

## Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

## Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

## Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer els principals conceptes de combinatòria.
- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

## Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20% = 10%+10%)

- (a) Determineu quantes funcions  $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{N}_b$  hi ha, on  $\mathbb{N}_z = \{1, 2, \dots, z\}$ , que compleixen les propietats següents.
- Que siguin injectives, amb  $a = 5$ ,  $b = 20$ , i tals que els nombres parells no tinguin antiimatge.
  - Que siguin exhaustives, amb  $a = 10$ ,  $b = 4$  i tals que cada  $x \in \mathbb{N}_4$  tingui exactament  $x$  antiimatges.
- (b) Volem trobar el nombre de maneres diferents d'ordenar les lletres de la paraula "CONSCIENCIA". Enuncieu aquest problema en termes del nombre de funcions que compleixen certes propietats, com les descrites en l'apartat anterior, definint quin és el conjunt d'entrada, el conjunt de sortida i quines propietats han de complir les funcions. De quantes maneres es poden ordenar?

---

### Solució:

- (a) i. Com que només els nombres senars poden tenir antiimatge, en realitat hem de definir funcions injectives de  $\mathbb{N}_5$  a  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ . En aquest cas tenim que el nombre de funcions injectives és  $V(10, 5) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ .
- ii. Sabem que  $x \in \mathbb{N}_4$  ha de tenir  $x$  antiimatges a  $\mathbb{N}_{10}$ . L'element 1 ha de tenir una antiimatge i podem escollir la seva antiimatge de 10 maneres diferents. Un cop fixada l'antiimatge de l'1, tenim 9 elements sense imatge i hem d'escollir dues antiimatges pel 2. Això és pot fer de  $\binom{9}{2}$  maneres diferents. Entre els 7 elements sense imatge, podem escollir les tres antiimatges del 3 de  $\binom{7}{3}$  maneres diferents. Ara només queden 4 elements sense imatge que seran les antiimatges del 4. Per tant, el nombre de funcions que demana l'enunciat és  $10 \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12600$ .
- (b) Com que la paraula té 11 lletres, el problema és equivalent a trobar el nombre de funcions exhaustives  $f : \mathbb{N}_{11} \rightarrow X$ , on  $X = \{C, O, N, S, I, E, A\}$ , de manera que la  $C$  tingui tres antiimatges, la  $N$  dues antiimatges, la  $I$  dues antiimatges i la resta de lletres una antiimatge cadascuna. El nombre d'ordenacions és  $\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1663200$ .

---

2. (Valoració d'un 25% = 15%+10%)

- (a) Les empreses  $A, B, C, \dots, K$  volen participar en un congrés internacional. Entre les empreses s'han de posar d'acord per escollir a la persona adequada que les representarà al congrés. Coincideixen en que qui les hagi de representar sigui de la junta directiva de l'empresa que s'hagi reunit amb el major nombre de juntes directives de les altres empreses el darrer any. De les empreses  $A$  i  $B$  diuen que s'han reunit cadascuna amb 9 de les altres empreses. De  $J$  i  $K$  no volen dir amb quantes juntes s'han reunit, però sabem que s'han reunit amb el mateix nombre. De  $C, D$  i  $E$  afirmen que han participat en 6 reunions més de les que ha fet  $J$ ; i de  $F$  i  $G$  que han participat en 4 reunions més que  $J$ . Finalment, de  $H$  i  $I$  diuen que han participat en 2 reunions més que  $J$ . Sabent que les juntes directives de totes les empreses s'han reunit com a mínim amb una altra junta, indiqueu de quina empresa seria la persona que hauria de representar a totes les empreses en el congrés internacional. Justifiqueu la resposta utilitzant la teoria de grafs.
- (b) Per a quins valors de  $n$ , on  $n$  és el nombre de vèrtexs, existeix un graf  $G = (V, A)$  3-regular tal que el seu graf complementari  $\overline{G} = (V, \overline{A})$  tingui 3 arestes menys que  $G = (V, A)$ ? Justifiqueu la resposta adequadament per a tot valor de  $n$ . En cas contrari, la resposta serà considerada incorrecta.

