Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 5+5+5+10=25%) El següent algorisme fa un canvi de base d'un nombre enter no negatiu n expressat en base 10 a base 2.

```
función CanviBase2(n)
   inicio
      m ← 0
      pot ← 1
      mientras n > 0
                 m ← (n mod 2) * pot + m
                 n ← n div 2
                 pot ← 10 * pot
      finmientras
      retorno m
   fin
```

Justifiqueu quines de les següents afirmacions són correctes:

a) Si $n = 100$ la complexitat de l'algorisme és $O(\log 100) = O(1)$.

b) Si $n = 100$, la complexitat de l'algorisme és $O(\log_2 100)$.

c) La complexitat de l'algorisme és $O(\log_2 n)$.

d) La complexitat de l'algorisme és $O(\log n)$.

Solució:

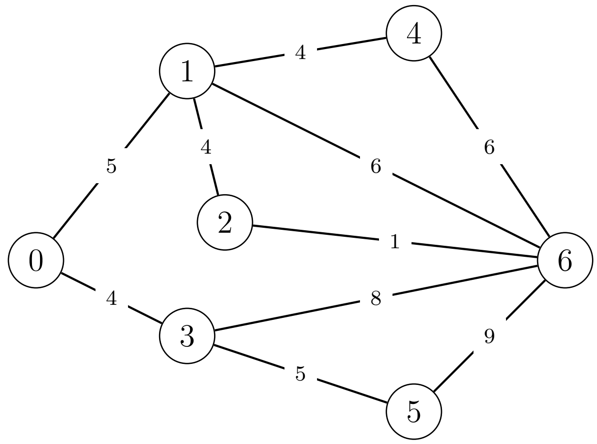
a) Falsa. La complexitat és una mesura assimptòtica i no té sentit calcular-la per a un valor determinat de l'entrada.

b) Falsa. Pel mateix motiu que l'anterior.

c) Certa. La complexitat del canvi de base és $O(\log_2 n)$.

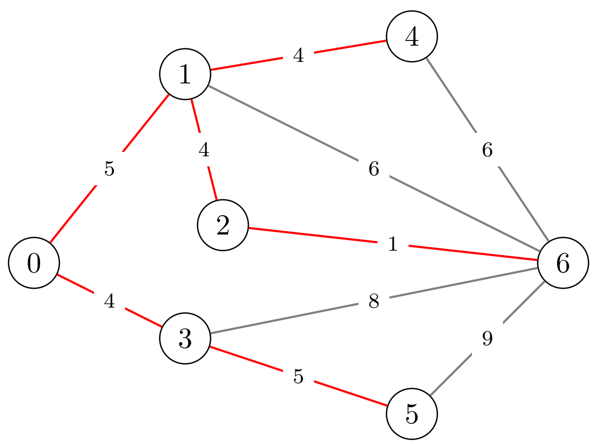
d) Certa. Ja que $O(\log n) = O(\log_b n)$ per a qualsevol base $b > 0$.

2. (Valoració d'un 15+10=25%) Utilitzant l'algorisme de Kruskal, trobeu un arbre generador minimal del graf,



L'arbre minimal obtingut és únic? Justifiqueu la resposta.

Solució: Aplicant l'algorisme de Kruskal obtenim l'arbre generador minimal següent:



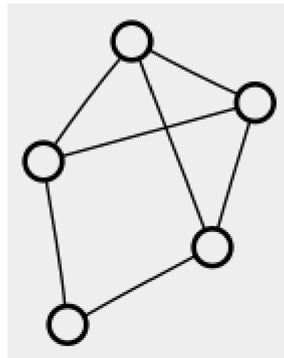
L'arbre obtingut és únic atès que a cada pas hem triat totes les possibles arestes de pes més petit. Les de pes 1, 4 i 5. Les que queden ja són de pes més gran.

3. (Valoració d'un 5+10+10=25%)

   a) Demostreu que un graf amb un vèrtex aïllat no pot ser autocomplementari.

   b) Si un graf té grau mínim k, quina mida mínima pot tenir?

   c) Demostreu que el següent graf és hamiltonià, però no té cap camí eulerià ni és bipartit.



