Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat
Tercera PAC. Mòduls 6 i 7.
Semestre de primavera de 2012 (del 9 de maig al 30 de maig).

Si us plau, feu cas de les instruccions següents:

- Envieu la solució en un fitxer que haureu d'anomenar: **PAC3_Cognom1Cognom2nom.pdf**
- L'heu de lliurar a l'apartat "Lliurament i Registre d'AC" de l'aula.
- Numereu les respostes d'acord amb la numeració de les preguntes i els apartats.
- No us limiteu a donar les respostes als problemes proposats. Doneu, també, una explicació que justifiqui la resposta.

1. (Valoració d'un 20%) Considereu les fórmules booleanes següents:
   - $f_1 = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$.
   - $f_2 = (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.
   - $f_3 = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z)$.
   - $f_4 = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.

   a) Digueu quines fórmules estan en FNC.

   b) Justifiqueu si alguna d'elles són instàncies del problema SAT o 3SAT.

   c) Considereu el problema 3SAT-EQUILIBRAT: donada una fórmula booleana en FNC on cada clàusula conté 3 literals i cada variable apareix negada i no negada el mateix nombre de vegades a la fórmula, decidir si hi ha una assignació de variables a la fórmula que la satisfà.
   Digueu si alguna de les fórmules anteriors és una instància del problema 3SAT-EQUILIBRAT.

   d) Demostreu que 3SAT-EQUILIBRAT $\in NP$.

e) Demostreu que 3SAT-EQUILIBRAT és NP-complet.

2. (Valoració d'un 20%) Siguin els problemes següents:
CONNEX: Donat $G = (V, A)$, determinar si G és connex.
COMPONENTS: Donat $G = (V, A)$, decidir si G té exactament k components connexos.

   a) Demostreu que CONNEX $\in P$.

   b) Demostreu que CONNEX $\leq_p$ COMPONENTS.

   c) Podem afirmar a partir de l'apartat anterior que COMPONENTS $\in P$? I que COMPONENTS $\notin P$?

3. (Valoració d'un 20%) Siguin els dos problemes següents:

MCD(n, m, x): Donats n, m i x enters, $0 < n \leq m$, decidir si el $\mathrm{mcd}(n, m)$ (és a dir, el màxim comú divisor de n i m) és igual a x.
COPRIMERS(n, m): Donats n i m enters, $0 < n \leq m$, determinar si n i m no tenen cap divisor comú més gran que 1.

   a) Considereu l'algorisme següent per trobar el mcd de n i m:

```
funció MCD(n, m)
  inici
    mcd ← 1
    per i = 1 fins n
        si (n mod i = 0 ∧ m mod i = 0) aleshores
           mcd = i
        fisi
    fiper
    retorn mcd
  fi
```

   Demostreu que aquest algorisme té complexitat exponencial respecte de la mida de l'entrada.

   b) A partir de l'apartat anterior, podem afirmar que $MCD(n, m, x)$ és intractable?

   c) Demostreu que COPRIMERS$(n, m) \leq_p$ MCD(n, m, x).

4. (Valoració d'un 20%) Considereu els problemes següents:
SUMA_SUB: Donat un conjunt C d'enters positius i un enter t, decidir si existeix C', subconjunt de C, tal que la suma dels elements de C' és exactament t.

SUMA_RESTA_SUB: Donat un conjunt C d'enters i un enter t, decidir si existeix C', subconjunt de C, tal que sumant i/o restant els elements de C' obtenim exactament t. (Per exemple, si $C = \{1, 3, 6, 10\}$ i $t = 8$, C' podria ser {1,3,6}, perquè $3+6-1 = 8$)

   a) De quina mena és cadascun dels problemes? (decisional, de càlcul, d'optimització).

   b) Demostreu que SUMA_RESTA_SUB $\leq_p$ SUMA_SUB, usant la funció de reducció $f(C,t) = (\bar{C}, t)$, on $\bar{C} = C \cup \{-x \mid x \in C\}$. (seguint amb l'exemple anterior, $\bar{C}$ seria $\{1, -1, 3, -3, 6, -6, 10, -10\}$).

5. (Valoració d'un 20%) Considereu un conjunt d'n fitxers $S_1, \ldots, S_n$, on el fitxer S_j té longitud c_j $(j = 1, \ldots, n)$ i un conjunt, $\{x_1, \ldots, x_m\}$, de m peticions d'unitats d'informació. Cada unitat d'informació està emmagatzemada en almenys un fitxer. Volem trobar un subconjunt de fitxers de cost total mínim tal que permetin respondre a totes les peticions d'unitats d'informació.

   a) Modeleu aquest problema utilitzant la teoria de grafs i definiu el problema d'optimització associat.

   b) Relacioneu-lo amb algun dels problemes estudiats en el mòdul 7 i justifiqueu si és un problema intractable.

   c) Si la taula següent representa una instància del problema, doneu una solució òptima:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
x_1	1	0	1	1	0
x_2	1	0	0	1	0
x_3	1	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1	0
x_5	1	0	0	0	1
x_6	0	0	1	0	0
x_7	0	1	0	1	0
Cost	3	6	2	5	7