Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles , así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un ábol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 %=10 %+5 %+5 %) Actualmente con Internet, las cadenas de mensajes son muy frecuentes, a pesar de que existen desde la Edad Media. Contienen mensajes emocionalmente manipuladores, o bien usan la superstición o el humor para asegurar que la cadena continúa. Aquí tenemos un ejemplo.

   ¡Esto es alucinante!
   Envía este mensaje a un máximo de 5 personas y, en el plazo de 2 minutos, verás como no pasa nada. Conozco a varias personas que lo han hecho y a todos les ha funcionado: **¡no les ha pasado nada de nada**!
   Funciona de verdad. Si no te lo crees, haz la prueba, pásalo lo antes posible.
   Si rompes la cadena, suspenderás Grafos y Complejidad y se te caerá el pelo y las orejas.

   Si suponemos que el mensaje nunca vuelve a una persona que ya lo ha enviado, entonces la cadena de personas que envían y reciben el mensaje se puede representar con un árbol con raíz. La raíz es, de hecho, la persona que ha creado el mensaje o bien que inicia esta cadena. Cada persona que recibe el mensaje es un nodo y los hijos de este nodo son las personas a quienes reenvía el mensaje. Inicialmente, el creador de la cadena envía el mensaje a 5 personas. Suponemos que 5 minutos después de recibir el mensaje, éste se vuelve a reenviar. Todo el mundo que lo ha recibido, *por si acaso*, lo reenvía como mínimo a 1 persona.

   a) Después de 20 minutos de empezar la cadena, ¿a cuántas personas ha llegado como mínimo el mensaje? ¿Y como máximo?

   b) Suponemos ahora que todo el mundo que recibe el mensaje lo reenvía al máximo número de personas. El mensaje acaba de llegar a exactamente 15625 personas, que todavía no han reenviado el mensaje. Considerad el árbol correspondiente en este momento.

      1) ¿Cuál es la altura del árbol? ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que se inició la cadena?

      2) ¿Cuántas hojas y vértices internos tiene el árbol? ¿Cuántas aristas?

Solución:

a) Cada 5 minutos, cada persona que ha recibido el mensaje lo reenvía a 1 persona como mínimo y a 5 como máximo. Sabemos que la raíz lo reenvía exactamente a 5 personas. Además, después de 20 minutos el árbol tiene altura 4. El número mínimo se da cuando cada persona, excepto la raíz, lo envía a 1 persona. En este caso tenemos $5+5+5+5 = 20$ personas que han recibido el mensaje. Por otro lado, el número máximo se da cuando cada persona envía el mensaje a 5 personas. Entonces hay $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 780$ personas que reciben el mensaje.

b) Sabemos que el mensaje acaba de llegar a exactamente 15625 personas y que el árbol es completo 5-ario.

1) Tenemos que $15625 = 5^6$ y, por lo tanto, el árbol tiene altura 6. Así, tenemos que han pasado $6 \cdot 5 = 30$ minutos.

2) Se trata de un árbol de altura 6 con $t = 15625$ hojas. Entonces, si i es el número de vértices internos, sabemos que $t = 4i + 1$, y, por lo tanto, $i = \frac{15624}{4} = 3906$. El número total de vértices es $\mid V \mid= 15625 + 3906 = 19531$ y el número de aristas $\mid A \mid= 19530$.

2. (Valoración de un 20 %=10 %+10 %) Considerad el árbol binario tal que el recorrido aplicando el algoritmo DFS es $[A, B, C, F, E, G, I, D, H, J]$ y el recorrido aplicando el algoritmo BFS es $[A, B, D, C, E, H, F, G, I, J]$.

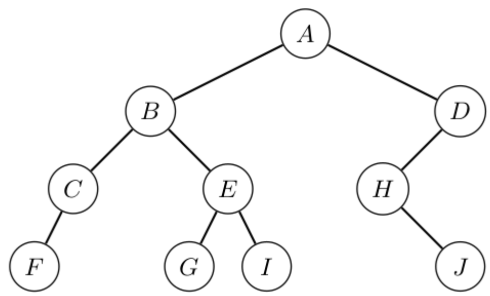
a) Dibujad el árbol y rellenad la siguiente tabla:

Altura	
Raíz	
Vértices internos	
Vértices terminales	
¿Es completo?	
¿Es equilibrado?	

b) Dad el recorrido en inorden, preorden y postorden de este árbol.

Solución:

a) Un árbol binario con los recorridos aplicando los algoritmos DFS y BFS dados en el enunciado es el siguiente:



y la tabla rellenada es:

Altura	3
Raíz	A
Vértices internos	A,B,C,E,D,H
Vértices terminales	F,G,I,J
És completo?	NO
És equilibrado?	SÍ

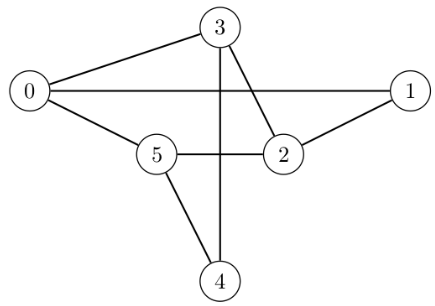
b) Los recorridos del árbol son:

1) Preorden: $A, B, C, F, E, G, I, D, H, J$.
2) Inorden: $F, C, B, G, E, I, A, H, J, D^{(*)}$.
3) Postorden: $F, C, G, I, E, B, J, H, D, A$.