Solució:

a) El complementari és connex, ja que a G^c tot vèrtex serà adjacent al vèrtex aïllat de G.

b) Com tot vèrtex té k o més veïns, la suma de graus serà almenys nk, on n és l'ordre del graf. Aquesta suma és igual al doble de la mida del graf, pel lema de les encaixades. Per tant, $2m \geq nk$, d'on $m \geq \lceil nk/2 \rceil$.

c) És hamiltonià perquè hi ha un cicle que conté tots els vèrtexs. No té cap camí eulerià perquè el nombre de vèrtexs de grau senar és superior a dos. No és bipartit perquè conté cicles de longitud senar (C_3 i C_5)

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) Un problema que es pot resoldre en temps $O(n^{73})$ té complexitat polinòmica.

b) El problema *"Donat un graf, decidir si és hamiltonià"* no pertany a NP.

c) $A \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C)$ és una fòrmula en FNC (forma normal conjuntiva).

d) Si A és NP-difícil, aleshores $A \in NP$.

Solució:

a) Cert, per definició.

b) Fals. Un testimoni seria una llista ordenada dels vèrtexs que formés un cicle hamiltonià.

c) Cert, és una conjunció de disjuncions.

d) Fals. Seria cert si A fos NP-complet.

Final 2

1. (Valoració d'un 5+10+10=25%) En emmagatzematge distribuït com el que utilitza Google, la informació es replica en diversos servidors per facilitar la cerca i la recuperació d'informació. Podem imaginar un sistema d'emmagatzematge distribuït com un graf bipartit $G(I \cup S, A)$. El conjunt I representa el conjunt d'unitats d'informació i el conjunt S representa el conjunt de servidors. Utilitzant la teoria de grafs, responeu les següents qüestions:

   a) Si disposem de 6 servidors i cada servidor no pot contenir més de 4 unitats d'informació, quin és el nombre màxim d'unitats d'informació que pot emmagatzemar el sistema?

   b) Si suposem que cada unitat d'informació ha de replicar-se en 3 servidors, quin és el nombre màxim d'unitats d'informació diferents que pot emmagatzemar el sistema?

   c) En el mateix sistema, és a dir, amb 6 servidors i cada servidor no pot contenir més de 4 unitats d'informació, quin és el nombre màxim d'unitats d'informació que podem emmagatzemar segons el nombre de replicacions que triem?

   Solució: En el graf bipartit G, anomenem n al nombre d'elements d'I. El nombre d'elements d'S es 6.

   a) Si cada servidor no pot contenir més de 4 unitats d'informació, llavors el nombre máxim d'unitats d'informació que pot emmagatzemar el sistema seria $n = 4 \cdot 6 = 24$.

   b) Si cada unitat d'informació es replica en 3 servidors significa que cada vèrtex de I té grau 3. Per tant, $3n = 24$ i $n = 8$.

   c) Si b és el nombre de replicacions i n el nombre d'unitats d'informació, llavors $bn = 24$ amb $b \leq 6$. Les possibilitats per (b, n) seran, $(1, 24)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 6)$ i $(6, 4)$.

2. (Valoració d'un 5+10+10+5=25%) Aplicant l'algorisme de Floyd a un graf ponderat de 7 vèrtexs obtenim la matriu,

$$d^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 11 & 12 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & 13 & 7 & 3 \\ 11 & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & 11 \\ 12 & 11 & 13 & 6 & 0 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 11 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Justifiqueu si són certes o falses les següents afirmacions:

a) El diàmetre del graf és 13.

b) El graf és connex.

c) Aplicant 7 vegades l'algorisme de Dijkstra amb origen a cada vèrtex, obtindríem el mateix resultat que aplicant l'algorisme de Floyd.

d) L'algorisme de Dijkstra és més eficient que l'algorisme de Floyd quan l'utilitzem per calcular el diàmetre del graf.

Solució:

a) Cert. El valor màxim de la matriu és 13 que és el diàmetre del graf.

b) Cert. Totes les entrades de la matriu són finites la qual cosa significa que entre cada parella de vèrtexs existeix un camí.

c) Cert. La fila i-èssima de la matriu és la distància mínima del vèrtex i a la resta de vèrtexs que ha de coincidir amb la obtinguda amb l'algorisme de Dijkstra.

d) Fals. L'algorisme de Dijsktra té una complexitat $O(n^2)$ i l'algorisme de Floyd $O(n^3)$ però, si apliquem l'algorisme de Dijkstra n vegades, obtindrem la mateixa complexitat $O(n^3)$.