---

### Solució:

- (a) Per esbrinar l'empresa on la seva junta directiva s'ha reunit amb més juntes directives d'altres empreses, modelem el problema en termes de grafs. Cada vèrtex representa una empresa. Entre dos vèrtexs hi ha una aresta si les corresponents juntes directives s'han reunit. A partir de l'enunciat, sabem que els graus dels vèrtexs són els següents:  $g(A) = 9, g(B) = 9, g(J) = x, g(K) = x, g(C) = x + 6, g(D) = x + 6, g(E) = x + 6, g(F) = x + 4, g(G) = x + 4, g(H) = x + 2, i g(I) = x + 2$ . Així, obtenim la seqüència de nombres enters: 9, 9,  $x + 6, x + 6, x + 6, x + 4, x + 4, x + 2, x + 2, x, x$ . Aquesta no està necessàriament ordenada, i cal esbrinar per a quins valors de  $x$  ( $x \geq 1$ ) obtenim una seqüència gràfica.

Com que la seqüència conté 11 nombres enters, aleshores el grau màxim del graf és 10 (no podem tenir llaços), i per tant  $x + 6 \leq 10$ . A més, sabem que totes les juntes directives s'han reunit com a mínim amb una altra, de manera que els possibles valors d' $x$  són  $x = 1, 2, 3, 4$ . Si  $x$  és senar, aleshores la seqüència contindria 11 nombres senars: 9, 9,  $x + 6, x + 6, x + 6, x + 4, x + 4, x + 2, x + 2, x$  i  $x$ . Com que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell,  $x$  no pot ser senar. Per a la resta de valors,  $x \in \{2, 4\}$ , la seqüència pot ser gràfica, però no ho sabem del cert. Per aquest motiu cal aplicar l'algorisme de Havel-Hakimi. Després d'aplicar Havel-Hakimi obtenim que només per  $x = 2$  la seqüència és gràfica:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(0, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$
$(3, C)$	$(\infty, C)$	$(0, C)^*$	$(\infty, C)$	$(25, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$	$(\infty, C)$
$(3, C)^*$	$(\infty, C)$	$(0, C)$	$(\infty, C)$	$(24, A)$	$(\infty, C)$	$(22, A)$	$(\infty, C)$	$(11, A)$
$(3, C)$	$(29, I)$	$(0, C)$	$(31, I)$	$(24, A)$	$(\infty, C)$	$(19, I)$	$(38, I)$	$(11, A)^*$
$(3, C)$	$(22, G)$	$(0, C)$	$(24, G)$	$(24, A)$	$(\infty, C)$	$(19, I)^*$	$(38, I)$	$(11, A)$
$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$	$(, )$

Taula 1: Execució parcial de l'algorisme de Dijkstra.

$x = 2$	$x = 4$
9,9,8,8,8,6,4,4,2,2	10,10,10,9,9,8,8,6,4,4
8,7,7,7,5,5,3,3,2,1	9,9,8,8,7,7,5,5,3,3
6,6,6,4,4,2,2,1,1	8,7,7,6,6,4,4,2,2
5,5,3,3,1,1,1,1	6,6,5,5,3,3,1,1
4,2,2,1,1,0,0	5,4,4,2,2,1,0
1,1,0,0,0,0	3,3,1,1,0,0
	2,0,0,0,0
	-1,-1,0,0

És gràfica

No és gràfica

Per aquest motiu, la persona que representarà a totes les empreses pot ser tant de la junta directiva de l'empresa  $A$  com de la  $B$ .

- (b) Sigui  $m$  el nombre d'arestes del graf  $G$ . Al ser 3-regular, pel lema de les encaixades, sabem que  $3n = 2m$ . Per altra banda, sabem que el graf complementari  $\bar{G} = (V, \bar{A})$  té 3 arestes menys, de manera que  $m + m - 3 = n(n - 1)/2$ . Per tant,  $2(2m - 3) = n^2 - n$ ,  $6n - 6 = n^2 - n$ , i  $n^2 - 7n + 6 = 0$ . Resolent l'equació quadràtica, obtenim que les solucions són  $n = 1$  i  $n = 6$ .

Un graf amb  $n = 1$  vèrtex no pot ser 3-regular. En canvi per  $n = 6$ , sí que existeix un graf 3-regular que compleixi la condició. Per exemple, el graf bipartit complet  $K_{3,3}$  és un graf 3-regular amb 6 vèrtexs i 9 arestes, tal que el seu graf complementari té  $15 - 9 = 6$  arestes.

### 3. (Valoració d'un 20% = 5%+5%+5%+5%)

La Taula 1 mostra l'execució parcial de l'algorisme de Dijkstra per a un graf  $G = (V, A)$  dirigit (amb pesos assignats als arcs dins del conjunt dels nombres enters positius), on s'està buscant la distància per anar del vèrtex  $C$  al  $F$ . A més a més, sabem que des de  $B$  només surt un arc cap a  $H$  amb un pes de 3; i des de  $G$  surten tres arcs, cap a  $A$ ,  $B$  i  $D$  amb pesos de 7, 3, i 5, respectivament.

