Álgebra / Matemáticas I

EXAMEN 2 - 18 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:
a) Realizad la siguiente operación: $(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ}$
b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $1+i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución
a) Aquí tenemos que sumar dos números complejos, uno en forma polar y otro en forma binómica. Para lo cual operamos con números complejos tal como se dice en la página 20 del material:

$(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ} = -2-i+1+i = -1$

Para pasar $\sqrt{2}_{45^\circ}$a forma binómica utilizamos la relación que dice que un número complejo, en forma polar, r_α, para pasarlo a forma binaria, tenemos que saber que: $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$r = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto, $\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

b) Escribimos el complejo $1+i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 45^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45^o y en 225^o. Como que el afijo del punto buscado es $(1,1)$ el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 45^o. Cómo se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, para no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado a su punto $(1,1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Como se nos piden las raíces terceras tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace el mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ k}{3}}$ para $k = 0,1,2$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[6]{2}$

Los argumentos de las raíces cúbicas son $\beta = \frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 15^\circ$

Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ$

Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 15^\circ + 240^\circ = 255^\circ$

Por lo tanto, las tres raíces cúbicas del complejo $1 + i$ son:

$\sqrt[6]{2}_{15^\circ}, \sqrt[6]{2}_{135^\circ}, \sqrt[6]{2}_{255^\circ}$

2. Sean $e_1 = (1, 1, 1, 3)$, $e_2 = (1, 0, -1, 0)$ y $e_3 = (0, -2, -4, -6)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $E =< e_1, e_2, e_3 >$. Sea $v = (-1, 1, 3, 3)$.
a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v \in E$? En cas afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.
b) Sea $w = e_1 + e_2$. $B = \{v, w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que son linealmente independientes: contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues $A = \{e_1, e_2\}$.

Para ver si $v \in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$ y $y = -2$. Pot tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(1, -2)$.

b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A y esto ya lo tenemos (para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w está definido directamente com combinación lineal de e_1 y e_2). Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculemos la inversa:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{pmatrix}$

Se pide:
a) Discutid, razonadamente, el rango de la matriz M en función de los valores de $k \in \mathbb{R}$.
b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, resolvedlo siempre que sea compatible determinado con valor de k positivo.

Solución
a) Al ser la matriz M cuadrada de orden 3, estudiamos su rango sabiendo que el rango será tres sólo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{vmatrix} = -4k^2-4k+24 \;\rightarrow\; -4k^2-4k+24=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} k=2 \\ k=-3 \end{cases}$$

En consecuencia

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -3 \;\rightarrow\; \boxed{\text{rango}(M)=3}$.
- Si $k=2$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ con $|M|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(M)=2}$.
- Si $k=-3$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ con $|M|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(M)=2}$.

b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, el sistema asociado es:

$$\left.\begin{aligned} -x+ky &= -4 \\ x+3y &= 1-k \\ 2x-y &= 2k+1 \end{aligned}\right\}$$

Observamos que el sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, así pues, siempre que el rango de la matriz ampliada M sea tres, el sistema será incompatible, puesto que la matriz de los coeficientes del sistema tiene rango 2, pues sólo tiene dos columnas y tiene el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En consecuencia, el sistema sólo puede tener solución si rango$(M) = 2$, es decir si $k=2$ o $k=-3$.

Como el enunciado sólo nos pide resolver para k positivo, resolvemos el caso $k=2$.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22].

Si $k=2$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 + F1 \to F2$ y $F3 + 2{\cdot}F1 \to F3$

