Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica i Multimèdia

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Primera PAC. Mòduls 1, 2 i 3.
Semestre de primavera de 2012 (del 14 de març al 4 d'abril).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar: **PAC1_Cognom1Cognom2nom.pdf**
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 20%)

   a) Volem pintar les cinc habitacions d'una casa. De quantes maneres podem fer-ho si disposem de set colors diferents? I si volem que cada habitació tingui un color diferent? Relacioneu-ho amb el tema de funcions.

   b) El següent algorisme realitza un canvi de base d'un nombre enter no negatiu n expressat en base 10 a una base b ($b \leq 10$).

```
funció CanviBase(n, b)
  inici
    m ← 0
    pot ← 1
    mentre n > 0
          m ← (n mod b) * pot + m
          n ← n div b
          pot ← 10 * pot
    fimentre
    retorn m
  fi
```

1) Calculeu el resultat de les següents crides: *CanviBase*(13,2), *CanviBase*(13,3), *CanviBase*(13,4), *CanviBase*(100,2).
2) Si fixem la base b, calculeu el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme.
3) Calculeu la complexitat de l'algorisme.

Solució:

a) Hem de dir quantes funcions hi ha de $\mathbb{N}_5$ en el conjunt X de colors, és a dir, $VR(7,5) = 7^5 = 16807$ possibilitats. En el cas de que vulguem colors diferents, les funcions han de ser injectives, de manera que tenim $V(7,5) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ possibilitats.

b) 1) Els resultats són: 1101, 111, 31, 1100100.

2) Les línies 3, 4 i 10 efectuen 1 operació elemental cada una. Les línies 5, 6, 7 i 8 efectuen 1, 4, 2 i 2 operacions elementals cada una multiplicat pel nombre de vegades que s'executa el bucle mentres.
El nombre d'iteracions és igual al nombre de vegades k que n pot dividir-se consecutivament per b. És a dir, $b^k > n$ i $k = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$.
Per tant, el nombre total d'operacions elementals serà, $9 \cdot \lfloor \log_b n \rfloor + 12$.

3) D'acord amb les propietats de la complexitat, aquest algorisme tindrá una complexitat $O(\log_b n) = O(\log n)$.

2. (Valoració d'un 20%)
En emmagatzematge distribuït com el que utilitza Google, la informació es replica en diversos servidors per facilitar la cerca i la recuperació d'informació. Podem imaginar un sistema d'emmagatzematge distribuït com un matriu quadrada M d'ordre $n \times n$ ($n \geq 1$). Cada fila representa un part de la informació i cada columna el servidor que l'emmagatzema.

Definim un graf G de la forma següent: si $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ representen les files (informació) d'M i $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ representen les columnes (servidors) d'M, definim el graf $G(R \cup C, A)$ on el vèrtex r_i es adjacent al vèrtex c_j si la posició (i, j) de la matriu M és diferent de 0 (la informació r_i s'emmagatzema al servidor c_j).

a) Dibuixeu el graf corresponent a la matriu d'emmagatzematge distribuït,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si $M_{n\times n}$ és una matriu diagonal, com seria el graf G? A quin model d'emmagatzematge fa referència?

c) Si M té a cada fila $\frac{n}{2}$ elements diferents de 0, calculeu l'ordre i la mida del graf G. Interpreteu en termes d'emmagatzematge distribuït.

d) A què correspon un vèrtex aïllat del graf G en el sistema d'emmagatzematge? Quines condicions ha de complir M perquè el graf G no tingui vèrtexs aïllats?

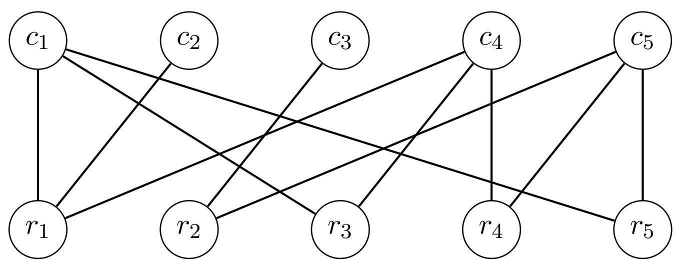
e) Quines condicions ha de complir M perquè el graf G sigui regular? Poseu un exemple de matriu el graf associat de la qual sigui regular. Quin avantatge pot tenir això en el sistema d'emmagatzematge distribuït?

f) Quina matriu correspondria al graf bipartit complet $K_{n,n}$?

g) Quines condicions ha de complir M perquè el graf G sigui connex?

