# Solució examen 2

**1.**

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^5+32=0$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

**Solució:**

a) Operem amb l'expressió, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=\frac{4+4i-1+1-2i-1}{\frac{2-3i}{2}}=\frac{2\cdot(3+2i)}{2-3i}=\frac{2\cdot(3+2i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{2\cdot(6+9i+4i-6)}{4+9}=2i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=2i}$$

b) Primer aïllem la incògnita:

$$x^5+32=0\rightarrow x^5=-32\rightarrow x=\sqrt[5]{-32}$$

Escrivim el complex z=-32 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(-32)^2}=32$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-32}+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fer, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180º, l'angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z=32_{180^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes, hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32_{180^o}} = 2_{\frac{180^o+360^o k}{5}} = 2_{36^o+72^o k}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Els arguments de les arrels són:

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 36^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 36^o + 72^o = 108^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 36^o + 144^o = 180^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 36^o + 216^o = 252^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 36^o + 288^o = 324^o$

Per tant, les cinc arrels de l'equació $x^5 + 32 = 0$ són:

$$2_{36^o} = 1{,}618 + 1{,}1756i$$

$$2_{108^o} = -0{,}618 + 1{,}9021i$$

$$2_{180^o} = -2$$

$$2_{252^o} = -0{,}61803 - 1{,}9021i$$

$$2_{324^o} = 1{,}618 - 1{,}1756i$$

**2.**

Donats els conjunts de vectors de $R^3$:

A=< $(1,0,0),(1,a,0),(1,1,a)$ >.

B=< $(1,1,1),(0,a,1),(0,0,a)$ >.

a) Trobeu el valor de *a* per a que A i B siguin base de $R^3$. Si $a=1$ trobeu les coordenades del vector v=(2,0,1) en cada una de les bases.
b) Calcula la matriu de canvi de base de A a B per $a=1$. Comprova la coherència de l'apartat anterior.

**Resolució:**

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de $R^3$.

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Així que de nou per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de $R^3$

Així doncs tant A com B quan $a \neq 0$ formen una base de $R^3$.

Per a calcular les coordenades de v en A quan $a = 1$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=2, y=-1, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a = 1$ són (2,-1,1).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a = 1$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=2, y=-2, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a = 1$ són (2,-2,1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base C hem de resoldre:

**$C = B^{-1} \cdot A$**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem primer la inversa de la matriu B

$$B^{-1} = \frac{(adj(B))^t}{|B|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem trobar ara ja la matriu de canvi de base.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Ara comprovem els resultats de l'apartat anterior i veiem que efectivament transforma les coordenades de v en A a les coordenades de v en B.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

**3**.

Discutiu i resoleu,quan sigui possible,el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a\in R$.

$$\begin{cases}2x & +y & +z & =1\\ x & +(a+1)y & -z & =-1\\ -x & +y & -2z & =-2\end{cases}$$

**Resolució:**

Per a discutir el sistema d'equacions lineals hem d'estudiar, si A és la matriu de coeficients i A' és la matriu ampliada, els rang(A) i rang(A'), segons els valors del paràmetre $a\in\mathbb{R}$.

Tenim

$$A|A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\1&a+1&-1&-1\\-1&1&-2&-2\end{array}\right),$$

Observem que $\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0$ i per tant el rang(A) és com a mínim 2.

Rang(A)=3 només si el determinant d'A és diferent de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&a+1&-1\\-1&1&-2\end{vmatrix}=-4(a+1)+1+1+(a+1)+2+2=-3a+3$$

que només s'anul.la pel cas a=1.

Per tant, tenim la següent discussió:

Cas I: Si $a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A^{'})$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD.

Per a trobar la solució podem aplicar la regla de Cramer i tenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{-3a+3}{-3a+3} = 1.$$

Per tant, en tots els casos obtenim com a solució única (0, 0, 1), independentment del valor del paràmetre *a*.

Cas II: Si $a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$ i hem d'estudiar el rang(A'). Quan substituïm el valor d'*a* tenim les següents matrius:

$A|A^{'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$ i podem observar que les dues darreres columnes són coincidents i per tant rang(A')=rang(A)=2 i el sistema serà SCI amb (3-2=1) 1 grau de llibertat.

Per a trobar la solució, resolem el sistema format, per exemple, per les dues primeres equacions.

Restant a la segona equació dues vegades la primera: -3y = 3-3z o sigui y = z-1 i substituint a la primera ecuació i aïllant, x = z-1-2(z-1)=-z+1=1-z. Per tant els punts solució són de la forma $(1 - z, z - 1, z)$.

En resum:

- Cas I: $a \neq 1$, SCD amb solució $(0,0,1)$.
- Cas II: $a = 1$, SCI amb 1 g.ll i solució $(1-z, z-1, z)$.

**4**

Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per $f(1,1,1) = (3,3,3)$, $f(0,1,1) = (2,2,2)$ i $f(0,0,1) = (0,0,0)$

a) Trobeu la matriu de $f$ en les bases canòniques.

b) Trobeu una base del nucli de $f$. És $f$ injectiva?

c) Trobeu una base de la imatge de $f$. És $f$ exhaustiva?

d) Digueu si $f$ diagonalitza i, si és possible, trobeu una base de $R^3$ formada per vectors propis de $f$.

**Resolució:**

a) Tenim que $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$. Per linealitat,

$$f(1,0,0) = f(1,1,1) - f(0,1,1) = (3,3,3) - (2,2,2) = (1,1,1).$$

D'altra banda, $(0,1,0) = (0,1,1) - (0,0,1)$. Per tant,

$$f(0,1,0) = f(0,1,1) - f(0,0,1) = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$$

A més a més, $f(0,0,1) = (0,0,0)$. Així, la matriu de $f$ en les bases canòniques és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) El nucli de $f$ es troba resolent el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

O sigui, $x + 2y = 0$. Per tant, $x = -2y$ i $(x,y,z) = (-2y, y, z) = y(-2,1,0) + z(0,0,1)$. O sigui, el nucli de $f$ està generat pels vectors $(-2,1,0)$ i $(0,0,1)$. En particular, com que el nucli no és zero, $f$ no és injectiva.

d) La imatge de $f$ està generada per les columnes de la matriu $A$. Per tant, una base de la imatge de $f$ és: $(1,1,1)$. Com que la imatge de $f$ no és tot $R^3$, deduïm que $f$ no és exhaustiva.

e) Com que $f(-2,1,0) = (0,0,0) = 0\cdot(-2,1,0)$ i $f(0,0,1) = (0,0,0) = 0\cdot(0,0,1)$, tenim que els vectors $(-2,1,0)$ i $(0,0,1)$ són vectors propis de $f$ de valor propi 0. Com que $f(1,1,1) = (3,3,3) = 3\cdot(1,1,1)$, tenim que el vector $(1,1,1)$ és vector propi de $f$

de valor propi 3. Observem que $(-2,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ formen una base de $R^3$ de vectors propis de $f$. Això vol dir que la matriu de $f$ en aquesta base és diagonal amb elements diagonals 0, 0 i 3. Per tant, $f$ diagonalitza.