

EXAMEN 1

Presentación

Enunciados Examen 2

Asignatura: **05.611 Fundamentos físicos de la informática**

Semestre: **Curso 2018-19 Semestre 2**

Fecha: **08/06/2019**

Criterios de valoración

Distribución de la puntuación:

50 % Cuestiones (10 % cada cuestión)

50 % Problemas (25 % cada problema)

CUESTIONES

Cuestión 1

Se quiere diseñar una fibra óptica como la que ha esquematizada a la figura 1, con una apertura numérica $\sin \theta_{max}=0,5$ y un tiempo de propagación máximo de $5 \mu s$ por cada km de fibra. Este tiempo es el que se produce precisamente cuando un rayo entra a la fibra con un ángulo de incidencia θ_{max} . Calculáis los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, n_2 y n_3 respectivamente, para conseguir las características pedidas. Consideráis que el medio exterior es el vacío ($n_1 = 1$).

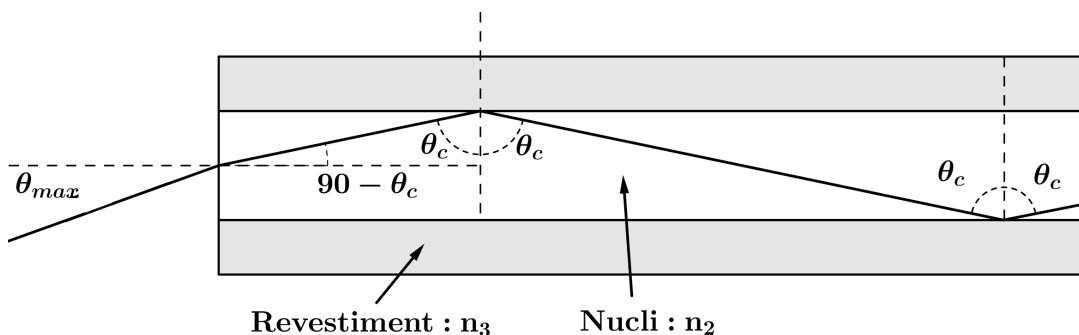


Figura 1: Fibra óptica estudiada a la cuestión 1

Solución

Dado que nos piden dos parámetros de la fibra, necesitamos plantear dos ecuaciones para encontrarlos. Las obtendremos a partir de los datos de la apertura numérica y del tiempo de retraso. Empezamos por la apertura numérica.

Tal y cómo se explica al apartado 2.5 del módulo de *Óptica y fotónica*, existe una relación matemática entre la apertura numérica y los índices de refracción, que reproducimos aquí por comodidad:

$$\sin \theta_{max} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2} \quad (1)$$

Si sustituimos los datos que nos proporciona el problema y elevamos al cuadrado, obtenemos:

$$0,5^2 = \left(\frac{n_2}{1}\right)^2 - \left(\frac{n_3}{1}\right)^2 \rightarrow n_2^2 - n_3^2 = 0,25 \quad (2)$$

Ahora necesitamos obtener una expresión del tiempo que tarda la luz por realizar su recorrido en zigzag. En primer lugar aplicaremos la ley de Snell a la superficie del cambio de medio núcleo-revestimiento, bajo la hipótesis de reflexión total (apartado 2.4 del módulo de *Óptica y Fotónica*), es decir, suponiendo que el ángulo de refracción hacia el revestimiento es de 90° :

$$n_2 \sin \theta_c = n_3 \sin 90^\circ \quad (3)$$

A partir de esta relación podemos aislar $\sin \theta_c$

$$\sin \theta_c = \frac{n_3}{n_2} \quad (4)$$

Calculamos la relación entre los lados a y c del triángulo rectángulo de la figura 2 tal como se muestra a continuación:

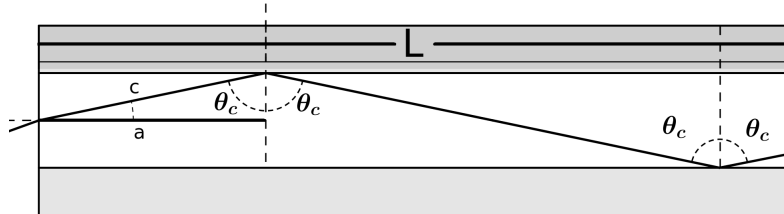


Figura 2: Relación entre las distancias en línea recta y máxima por la fibra de la cuestión 1

$$\sin \theta_c = \frac{a}{c} \quad (5)$$

A continuación aislamos el costado c :

$$c = \frac{a}{\sin \theta_c} = \frac{a}{\frac{n_3}{n_2}} = \frac{a \cdot n_2}{n_3} \quad (6)$$

Cómo que esta relación se mantiene por toda la fibra si tomamos como a la medida total de la fibra (L) podremos calcular la expresión por la distancia real que recorre un rayo que se propaga con el ángulo crítico, θ_c , por el interior de la fibra:

$$d = \frac{L \cdot n_2}{n_3} \quad (7)$$

Calculamos el tiempo de propagación teniendo en cuenta que la velocidad de propagación del rayo depende del índice de refracción n_2 :

$$d = v \cdot t = \frac{c}{n_2} \cdot t \quad (8)$$

Si sustituimos la ecuación (7) obtenemos una igualdad que nos permite aislar el tiempo t :

$$\frac{L \cdot n_2}{n_3} = \frac{c}{n_2} \cdot t \quad (9)$$

$$t = \frac{L \cdot n_2^2}{c \cdot n_3} \quad (10)$$

Si sustituimos los datos numéricos, obtendremos la segunda de las ecuaciones buscadas. Consideramos que $t = 5 \mu s$ y $L = 1 \text{ km}$

$$5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \frac{10^3 \text{ m} \cdot n_2^2}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot n_3} \quad (11)$$

