

Grafos y complejidad

Joaquim Borges

Robert Clarisó

Ramon Masià

Jaume Pujol

Josep Rifà

Joan Vancells

Mercè Villanueva

PID_00215266

Material docente de la UOC

**Joaquim Borges Ayats**

Licenciado en Informática (1988) y doctor Ingeniero en Informática (1998) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1988. Desde el año 2000 es catedrático de escuela universitaria del Área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Es especialista en teoría de la información, teoría de la codificación, teoría de grafos y combinatoria.

**Robert Clarisó Viladrosa**

Ingeniero informático (2000) y doctor en Lenguajes y Sistemas Informáticos (2005) por la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor de los Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación de la Universitat Oberta de Catalunya desde el 2005. Es especialista en métodos formales, teoría de autómatas y compiladores.

**Ramon Masià Forns**

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1990) y en Filología Clásica (1997) por la Universidad de Barcelona. Profesor de los Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación de la Universitat Oberta de Catalunya. Ha compaginado su actividad docente y de innovación con la investigación sobre la historia de las matemáticas griegas. Actualmente, está preparando la edición de la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* para la serie Filosofía griega y latina de la colección Bernat Metge de la Fundació Bernat Metge.

**Jaume Pujol Capdevila**

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1978) y en Informática (1989) y doctor en Informática (1995) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1988. Desde 1997 es catedrático de escuela universitaria del Área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Es especialista en teoría de la información, teoría de la codificación, comprensión y clasificación de la información y teoría de grafos.

**Josep Rifà Coma**

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1973) por la Universidad de Barcelona y doctor en Informática (1987) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1987. Desde 1992 es catedrático de universidad del Área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Es especialista en teoría de la información, teoría de la codificación y criptografía. Actualmente, es director del Departamento de Ingeniería de la Información y de las Comunicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona.

**Joan Vancells Flotats**

Licenciado en Informática (1987) por la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor de la Universidad de Vic desde 1989. Es especialista en programación y teoría de autómatas y lenguajes formales. Autor del libro *Programació: Introducció a l'algorísmica* (Editorial EUMO, 1992).

**Mercè Villanueva Gay**

Licenciada en Ciencias Matemáticas (1994) y doctora en Informática (2001) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesora de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1994. Desde el año 2002 es titular de universidad del Área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Es especialista en combinatoria, álgebra, teoría de la codificación y teoría de grafos.

Segunda edición: septiembre 2014

© Joaquim Borges, Robert Clarisó, Ramon Masià, Jaume Pujol, Josep Rifà, Joan Vancells, Mercè Villanueva

Todos los derechos reservados

© de esta edición, FUOC, 2014

Avda. Tibidabo, 39 - 43, 08035 Barcelona

Diseño: Manel Andreu

Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Depósito legal: B-14.720-2014



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis un uso comercial y no hagáis una obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

Introducción

En esta asignatura, nos introduciremos en el campo de la matemática discreta. Esta disciplina abarca una serie de temas que tienen en común el hecho de no utilizar el concepto matemático de “continuo” en sus proposiciones, en sus argumentos y, sobre todo, en sus aplicaciones. Sin detallar todos estos temas, los más destacables por su utilización en la ingeniería informática son los siguientes: combinatoria, teoría de conjuntos, lógica, teoría de grupos, teoría de autómatas, aritmética modular, álgebras de Boole, funciones de conmutación, funciones generadoras, relaciones de recurrencia, teoría de grafos, redes, optimización, complejidad computacional, estructuras de datos, análisis de algoritmos, teoría de cuerpos finitos, teoría de la codificación, teoría de diseños, criptografía, geometría computacional, etc.

La mayoría de los temas enumerados son importantes en la formación de un ingeniero o ingeniera en Informática y, así, encontraremos asignaturas del currículum que los cubren. Principalmente, sirven para fomentar muchos de los procesos directamente implicados en la ingeniería informática, tanto de software como de hardware. En esta asignatura nos centraremos en los conceptos relativos a la teoría de grafos y la complejidad computacional. Hemos intentado enfocar los conceptos que os presentamos desde el punto de vista de sus aplicaciones en el campo de la ingeniería informática y, de hecho, no es casual esta interrelación, puesto que el origen y el desarrollo de la matemática discreta han ido siempre de la mano de la evolución de la informática.

