Solución PEC 1

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

1. (4 puntos) Demostrad por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $7^n - 1$ es divisible por 6.

Solución:

Aplicamos el algoritmo del principio de inducción tal como se explica en el apartado 2.4, página15, del módulo impreso, "Los números".

Para $n = 1$, tenemos $7^1 - 1 = 6$ que es divisible por 6.

Supongamos cierta la hipótesis para n, es decir, supongamos cierto que $7^n - 1$ es divisible por 6 y probemos que la hipótesis es cierta para $n+1$, es decir, queremos probar que $7^{n+1} - 1$ es divisible por 6.

Calculando obtenemos:

$7^{n+1} - 1 = 7^n.7 - 1 = 7^n \cdot (6+1) - 1 = 7^n \cdot 6 + 7^n - 1$. Por hipótesis de inducción $7^n - 1$ es divisible por 6, y $7^n \cdot 6$ también lo es por estar multiplicado por 6.

Así, podemos concluir que $7^{n+1} - 1$ es divisible por 6, tal como queríamos demostrar.

2. Responded a los siguientes apartados:

a) (2 puntos) Hallad el valor real de a para que el número complejo $\dfrac{6-2i}{1+ai}$ sea real.

b) (2 puntos) Hallad las raíces quintas de $4-4i$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Tal como se dice en el apartado 3.2, página 18, del material impreso, "Lós números", para que el complejo sea real es necesario que la parte imaginaria sea 0. Vamos a ver cuál es la parte imaginaria de este número complejo. Para ello efectuamos el cociente para obtener el número de la forma $p + qi$:

NOTA: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador siguiendo las instrucciones del apartado 3.3.3, página 24, del módulo escrito.

$$\frac{6-2i}{1+ai}=$$

$$=\frac{(6-2i)\cdot(1-ai)}{(1+ai)\cdot(1-ai)}=\frac{6-6ai-2i+2ai^2}{1^2-a^2i^2}=\frac{6-6ai-2i-2a}{1+a^2}=$$
$$=\frac{(6-2a)-(6a+2)i}{1+a^2}=\frac{(6-2a)}{1+a^2}+\frac{-(6a+2)}{1+a^2}i$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $p+qi$ imponemos que la parte imaginaria es 0 (para que el número sea real):

$$\frac{-(6a+2)}{1+a^2}=0 \Leftrightarrow 6a+2=0 \Leftrightarrow 6a=-2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

Por tanto, la condición es:

$$\boxed{a=-\frac{1}{3}}$$

b) Para resolver este ejercicio seguiremos las directrices que se exponen en el apartado 3.6.1, página 43, del material impreso.

Primero de todo, escribimos el complejo $4-4i$ en forma polar:

$$m=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$\alpha=arctg\frac{-4}{4}=arctg(-1)=315^{\circ}$$

Observemos que no sumamos ni restamos ningún ángulo dado que la parte real del complejo es positiva y la parte imaginaria es negativa (apartado 3.4.1 del módulo 1, “Los números”, del material impreso).

Tenemos, por tanto, que $z=4-4i=\sqrt{32}_{315^{\circ}}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{\sqrt{32}_{315}}=\left(\sqrt[10]{32}\right)_{\frac{315+360k}{5}}$$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[10]{32}=\sqrt{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta=\dfrac{315+360k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 63^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 63^o + 72^o = 135^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 63^o + 144^o = 207^o$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 63^o + 216^o = 279^o$
- Si k=4, tenemos que $\beta_3 = 63^o + 288^o = 351^o$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $z = 4 - 4i$, en forma polar, son:

$\sqrt{2}_{63^o}, \sqrt{2}_{135^o}, \sqrt{2}_{207^o}, \sqrt{2}_{279^o}, \sqrt{2}_{351^o}$

Una vez tengamos las soluciones en forma polar, las debemos pasar a forma binómica y para ello lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4.2, página 33, del material impreso (“De la forma polar a la binómica”).

En forma binómica, las soluciones son:

$$\boxed{\sqrt{2}_{63^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 63^o + i\,sen 63^o) = \sqrt{2}\cdot(0{,}454 + 0{,}891\cdot i)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{135^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 135^o + i\,sen 135^o) = \sqrt{2}\cdot(-0{,}707 + 0{,}707\cdot i)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{207^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 207^o + i\,sen 207^o) = \sqrt{2}\cdot(-0{,}891 - 0{,}454\cdot i)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{279^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 279^o + i\,sen 279^o) = \sqrt{2}\cdot(0{,}156 - 0{,}988\cdot i)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{351^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 351^o + i\,sen 351^o) = \sqrt{2}\cdot(0{,}988 - 0{,}156\cdot i)}$$