ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
19 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Hallad el inverso del número complejo siguiente: $2 + 3i$. Expresad dicho inverso en forma binómica.

   b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $\frac{1}{32}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) El inverso de $2+3i$ es $\frac{1}{2+3i}$ pero hay que expresarlo en forma binómica.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{(-3)}{13}i$$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} + \frac{(-3)}{13}i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces quintas de $\frac{1}{32}$.

Para determinar las raíces quintas de $\frac{1}{32}$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte imaginaria nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1/32, 0) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1/32 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1/32, 0), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{32}\right)_{0^{\circ}}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^{\circ}+360^{\circ}k}{5}}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)}=\frac{1}{2}$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{0^{\circ}+360^{\circ}k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=0^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=0^{\circ}+72^{\circ}=72^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=0^{\circ}+144^{\circ}=144^{\circ}$
- Si k=3, tenemos que $\beta_1=0^{\circ}+216^{\circ}=216^{\circ}$
- Si k=4, tenemos que $\beta_2=0^{\circ}+288^{\circ}=288^{\circ}$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ \overline{2}\end{pmatrix}_{0^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ \overline{2}\end{pmatrix}_{72^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ \overline{2}\end{pmatrix}_{144^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ \overline{2}\end{pmatrix}_{216^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ \overline{2}\end{pmatrix}_{288^\circ}}$$

2. Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3).$

   Sea $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

   Y sea $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b) Sean $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de F. Calculad la matriz de cambio de base de B a A.

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontramos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y orlando encontramos que todos los determinantes 3x3 son cero. Así la dimensión de F es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores, ya que son linealmente independientes (contienen el menor anterior). Así pues, A={e_1, e_2}.

Para ver si v pertenece a F resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=-7. Por tanto, v pertenece a F, y sus coordenadas en la base A son (-2, -7).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así es justamente como tenemos definido el primer vector de la base B. Vamos a calcular la expresión del segundo resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=-1. Y por tanto las coordenadas de w_2 en la base A son (1,-1).

De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13]

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq {}^{-10}/_{3} \rightarrow \mathrm{rang}(A) = 3 = \mathrm{rang}(M) =$ nº incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathrm{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = \frac{-10}{3} \rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = \frac{-10}{3}$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \mathrm{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-F1 y F3=F3+F1.

(2) Operaciones: F3=3·F3-2·F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ 10z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ z = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}$$
$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Consideremos $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.

   a) Sea f el escalado de razón 3 desde el punto $(1,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

   b) Sea g el giro de ángulo $\alpha = 30°$ en sentido antihorario desde el origen. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$.

Resolución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el punto (1,-2) hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) y f(C)=(7,10).

b) El Módulo 5, Secciones 3 y 5, dice que la matriz del giro de ángulo $a = 30^o$ en sentido antihorario es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde denotamos c=cos(a) y s=sin(a), para abreviar. Para encontrar las imágenes de A,B,C multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

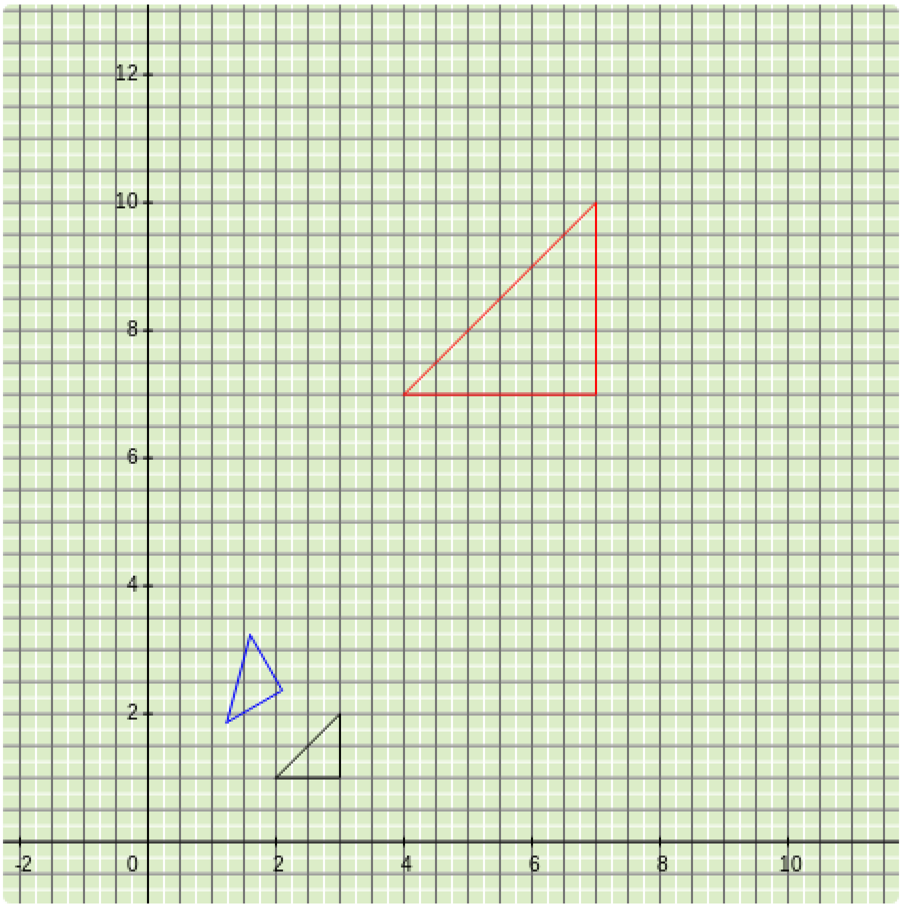
Así g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el caso en que $a = 30^o$, entonces $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$g(A) = (2c - s, c + 2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2} \right),$$

$$g(B) = (3c - s, c + 3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2} \right)$$

y

$$g(C) = (3c - 2s, 2c + 3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right)$$



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$