SOLUCIÓ EXAMEN 16 DE GENER DE 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Realitzeu l´operació següent i simplifica el resultat: $\dfrac{\overline{3+i}}{2+5i}$.
Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{3+i}$ representa el conjugat de $3+i$.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[3]{-27}$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica i polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{3+i}$; això és, el conjugat de $3+i$ que és $3-i$. Per tant, el que es demana trobar és: $\dfrac{3-i}{2+5i}$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar-lo:

$$\frac{3-i}{2+5i}=\frac{(3-i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)}=\frac{6-15i-2i-5}{2^2-(5i)^2}=\frac{1-17i}{4+25}=\frac{1-17i}{29}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{\overline{3+i}}{2+5i}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i}$$

b) Escrivim el complex -27 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{27^2+0^2}=27$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{0}{-27}\right)+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és nul·la (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa això mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}=3_{\frac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}\quad \text{per a k=0, 1, 2}$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=3$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=60^{\circ}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=60^{\circ}+120^{\circ}=180^{\circ}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=60^{\circ}+240^{\circ}=300^{\circ}$

Per tant, les tres arrels terceres del complex -27 són:

$$\boxed{3_{60^{\circ}}=3\cdot(\cos 60^{\circ}+i\sin 60^{\circ})=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boxed{3_{180^{\circ}}=3\cdot(\cos 180^{\circ}+i\sin 180^{\circ})=3(-1+0i)=-3}$$

$$\boxed{3_{300^{\circ}}=3\cdot(\cos 300^{\circ}+i\sin 300^{\circ})=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

Problema 2: Siguin A i B els subespais de R^4 següents:

A=$<(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)>$, $a\in R$

B=$<(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)>$, $a\in R$

a) (1,25 punts) Trobeu la dimensió d'A i de B en funció d'a. Trobeu una base per a cada subespai.
b) (1,25 punts) Si $a=2$ trobeu les coordenades del vector v=(2,0,2,2) en cada un dels subespais. Per a quins valors d'a són A i B el mateix espai vectorial?

Solució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-a\cdot(a-1)^3$$

Així per $a\neq 0$ i $a\neq 1$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió d'A també és 4 i $\{(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)\}$ són base d'A.

Si $a=0$ el rang de la matriu és 3 i per tant la dimensió d'A també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0)\}$.

Si $a=1$ el rang de la matriu és també 3 i per tant la dimensió d'A també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(0,0,0,1),(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0)\}$.

Per a B procedim de forma anàloga:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió de B també és 4 i $\{(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ són base de B.

Si $a=0$ el rang de la matriu és 3 i per tant la dimensió de B també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

b) Per a calcular les coordenades de v en A quan $a=2$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=2, t=2. Per tant les coordenades de v en A quan $a=2$ són (1,2,2,2).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a=2$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=0, t=0. Per tant les coordenades de v en B quan $a=2$ són (1,2,0,0).

Hem vist a l'apartat anterior que quant $a \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors els espais A i B tenen dimensió 4. Al ser subespais de R^4 de dimensió 4 són els dos R^4, és a dir, el mateix espai.

Si $a=1$ hem vist que A té dimensió 3 i B té dimensió 4 per tant no són el mateix espai vectorial.

Si $a=0$ hem vist que tant A com B tenen dimensió 3. Cal veure si són el mateix subespai. Com que la dimensió és igual, podem veure si un es dins de l'altre i això és suficient veure-ho amb els elements de la base. Recordem les bases trobades:

Base d'A quant $a=0$: $\{\left(-1,0,0,0\right),\left(-1,-1,0,0\right),\left(-1,-1,-1,0\right)\}$.

Base de B quant $a=0$: $\{\left(0,0,1,1\right),\left(0,1,0,1\right),\left(0,0,0,1\right)\}$.

Veiem directament que $\left(0,0,0,1\right)$ de la base B no es pot expressar com a combinació lineal d'elements de la base A.

Per tant A i B no són el mateix espai vectorial quant $a=0$.