Si aislamos n_2^2 obtenemos:

$$n_2^2 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^3} \cdot n_3 = 1,5 \cdot n_3 \quad (12)$$

Si sustituimos la ecuación (12) dentro de la ecuación (2), obtenemos la ecuación de 2º grado:

$$n_3^2 - 1,5n_3 + 0,25 = 0 \quad (13)$$

Por comodidad, recordamos la fórmula que permite encontrar las soluciones de una ecuación de 2º grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (14)$$

En el supuesto de que nos ocupa, la incógnita x es n_3 . Esta ecuación tiene dos soluciones, que son $n_3 = 1,31$ y $n_3 = 0,19$. De estas dos sólo tiene sentido la primera, puesto que el índice de refracción tiene que ser siempre superior a la unidad. Por lo tanto, el índice de refracción del revestimiento es:

$$n_3 = 1,31 \quad (15)$$

Si aplicamos la ecuación (12), calculamos el valor del índice de refracción del núcleo:

$$n_2 = \sqrt{1,5 \cdot n_3} = 1,40 \quad (16)$$

Cuestión 2

Dos ondas de luz con la misma frecuencia de 250 THz, con intensidades respectivas $I_1 = I_o = 20 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ y $I_2 = 4I_o$, interfieren dando lugar a una onda de intensidad total $I_T = I_o$. Qué tiene que ser la mínima diferencia de camino óptico entre las dos ondas porque se produzca esta interferencia?

Solución: Tenemos dos ondas de la misma frecuencia f . Su longitud de onda λ se puede calcular a partir de su relación con la velocidad v , que podéis encontrar al apartado 1.1.4 del módulo de *Óptica y Fotónica* (ecuación (8)). Obtenemos:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{250 \cdot 10^{12} \text{ Hz}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1200 \text{ nm} \quad (17)$$

Dado que nos dan la intensidad total, podemos aplicar la ecuación (61) que podéis encontrar al apartado 3.3.1 del módulo de *Óptica y Fotónica*, y que reproducimos aquí por comodidad:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (18)$$

donde δ es la diferencia de fase entre las dos ondas. Si sustituimos los datos que nos proporciona el enunciado, podremos calcular precisamente esta cantidad:

$$I_o = I_o + 4I_o + 2\sqrt{I_o \cdot 4I_o} \cos \delta \quad (19)$$

$$I_o = 5I_o + 4I_o \cos \delta \quad (20)$$

$$4I_o \cos \delta = -4I_o \quad (21)$$

$$\cos \delta = -1 \rightarrow \delta = 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad (22)$$

Al apartado 3.3.2 de módulo de *Óptica y Fotónica* hemos estudiado la relación entre la diferencia de fase y la diferencia de camino recorrido por dos ondas. La expresión matemática de esta relación viene dada por la ecuación (74) de este módulo y es la siguiente:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r \quad (23)$$

donde δ es la diferencia de fase, λ es la longitud de onda y Δr es la diferencia de camino óptico. Si sustituimos todos los datos calculados, podemos aislar la diferencia de camino óptico:

$$\pi = \frac{2\pi}{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \Delta r \rightarrow \Delta r = \frac{\pi \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{2\pi} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm} \quad (24)$$

Esta diferencia de fase de π es precisamente la que corresponde a una **interferencia destructiva**.

Fijémonos que la diferencia de camino óptico mínima es media longitud de onda, que en este caso es 600 nm.

Cuestión 3

Tenemos una distribución de carga coaxial formada por un hilo rectilíneo infinito cargado con una densidad lineal negativa $-\lambda(\text{C/m})$ y por una corteza cilíndrica de radio a , también indefinida, cargada con una densidad superficial positiva $\sigma(\text{C/m}^2)$, tal como se muestra en la figura 3.

