Universitat Oberta de Catalunya

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

ASIGNATURA: Grafos y Complejidad

Final 1

1. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)

   Con respecto al algoritmo para calcular la n-ésima potencia ($n > 0$) de un número real x.

```
función Potencia(x, n)
  inicio
    p ← 1
    mientras n > 0 do
          si n mod 2 ≠ 0 entonces
             p ← x * p
             n ← n − 1
          finsi
          si n > 0 entonces
             x ← x * x
          finsi
          n ← n div 2
    finmientras
    retorno p
  fin
```

   Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas, justificando la respuesta.

   a) Si n es par, el número de multiplicaciones que se realizan es mayor o igual que $\log_2 n + 1$.

   b) Si n es impar, el número de multiplicaciones que se realizan es mayor o igual que $2\log_2 n$.

   c) La complejidad de este algoritmo es lineal, $O(n)$.

   d) La complejidad de este algoritmo es logarítmica, pero solo en base 2, $O(\log_2 n)$.

Solución:

a) Cierta. El número mínimo de multiplicaciones se da cuando $n = 2^t$ y se realizan $\log_2 n + 1$ multiplicaciones. Por lo tanto, si n es par se realizaran como mínimo $\log_2 n + 1$ multiplicaciones.

b) Falsa. El número máximo de multiplicaciones se da cuando $n = 2^t - 1$ y se realizan, como máximo, $2\log_2 n - 1$ multiplicaciones. Por lo tanto, no puede ser mayor o igual que $2\log_2 n$.

c) Falsa. La complejidad mínima y máxima es logarítmica, por lo tanto, su complejidad también lo será.

d) Falsa. Puesto que $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$, por las propiedades de la complejidad, la complejidad es logarítmica $O(\log n)$ independientemente de la base.

---

2. (Valoración de un 10+5+10=25 %)

   Consideremos una red formada por 6 computadores $\{A, B, C, D, E, F\}$. Utilizando la teoría de grafos, responder de forma justificada:

   a) ¿Es posible construir la red de manera que cada computador esté conectado a un número diferente de computadores?

   b) Si se han utilizado un total de 9 segmentos de red para conectar los computadores, ¿es posible que cada computador esté conectado a al menos 4 computadores?

   c) Si A tiene 4 conexiones, B 3 conexiones, C también 3 conexiones, D 2 conexiones y E 1 conexión, ¿cuántas conexiones puede tener el computador F?

Solución:

a) La secuencia de grados debería ser $5, 4, 3, 2, 1, 0$ pero si hay un vértice de grado 0 no puede haber otro de grado 5. Por lo tanto, esta secuencia no puede ser válida.

b) Aplicando la fórmula de los grados $2 \cdot 9 = \sum g(v) \geq \sum 4 = 20$ por lo que no será posible.

c) La secuencia de grados sería $4, 3, 3, 2, 1, x$ donde $x \in \{1, 3, 5\}$. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi:

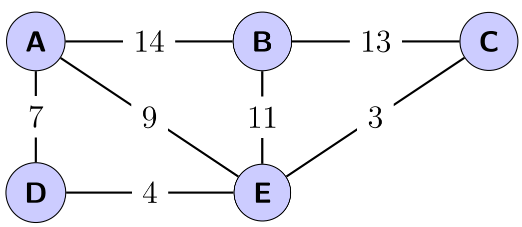
$x = 5$	$x = 3$	$x = 1$
5,5,4,3,3,2,1	4,3,3,3,2,1	4,3,3,2,1,1
3,2,2,1,1	2,2,2,1,1	2,2,1,0,1
1,1,0,1	1,1,1,1	2,2,1,1,0
1,1,1,0	0,1,1	1,0,1,0
0,1,0	1,1,0	1,1,0,0
	0,0,0	0,0,0,0
No es gráfica	Es gráfica	Es gráfica

Por lo tanto, el computador F solo puede tener 1 o 3 conexiones.

