

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més importants de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un $20\% = 10\% + 5\% + 5\%$) Actualment amb Internet, les cadenes de missatges són molt freqüents, tot i que existeixen des de l'Edat Mitjana. Contenen missatges emocionalment manipuladors, o bé fan servir la superstició o l'humor per assegurar que la cadena continua. Aquí en tenim un exemple.

Això és al·lucinant!

Envia aquest missatge a un màxim de **5 persones** i, en el termini de 2 minuts, veuràs com no passa res. Conec a diverses persones que ho han fet i a totes les ha funcionat: **no ha passat res de res!** Funciona de debò. Si no t'ho creus, fes la prova, passa-ho el més aviat possible.

Si trenques la cadena, suspendràs Grafs i Complexitat i se't caurà el pèl i les orelles.

Si suposem que el missatge mai torna a una persona que ja l'ha enviat, aleshores la cadena de persones que envien i reben el missatge es pot representar amb un arbre amb arrel. L'arrel és, de fet, la persona que ha creat el missatge o bé que inicia aquesta cadena. Cada persona que rep el missatge és un node i els fills d'aquest node són les persones a qui reenvia el missatge. Inicialment, el creador de la cadena envia el missatge a 5 persones. Suposem que 5 minuts després de rebre el missatge, aquest es torna a reenviar. Tothom que l'ha rebut, *per si de cas*, el reenvia com a mínim a 1 persona.

- (a) Després de 20 minuts de començar la cadena, a quantes persones ha arribat com a mínim el missatge? I com a màxim?
- (b) Suposem ara que tothom que rep el missatge el reenvia al màxim nombre de persones. El missatge acaba d'arribar a exactament 15625 persones, que encara no han reenviat el missatge. Considereu l'arbre corresponent en aquest moment.
 - i. Quina és l'alçada de l'arbre? Quant de temps ha passat d'ençà que es va iniciar la cadena?
 - ii. Quantes fulles i vèrtexs interns té l'arbre? Quantes arestes?

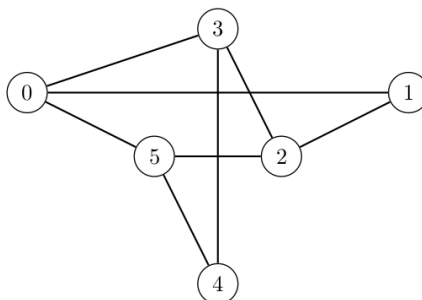
2. (Valoració d'un 20%=10%+10%) Considereu l'arbre binari tal que el recorregut aplicant l'algorisme DFS és $[A, B, C, F, E, G, I, D, H, J]$ i el recorregut aplicant l'algorisme BFS és $[A, B, D, C, E, H, F, G, I, J]$.

(a) Dibuixeu l'arbre i ompliu la següent taula:

Alçada	
Arrel	
Vèrtexs interns	
Vèrtexs terminals	
És complet?	
És equilibrat?	

(b) Doneu el recorregut en inordre, preordre i postordre d'aquest arbre.

3. (Valoració d'un 20%=5%+5%+5%+5%) Sigui G el següent graf:



- (a) Justifiqueu quina ha de ser la mida, l'ordre i la seqüència de graus del seu graf complementari G^c **a partir de** la mida, l'ordre i la seqüència de graus de G . A continuació, dibuixeu G^c .
- (b) Justifiqueu si G o G^c són grafs bipartits. Per a cada graf, en cas afirmatiu, doneu els dos conjunts de la bipartició.
- (c) Justifiqueu si G o G^c són hamiltonians. Per a cada graf, en cas que existeixi, doneu un cicle hamiltonià.
- (d) Justifiqueu si G o G^c tenen un circuit o un recorregut eulerià. Per a cada graf, en cas que existeixi, doneu un circuit o un recorregut eulerià, fent servir l'algorisme de Hierholzer.

4. (Valoració d'un 25%=5%+5%+5%+5%+5%) Considereu el graf G amb vèrtexs $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ i amb pesos a les arestes donats per la següent taula:

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	10	10			15
B	10		5		30		
C	10	5				5	
D	10				15	20	5
E		30		15		40	
F			5	20	40		10
G	15			5		10	

Per al graf G , a cada apartat, digueu quin algorisme feu servir i doneu tots els passos fins a obtenir el resultat final.

- Quin és el cost mínim per connectar tots els vèrtexs?
 - Existeix un arbre generador minimal que contingui l'aresta $\{A, C\}$? En cas afirmatiu, doneu l'arbre i justifiqueu si és únic.
 - Existeix un arbre generador minimal que contingui el camí mínim de A a E ? En cas afirmatiu, doneu l'arbre.
 - Existeix un arbre generador minimal que compleixi les condicions dels apartats (b) i (c) alhora?
 - Doneu l'arbre que contingui tots els camins de pes mínim de A a la resta de vèrtexs. És un arbre generador minimal? Compleix les condicions dels apartats (b) i (c) alhora?
5. (Valoració d'un 15%=5%+5%+5%) Considereu el graf G amb vèrtexs $\{A, B, C, D, E, F\}$ i amb pesos assignats a les arestes donats per la següent taula:

	B	C	D	E	F
A	15	20	15	20	15
B		25	25	35	30
C			25	30	30
D				30	25
E					25

- Fixeu-vos que en el graf verifica la desigualtat triangular. Trobeu un cicle H que passi per tots els vèrtexs una única vegada aplicant l'algorisme TSP-aproximat. (Indiqueu tots els passos realitzats fins arribar a la solució). Doneu també el cost del cicle.
- Doneu una cota inferior tenint el compte el cost d'un arbre generador minimal del graf. Doneu també la cota inferior obtinguda a partir de l'algorisme del TSP-aproximat. Quina de les dues és millor?
- És única la solució del TSP-aproximat? Si no ho és, doneu si és possible una altra solució que contingui el camí $\{A, C, E\}$. És millor que l'obtinguda en l'apartat (a)?

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 22/11/2018**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**