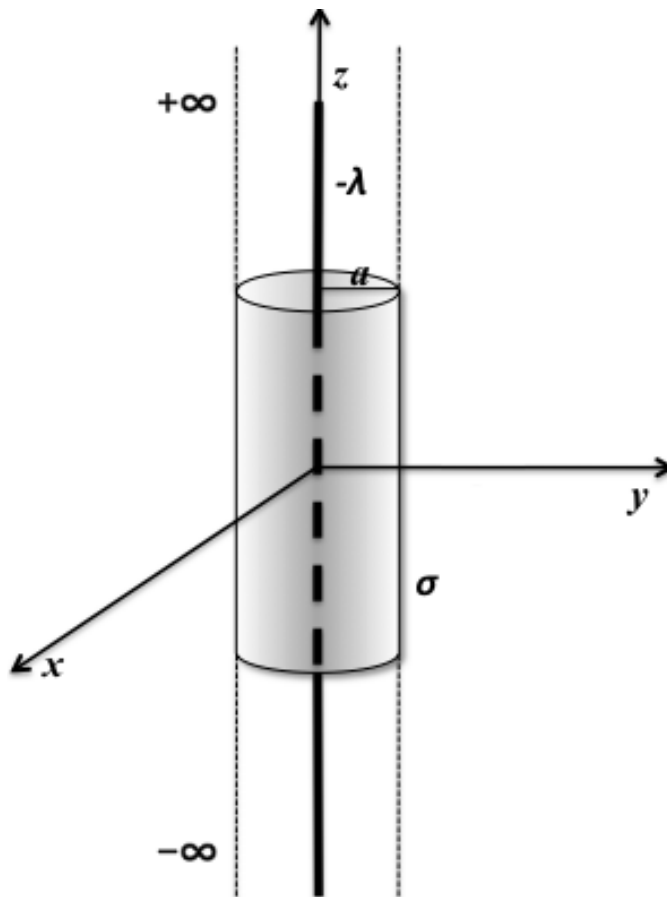


Figura 3: Distribución de carga considerada a la cuestión 3

Utilizáis el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en un punto situado a una distancia $r > a$ del eje de la distribución de carga (es decir, exterior a la superficie cilíndrica).

Solución

El Teorema de Gauss (Ecuación (53) del módulo de electrostática) nos dice que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga interior a esta superficie:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (25)$$

En este caso, el modelo de superficie de Gauss es un cilindro coaxial con la distribución de carga, pero ahora con un radio $r > a$. Tanto el hilo como la corteza son interiores a la superficie de Gauss,

de forma que las dos distribuciones de carga intervienen en el cálculo. El campo tiene dirección radial y su módulo sólo depende de la distancia r al eje. Consideramos que el sentido del campo es saliente del hilo, puesto que no podemos decir de entrada qué de las distribuciones de carga determinará este sentido. En la figura 4 tenemos representadas todas estas consideraciones:

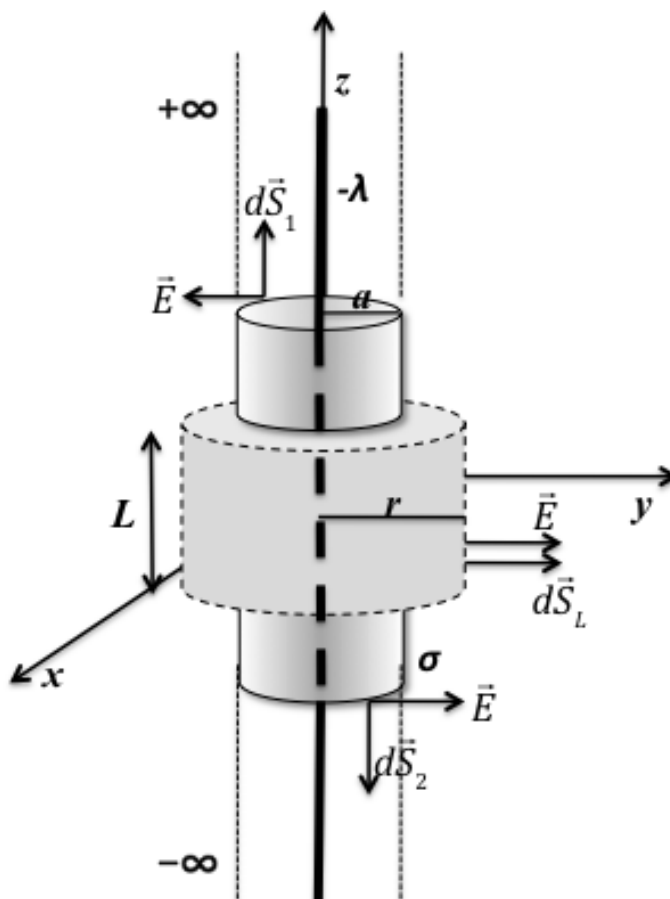


Figura 4: Distribución de carga con la superficie de Gauss utilizada cuando $r > a$.

Calculamos los dos miembros de la Ley de Gauss para igualarlos. Por un lado calculamos la parte correspondiente al flujo del campo \vec{E} aprovechando la simetría de la corteza cilíndrica estudiada:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0, \vec{E} \perp d\vec{S}_1} + \underbrace{\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0, \vec{E} \perp d\vec{S}_2} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \quad (26)$$

$$= \underbrace{\int_{S_L} E \cdot dS_L}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}_L} = \underbrace{E \int_{S_L} dS_L}_{E \text{ constando a } S_L} = E \cdot S_L = E \cdot 2\pi r L. \quad (27)$$

Por otro lado, se calcula la carga total de la parte de la superficie cerrada por la superficie de Gauss considerada. Tiene dos partes: la correspondiente a la corteza y la que ve dada por el hilo infinito. En el caso de la corteza, tenemos que multiplicar la densidad superficial de carga σ por la superficie cargada interior a S , es decir:

$$Q_{esc} = \sigma \cdot 2\pi a L \quad (28)$$

En el caso del hilo, tenemos que multiplicar la densidad lineal de carga $-\lambda$ por la longitud cargada interior a S , de forma que tenemos:

$$Q_{hilo} = -\lambda L \quad (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29) nos permiten escribir el segundo miembro de la Ley de Gauss:

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{Q_{esc} + Q_{hilo}}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma \cdot 2\pi a L - \lambda L}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma \cdot 2\pi a - \lambda)L}{\varepsilon_0} \quad (30)$$

Igualando los resultados de (27) y (30), según la Ley de Gauss (ecuación 25), obtenemos:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{(\sigma \cdot 2\pi a - \lambda)L}{\varepsilon_0} \quad (31)$$

De esta igualdad podemos aislar la expresión del campo eléctrico que se pide:

$$E = \frac{2\pi a \sigma - \lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad (32)$$

Cuestión 4

En cierta región del espacio, que podemos suponer que es el vacío, existe un campo de inducción magnética \vec{B} creado por diferentes corrientes, mostrados a la figura 5. A partir de la ley de Ampère, calculáis la *circulación* de este campo de inducción magnética a lo largo de la curva C indicada a la figura 5. Fijaos que I_1 y I_2 atraviesan la curva C , mientras que I_3 pasa por fuera.

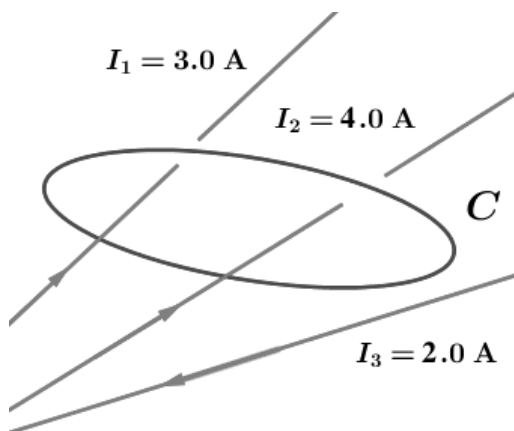


Figura 5: Corrientes que crean campo de inducción magnética a la cuestión 4

Solución

Tal como se explica al apartado 4.2 del módulo de *Magnetostática e inducción electromagnética*, donde se define el Teorema de Ampère, la circulación del campo de inducción magnética a lo largo de una línea cerrada es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa esta línea. La constante de proporcionalidad es la permeabilidad del medio, que en el caso del vacío es μ_0 . Podemos escribir:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tr} \quad (33)$$

dónde I_{tr} representa la intensidad limpia que atraviesa la línea cerrada C .

Para responder correctamente a la cuestión propuesta, es suficiente con calcular el segundo miembro de la ecuación 33.

Si observamos la figura 5, la línea C es atravesada por dos intensidades I_1 y I_2 que tienen el mismo sentido. Por lo tanto, podemos escribir:

$$I_{tr} = I_1 + I_2 = 3,0 \text{ A} + 4,0 \text{ A} = 7,0 \text{ A} \quad (34)$$

Si tomamos $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ y sustituimos el valor numérico de la ecuación 34 a la ecuación 33, obtenemos el valor de la circulación:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 7,0 \text{ A} = 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ N/A} \quad (35)$$

Cuestión 5

Un protón ($q = +1,6 \cdot 10^{-19}$ C) se mueve con velocidad $\vec{v} = 5,00 \cdot 10^6 \vec{j}$ m/s en una zona donde hay un campo magnético, \vec{B} que va en la dirección \vec{j} . La fuerza producida por este campo sobre el protón es: $\vec{F} = 4,0 \cdot 10^{-13} \vec{k}$ N (veáis la figura 6) . Calculáis la intensidad o módulo del campo magnético.

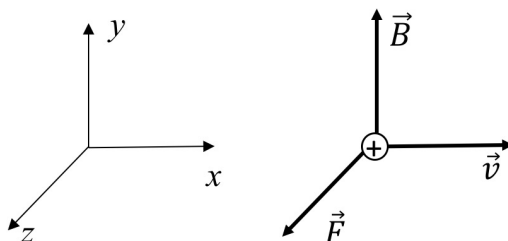


Figura 6: Protón en movimiento dentro del campo magnético considerado a la cuestión 3

Solución

Si un protón entra dentro de este campo de inducción magnética, \vec{B} , experimentará una fuerza tal y cómo hemos estudiado al apartado 3.1 del Módulo de *Magnetostática e Inducción Electromagnética*. Consideráis la ecuación 30 de este módulo, que reproducimos aquí por comodidad:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (36)$$

Vemos pues que la magnitud y dirección de la fuerza, vendrá determinada por el producto vectorial entre la velocidad del protón y el campo de inducción magnética. Aplicamos la regla de la mano derecha según indica la figura 7, para calcular el producto vectorial.

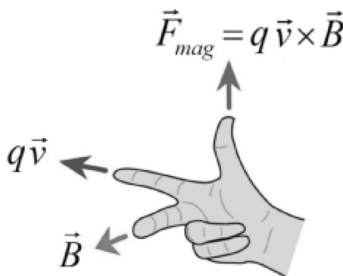


Figura 7: Regla de la mano derecha para encontrar la dirección de la fuerza magnética.

Apuntamos el dedo medio (campo \vec{B}) hacia el eje positivo y y el dicho índice ($q\vec{v}$) hacia el eje positivo x . Esto nos indica que la fuerza \vec{F} , representada por el dicho pulgar, apunta hacia el eje positivo z . Esto concuerda con la información que proporciona el enunciado.