$^{(*)}$ Según el dibujo del árbol, podría ser "C, F" en vez de "F, C" y "D, H, J", "D, J, H", o "J, H, D" en vez de "H, J, D".

---

3. (Valoración de un 20 %=5 %+5 %+5 %+5 %) Sea G el siguiente grafo:



a) Justificad cuál tiene que ser la medida, el orden y la secuencia de grados de su grafo complementario G^c **a partir de** la medida, el orden y la secuencia de grados de G. A continuación, dibujad G^c.

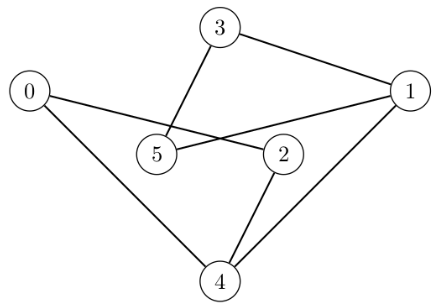
b) Justificad si G o G^c son grafos bipartitos. Para cada grafo, en caso afirmativo, dad los dos conjuntos de la bipartición.

c) Justificad si G o G^c son hamiltonianos. Para cada grafo, en caso de que exista, dad un ciclo hamiltoniano.

d) Justificad si G o G^c tienen un circuito o un recorrido euleriano. Para cada grafo, en caso de que exista, dad un circuito o un recorrido euleriano, usando el algoritmo de Hierholzer.

Solución:

a) El grafo G tiene medida $m = 8$, orden $n = 6$ y secuencia de grados $s : d_1, d_2, \ldots, d_6 = 3, 2, 3, 3, 2, 3$. Por lo tanto, G^c tiene medida $\binom{n}{2} - m = \binom{6}{2} - 8 = \frac{6 \cdot 5}{2} - 8 = 7$, el orden es el mismo, 6, y la secuencia de grados es $n-1-d_1, n-1-d_2, \cdots, n-1-d_6 = 2, 3, 2, 2, 3, 2$. El grafo G^c es



b) El grafo G es bipartito. Los dos conjuntos que dan la bipartición son $\{0, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 5\}$. En cambio, G^c no es bipartito porque tiene ciclos de longitud impar; por ejemplo $\{0, 2, 4\}$.

c) El grafo G sí que es hamiltoniano; un ciclo sería $\{0, 1, 2, 5, 4, 3, 0\}$. El grafo G^c no es hamiltoniano puesto que si eliminamos la arista $\{1, 4\}$, entonces quedan 2 componentes conexas.

d) El grafo G no tiene ningún circuito ni ningún recorrido euleriano puesto que tiene más de 2 vértices de grado impar: $\{0, 2, 3, 5\}$. El grafo G^c tiene exactamente 2 vértices de grado impar, $\{1, 4\}$ y, por lo tanto, no tiene ningún circuito euleriano pero sí que tiene un recorrido euleriano. Aplicamos el algoritmo de Hierholzer añadiendo otra arista $\{1, 4\}$.

Iteració	v	C'	C
0	1		$\{1\}$
1	1	$\{1, 4, 1\}$	$\{1, 4, 1\}$
2	1	$\{1, 3, 5, 1\}$	$\{1, 3, 5, 1, 4, 1\}$
3	4	$\{4, 2, 0, 4\}$	$\{1, 3, 5, 1, 4, 2, 0, 4, 1\}$

Por lo tanto, después de eliminar una arista $\{1, 4\}$, un recorrido euleriano del grafo es $\{1, 3, 5, 1, 4, 2, 0, 4\}$.

---

4. (Valoración de un 25 %=5 %+5 %+5 %+5 %+5 %) Considerad el grafo G con vértices $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ y con pesos en las aristas dados por la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	10	10			15
B	10		5		30		
C	10	5				5	
D	10				15	20	5
E		30		15		40	
F			5	20	40		10
G	15			5		10	

Para el grafo G, en cada apartado, determinad qué algoritmo utilizaríais y dad todos los pasos hasta obtener el resultado final.

a) ¿Cuál es el coste mínimo para conectar todos los vértices?

b) ¿Existe un árbol generador minimal que contenga la arista $\{A, C\}$? En caso afirmativo, dad el árbol y justificad si es único.

c) ¿Existe un árbol generador minimal que contenga el camino mínimo de A a E? En caso afirmativo, dad el árbol.

d) ¿Existe un árbol generador minimal que cumpla las condiciones de los apartados b) y c) a la vez?

e) Dad el árbol que contenga todos los caminos de peso mínimo de A al resto de vértices. ¿Es un árbol generador minimal? ¿Cumple las condiciones de los apartados b) y c) a la vez?

Solución:

a) Usamos el algoritmo de Kruskal. Consideramos las aristas ordenadas de menos a más peso. Elegimos y marcamos con un asterisco las 6 primeras aristas que no forman ningún ciclo, y marcamos con negrita las descartadas porque forman un ciclo.