(2) $5{\cdot}F3 - 3{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = -4 \\ 5y = -5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } \boxed{(x = 2, y = -1)}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (3x - 4y, 2x + z, x - 4y - z, 4x - 8y - z).$$

a) Calculad la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$.
b) Encontrad una base de $\ker(f)$, el subespacio núcleo de f. ¿Es f inyectiva?
c) Encontrad una base de (f), el subespacio imagen de f. ¿Es f exhaustiva?
d) ¿Es posible encontrar una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición

$$\text{f}{\circ}g : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \text{ , definida por } (\text{f}{\circ}g)(v) = f(g(v)) \text{ , } v{\in} \mathbb{R}^4,$$

sea la identidad? O sea, $(f \circ g)(v) = v$, para todo $v \in^4$?
Indicación: Pensad en el vector v=(0,0,1,0)$\in \mathbb{R}^4$.
e) ¿Es possible encontrar una aplicación $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición

$$\text{h}{\circ}f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \text{ , definida por } (\text{h}{\circ}f)(u) = h(f(u)) \text{ , } u{\in} \mathbb{R}^3,$$

sea la identidad? O sea, $(h \circ f)(u) = u$, para todo u$\in \mathbb{R}^3$?
Indicación: Pensad en el vector $u = (4, 3, -8){\in} \mathbb{R}^3$.

Solución

a) Para encontrar A, la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los ponemos por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos Gauss, o transformaciones por filas. En la primera transformación permutamos filas 1 y 3. En la segunda hacemos $f_2' = f_2 - 2f_1$, $f_3' = f_3 - 3f_1$, $f_4' = f_4 - 4f_1$.

En la tercera hacemos $f_3' = f_3 - f_2$ y $f_4' = f_4 - f_2$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones: $x - 4y - z = 0$ e $8y + 3z = 0$. O sea, $y = -\frac{3}{8}z$ y $x = 4y + z = -4 \cdot \frac{3}{8}z + z = (-\frac{12}{8} + \frac{8}{8})z = -\frac{4}{8}z$. O sea, $(x, y, z) = (-\frac{4}{8}z, -\frac{3}{8}z, z)$. Sacando factor común: $(x, y, z) = (-\frac{1}{8}z)(4, 3, -8)$. Por lo tanto, una base del núcleo es $\{(4, 3, -8)\}$.

Alternativamente: la primera ecuación nos dice $3x - 4y = 0$. La segunda equación nos dice $2x + z = 0$. Por lo tanto, $z = -2x$. Así, pues, el vector $(4, 3, -8)$ verifica las dos primeras ecuaciones. Pero vemos que también verifica la tercera, $x - 4y - z = 0$ y la quarta $4x - 8y - z = 0$. Eso nos dice que por lo menos hay un vector no nulo del núcleo. Por lo tanto, el rango de A es 2 como mucho. Pero ya vemos que es 2, puesto que el menor 2×2 formado por las dos primeras columnas y las dos primeras filas tiene determinante no nulo. Así, $\ker(f) = [(4, 3, -8)]$ y $\{(4, 3, -8)\}$ es una base del $\ker(f)$.

La aplicación f no es inyectiva puesto que el núcleo es no nulo.
c) Sabemos que $\dim(E) = \dim\ker(f) + \dim(f)$. Como $\dim(E) = 3$ y $\dim\ker(f) = 1$, entonces $\dim(f) = 2$. Además la imagen de f se encuentra calculando las imágenes de una base, por ejemplo, la canónica. Antes hemos visto:

$$(f) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = [(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8), (0, 1, -1, -1)].$$

El primer y segundo vectores son linealmente independientes. Así $\{(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8)\}$ forman una base de (f).

La aplicación f no es exhaustiva porque la dimensión de la imagen es 2 y en cambio la dimensión del espacio de llegada es 4.
d) No, no existe una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ verifique $(f \circ g)(v) = v$, para todo v $\in \mathbb{R}^4$. Si existiera, tomando el vector $v = (0, 0, 1, 0)$, que no es de la imagen de f, tendríamos $v = (f \circ g)(v) = f(g(v))$ y entonces v sería de la imagen de f, una contradicción.
e) No, no existe una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifique $(h \circ f)(u) = u$, para todo u $\in \mathbb{R}^3$. Si existiera, tomando el vector $u = (4, 3, -8)$, tendríamos $h(f(u)) = h(0) = 0$, ya que $f(u) = 0$ y $h(f(u)) = h(0) = 0$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$