Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la PEC así como el enunciado y la resolución de la actividad.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Revisar y completar los conceptos sobre los números naturales y sus propiedades.
- Conocer el concepto de inducción matemática y su aplicación a la demostración de propiedades.
- Conocer el conjunto de los números complejos y entender su utilidad. Conocer cómo se representan y aprender a manipularlos.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán los números y el principio de inducción. En particular, se pondrá un énfasis especial en dos conjuntos concretos de números: los naturales y los complejos.

Recursos

Recursos Básicos

- El módulo 1 en pdf editado por la UOC.
- La calculadora CalcMe, tanto en su versión en línea como local.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927
- El aula Laboratorio CalcME.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales, a la que se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0-3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3-5)$: Suspenso alto (C-)

- $[5-7)$: Aprobado (C+)
- $[7-9)$: Notable (B)
- $[9,10]$: Excelente (A)

- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.

- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, en ningún caso, ésta no se guardará para otros semestres.

- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.

- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.

- Es necesario resolver un cuestionario Moodle que complementa esta PEC.

- Del cuestionario pueden realizarse 5 intentos. La nota del cuestionario es la máxima puntuación obtenida en los 5 intentos.

- En la realización de la PEC, se valorará:
  - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- **Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta *PEC1-evaluación*.**

- Recordad que es necesario que justifiques las respuestas.

- El nombre del fichero tiene que ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.

- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/
- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados. Para utilizar la i, de los números complejos, con CalcMe debéis utilizar el icono que aparece en la herramienta *Símbolos* (no la i del teclado del ordenador).
- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 24.00h. del día 08/03/2021**

1. Se define $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en la forma siguiente: $f(1) = 25$ y $\forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = f(n) + 4$. Responded:

   a) (Valoración 25 %) Examinando los primeros 5 valores de f, conjeturad una fórmula para f en términos de n.

   Solución:

   Vamos a comprobar los 5 primeros valores de f:

   Sabemos, por el enunciado, que $f(1) = 25$

   $f(2) = f(1) + 4 = 25 + 4$

   $f(3) = f(2) + 4 = 25 + 4 + 4 = 25 + 2{\cdot}4$

   $f(4) = f(3) + 4 = 25 + 2{\cdot}4 + 4 = 25 + 3{\cdot}4$

   $f(5) = f(4) + 4 = 25 + 3{\cdot}4 + 4 = 25 + 4{\cdot}4$

   En general, una fórmula para $f(n)$ es:

   $f(n) = 25 + (n-1){\cdot}4$

   ---

   b) (Valoración 25 %) Demostrad, por inducción, la fórmula del apartado anterior.

   Solución:

   Aplicamos la teoría que se explica en el apartado 2.3 de la página 14 del material del curso sobre el principio de inducción.

   Paso base: Para $n = 1$, tenemos $f(1) = 25 + (1-1){\cdot}4$, $f(1) = 25 + 0{\cdot}4$, $f(1) = 25$ la cual cosa es cierta puesto que así está definido en el enunciado del ejercicio.

   Paso inducción: Partimos de que $f(n) = 25 + (n-1){\cdot}4$ y queremos llegar a demostrar que $f(n+1) = 25 + (n+1-1){\cdot}4$, esto es, $f(n+1) = 25 + n{\cdot}4$.

   Por el enunciado del ejercicio sabemos que $f(n+1) = f(n) + 4$ (A)

   Además, sabemos, por hipótesis de inducción, que $f(n) = 25 + (n-1){\cdot}4$ (B)

   Con la cual cosa substituimos (B) en (A) y operamos:

   $f(n+1) = f(n) + 4 = 25 + (n-1){\cdot}4 + 4 = 25 + 4n - 4 + 4 = 25 + 4n$

   Llegados a este punto, tenemos que $f(n+1) = 25 + 4n$ que es lo que queríamos demostrar y la fórmula hallada en el apartado anterior es correcta.

   ---

2. Responded a los siguientes apartados:

 a) (Valoración 25 %) Obtened, en forma binómina, el resultado de la operación: $\frac{(1+ai)^2-(2i)^2}{-3+4i}$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

 Podéis encontrar vuestro IDP en el Campus UOC, Espacio Personal, Información Personal, Datos personales.

 Si tu IDP es 908573 y se pide "a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP", escribirás:

 Mi IDP es 908573, $a = 3$.

 Si tu IDP es 908573 y se pide "a es la primera cifra de la izquierda de vuestro identificador IDP", escribirás:

 Mi IDP es 908573, $a = 9$.

 Y resolverás el problema substituyendo este valor desde el principio de la resolución.

Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, después, cada alumno tiene que substituir su propio valor del IDP.

Operamos los cuadrados, entonces:

$\frac{(1+ai)^2-(2i)^2}{-3+4i} = \frac{(1+2ai+a^2i^2)-4i^2}{-3+4i} = \frac{1+2ai-a^2+4}{-3+4i} = \frac{(5-a^2)+2ai}{-3+4i}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador, tal como se dice en el apartado 3.3.4 de la página 26 del material escrito sobre la división de números complejos en forma binómica.

$\frac{(5-a^2)+2ai}{-3+4i} = \frac{((5-a^2)+2ai)\cdot(-3-4i)}{(-3+4i)\cdot(-3-4i)} = \frac{(5-a^2)(-3-4i)+(2ai)(-3-4i)}{9+16} = \frac{-15-20i+3a^2+4a^2i-6ai+8a}{25}$

Agrupamos parte real y parte imaginaria:

$\frac{-15-20i+3a^2+4a^2i-6ai+8a}{25} = \frac{-15+3a^2+8a}{25} + \frac{-20+4a^2-6a}{25}i$

Si, por ejemplo, la primera cifra de la derecha del IDP es 3, el resultado de la operación es: $\frac{36}{25} - \frac{2}{25}i$.

Así, las posibles soluciones de este ejercicio son:

a	parte real	parte imaginaria
0	$-0,6$	$-0,8$
1	$-0,16$	$-0,88$
2	$0,52$	$-0,64$
3	$1,44$	$-0,08$
4	$2,6$	$0,8$
5	4	2
6	$5,64$	$3,52$
7	$7,52$	$5,36$
8	$9,64$	$7,52$
9	12	10

---

b) (Valoración 25 %) Calcula las raíces cúbicas de -27 y halla el valor de la suma de las tres raíces.

Solución:

Para hallar las raíces cúbicas de -27 seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.

Primero escribimos el complejo -27 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$r = \sqrt{(-27)^2 + (0)^2} = 27$

$\theta = \arctan\left(\frac{0}{-27}\right) = 180^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como el afijo del punto buscado es $(-27, 0)$, el ángulo está entre el segundo y el tercer cuadrante, es decir, en 180°.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número -27 en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-27, 0)$, por lo cual es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-27 = 27_{180^\circ}$

Como que nos piden las raíces terceras tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27}_{\frac{180^o+360^o k}{3}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2$

Esto es, el módulo de las raíces es $r = \sqrt[3]{27} = 3$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{180^o+360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 180^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 300^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$3_{60^\circ}, 3_{180^\circ}, 3_{300^\circ}$

Para sumar las tres raíces no podemos hacerlo ya que los números los tenemos en polar y hay que pasarlos a forma binómica (ver apartado 3.4.3, página 35, sobre suma de números complejos en forma polar).

$3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -3$
$3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$
Sumamos las raíces, en forma binómica:
$(\frac{3}{2}) + (\frac{3\sqrt{3}}{2} i) + (-3) + (\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i) = 0$
Y observamos que la suma de las tres raíces es 0.