Solució:

a) La representació gràfica del graf corresponent a M serà,



b) El graf G seria la unió de n còpies del graf trajecte T_2. Cada informació s'emmagatzema en un únic servidor.

c) L'ordre correspon al nombre d'informacions més el nombre de servidors. L'ordre seria $2n$. La mesura correspondria al nombre total d'unitats d'informació emmagatzemades. Si cada fila conté $\frac{n}{2}$ elements diferents de 0, M contindrà $\frac{n^2}{2}$ elements diferents de 0 i la mesura de G serà $\frac{n^2}{2}$.

d) Un vèrtex aïllat correspon a un vèrtex de grau 0. Si el vèrtex està en R significa que la informació no s'ha emmagatzemat. Si el vèrtex està en C significa que el servidor no conté informació. Perquè no hi hagi vèrtexs aïllats, ha d'haver-hi almenys un element diferent de 0 en cada fila i en cada columna de M.

e) Perquè sigui regular, el nombre d'elements diferents de 0 en cada fila i en cada columna ha de ser el mateix. Per exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el sistema d'emmagatzematge distribuït cada servidor conté la mateixa quantitat d'informació i cada informació està continguda en el mateix nombre de servidors.

f) M seria la matriu amb tots els elements diferents de 0.

g) Observem que si G no és connex llavors cada component connexa de G correspondrà a una submatriu de M. Per tant, G serà connex si M, intercanviant files o columnes, no es pot representar en la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

3. (Valoració d'un 20%)

a) Si un graf G és autocomplementari, quina condició ha de complir l'ordre de G?

b) Trobeu tots els grafs autocomplementaris d'ordre 4.

c) Pot un graf bipartit i connex ser autocomplementari?

d) En un joc es comença dibuixant n punts. Cada jugador, en el seu torn, uneix dos dels punts existents amb una línia de qualsevol forma, i afegeix un punt al mig d'aquesta línia. Hi ha dues restriccions: un punt del que ja surten tres línees ja no es pot utilitzar més, i les línees no poden creuar-se. El jugador que en el seu torn no pugui dibuixar una línea seguint aquestes restriccions perd la partida. Demostreu que el nombre de jugades que pot tenir una partida sempre és inferior a $3n$.

Solució:

a) El graf complet d'ordre n té $\binom{n}{2}$ arestes. Un graf G d'ordre n que sigui autocomplementari n'ha de tenir la meitat, ja que, en particular, el seu complementari ha de tenir aquest mateix nombre, i la unió d'arestes de G i G^c és el total d'arestes del graf complet d'ordre n. Per tant, G tindrà $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{1}{4}n(n-1)$ arestes, per la qual cosa $n(n-1)$ ha de ser divisible per 4. Com només un, o bé n o bé $n-1$, és parell, el que ho sigui ha de ser divisible per 4. Per tant, n ha de ser un múltiple de 4, o bé un múltiple de 4 més 1 ($n = 1, 4, 5, 8, 9, ...$).

b) Pel que hem observat a l'apartat anterior, un graf autocomplementari d'ordre 4 ha de tenir 3 arestes. Per tant, ha de ser un dels següents: $E_4, C_3 \cup N_1$ o T_4. Els dos primers són complementaris l'un de l'altre, mentre que T_4 és l'únic autocomplementari.

c) Si el graf és bipartit, existeix una partició $V = V_1 \cup V_2$ de manera que no pot haver cap aresta entre dos vèrtexs d'un mateix V_i. Si algun V_i consta de tres vèrtexs o més, el graf complementari conté un triangle (el format per tres qualssevol d'aquests vèrtexs) i, per tant, no és bipartit. Si ens restringim a grafs que tenen un o dos vèrtexs en cada component, només tenim un graf connex en el cas dels trajectes T_2, T_3 i T_4. D'aquests, només T_4 és autocomplementari.

