Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en els conceptes bàsics de la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 4 i 5 de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre grafs, com una de les classes més important de grafs, els arbres, així com dos dels problemes més notables de recorreguts en grafs, els grafs eulerians i els grafs hamiltonians.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%=10%+5%+5%) Actualment amb Internet, les cadenes de missatges són molt freqüents, tot i que existeixen des de l'Edat Mitjana. Contenen missatges emocionalment manipuladors, o bé fan servir la superstició o l'humor per assegurar que la cadena continua. Aquí en tenim un exemple.

> **Això és al·lucinant!**
> Envia aquest missatge a un màxim de **5 persones** i, en el termini de 2 minuts, veuràs com no passa res.
> Conec a diverses persones que ho han fet i a totes les ha funcionat: **no ha passat res de res!**
> Funciona de debò. Si no t'ho creus, fes la prova, passa-ho el més aviat possible.
>
> Si trenques la cadena, suspendràs Grafs i Complexitat i se't caurà el pèl i les orelles.

Si suposem que el missatge mai torna a una persona que ja l'ha enviat, aleshores la cadena de persones que envien i reben el missatge es pot representar amb un arbre amb arrel. L'arrel és, de fet, la persona que ha creat el missatge o bé que inicia aquesta cadena. Cada persona que rep el missatge és un node i els fills d'aquest node són les persones a qui reenvia el missatge. Inicialment, el creador de la cadena envia el missatge a 5 persones. Suposem que 5 minuts després de rebre el missatge, aquest es torna a reenviar. Tothom que l'ha rebut, *per si de cas*, el reenvia com a mínim a 1 persona.

(a) Després de 20 minuts de començar la cadena, a quantes persones ha arribat com a mínim el missatge? I com a màxim?

(b) Suposem ara que tothom que rep el missatge el reenvia al màxim nombre de persones. El missatge acaba d'arribar a exactament 15625 persones, que encara no han reenviat el missatge. Considereu l'arbre corresponent en aquest moment.

i. Quina és l'alçada de l'arbre? Quant de temps ha passat d'ençà que es va iniciar la cadena?

ii. Quantes fulles i vèrtexs interns té l'arbre? Quantes arestes?

Solució:

(a) Cada 5 minuts, cada persona que ha rebut el missatge el reenvia a 1 persona com a mínim i a 5 com a màxim. Sabem que l'arrel el reenvia exactament a 5 persones. A més, després de 20 minuts l'arbre té alçada 4. El nombre mínim es dóna quan cada persona, tret de l'arrel, l'envia a 1 persona. En aquest cas tenim $5+5+5+5 = 20$ persones que han rebut el missatge. D'altra banda, el nombre màxim es dóna quan cada persona envia el missatge a 5 persones. Aleshores hi ha $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 780$ persones que reben el missatge.

(b) Sabem que el missatge acaba d'arribar a exactament 15625 persones i que l'arbre és complet 5-ari.

i. Tenim que $15625 = 5^6$ i, per tant, l'arbre té alçada 6. Així, tenim que han passat $6 \cdot 5 = 30$ minuts.

ii. Es tracta d'un arbre d'alçada 6 amb $t = 15625$ fulles. Aleshores, si i és el nombre de vèrtexs interns, sabem que $t = 4i + 1$, i, per tant, $i = \frac{15624}{4} = 3906$. El nombre total de vèrtexs és $|V| = 15625 + 3906 = 19531$ i el nombre d'arestes $|A| = 19530$.

---

2. (Valoració d'un 20%=10%+10%) Considereu l'arbre binari tal que el recorregut aplicant l'algorisme DFS és $[A, B, C, F, E, G, I, D, H, J]$ i el recorregut aplicant l'algorisme BFS és $[A, B, D, C, E, H, F, G, I, J]$.

