Presentación

En este documento se detallan las instrucciones de realización de la PEC así como el enunciado y la resolución de la actividad.

Competencias

En esta PEC se trabajarán las siguientes competencias:

- Dominar el lenguaje matemático básico para expresar conocimiento científico.
- Conocer fundamentos matemáticos de las ingenierías en informática y telecomunicación.
- Conocer y representar formalmente el razonamiento científico riguroso.
- Conocer y utilizar software matemático.
- Analizar una situación y aislar variables.
- Capacidad de síntesis.
- Capacidad de abstracción.
- Capacidad de enfrentarse a problemas nuevos recurriendo conscientemente a estrategias que han sido útiles en problemas resueltos anteriormente.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Revisar y completar los conceptos sobre los números naturales y sus propiedades.
- Conocer el concepto de inducción matemática y su aplicación a la demostración de propiedades.
- Conocer el conjunto de los números complejos y entender su utilidad. Conocer cómo se representan y aprender a manipularlos.

Descripción de la PEC a realizar

En esta PEC se trabajarán los números y el principio de inducción. En particular, se pondrá un énfasis especial en dos conjuntos concretos de números: los naturales y los complejos.

Recursos

Recursos Básicos

- El módulo 1 en pdf editado por la UOC.
- La calculadora CalcMe, tanto en su versión en línea como local.
- Las guías UOC de la CalcME: https://docs.wiris.com/es/calc/basic_guide_uoc/start

Recursos Complementarios

- Castellet, Manuel (1990). *Álgebra lineal y geometría* / Manuel Castellet, Irene Llerena amb la col·laboració de Carles Casacuberta. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. ISBN: 847488943X
- Anton, Howard (1997). *Introducción al álgebra lineal* / Howard Anton. México, D.F. [etc.]: Limusa, 1997. ISBN: 9681851927
- El aula Laboratorio CalcME.

Criterios de valoración

- Los resultados obtenidos por el estudiante en las PECs se calificarán de 0 a 10 en función de la siguiente escala numérica, usando dos decimales, a la que se añadirá su correspondiente calificación cualitativa, según la escala ECTS:
  - $[0-3)$: Suspenso bajo (D)
  - $[3-5)$: Suspenso alto (C-)

- $[5-7)$: Aprobado (C+)
- $[7-9)$: Notable (B)
- $[9, 10]$: Excelente (A)

- La realización fraudulenta de la PEC comportará la nota de suspenso en la PEC, con independencia del proceso disciplinario que pueda seguirse hacia el estudiante infractor. Recordad que las PECs se tienen que resolver de forma individual, no se pueden formar grupos de trabajo.

- Una vez publicada la nota definitiva de la PEC, no hay ninguna opción a mejorarla. La nota sólo servirá para la evaluación en el semestre actual y, en ningún caso, ésta no se guardará para otros semestres.

- Las respuestas incorrectas no descuentan nada.

- Las PECs entregadas fuera del plazo establecido no puntúan y constarán como no presentadas.

- Es necesario resolver un cuestionario Moodle que complementa esta PEC.

- Del cuestionario pueden realizarse 5 intentos. La nota del cuestionario es la máxima puntuación obtenida en los 5 intentos.

- En la realización de la PEC, se valorará:
  - el uso correcto y coherente de conceptos teóricos estudiados en el módulo (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la claridad, concreción y calidad en la exposición de la solución de los ejercicios (10 % del valor de cada ejercicio),
  - la correcta **resolución** del ejercicio y la **justificación** de los procedimientos (80 % del valor de cada ejercicio).

Formato y fecha de entrega

- **Esta parte de la PEC representa el 80 % de la nota final y el 20 % restante se obtiene realizando las actividades Moodle asociadas a la etiqueta *PEC1-evaluación*.**

- Recordad que es necesario que justifiques las respuestas.

- El nombre del fichero tiene que ser *Apellido1_Apellido2_Nombre*.PDF.

- En la dirección de Internet http://www.dopdf.com/ podéis descargaros un conversor gratuito a formato pdf. Otro conversor gratuito, en este caso online y para documentos con formado Word, lo podéis hallar en http://www.expresspdf.com/

- En la solución de esta PEC se puede usar CalcMe como editor de ecuaciones y/o ayuda para comprobar los resultados. Para utilizar la i, de los números complejos, con CalcMe debéis utilizar el icono que aparece en la herramienta *Símbolos* (no la i del teclado del ordenador).

- En el examen final presencial no es posible utilizar ningún tipo de calculadora por lo que es aconsejable realizar los cálculos de las PECs sin utilizar dicho instrumento.