d) Observem que estem construïnt un graf. A cada jugada unim dos vèrtexs u i v, i creem un vèrtex w sobre la línea, amb la qual cosa hem afegit un vèrtex, w, i dues arestes, (u, w) i (w, v). Si diem v al nombre de vèrtexs, a al d'arestes i j al de jugades que s'han fet, tenim que $v = n + j$ i $a = 2j$. D'altra banda, com de cada vèrtex no poden sortir més de tres arestes, tenim que $3v \geq 2a$. Substituint en aquestes expressió les dues igualtats anteriors, obtenim $3(n + j) \geq 2(2j)$, d'on $3n \geq j$.
Per veure que no s'assoleix la igualtat, cal observar que $3n = j$ implica $3v = 2a$, de manera que tindríem un graf 3-regular. Això no és possible perquè el vèrtex creat en la darrera jugada té necessàriament grau 2. En conclusió, el nombre màxim de jugades possibles és $3n - 1$.
El fet de demanar que les arestes no es creuin (és a dir, que el graf sigui planar) és una restricció que pot fer que aquest nombre màxim no s'assoleixi. Si hi esteu interessats, a la xarxa podeu trobar més informació sobre aquest joc, que s'anomena *Sprouts*.

4. (Valoració d'un 20%) Considerem les següents seqüències:

I 3,3,4,1,7,2,4

II 2,4,3,3,1,3,2

III 1,4,5,2,3,3,3

IV 4,3,1,3,5,2,2

a) Demostreu que algunes d'aquestes seqüències no són gràfiques sense usar l'algorisme de Havel-Hakimi.

b) Determineu quines d'aquestes seqüències són gràfiques usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

c) Dibuixeu dos grafs diferents que tinguin com a seqüència de graus una mateixa seqüència de les de l'enunciat, i demostreu que no són isomorfs.

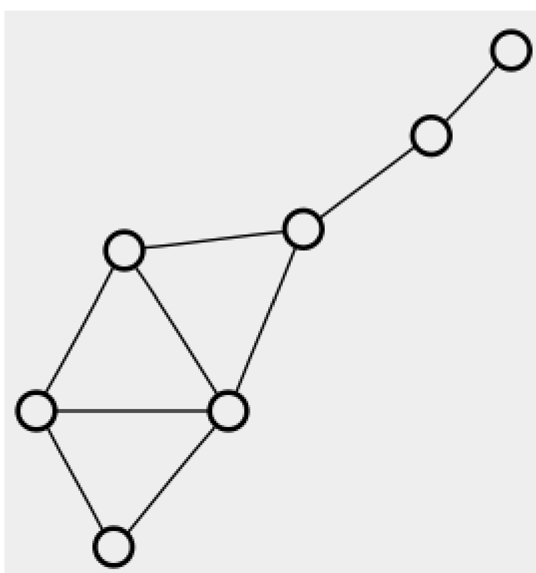
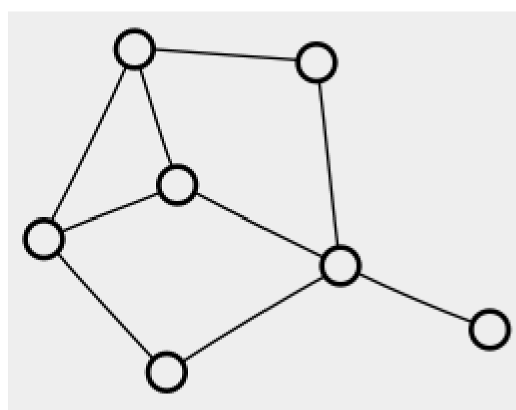
d) Calculeu l'ordre, la mida i el diàmetre dels grafs de l'apartat anterior.

