u>fin</u>**

   donde $\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z}\,,\, k \leq x\}$ y la función $\mod$ calcula la paridad de un entero $x$, esto es, será $x \mod 2 = 1$ si es impar y 0 en cualquier otro caso.

   *a*) Calcular el resultado de *func*$(26, 47)$.

   *b*) ¿Es *func* una función simétrica? (esto es, $func(m,n) = func(n,m)$)

   *c*) ¿Qué calcula el algoritmo?

*d*) ¿El número de iteraciones del algoritmo depende del ordre de las entradas $m$ y $n$?

*e*) Determinar, en función de $n$, la complejidad del algoritmo.

---

**Solución:**

*a*) $func(26, 47) = 1222$. En efecto,

| $n$ | $m$ | |
|---|---|---|
| 26 | 47 | |
| 13 | 94 | 94 |
| 6 | 188 | |
| 3 | 376 | 376 |
| 1 | 752 | 752 |
| | | 1222 |

*b*) Sí, es simétrica.

*c*) El algoritmo calcula el producto de dos enteros $m$ y $n$. Se trata de la conocida también como multiplicación *rusa*.

*d*) Sí. Observar que para calcular $func(n, m)$ hace $\log_2 n$ iteraciones mientras que para calcular $func(m, n)$ hace $\log_2 m$.

*e*) $O(\log_2 n)$ .

---

3. (Valoración de un 20 %=5 %+5 %+5 %+5 %)

Sea un conjunto de cuatro grafos $G_1, G_2, G_3, G_4$ definidos sobre los vértices $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a partir del los conjuntos de aristas:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\{1,8\},\{2,7\},\{2,8\},\{3,6\},\{3,7\},\{3,8\},\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{4,8\},\\
&\quad \{5,6\},\{5,7\},\{5,8\},\{5,9\},\{6,7\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,8\},\{7,9\},\{8,9\}\}\\
A_2 &= \{\{0,1\},\{0,4\},\{0,6\},\{1,2\},\{1,7\},\{2,3\},\{2,8\},\{3,4\},\\
&\quad \{3,9\},\{4,5\},\{5,7\},\{5,8\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,9\}\}\\
A_3 &= \{\{0,3\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,6\},\{0,7\},\{0,8\},\{0,9\},\\
&\quad \{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{1,7\},\{1,8\},\{1,9\},\\
&\quad \{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{2,8\},\{2,9\},\\
&\quad \{3,6\},\{3,7\},\{3,8\},\{3,9\},\{4,6\},\{4,7\},\{4,8\},\{4,9\},\\
&\quad \{5,6\},\{5,7\},\{5,8\},\{5,9\}\}\\
A_4 &= \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{6,7\},\{6,8\},\\
&\quad \{6,9\},\{7,8\},\{7,9\},\{8,9\}\}
\end{aligned}$$

Para cada uno de los grafos anteriores:

*a*) Calcular el orden, la medida, el diámetro y la secuencia de grados. Colocar los valores en la tabla siguiente:

| | $n$ | $m$ | $D$ | Secuencia de grados |
|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | | | | |
| $G_2$ | | | | |
| $G_3$ | | | | |
| $G_4$ | | | | |

*b*) Justificar cuales son regulares, cuales son conexos y cuales son bipartidos.

*c*) Escribir las matrices de adyacencias de $G_3$ y $G_4$. ¿Qué relación hay entre estos dos grafos?

*d*) ¿Se puede afirmar que cualquier grafo con la misma secuencia de grados que $G_1$ es isomorfo a $G_1$?

---

**Solución:**

*a*) La tabla siguiente resume el orden, la medida, el diámetro y la secuencia de grados de cada grafo:

| | $n$ | $m$ | $D$ | Secuencia de grados |
|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | 10 | 20 | $\infty$ | $0,1,2,3,4,4,5,6,7,8$ |
| $G_2$ | 10 | 15 | 2 | $3,3,3,3,3,3,3,3,3,3$ |
| $G_3$ | 10 | 33 | 2 | $6,6,6,6,7,7,7,7,7,7$ |
| $G_4$ | 10 | 12 | $\infty$ | $2,2,2,2,2,2,3,3,3,3$ |

*b*) $G_1$ no es regular, ni bipartido, ni conexo. $G_2$ es regular y conexo, pero no es bipartido. $G_3$ es no regular, conexo y no bipartido. $G_4$ no es regular, ni bipartido, ni conexo.

*c*) Las matrices de adyacencias son

$$B_{G_3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad B_{G_4} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Observando las matrices de adyacencias se puede afirmar que $G_3$ y $G_4$ son complementarios.

