

PAC3

Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinòmica dels problemes NP-complets.



Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Digueu si les següents afirmacions són certes o falses, justificant la resposta en cada cas.

- (a) Un algorisme que resolgui SAT també resol 3SAT. Per tant, $3SAT \leq pSAT$.
- (b) Un algorisme amb complexitat $O(n!)$ té cost exponencial.
- (c) Un problema resoluble en temps exponencial és intractable.
- (d) Hi ha exemples de problemes que pertanyen a NP i que, en canvi, no pertanyen a P.
- (e) Si $A \leq_p B$ i $B \notin P$, aleshores $A \notin P$.

2. (Valoració d'un 5%+15%) Tres germans, l'Eric, la Marta i la Carla, volen fer-li un regal al seu pare. Aquestes són les propostes que tenen: un llibre (25€), colònia (14€) i un jersey (18€). Tenim les següents condicions:

- Eric no vol comprar res que valgui més de 20€.
- Marta diu que ja han comprat colònia altres anys i no vol tornar a comprar-ne.
- Carla només vol regalar cultura.

- (a) Volem saber si els tres germans compren algun regal conjuntament. Doneu una fórmula booleana en FNC associada al problema considerant V el conjunt del regals: $V = \{L, C, J\}$. Doneu totes les assignacions que satisfan la fórmula de l'apartat anterior i digueu si és satisfactible i si pertany o no a SAT3. És possible que el tres germans comprin un regal conjuntament?
- (b) Suposem ara que es volen comprar tots els regals i en cadascun d'ells els germans decideixen si participen o no. Hi ha alguna combinació d'un dos o tres germans que permeti comprar un llibre? Escriviu la fórmula per determinar si una combinació de germans pot comprar un llibre o no considerant V el conjunt dels germans $\{E, M, C\}$. Doneu ara una fórmula booleana en FNC que determina si una combinació de germans pot comprar alguns dels regals o no. Doneu totes les assignacions que satisfan aquesta fórmula i digueu si és satisfactible i si pertany o no a 3SAT. És possible que tres germans comprin un regal conjuntament? I dos germans?

3. (Valoració d'un 20%) Donat un conjunt de nombres naturals A i una col·lecció de subconjunts d'aquest conjunt, S , considerem el següent problema de càlcul:

- **PROB1:** Trobar uns quants subconjunts de S tals que tot element de A es troba en algun d'aquests subconjunts.

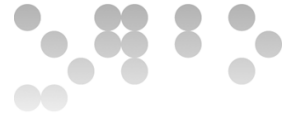
Per exemple, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i S està format pels subconjunts de A $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3\}$ i $\{1, 4\}$, una possible solució seria la formada pels dos primers subconjunts, $\{1, 2, 4\}$ i $\{2, 3\}$ (ja que entre tots dos contenen tots els elements d' A).

Considerem també la variant del problema **PROB1** en què exigim que els subconjunts de la solució no tinguin cap element en comú:

- **PROB2:** Trobar uns quants subconjunts de S , disjunts dos a dos, tals que tot element de A es troba en algun d'aquests subconjunts.

Reprement l'exemple anterior, en aquest cas els dos primers subconjunts donats no serien una solució, ja que tenen un element comú (el 2). En canvi, una solució seria $\{2, 3\}$ i $\{1, 4\}$, que està formada per conjunts disjunts i conté els quatre elements de A .

- (a) Doneu les versions d'optimització i de decisió del problema **PROB1**.
- (b) Considerem les versions de decisió associades als dos problemes inicials **PROB1** i **PROB2**, a les que anomenarem **PROB1 – DEC** i **PROB2 – DEC** respectivament. Volem demostrar que $PROB2 – DEC \leq_p PROB1 – DEC$, usant com a funció de reducció la identitat. Demostreu que aquesta reducció és incorrecta.



- (c) Què passa si usem la identitat com a funció de reducció per a intentar demostrar la reducció inversa, $\text{PROB1} - \text{DEC} \leq_p \text{PROB2} - \text{DEC}$?
- (d) A quin problema de tots els esmentats a l'enunciat és equivalent el problema següent?
 $\text{PROB} - \text{X}$: Determinar si tot element de A es troba en algun subconjunt de S .
4. (Valoració d'un 20%) Un club de futbol disposa d'un pressupost p per fitxar jugadors, i d'una base de dades d' n possibles fitxatges on, per a cada jugador, tenim les dades següents:
- Nom del jugador.
 - Cost del fitxatge en euros (c_i).
 - Qualitat del jugador (q_i), representada amb un nombre enter.
 - Estimació del nombre d'anys que jugaria al club (a_i).

Per al club és més important la qualitat que el nombre d'anys, de manera que per a cada jugador es considera que la funció $u(q_i, a_i) = q_i^2 \cdot a_i$ ens dóna la utilitat del fitxatge. La utilitat total dels fitxatges es defineix com la suma d'aquesta funció d'utilitat per a tots els jugadors fitxats. Per exemple, si fitxéssim un jugador de qualitat 6 per a 2 anys i un de qualitat 4 per a 3 anys, la utilitat total resultant seria $6^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 = 120$. El nostre problema, al que anomenem **FITXAR**, és de decisió: volem saber si, sense superar el pressupost disponible p , podem aconseguir fitxar jugadors amb una utilitat total de, com a mínim, t .

- (a) Aquest problema s'assembla al problema de la motxilla. Feu una descripció formal del problema **FITXAR** basant-vos en la descripció del problema **KNAPSACK** (pàgina 34 del mòdul 7).
- (b) Trobeu una funció de reducció per demostrar que $\text{FITXAR} \leq_p \text{KNAPSACK}$ (doneu la correspondència de cada variable d'un problema amb cadascuna de les variables de l'altre problema, i demostreu que és una reducció correcta).
- (c) Trobeu una funció de reducció per demostrar que $\text{KNAPSACK} \leq_p \text{FITXAR}$.
- (d) Demostreu que el problema **FITXAR** és **NP - COMPLET**.
5. (Valoració d'un 20%) L'empresa *Candys For U* vol obrir botigues de llaminadures a diferents ciutats. Les directrius per obrir botigues de la cadena a cada ciutat, són les següents: cada botiga s'instal·larà al costat d'un col·legi i cada col·legi ha de tenir almenys una botiga a menys de 1500 m. Clarament, per començar, l'empresa vol obrir el mínim nombre de botigues.
- (a) Indiqueu quin graf hem d'establir (què representen els vèrtexs i què les arestes) i quin problema volem resoldre. Doneu un exemple amb n col·legis, on la solució sigui trivial.
- (b) Considereu la següent taula que mostra la distància en metres dels col·legis d'una ciutat.

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	790	1075	2120	670	3250	1250
B		-	850	1755	2050	1900	1315
C			-	960	1200	4220	5300
D				-	1010	5540	6350
E					-	3200	4130
F						-	1650
G							-

Determineu quantes botigues han d'obrir a la ciutat. (**Nota:** Per solucionar el problema, feu servir les possibles simplificacions descrites als materials, considerant que el cost d'obrir una botiga és el mateix sigui quin sigui el col·legi escollit).



Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Collecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC3_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 17/12/2014**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**