ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
8 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:
   a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: 2_{90°
   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

   Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.2. del módulo impreso, "De la forma polar a binómica":

En 2_{90° tenemos que r = 2 y $\vartheta = 90^\circ$ entonces, 2_{90° = 2·(cos 90º+ *i* sen90º) = $= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces terceras de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Para determinar las raíces terceras de $-i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $0-i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (0, -1), por lo tanto, es un número que se encuentra justamente entre el tercer y cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-i = 1_{270^o}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^o+360^o k}{3}} \quad \text{para k=0, 1,2}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[3]{1} = 1$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \dfrac{270^o+360^o k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 90^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 90^o+120^o = 210^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 90^o+240^o = 330^o$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{1_{90^o}}$$

$$\boxed{1_{210^o}}$$

$$\boxed{1_{330^o}}$$

2. Sea F un subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los siguientes vectores:

$$F = \langle (0,0,3,4,1), (0,-1,-b,0,0), (2,0,-b,0,0), (b,b,b-1,0,4) \rangle$$

a) Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio F.

b) Para el caso $b=2$ hallad una base de F. ¿Pertenece $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores.

$$rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos rápidamente que tenemos el menor (usando las filas 1, 2 y 4) siguiente con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora orlamos (por ejemplo, añadiendo la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Así el rango de la matriz definida por los vectores es 4 independientemente de b. Por tanto la dimensión de F es siempre 4.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que la dimensión de F es siempre 4. Así que como base podemos proponer los 4 vectores con que está definida F en el caso b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.

Para ver si v pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en el caso que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=3, y=2, z=1, t=-1. Por tanto, v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,2,1,-1).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2a-1 \\ 5x + (a-1)y + (2a+3)z = 3a+2 \\ 3x + (a+1)y + z = 3 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2a-1\\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2\\ 3 & a+1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{vmatrix}=-2a^2-6a+8=-2(a-1)(a+4)$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq -4\rightarrow \text{rang}(A)=3=\text{rang}(M)=\text{nº incógnitas}$ $\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a=1\rightarrow \text{rang}(A)=2$, ya que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}\neq 0$. Calculamos, para $a=1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{rang}(M)=2\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a=-4\rightarrow \text{rang}(A)=2$, ya que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -5 & -5\end{vmatrix}\neq 0$. Por otro lado, para $a=-4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & -9\\ -5 & -5 & -10\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=275\neq 0\rightarrow \text{rang}(M)=3\rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a=0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\underset{(1)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 4 & -5 & 6\end{array}\right)\underset{(2)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-5·F1 y F3=F3-3·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \quad 4y-\ 7z=7\\ \quad\quad 2z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \quad 4y-\ 7z=7\\ \quad\quad z=-1/2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \quad y=7/8\\ \quad z=-1/2\end{cases}$$

$$\rightarrow\boxed{\begin{cases}x=7/8\\ y=7/8\\ z=-1/2\end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(1,5,-2) = (2,10,-4), f(0,-1,2) = (0,1,-2), f(0,-1,1) = (0,0,0)$$

a) Demostrad que $(1,5,-2), (0,-1,2), (0,-1,1)$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f). ¿Es f inyectiva?

d) Estudiad si f diagonaliza.

e) Calculad el rango de f^{1000}, es decir, la dimensión de la imagen de f^{1000}.

Resolución:

a) Denominamos $u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$. El determinante de u, v, w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 .$$

(Se puede hacer usando la regla de Sarrus, o bien desarrollando por la primera fila). Puesto que es distinto de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

$u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$ **son una base de R^3.**

b) Para calcular el subespacio imagen de f es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. La imagen de la base u,v,w de R^3 es: $f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2), f(w)=(0,0,0)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f) = [f(u), f(v), f(w)] = [(2,10,-4),(0,1,-2),(0,0,0)] = [(2,10,-4),(0,1,-2)].$$

El tercer vector es nulo y los dos primeros son linealmente independientes. Así el subespacio imagen de f está generado por los dos primeros vectores. Por lo tanto, {f(u),f(v)} es una base de la imagen. Además, f no es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y, en cambio, el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

$f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2)$ **es una base de la imagen y f no es exhaustiva.**

c) Recordemos que el Teorema de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del ker (o núcleo) es 1. En particular, f no es inyectiva, porque el ker (núcleo) es distinto de cero. (Ver Módulo 4, Sección 5.) Puesto que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) es una base del núcleo. Así,

$w=(0,\text{-}1,1)$ **es una base del núcleo de f y f no es inyectiva.**

d) Tenemos f(u)=2u. En particular, u es vector propio de f de valor propio 2. Por otra parte, f(v)=-v. Por lo tanto, v es vector propio de f de valor propio -1. Finalmente, f(w)=0. Por lo tanto, w es vector propio de f de valor propio 0. Los tres vectores u, v, w son base de R^3. Por lo tanto, hay una base de R^3 formada por vectores propios de f. Eso significa que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, Sección 8.)

f diagonaliza porque hay una base de R^3 formada por vectores propios de f.

e) La matriz de f en la base de vectores propios es la diagonal con valores propios a la diagonal: 2,1,0. Por lo tanto, la matriz de f elevada a cualquier potencia n, en la base de vectores propios, es la matriz diagonal con los valores propios elevados a n en la diagonal, o sea, 2 elevado a n, 1 y 0. El rango sigue siendo 2, pues.

El rango de f^{1000} es 2.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$