PAC4 semestre 101

Fecha inicio: 15/12/2010

Fecha fin: 26/12/2010

Fecha notas: 03/01/2011

Fecha solucion: 28/12/2010

- Per a dubtes i aclariments sobre l'enunciat, adreceu-vos al consultor responsable de la vostra aula.

Pregunta resposta lliure (25%)

Pregunta

Llegiu les següents frases i formalitzeu-les, amb la següent identificació d'àtoms i constants:

X(x)= "x és un xerraire"
P(x,y)= "x parla amb y"
G(x)= "x és generós"
a= Abel
b= Bea

Domini: el conjunt de les persones.

1) Si ningú no fos xerraire l'Abel no parlaria amb ningú
2) Si tots els xerraires fossin generosos, tothom parlaria amb tothom
3) L'Abel parla només amb qui parla amb la Bea
4) La Bea no parla amb ningú que no sigui xerraire

Resposta

1) $\forall x \neg X(x) \rightarrow \forall y \neg P(a,y)$
2) $\forall x (X(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow \forall x \forall y\, P(y,x)$
3) $\forall x (P(a,x) \rightarrow P(x,b))$
4) $\forall x (\neg X(x) \rightarrow \neg P(b,x))$

Pregunta resposta lliure (15%)

Pregunta

Demostreu que la interpretació <{0,1}, P(0) = P(1) = fals, Q(0,0) = Q(1,0) = Q(1,1) = fals, Q(0,1) = cert> és un contraexemple de:

$\exists x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \exists x \exists y\, Q(x,y) \therefore \exists y\, P(y)$

Resposta

Interpretació i valoració de las premisses i la conclusió:

$\exists x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(y))$
$= \exists x ((Q(x,0) \rightarrow P(0)) \vee (Q(x,1) \rightarrow P(1)))$
$= ((Q(0,0) \rightarrow P(0)) \vee (Q(0,1) \rightarrow P(1))) \vee ((Q(1,0) \rightarrow P(0)) \vee (Q(1,1) \rightarrow P(1)))$
= ((fals $\rightarrow$ fals) $\vee$ (veritat $\rightarrow$ fals)) $\vee$ ((fals $\rightarrow$ fals) $\vee$ (fals $\rightarrow$ fals))
= (veritat $\vee$ fals) $\vee$ (veritat $\vee$ veritat)
= veritat $\vee$ veritat
= veritat

$\exists x \exists y\, Q(x,y)$
$= \exists x\, (Q(x,0) \vee Q(x,1))$
$= (Q(0,0) \vee Q(0,1)) \vee (Q(1,0) \vee Q(1,1))$
$=$ (fals $\vee$ veritat) $\vee$ (fals $\vee$ fals)
$=$ veritat $\vee$ fals
$=$ veritat

$\exists x \exists y\, (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \exists x \exists y\, Q(x,y)$
$=$ veritat $\wedge$ veritat
$=$ veritat

$\exists y\, P(y)$
$= P(0) \vee P(1)$
$=$ fals $\vee$ fals
$=$ fals

Resum:
Premissa: vertadera
Conclusió: falsa
És un contraexemple

Lògica de Predicats - Resolució: Donat el següent raonament demostra la seva validesa mitjançant el mètode de resolució: (45%)

Raonament

1	$\forall x\, (T(x) \rightarrow \forall y\, (D(y) \rightarrow C(y, x)))$	Premissa
2	$\exists x\, (T(x) \wedge N(x))$	Premissa
3	$\forall x\, (D(x) \rightarrow \neg I(x))$	Premissa
4	$\neg \exists x\, (N(x) \wedge \forall y\, (I(y) \rightarrow \neg C(y, x)))$	Premissa
5	$\exists x\, (I(x) \wedge \exists y\, (T(y) \wedge C(y, x)))$	Premissa
6	$\forall x\, (N(x) \rightarrow \exists y\, (\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Conclusió

FNC

Premissa 1: $\forall x\, (T(x) \rightarrow \forall y\, (D(y) \rightarrow C(y, x)))$

1.	$\forall x\, (T(x) \rightarrow \forall y\, (D(y) \rightarrow C(y, x)))$		
2.	$\forall x\, (T(x) \rightarrow \forall y\, (\neg D(y) \vee C(y, x)))$	Elimina implicació: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$	**Correcte**
3.	$\forall x\, (\neg T(x) \vee \forall y\, (\neg D(y) \vee C(y, x)))$	Elimina implicació: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$	**Correcte**
4.	$\forall x \forall y\, (\neg T(x) \vee (\neg D(y) \vee C(y, x)))$	Moure quantificadors universals a l'esquerra	**Correcte**
5.		FNC	**Correcte**