Alternativamente, podemos aplicar la regla de la mano derecha haciendo girar los dedos de la mano derecha desde el primer vector al segundo vector del producto vectorial. Entonces, el dicho pulgar nos indica la dirección y sentido del resultado. En este caso, si vamos del eje x al eje y y hacemos girar los dedos de la mano en este sentido, el dicho pulgar nos indica el eje z . Esto nos permite escribir la siguiente relación entre los tres vectores unitarios \vec{j} , \vec{j} y \vec{k} , correspondientes a los ejes x , y y z , respectivamente:

$$\vec{y} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (37)$$

Si sustituimos los datos numéricos del enunciado a la ecuación (36) y aplicamos (37), obtenemos de manera sucesiva:

$$4,0 \cdot 10^{-13} \vec{k} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,00 \cdot 10^6 \vec{y} \times B \vec{j} \quad (38)$$

$$4,0 \cdot 10^{-13} \vec{k} = 8,0 \cdot 10^{-13} B \vec{y} \times \vec{j} \quad (39)$$

$$4,0 \cdot 10^{-13} \vec{k} = 8,0 \cdot 10^{-13} B \vec{k} \quad (40)$$

Ahora eliminamos el vector unitario \vec{k} de los dos miembros de la igualdad y aislamos B :

$$8,0 \cdot 10^{-13} B = 4,0 \cdot 10^{-13} \rightarrow B = \frac{4,0 \cdot 10^{-13}}{8,0 \cdot 10^{-13}} = 0,50 \text{ T} \quad (41)$$

PROBLEMAS

Problema 1

Queremos estudiar el circuito de la figura 8.

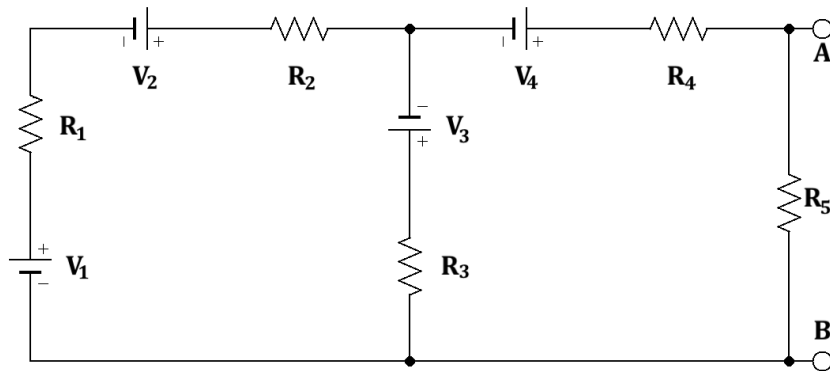


Figura 8: Circuito estudiado al problema 1

Los valores de los elementos del circuito son los siguientes: $V_1 = V_2 = V_3 = 2 \text{ V}$, $V_4 = 6 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 8 \text{ k}\Omega$ y $R_5 = 30 \text{ k}\Omega$. Para simplificarlo, calcularemos su equivalente de Thévenin. Se pide el siguiente:

- Calculáis la resistencia equivalente de Thévenin del circuito, vista desde los puntos A y B .
- Calculáis la tensión de Thévenin del circuito, vista desde los puntos A y B .
- Dibujáis el circuito equivalente de Thévenin resultante.

Solución:

- (a) El teorema de Thévenin dice que el comportamiento entre dos terminales de un circuito lineal se puede sustituir siempre por una fuente de tensión V_{th} en serie con una resistencia R_{th} (veáis apartado 6.3 del Módulo *Circuitos eléctricos*). Para obtener el equivalente de Thévenin del circuito, primero podemos encontrar el valor de la resistencia equivalente de Thévenin R_{th} entre los terminales A y B. Para hacerlo, tenemos que cortocircuitar las fuentes de tensión, quedándonos el circuito de la figura 9.

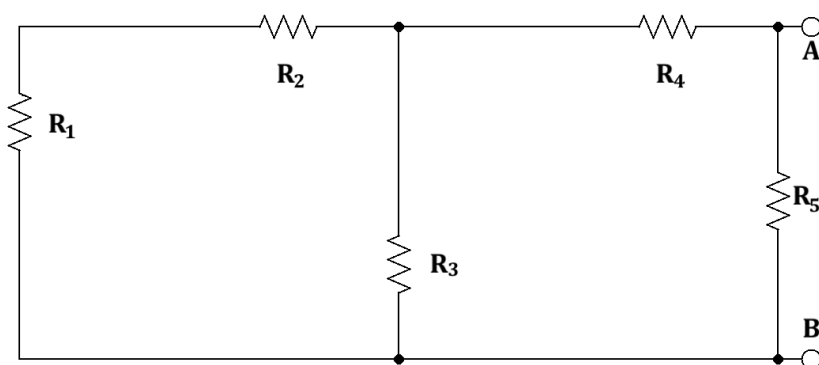


Figura 9: Cortocircuito de las fuentes de tensión para encontrar R_{th} .

