PAC3

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinómica dels problemes NP-complets.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Definiu cadascun dels problemes següents en forma de funció, i classifiqueu-los com a problemes de decisió, càlcul o optimització. Reformuleu els de càlcul i els d'optimització com a problemes de decisió i indiqueu a quina classe de complexitat pertanyen:

   (a) Donat un graf $G = (V, A)$, determinar si G és un graf hamiltonià.

   (b) Donats dos grafs G i G', determinar si tenen la mateixa seqüència de graus.

   (c) Donat un graf $G = (V, A)$, trobar un circuit eulerià a G.

   (d) Donat un graf $G = (V, A)$ ponderat i connex, determinar quines arestes cal eliminar per obtenir un subgraf generador de G, que sigui connex i tingui pes mínim.

Solució:

(a) HAMILTONIÀ : $\mathcal{G} \to \{\text{SÍ}, \text{NO}\}$. És un problema de decisió. Tal com s'exposa al mòdul 7, és NP-complet.

(b) MATEIXA-SEQ : $(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \to \{\text{SÍ}, \text{NO}\}$. És un problema de decisió. Cal calcular el grau de tots els vèrtexs, ordenar les dues seqüències, i finalment comparar-les. Tot es pot fer en temps polinòmic i, per tant, el problema pertany a la classe P.

(c) CIRCUIT-EUL : $\mathcal{G} \to \mathcal{P}(A)$. És un problema de càlcul. L'algorisme de Hierholzer el resol en temps $O(m)$, on m és la mida del graf. Com que la mida és, com a molt, quadràtica respecte a l'ordre n del graf, l'algorisme és $O(n^2)$ i el problema és a la classe P. La versió de decisió seria, *donat un graf $G = (V, A)$ decidir si té un circuit eulerià.*

(d) ARESTES : $\mathcal{G} \times (A \to \mathbb{R}) \to \mathcal{P}(A)$. És un problema d'optimització. La funció de valoració és la suma dels pesos de les arestes. La versió de decisió seria, *donat un graf ponderat connex $G = (V, A)$ i un valor k, decidir si existeix un subgraf S generador de G, amb S connex i de pes total $\leq k$.* El problema equival a trobar l'arbre generador minimal, que pertany a P, ja que podem calcular-lo amb l'algorisme de Prim en temps $O(n^2)$, on n és l'ordre del graf.

---

2. (Valoració d'un 15%) Considereu les fórmules següents,

   - $(a \vee \bar{b}) \wedge c$.
   - $(\bar{a} \vee b) \wedge ((\bar{b} \wedge c) \vee a)$.
   - $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
   - $a \wedge (b \vee c) \wedge (\bar{b} \vee c)$.

   (a) Trobeu totes les assignacions que satisfan cadascuna.

   (b) Indiqueu quines estan en FNC i quines no. Passeu a FNC les que no ho estan.

   (c) Quines fórmules són possibles entrades del problema SAT? I, un cop passades totes a FNC, quines ho són del problema 3SAT? I de 2SAT? (2SAT es defineix de manera anàloga a 3SAT).

Solució:

(a) La primera es verifica per $a = 0, b = 0, c = 1$; per $a = 1, b = 0, c = 1$; i per $a = 1, b = 1, c = 1$.
La segona per $a = 0, b = 0, c = 1$; per $a = 1, b = 1, c = 0$; i per $a = 1, b = 1, c = 1$.
La tercera per $a = 1, b = 0, c = 1$; per $a = 1, b = 1, c = 0$; i per $a = 1, b = 1, c = 1$.
L'última per $a = 1, b = 0, c = 1$; i per $a = 1, b = 1, c = 1$.

(b) La primera i la quarta estan en FNC. La segona seria: $(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a) \wedge (c \vee a)$. La tercera quedaria: $a \wedge (b \vee c)$.

(c) En la forma original només la primera i la quarta poden ser entrada de SAT, i un cop passades a FNC ho són totes. Cap ho és de 3SAT. De 2SAT ho és només la segona un cop passada a FNC.