Problema 3:

a) (1,25 punts) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z=0 \\ (4k+1)x-y-7z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

en funció dels valors de *k*.

b) (1,25 punts) Resoleu el sistema per a $k=1$.

<u>Solució:</u>

a) Les matrius de coeficients, *A*, i ampliada, *A'*, del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k-1 & k^2-1 & 0 \\ 4k+1 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i es tracta d'estudiar el rang(A) i el rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre *k* mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k^2-1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (k-1)\big((4k+1)(k+1) - 7 + (k+1) - (4k+1)\big) =$$
$$= (k-1)(4k^2+2k-6).$$

Quan igualem a zero i resolem l'equació de segon grau obtenim $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Observació: Si el càlcul del determinant es fa sense treure factor comú, aleshores cal aplicar la regla de Ruffini al polinomi $2k^3 - k^2 - 4k + 3$ i veure que té una arrel doble en $k = 1$ i que pot factoritzar com
$2k^3 - k^2 - 4k + 3 = (k - 1)^2(2k + 3)$

amb el que s'obtenen les mateixes solucions $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k = 1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i com que la primera fila és nul·la la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompatible.

b)El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ i podem prescindir de la primera equació perquè s'ha anul·lat. Passem la tercera equació a la primera i si aliquem el mètode de Gauss (a la segona equació li restem 5 vegades la primera) tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant $y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$

i substituint a la primera equació $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Problema 4: Considerem A=(2,0), B=(1,1), C=(0,1).

a) (1,25 punts) Sigui g el gir de 30º en sentit antihorari. Calculeu g(A), g(B) i g(C).

b) (1,25 punts) Sigui f l'escalatge de raó 2 des del punt (-1,-1). Calculeu f(A),f(B) i f(C).

Solució:

a) La matriu del gir d'angle 30º és:

$$\begin{pmatrix} \cos(30^o) & -\sin(30^o) & 0 \\ \sin(30^o) & \cos(30^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per a trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$g(A) = (\sqrt{3}, 1), g(B) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), g(C) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

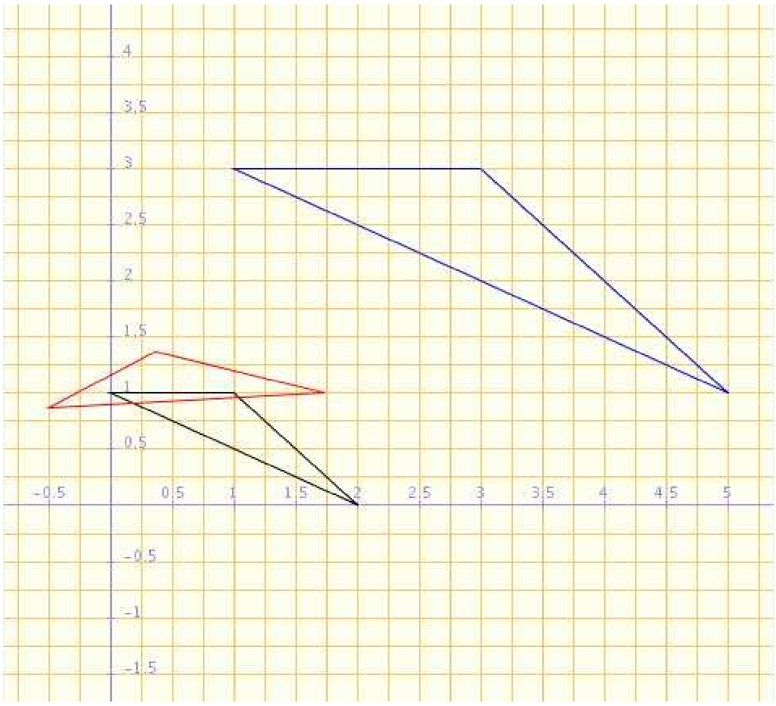
b) Per trobar la matriu de l'escalatge de raó 2, d'esquerra a dreta, fem la translació des del punt (-1,-1), després l'escalatge de raó 2, i després desfem la translació des del punt (-1,-1):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Per tant, f(A)=(5,1), f(B)=(3,3) i f(C)=(1,3).



NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º

Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$