Solució examen 3 bis

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^6+1=0$ (proporciona els resultats en forma binòmica i polar)

Solució:

a) Fem el producte dels complexos, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{2-i}+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)}{2+i}=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)}+$$

$$+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)^2}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{(1+2i)\cdot(4+4i-1)+(1-2i)\cdot(4-4i-1)}{4+1}=$$

$$=\frac{(1+2i)\cdot(3+4i)+(1-2i)\cdot(3-4i)}{5}=\frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5}=\frac{-10}{5}=-2$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=-2}$$

b) Primer aïllem la incògnita de l´equació:

$$x^6+1=0\rightarrow x^6=-1\rightarrow x=\sqrt[6]{-1}$$

Escrivim el complex z=-1 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-1}+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fet, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180º, l´angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z=1_{180^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes, hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^o}} = 1_{\frac{180^o+360^o k}{6}} = 2_{30^o+60^o k}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Els arguments de les arrels són:

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 30^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 30^o + 60^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 30^o + 120^o = 150^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 30^o + 180^o = 210^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 30^o + 240^o = 270^o$
- Si k=5, tenim que $\beta_5 = 30^o + 300^o = 330^o$

Per tant, les sis arrels de l´equació $x^6 + 1 = 0$ són:

$$1_{30^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{90^o} = i$$

$$1_{150^o} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{210^o} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -0{,}866 - 0{,}5i$$

$$1_{270^o} = -i$$

$$1_{330^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = 0{,}866 - 0{,}5i$$

2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de R^5 definits de la següent forma:

A={(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) | a_1=a_4, a_5=0}

B={(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) | b_1=b_3, b_4=0}

I sigui v=(0,0,-2,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n es coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifica la teva resposta.

Solució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, a5=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=-2 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$ que té solució x=2, y=0, z=-2.

Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (2,0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions b1=b3, b4=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Així doncs T és una base de B.

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix b1=b3

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

3.

Considereu els següents plans de R^3

$$\pi_1 : 2x + (m-2)y + z = m-2,$$

$$\pi_2 : (m+2)x + 10y + 4z = 11$$

$$\pi_3 : x + y + z = 2,$$

on *m* és un paràmetre real ($m \in R$)

a) Estudieu, segons els valors de *m*, la posició relativa dels tres plans.
b) Calculeu, per a aquells valors de *m* que tingui sentit, els punts, rectes o plans intersecció dels tres plans π_1, π_2, π_3.

Resolució:

a)

Per a estudiar la posició relativa plantegem la matriu 3x4 corresponent al sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites format pels tres plans, per tal d'estudiar si té o no solució i denotem per A i A' la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament, i reordenem les files per dificultat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & 1 & m-2 \\ m+2 & 10 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ja tenim que rang(A) ≥ 2. Per tant el rang(A) només valdrà 3 quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-2) + 20 + m + 2 - (m-2)(m+2) - 10 - 8 = -m^2 + 5m = -m(m-5)$, que només s'anul.la quan $m = 0$ o $m = 5$.

Per tant:

- Cas I: Si $m \neq 0{,}5 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ aleshores el sistema és SCD i per tant els tres plans s'intersecten en un punt.

- Cas II: Si $m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

En substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 - 4 - 4 + 8 - 22 = 5 \neq 0 \ \Rightarrow rang(A') = 3 > 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir que els tres plans no tenen cap punt en comú.

- Cas III: Si $m = 5 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

Com abans, en substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 + 21 - 14 - 12 - 22 = 0 \;\Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir que els tres plans s'intersecten en una recta.

En resum:

- Si $m \neq 0,5$ els tres plans es tallen en un punt
- Si $m = 0$ els tres plans no tenen cap punt en comú
- Si $m = 5$ els tres plans s'intersecten en una recta

b)

Pel que s'ha vist a l'apartat anterior, es tracta de trobar el punt intersecció en el cas $m \neq 0,5$ i la recta intersecció en el cas $m = 5$.

- Cas $m \neq 0,5$

El corresponent sistema és SCD i el resoldrem pel mètode de Cramer, en funció dels valors del paràmetre *m.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{8(m-2)+10(m-2)+11-11(m-2)-20-4(m-2)}{-m(m-5)} = \frac{3m-15}{-m(m-5)} = \frac{3(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{-3}{m},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{4(m-2)+22+2(m+2)-(m+2)(m-2)-11-16}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+6m-5}{-m(m-5)} = \frac{-(m-1)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m-1}{m},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & m-2 \\ m+2 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{11(m-2)+40+(m+2)(m-2)-2(m+2)(m-2)-10(m-2)-22}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+m+20}{-m(m-5)} = \frac{-(m+4)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m+4}{m}.$$

Per tant el punt intersecció és $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$, per als diferents valors de $m \neq 0,5$.

- Cas $m=5$

Com hem vist a l'apartat anterior, en aquest cas els tres plans s'intersecten en una recta que és la formada per la intersecció de dos d'ells, per exemple el primer i el tercer. Així doncs la recta resulta de la resolució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+3y+z &= 3 \end{cases}$$

o equivalentment (restant a la segona equació dues vegades la primera)

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ y-z &= -1 \end{cases}.$$

Aillant de la segona tenim y = z-1 i substituint a la primera x = 2-y-z = 2-z+1-z = 3-2z.

Per tant els punts de la recta són de la forma $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$. És a dir, és la recta que passa pel punt $(3,-1,0)$ i que té vector director $(-2,1,1)$.

Resumint:

- Cas $m \neq 0,5$, els tres plans es tallen en el punt $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$
- Cas $m=5$, els tres plans tenen per intersecció la recta $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$

4. Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (2x+2z, 5x+y+10z, -x-z).$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}2-t & 0 & 2\\ 5 & 1-t & 10\\ -1 & 0 & -1-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}2-t & 2\\ -1 & -1-t\end{vmatrix}=$$

$$(1-t)[(2-t)(-1-t)+2]=(1-t)(t^2-t)=t(1-t)(t-1)=(0-t)(1-t)^2$$

Fixem-nos que el polinomi característic descomposa completament en tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 0 (amb multiplicitat algebraica 1) i 1 (amb multiplicitat algebraica 2) *(veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)*

c) Per veure si diagonalitza cal veure si hi ha 2 VEPS linealment independents de valor propi 1. Per a això és suficient calcular la dimensió de l'espai de vectors propis de valor propi 1:

$$\dim(Nuc(A-1\cdot I))=3-rang\,(A-1\cdot I)=$$

$$3-rang\begin{pmatrix}2-1 & 0 & 2\\ 5 & 1-1 & 10\\ -1 & 0 & -1-1\end{pmatrix}=3-rang\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 10\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}=3-1=2$$

Per tant, f diagonalitza (*veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)*

d) Per trobar els vectors propis de f de valor propi 0 i 1 cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-0·I)X=0 i (A-1·I)X=0. O sigui:

$$(A-0I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 10\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$(A-1I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 10\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Una base de solucions del primer sistema és: (1,5,-1).

Una base de solucions del segon sistema és: (0,1,0), (2,0,-1).

Una base formada per vector propis de f és {(1,5,-1), (0,1,0),(2,0,-1)}.