Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Primera PAC. Mòduls 1, 2 i 3.
Semestre de primavera de 2012 (del 14 de març al 4 d'abril).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar:
  PAC1_Cognom1Cognom2nom.pdf
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 20%)

   a) Volem pintar les cinc habitacions d'una casa. De quantes maneres podem fer-ho si disposem de set colors diferents? I si volem que cada habitació tingui un color diferent? Relacioneu-ho amb el tema de funcions.

   b) El següent algorisme realitza un canvi de base d'un nombre enter no negatiu n expressat en base 10 a una base b ($b \leq 10$).

```
funció CanviBase(n, b)
  inici
    m ← 0
    pot ← 1
    mentre n > 0
          m ← (n mod b) * pot + m
          n ← n div b
          pot ← 10 * pot
    fimentre
    retorn m
  fi
```

1) Calculeu el resultat de les següents crides: *CanviBase*(13,2), *CanviBase*(13,3), *CanviBase*(13,4), *CanviBase*(100,2).
2) Si fixem la base b, calculeu el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme.
3) Calculeu la complexitat de l'algorisme.

2. (Valoració d'un 20%)
En emmagatzematge distribuït com el que utilitza Google, la informació es replica en diversos servidors per facilitar la cerca i la recuperació d'informació. Podem imaginar un sistema d'emmagatzematge distribuït com un matriu quadrada M d'ordre $n \times n$ $(n \geq 1)$. Cada fila representa un part de la informació i cada columna el servidor que l'emmagatzema.

Definim un graf G de la forma següent: si $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ representen les files (informació) d'M i $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ representen les columnes (servidors) d'M, definim el graf $G(R \cup C, A)$ on el vèrtex r_i es adjacent al vèrtex c_j si la posició (i, j) de la matriu M és diferent de 0 (la informació r_i s'emmagatzema al servidor c_j).

a) Dibuixeu el graf corresponent a la matriu d'emmagatzematge distribuït,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si $M_{n\times n}$ és una matriu diagonal, com seria el graf G? A quin model d'emmagatzematge fa referència?

c) Si M té a cada fila $\frac{n}{2}$ elements diferents de 0, calculeu l'ordre i la mida del graf G. Interpreteu en termes d'emmagatzematge distribuït.

d) A què correspon un vèrtex aïllat del graf G en el sistema d'emmagatzematge? Quines condicions ha de complir M perquè el graf G no tingui vèrtexs aïllats?

e) Quines condicions ha de complir M perquè el graf G sigui regular? Poseu un exemple de matriu el graf associat de la qual sigui regular. Quin avantatge pot tenir això en el sistema d'emmagatzematge distribuït?

f) Quina matriu correspondria al graf bipartit complet $K_{n,n}$?

g) Quines condicions ha de complir M perquè el graf G sigui connex?

3. (Valoració d'un 20%)

   a) Si un graf G és autocomplementari, quina condició ha de complir l'ordre de G?

   b) Trobeu tots els grafs autocomplementaris d'ordre 4.

   c) Pot un graf bipartit i connex ser autocomplementari?

   d) En un joc es comença dibuixant n punts. Cada jugador, en el seu torn, uneix dos dels punts existents amb una línia de qualsevol forma, i afegeix un punt al mig d'aquesta línia. Hi ha dues restriccions: un punt del que ja surten tres línees ja no es pot utilitzar més, i les línees no poden creuar-se. El jugador que en el seu torn no pugui dibuixar una línea seguint aquestes restriccions perd la partida. Demostreu que el nombre de jugades que pot tenir una partida sempre és inferior a $3n$.

4. (Valoració d'un 20%) Considerem les següents seqüències:

   I 3,3,4,1,7,2,4

   II 2,4,3,3,1,3,2

   III 1,4,5,2,3,3,3

   IV 4,3,1,3,5,2,2

   a) Demostreu que algunes d'aquestes seqüències no són gràfiques sense usar l'algorisme de Havel-Hakimi.

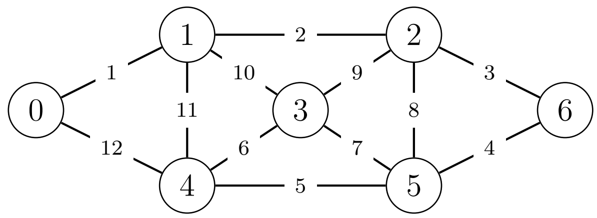
   b) Determineu quines d'aquestes seqüències són gràfiques usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

   c) Dibuixeu dos grafs diferents que tinguin com a seqüència de graus una mateixa seqüència de les de l'enunciat, i demostreu que no són isomorfs.

   d) Calculeu l'ordre, la mida i el diàmetre dels grafs de l'apartat anterior.

5. (Valoració d'un 20%) Una xarxa social (facebook, twiter, tuenti,...) se sol representar com un graf en el qual els vèrtexs són els usuaris de la xarxa i dos vèrtexs són adjacents si els usuaris comparteixen comentaris. Per exemple, la xarxa tuenti té 9.769.102 usuaris (vèrtexs) i 587.415.363 enllaços (arestes). En una xarxa és important conèixer la seva estructura tal com distància mínima, distància màxima, densitat,...

   Com que la xarxa té molts vèrtexs, sovint convé estudiar-la a partir de conjunts de nodes interrelacionats entre si (subgrafs complets màxims) que anomenarem *clústers*. Suposem una xarxa social formada per 7 clústers, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El següent gràfic representa la distància mínima (nombre d'usuaris intermedis) entre cada parell de clústers:



a) Calculeu la densitat de la xarxa (la densitat es defineix com el quocient $d = \frac{\text{Nombre d'arestes de la xarxa}}{\text{Nombre total d'arestes possibles}}$).

b) Calculeu, utilitzant l'algorisme apropiat, la distància entre el clúster 0 i el clúster 5, i el camí més curt que uneix aquests dos clústers.

c) Quin és el clúster més cèntric? (el clúster més cèntric és aquell que la seva distancia mitjana als altres clústers és mínima).

d) Quins són els dos clústers més allunyats entre si i a quina distància estan?