---

3. (Valoración de un 15+5+5=25 %)

Consideremos el siguiente grafo:



a) Aplicar el algoritmo de Floyd para encontrar la distancia mínima entre todo par de vértices del grafo anterior. Mostrar todos los pasos del algoritmo.

b) ¿Conoceis alguna otra manera para obtener estas distancias mínimas? Explicarla.

c) ¿Cuál de los dos métodos (el del apartado a) o el del apartado b)) es más eficiente? ¿Por qué?

Solución:

a) Aplicando el algoritmo de Floyd al grafo ponderado de 5 vértices obtenemos la siguiente serie de matrices:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & \infty & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & \infty & 11 \\ \infty & 13 & 0 & \infty & 3 \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & \infty & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & 21 & 11 \\ \infty & 13 & 0 & \infty & 3 \\ 7 & 21 & \infty & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 27 & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & 21 & 11 \\ 27 & 13 & 0 & 34 & 3 \\ 7 & 21 & 34 & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 27 & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & 21 & 11 \\ 27 & 13 & 0 & 34 & 3 \\ 7 & 21 & 34 & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 27 & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & 21 & 11 \\ 27 & 13 & 0 & 34 & 3 \\ 7 & 21 & 34 & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad d^5 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 12 & 7 & 9 \\ 14 & 0 & 13 & 15 & 11 \\ 12 & 13 & 0 & 7 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 0 & 4 \\ 9 & 11 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra a cada vértice del grafo y obtendremos para cada uno una de les filas de la matriz bidimensional d^5 (para el vértice A la fila 1,...) .

c) El algoritmo de Dijsktra tiene una complejidad $O(n^2)$ y el algoritmo de Floyd $O(n^3)$ pero, si aplicamos el algoritmo de Dijkstra n veces, obtendremos la misma complejidad $O(n^3)$.

---

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)

   Decid si son ciertas of falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:

   a) Sea A un problema NP, B un problema NP-Completo entonces podemos asegurar que B $\leq_p$ A.

   b) Los problemas SAT y CLIQUE son polinómicamente equivalentes.

   c) SAT es P-Difícil.

   d) Sabemos que existe una función de reducción de TSP a CLIQUE pero no sabemos si tiene coste polinómico.

Solución:

a) Falsa. La clase NP y NP-Completo no son iguales. Por ejemplo el problema de isomorfismo de grafos es NP pero no es NP-Completo. Por lo tanto, no podemos asegurar que cualquier problema NP pueda reducirse a otro problema NP.

b) Cierta. Los dos problemas son NP-Completos por lo tanto, podemos asegurar que $\mathsf{SAT} \leq_p \mathsf{CLIQUE}$ y $\mathsf{CLIQUE} \leq_p \mathsf{SAT}$.

c) Cierta. Todo problema NP es P-Difícil.

d) Falsa. Per definición de p-reducción podemos asegurar que la reducción existe y la complejidad de la función es polinómica.

Final 2

1. (Valoración de un 7.5+7.5+10=25 %)

   El ISBN-10 está formado por 10 símbolos en la forma $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9C$ donde $0 \leq d_i \leq 9$ y C es un símbolo de control que depende de los otros 9 símbolos anteriores. Utilitzando las técnicas de las funciones, responder de forma justificada a las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántos códigos ISBN diferentes podemos asignar?

   b) El primer símbolo, d_1, indica la lengua/país de edición. ¿Cuántos libros de un país determinado tendrán d_9 par?

   c) Los últimos 5 símbolos, $d_5d_6d_7d_8d_9$, representan el título del libro. ¿Cuántos libros de un país determinado tienen alguno de estos 5 símbolos repetido?