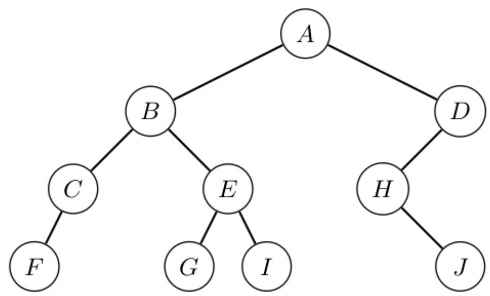
(a) Dibuixeu l'arbre i ompliu la següent taula:

Alçada	
Arrel	
Vèrtexs interns	
Vèrtexs terminals	
És complet?	
És equilibrat?	

(b) Doneu el recorregut en inordre, preordre i postordre d'aquest arbre.

Solució:

(a) Un arbre binari amb els recorreguts aplicant els algorismes DFS i BFS donats a l'enunciat és el següent:



i la taula omplerta és:

Alçada	3
Arrel	A
Vèrtexs interns	A,B,C,E,D,H
Vèrtexs terminals	F,G,I,J
És complet?	NO
És equilibrat?	SÍ

(b) Els recorreguts de l'arbre són:

i. Preordre: $A, B, C, F, E, G, I, D, H, J$.

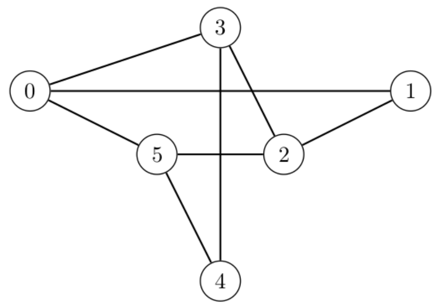
ii. Inordre: $F, C, B, G, E, I, A, H, J, D^{(*)}$.

iii. Postordre: $F, C, G, I, E, B, J, H, D, A$.

$^{(*)}$ Segons el dibuix de l'arbre, podria ser "C, F" en comptes de "F, C" i "D, H, J", "D, J, H", o "J, H, D" en comptes de "H, J, D".

---

3. (Valoració d'un 20%=5%+5%+5%+5%) Sigui G el següent graf:



(a) Justifiqueu quina ha de ser la mida, l'ordre i la seqüència de graus del seu graf complementari G^c **a partir de** la mida, l'ordre i la seqüència de graus de G. A continuació, dibuixeu G^c.

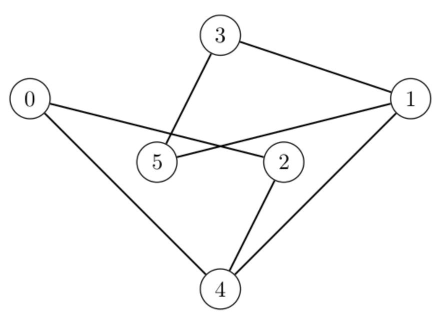
(b) Justifiqueu si G o G^c són grafs bipartits. Per a cada graf, en cas afirmatiu, doneu els dos conjunts de la bipartició.

(c) Justifiqueu si G o G^c són hamiltonians. Per a cada graf, en cas que existeixi, doneu un cicle hamiltonià.

(d) Justifiqueu si G o G^c tenen un circuit o un recorregut eulerià. Per a cada graf, en cas que existeixi, doneu un circuit o un recorregut eulerià, fent servir l'algorisme de Hierholzer.

Solució:

(a) El graf G té mida $m = 8$, ordre $n = 6$ i seqüència de graus $s : d_1, d_2, \ldots, d_6 = 3, 2, 3, 3, 2, 3$. Per tant, G^c té mida $\binom{n}{2} - m = \binom{6}{2} - 8 = \frac{6\cdot 5}{2} - 8 = 7$, l'ordre és el mateix, 6, i la seqüència de graus és $n-1-d_1, n-1-d_2, \cdots, n-1-d_6 = 2, 3, 2, 2, 3, 2$. El graf G^c és



(b) El graf G és bipartit. Els dos conjunts que donen la bipartició són $\{0,2,4\}$ i $\{1,3,5\}$. En canvi, G^c no és bipartit perquè té cicles de longitud senar; per exemple $\{0,2,4\}$.

