PEC2

Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles , así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un ábol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %)

   a) Si un grafo G conexo tiene 21 aristas, ¿cuál es el número mínimo de vértices que puede tener? ¿y el máximo? Justificar las respuestas.

   b) Sea T un árbol que contiene 4 vértices de grado 2, uno de grado 3, 2 de grado 4 y otro de grado 5, ¿cuántas hojas tiene este árbol?

   c) Un bosque tiene 30 vértices y lo forman 4 árboles, ¿cuántas aristas tendrá?

   d) Sea T un bosque con n vértices, m aristas y k árboles tal que cada árbol contiene un mínimo de 2 vértices. ¿Cuál es el número mínimo de hojas que puede tener el bosque? ¿Y el máximo? Justificar las respuestas.

Solución:

a) El número mínimo de vértices se obtiene cuando cada vértice tiene el grado más grande posible. Si denotamos n el número de vértices, entonces $n(n-1) = 2|A| = 42$. Resolviendo la ecuación se obtiene $n = 7$, que corresponde al grafo K_7. El número máximo será cuando G sea un árbol. Por lo tanto, $n = 22$.

b) Si denotamos por x el número de hojas del árbol, $x + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 2|A| = 2(n-1)$. Además, $n = x + 4 + 1 + 2 + 1 = x + 8$. Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos $x = 10$.

c) El número de aristas será $m = n - k = 30 - 4 = 26$ aristas.

d) Cada árbol contiene un mínimo de 2 hojas. Por lo tanto, el mínimo de hojas será $2k$. El máximo se obtiene cuando cada árbol tiene el máximo de hojas. Podemos distinguir dos casos, todos los nodos són hojas y cada árbol es isomorfo a T_2. En este caso, n es par y tendrá n hojas. En caso contrario, habrá $k-1$ árboles isomorfos a T_2 y un árbol que será un grafo estrella (todos los nodos son hojas excepto uno). En este caso, el número de hojas será $n-1$.

---

2. (Valoración de un 20 %)

   Queremos construir un ferrocarril para conectar cinco ciudades A, B, C, D y E. La tabla siguiente representa el coste (en millones de euros) de construir cada tramo de vía entre las cinco ciudades:

	A	B	C	D
B	14			
C	38	12		
D	10	35	18	
E	26	9	13	28

   a) ¿Cuál es el mínimo número de tramos que se tendrían que construir para interconectar las 5 ciudades?

   b) Utilizar el algoritmo de Kruskal para calcular el coste mínimo de la obra para conectar las cinco ciudades.

   c) Si aplicamos al algoritmo de Dijkstra al grafo ponderado representado por la tabla anterior, empezando por A, y consideramos los caminos mínimos obtenidos, obtendremos un árbol generador del grafo. Representar el grafo obtenido. ¿Es un árbol generador minimal este árbol?

   d) Para minimizar costes, se decide construir un tramo cada año de tal manera que siempre estemos conectados a la capital A. Utilizar el algoritmo más adecuado para calcular el orden en el que hay que construir el ferrocarril de tal manera que el coste total sea el menor posible.

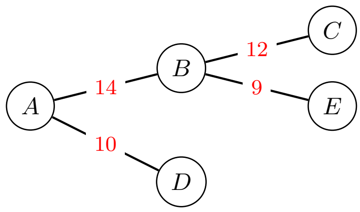
Solución:

a) La tabla del enunciado define un grafo ponderado y completo de 5 vértices, K_5. El número mínimo de tramos corresponde a la medida de un árbol generador de K_5 que tendría 4 aristas.

b) La tabla siguiente resume los pasos del algoritmo de Kruskal:

$(B,E)^*$	$(A,D)^*$	$(B,C)^*$	(C,E)	$(A,B)^*$	(C,D)	(A,E)	(D,E)	(B,D)	(A,C)

El gráfico siguiente muestra el árbol generador minimal obtenido:



Este árbol tiene un coste total de 45.

c) Si aplicamos el algoritmo de Dijkstra empezando por el vértice A obtendremos los caminos mínimos: $A-B$, $A-D$, $A-B-C$, $A-B-E$. El árbol obtenido coincide con el que hemos obtenido con el algoritmo de Kruskal y, en este caso, también es un árbol generador minimal del grafo.

d) El coste total mínimo ya sabemos que es 45 pero no podemos utilizar algoritmo de Kruskal porque no nos garantiza que el árbol obtenido es siempre conexo. En cambio, podemos utilizar el algoritmo de Prim. Utilizando este algotitmo se deduce que los tramos que se tienen que construir por orden son: $A-D$, $A-B$, $B-E$ i $B-C$.