   Solución:

   a) Puesto que el símbolo C está determinado por los otros 9 símbolos, debemos calcular el número de funciones de $\mathbb{N}_9$ en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $VR(10, 9) = 10^9 = 1000000000$.

   b) Si fijamos d_1 y quitamos d_9, entonces debemos calcular el número de funcions de $\mathbb{N}_7$ en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $VR(10, 7) = 10^7 = 10000000$. El último símbolo puede tomar 5 valores diferentes. El total será, $5 \cdot VR(10, 7) = 50000000$.

   c) Tenemos tres grupos de símbolos: d_1, $d_2d_3d_4$ y $d_5d_6d_7d_8d_9$. d_1 está fijado. El grupo $d_2d_3d_4$ puede tomar $VR(10, 3)$ valores. El grupo $d_5d_6d_7d_8d_9$ puede tomar $VR(10, 5)$ valores. De estos valores los hay con símbolos diferentes y los hay con símbolos repetidos. Con símbolos diferentes hay $V(10, 5)$ y, por lo tanto, con algún símbolo repetido habrá $VR(10, 5) - V(10, 5)$. En total tendremos, $VR(10, 3) \cdot (VR(10, 5) - V(10, 5)) = 1000 \cdot (100000 - 30240) = 69760000$.

   ---

2. (Valoración de un 15+5+5=25 %)

   a) ¿Qué algoritmo adaptaríais para hacer un test de aciclicidad de un grafo? Dar el algoritmo adaptado y comentarlo.

b) ¿Tambien serviria para detectar si hay ciclos en un bosque?

c) Si sabeis que el grafo es conexo de orden $|V| = n$, ¿qué número de aristas tiene que tener el grafo para poder afirmar que no tiene ciclos?

Solución:

a) Se puede adaptar el algoritmo de búsqueda primariamente en profundidad (DFS). Si a partir de algun vértice vamos visitando vértices sucesivamente adyacentes y encontramos alguno repetido querrá decir que hay un ciclo y por lo tanto el test tendrá que devolver falso. En cas contrario tendrá que devolver cierto.

```
Entrada : G(V, A), v ∈ V
Salida : CIERTO si G tiene ciclos, FALSO en caso contrario
algoritmo TAG(G, v)
  inicio
    A ← CIERTO
    P ← ∅
    R ← [v]
    para w ∈ V
          estado[w] ← 0
    finpara
    estado[v] ← 1
    apilar(P, v)
    mientras P ≠ ∅ ∧ A
                w ← cima(P)
                si w es adyacente a u
                   si estat[u] = 0
                      entonces apilar(P, u)
                               estado[u] ← 1
                               añadir(R, u)
                            sino A ← FALSO
                   finsi
             sino desapilar(P)
    finsi
  finmientras
  retorno (A)
fin
```

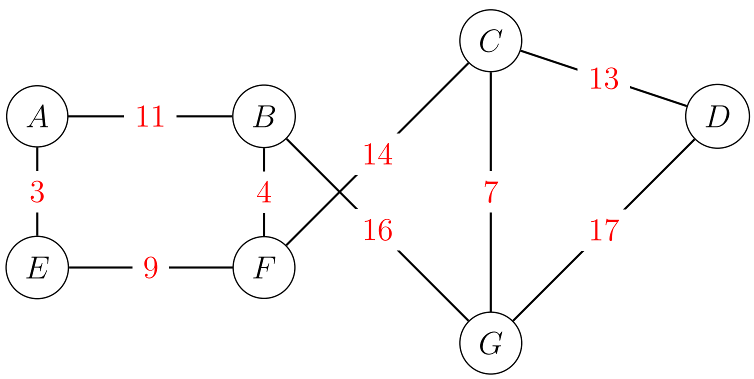
b) En un bosque no hace falta comprobar la aciclicidad porqué por definición un bosque es un grafo acíclico.

c) El número de aristas tiene que ser $|A| = n - 1$, o sea, tiene que ser un árbol (grafo conexo acíclico). Si eliminamos una arista dejará de ser conexo y si añadimos una provocará un ciclo.

