Álgebra / Matemáticas I

EXAMEN 1 - 10 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(-4i)^{-1}$

(b) Resolved la ecuación: $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$. Proporcionad la solución o las soluciones en forma binómica.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$(-4i)^{-1} = \frac{1}{-4i} = \frac{4i}{(-4i)4i} = \frac{4i}{-16i^2} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$
Por tanto, la respuesta es: $\frac{1}{4}i$

(b) Seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material. Tal como haríamos con una ecuación con coeficientes reales, intentaremos aislar la z de esta ecuación.
$(1+i)z = \frac{1-i}{z} \iff (1+i)z^2 = 1-i \iff z^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$
Por tanto, tenemos que resolver la ecuación: $z^2 = -i$
Es decir, las soluciones son: $z = \sqrt{-i}$
La solución de la ecuación es, pues, las dos raíces cuadradas de $-i$. Para hallarlas, primero, pasamos $-i$ a forma polar.
Escribimos el complejo $-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^o$
Tenemos, por tanto, que $-i = 1_{270^o}$
Como nos piden las raíces cuadradas tenemos que hacer lo siguiente (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):
$\sqrt{z} = \sqrt{1_{270^o}} = 1_{\frac{270^o+360^o k}{2}}$ para $k = 0, 1$
Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 1$
Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{270^o+360^o k}{2}$ para k=0,1

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 135^o$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 135^o + 180^o = 315^o$

Por tanto, las dos raíces cuadradas del complejo $-i$, que son las soluciones de la ecuación dada, son: 1_{135^o}, 1_{315^o}

Para pasar estas soluciones a forma binómica solo tenemos que mirar los valores de la tabla y tendremos:

- $1_{135^o} = \cos 135^o + i \sin 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$
- $1_{315^o} = \cos 315^o + i \sin 315^o = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

2. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = <(\lambda,\lambda,\lambda),(0,\lambda^2,\lambda^2),(\lambda^3,0,\lambda^3),(\lambda^4,\lambda^4,0)>, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculad la dimensión de F según λ y una base en cada caso.

(b) Sea $v = (-2,2,1)$. En el caso $\lambda = 1$, ¿$v \in F$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado en el apartado anterior.

(c) Sea $B = \{(-2,2,1),(0,-1,-1),(-1,0,-1)\}$ una base de F para el caso $\lambda = 1$. Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis calculado en el primer apartado para $\lambda = 1$.

Solución

(a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F. Comenzamos con el determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^6$$

Así, si $\lambda \neq 0$ la dimensión de F es 3. Es decir, F es $\mathbb{R}^3$. En este caso una base puede ser la formada por los vectores con los que está definido F con un valor cualquiera de λ distinto de 0. Por ejemplo, $\lambda = 1$: $A = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Si $\lambda = 0$ todos los vectores de F son 0, de forma que la dimensión de F es 0.

(b) Como en el caso $\lambda = 1$ la dimensión de F es 3, sabemos directamente que $v \in F$. Para calcular sus coordenadas resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = 3$, $z = -1$. Por tanto, las coordenadas de v en la base A son $(-1,3,-1)$.

(c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Para el primer vector de B hemos calculado sus coordenadas en A en el apartado anterior. El segundo y tercer vector de B vemos que son directamente el segundo y tercero de A en negativo (también podríamos resolver unos sistemas lineales análogos al del apartado anterior). Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones con parámetros reales a, b, c e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Demostrad que es un sistema compatible determinado para cualquier valor de los parámetros a, b y c.

(b) Resolved por Cramer el sistema dejando las soluciones en función de a, b y c.

(c) Determinad razonadamente qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x = y = z$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordad que por el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13] un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado si:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(M) = \text{ n.}^o \text{ incógnitas.}$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, independientemente de los valores de a, b y c, entonces también lo será el rango de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 4 + 1 - 1 = -1$$

Así pues, como que $|A| \neq 0$ para cualquier valor de a, b y c, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{el sistema siempre es compatible determinado}}.$$

(b) Para calcular la solución del sistema podemos utilizar la regla de Cramer [ver apuntes módulo 3, apartado 7, páginas 23 a 26]:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3b-5c}{-1} = -a+3b+5c$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b-c}{-1} = b+c$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+2b+3c}{-1} = a-2b-3c$$

Así pues, la solución del sistema en función de los parámetros a, b y c es:

$$\boxed{x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c}.$$

(c) Para determinar qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x = y = z$, se puede proceder de varias maneras. Por ejemplo, podemos coger el sistema e imponer $x = y = z$ obteniendo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=a \\ -x+2y-z=b \\ x-y+z=c \end{array}\right\} \underset{x=y=z}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{r} x+x+2x=a \\ -x+2x-x=b \\ x-x+x=c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 4x=a \\ 0=b \\ x=c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 4c=a \\ 0=b \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, si queremos que la solución verifique $x = y = z$, entonces los parámetros tienen que cumplir que $\boxed{a = 4c \text{ y } b = 0}$.