Correcte

Premissa 2: $\exists x\, (T(x) \wedge N(x))$

1.	$\exists x\, (T(x) \wedge N(x))$		
2.	$T(a) \wedge N(a)$	Eskolemització	**Correcte**
3.		FNC	**Correcte**

Correcte

Premissa 3: $\forall x\,(D(x) \rightarrow \neg I(x))$

1.	$\forall x\,(D(x) \rightarrow \neg I(x))$		
2.	$\forall x\,(\neg D(x) \vee \neg I(x))$	Elimina implicació: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$	Correcte
3.		FNC	Correcte

Correcte

Premissa 4: $\neg \exists x\,(N(x) \wedge \forall y\,(I(y) \rightarrow \neg C(y, x)))$

1.	$\neg \exists x\,(N(x) \wedge \forall y\,(I(y) \rightarrow \neg C(y, x)))$		
2.	$\neg \exists x\,(N(x) \wedge \forall y\,(\neg I(y) \vee \neg C(y, x)))$	Elimina implicació: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$	Correcte
3.	$\forall x \neg\,(N(x) \wedge \forall y\,(\neg I(y) \vee \neg C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg \exists x\, A(x) = \forall x \neg\, A(x)$	Correcte
4.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee \neg \forall y\,(\neg I(y) \vee \neg C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	Correcte
5.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee \exists y \neg\,(\neg I(y) \vee \neg C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg \forall x\, A(x) = \exists x \neg\, A(x)$	Correcte
6.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee \exists y \neg \neg I(y) \wedge \neg \neg C(y, x))$	Llei de Morgan: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	Correcte
7.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee \exists y \neg \neg I(y) \wedge C(y, x))$	Simplifica la doble negació: $\neg \neg A = A$	Correcte
8.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee \exists y\,(I(y) \wedge C(y, x)))$	Simplifica la doble negació: $\neg \neg A = A$	Correcte
9.	$\forall x\,(\neg N(x) \vee (I(f(x)) \wedge C(f(x), x)))$	Eskolemització	Correcte
10.	$\forall x\,((\neg N(x) \vee I(f(x))) \wedge (\neg N(x) \vee C(f(x), x)))$	Distributiva: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Correcte
11.		FNC	Correcte

Correcte

Premissa 5: $\exists x\,(I(x) \wedge \exists y\,(T(y) \wedge C(y, x)))$

1.	$\exists x\,(I(x) \wedge \exists y\,(T(y) \wedge C(y, x)))$		
2.	$\exists x\,(I(x) \wedge (T(c) \wedge C(c, x)))$	Eskolemització	Correcte
3.	$I(b) \wedge (T(c) \wedge C(c, b))$	Eskolemització	Correcte
4.		FNC	Correcte

Correcte

Negació de la conclusió: $\neg \forall x\,(N(x) \rightarrow \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$

1.	$\neg \forall x\,(N(x) \rightarrow \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$		
2.	$\neg \forall x\,(\neg N(x) \vee \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Elimina implicació: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$	Correcte
3.	$\exists x \neg\,(\neg N(x) \vee \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg \forall x\, A(x) = \exists x \neg\, A(x)$	Correcte
4.	$\exists x\,(\neg \neg N(x) \wedge \neg \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	Correcte
5.	$\exists x\,(N(x) \wedge \neg \exists y\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Simplifica la doble negació: $\neg \neg A = A$	Correcte
6.	$\exists x\,(N(x) \wedge \forall y \neg\,(\neg D(y) \wedge C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg \exists x\, A(x) = \forall x \neg\, A(x)$	Correcte
7.	$\exists x\,(N(x) \wedge \forall y\,(\neg \neg D(y) \vee \neg C(y, x)))$	Llei de Morgan: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	Correcte
8.	$\exists x\,(N(x) \wedge \forall y\,(D(y) \vee \neg C(y, x)))$	Simplifica la doble negació: $\neg \neg A = A$	Correcte
9.	$N(d) \wedge \forall y\,(D(y) \vee \neg C(y, d))$	Eskolemització	Correcte
10.	$\forall y\,(N(d) \wedge (D(y) \vee \neg C(y, d)))$	Moure quantificadors universals a l'esquerra	Correcte
11.		FNC	Correcte