---

3. (Valoración de un 15+10=25 %)

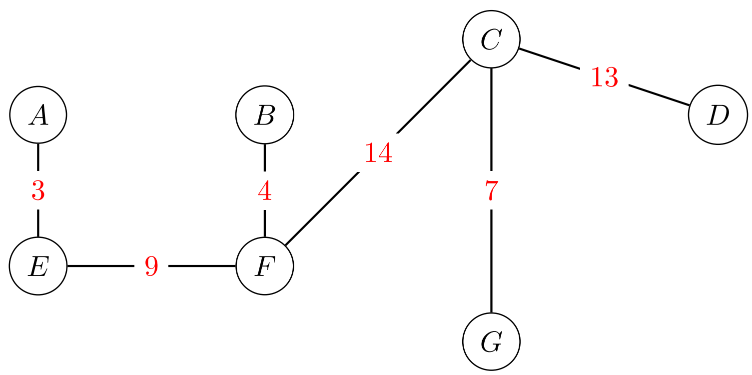
Utilizar el algoritmo de Prim para calcular un árbol generador minimal del siguiente grafo:



Suponemos que ja sabeis que aplicando el algoritmo de Kruskal habriamos obtenido si no el mismo árbol un árbol con el mismo peso, pero ahora lo que queremos es que digais cuàl es la principal diferencia entre los dos algoritmos. Podeis utilizar el algoritmo de Kruskal para comprobar la primera afirmación y para detectar la diferencia.

Solución:

Aplicando el algoritmo de Prim, se obtiene el siguiente árbol generador minimal:



En este grafo el árbol generador minimal es único y, por lo tanto, el algoritmo de Kruskal encuentra exactamente el mismo árbol. La principal diferencia entre los dos algoritmos es el orden en que incorporan las aristas para construir el árbol. El algoritmo de Prim hace crecer un solo árbol en pasos sucesivos, en cada paso añadimos la arista de peso mínimo que conecta un vértice del árbol con uno de fuera. En nuestro grafo, si emepezamos por el vértice A, las aristas se incorporan en este orden: $\{A, E\}$, $\{E, F\}$, $\{B, F\}$, $\{C, F\}$, $\{C, G\}$, $\{C, D\}$ con pesos $3, 9, 4, 14, 7, 13$. En cambio, el algoritmo de Kruskal en cada etapa del proceso añade una arista que no forme ciclo con las escojidas anteriormente y entre las posibles escoje la de peso mínimo, haste el final no necesariamente quedan conectados todos los vértices. En nuestro grafo, las aristas se incorporan en este orden: $\{A, E\}$, $\{B, F\}$, $\{C, G\}$, $\{E, F\}$, $\{C, D\}$, $\{C, F\}$ con pesos $3, 4, 7, 9, 13, 14$.

---

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)

   Decid si son ciertas o falsas la siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:

   a) Sea A un problema que pertenece a P entonces A y SAT son polinómicamente equivalentes.

   b) TSP es P-Difícil y NP-Difícil.

   c) Sea A un problema NP-Completo. Si A puede reducirse a B entonces $\mathsf{B} \in NP$.

   d) La función de reducción de SAT a un problema EXP existe pero esta tiene un coste exponencial.

Solución:

a) Falsa. Si P es diferente de NP, entonces la afirmación es falsa, ya que podríamos hacer la reducción de $\mathsf{A} \leq_p \mathsf{SAT}$ pero no podríamos hacer la reducción $\mathsf{SAT}\leq_p\mathsf{A}$.

b) Cierta. Todo problema NP es P-Difícil. También sabemos que el problema TSP es NP-Completo y por lo tanto, también NP-Difícil.

c) Falsa. De hecho el problema B puede ser un problema NP-Difícil y por lo tanto, la reducción es posible y B no ser NP. Podría ser EXP.

d) Falsa. Tal y como de ha mencionado antes la reducción de $\mathsf{SAT} \leq_p \mathsf{B}$ puede existir siendo B un problema NP-Difícil y EXP, por definición de p-reducción el coste de la función es polinómico.