Arista	Pesos
$\{B, C\}^*$	5
$\{C, F\}^*$	5
$\{D, G\}^*$	5
$\{A, B\}^*$	10
$\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$	10
$\{A, D\}^*$	10
$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$	10
$\{\mathbf{A}, \mathbf{G}\}$	15
$\{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$	15
$\{\mathbf{D}, \mathbf{F}\}$	20
$\{B, E\}$	30
$\{E, F\}$	40

El árbol generador minimal tiene peso 50 y contiene las aristas $\{B, C\}, \{C, F\}, \{D, G\}, \{A, B\}$, $\{A, D\}$ y $\{D, E\}$.

Nota: Este apartado también se puede resolver usando el algoritmo de Prim.

b) Sí, a la hora de escoger las aristas del árbol generador minimal usando Kruskal, podríamos haber escogido la arista $\{A, C\}$ en vez de la arista $\{A, B\}$ que tiene el mismo peso. En este caso, las aristas son $\{B, C\}, \{C, F\}, \{D, G\}, \{A, C\}$, $\{A, D\}$ y $\{D, E\}$. Este árbol no es único; ya que en vez de la arista $\{A, D\}$ que tiene peso 10, podríamos haber escogido la arista $\{F, G\}$ que tiene el mismo peso.

c) Usando el algoritmo de Dijkstra, obtenemos:

A	B	C	D	E	F	G
$(0,A)^*$	$(10,A)$	$(10,A)$	$(10,A)$	(∞,A)	(∞,A)	$(15,A)$
	$(10,A)^*$	$(10,A)$	$(10,A)$	$(40,B)$	(∞,A)	$(15,A)$
		$(10,A)^*$	$(10,A)$	$(40,B)$	$(15,C)$	$(15,A)$
			$(10,A)^*$	$(25,D)$	$(15,C)$	$(15,A)$
				$(25,D)$	$(15,C)^*$	$(15,A)$
				$(25,D)$		$(15,A)^*$
				$(25,D)^*$		

El camino mínimo de A a E es $\{A, D, E\}$ con un peso de 25. La arista $\{D, E\}$ se encuentra en todos los árboles generadores de peso mínimo y, como hemos visto en el apartado a), podemos escoger la arista $\{A, D\}$ en el árbol generador; por lo tanto, sí que es posible.

d) El árbol dado en el apartado (a) es un árbol generador minimal y contiene el camino mínimo de A a E.

e) A partir de la tabla del algoritmo de Dijkstra del apartado c), las aristas del árbol generador de distancias mínimas que empiezan por el vértice A son $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, E\}, \{C, F\}$ y $\{A, G\}$. El peso del árbol es 65 y, por lo tanto, no es un árbol generador minimal. En este caso sí que cumplen las condiciones de los apartados b) y c) a la vez.

---

5. (Valoración de un 15 %=5 %+5 %+5 %) Considerad el grafo G con vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$ y con pesos asignados a las aristas dados por la siguiente tabla:

	B	C	D	E	F
A	15	20	15	20	15
B		25	25	35	30
C			25	30	30
D				30	25
E					25

a) Fijaos que el grafo verifica la desigualdad triangular. Encontrad un ciclo H que pase por todos los vértices una única vez aplicando el algoritmo TSP-aproximado. (Indicad todos los pasos realizados hasta llegar a la solución). Dad también el coste del ciclo.

b) Dad una cota inferior teniendo la cuenta el coste de un árbol generador minimal del grafo. Dad también la cota inferior obtenida a partir del algoritmo del TSP-aproximado. ¿Cuál de las dos es mejor?

c) ¿Es única la solución del TSP-aproximado? Si no lo es, dad si es posible otra solución que contenga el camino $\{A, C, E\}$. ¿Es mejor que la obtenida en el apartado a)?

Solución:

a) Podemos utilizar el TSP-aproximado puesto que el grafo verifica la desigualdad triangular. Aplicando el algoritmo de Kruskal obtenemos las siguientes aristas: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}$. Un recorrido del árbol en preordre es $\{A, B, C, D, E, F\}$ y el ciclo sería $\{A, B, C, D, E, F, A\}$ con coste $15 + 25 + 25 + 30 + 25 + 15 = 135$.

b) Tenemos que el árbol generador minimal tiene las siguientes aristas $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}$, por lo tanto una cota inferior es 85. Del algoritmo TSP-aproximado obtenemos otra cota inferior $\frac{135}{2} = 67{,}5$, o sea 68. La mejor cota inferior es la más elevada, o sea 85.

c) En el algoritmo del TSP-aproximado podemos elegir otro recorrido también en preorden que contenga el camino $\{A, C, E\}$, por ejemplo $\{A, C, E, B, D, F\}$. En este caso, el ciclo sería $\{A, C, E, B, D, F, A\}$ con coste $20 + 30 + 35 + 25 + 25 + 15 = 150$, y por lo tanto esta solución es peor a la obtenida en el apartado a).

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. Árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC2_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 22/11/2018**. **No se aceptarán entregas fuera de término.**