Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles , así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un ábol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %=5 %+5 %+5 %+5 %)

   a) Dibujar el árbol correspondiente a la siguiente expresión aritmetíca $\frac{x^2+3y^{2x}}{1-y}$, utilizando la prioridad habitual en los operadores.

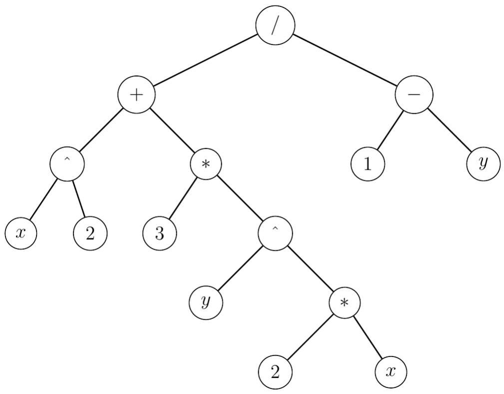
   b) Dar los recorridos en preorden, inorden, y postorden del árbol de la expresión aritmética.

   c) Dar la altura del árbol y indicad si el árbol es equilibrado.

   d) Demuostrar que el árbol anterior es *2-ario*. ¿Es completo?

Solución:

a) Este es el árbol:



b) Preorden: /,+,ˆ ,x,2,*,3,ˆ ,y,*,2,x,-,1,y
Inorden: x,ˆ ,2,+,3,*,y,ˆ ,2,*,x,/,1,-,y
Postorden: x,2,ˆ ,3,y,2,x,*,ˆ ,*,+,1,y,-,/

c) La altura es 5 y el árbol no es equilibrado ya que no cumple que para cada hoja su altura es igual a $h(T)$ o $h(T)-1$.

d) Para demostrar que el árbol es *2-ario* hay que verificar que $0 \leq g^+(v) \leq m$. Claramente cumple la conidición para el árbol de la expresión aritmética. Es completo porque para todo v, $g^+(v) = 2$ o $g^+(v) = 0$.

2. (Valoración de un 20 %) Sea T un árbol de orden 12. Supongamos que T tiene exactamente tres vértices de grado 3 y exactamente un vértice de grado 2. Encontrar la secuencia de grados de T.

Solución: Sea $T = (V, A)$ un árbol de orden $n = 12$. Por el lema de las encajadas, $2A = \sum_{v \in V} g(v)$. En primer lugar, como T es un árbol, $A = V - 1 = 11$. Como $n \geq 2$, hay almenos 2 vértices de grado 1 y por tanto,

$$22 = 2A = \sum_{v \in V} g(v) = 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12},$$

donde $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$son los grados desconocidos de la resta de vértices.

De la igualdad anterior resulta $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 9$. Por la conectividad de T, $x_i \geq 1$, para $i = 7, \ldots, 12$. Por lo tanto x_i tiene que tener grado 1 o bien grado 4, para $i = 7, \cdots, 12$. Como se ha de satisfacer la igualdad anterior, no puede ser 1, por lo tanto, ha de haber como mínimo un vértice de grado 4. Pero solo uno ya que en caso contrario no se cumpliría la igualdad. Por lo tanto la secuencia de grados es $4, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

3. (Valoración de un 20 %)

   a) Después de aplicar el algoritmo de Prim sobre un grafo de 6 vértices, obtenemos la siguiente tabla:

0	1	2	3	4	5
(0,0)	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$
(0,0)*	(3,0)	(6,0)	(5,0)	(5,0)	(4,0)
(0,0)	(3,0)*	(4,1)	(5,0)	(5,0)	(2,1)
(0,0)	(3,0)	(4,1)	(5,0)	(3,5)	(2,1)*
(0,0)	(3,0)	(4,1)	(5,0)	(3,5)*	(2,1)
(0,0)	(3,0)	(4,1)*	(3,2)	(3,5)	(2,1)
(0,0)	(3,0)	(4,1)	(3,2)*	(3,5)	(2,1)

   Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   1) El árbol generador minimal obtenido tiene un peso 15.

2) El árbol generador obtenido contiene 6 aristas.
3) El árbol generador obtenido tiene el mismo peso que el árbol que habríamos obtenido con el peso de Kruskal.

b) El siguiente grafo G corresponde a una red de tranvías que comunica el conjunto de estaciones $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P\}$. La Figura 1 muestra las conexiones así como las correspondientes longitudes en km. de dicha red:

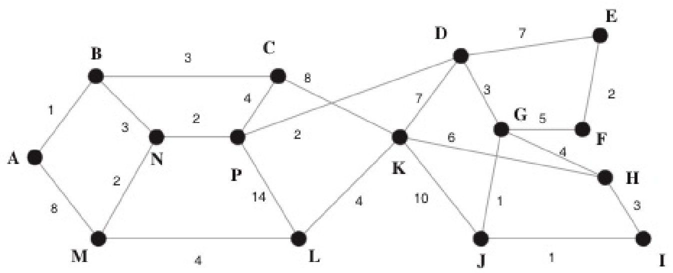


Figura 1: Red de Tranvías

Se quiere renovar una parte de la red utilizando la menor longitud de cable posible de manera que todas las estaciones queden conectadas con nuevos cables. ¿ Qué tramos se tendrán que renovar?