---

3. (Valoración de un 20 %)

Los compiladores utilizan la notación posfija (Ejercicio 29 módulo 4 y `http://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_Polish_notation`) para representar y calcular las expresiones aritméticas de forma eficiente. Se caracteriza por situar los operadores despues de los operandos ($a\ b\ +$ en lugar de $a\ +\ b$). De la misma manera se definen las notaciones prefija (operadores antes que los operandos, $+\ a\ b$) y infija (el orden usual con operador en el medio).

a) Dibujar el árbol binario correspondiente a la expresión aritmética:

$$\frac{5+3^2-8}{4\times 3+6}$$

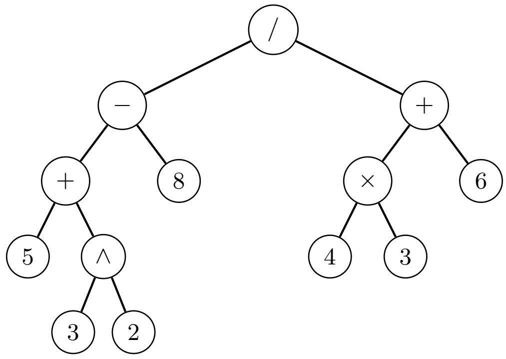
b) Dar las notaciones prefija, infija y posfija de esta expressión aritmética.

c) Si el árbol de una expressión aritmética tiene 10 operadores binarios, ¿cuántos operandos tendrá?

d) Para paralelizar dos operaciones aritméticas binarias hace falta que estas operaciones estén situadas en un mismo nivel del árbol binario. Si una expressión aritmética tiene 15 operandos, ¿cuál será el número máximo de operaciones binarias que podremos paralelizar?

Solución:

a) El árbol es el siguiente:



b) Las notaciones prefija, infija y posfija son respectivamente los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol binario.

Recorrido en preorden: / − + 5 ∧ 3 2 8 + × 4 3 6.

Recorrido en inorden: 5 + 3 ∧ 2 − 8 / 4 × 3 + 6.

Recorrido en postorden: 5 3 2 ∧ + 8 − 4 3 × 6 + /.

c) Los operandos son las hojas de un árbol completo y los operadores son los nodos internos. Entonces, $t = i + 1$ donde t representan las hojas y i los nodos internos. Por lo tanto, $t = 11$ operandos.

d) Para poder paralelizar el máximo número de operaciones hace falta que el árbol de la expressión sea completo y equilibrado. Si el número de hojas es 15 entonces $h = \lceil \log_2 15 \rceil = 4$. En el nivel 4 hay un máximo de 16 que corresponden a 8 operaciones. Como tenemos 15 hojas, eso significa en el último nivel tenemos 14 hojas que corresponden a 7 operaciones que podremos paralelizar.

Observemos que en el nivel 3 tenemos 8 vértices del árbol que corresponden a 4 operaciones que podríamos también paralelizar una vez calculadas las operaciones del nivel 4.

---

4. (Valoración de un 20 %)

Definimos el grafo $G_n = (V, A)$ de la forma siguiente: los vértices serán el conjunto de secuencias de n bits. Dos vértices serán adyacentes si se diferencian exactamente en 1 bit.

a) Dibujar G_n para $n = 2$ y $n = 3$.

b) ¿Cuál será el orden y la medida del grafo para cualquier n ($n > 1$). Justificar la respuesta.

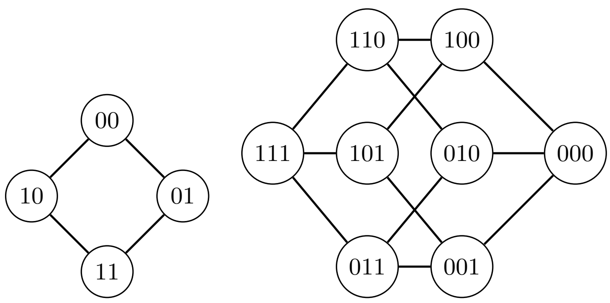
c) ¿Para qué valores de n el grafo es euleriano? Justificar la respuesta.

d) Encontrar un ciclo hamiltoniano de G_2 y uno de G_3.

e) Demostrar que G_n es un grafo hamiltoniano para todo $n > 1$.

Solución:

a) El gráfico siguiente muestra G_2 y G_3:

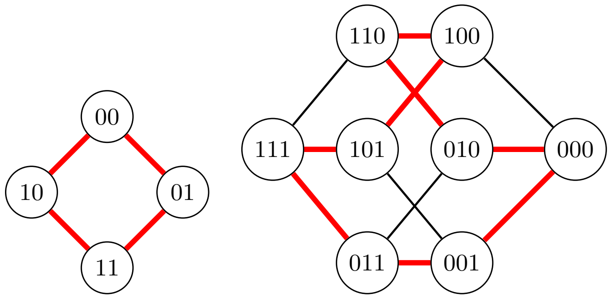


G_2 G_3

b) El orden será el número de secuencias binarias de longitud n. Por lo tanto, $|V| = 2^n$. Cada secuencia de longitud n tiene exactamente n vecinos. Por lo tanto, se trata de un grafo n-regular y, por la fórmula de los grados, $2^n \cdot n = 2|A|$. De donde $|A| = n \cdot 2^{n-1}$.

