

# Solució PAC 1

**2017-2018 Semestre 1**

05.557 Àlgebra

11.506 Matemàtiques I



1. (4 punts) Esbrineu, per inducció, si per a tot nombre natural  $n \geq 1$  es compleix que  $n^2 - 3n - 1 < 0$

**Solució:**

És fàcil provar que aquesta desigualtat és certa per a  $n=1$ :  $1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -3 < 0$

Suposem certa la hipòtesi per a  $n$ , és a dir, suposem cert que  $n^2 - 3n - 1 < 0$  i provem si la hipòtesi és certa per a  $n+1$ , és a dir, volem veure si  $(n+1)^2 - 3(n+1) - 1 < 0$

Calculant obtenim:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - 3(n+1) - 1 &= (n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 - 1 = (n^2 - 3n - 1) + (2n + 1 - 3) = \\ &= (n^2 - 3n - 1) + (2n - 2) \end{aligned}$$

Per hipòtesi d'inducció,  $(n^2 - 3n - 1)$  és negatiu, però  $(2n - 2)$  només ho és quan  $n < 1$ .

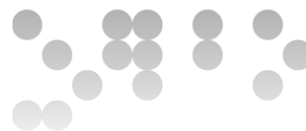
A més a més, fixem-nos que:

$$(n^2 - 3n - 1) + (2n - 2) < 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 3 < 0 \Leftrightarrow n^2 - n < 3 \Leftrightarrow n \cdot (n - 1) < 3 \Leftrightarrow n = 3, 2, 1$$

Així, podem concloure que  $n^2 - 3n - 1 < 0 \Leftrightarrow n = 3, 2, 1$ , per tant no es compleix per a tot nombre natural  $n$ . Per tant la propietat NO és certa per a tot nombre natural.

De fet, si provem per a  $n=4$  veiem que la propietat ja no es compleix perquè:

$$4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3 > 0$$



2. Responen als següents apartats:

- (2 punts) Expressen en forma binòmica el següent nombre complex:  $\frac{5i^9(2-3i)}{2-i}$ .
- (2 punts) Calculeu totes les arrels de l'equació:  $x^3 + 64 = 0$ . Proporcioneu les solucions en forma polar i binòmica.

### Solució:

- a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica a l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària:

$$\frac{5i^9(2-3i)}{2-i} = \frac{5i(2-3i)}{2-i} = \frac{5i(2-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i(4+2i-6i+3)}{4+1} = \frac{5i(7-4i)}{5} = i(7-4i) = 7i - 4i^2 = 4 + 7i$$

Per tant, la resposta és:  $\boxed{\frac{5i^9(2-3i)}{2-i} = 4 + 7i}$

- b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès.

De fet el que se'ns demana són les arrels tercers de -64.

Per determinar les arrels tercers de -64 determinem primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m = \sqrt{(-64)^2 + 0^2} = 64$$

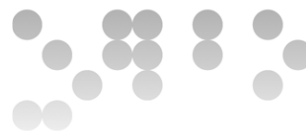
$$\alpha = \arctg \frac{0}{-64} + 180^\circ = \arctg 0 + 180^\circ = 180^\circ$$

(Observem que, al ser la part real negativa i la part imaginària nul·la cal sumar la quantitat de  $180^\circ$ ).

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val 0 en  $0^\circ$  i en  $180^\circ$ . Com l'afix del punt buscat és (-64,0) l'angle està entre el segon i tercer quadrant, és a dir, en  $180^\circ$ .

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el número -64 al pla complex. Aquest número està associat al punt

(-64,0), per tant, és un nombre que es troba entre el segon i el tercer quadrant.



Tenim, per tant, que  $x = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64}_{180^\circ}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$$x = \left( \sqrt[3]{64} \right)_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} = 4_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} \quad \text{per a } k=0, 1, 2$$

Això és, el mòdul de les arrels és:  $r = 4$

Els arguments de les arrels són  $\beta_k = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}$  per a  $k=0, 1, 2$

- Si  $k=0$ , tenim que  $\beta_0 = 60^\circ$
- Si  $k=1$ , tenim que  $\beta_1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$
- Si  $k=2$ , tenim que  $\beta_2 = 60^\circ + 240^\circ = 300^\circ$

Per tant, les tres arrels de l'equació, en forma polar, són:

$$\begin{array}{c} 4_{60^\circ} \\ 4_{180^\circ} \\ 4_{300^\circ} \end{array}$$

Seguint les instruccions de l'apartat 3.4.2 de la pàgina 33, passem els nombres a forma binòmica:

$$4_{60^\circ} = 4 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$4_{180^\circ} = 4 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -4$$

$$4_{300^\circ} = 4 \cdot (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

I les solucions, en forma binòmica, són:

$$-4$$

$$2 + 2\sqrt{3}i$$

$$2 - 2\sqrt{3}i$$