Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Calcula les arrels quartes del complex següent: $z = 2\sqrt{3} + 2i$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Resolució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = -2\sqrt{3} + 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg \dfrac{2}{-2\sqrt{3}} + 180^o = arctg(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) + 180^o = -30^o + 180^o = 150^o$

$z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^o}$

Oposat:

$-z = 2\sqrt{3} - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = arctg(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) = -30^o = 330^o$

$-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^o}$

Conjugat:

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - 180^o = arctg(\dfrac{\sqrt{3}}{3}) - 180^o = 30^o - 180^o = -150^o = 210^o$

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^o}$

Per tant:

$z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^o}$

$-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^o}$

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^o}$

b) Escrivim el complex $z = 2\sqrt{3} + 2i$ en forma polar *(apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos)*

$$m = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^o$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle ja que la part real i la part imaginària del complex són positives *(apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).*

Tenim, per tant, que $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30^o}}$

Com que ens demanen les arrels quartes hem de fer *(observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):*

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4_{30^o}} = \sqrt[4]{4}_{\frac{30^o+360^o k}{4}}$ per a k=0, 1, 2, 3

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{4}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{30^o+360^o k}{4}$ per a k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 7^o 30' = 7{,}5^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 7^o 30' + 90^o = 97{,}5^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 7^o 30' + 180^o = 187{,}5^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 7^o 30' + 270^o = 277{,}5^o$

Per tant, les quatre arrels quartes del complex $z = 2\sqrt{3} + 2i$ són:

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{7,5^{\circ}} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 7,5^{\circ} + i\cdot\sin 7,5^{\circ}) = \sqrt[4]{4}\cdot 0,991 + \sqrt[4]{4}\cdot 0,13i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{97,5^{\circ}} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 97,5^{\circ} + i\cdot\sin 97,5^{\circ}) = -\sqrt[4]{4}\cdot 0,13 + \sqrt[4]{4}\cdot 0,991i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{187,5^{\circ}} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 187,5^{\circ} + i\cdot\sin 187,5^{\circ}) = -\sqrt[4]{4}\cdot 0,991 - \sqrt[4]{4}\cdot 0,13i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{277,5^{\circ}} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 277,5^{\circ} + i\cdot\sin 277,5^{\circ}) = \sqrt[4]{4}\cdot 0,13 - \sqrt[4]{4}\cdot 0,991i}$$

Exercici 2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 2 de R^5 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1=a_4, a_3=0, a_5=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1=b_3, b_2=0, b_4=0\}$ i sigui $v=(0,-2,0,0,0)$

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 1, 0, 0, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 2, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1=a_4$, $a_2=0$ i $a_5=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=0 y=-2. Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions $b_1=b_3$, $b_2=0$, $b_4=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs T és una base de B.

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix $b_2=0$

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

Exercici 3.

Sigui la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \text{ amb } a \in R.$$

a) Calculeu el rang de la matriu *M* en funció dels valors del paràmetre *a*.
b) Discutiu i solucioneu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ segons els valors del paràmetre } a.$$

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & (a+1)^2-a^2\\ 0 & -1 & (a-1)^2-a^2\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & 2a+1\\ 0 & -1 & -2a+1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & 2a+1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera
(2) Operar a les files segona i tercera
(3) A la tercera fila sumar-li la segona

> Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent a una amb tres files no nul·les i per tant $rang(M)=3$.

b) El sistema $M\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu M, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=1,\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & (a+1)^2\\ 1 & 1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0,\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & a-1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x=1, y=0,\ z=0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat b) també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat a).

Exercici 4.

Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per
$f(x,y,z)=(3x,-3x+2y+2z,-2z)$.

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Trobeu una base del nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de la imatge de f. És f exhaustiva?

d) Digueu si f diagonalitza i, si és possible, trobeu una base de R^3 formada per vectors propis de f .

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El nucli de f es troba resolent el sistema $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. O sigui, $3x=0$ i $-2z=0$ Per tant, $x=z=0$ a més com $-3x+2y+2z=0$, tenim que $y=0$. O sigui, el nucli de f està generat pel vector $(0,0,0)$. En particular, com que el nucli és el vector zero, f és injectiva.

c) La imatge de f està generada per les columnes de la matriu A. Aplicant el teorema de la dimensió *(Mòdul 4 pàgina 19)*, tenim que $\dim R^3 = \dim Ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ donat que $\dim Ker(f)=0$, llavors la $\dim \mathrm{Im}(f)=3$ així una base de la imatge de f és els vectors de la imatge $I\,m(f) = <(3,-3,0),(0,2,0),(0,2,-2)>$. Així la imatge de f és tot R^3, deduïm que f és exhaustiva.

d) Per veure si la matriu diagonalitza, calcularem el seu polinomi característic:

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ -3 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & -2-t \end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 0 & -2-t \end{vmatrix}=(3-t)(2-t)(-2-t)$$

donat que tenim 3 valors propis diferents, la matriu diagonalitza *(veure apunts M5, Teorema de diagonalització).*

Com que $f(0,1,0)=(0,2,0)=2\cdot(0,1,0)$ tenim que el vector $(0,1,0)$ és vectors propi de f de valor propi 2.

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del sistema és: $(1,-3,0)$.

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del sistema és: $(0,-1,2)$.

Observem que $(0,1,0),(1,-3,0),(0,-1,2)$ formen una base de R^3 de vectors propis de f. Això vol dir que la matriu de f en aquesta base és diagonal amb elements diagonals 2, 3 i -2. Per tant, f diagonalitza.