c) El grafo será euleriano si cada vértice tiene grado par. Como cada vértice de G_n tiene grado n entonces G_n será euleriano cuando n sea par.

d) El gráfico siguiente muestra un ciclo hamiltoniano en G_2 y uno en G_3:



G_2 G_3

e) Ya hemos visto que G_2 y G_3 son grafos hamiltonianos. Para $n > 3$ procederemos de la forma siguiente. Cogemos un camino hamiltoniano $H_n = v_1, v_2, \ldots, v_t$ ($t = 2^n$) en G_n, entonces construimos un camino hamiltoniano G_{n+1} añadiendo un 0 al camino H_n, a continuación invertimos el camino H_n y añadimos un 1. O sea, $H_{n+1} = v_1 0, v_2 0, \ldots, v_t 0, v_t 1, \ldots, v_2 1, v_1 1$. Añadiendo $v_1 0$ al final del camino tendremos un ciclo hamiltoniano en G_{n+1}.

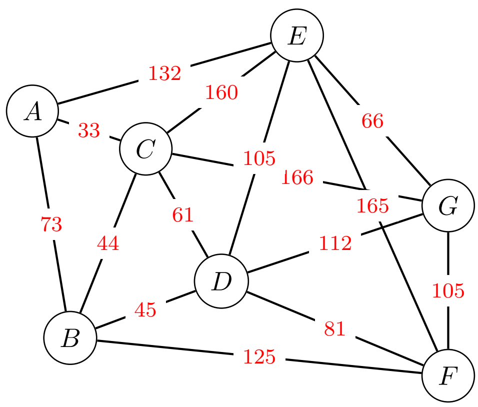
Por ejemplo, a partir del ciclo hamiltoniano de G_3, $000, 010, 110, 100, 101, 111, 011, 001, 000$ consideremos el camino $H_3 = 000, 010, 110, 100, 101, 111, 011, 001$ y construimos el camino $H_4 = 0000, 0100, 1100, 1000, 1010, 1110, 0110, 0010, 0011, 0111, 1111, 1011, 1001, 1101, 0101, 0001$. Añadiendo el primer vértice obtenemos el ciclo hamiltoniano $0000, 0100, 1100, 1000, 1010, 1110, 0110, 0010, 0011, 0111, 1111, 1011, 1001, 1101, 0101, 0001, 0000$ de G_4.

Las secuencias binarias H_n obtenidas de esta manera reciben el nombre de códigos de Gray y tienen importantes aplicaciones en la representación y transmisión de información (`http://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code`).

---

5. (Valoración de un 20 %)

El gráfico siguiente muestra la distancia entre diversas ciudades:



Un viajante quiere recorrer todas las ciudades sin repetir ninguna, volver al punto de partida y habiendo recorrido la menor distancia posible.

a) ¿Tiene alguna solución este problema? Justificar la respuesta.

b) Demostrar que, como mínimo, tendrá que recorrer 374 kms.

c) Demostrar que, en el peor de los casos, no tendría que hacer más de 506 Kms.

d) ¿Para qué clase de grafos un circuito euleriano da lugar a un ciclo hamiltoniano?

Solución: El planteamiento de este problema es equivalente al TSP.

a) La solución será un ciclo hamiltoniano de longitud total mínima. La condición necessaria es que exista un ciclo hamiltoniano y, en este caso, un posible ciclo sería: $A - B - C - D - F - G - E - A$.

b) El número de kms que tendría que recorrer estará limitado inferiormente por el árbol generador de peso mínimo. Si aplicamos el algoritmo de Kruskal obtenemos el árbol (A, C), (B, C), (B, D), (E, G), (D, F), (G, F) con un peso total de 374 kms.

c) Ya que el grafo satisface la desigualdad triangular, podemos calcular una solución al problema usando el algoritmo TSP-aproximado: Considerando el árbol obtenido en el apartado anterior con vértice inicial A obtenemos el recorrido en preorden: A, C, B, D, F, G, E que tiene un peso de 374. Añadiendo la arista (A, E) obtenemos un ciclo hamiltoniano de peso 506. Entonces, este ciclo es una cota superior al ciclo óptimo.

d) Un circuito euleriano pasa por todas les aristas del grafo y, por lo tanto, también pasa por todos los vértices aunque se puedan repetir. Un ciclo hamiltoniano pasa por todos los vértices sin repetir ninguno. Por lo tanto, la única posibilidad es que el grafo sea un ciclo, o sea, C_n, $n \geq 3$.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. Árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Cada ejercicio tiene un peso del 20 % de la nota final.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 30/04/2014**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**