Como se puede observar en la tabla de contenidos, la asignatura tiene siete módulos. El primero trata de algunos conceptos previos sobre funciones y complejidad computacional. Los cuatro siguientes constituyen una introducción a la teoría de grafos. Los dos últimos se centran en la complejidad computacional y, más concretamente, en los problemas intratables.

Cada módulo está estructurado de manera parecida:

- Exposición de los conceptos tratados con ejemplos que los ilustran.
- Propuesta de ejercicios y su correspondiente solucionario.

- Ejercicios finales de autoevaluación del módulo.
- Solucionario de los ejercicios de autoevaluación.

Hemos procurado que todos los módulos sean autocontenidos, de forma que puedan ser estudiados de manera independiente. Cuando ha sido necesario, se han incluido las referencias bibliográficas al final del módulo, además de las referencias generales de la asignatura que se pueden encontrar al final de esta introducción.

Objetivos

Globalmente, los objetivos básicos que se pretenden alcanzar son los siguientes:

1. Entender el concepto de función y saber distinguir los tres tipos de funciones: inyectivas, exhaustivas y biyectivas.
2. Reconocer los conjuntos finitos, infinitos y numerables y saber contar el número de funciones entre dos conjuntos finitos.
3. Entender el concepto de algoritmo para resolver un problema y saber calcular su complejidad.
4. Entender el concepto de grafo y ser capaz de modelar ciertas situaciones a partir de los grafos.
5. Identificar los grafos más habituales y describir sus características fundamentales.
6. Saber aplicar los algoritmos de exploración de un grafo.
7. Entender la noción de conectividad de un grafo y aplicarla correctamente.
8. Saber calcular las distancias mínimas entre los nodos de un grafo con la ayuda de los algoritmos adecuados.
9. Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
10. Saber aplicar los algoritmos de determinación de un árbol generador minimal.
11. Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
12. Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.
13. Entender los conceptos de tratabilidad e intratabilidad.
14. Conocer las diferentes clases de complejidad y saber clasificar los problemas en cada una de ellas.

- 15.** Entender el concepto de reducción entre problemas y saber demostrar cuando un problema es NP-completo.
- 16.** Reconocer problemas intratables que aparecen de forma habitual en informática y en ingeniería.
- 17.** Entender y saber aplicar las técnicas básicas de reducción polinómica de los problemas NP-completos.

Contenidos

Módulo didáctico 1

Conceptos previos: funciones y algoritmos

1. Funciones
2. Algoritmos

Módulo didáctico 2

Fundamentos de grafos

1. Caracterización de un grafo
2. Estructura y manipulación de grafos

Módulo didáctico 3

Recorridos y conectividad

1. Recorridos
2. Algoritmos de exploración de grafos
3. Conectividad
4. Distancias en un grafo

Módulo didáctico 4

Árboles

1. Conceptos básicos
2. Árboles generadores
3. Árboles con raíz

Módulo didáctico 5

Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos

1. Grafos eulerianos
2. Grafos hamiltonianos

Módulo didáctico 6

Complejidad computacional

1. Concepto de problema
2. Medidas de complejidad
3. Reducciones y completitud

Módulo didáctico 7

Problemas intratables

- 1.** Problemas intratables sobre grafos
- 2.** Otros problemas intratables

Bibliografía

Balakrishnan, V. K. (1991). *Introductory Discrete mathematics*. Nova Jersey: Prentice-Hall Int. Ed.

Biggs, N. L. (1994). *Matemática Discreta*. Barcelona: Ediciones Vicens Vives.

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C. (2001). *Introduction to Algorithms*. Cambridge: MIT Press.

Garcia, C. (2002). *Matemática Discreta*. Materiales Didácticos 66. Palma de Mallorca: UIB.

Garey, M. R.; Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman and Company.

Grimaldi, R. P. (1989). *Matemáticas discreta y combinatoria*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Masià, R.; Pujol, J.; Rifà, J.; Villanueva, M. (2007). *Matemática Discreta*. Barcelona: Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya.

Papadimitriou, C.H. (1994). *Computational Complexity*. Reading (Massachussets): Addison-Wesley.

Skiena, S.S. (1998). *The Algorithm Design Manual*. Berlin: Springer-Verlag.