(c) El graf G sí que és hamiltonià; un cicle seria $\{0,1,2,5,4,3,0\}$. El graf G^c no és hamiltonià ja que si eliminem l'aresta $\{1,4\}$, aleshores queden 2 components connexes.

(d) El graf G no té cap circuit ni cap recorregut eulerià ja que té més de 2 vèrtexs de grau senar: $\{0,2,3,5\}$. El graf G^c té exactament 2 vèrtexs de grau senar, $\{1,4\}$ i, per tant, no té cap circuit eulerià però sí que té un recorregut eulerià. Apliquem l'algorisme de Hierholzer afegint una altra aresta $\{1,4\}$.

Iteració	v	C'	C
0	1		$\{1\}$
1	1	$\{1,4,1\}$	$\{1,4,1\}$
2	1	$\{1,3,5,1\}$	$\{1,3,5,1,4,1\}$
3	4	$\{4,2,0,4\}$	$\{1,3,5,1,4,2,0,4,1\}$

Per tant, després d'eliminar una aresta $\{1,4\}$, un recorregut eulerià del graf és $\{1,3,5,1,4,2,0,4\}$.

---

4. (Valoració d'un 25%=5%+5%+5%+5%+5%) Considereu el graf G amb vèrtexs $\{A,B,C,D,E,F,G\}$ i amb pesos a les arestes donats per la següent taula:

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	10	10			15
B	10		5		30		
C	10	5				5	
D	10				15	20	5
E		30		15		40	
F			5	20	40		10
G	15			5		10	

Per al graf G, a cada apartat, digueu quin algorisme feu servir i doneu tots els passos fins a obtenir el resultat final.

(a) Quin és el cost mínim per connectar tots els vèrtexs?

(b) Existeix un arbre generador minimal que contingui l'aresta $\{A,C\}$? En cas afirmatiu, doneu l'arbre i justifiqueu si és únic.

(c) Existeix un arbre generador minimal que contingui el camí mínim de A a E? En cas afirmatiu, doneu l'arbre.

(d) Existeix un arbre generador minimal que compleixi les condicions dels apartats (b) i (c) alhora?

(e) Doneu l'arbre que contingui tots els camins de pes mínim de A a la resta de vèrtexs. És un arbre generador minimal? Compleix les condicions dels apartats (b) i (c) alhora?

Solució:

(a) Fem servir l'algorisme de Kruskal. Considerem les arestes ordenades de menys a més pes. Triem i marquem amb un asterisc les 6 primeres arestes que no formen cap cicle, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Aresta	Pesos
$\{B, C\}^*$	5
$\{C, F\}^*$	5
$\{D, G\}^*$	5
$\{A, B\}^*$	10
$\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$	10
$\{A, D\}^*$	10
$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$	10
$\{\mathbf{A}, \mathbf{G}\}$	15
$\{D, E\}^*$	15
$\{D, F\}$	20
$\{B, E\}$	30
$\{E, F\}$	40

L'arbre generador minimal té pes 50 i conté les arestes $\{B, C\}, \{C, F\}, \{D, G\}, \{A, B\}$, $\{A, D\}$ i $\{D, E\}$.

Nota: Aquest apartat també es pot resoldre fent servir l'algorisme de Prim.

(b) Sí, a l'hora d'escollir les arestes de l'arbre generador minimal fent servir Kruskal, podríem haver escollit l'aresta $\{A, C\}$ en comptes de l'aresta $\{A, B\}$ que té el mateix pes. En aquest cas, les arestes són $\{B, C\}, \{C, F\}, \{D, G\}, \{A, C\}$, $\{A, D\}$ i $\{D, E\}$. Aquest arbre no és únic, ja que en comptes de l'aresta $\{A, D\}$ que té pes 10, podríem haver escollit l'aresta $\{F, G\}$ que té el mateix pes.

