PAC1

Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions i algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Disposem d'un teclat numèric per accedir a un laboratori. Cada treballador del laboratori ha de tenir una paraula d'accés $x_1x_2\dots x_r$ amb una longitud r mínima de 6 dígits i màxima de 8.

   (a) Quantes paraules d'accés es poden formar?

   (b) Quantes paraules d'accés es poden formar que continguin tots els dígits diferents?

   (c) Expresseu les solucions dels dos apartats anteriors a través de funcions $f : N_r \longrightarrow X$, detallant el tipus de funció, el paràmetre r i el conjunt X que es considera en cada cas.

   (d) Quantes paraules d'accés es poden formar de longitud exactament 7, si el 0 no pot aparèixer en la primera posició, i les paraules han de ser nombres parells?

2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent on T és una llista d'enters de longitud $n > 1$.

```
funció Insercio(T)
  inici
    n ← Longitud(T)
    per i = 2 fins n
        element ← T[i]
        j ← i − 1
        mentre j ≠ 0 ∧ element < T[j] do
                T[j + 1] ← T[j]
                j ← j − 1
        fimentre
        T[j + 1] ← element
    fiper
    retorn T
  fi
```

   (a) Calculeu el resultat de les següents crides: *Insercio*([1,2,3,4,5,6,7]), *Insercio*([7,6,5,4,3,2,1]), *Insercio*([7,2,5,4,3,6,1]), *Insercio*([1,6,3,4,5,2,7]).

   (b) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme. Suposeu que obtenir la longitud a partir d'una llista només representa una operació elemental. I en el millor dels casos possibles?

   (c) Determineu, en funció de la longitud de la llista, n, la complexitat de l'algorisme.

   (d) Proposeu una alternativa que millori l'algorisme.

3. (Valoració d'un 20%)

   (a) Sigui $G(V, A)$ el graf bipartit complet $K_{2,3}$. Justifica quines de les següents afirmacions són certes: el graf complementari de G és cíclic, G és cíclic i el diàmetre de G és 2.

   (b) Quin és el nombre mínim d'arestes que s'han d'eliminar d'un graf complet de n vèrtexs ($n \geq 4$) per tal que passi a tenir cuatre components connexes?

   (c) Proposeu un graf que tingui la mateixa seqüència de graus que el graf $G = C_{11} + N_1$ però que no sigui isomorf a G.

   (d) Sigui G un graf connex amb n vèrtexs. Demostreu que si el grau de cada vèrtex a G^c és el triple que el seu grau a G, aleshores G és regular i $n-1$ és un múltiple de 4.

4. (Valoració d'un 20%)

   (a) Sigui $G(V, A)$ un graf simètric i connex de mida m que té 6 vèrtexs de grau 3, 2 de grau 2 i x de grau 1; i sigui $G'(V', A')$ un graf simètric i connex de mida m que té 2 vèrtexs de grau 3, 9 de grau 2 i y de grau 1.

i. Quina relació hi ha entre els vèrtexs de grau 1 de G i de G'?

ii. Quants vèrtexs de grau 1 de G es necessiten, com a mínim, per tal que el graf G deixi de ser connex?

(b) Considerem les següents seqüències:
$s_1 : 3,3,4,1,7,2,4;$ $\quad s_2 : 2,4,3,3,1,3,2;$ $\quad s_3 : 1,4,5,2,3,3,3;$ $\quad s_4 : 5,4,5,2,5,1,1,1$

i. Demostreu que algunes d'aquestes seqüències no són gràfiques sense usar l'algorisme de Havel-Hakimi.

ii. Determineu quines d'aquestes seqüències són gràfiques usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

5. (Valoració d'un 20%)

(a) Sigui $G(V, A)$ el graf de la Figura 1.

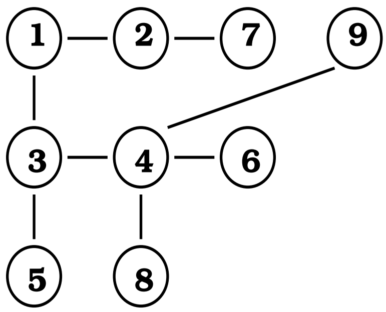

Figura 1: Graf simètric

Aplicant l'algorisme *Breadth First Search (BFS)* (amplada prioritària), retorneu el recorregut que es faria prenent com a vèrtex de partida el vèrtex 3. En cas de poder escollir més d'un vèrtex en el mateix pas de l'algorisme, trieu primer aquell que té el número menor. Mostreu tots els passos de l'algorisme.

(b) Sigui $G(V, A)$ el graf ponderat, on $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i el pes de l'aresta $\{i, j\} \in A$ correspon a l'entrada $w_{i,j}$ de la matriu següent:

$$W = (w_{i,j}) = \begin{pmatrix} & 6 & 12 & 3 & & & \\ 6 & & & 9 & 20 & & \\ 12 & & & 6 & & 15 & \\ 3 & 9 & 6 & & 6 & 24 & 12 \\ & 20 & & 6 & & & 18 \\ & & 15 & 24 & & & 3 \\ & & & 12 & 18 & 3 & \end{pmatrix}$$

Aplicant l'algorisme de Dijkstra, retorneu el camí més curt i la distància entre els vèrtexs 1 i 6. En cas de poder escollir més d'un vèrtex en el mateix pas de l'algorisme, trieu primer aquell que té el número menor. Mostreu tots els passos de l'algorisme.

(c) Sigui d^2 la matriu correspon a l'instant d'execució $k = 2$ de l'algorisme de Floyd aplicat a un graf ponderat d'ordre 4. Calculeu la matriu d^4 corresponent a l'últim pas de l'algorisme.

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) D'una xarxa d'autobusos de línia que uneixen diferents ciutats d'un país, en tenim la següent informació: la distància entre tots els parells de ciutats connectades directament per un autobús de línia, el temps que triga cada autobús per anar del seu origen al seu destí i el preu del bitllet per cada autobús.

Per a cadascún dels problemes següents indica quin graf consideraries (vèrtexs, arestes i pesos) i quin algorisme utilitzaries per resoldre'l:

i. Trobar el trajecte més econòmic entre dues ciutats concretes.

ii. Trobar el trajecte més curt entre tots els parells de ciutats qualssevol.

iii. Comprovar si podem desplaçar-nos entre dues ciutats qualssevol amb els autobusos de la xarxa.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 23/10/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**