Universitat Oberta de Catalunya

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

ASIGNATURA: Grafos y Complejidad
Primera PEC. Módulos 1, 2 y 3.
Semestre de primavera de 2012 (del 14 de marzo al 11 de abril).

Por favor, seguid las instrucciones siguientes:

- Enviad la solución en un fichero con el nombre:
  PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf
- Debe enviarse al apartado "Entrega y registro de EC" del aula.
- Enumerad las respuestas de acuerdo con la numeración de las preguntas y los apartados.
- Las respuestas a los problemas propuestos no deben limitarse a dar un resultado. Añadid, también, una explicación que justifique la respuesta.

1. (Valoración de un 20 %)

   a) Queremos pintar las cinco habitaciones de una casa. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo si disponemos de siete colores diferentes? ¿Y si queremos que cada habitación tenga un color diferente? Relacionad cada situación con el tema de funciones.

   b) El siguiente algoritmo realiza un cambio de base de un número entero no negativo n expresado en base 10 a una base b ($b \leq 10$).

```
función CambioBase(n, b)
  inicio
    m ← 0
    pot ← 1
    mientras n > 0
              m ← (n mod b) * pot + m
              n ← n div b
              pot ← 10 * pot
    finmientras
    retorno m
  fin
```

1) Calcular el resultado de las siguientes llamadas: *CambioBase*(13,2), *CambioBase*(13,3), *CambioBase*(13,4), *CambioBase*(100,2).
2) Si fijamos la base b, calcular el número de operaciones elementales que efectúa el algoritmo.
3) Calcular la complejidad del algoritmo.

Solución:

a) Tenemos que calcular cuántas funciones hay de $\mathbb{N}_5$ en el conjunto X de colores, es decir, $VR(7,5) = 7^5 = 16807$ posibilidades. En caso que queramos colores diferentes, las funciones tienen que ser inyectivas, de forma que tenemos $V(7,5) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ posibilidades.

b) 1) Los resultados son: 1101, 111, 31, 1100100.

2) Las líneas 3, 4 y 10 efectúan 1 operación elemental cada una. Las líneas 5, 6, 7 y 8 efectúan 1, 4, 2 y 2 operaciones elementales cada una multiplicado por el número de veces que se ejecuta el bucle **<u>mientras</u>**.
El número de iteraciones es igual al número de veces k que n puede dividirse consecutivamente por b. Es decir, $b^k > n$ y $k = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$.
Por tanto, el número total de operaciones elementales será, $9 \cdot \lfloor \log_b n \rfloor + 12$.

3) De acuerdo con las propiedades de la complejidad, este algoritmo tendrá una complejidad $O(\log_b n) = O(\log n)$.

2. (Valoración de un 20 %)

En almacenamiento distribuido como el que utiliza Google, la información se replica en varios servidores para facilitar la búsqueda y la recuperación de información. Podemos imaginar un sistema de almacenamiento distribuido como un matriz cuadrada M de orden $n \times n$ ($n \geq 1$). Cada fila representa un parte de la información y cada columna el servidor que la almacena.

Definimos un grafo G de la siguiente forma: si $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ representan las filas (información) de M y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ representan las columnas (servidores) de M, definimos el grafo $G(R \cup C, A)$ donde el vértice r_i es adyacente al vértice c_j si la posición (i, j) de la matriz M es distinta de 0 (la información r_i se almacena en el servidor c_j).

a) Dibujar el grafo correspondiente a la matriz de almacenamiento distribuido,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si $M_{n\times n}$ es una matriz diagonal, ¿cómo sería el grafo G? ¿A qué modelo de almacenamiento se refiere?

c) Si M tiene en cada fila $\frac{n}{2}$ elementos distintos de 0, calcular el orden y la medida del grafo G. Interpretarlo en términos de almacenamiento distribuido.

d) ¿A qué corresponde un vértice aislado del grafo G en el sistema de almacenamiento? ¿Qué condiciones debe cumplir M para que el grafo G no tenga vértices aislados?