---

3. (Valoració d'un 30%) Disposem de dos CD verges en els quals volem gravar un conjunt de cançons. Suposem que en cada CD podem gravar d minuts d'àudio. Podem repartir les cançons entre els dos CD com vulguem sempre que no quedi cap cançó sense gravar. Anomenem GRAVACIÓ al problema de trobar un repartiment factible de cançons entre els dos CD.

   (a) Descriviu de manera formal el problema GRAVACIÓ.

   (b) Doneu una condició necessària elemental per tal que el problema pugui tenir solució. Doneu una entrada del problema que, tot i verificar aquesta condició, no tingui solució.

   (c) Demostreu que el problema GRAVACIÓ és verificable en temps polinòmic.

   (d) Considerem el problema d'optimització CONTENIDORS: Donat un multiconjunt de nombres naturals C i un nombre natural k, trobar una partició de C en r subconjunts, $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ amb el mínim r possible, tal que $\sum_{x \in C_i} x \leq k$ per a tot $1 \leq i \leq r$. Demostreu que si el problema CONTENIDORS es pogués resoldre en temps polinòmic, aleshores el problema GRAVACIÓ també *(Indicació: dissenyeu un algorisme en temps polinòmic que resolgui un dels problemes fent una crida a l'altre)*.

   (e) Expliqueu quina relació hi ha entre el problema de càlcul GRAVACIÓ i el problema decisional PARTICIÓ.

   (f) Suposem ara que cada cançó és d'un any diferent (per exemple, la nostra cançó preferida de cada any), i que volem gravar-les en ordre cronològic. Demostreu que en aquest cas el problema passa a pertànyer a P.

Solució:

(a) Donat un multiconjunt de nombres naturals C (que serien les durades de les cançons) i un nombre natural d, trobar un subconjunt $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x \in C'} x \leq d$ i $\sum_{x \notin C'} x \leq d$.

(b) Per exemple, cal que la durada total de les cançons no superi la capacitat dels dos CD, és a dir, $\sum_{x \in C} x \leq 2d$. Un exemple de que no és suficient el tindríem per $d = 80$ i $C = \{50, 50, 50\}$. Tot i que entre les tres cançons no superen els 160 minuts, és impossible repartir-les entre els dos CD.

(c) Un testimoni seria una partició del conjunt de cançons en dos subconjunts que capiguessin en un CD cadascun, és a dir, $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x \in C'} x \leq d$ i $\sum_{x \notin C'} x \leq d$. La comprovació d'aquestes dues condicions es pot fer en temps polinòmic.

(d) Per resoldre el problema GRAVACIÓ(C, d), fem una crida a CONTENIDORS(C, d) (és a dir, al paràmetre k li passem el valor d). Si la solució ens dóna $r > 2$ vol dir que GRAVACIÓ(C, d) no té solució. En canvi, si la solució de CONTENIDORS(C, d) s'obté per a $r \leq 2$, aquesta solució ho és també de GRAVACIÓ(C, d). Observem que l'algorisme és polinòmic perquè l'execució de CONTENIDORS ho és per hipòtesi.

```
funció GRAVACIO(C, d)
  inici
    (r,L) ← CONTENIDORS(C, d)
    si r > 2 aleshores retorn NO
                 si_no retorn (L)
    fisi
  fi
```

(on L és una llista que retorna els subconjunts $C_1, C_2, ..., C_k$ de la partició)

(e) Podem respondre PARTICIÓ(C) resolent GRAVACIÓ(C, d) per $d = \frac{1}{2}\sum_{x\in C} x$. En aquest cas els elements del conjunt que cal particionar s'interpreten com a durades de cançons, i la capacitat del CD és tal que $2d = \sum_{x\in C} x$, és a dir, si la gravació és possible s'ompliran els dos CD al màxim de la seva capacitat. Això vol dir que existeix $C' \subseteq C$ tal que $\sum_{x\in C'} x = \sum_{x\notin C'} x = d$. En particular, les dues particions sumen el mateix. D'altra banda, si la gravació no és possible, tampoc ho serà la partició (ja que una solució de la partició ens donaria dos subconjunts amb suma igual a d, la qual cosa seria també una solució de la gravació).