Final 3

1. (Valoración de un 7.5+7.5+10=25 %)

   Un edificio tiene 5 pisos que queremos pintar y disponemos de 10 colores diferentes. Utilizando las técnicas de las funciones, responder de forma justificada a las siguientes preguntas:

   a) ¿De cuántas maneras diferentes podemos pintar el edificio?

   b) ¿De cuántas maneras diferentes podemos pintar el edificio de manera que todos los pisos tengan colores diferentes?

   c) Si dos pisos que estan de lado no pueden pintarse con el mismo color, ¿de cuántas maneras diferentes podemos pintar el edificio?

Solución:

a) Hemos de calcular el número de funciones del conjunto $\mathbb{N}_5$ en el conjunto de 10 colores, $VR(10, 5) = 10^5 = 100000$.

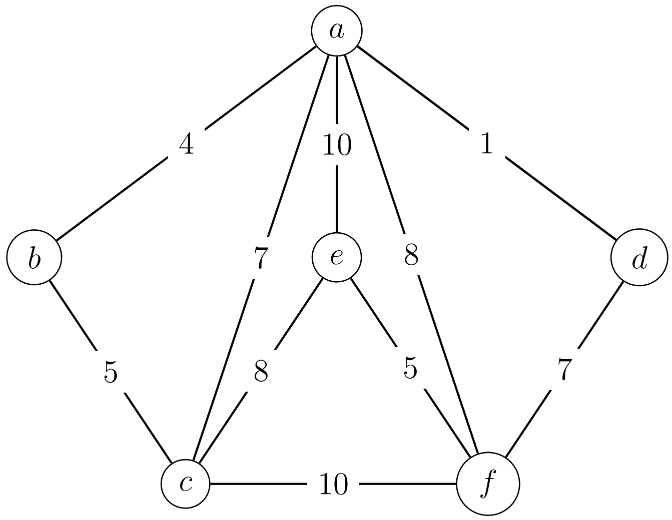
b) Hemos de calcular el número de funcions inyectivas del conjunto $\mathbb{N}_5$ en el conjunto de 10 colores, $V(10, 5) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

c) En este caso, podemos hacer el siguiente razonamiento: el primer piso lo podemos pintar de 10 colores. Una vez pintado el primer piso, el segundo lo podemos pintar con 9 colores diferentes. El tercer piso no puede coincidir con el segundo pero si con el primero. Por lo tanto, se puede pintar con 9 colores. De la misma manera el quarto y el quinto se pueden pintar con 9 colores. Resumiendo, el edificio se puede pintar de $10 \cdot 9^4 = 65610$ maneras.

---

2. (Valoración de un 7.5+7.5+10=25 %)

   Sea el grafo



a) ¿Cumple el grafo la desigualdad triangular? ¿Qué complejidad tiene el algoritmo que comprueba si un grafo cumple la desigualdad triangular?

b) Determina si el grafo es bipartito y justifica la respuesta con una o varias propiedades de los grafos.

c) Demuestra que el grafo es 2-conexo.

Solución:

a) El grafo cumple la desigualdad triangular por cada tripleta de vértices $u, v, x, w(u, v) \leq w(u, x) + w(x, v)$. La complejidad del algoritmo es $\binom{n}{3}$, por lo tanto la complejidad sería polinómico. Para obtener todas la tripletas deberíamos tener 3 bucles anidados.

b) El grafo no puede ser bipartito ya que el grado del vértice a es $n - 1$.

c) Recordamos que un grafo $G = (V, A)$ es 2-conexo si por cada par de vértices u y v de G está conectado por un mínimo de dos caminos diferentes, dónde los únicos vértices en común son los extremos u y v. El grafo cumple la propiedad:

$a-b$ $a-c-b$
$c-b$ $c-a-b$
$a-e$ $a-c-e$
$a-f$ $a-d-f$
$a-d$ $a-f-d$
$a-c-$ $a-b-c$
$b-a-d$ $b-c-f-d$
$b-c-e$ $b-a-e$
$b-c-f$ $b-a-f$
$c-f-d$ $c-a-d$
$c-e$ $c-a-e$
$c-f$ $c-e-f$
$d-a-e$ $d-f-e$
$d-f$ $d-a-f$
$e-f$ $e-a-f$