3. (Valoració d'un 5+5+5+10=25%) Sigui la seqüència $4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

a) Demostreu que és gràfica usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

b) Dibuixeu un graf que tingui aquesta seqüència.

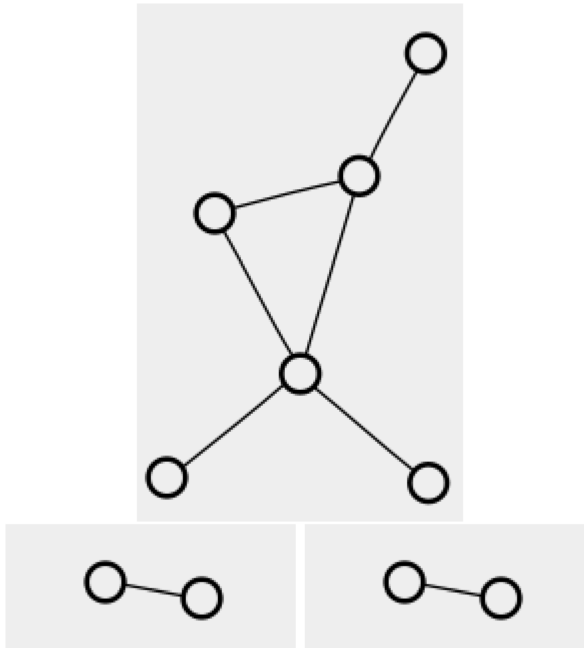
c) Demostreu que un arbre no pot tenir aquesta seqüència.

d) Demostreu que un graf connex no pot tenir aquesta seqüència. (Indicació: useu l'apartat anterior; i penseu com pot ser un cicle d'aquest graf).

Solució:

a) Apliquem l'algorisme de Havel-Hakimi:
4,3,2,1,1,1,1,1,1,1
2,1,0,0,1,1,1,1,1
2,1,1,1,1,1,1,0,0
0,0,1,1,1,1,0,0
1,1,1,1,0,0,0,0
0,1,1,0,0,0,0
1,1,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0

b) Una possibilitat seria:



c) No pot ser un arbre perquè el nombre d'arestes, que és $(4+3+2+1\cdot 7)/2 = 8$, no és igual al nombre de vèrtexs (10) menys un.

d) Suposem que G és connex i té la seqüència donada. Hem vist que G no pot ser un arbre a l'apartat anterior. Com G és connex però no un arbre, ha de contenir un cicle. Un vèrtex de grau 1 no pot estar al cicle, per tant el cicle ha d'estar format pels vèrtexs de grau 2, 3 i 4. Si intentem afegir vèrtexs de grau 1 al cicle, mantenint el graf connex, només podem posar-ne 3 (i obtindríem el graf de la solució al segon apartat, tret dels dos T_2).

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) Un problema que es pot resoldre en temps $O(n^{1000})$ és intractable.

b) Si $A \leq_p B$ i $A \notin P$, aleshores $B \notin P$.

c) El problema *"Donat un graf, decidir si conté un subgraf complet de mida 6"* és verificable en temps polinòmic.

d) Un problema que es pot resoldre en temps $O(3^n)$ té complexitat polinòmica.

e) Si A és NP-difícil, aleshores A és NP-complet.

Solució:

a) Fals, ja que es pot resoldre en temps polinòmic.
b) Cert, per les propietats de les reduccions.
c) Cert, un testimoni seria donar sis vèrtexs que formin un K_6.
d) Fals, en principi tindria complexitat exponencial.