(f) En aquest cas simplement hem d'anar sumant les durades de les cançons (suposem que ja estan ordenades cronològicament) fins que no hi càpiguen més en el primer CD, i comprovar si la resta caben en l'altre. Això es pot fer en temps polinòmic.

---

4. (Valoració d'un 25%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

(a) Podem afirmar que el problema "Trobar el nombre cromàtic d'un graf G" pertany a NP perquè si ens donen una coloració òptima del graf tenim un testimoni.

(b) Si $A \leq_p B$ i $B \leq_p A$, aleshores $A = B$.

(c) Donat un graf G, siguin els problemes E="Decidir si G és eulerià" i H="Decidir si G és hamiltonià". Aleshores, suposant que $P \neq NP$, $E \leq_p H$ però en canvi no es compleix $H \leq_p E$.

(d) Si $SAT \leq_p A$, aleshores A és NP-difícil però no té perquè ser NP-complet.

(e) Si es demostrés que un determinat problema $A \in P$ és NP-complet, aleshores s'hauria demostrat que P=NP.

Solució:

(a) Fals. Com comprovem que el graf no es pot acolorir amb menys colors en temps polinòmic?

(b) Fals. Només podem deduir que A i B són problemes polinòmicament equivalents.

(c) Cert. Si $H \leq_p E$, aleshores, com que $E \in P$ i H és NP-complet, resultaria que P=NP. D'altra banda $E \leq_p H$ sí que és cert, ja que una funció de reducció definida sobre el conjunt de grafs seria:

$$f(G) = \begin{cases} C_3 & \text{si tot vèrtex de } G \text{ té grau parell} \\ T_2 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

La funció es calcula en temps polinòmic, i es verifica per tot graf G que $f(G)$ és hamiltonià si i només si G és eulerià:
Si G és eulerià, $f(G) = C_3$, que és hamiltonià. En canvi, si G no és eulerià, $f(G) = T_2$, que no és hamiltonià. Naturalment la reducció també funcionaria si a la funció substituïm C_3 per qualsevol altre graf hamiltonià, i T_2 per qualsevol altre que no ho sigui.

(d) Cert. Com que SAT és NP-difícil, aleshores A és NP-difícil. Però no podem deduir que A sigui NP del fet que SAT ho és.

(e) Cert. Com que A és NP-complet, per a tot problema $B \in$ NP es tindria que $B \leq_p A$, i, per tant, $B \in P$.

---

5. (Valoració d'un 10%) Considereu els grafs simples de 4 vèrtexs.

(a) Doneu exemples de grafs de 4 vèrtexs amb nombre cromàtic 1, 2, 3 i 4. Per a cada exemple, justifiqueu si aquest és l'únic graf de 4 vèrtexs amb aquell nombre cromàtic o si n'hi ha més d'un.

(b) Doneu exemples de grafs amb 4 vèrtexs tal que el cardinal del seu recobriment de vèrtexs amb menor nombre de vèrtexs possible, $\gamma(G)$, sigui 1, 2 i 3. Justifiqueu també si pot haver-hi algun de cardinal 0 o 4.

Solució:

(a) Per tal que el nombre cromàtic sigui 1 no pot haver-hi cap aresta. Per tant, només N_4 té nombre cromàtic 1. Amb nombre cromàtic 4 només tenim el graf complet, K_4. En els altres casos hi ha diversos grafs, per exemple, $\chi(G) = 2$ per als grafs T_4, E_4 i C_4, i $\chi(G) = 3$ en el cas de $C_3 \cup N_1$ o el graf que s'obté d'eliminar una aresta al graf complet.

(b) $\gamma(E_4) = 1$, $\gamma(T_4) = \gamma(C_4) = 2$ i $\gamma(K_4) = 3$. No hi pot haver cap recobriment mínim de cardinal 4, ja que sempre podríem eliminar un vèrtex del recobriment: com tots els seus veïns hi continuarien sent la propietat de ser recobriment es mantindria. En canvi, $\gamma(N_4) = 0$ en no haver-hi arestes.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 29/05/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**