Solución:

a) 1) Cierto. El peso del árbol generador minimal es la suma de los pesos de las aristas que forman el árbol en la última fila de la tabla.
2) Falso. Como el grafo tiene 6 vértices, todos los árboles generadores minimales contienen 5 aristas.
3) Cierto. Aunque el árbol puede ser diferente, el peso ha de ser el mismo.

b) El árbol resultante se encuentra representado en la Figura **??**, que podemos hallar con el algoritmo de Kruskal. Se deberán renovar 36 km de vías.

4. (Valoración de un 20 %=10 %+5 %) Dado el siguiente grafo:

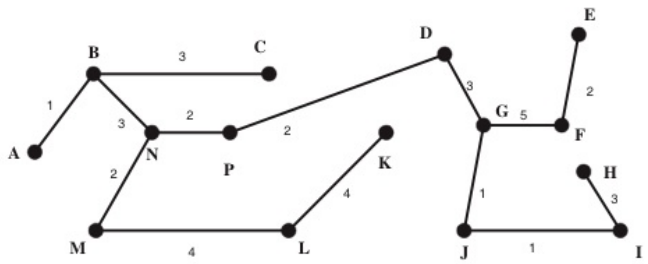


Figura 2: Trazado de red a renovar

	B	C	D	E	F
A	7	15	5	20	8
B		20	10	25	5
C			15	10	20
D				20	6
E					25
F					

Queremos pasar por todos los puntos una sola vez de tal forma que el punto inicial y final sean los mismos.

a) Calcula una cota inferior y una cota superior del recorrido óptimo (aquel que tenga la menor longitud posible).

b) ¿Que complejidad tiene el algoritmo que calcula el recorrido óptimo?

Solución:

a) Podemos utilizar el TSP-aproximado ya que las distáncias verifican la desigualdad triangular. Aplicando el algoritmo Prim desde el vértice A obtenemos las siguientes aristas: AD,DF,FB,AC,CE. El árbol en preorden es $ADFBCE$ y el ciclo sería $ADFBCEA$, con longitud 66. Esta es la cota superior. Una cota inferior sería la mitad 33.

b) El algoritmo que calcula el recorrido óptimo tiene que comprobar todas las combinaciones posibles. Por lo tanto la complejidad sería $O(n!)$.

---

5. (Valoración de un 20 %=5 %+10 %+5 %)

a) De los siguientes grafos justificar cuales son hamiltonianos y/o eulerianos:

1) N_n
2) C_n
3) K_n
4) T_n

b) Dado un grafo de orden 5 y medida 6, demostrar que no puede ser hamiltoniano y euleriano a la vez.

c) Utilizando el algoritmo de Hierholzer hallar un circuito euleriano del siguiente grafo: $G = \{\{1,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,6\},\{4,5\},\{6,5\}\}$

Solución:

a) 1) E_n. No es hamiltoniano y tampoco euleriano. No es posible construir ningún ciclo.

2) C_n. Es hamiltoniano y euleriano. Es conexo y todos los vértices son de grado par. También es hamiltoniano ya que es *2-conexo*.

3) K_n. Es hamiltoniano ya que podemos asegurar que es *2-conexo*. Son eulerianos los K_n cuando n es impar. Si n es impar entonces el grado de todos los vértices es par.

4) T_n. No existe ningún ciclo por lo tanto, no puede ser euleriano y tampoco hamiltoniano.

b) Seguro que un vértice tiene grado impar. Por lo tanto, no podrá ser euleriano.

c) La tabla siguiente muestra la resolución del algoritmo de Hierholzer si empezamos con el vértice 1.

Iteración	v	C'	C
0	1		$\{1\}$
1	1	$\{1,2,3,1\}$	$\{1,2,3,1\}$
2	2	$\{2,4,5,6,2\}$	$\{1,2,4,5,6,2,3,1\}$
3	4	$\{4,6,3,4\}$	$\{1,2,4,6,3,4,5,6,2,3,1\}$

El circuito euleriano sería: $\{1,2,4,6,3,4,5,6,2,3,1\}$.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. Árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC2_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 24/04/2017**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**