SOLUCIÓ EXAMEN 23/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els càlculs següents:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i}$

b) Calculeu les arrels cinquenes del nombre complex següent: $z = 16\sqrt{3} - 16i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem l'expressió, recordant que $i^2 = -1$:

$$\frac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i} = \frac{(2-i)\cdot(1-4i+4i^2)}{2+i} = \frac{(2-i)\cdot(1-4i-4)}{2+i} = \frac{(2-i)\cdot(-3-4i)}{2+i} =$$

$$= \frac{(-6-8i+3i+4i^2)}{2+i} = \frac{(-6-8i+3i-4)}{2+i} = \frac{-10-5i}{2+i} = \frac{(-5)\cdot(2+i)}{(2+i)} = -5$$

b) Escrivim el nombre complex z en forma polar:

$$m = \sqrt{\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \left(-16\right)^2} = \sqrt{768+256} = \sqrt{1024} = 32$$

$$\alpha = arctg\frac{-16}{16\sqrt{3}} = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^o$$

Tenim, per tant, que $z = 16\sqrt{3} - 16i = 32_{30^o}$

Com que ens demanen les arrels quintes hem de fer l'arrel:

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32_{30}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{30+360k}{5}}$ per k=0, 1, 2, 3, 4

El mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[5]{32} = 2$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{30+360k}{5}$ per k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, llavors $\beta_0 = 6^o$
- Si k=1, llavors $\beta_1 = 6^o + 72^o = 78^o$
- Si k=2, llavors $\beta_2 = 6^o + 144^o = 150^o$

- Si k=3, llavors $\beta_3 = 6^{o} + 216^{o} = 222^{o}$
- Si k=4, llavors $\beta_3 = 6^{o} + 288^{o} = 294^{o}$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del nombre complex $z = 16\sqrt{3} - 16i$ són:

$$2_{6^{o}}, 2_{78^{o}}, 2_{150}, 2_{222^{o}}, 2_{294^{o}}$$

Exercici 2:

Sigui E el subespai vectorial de R^6 generat pel conjunt de vectors següent:

E={(*b*-*ab*, 0, 0, 0, 0, 0), (2*b*, 1-*a*, 0, 0, 0, 0), (3*b*, 3, 1-*a*, 0, 0, 0), (4*b*, 4, 4, 1-*a*, 0, 0), (5*b*, 5, 5, 5, 1-*a*, 0), (6*b*, 6, 6, 6, 6, 1-*a*)}, $a, b \in R$. Sigui *v*=(1,1,1,1,1,0)

a) Calcula la dimensió d'E en funció d'*a* i *b*.

b) Per al cas *a*=1 i *b*=1, troba una base de l'espai vectorial. Pertany *v* a E en aquest cas? En cas afirmatiu troba les seves coordenades en la base anterior.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Calculem el determinant 6x6:

$$\begin{vmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot (1-a)^6$$

Així doncs si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió d'E és 6.

Si *b*=0, llavors calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$ per a la qual cosa calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^5$$

Així doncs si b=0 i $a \neq 1$ llavors el rang d'E és 5.

Si b=0 i a=1 tenim

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$ ja que podem trobar el menor 4x4 amb determinant diferent de zero: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$

Per tant la dimensió d'E és 4

Ara queda el cas a=1 i $b \neq 0$. Volem calcular el rang:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$ ja que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero: $$\begin{vmatrix} 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 720b \neq 0$$

Així resumint tenim:

Si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió d'E és 6.

Si b=0 i $a \neq 1$ o bé a=1 i $b \neq 0$ llavors la dimensió d'E és 5.

Si b=0 i a=1 llavors la dimensió d'E és 4.

b) En el cas a=1 i b=1 sabem per l'apartat anterior que la dimensió d'E és 5.

Tenim que E està definit pels vectors:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Llavors els vectors {(2,0,0,0,0,0), (3,3,0,0,0,0), (4,4,4,0,0,0), (5,5,5,5,0,0), (6,6,6,6,6,0)} són linealment independents perquè contenen el menor anterior i són base d'E quan a=1 i b=1

Mirem si v pertany a E en aquest cas plantejant el sistema amb la base trobada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+5t+6k=1 \\ 3y+4z+5t+6k=1 \\ 4z+5t+6k=1 \\ 5t+6k=1 \\ 6k=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Que té solució x=0, y=0 , z=0, t=0, k=1/6.

Per tant v pertany a E i les seves coordenades en la base anterior són (0,0,0,0,1/6).

Exercici 3:

a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre *a:*

$$\begin{cases} x-2y+z=a^2 \\ (2-a)x+(2a-4)y+(4-2a)z=5 \\ (a+1)x-(a+1)y+(a+1)z=a+1 \end{cases}$$

b) Resoleu el sistema per a $a=0$, en cas que tingui solució.

<u>Resolució:</u>

a) Es tracta d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites. Per discutir-lo utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Calcularem primer els valors de *a* que fan que *M* tingui rang màxim (és a dir, rang(*M*)=3). Per aquests valors el sistema serà compatible determinat.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a \\ a+1 & -a-1 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad MA=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a^2 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a & 5 \\ a+1 & -a-1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = -(a+1)(2-a) = 0$ si $a = -1$ o $a = 2$.

La matriu M té rang 3 per a tots els valors de a, llevat de per a $a = -1, 2$. Així per $a \neq -1, 2$ tenim $rang(M) = rang(MA) = 3$ i el sistema serà **COMPATIBLE DETERMINAT.**

Per a $a = -1$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ i } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així el sistema és **COMPATIBLE INDETERMINAT AMB 1 GRAU DE LLIBERTAT.**

Per a $a = 2$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \text{ i } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Així el sistema és **INCOMPATIBLE.**

Resumint:

- Per a $a \neq -1, 2$ el sistema és **COMPATIBLE DETERMINAT.**
- Per a $a = -1$ el sistema és **COMPATIBLE INDETERMINAT AMB 1 GRAU DE LLIBERTAT.**
- Per a $a = 2$ el sistema és **INCOMPATIBLE.**

b) Per a $a = 0$, fem la reducció de Gauss de la matriu ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substituïm la 2fila per 2fila -2*(1fila) i la 3fila per 3fila-(1fila) i obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercanviem la 2fila i la 3fila i tenim la reducció de Gauss de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Així la solució del sistema és

$$z = \frac{5}{2}$$
$$y = 1$$
$$x = -z + 2y = -\frac{5}{2} + 2 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Exercici 4:
Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, x + y + z)$$.

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) En el cas en que f diagonalitza, trobeu una base formada per vector propis.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El polinomi característic de f és:

$$q(t) = (2-t)(3-t)(1-t)$$

Els valors propis de f són, per tant, el 2,el 3 i l'1, tots amb multiplicitat algebraica 1.

c) Tenim que el polinomi característic descomposa en factors lineals.
Com que la multiplicitat algebraica és 1, automàticament, la multiplicitat geomètrica també és 1. Per tant, el polinomi característic descomposa en factors lineals i les multiplicitats algebraiques i geomètriques de cada valor propi coincideixen. D'aquí es dedueix que f diagonalitza.

d) Per trobar els vectors propi de f de valors propis 2, 3 i 1cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-2I)X=0 i (A-3I)X=0 i (A-I)X=0 .
O sigui:

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespai de solucions del primer sistema és: < (1,0,1)>.

El subespai de solucions del segon sistema és: <(0,2,1)>.

El subespai de solucions del tercer sistema és: <(0,0,1)>.

Per tant, una base formada per vector propis de f és :

<(1,0,1), (0,2,1),(0,0,1)>