Final 3

1. (Valoració d'un 15+10=25%) Considereu la següent seqüència de nombres enters ordenada en ordre decreixent,

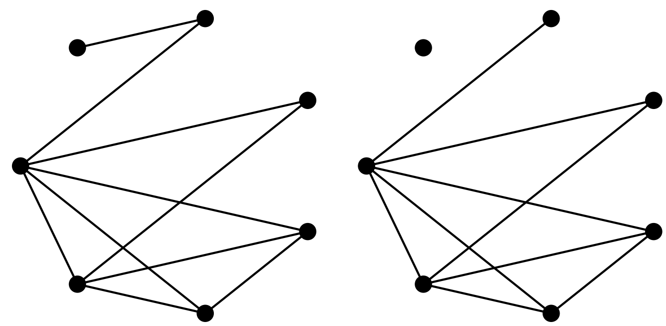
$$5, 4, 3, 3, 2, y, x$$

   a) Per a quins valors de y i x corresponen a la seqüència de graus d'un graf.
   b) Per als valors de y i x obtinguts en l'apartat anterior, dibuixeu un graf que la tingui com a seqüència de graus.

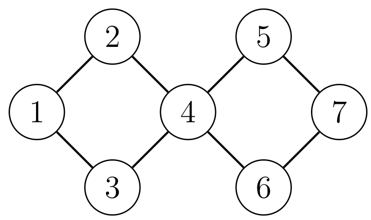
   Solució:

   a) Com que la seqüència está ordenada, deduïm que $0 \leq x \leq y \leq 2$. A més, com que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell deduïm que y o x han de ser senars però no tots dos. Això tenim dues possibilitats,
      - $y = 2$, $x = 1$: Apliquem l'algorisme de Havel-Hakimi:
        5,4,3,3,2,2,1
        3,2,2,1,1,1
        1,1,0,1,1
        1,1,1,1,0
        0,1,1,0
        1,1,0,0
        0,0,0
      - $y = 1$, $x = 0$:
        5,4,3,3,2,1,0
        3,2,2,1,0,0
        1,1,0,0,0
        0,0,0,0

   b) Una representació gràfica dels dos graf podria ser:



2. (Valoració d'un 15+10=25%) Donat el graf,



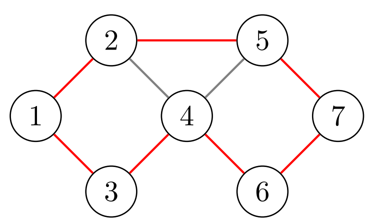
   a) Demostreu que és eulerià però no hamiltonià.

   b) Afegiu el nombre mínim d'arestes al graf anterior de manera que no sigui eulerià però sí hamiltonià.

Solució:

   a) Tots els vèrtexs tenen grau parell, per tant és un graf eulerià. Si eliminem el vèrtex 4 obtenim dues components connexes, per tant no pot ser hamiltonià.

   b) Si afegim l'aresta $\{2, 5\}$ aleshores el graf tindrà dos vèrtexs de grau senar i, per tant, no podrà ser eulerià. Ara, però, podem construir el següent cicle hamiltonià:



3. (Valoració d'un 10+15=25%)

   a) Donada l'expressió aritmètica $3 * (x + 1)^2$, amb la prioritat habitual d'operacions, dibuixeu l'arbre associat i doneu el recorregut de l'arbre en preordre i en postordre.

b) Doneu l'ordre i la mida dels grafs $T_3 + N_2$, $K_4 \cup C_4$ i $N_1 \times T_4$.

Solució:

a) En preordre: $*$ 3 ˆ + x 1 2
En postordre: 3 x 1 + 2 ˆ $*$

b) L'ordre és $n(T_3+N_2) = 5$. La mida és $m(T_3+N_2) = m(T_3)+m(N_2)+n(T_3)\cdot n(N_2) = 8$. $n(K_4 \cup C_4) = 8$. $m(K_4 \cup C_4) = m(K_4) + m(C_4) = 6 + 4 = 10$.
$N_1 \times T_4 = T_4$, que té ordre 4 i mida 3.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)
Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) Si $A \leq_p B$ i $A \notin NP$, aleshores $B \notin NP$.

b) Si $A \leq_p B$ i A és NP-complet, aleshores B és NP-complet.

c) Un problema verificable en temps $O(n^{50})$ pertany a NP.

d) El problema "Donat un graf, decidir si és eulerià"pertany a P.

Solució:

a) Cert, per les propietats de les reduccions.

b) Fals, perquè B no té perquè pertanyer a NP.

c) Cert, per definició de NP.

d) Cert, ja que n'hi ha prou amb mirar la paritat dels graus dels vèrtexs.