Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **1**

Data de proposta: 09/03/2012 **Data d´entrega:** ≤ 19/03/2012

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF.
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´haurà d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*). **Per utilitzar la i=$\sqrt{-1}$, dels nombres complexos, amb la Wiris haureu d´utilitzar la icona que apareix a l´eina "Símbols" (no la "i" del teclat de l´ordinador).**
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 24.00h. del dia 19/03/2012**

Valoració:

- **Els exercicis d´aquesta PAC tenen el mateix valor.**

SOLUCIÓ

NOTA: Observa que després de cada enunciat tens una pauta per escriure el resultat i el desenvolupament de cada problema (l´espai destinat a això pots fer-lo tan gran com necessitis).

1. Per a tot nombre natural n, demostra per inducció que $7^n - 3^n$ és un nombre múltiple de 4.

Explicació de la solució:

i. Cal veure que la propietat és certa per a n = 1, és a dir que 7 – 3 és múltiple de 4, la qual cosa és certa ja que 7 – 3 = 4.

ii. Cal veure que si la propietat és certa per a un natural n, llavors també ho és per a n + 1.

Efectivament: Hem de veure que: $7^n - 3^n$ múltiple de 4 implica que $7^{n+1} - 3^{n+1}$ és múltiple de 4

Tenim $7^{n+1} - 3^{n+1} = 7\cdot7^n - 3\cdot3^n = (4 + 3)\cdot7^n - 3\cdot3^n = 4\cdot7^n + 3\cdot7^n - 3\cdot3^n = 4\cdot7^n + 3\cdot(7^n - 3^n)$. Ara, com que $7^n - 3^n$ és, per hipòtesi d´inducció, múltiple de 4 i $4\cdot7^n$ és evidentment múltiple de 4 per ser el producte de 4, tenim que la suma de dos múltiples de 4 és un altre múltiple de 4 i la implicació que acabem de formular és certa, i per tant hem acabat la demostració.

2. Simplifica, i proporciona el resultat en forma binòmica (de la forma: a+bi), la següent operació complexa:

$$z = \frac{(2+4\cdot i)\cdot(3-4\cdot i)\cdot(3+5\cdot i)}{(5-3\cdot i)(-2+i)}$$

Solució:

$$\boxed{\mathbf{z=6\text{-}8i}}$$

Explicació:

Calculem tant el numerador com el denominador, multiplicant-lo en forma binòmica.

$$N = (2+4i)\cdot(3-4i)\cdot(3+5i) = (6-8i+12i-16i^2)\cdot(3+5i) =$$
$$= (6+4i+16)\cdot(3+5i) = (22+4i)\cdot(3+5i) = 66+110i+12i+20i^2 =$$
$$= 66+122i-20 = 46+122i$$

$$D = (5-3i)\cdot(-2+i) = -10+5i+6i-3i^2 = -10+11i+3 = -7+11i$$

Fem la divisió dels complexos obtinguts, on recordem que haurem de multiplicar numerador i denominador pel complex conjugat del denominador:

$$z=\frac{N}{D}=\frac{46+122i}{-7+11i}=\frac{(46+122i)}{(-7+11i)}\cdot\frac{(-7-11i)}{(-7-11i)}=\frac{-322-506i-854i-1342i^2}{49+77i-77i-121i^2}=\frac{-322-1360i+1342}{49+121}=$$

$$=\frac{1020-1360i}{170}=\frac{1020}{170}-\frac{1360}{170}i=6-8i$$

<u>Comprovació amb Wiris:</u>

$$\frac{(2+4\cdot i)\cdot(3-4\cdot i)\cdot(3+5\cdot i)}{(5-3\cdot i)\cdot(-2+i)} \rightarrow 6-8\cdot i$$

3. Determina en forma binòmica i polar (angles en graus) les arrels solució de l´arrel complexa següent:

$$z=\sqrt[4]{8\cdot\sqrt{2}+8\cdot\sqrt{2}\cdot i}$$

<u>NOTA: Recordeu que la calculadora Wiris utilitza, per defecte, radians (i no graus) per realitzar els càlculs.</u>

<u>Solució:</u>

En forma polar:
$z_1 = 2_{11º15´}$
$z_2 = 2_{101º15´}$
$z_3 = 2_{191º15´}$
$z_4 = 2_{281º15}$

En forma binòmica:
z_1 = 2· [cos(11º15´) + i · sin(11º15´)] = 1,9615 + 0,3901·i
z_2 = 2· [cos(101º15´) + i · sin(101º15´)] = -0,3901 + 1,91615·i
z_3 = 2· [cos(191º15´) + i · sin(191º15´)] = -1,9615 - 0,3901·i
z_1 = 2· [cos(281º15´) + i · sin(281º15´)] = 0,3901 – 1,9615·i

Explicació:

a) Calcularem en primer lloc el mòdul i l´argument del complex del radicand, $z_0 = \sqrt[4]{8\cdot\sqrt{2} + 8\cdot\sqrt{2}\cdot i}$

$$r = \sqrt[4]{(8\cdot\sqrt{2})^2 + (8\cdot\sqrt{2})^2} = \sqrt{64\cdot 2 + 64\cdot 2} = \sqrt{256} = 16$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8\cdot\sqrt{2}}{8\cdot\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = 45^{\circ}$$

Expressat en forma polar, aquest serà: $z_0 = 16_{45^{\circ}}$

b) Determinem ara les quatre arrels d´aquest complex:

$$z = \sqrt[4]{16_{45^{\circ}}} = \sqrt[4]{16}_{\frac{45^{\circ}+360^{\circ}\cdot k}{4}} \qquad k=0,1,2,3$$

Donant valors enters a la k ens apareixeran totes les arrels quartes:

$z_1 = 2_{11^{\circ}15'}$
$z_2 = 2_{101^{\circ}15'}$
$z_3 = 2_{191^{\circ}15'}$
$z_4 = 2_{281^{\circ}15'}$

Per passar aquests nombres en forma polar a forma binòmica, hem de fer:

$z_1 = 2\cdot [\cos(11^{\circ}15') + i \cdot \sin(11^{\circ}15')] = 1{,}9615 + 0{,}3901\cdot i$
$z_2 = 2\cdot [\cos(101^{\circ}15') + i \cdot \sin(101^{\circ}15')] = -0{,}3901 + 1{,}91615\cdot i$
$z_3 = 2\cdot [\cos(191^{\circ}15') + i \cdot \sin(191^{\circ}15')] = -1{,}9615 - 0{,}3901\cdot i$
$z_1 = 2\cdot [\cos(281^{\circ}15') + i \cdot \sin(281^{\circ}15')] = 0{,}3901 - 1{,}9615\cdot i$

Comprovació amb Wiris:

polar$(\sqrt[4]{8\cdot\sqrt{2}+8\cdot\sqrt{2}\cdot i}) \rightarrow \{2.,0.19635\}$

polar$(2.,0.19635) \rightarrow 1.9616+0.39018\cdot i$

polar$(2.,0.5625\cdot\pi) \rightarrow -0.39018+1.9616\cdot i$

polar$(2.,1.0625\cdot\pi) \rightarrow -1.9616-0.39018\cdot i$

polar$(2.,1.5625\cdot\pi) \rightarrow 0.39018-1.9616\cdot i$