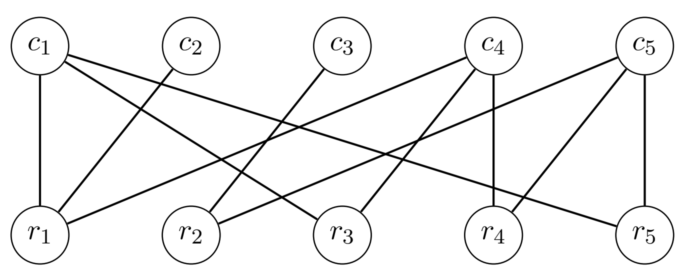
e) ¿Qué condiciones debe cumplir M para que el grafo G sea regular? Poner un ejemplo de matriz cuyo grafo asociado sea regular. ¿Qué ventaja puede tener esto en el sistema de almacenamiento distribuido?

f) ¿Qué matriz correspondería al grafo bipartito completo $K_{n,n}$?

g) ¿Qué condiciones debe cumplir M para que el grafo G sea conexo?

Solución:

a) La representación gráfica del grafo correspondiente a M será,



b) El grafo G sería la unión de n copias del grafo trayecto T_2. Cada información se almacena en un único servidor.

c) El orden corresponde al número de informaciones más el número de servidores. El orden sería $2n$. La medida correspondería al número total de unidades de información almacenadas. Si cada fila contiene $\frac{n}{2}$ elementos diferentes de 0, M contendrá $\frac{n^2}{2}$ elementos distintos de 0 y la medida de G será $\frac{n^2}{2}$.

d) Un vértice aislado corresponde a un vértice de grado 0. Si el vértice está en R significa que la información no se ha almacenado. Si el vértice está en C significa que el servidor no contiene información. Para que no haya vértices aislados, debe haber al menos un elemento distinto de 0 en cada fila y en cada columna de M.

e) Para que sea regular, el número de elementos distintos de 0 en cada fila y en cada columna debe ser el mismo. Por ejemplo,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el sistema de almacenamiento distribuido cada servidor contiene la misma cantidad de información y cada información está contenida en el mismo número de servidores.

f) M sería la matriz con todos los elementos distintos de 0.

g) Observemos que si G no es conexo entonces cada componente conexa de G corresponderá a una submatriz de M. Por tanto, G será conexo si M, intercambiando filas o columnas, no se puede representar en la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

.

3. (Valoración de un 20 %)

a) Si un grafo G es autocomplementario, ¿qué condición tiene que cumplir el orden de G?

b) Encontrad todos los grafos autocomplementarios de orden 4.

c) ¿Puede un grafo bipartito y conexo ser autocomplementario?

d) En un juego se empieza dibujando n puntos. Cada jugador, en su turno, une dos de los puntos existentes con una línea de cualquier forma, y añade un punto en medio de esta línea. Hay dos restricciones: un punto del que ya salen tres líneas ya no se puede utilizar más, y las líneas no pueden cruzarse. El jugador que en su turno no pueda dibujar una línea siguiendo estas restricciones pierde la partida. Demostrad que el número de jugadas que puede tener una partida siempre es inferior a $3n$.

Solución:

a) El grafo completo de orden n tiene $\binom{n}{2}$ aristas. Un grafo G de orden n que sea autocomplementario tiene que tener la mitad, puesto que, en particular, su complementario tiene que tener este mismo número, y la unión de aristas de G y G^c es el total de aristas del grafo completo de orden n. Por lo tanto, G tendrá $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{1}{4}n(n-1)$ aristas, por lo que $n(n-1)$ debe ser divisible por 4. Como sólo uno, o n o $n-1$, es par, el que lo sea debe ser divisible por 4. Por lo tanto, n debe ser un múltiplo de 4, o un múltiplo de 4 más 1 ($n = 1, 4, 5, 8, 9, ...$).

b) Por lo que hemos observado en el apartado anterior, un grafo autocomplementario de orden 4 tiene que tener 3 aristas. Por lo tanto, debe ser uno de los siguientes: $E_4, C_3 \cup N_1$ o T_4. Los dos primeros son complementarios el uno del otro, mientras que T_4 es el único autocomplementario.