Para analizar este circuito tenemos que empezar por el extremo más alejado de los puntos A y B. La figura 9 es equivalente a la figura 10. La resistencia R_{12} es la asociación serie de las resistencias R_1 y R_2 :

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 3 \text{ k}\Omega \quad (42)$$

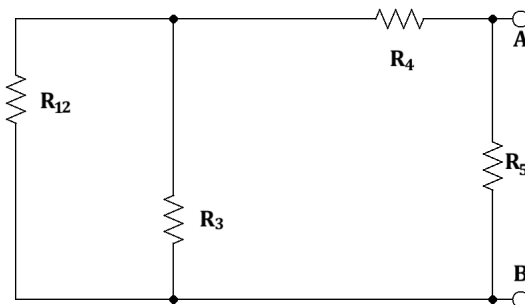


Figura 10: Asociación de resistencias para encontrar R_{th} (Y).

Si asociamos esta resistencia R_{12} en paralelo con R_3 , tenemos la resistencia equivalente R_{123} de la figura 11. Su valor está dado por:

$$R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = 2 \text{ k}\Omega \quad (43)$$

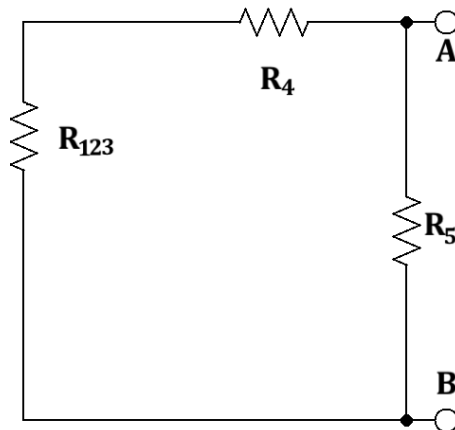


Figura 11: Asociaciones de resistencias para encontrar R_{th} (II).

El circuito de la figura 11 contiene dos resistencias R_{123} y R_4 en serie. Un golpe asociadas, tenemos las resistencia equivalente R_{1234} que podemos ver a la figura 12. Su valor está dado por

$$R_{1234} = R_{123} + R_4 = 10 \text{ k}\Omega \quad (44)$$

El circuito de la figura 12 contiene dos resistencias R_{1234} y R_5 en paralelo que, un golpe asociadas, dan lugar a la resistencia equivalente R_{th} :

$$R_{th} = \frac{R_{1234} \cdot R_5}{R_{1234} + R_5} = 7,5 \text{ k}\Omega \quad (45)$$

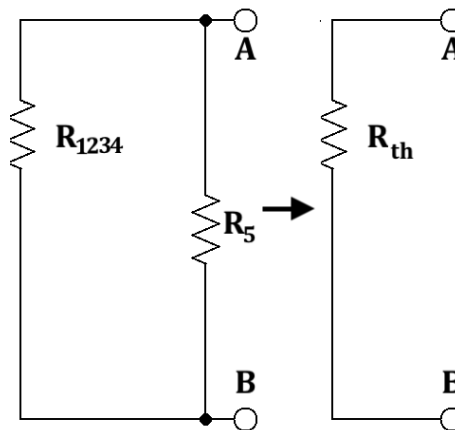


Figura 12: Asociaciones de resistencias para encontrar R_{th} (III).

- (b) Para encontrar la tensión de Thévenin, calcularemos la tensión entre A y B en circuito abierto, es decir, sin conectar nada más. Entonces, para resolver el circuito por el método de corrientes de malla o Segunda ley de Kirchhoff (apartado 5.2 del Módulo *Circuitos eléctricos* y figura 22) - ley de Kirchhoff de las tensiones, el redibuixem asignando las corrientes de malla tal y cómo se ve a la figura 13. Este método nos permite reducir el número de ecuaciones a sólo 2 (se podría resolver también asignando una intensidad I_3 a la rama que contiene R_2 y después añadir una tercera ecuación que relacionara I_1 , I_2 y I_3 . En los dos casos acabaríamos obteniendo el mismo resultado).

Por otro lado, para calcular la tensión equivalente de Thévenin V_{th} entre los terminales A y B , nos damos cuenta que esta tensión V_{th} se corresponde con la tensión que cae a R_5 , la cual obtendremos por el método de corrientes de malla.

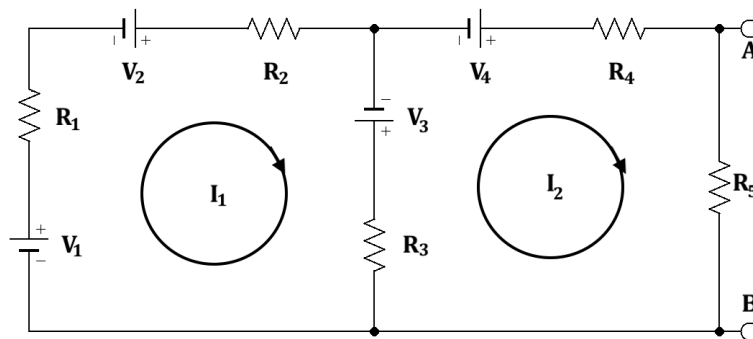


Figura 13: Asignación de las corrientes de malla al problema 1.