Otra manera de resolver este apartado, es a partir de la solución encontrada en el apartado anterior. Por el apartado (b) sabemos que la solución del sistema es:

$$x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c.$$

Así pues, si se tiene que verificar que $x = y = z$ (es decir, $x = y$, $x = z$ y $y = z$) se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -a+3b+5c=b+c \\ -a+3b+5c=a-2b-3c \\ b+c=a-2b-3c \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} -a+2b+4c=0 \\ -2a+5b+8c=0 \\ -a+3b+4c=0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-2\cdot F1 \to F2 \\ F3-F1\to F3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2\to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} -a+2b+4c=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a = 4c \text{ y } b = 0}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida en las bases canónicas por

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z - t, -\lambda y + 2\lambda t, -2x - 3y).$$

Consideremos $\lambda = 1$ en los dos primeros apartados.

(a) Demostrad que f es una aplicación lineal.

(b) Calculad la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$.

(c) Para los diferentes valores de λ, calculad una base B de $\mathbb{R}^4$ formada por los vectores de la base del núcleo de f y los vectores necesarios de la base canónica hasta completarla. Escribid la matriz de f si usamos la base B en $\mathbb{R}^4$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

Solución

(a) f sí que es una aplicación lineal. Para demostrarlo se debe comprobar (como en el ejemplo 1 del punto 2.2 del Módulo 4) que la imagen de la suma de vectores es siempre la suma de sus imágenes:

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

$$= ((x_1 + x_2) + 2(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2), -(y_1 + y_2) + 2(t_1 + t_2), -2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2))$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1 + x_2 + 2z_2 - t_2, -y_1 + 2t_1 - y_2 + 2t_2, -2x_1 - 3y_1 - 2x_2 - 3y_2)$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1, -y_1 + 2t_1, -2x_1 - 3y_1) + (x_2 + 2z_2 - t_2, -y_2 + 2t_2, -2x_2 - 3y_2)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Comprobamos también que la imagen del producto de un vector por un escalar siempre es el producto de la imagen por el escalar:

$$f(kx, ky, kz, kt) = (kx + 2kz - kt, -ky + 2kt, -2kx - 3ky)$$

$$= (k(x + 2z - t), k(-y + 2t), k(-2x - 3y))$$

$$= k(x + 2z - t, -y + 2t, -2x - 3y) = k \cdot f(x, y, z, t)$$

(b) Para calcular A, la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$, calculamos las imágenes de los cuatro vectores de la base canónica y los colocamos en columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Para calcular una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda ecuación es $-\lambda y + 2\lambda t = 0$. Vemos que aparecen dos casos a tratar:
Si $\lambda \neq 0$, podemos dividir y obtener $y = 2t$. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $-2x - 6t = 0$. Por tanto, $x = -3t$. Sustituyendo en la primera equación $-3t + 2z - t = 0$ de donde $z = 2t$. O sea, $(x, y, z, t) = (-3t, 2t, 2t, t)$. Sacando factor común: $(x, y, z, t) = t(-3, 2, 2, 1)$. Por tanto, una base del núcleo es $\{(-3, 2, 2, 1)\}$.
Para completar una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Estos cuatro vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base B de $\mathbb{R}^4$. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ los vectores del núcleo cumplen $x + 2z - t = 0$ y $-2x - 3y = 0$. Sumándole a esta segunda ecuación el doble de la primera, y aislando la x y la y, obtenemos dos expresiones $x = -2z + t$ y $-3y = -4z + 2t$. Por tanto una base del núcleo es $\{(-2, \frac{4}{3}, 1, 0), (1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Para completar esta base del núcleo hasta tener una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$. Se puede comprobar que el determinante de estos vectores no es nulo. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$