c) Si el grafo es bipartito, existe una partición $V = V_1 \cup V_2$ de forma que no puede haber ninguna arista entre dos vértices de un mismo V_i. Si algún V_i consta de tres vértices o más, el grafo complementario contiene un triángulo (el formado por tres cualesquiera de estos vértices) y, por lo tanto, no es bipartito. Si nos restringimos a grafos que tienen uno o dos vértices en cada componente, sólo tenemos un grafo conexo en el caso de los trayectos T_2, T_3 y T_4. De estos, sólo T_4 es autocomplementario.

d) Observemos que estamos construyendo un grafo. En cada jugada unimos dos vértices u y v, y creamos un vértice w sobre la línea, con lo cual hemos añadido un vértice, w, y dos aristas, (u, w) y (w, v). Si llamamos v al número de vértices, a al de aristas y j al de jugadas que se han hecho, tenemos que $v = n + j$ y $a = 2j$. Por otro lado, puesto que de cada vértice no pueden salir más de tres aristas, tenemos que $3v \geq 2a$. Sustituyendo en esta expresión las dos igualdades anteriores, obtenemos $3(n + j) \geq 2(2j)$, de donde $3n \geq j$.

Para ver que no se logra la igualdad, hay que observar que $3n = j$ implica $3v = 2a$, de forma que tendríamos un grafo 3-regular. Esto no es posible porque el vértice creado en la última jugada tiene necesariamente grado 2. En conclusión, el número máximo de jugadas posibles es $3n - 1$.

El hecho de pedir que las aristas no se crucen (es equivalente a que el grafo sea planar) es una restricción que puede hacer que este número máximo no se logre. Si estáis interesados, en la red podeis encontrar más información sobre este juego, que se denomina *Sprouts*.

4. (Valoración de un 20 %)

Consideremos las siguientes secuencias

I 3,3,4,1,7,2,4

II 2,4,3,3,1,3,2

III 1,4,5,2,3,3,3

IV 4,3,1,3,5,2,2

a) Demostrad que algunas de estas secuencias no son gráficas sin usar el algoritmo de Havel-Hakimi.

b) Determinad cuáles de estas secuencias son gráficas usando el algoritmo de Havel-Hakimi.

c) Dibujad dos grafos diferentes que tengan como secuencia de grados una misma secuencia de las del enunciado, y demostrad que no son isomorfos.

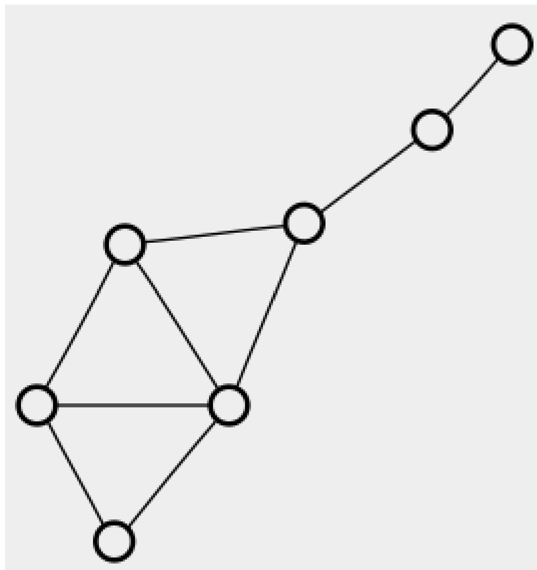
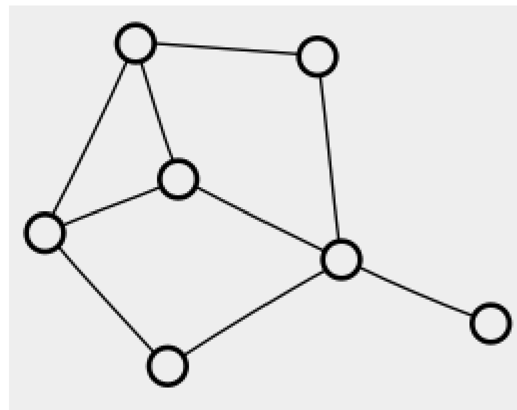
d) Calculad el orden, la medida y el diámetro de los grafos del apartado anterior.