Solució:

a) La primera no pot ser-ho perquè un vèrtex té grau 7, cosa impossible donat que només hi ha 7 vèrtexs. La tercera no ho pot ser perquè la seva suma, que, pel lema de les encaixades, equival al doble de la mida de l'hipotètic graf, és senar.

b) Podem comprovar que la segona i la quarta són seqüències gràfiques. Per exemple, aplicant l'algorisme de Havel-Hakimi a la segona:
4,3,3,3,2,2,1
2,2,2,1,2,1, reordenant,
2,2,2,2,1,1
1,1,2,1,1, reordenant,
2,1,1,1,1
0,0,1,1, reordenant,
1,1,0,0
0,0,0,0

c) Agafem la seqüència II. Dues possibilitats serien:

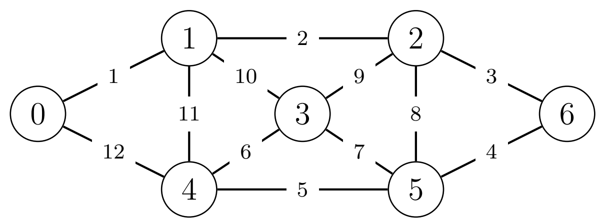



No són isomorfs perquè en el primer els vèrtexs de grau 4 i 1 no són adjacents, i en el segon sí. També podríem argumentar que tenen diferent diàmetre.

d) A partir de la seqüència de graus ja podem saber que l'ordre és 7 i la mida 9 (la meitat de la suma dels graus). Els diàmetres són 4 i 3, resp.

5. (Valoració d'un 20%) Una xarxa social (facebook, twiter, tuenti,...) se sol representar com un graf en el qual els vèrtexs són els usuaris de la xarxa i dos vèrtexs són adjacents si els usuaris comparteixen comentaris. Per exemple, la xarxa tuenti té 9.769.102 usuaris (vèrtexs) i 587.415.363 enllaços (arestes). En una xarxa és important conèixer la seva estructura tal com distància mínima, distància màxima, densitat,...

   Com que la xarxa té molts vèrtexs, sovint convé estudiar-la a partir de conjunts de nodes interrelacionats entre si (subgrafs complets màxims) que anomenarem *clústers*. Suposem una xarxa social formada per 7 clústers, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El següent gràfic representa la distància mínima (nombre d'usuaris intermedis) entre cada parell de clústers:



   a) Calculeu la densitat de la xarxa (la densitat es defineix com el quocient $d = \frac{\text{Nombre d'arestes de la xarxa}}{\text{Nombre total d'arestes possibles}}$).

   b) Calculeu, utilitzant l'algorisme apropiat, la distància entre el clúster 0 i el clúster 5, i el camí més curt que uneix aquests dos clústers.

   c) Quin és el clúster més cèntric? (el clúster més cèntric és aquell que la seva distancia mitjana als altres clústers és mínima).

   d) Quins són els dos clústers més allunyats entre si i a quina distància estan?

Solució:

   a) El nombre màxim d'arestes correspon al nombre d'arestes del graf complet de 7 vèrtexs, $\frac{n^2-n}{2} = 21$ arestes. Per tant la densitat serà $d = \frac{12}{21} = 0.57$.

   b) Aplicant l'algorisme de Dijkstra amb inici en el clúster 0, obtenim:

0	1	2	3	4	5	6
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(12,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(11,2)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$

La distància mínima és 10 passant per $0 \to 1 \to 2 \to 6 \to 5$.

c) Calculem primer la distància entre tots els clústers amb l'algorisme de Floyd:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 9 & \infty & 8 & 3 \\ \infty & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & \infty \\ 12 & 11 & \infty & 6 & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu final serà:

$$d^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 11 & 12 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & 13 & 7 & 3 \\ 11 & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & 11 \\ 12 & 11 & 13 & 6 & 0 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 11 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriu ens dóna la distància de cada clúster a tots els altres clústers. La distancia mitjana serà la suma de cada fila (o columna) dividit per 7:

0	1	2	3	4	5	6
6.14	5.43	5.28	7.71	8.28	6.14	5.57

Per tant, el més cèntric serà el número 2.

d) A partir de l'algorisme de Floyd comprovem que els dos clústers més allunyats són el clúster 2 i el 4 que estan a distància 13.