Solució PAC 1

2017-2018 Semestre 1

05.557 Àlgebra

11.506 Matemàtiques I

1. (4 punts) Esbrineu, per inducció, si per a tot nombre natural $n \geq 1$ es compleix que $n^2 - 3n - 1 < 0$

Solució:

És fàcil provar que aquesta desigualtat és certa per a n=1: $1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -3 < 0$

Suposem certa la hipòtesi per a *n*, és a dir, suposem cert que $n^2 - 3n - 1 < 0$ i provem si la hipòtesi és certa per a n+1, és a dir, volem veure si $(n+1)^2 - 3(n+1) - 1 < 0$

Calculant obtenim:

$$(n+1)^2 - 3(n+1) - 1 = (n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 - 1 = (n^2 - 3n - 1) + (2n + 1 - 3) =$$

$$= (n^2 - 3n - 1) + (2n - 2)$$

Per hipòtesi d'inducció, $(n^2 - 3n - 1)$ és negatiu, però $(2n - 2)$ només ho és quan n<1.

A més a més, fixem-nos que:

$$(n^2 - 3n - 1) + (2n - 2) < 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 3 < 0 \Leftrightarrow n^2 - n < 3 \Leftrightarrow n \cdot (n-1) < 3 \Leftrightarrow n = 3,2,1$$

Així, podem concloure que $n^2 - 3n - 1 < 0 \Leftrightarrow n = 3,2,1$, per tant no es compleix per a tot nombre natural n. Per tant la propietat NO és certa per a tot nombre natural.

De fet, si provem per a n=4 veiem que la propietat ja no es compleix perquè:

$$4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3 > 0$$

2. Responeu als següents apartats:

a. (2 punts) Expresseu en forma binòmica el següent nombre complex: $\dfrac{5i^9(2-3i)}{2-i}$.

b. (2 punts) Calculeu totes les arrels de l'equació: $x^3+64=0$. Proporcioneu les solucions en forma polar i binòmica.

Solució:

a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica a l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària:

$$\frac{5i^9(2-3i)}{2-i}=\frac{5i(2-3i)}{2-i}=\frac{5i(2-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i(4+2i-6i+3)}{4+1}=\frac{5i(7-4i)}{5}=i(7-4i)=$$

$$=7i-4i^2=4+7i$$

Per tant, la resposta és: $\boxed{\dfrac{5i^9(2-3i)}{2-i}=4+7i}$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès.

De fet el que se'ns demana són les arrels terceres de -64.

Per determinar les arrels terceres de -64 determinem primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m=\sqrt{(-64)^2+0^2}=64$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-64}+180^\circ=arctg0+180^\circ=180^\circ$$

(Observem que, al ser la part real negativa i la part imaginària nul·la cal sumar la quantitat de 180º).

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val 0 en 0º i en 180º. Com l'afix del punt buscat és (-64,0) l'angle està entre el segon i tercer quadrant, és a dir, en 180 º.

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el número -64 al pla complex. Aquest número està associat al punt

(-64,0), per tant, és un nombre que es troba entre el segon i el tercer quadrant.

Tenim, per tant, que $x=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{64_{180^\circ}}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$$x=\left(\sqrt[3]{64}\right)_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}}=4_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}}$$ per a k=0, 1,2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=4$

Els arguments de les arrels són $\beta_k=\dfrac{180^\circ+360^\circ k}{3}$ per a k=0, 1,2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=60^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=60^\circ+120^\circ=180^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=60^\circ+240^\circ=300^\circ$

Per tant, les tres arrels de l'equació, en forma polar, són:

$$\boxed{\begin{matrix}4_{60^\circ}\\4_{180^\circ}\\4_{300^\circ}\end{matrix}}$$

Seguint les instruccions de l'apartat 3.4.2 de la pàgina 33, passem els nombres a forma binòmica:

$$\boxed{4_{60^\circ}=4\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=4\cdot(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i)=2+2\sqrt{3}i}$$

$$\boxed{4_{120^\circ}=4\cdot(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=4\cdot(-1+i\cdot 0)=-4}$$

$$\boxed{4_{300^\circ}=4\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=4\cdot(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=2-2\sqrt{3}i}$$

I les solucions, en forma binòmica, són:

$\boxed{-4}$

$\boxed{2+2\sqrt{3}i}$

$\boxed{2-2\sqrt{3}i}$