*d*) Efectivamente. Cualquier grafo con esta secuencia de grados debe ser isomorfo a $G_1$. Para comprobarlo, sólo se necesita analizar la secuencia de grados. Puesto que hay un vértice de grado 0, el vértice de grado 8 debe ser adyacente a todos los demás vértices (excepto el de grado 0). Si eliminamos estos dos vértices, nos queda un grafo con la secuencia de grados $0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6$. De nuevo, puesto que hay un vértice de grado 0, el vértice de grado 6 debe ser adyacente a todos los demás vértices (excepto el de grado 0). Siguiendo el mismo razonamiento, llegaremos a que existe una sola manera de definir las adyacencias entre los vértices. Esto significa que el grafo $G_1$ está totalmente determinado por la secuencia de grados de sus vértices y, por tanto, cualquier otro grafo con la misma secuencia de grados debe ser isomorfo a $G_1$.

---

4. (Valoración de un 20 %=10 %+10 %)

   a) Dodos los grafos $G$ y $G'$, construir un isomorfismo entre los dos.

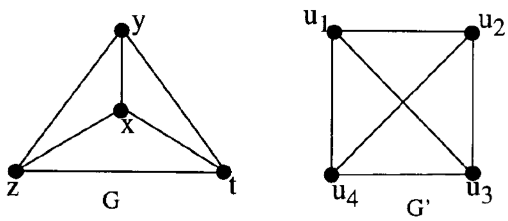


Figura 1: Grafos $G$ y $G'$

   b) Demostrar que dos grafos completos con el mismo número de vértices son isomorfos.

---

**Solución:**

a) Un isomorfismo entre $G$ y $G'$ viene determinado por la siguiente biyección $f$ entre los conjuntos de vértices $V$ y $V'$ de los grafs $G$ y $G'$ respectivamente:

$$f : V \longrightarrow V',$$

tal que $f(x) = u_1$, $f(y) = u_2$, $f(z) = u_3$ y $f(t) = u_4$.

b) Sean $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ dos grafs completos con el mismo número de vértices. Sean los respectivos conjuntos de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y $V' = \{v'_1, \ldots, v'_r\}$. Consideremos la aplicación $f : V \longrightarrow V'$ dada por $f(u_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, r$. Entonces $f$ es una biyección y por la definición de grafo completo, para todo par de vértices $v_i, v_j$ adjacentes, por ser $G'$ completo, también $f(v_i) = u_i, f(v_j) = u_j$ son adjacentes, y recíprocamente.

---

5. (Valoración de un 20 %=5 %+5 %+5 %+5 %) La siguiente tabla es la tabla de aplicación del algoritmo de Dijkstra sobre un grafo de 7 vértices:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\infty, 1)$ | $(0, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)^*$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ |
| $(1, 1)^*$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)$ | $(\infty, 1)$ | $(\infty, 1)$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)^*$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)$ | $(10, 2)$ | $(5, 2)$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)$ | $(9, 6)$ | $(5, 2)^*$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)$ | $(9, 6)^*$ | $(5, 2)$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)^*$ | $(11, 1)$ | $(9, 6)$ | $(5, 2)$ |
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(2, 1)$ | $(10, 1)$ | $(11, 1)^*$ | $(9, 6)$ | $(5, 2)$ |

determina, justificadamente, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

*a*) El diámetro del grafo es 11.

*b*) El grafo es conexo.

*c*) Los valores de las distancias dadas en la última linea de la tabla coincidiran con la segunda fila de la matriz que se obtiene aplicando el algoritmo de Floyd sobre el grafo.

*d*) Los valores de las distancias dadas en la última linea de la tabla coincidiran con la última linea de la tabla que se obtiene aplicando el algoritmo de Prim sobre el grafo.

---

**Solución:**

Recuerda que el algoritmo de Dijkstra calcula la distancia mínima desde un vértice inicial (el vértice 1) al resto de los vértices del grafo.

*a*) Falso, la distancia más grande del vértice 1 al resto es 11, pero como no sabemos las distancias entre todos los otros vertices, no podemos asegurar si ésta es la máxima.

*b*) Cierto, ya que hay un camino entre el vértice 1 y el resto de vértices, podemos afirmar que el grafo es conexo.

*c*) Cierto, el algortimo de Floyd calcula las distancias mínimas entre todos los vértices del grafo. En particular la segunda fila coincidirá con las distancias obtenidas con el algoritmo de Dijkstra comenzando en el vértice 1.

*d*) Falso, el algoritmo de Prim no se puede utilizar para calcular distancias entre vértices del grafo.

---

# Recursos

## Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

## Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

# Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

# Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 30/03/2017**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**