(c) Fent servir l'algorisme de Dijkstra, obtenim:

A	B	C	D	E	F	G
$(0,A)^*$	$(10,A)$	$(10,A)$	$(10,A)$	(∞,A)	(∞,A)	$(15,A)$
	$(10,A)^*$	$(10,A)$	$(10,A)$	$(40,B)$	(∞,A)	$(15,A)$
		$(10,A)^*$	$(10,A)$	$(40,B)$	$(15,C)$	$(15,A)$
			$(10,A)^*$	$(25,D)$	$(15,C)$	$(15,A)$
				$(25,D)$	$(15,C)^*$	$(15,A)$
				$(25,D)$		$(15,A)^*$
				$(25,D)^*$		

El camí mínim de A a E és $\{A, D, E\}$ amb un pes de 25. L'aresta $\{D, E\}$ es troba en tots els arbres generadors de pes mínim i, com hem vist en l'apartat (a), podem escollir l'aresta $\{A, D\}$ a l'arbre generador; per tant, sí que és possible.

(d) L'arbre donat a l'apartat (a) és un arbre generador minimal i conté el camí mínim de A a E.

(e) A partir de la taula de l'algorisme de Dijkstra de l'apartat (c), les arestes de l'arbre generador de distàncies mínimes que comença pel vèrtex A són $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{D, E\}, \{C, F\}$ i $\{A, G\}$. El pes de l'arbre és 65 i, per tant, no és un arbre generador minimal. En aquest cas sí que compleix les condicions dels apartats (b) i (c) alhora.

---

5. (Valoració d'un 15%=5%+5%+5%) Considereu el graf G amb vèrtexs $\{A, B, C, D, E, F\}$ i amb pesos assignats a les arestes donats per la següent taula:

	B	C	D	E	F
A	15	20	15	20	15
B		25	25	35	30
C			25	30	30
D				30	25
E					25

(a) Fixeu-vos que en el graf verifica la desigualtat triangular. Trobeu un cicle H que passi per tots els vèrtexs una única vegada aplicant l'algorisme TSP-aproximat. (Indiqueu tots els passos realitzats fins arribar a la solució). Doneu també el cost del cicle.

(b) Doneu una cota inferior tenint el compte el cost d'un arbre generador minimal del graf. Doneu també la cota inferior obtinguda a partir de l'algorisme del TSP-aproximat. Quina de les dues és millor?

(c) És única la solució del TSP-aproximat? Si no ho és, doneu si és possible una altra solució que contingui el camí $\{A, C, E\}$. És millor que l'obtinguda en l'apartat (a)?

Solució:

(a) Podem utilitzar el TSP-aproximat ja que el graf verifica la desigualtat triangular. Aplicant l'algorisme de Kruskal obtenim les següents arestes: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}$. Un recorregut de l'arbre en preordre és $\{A, B, C, D, E, F\}$ i el cicle seria $\{A, B, C, D, E, F, A\}$ amb cost $15 + 25 + 25 + 30 + 25 + 15 = 135$.

(b) Tenim que l'arbre generador minimal té les següents arestes $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}$, per tant una cota inferior és 85. De l'algorisme TSP-aproximat obtenim una altra cota inferior $\frac{135}{2} = 67.5$, o sigui 68. La millor cota inferior és la més elevada, o sigui 85.

(c) En l'algorisme del TSP-aproximat podem triar un altre recorregut també en preordre que contingui el camí $\{A, C, E\}$, per exemple $\{A, C, E, B, D, F\}$. En aquest cas, el cicle seria $\{A, C, E, B, D, F, A\}$ amb cost $20 + 30 + 35 + 25 + 25 + 15 = 150$, i per tant aquesta solució és pitjor a l'obtinguda en l'apartat (a).

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 4. Arbres.
- Mòdul didàctic 5. Grafs eulerians i grafs hamiltonians.
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC2_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 22/11/2018**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**