De esta forma, las ecuaciones de malla por el circuito serán:

$$\text{Malla 1 : } -V_1 - V_2 - V_3 + I_1 R_1 + I_1 R_2 + I_1 R_3 - I_2 R_3 = 0 \quad (46)$$

$$\text{Malla 2 : } V_3 - V_4 + I_2 R_3 + I_2 R_4 + I_2 R_5 - I_1 R_3 = 0 \quad (47)$$

Cuando trabajamos con corrientes de malla, es muy útil reescribir las fórmulas agrupando los términos por intensidades de malla en ninguna parte de por las resistencias. O sea:

$$\text{Malla 1 : } I_1(R_1 + R_2 + R_3) - I_2 R_3 = V_1 + V_2 + V_3 \quad (48)$$

$$\text{Malla 2 : } -I_1 R_3 + I_2(R_3 + R_4 + R_5) = V_4 - V_3 \quad (49)$$

Sustituimos los datos del enunciado y obtenemos:

$$\text{Malla 1 : } 9I_1 - 6I_2 = 6 \quad (50)$$

$$\text{Malla 2 : } -6I_1 + 44I_2 = 4 \quad (51)$$

Si multiplicamos la ecuación (51) por 2, multiplicamos la ecuación (50) por 3 y sumamos, obtenemos la ecuación:

$$120I_2 = 24 \quad (52)$$

Esto nos permite aislar I_2 :

$$I_2 = \frac{24}{120} = 0,2 \text{ mA} \quad (53)$$

Ahora podemos calcular la caída de tensión a R_5 a partir de la ley de Ohm:

$$V_{R_5} = R_5 I_2 = 30 \text{ k}\Omega \cdot 0,2 \text{ mA} = 6 \text{ V} \quad (54)$$

siendo este valor la tensión equivalente Thévenin:

$$V_{th} = V_{R_5} = 6 \text{ V} \quad (55)$$

- (c) A la figura 14 podemos ver como quedaría el circuito equivalente de Thévenin según los cálculos que hemos hecho en los apartados anteriores.

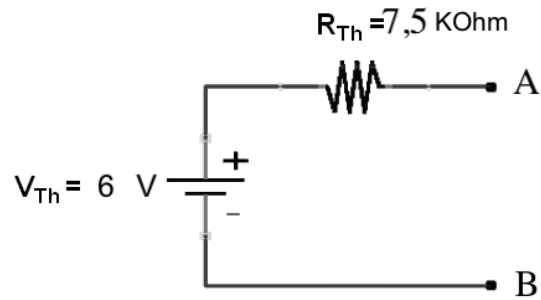


Figura 14: Circuito equivalente de Thévenin del Problema 1

Problema 2

Tenemos cuatro cargas eléctricas situadas en el plan XY, tal como se muestra a la figura 15:

- $q_1 = q$ situada en el punto $(a,0,0)$, situado al eje x.
- $q_2 = q$ situada en el punto $(0,a,0)$, situado al eje y.
- $q_3 = -q$ situada en el punto $(-a,0,0)$, situado al eje x.
- $q_4 = q$ situada en el punto $(0, -a,0)$, situado al eje y.

Dónde q y a tienen valores positivos, es decir, $q > 0$ y $a > 0$.

- (a) Calculáis el campo eléctrico a un punto situado al eje z a $P = (0,0,H)$.
- (b) Consideráis que $q = 5$ nC, $a = 3$ cm y $H = 4$ cm. Qué fuerza experimentará una carga $q_0 = 10$ nC situada a P ?

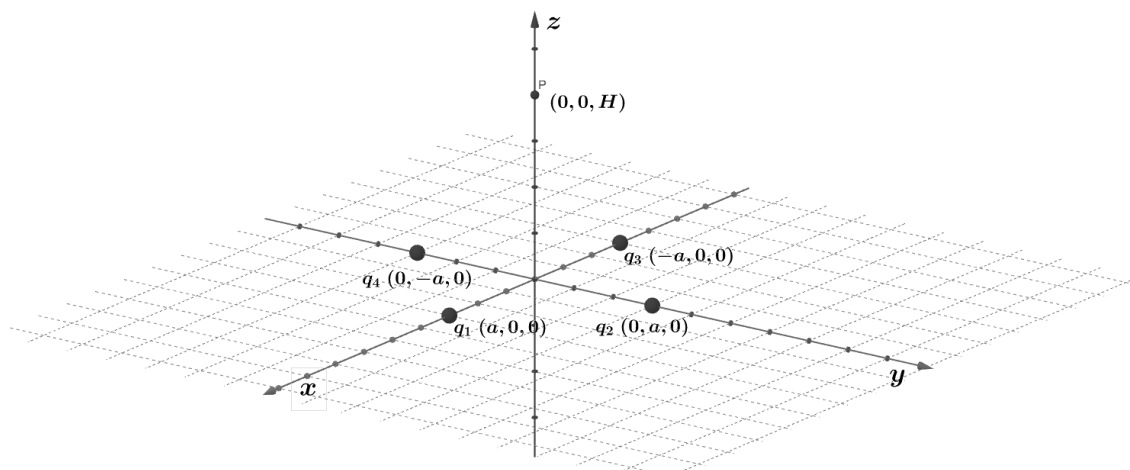


Figura 15: Disposición de las cargas en el problema 2.