- Recordad que **el límite de entrega de la PEC son las 24.00h. del día 05/10/2020**

1. (Valoración 50 %) Demostrad, por inducción, que si n es un número natural impar se tiene que $7^n + 1$ es divisible por 8.

Solución:

Antes de aplicar el principio de inducción conviene hacer un cambio de índices.

Sea $n = 2i - 1$

Entonces, si $i = 1, 2, 3, ..$se tiene que $n = 1, 3, 5, ...$y el enunciado se transforma en:

Demostrad que, para todo i, número natural, se tiene que $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8.

Paso base: Para $i = 1$, tenemos $7^1 + 1$ es divisible por 8 es una proposición cierta.

Paso inducción: Partimos de que $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8 y queremos llegar a demostrar que $7^{2(i+1)-1} + 1$ es divisible por 8, esto es, $7^{2i+1} + 1$ es divisible por 8.

Dado que la única información de que disponemos es la hipótesis (aquello de lo que partimos) tenemos que hacer que la expresión $7^{2i-1} + 1$ (que es la que conocemos) aparezca en nuestro desarrollo.

Partimos de:

$7^{2i+1} + 1 = 7^{2i} \cdot 7 + 1 = 7^{2i-1} \cdot 7^2 + 1 = 7^2 \cdot 7^{2i-1} + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 7^2 + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 48$

Llegados a este punto, tenemos que $7^2(7^{2i-1} + 1)$ es divisible por 8 por hipótesis de inducción y 48 es divisible per 8 por ser $48 = 6 \cdot 8$. Por tanto, $7^{2i+1} + 1$ es divisible por 8.

Y deshaciendo el cambio de índices tenemos que $7^n + 1$ es divisible por 8 para n impar.

---

2. Responded a los siguientes apartados:

   a) (Valoración 25 %) Calculad los valores que tienen que tener los números reales x e y de manera que: $\frac{3-xi}{1+2i} = y + ai$ donde a es la primera cifra de vuestro identificador IDP del Campus UOC. Razonad la respuesta.

   NOTA: Tenéis que resolver el ejercicio substituyendo el valor de a por vuestra cifra particular. Al inicio de la resolución indicad claramente cuál es la primera cifra de vuestro identificador IDP. El identificador IDP lo podéis encontrar en: Espacio personal, Datos personales.

   Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, después, cada alumno tiene que substituir su propio valor del IDP.

   Utilizamos la propiedad que dice que si dos fracciones son iguales, entonces:

$3 - xi = (1 + 2i) \cdot (y + ai)$
Aplicamos la distributiva del producto respecto de la suma:
$3 - xi = y + ai + 2yi + 2ai^2$
Agrupamos, ahora, partes reales y partes imaginarias:
$3 - xi = (y - 2a) + (a + 2y)i$
Igualamos parte real de un lado con el otro lado e igual hacemos con la parte imaginaria:
$3 = y - 2a$
$-x = 2y + a$
Resolvemos el sistema de ecuaciones de manera que las incógnitas son x e y. De la primera ecuación obtenemos que:
$y = 3 + 2a$
Substituyendo este valor hallado en la segunda ecuación, obtenemos que:
$x = -6 - 5a$
Si, por ejemplo, la primera cifra del IDP es 2, los valores pedidos son: $x = -16$ e $y = 7$.
Así, las posibles soluciones de este ejercicio son:

a	x	y
0	-6	3
1	-11	5
2	-16	7
3	-21	9
4	-26	11
5	-31	13
6	-36	15
7	-41	17
8	-46	19
9	-51	21

---

b) (Valoración 25 %) Resolved la ecuación: $z^4 + \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 0$. Proporcionad las soluciones en forma polar. Razonad la respuesta.

Solución:
Para resolver la ecuación $z^4 + \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 0$ seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.
Primero despejamos la incógnita: $z = \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$
A continuación escribimos el complejo $-1 + \sqrt{3}i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $-\sqrt{3}$ en 120° y en 300°. Como el afijo del punto buscado es $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 120°.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+\sqrt{3}i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, por lo cual es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-1+\sqrt{3}i = 2_{120°}$

Como que nos piden las raíces cuartas tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}_{\frac{120^o+360^o k}{4}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$

Esto es, el módulo de las raíces es $r = \sqrt[4]{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{120^o+360^\circ k}{4}$ per a $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 30°$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 120°$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 210°$
- Si $k = 3$, tenemos que $\beta_3 = 300°$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas de la ecuación dada son:

$\sqrt[4]{2}_{30°}, \sqrt[4]{2}_{120°}, \sqrt[4]{2}_{210°}, \sqrt[4]{2}_{300°}$