Correcte

Resolució

Arbre de resolució

Conjunt de clàusules de les premisses: { $\neg T(x) \vee (\neg D(y) \vee C(y, x))$, $T(a)$, $N(a)$, $\neg D(x) \vee \neg I(x)$, $\neg N(x) \vee I(f(x))$, $\neg N(x) \vee C(f(x), x)$, $I(b)$, $T(c)$, $C(c, b)$ }
Conjunt de suport: { $N(d)$, $D(y) \vee \neg C(y, d)$ }

	Clàusules troncals	Clàusules laterals	
1.	$N(d)$	$\neg N(x) \vee I(f(x))$ ***Llista de substitucions:*** x substituït per d	
2.	$I(f(d))$	$\neg D(x) \vee \neg I(x)$ ***Llista de substitucions:*** x substituït per f(d)	Correcte
3.	$\neg D(f(d))$	$D(y) \vee \neg C(y, d)$ ***Llista de substitucions:*** y substituït per f(d)	Correcte
4.	$\neg C(f(d), d)$	$\neg N(x) \vee C(f(x), x)$ ***Llista de substitucions:*** x substituït per d	Correcte
5.	$\neg N(d)$	$N(d)$	Correcte
6.	$\square$		Correcte

Estat de l'exercici

Exercici correcte

Pregunta resposta lliure (15%)

Pregunta

Donats els següents subconjunts del conjunt dels nombres naturals:
P és el conjunt dels nombres parells
Q és el conjunt dels múltiples de 4
S és el conjunt dels múltiples de 6
T és el conjunt dels múltiples de 3

Dieu si són correctes o no les següents afirmacions i justifiqueu les 8 darreres respostes:

1. $546 \in P$
2. $33 \subset T$
3. $\{4,8,12\} \in Q$
4. $\{9,18\} \subset S$
5. $\{30\} \in P(T)$
6. $\emptyset \subset Q$
7. $S \subset P$

8. $P \cap Q = P$
9. $P \cup Q = P$
10. $T \cap P \subset S$
11. La relació $R = \{ (x,y) \in P \times P \mid y$ és divisor de $x \}$ és transitiva
12. La relació $R = \{ (x,y) \in P \times P \mid y$ és divisor de $x \}$ és simètrica
13. La relació $R = \{ (x,y) \in P \times P \mid y$ és divisor de $x \}$ és antisimètrica
14. Donada la relació $R = \{ (x,y) \in T \times T \mid y$ és el doble de $x \}$, Rang(R) = T
15. Donada la relació $R = \{ (x,y) \in P \times P \mid y$ és el triple de $x \}$, Dom(R) = P

Resposta

1. Cert perquè 546 = 2·273 és un nombre parell, pertany a P
2. Fals perquè 33 no és un subconjunt de T sinó un element de T
3. Fals perquè {4,8,12} és un subconjunt de Q, no un element que pertanyi a Q
4. Fals perquè 9 no és múltiple de 6, no pertany per tant a S i llavors {9,18} no és subconjunt de S
5. Cert perquè {30} és un subconjunt de T, pertany al conjunt de les parts de T
6. Cert perquè el conjunt buit és subconjunt de qualsevol conjunt
7. Cert perquè tots els múltiples de 6 són parells, tots els elements de S són també elements de P
8. Fals perquè $10 \in P$ pero no pertany a $P \cap Q$
9. Cert perquè si $x \in P \cup Q$ és parell o múltiple de quatre i en tots dos casos serà parell, per tant $x \in P$. I també tenim que si x és parell, $x \in P \cup Q$
10. Cert perquè si $x \in T \cap P$ vol dir que x és múltiple de 3 i múltiple de 2, i això ens diu que x és múltiple de 6
11. Cert perquè si y és divisor de x tenim un "a" tal que x = a·y, si z és divisor de y tenim un "b" tal que y = b·z, llavors x = a·b·z y, per tant, z és divisor de x
12. Fals, tenim per exemple $(8,4) \in R$ però (4,8) no pertany a R
13. Cert perquè si $(x,y) \in R$ llavors existeix un a tal que x = a·y i si $(y,x) \in R$ llavors existeix un b tal que y = b·x. A partir de les dues igualtats x = a·y = a·b·x, i essent nombres naturals això implica que a·b = 1 i que x = y.
14. Fals perquè per a y=3 ($3 \in T$) no tenim cap $x \in T$ tal que y=2·x (la solució no és un nombre natural múltiple de 3)
15. Cert perquè per a tot $x \in P$ podem prendre y = 3·x, i el parell $(x, 3 \cdot x) \in R$