---

3. (Valoración de un 10+15=25 %)

   Imaginar un juego que consiste en pasar un líquido entre 3 recipientes de diferentes capacidades (por ejemplo 8, 5 y 3 litros respectivamente). Nunca perdemos líquido, toda operación entre dos recipientes acaba cuando uno de ellos queda vacío o el otro lleno. Si suponemos una situación inicial determinada (por ejemplo el recipiente de 8 litros lleno y los otros dos vacíos) se puede modelizar el juego con un grafo en que los vértices representan los diferentes estados posibles ((8,0,0) seria el estado inicial) y las aristas representan las transiciones posibles entre estados (producidos por el paso de líquido de un recipiente a otro: por ejemplo si a partir del estado inicial (8,0,0) pasamos líquido del primer al segundo recipiente iriamos al estado (3,5,0) pero si lo pasamos al tercer recipiente iriamos al estado (5,0,3)).

a) ¿Qué algoritmo sobre grafos aplicaríais para calcular el número mínimo de operaciones que habrá que hacer para pasar de un estado inicial a un estado final? Razonar la respuesta.

b) Calcular el número mínimo de operaciones que habría que hacer para pasar del estado (8,0,0) al estado (4,4,0) en el ejemplo del enunciado. Mostrar la secuencia de transiciones que os lleva a esta situación.

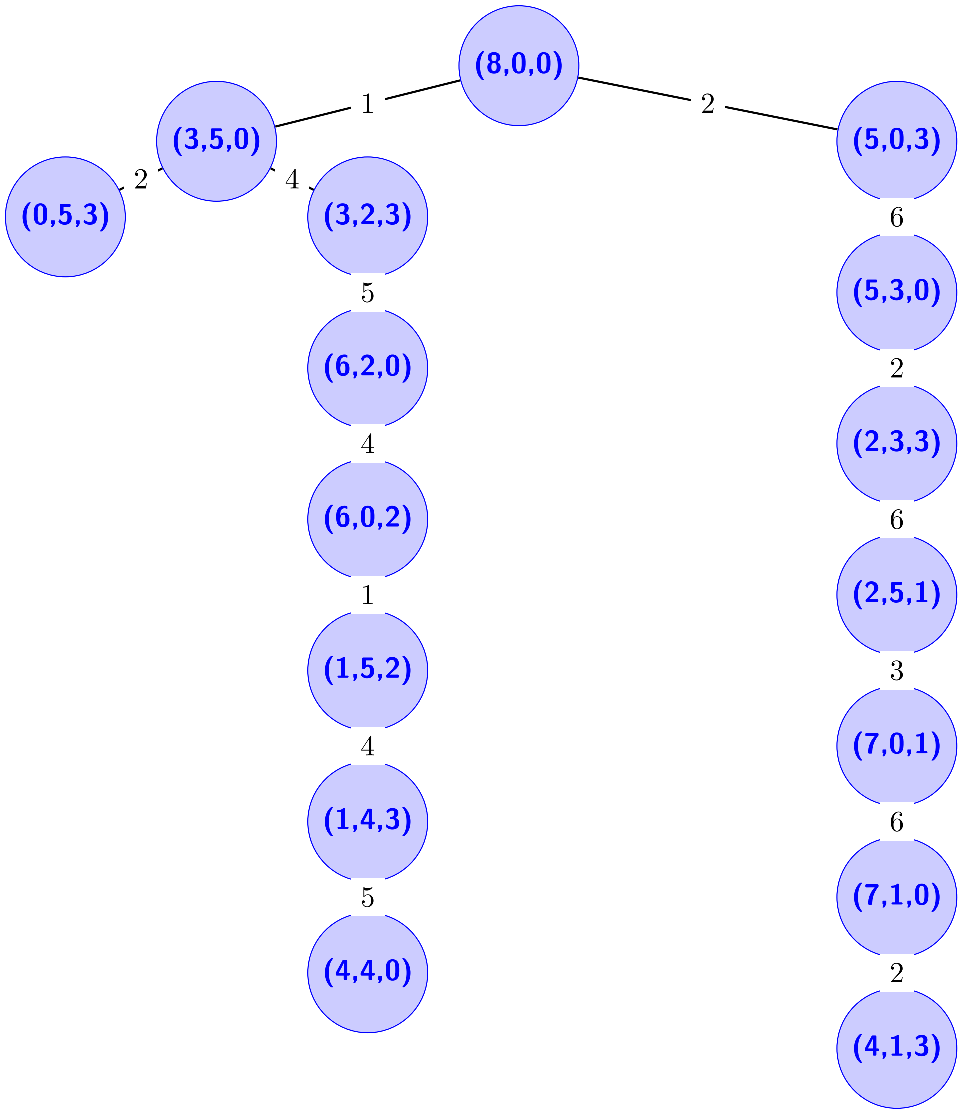
Solución:

a) Se puede aplicar el algoritmo de búsqueda primariamente en ancho (BFS). Se trata de salir del estado inicial, visitar en primer lugar todos los estados adyacentes a él (estados a los que se puede ircon una sola operación) y si alguno de estos estados es el estado final ya hemos acabado y la respuesta es 1. En caso contrario, tenemos que seguir la búsqueda a lo ancho visitando los estados a los cuales se llega despues de dos operaciones a partir del estado inicial. Si aparece el estado final la respuesta será 2. Y así sucesivamente hasta llegar al estado final o haber recorrido todos los estados sin encontrarlo (no está asegurado que sea posible pasar del estado inicial al estado final). De hecho, no hace falta construir el grafo entero antes de hacer el recorrido sino que se puede ir construyendo a medida que se hace el recorrido a lo ancho (podemos parar cuando encontremos el estado final o bien cuando no aparezcan estados nuevos sin que haya salido).

b) En nuestro ejemplo (3 recipientes de capacidades de 8, 5 y 3 litros respectivamente) hay 6 operaciones posibles que numeraremos de la siguiente manera (y apareceran como etiqueta de la arista):

1 (paso de líquido del recipiente de 8 litros al de 5 litros)
2 (paso de líquido del recipiente de 8 litros al de 3 litros)
3 (paso de líquido del recipiente de 5 litros al de 8 litros)
4 (paso de líquido del recipiente de 5 litros al de 3 litros)
5 (paso de líquido del recipiente de 3 litros al de 8 litros)
6 (paso de líquido del recipiente de 3 litros al de 5 litros)

y el grafo (de hecho es un árbol ya que eliminamos los ciclos) que hay que construir es el siguiente:



y la respuesta será que necesitamos un mínimo de 7 operaciones para pasar del estado (8,0,0) al estado (4,4,0), que seran en orden: $1, 4, 5, 4, 1, 4, 5$.

---

4. (Valoración de un 6.25+6.25+6.25+6.25=25 %)

Decid si son ciertas o falsa las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:

a) Si demostramos que PARES y SAT son polinómicamente equivalentes entonces P es igual a NP.

b) Sea B un problema NP-Difícil, la reducción PARES a B sólo existe si P es igual a NP.

c) Sea A un problema tal que, MOCHILA $\leq_p$ A. Entonces A es intratable.

d) Sea G un grafo bipartito, entonces el problema del recubrimiento de vértices pertenece a P.

Solución:

a) Cierta. Si demostramos que un problema NP-Completo puede reducirse a un problema P estamos demostrando que $NP = P$.

b) Falsa. Per definición todo problema P puede reducirse a un problema NP o EXP.

c) Cierta. MOCHILA es NP-Completo y por lo tanto, de momento sólo tenemos algoritmos que lo resuelven en tiempo exponencial. Por lo tanto, si MOCHILA $\leq_p$ A entonces A como mínimo tiene que ser NP y por lo tanto, también intratable.

d) Cierta. Si el grafo $G = (V, A)$ es bipartito y $V = V_1 \cup V_2$, un posible recubrimiento de vértices sería V_1 o V_2.