Solución

- (a) Calculamos el campo creado por cuatro cargas puntuales aplicando el principio de superposición, que en este caso se convertiría en:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \quad (56)$$

Recordamos como se calculan cada uno de estos campos individuales. Según la ecuación (23) del Módulo de Electrostática (ver apartado 2.2.1), el campo que genera una carga puntual es el siguiente:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} u_{\hat{r} - \vec{r}'} \quad (57)$$

Dónde:

\vec{r} = vector de posición del punto donde estudiamos el campo

\vec{r}' = vector de posición de la carga q

Empezamos por \vec{E}_1 . Hagamos los cálculos previos que nos permitirán aplicar la fórmula (57):

$$\vec{r} = (0, 0, H) \quad (58)$$

$$\vec{r}'_1 = (a, 0, 0) \quad (59)$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_1 = (-a, 0, H) \quad (60)$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'_1\| = \sqrt{a^2 + H^2} = R \quad (61)$$

$$u\hat{n}_{o\vec{r}-\vec{r}'_1} = \frac{(-a, 0, H)}{R} \quad (62)$$

Si sustituimos estos datos a la ecuación (57), obtenemos \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{R^2} \frac{(-a, 0, H)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{R^3} (-a, 0, H) \quad (63)$$

donde se ha tenido en cuenta que $R = \sqrt{a^2 + H^2}$. Tenemos que hacer el mismo con \vec{E}_2 , \vec{E}_3 y \vec{E}_4 . Empezamos por \vec{E}_2 . Los cálculos previos dan:

$$\vec{r} = (0, 0, H) \quad (64)$$

$$\vec{r}'_2 = (0, a, 0) \quad (65)$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_2 = (0, -a, H) \quad (66)$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'_2\| = \sqrt{a^2 + H^2} = R \quad (67)$$

$$u\hat{n}_{o\vec{r}-\vec{r}'_2} = \frac{(0, -a, H)}{R} \quad (68)$$

Cómo antes, sustituimos los datos a la ecuación (57). Ahora obtenemos \vec{E}_2 :

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{R^2} \frac{(0, -a, H)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{R^3} (0, -a, H) \quad (69)$$

Nuevamente, hacemos el mismo con \vec{E}_3 . Empezamos por los cálculos previos:

$$\vec{r} = (0, 0, H) \quad (70)$$

$$\vec{r}'_3 = (-a, 0, 0) \quad (71)$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_3 = (a, 0, H) \quad (72)$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'_3\| = \sqrt{a^2 + H^2} = R \quad (73)$$

$$u\hat{n}_{o\vec{r}-\vec{r}'_3} = \frac{(a, 0, H)}{R} \quad (74)$$

Cómo antes, sustituimos los datos a la ecuación (57). Ahora obtenemos \vec{E}_3 :

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{R^2} \frac{(a, 0, H)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{R^3} (a, 0, H) \quad (75)$$

Nos queda ahora obtener \vec{E}_4 . Hagamos cómo antes:

$$\vec{r} = (0, 0, H) \quad (76)$$

$$\vec{r}'_4 = (0, -a, 0) \quad (77)$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_4 = (0, a, H) \quad (78)$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'_4\| = \sqrt{a^2 + H^2} = R \quad (79)$$

$$u\hat{n}_{o\vec{r}-\vec{r}'_4} = \frac{(0, a, H)}{R} \quad (80)$$

Cómo antes, sustituimos los datos a la ecuación (57). Ahora obtenemos \vec{E}_4 :

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{R^2} \frac{(0,a,H)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{R^3} (0,a,H) \quad (81)$$

Ahora ya podemos aplicar la ecuación (56) para sumar los cuatro campos:

$$\vec{E}_T = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (-a,0,H) + \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (0,-a,H) - \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (a,0,H) + \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (0,a,H) \quad (82)$$

Si sacamos factor común, y hacemos las sumas y restos de vectores, obtenemos:

$$\vec{E}_T = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} [(-a,0,H) + (0,-a,H) - (a,0,H) + (0,a,H)] \quad (83)$$

$$\vec{E}_T = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (-a-a, -a+a, H+H-H+H) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (-2a,0,2H) \quad (84)$$

$$\vec{E}_T = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R^3} (-2a\vec{y} + 2H\vec{k}) \quad (85)$$

- (b) La fuerza ejercida por las cuatro cargas sobre $q_0 = 10 \text{ nC}$ situada en su punto P se calcula con la ecuación (39) que podéis encontrar al apartado 2.3 del Módulo de Electrostatica, que reproducimos aquí por comodidad:

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}_T \quad (86)$$

Si tenemos en cuenta la expresión (85) resulta:

$$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_o R^3} (-2a\vec{y} + 2H\vec{k}) \quad (87)$$

Sustituimos los datos numéricos y realizamos las operaciones necesarias para llegar finalmente al valor de \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05^3} (-0,06\vec{y} + 0,08\vec{k}) \text{ N} \quad (88)$$

$$\vec{F} = 3,6 \cdot 10^{-3} (-0,06\vec{y} + 0,08\vec{k}) \text{ N} \quad (89)$$

$$\vec{F} = (-2,16 \cdot 10^{-4}\vec{y} + 2,88 \cdot 10^{-4}\vec{k}) \text{ N} \quad (90)$$