A partir de la informació facilitada, responeu a les següents preguntes. Les preguntes no justificades o mal justificades es consideraran errònies.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
(3,C)	(22,G)*	(0,C)	(24,G)	(24,A)	(∞,C)	(19,I)	(25,B)	(11,A)

Taula 2: Següent iteració de l'algorisme de Dijkstra.

- Podem afirmar que la distància per anar del vèrtex C a D és 24?
- Quin és el camí mínim i la distància del vèrtex I al G?
- Quin és el camí mínim i la distància del vèrtex C al G?
- Indica com quedaria la següent fila de la Taula 1. Recordeu indicar quin és el vèrtex pivot de la següent iteració.

---

### Solució:

- No, ja que el vèrtex D encara no ha estat escollit com a pivot, de manera que pot existir algun camí alternatiu de C a D de menor longitud.
  - Observeu que el vèrtex G s'actualitza quan el vèrtex I és el pivot. Així, el camí mínim del vèrtex I al G ve donat per l'arc  $I \rightarrow G$  amb un pes associat de 8.
  - Observeu que en l'última iteració el vèrtex pivot ha sigut el G, de manera que no hi ha cap camí alternatiu de C a G. Per esbrinar el camí mínim per anar de C a G cal desfer el camí. Observeu que, en l'última iteració mostrada, G és el vèrtex escollit com a pivot quan s'està pivotant des del vèrtex I. En la iteració anterior s'ha escollit I com a pivot quan s'està pivotant des del vèrtex A. Finalment, s'ha escollit A com a pivot quan s'està pivotant des del vèrtex C. De manera que el camí mínim per anar de C a G seria  $C \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow G$ . La distància del vèrtex C al G és 19.
  - La Taula 2 mostra la següent iteració de l'algorisme de Dijkstra, tal com es mostra en la última taula de l'Exemple 19 del Mòdul 3: Recorreguts i Connectivitat.
- 

4. (Valoració d'un 15%=5%+2%+8%)

Sigui  $G$  un graf dirigit ponderat amb 8 vèrtexs,  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Aplicant l'algorisme

de Floyd, obtenim els valors de  $(d_{i,j}^6)$  i  $(d_{i,j}^7)$  ( $i, j = 1, \dots, 8$ ) següents:

$$(d_{i,j}^6) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & 31 & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ 38 & 31 & 0 & 14 & 11 & 33 & 27 & 20 \\ 27 & 39 & 32 & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & \mathbf{15} & \mathbf{12} & 3 & 0 & \mathbf{21} \\ 8 & 7 & 36 & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(d_{i,j}^7) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & \mathbf{28} & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ \mathbf{35} & 31 & 0 & 14 & 11 & \mathbf{30} & 27 & 20 \\ 27 & 39 & \mathbf{27} & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & 15 & 12 & 3 & 0 & 21 \\ 8 & 7 & \mathbf{31} & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}.$$

En negreta apareixen les entrades que s'han modificat respecte a la matriu del pas anterior.

- Calculeu la següent matriu que obtenim si apliquem l'algorisme de Floyd. Marqueu les posicions que s'actualitzen respecte a la matriu del pas anterior  $(d_{i,j}^7)$ .
- Quin és el diàmetre del graf  $G$ ? Quins dos vèrtexs estan a distància el valor del diàmetre?
- Per quin(s) vèrtex(s) podem assegurar que passa o que no passa el camí mínim de 3 a 1? I el camí de 7 a 4? I de 4 a 3? Justifica totes les respostes.

### Solució:

- La matriu  $(d_{i,j}^8)$  de l'algorisme de Floyd és la següent:

$$(d_{i,j}^8) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{27} & 28 & 14 & \mathbf{29} & \mathbf{27} & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & \mathbf{18} & 24 & 11 \\ \mathbf{28} & \mathbf{27} & 0 & 14 & 11 & \mathbf{27} & 27 & 20 \\ \mathbf{14} & \mathbf{13} & 27 & 0 & \mathbf{15} & \mathbf{13} & 19 & 6 \\ \mathbf{17} & \mathbf{16} & 27 & 3 & 0 & \mathbf{16} & 22 & 9 \\ 11 & \mathbf{25} & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & 15 & 12 & 3 & 0 & 21 \\ 8 & 7 & 31 & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) El diàmetre del graf  $G$  és el valor més gran d'entre totes les distàncies entre parelles de vèrtexs. Per tant, a partir de la matriu final de l'algorisme de Floyd, podem dir que el diàmetre és 36 i es troba anant del vèrtex 6 al 3.
- (c) Tenint en compte només les entrades que es modifiquen en les matrius  $(d_{i,j}^6)$ ,  $(d_{i,j}^7)$  i  $(d_{i,j}^8)$ , podem saber si els camins passen o no pels vèrtexs 6, 7 i 8. El camí mínim de 3 a 1 passa pel vèrtex 8, però ja no podem assegurar res més. En canvi, el camí mínim de 7 a 4, passa pel vèrtex 6 i a més sabem que no passa pel 8, ja que l'entrada  $(7, 4)$  s'ha modificat per darrera vegada en la matriu  $(d_{i,j}^6)$ . Finalment, el camí mínim de 4 a 3 passa pel vèrtex 7 i no passa pel vèrtex 8, ja que l'entrada  $(4, 3)$  s'ha modificat per darrera vegada en la matriu  $(d_{i,j}^7)$ . Tampoc passa pel vèrtex 6, ja que ni el camí mínim de 4 a 7, ni el de 7 a 3 passa pel vèrtex 6.

Analitzant tots els casos possibles, a partir de la matriu final, també es pot arribar a obtenir quin és el camí mínim. Per exemple, podem saber que el camí de 3 a 1 no passa per 2, ja que  $d(3, 2) + d(2, 1) = 27 + 13 > 28$ . Així, tenim que el camí de 3 a 1 podria ser  $3 \rightarrow 8 \rightarrow 1$  o  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 1$ , el de 7 a 4 podria ser  $7 \rightarrow 6 \rightarrow 4$  o  $7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ ; i finalment el de 4 a 3 és  $4 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ .

#### 5. (Valoració d'un 20%) Qüestionari d'avaluació Moodle

Dins l'aula de l'assignatura, al Campus Virtual, trobareu una nova eina (Moodle) a la part dreta. En aquest Moodle hi ha un qüestionari amb diverses preguntes que heu de resoldre com a darrer exercici d'aquesta PAC.

Llegiu atentament les següents instruccions **abans d'obrir el qüestionari**:

- Els continguts que s'avaluen en aquest qüestionari corresponen al mòdul "Fonaments de grafs". També s'avalua el concepte de "component connex" que s'estudia al mòdul "Recorreguts i connectivitat". És important que hagueu assimilat aquests coneixements **abans d'iniciar el qüestionari**.
- El qüestionari estarà obert durant el termini de la PAC i el podeu resoldre quan vulgueu. De tota manera, un cop l'obriu tindreu un **temps limitat** per resoldre'l (1 hora).  
**Important:** El qüestionari quedarà tancat a les 23:59 de la data límit de lliurament. Si el comenceu a fer més tard de les 22:59 del darrer dia, tindreu menys d'una hora per fer-lo!
- Les respostes a les preguntes s'han d'introduir directament al qüestionari Moodle. No cal que les lliureu junt amb la resta de respostes de la PAC.
- Les preguntes del qüestionari són aleatòries: cada estudiant rebrà un enunciat diferent.
- En algunes preguntes haureu d'introduir la resposta en un format específic (p. ex. amb els valors ordenats d'una determinada manera i sense espais). És molt important **seguir fidelment el format indicat** a l'introduir la vostra resposta.

- Disposeu de **2 intents** per resoldre el qüestionari. L'objectiu de tenir dos intents és poder solventar possibles problemes que hagueu tingut durant la realització del qüestionari, ja siguin problemes tècnics o bé que hagueu obert el qüestionari per error. Per tant, heu de tenir en compte que:
  - La nota que obtindreu del qüestionari serà la del vostre darrer intent.
  - Després del 1r intent, no rebreu la qualificació obtinguda ni rebreu feedback sobre la vostra proposta de solució. Per tant, no recomanem usar el 2n intent per intentar millorar nota, ja que pot ser que obtingueu una nota inferior.
  - Si useu el 2n intent, l'enunciat que tindreu serà diferent del del 1r intent.
  - Podeu realitzar els dos intents en dies diferents, sempre que sigui dins del termini de la PAC. Disposareu de 1 hora per cada intent.
  - Cada cop que inicieu el qüestionari compta com un intent, encara que no envieu la resposta. Per exemple, **si heu fet el 1r intent i torneu a obrir el qüestionari, invalidareu el vostre 1r intent i us quedareu amb la nota del 2n.**



## Recursos

### Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

### Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

## Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**. En cas que hagueu consultat recursos externs per respondre algun apartat, és necessari referenciar-los.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

## Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC1\_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 22/10/2020**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**