Solución:

a) La primera no puede serlo porque un vértice tiene grado 7, cosa imposible dado que sólo hay 7 vértices. La tercera no lo puede ser porque su suma, que, por la fórmula de los grados, equivale al doble de la medida del hipotético grafo, es impar.

b) Podemos comprobar que la segunda y la cuarta secuencias son gràficas. Por ejemplo, aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi a la segunda:
4,3,3,3,2,2,1
2,2,2,1,2,1, reordenando,
2,2,2,2,1,1
1,1,2,1,1, reordenando,
2,1,1,1,1
0,0,1,1, reordenando,
1,1,0,0
0,0,0,0

c) Tomando la secuencia II, dos posibilidades serían:

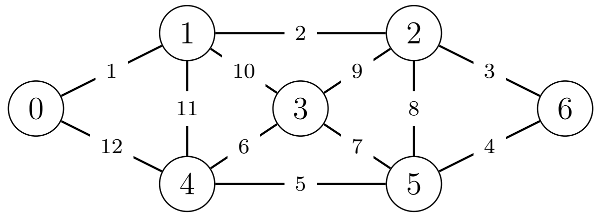
No son isomorfos porque en el primero los vértices de grado 4 y 1 no son adyacentes, y en el segundo sí. También podríamos argumentar que tienen diámetro distinto.

d) A partir de la secuencia de grados ya podemos saber que el orden es 7 y la medida 9 (la mitad de la suma de los grados). Los diámetros son 4 y 3, resp.

5. (Valoración de un 20 %)

Una red social (Facebook, Twitter, Tuenti,...) se suele representar com un grafo en el que los vértices son los usuarios de la red y dos vértices son adyacentes si los usuarios comparten comentarios. Por ejemplo, la red Tuenti tiene 9.769.102 usuarios (vértices) y 587.415.363 enlaces (aristas). En una red es importante conocer propiedades sobre su estructura tales como distancia mínima, distancia máxima, densidad,...

Puesto que la red tiene muchos vértices, a menudo conviene estudiarla a partir de conjuntos de nodos interrelacionados entre sí (subgrafos completos máximos) que llamaremos *clústers*. Supongamos una red social formada por 7 clústers, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El siguiente gráfico representa la distancia mínima (número de usuarios intermedios) entre cada par de clústers:



a) Calcular la densidad de la red (la densidad se define como el cociente $d = \frac{\text{Número de aristas de la red}}{\text{Número total de aristas posibles}}$).

b) Calcular, utilizando el algoritmo apropiado, la distancia entre el clúster 0 y el clúster 5, y el camino más corto que une estos dos clústers.

c) ¿Cuál es el clúster más céntrico? (el clúster más céntrico es aquel cuya distancia promedio a los otros clústers es mínima).

d) ¿Cuáles son los dos clústers más alejados entre sí y a qué distancia están?

Solución:

a) El número máximo de aristas corresponde al número de aristas del grafo completo de 7 vértices, $\frac{n^2-n}{2} = 21$ aristas. Por tanto la densidad será $d = \frac{12}{21} = 0{,}57$.

b) Aplicando el algoritmo de Dijkstra con inicio en el clúster 0, obtenemos:

0	1	2	3	4	5	6
$(0,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$	$(12,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(\infty,0)$	$(\infty,0)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(11,2)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(3,1)$	$(11,1)$	$(12,0)$	$(10,6)$	$(6,2)$

La distancia mínima es 10 pasando por $0 \to 1 \to 2 \to 6 \to 5$.

c) Calculamos primero la distancia entre todos los clústers con el algoritmo de Floyd:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 9 & \infty & 8 & 3 \\ \infty & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & \infty \\ 12 & 11 & \infty & 6 & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 5 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz final será:

$$d^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 11 & 12 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 11 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & 12 & 7 & 3 \\ 11 & 10 & 9 & 0 & 6 & 7 & 11 \\ 12 & 11 & 12 & 6 & 0 & 5 & 9 \\ 10 & 9 & 7 & 7 & 5 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 11 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriz nos da la distancia de cada clúster a todos los demás clústers. La distancia promedio será la suma de cada fila (o columna) dividido por 7:

0	1	2	3	4	5	6
6.14	5.43	5.14	7.71	7.86	6	5.43

Por tanto, el más céntrico será el número 2.

d) A partir del algoritmo de Floyd comprobamos que los dos clústers más alejados son el clúster 2 y el 4, o el 0 y el 4 que están a distancia 12.