Solució PAC3

2017-2018 Semestre 1

05.557 Àlgebra

11.506 Matemàtiques I

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

EIMT.UOC.EDU

Problema 1 (3 punts):
Considereu les rectes següents de R^2:

$$r: x+2y=5$$
$$s: 2x+3y=7$$
$$r': ax-y=-1$$
$$s': x+y=-a$$

On $a \in R$.

Discutint i resolent els corresponents sistemes d'equacions lineals, estudieu la posició relativa de les rectes:

a) *r* i *s.*

b) *r'* i *s'.*

c) *r* , *s* ,*r'* i *s'.*

Utilitzeu la wiris per representar les rectes en el cas en que es creuin en un sol punt.

Resolució:

a) La matriu del sistema per les rectes r i s és:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2$ i és el rang màxim, per tant tindrem que

$rangA = rangMA = 2$ i per tant SCD , les dues rectes es tallen en un punt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema resultant:
y=3
x= 5-2·3=-1

Les rectes en tallen en el punt (-1,3)

b) La matriu del sistema per les rectes r' i s' és:

$$MA = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$ Hem d'estudiar dos cassos:

- $a \neq -1 \Rightarrow rangA = 2 = rangMA \Rightarrow SCD$ Les dos rectes es tallen en un punt. Busquem ara aquest punt pel mètode de Cramer (apartat 7, pàgina 23, del mòdul 3 " Sistemes d'Equacions Lineals"):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{-1-a}{a+1} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{-a^2+1}{a+1} = \frac{-(a^2-1)}{a+1} = \frac{-(a-1)(a+1)}{a+1} = 1-a$$

Les rectes en tallen en el punt (-1, $1-a$)

- $a = -1 \Rightarrow rangA = 1 = rangMA \Rightarrow SCI$ amb 1 grau de llibertat.

Les rectes són coincidents: r' = s'

c) La matriu del sistema per les rectes r, s, r' i s' és:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5+a \\ 0 & 1 & 7+2a \\ a-1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

1era fila – 4rta fila
2na fila – 2(4rta fila)
3era fila- 4rta fila
Calculem primer el determinant de les 3 primeres files:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5+a \\ 0 & 1 & 7+2a \\ a-1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = a-1(7+2a-5-a) = (a-1)(2+a) = 0 \Leftrightarrow a=1; a=-2$$

Si $a=1$ tenim una fila de zeros $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5+1 \\ 0 & 1 & 7+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i el determinant d'aquesta matriu és diferent de 0.

Estudiem el següent determinant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5+a \\ 0 & 1 & 7+2a \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 7+2a-(5+a)=2+a$

Així doncs si $a=-2 \Rightarrow rangA = 2 = rangMA \Rightarrow SCD$

Les quatre rectes es tallen en un punt, (-1,3) (El punt l'hem trobat en el primer apartat)

Utilitzem ara la Wiris per representar les rectes en aquest últim cas

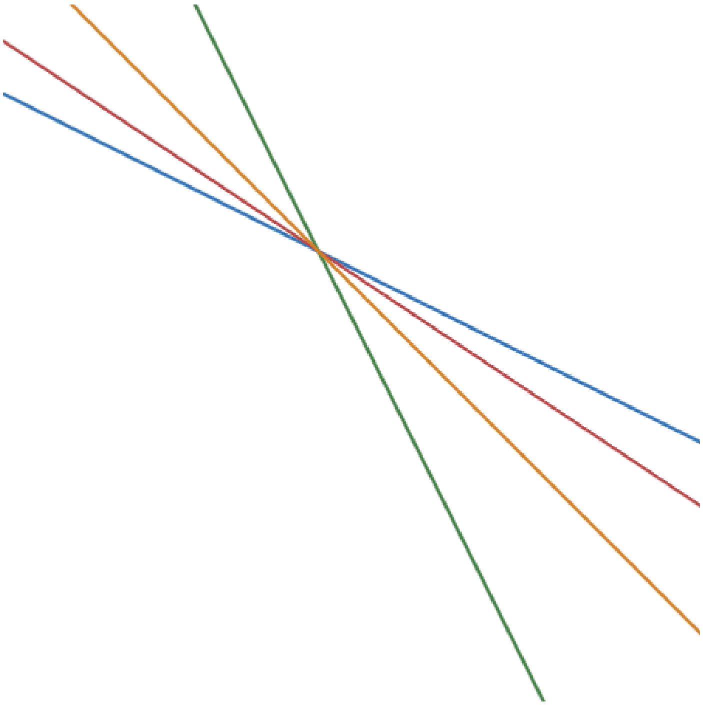
Calc sense títol RAD.

$x+2y=5$ Dibuixa: tauler1

$2x+3y=7$ Dibuixa: tauler1

$-2x-y=-1$ Dibuixa: tauler1

$x+y=2$ Dibuixa: tauler1



Problema 2 (3punts)
Considereu el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x-4y+z=0 \\ ax+5y=b \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors dels paràmetres $a, b \in R$
b) Utilitzeu el mètode de Cramer per resoldre el sistema en el cas en què tingui solució única.
c) Per al cas *a* = -1 i *b* = 6, utilitzeu el mètode de Gauss i resoleu, si és possible, el sistema.

Resolució:

a) Per discutir el sistema utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Que podeu trobar a l'apartat 4, pàgina 13, del mòdul 3 " Sistemes d'Equacions Lineals".

La matriu ampliada del sistema és:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ a & 5 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$|MA| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ a & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5a + 5 = 5(a+1)$$

- $a \neq -1 \Rightarrow rangA = 3 = rangMA \Rightarrow SCD$

Si $a = -1$ podem trobar un determinant de grau dos diferent de 0 .

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ per tant det A =2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & b \end{vmatrix} = 5b - 30 = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

- $a = -1, b \neq 6 \Rightarrow rangA = 2, rangMA = 3$ Sistema Incompatible
- $a = -1, b = 6 \Rightarrow rangA = 2 = rangMA$ Sistema Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.

b) Quan $a \neq -1$ El sistema és compatible determinat.
Utilitzem Cramer per trobar la solució. La Matriu del sistema és:

$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ a & 5 & 0 & b \end{pmatrix}$ i el seu determinant $|MA| = 5(a+1)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ b & 5 & 0 \end{vmatrix}}{5(a+1)} = \frac{5b-30}{5(a+1)} = \frac{b-6}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{vmatrix}}{5(a+1)} = \frac{6a+b}{5(a+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ a & 5 & b \end{vmatrix}}{5(a+1)} = \frac{24a - 6b + 60}{5(a+1)}$$

Així doncs la solució és :

$$\left(\frac{b-6}{a+1}, \quad \frac{6a+b}{5a+5}, \quad \frac{24a-6b+60}{5(a+1)}\right)$$

c) Quan a = -1 i b = 6, hem vist en el primer apartat que el sistema serà Compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Reduïm la matriu per Gauss, tal i com s'explica en l'apartat 6, pàgina 19, del mòdul 3 " Sistemes d'Equacions Lineals".

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -1 & -12 \\ 0 & 6 & 1 & 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumem la primera fila a la tercera
Restem el doble de la primera fila a la segona
Sumem la segona fila a la tercera.

Ens queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y=6-z \\ -6y=-12+z \end{cases}$$

D'aquí:

$$y=\frac{-12+z}{-6}=\frac{12-z}{6}$$

$$x=6-z-\frac{12-z}{6}=\frac{24-5z}{6}$$

La solució del sistema és doncs:

$$\left(\frac{24-5z}{6}, \quad \frac{12-z}{6}, \quad z\right)$$