Universitat Oberta de Catalunya - 2016-17 Otoño

Resolución PEC2

Problema 1 (2 puntos): Sea E=<(1,-3,4), (1,-2,5), (0,1,*a*), (2,*b*,6)> $a, b \in R$ un subespacio vectorial de R^3 y sea v=(3, -5, 16) un vector de R^3.

a) Calculad *a* y *b* para que la dimensión de E sea 2.

b) Encontrad una base de E en el caso anterior.

c) ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base anterior.

Solución:

a) Queremos imponer que $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & b \\ 4 & 5 & a & 6 \end{pmatrix} = 2$. Pero observamos que (1,-3,4) y (1,-2,5) son linealmente independientes ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto generan un subespacio de dimensión 2.

Así pues, solo necesitamos imponer (orlando el determinante anterior) que:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ que nos da la ecuación *a*-1=0 que implica *a*=1.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & b \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ que nos da la ecuación –*b*-8=0 que implica *b*=-8.

Tenemos pues que la dimensión de E es 2 cuando *a*=1 y *b*=-8.

b) Tenemos que la dimensión de E es 2 y hemos visto que (1,-3,4) y (1,-2,5) son dos vectores de E linealmente independientes. Así pues, tenemos que {(1,-3,4), (1,-2,5)} es una base de E.

c) Planteamos el sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}$ Que tiene solución x=-1, y=4. Por tanto v pertenece a E y sus coordenadas en la base anterior son (-1,4).

Nota: en caso de haber obtenido un sistema incompatible, significaría que el vector no pertenece al subespacio vectorial.

Problema 2 (2 puntos): Sea E={(x, y, z, t) | x+y+z+t=0, x=t} un subespacio vectorial de dimensión 2 en R^4 y sea el vector v=(3, 0, -6, 3).

a) Comprobad que A={(-1, 1, 1, -1), (0, 1, -1, 0)} es una base de E. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Encontrad otra base de E que contenga el vector v, y calculad la matriz de cambio de base de la base que habéis encontrado a la base A.

Solución:

a) Como sabemos que la dimensión del subespacio vectorial es 2, para comprobar que A es una base de E es suficiente con ver que los vectores de A son de E y que son linealmente independientes.

Los vectores serán de E si verifican las ecuaciones que determinan los elementos de E, Así:

Vector (-1, 1, 1, -1): -1+1+1-1=0; -1=-1; y por tanto (-1, 1, 1, -1) es de E.

Vector (0, 1, -1, 0): 1-1=0; 0=0; y por tanto (0, 1, -1, 0) es de E.

Para ver que son linealmente independientes, comprobamos que la matriz formada por estos dos vectores es de rango 2 [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.5, pág 31]:

$rang\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que podemos encontrar un menor 2x2 con determinante distinto de cero ($\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ por ejemplo). De esta forma ya tenemos que A es una base de E.

Para ver si v pertenece a E y en tal caso calcular sus coordenadas en la base A solo necesitamos imponer que v sea combinación lineal de los vectores de la base y luego resolver el sistema [Ver apuntes módulo 2, apartado 2.4, pág 15]:

$$(3, 0, -6, 3) = a\cdot(-1, 1, 1, -1) + b\cdot(0, 1, -1, 0)$$

y podemos comprobar que este sistema tiene una única solución con a=-3 y b=3. Por tanto, las coordenadas de v en la base A son (-3,3).

b) Para encontrar otra base de E que contenga el vector v, como sabemos que E tiene dimensión 2, solo necesitamos encontrar otro vector de E que sea linealmente independiente de v. Podemos seleccionar, por ejemplo, el segundo de la base A:

$$rang\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues ya tenemos que B={(3,0,-6,3), (0,1,-1,0)} es una base de E que contiene el vector v.

Para encontrar la matriz de cambio de base de B a A, debemos expresar los vectores de B en función de los de A [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.7, pág 36]. Pero esto ya lo hemos hecho: en el primer apartado del problema hemos calculado las coordenadas en A del primer vector de B: (-3,3) y, respecto al segundo vector, éste es directamente el segundo de A. Así pues, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos): Sean los siguientes conjuntos de vectores de R^3:

A={(0,2,-1), (-3,-5,1), (2,0,1)}
B={(1,3,-1), (2,2,0)}
C={(1,3,-1), (0,1,0)}

a) Calculad la dimensión del espacio vectorial que generen A, B y C y una base de cada uno de ellos.
b) Demostrad que A y B generan el mismo subespacio vectorial de R^3.
c) Demostrad que C no genera el mismo subespacio vectorial que el generado por B.

Solución:

a) Para encontrar las dimensiones calculamos el rango de los vectores con los cuales está definido cada uno de ellos.

$rang\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero podemos encontrar un menor 2x2 con determinante distinto de cero $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues, el espacio generado por A tiene dimensión 2 y una base sería la compuesta por los dos vectores que contienen este menor:

{(0,2,-1), (-3,-5,1)}.

$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que podemos encontrar un menor 2x2 con determinante distinto de cero $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Así el espacio generado por B tiene dimensión 2 y una base es {(1,3,-1), (2,2,0)}.

$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que podemos encontrar un menor 2x2 con determinante distinto de cero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así el espacio generado por C tiene dimensión 2 y una base es {(1,3,-1), (0,1,0)}.

b) Como sabemos que los dos espacios vectoriales generador por A y B tienen la misma dimensión, para ver que son el mismo podemos ver que uno está dentro del otro. Y es suficiente verlo para los vectores de la base. Veamos si podemos expresar los vectores de la base del espacio generado por A como combinación lineal de los vectores de la base del generado por B:

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Que tiene solución x=1, y=-1/2. Por tanto (0,2,-1) pertenece al espacio generado por B.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Que tiene solución x=-1, y=-1. Por tanto (-3,-5,1) pertenece al espacio generado por B.

Así pues, A y B generan el mismo espacio vectorial.

c) Procedemos análogamente al apartado anterior y vemos si los vectores de la base del espacio generado por C se pueden expresar como combinación lineal de los de la base del generado por B.

(1,3,-1) pertenece al espacio generado por B ya que es también elemento de la base de éste.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ No tiene solución. Por tanto (0,1,0) no pertenece al espacio generado por B.

Así pues C y B no generan el mismo espacio vectorial.