PAC3

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinómica dels problemes NP-complets.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Per a cada un dels problemes següents, definiu-los en forma de funció i classifiqueu-los com a problemes de decisió, càlcul o optimització. Reformuleu els de càlcul i d'optimització en la versió de decisió i indiqueu a quina classe de complexitat pertanyen:

   (a) Donat un graf $G = (V, A)$ determinar si G és una graf eulerià.

   (b) Donada una seqüència S de nombres enters, ordenar la seqüència S.

   (c) Determinar si un graf $G = (V, A)$ és bipartit.

   (d) Calcular el diàmetre d'un graf ponderat $G = (V, A)$.

2. (Valoració d'un 20%) De les fórmules següents, indiqueu quines estan en FNC i quines no. Per les que no estan en FNC, convertiu-les en FNC. Finalment, convertiu-les totes a entrades del problema 3SAT.

   (a) $(a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c)$.

   (b) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

   (c) $(a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b \vee \bar{c} \vee d)$.

   (d) $(a \wedge b) \vee (\bar{d} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (\bar{d} \wedge c)$.

3. (Valoració d'un 20%) L'objectiu d'aquest exercici és demostrar que el problema SUMA_SUB (Proposició 9) és NP-Complet suposant que el problema PARTICIÓ (Proposició 8) és NP-Complet.

   (a) Demostreu que el problema SUMA_SUB és verificable en temps polinomial.

   (b) Construiu una reducció polinòmica entre el problema PARTICIÓ i SUMA_SUB (PARTICIÓ $\leq_p$ SUMA_SUB).

   (c) Demostreu que SUMA_SUB és NP-complet.

4. (Valoració d'un 20%) Considereu el següent problema: una escola ha de programar les dates dels exàmens corresponents a n ($n > 1$) assignatures de tal manera que a cap estudiant li coincideixen dos examens en el mateix dia. Suposem que les assignatures són $Ass = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i que Int és el conjunt de parelles d'assignatures que tenen algun alumne en comú. L'objectiu és determinar el nombre mínim de dies necessaris per programar tots els exàmens de manera que cap estudiant tingui dos o més exàmens el mateix dia.

   (a) Modeleu aquest problema com un problema de grafs, és a dir, definiu els conjunts V i A del graf $G = (V, A)$ i la propietat de G que hem de determinar.

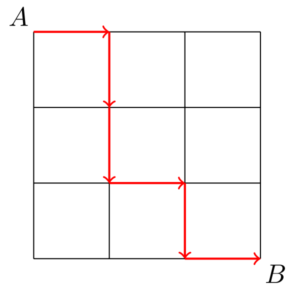
   (b) Si $n = 6$, $Ass = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $Int = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{b, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$, determineu la solució òptima.

   (c) Demostreu que quan el nombre dies necessaris és com a màxim 2 aleshores el problema és a P.

   (d) Demostreu que quan el nombre de dies necessaris és més gran de 2 aleshores el problema és NP-Complet.

5. (Valoració d'un 20%) Reviseu el vídeo següent: `https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs`.

   Considerem una simplificació del problema del vídeo: volem calcular quants camins mínims uneixen el punt A amb el punt B en una xarxa com la del vídeo de costat n. En el gràfic següent podeu veure un exemple de camí mínim en la xarxa 3×3:



(a) Representeu la xarxa de costat n com un graf simple $G = (V, A)$. Indicació: expresseu-lo com a producte de dos grafs simples.

(b) Plantegeu el problema proposat com un problema de càlcul en el graf G.

(c) Demostreu que el nombre de camins mínims entre A i B en una xarxa de costat n és $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$.

(d) Calculeu el nombre de camins mínims entre A i B que hi ha en una xarxa de costat n, per a $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

(e) Raoneu perquè el problema de **llistar** tots els possibles camins no pertany ni a P ni a PSPACE. Pertany a NP? Nota: fixeu-vos que ens demanen llistar tots els camins, no calcular quants n'hi ha com en els apartats anteriors.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 19/12/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**