Universitat Oberta de Catalunya

ASSIGNATURA: ÀLGEBRA

PAC Núm.: **2**

Data de proposta: 23/03/2012 **Data d´entrega:** $\leq$ 02/04/2012

Observacions:

- Respon sobre aquest mateix enunciat sense eliminar el text original
- **Recorda que és necessari que justifiquis les respostes**
- El nom del fitxer ha de ser Cognom1_Cognom2_Nom.PDF
- **A la solució d´aquesta PAC NO es pot usar la Wiris si no és per a comprovar els resultats trobats realitzant els exercicis prèviament per un mateix** (és a dir, cal respondre els exercicis fent-los per un mateix i comprovar els resultats amb la Wiris i, en tal cas, s´hauran d´incloure les corresponents captures de pantalla del *software*).
- A l´adreça d´Internet http://www.dopdf.com/ et pots descarregar un conversor gratuït a format pdf. Un altre conversor gratuït, en aquest cas online i per a documents amb format Word, el pots trobar a http://www.expresspdf.com/
- **Justifica tots els passos donats a la resolució de cada exercici.**
- **Recorda que el límit d´entrega de la PAC són les 23.59h. del dia 02/04/2012**

Valoració:

- **Tots els problemes tenen el mateix valor.**
- **Aquesta part de la PAC representa el 75% de la nota final de la PAC i el 25% restant s'obté realitzant les activitats Moodle associades de l'etiqueta PAC2 que trobareu a Qüestionaris.**

RESOLUCIÓ

Problema 1 (2.5 punts / 0.25 cada apartat).
Primer de tot definim les següents matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} y \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Digues quines de les següents operacions estan ben definides i per tant es poden fer. En cas que ho estiguin, fes l'operació i calcula'n el resultat, en cas que no, justifica el perquè.

a) $A \cdot b$

b) $b \cdot A$
c) $b \cdot c$
d) $c \cdot b$
e) $|A|$
f) rang(A)
g) A·B^{-1}
h) A^{-1}·B
i) $B^{-1} \cdot B^2 \cdot B^{-1}$
j) $B^{-1} \cdot C^{-1} - (C \cdot B)^{-1}$

Resolució: Per resoldre aquest exercici hem d'aplicar les propietats de la suma i del producte de matrius estudiat en el punt 3.3 del mòdul 2 i també el càlcul de la matriu inversa del punt 4.4.

a) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$A \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-3 \\ 7x-2 \end{pmatrix}$$

b) No es pot fer l'operació perquè les dimensions no són compatibles.
c) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$b \cdot c = \begin{pmatrix} y \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4y & 2y \\ 0 & -28 & 14 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$c \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = -30$$

e) No es pot fer l'operació, ja que els determinants només es poden calcular sobre matrius quadrades.
f) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$rang(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix} = 2$$

ja que podem trobar un menor 2x2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

g) Sí que es pot fer l'operació, i el resultat és:

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 0 & x-4 & 2 \end{pmatrix}$$

ja que la inversa de B és: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

h) No es pot fer l'operació perquè no es pot calcular la inversa d'A (només es pot calcular la inversa de matrius quadrades).

i) Sí que es pot fer l'operació: es poden trobar les inverses de les matrius i les dimensions per multiplicar concorden. Podríem realitzar els càlculs i veure que el resultat és la identitat. Però també podem raonar:

$$B^{-1}\cdot B^{2}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B\cdot B\cdot B^{-1}=(B^{-1}\cdot B)\cdot(B\cdot B^{-1})=I\cdot I=I$$

j) Sí que es pot fer l'operació: es poden trobar les inverses de les matrius i les dimensions per multiplicar concorden. Podríem realitzar els càlculs i veure que el resultat és zero. Però també podem raonar:
Per la definició d'inversa:

$$(C\cdot B)\cdot(C\cdot B)^{-1}=I$$

On I és la Identitat. Usant la propietat associativa:

$$C\cdot B\cdot(C\cdot B)^{-1}=I$$

Ara multipliquem els dos costats de la igualtat per C^{-1} per l'esquerra (recordem que la multiplicació de matrius no és commutativa i no és el mateix multiplicar per l'esquerra que per la dreta):

$$B\cdot(C\cdot B)^{-1}=C^{-1}\cdot I=C^{-1}$$

Ara multipliquem els dos costats de la igualtat per B^{-1} per l'esquerra:

$$(C\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot C^{-1}$$

Així doncs tindrem que:

$$B^{-1}\cdot C^{-1}-(C\cdot B)^{-1}=0$$

Problema 2 (2.5 punts / 1.25 cada apartat).
Siguin E i F els subespais vectorials de R^6 generats pels següents vectors:
E={ (1, 2, 0, -1, 0, 0), (2, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -5, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 0) }
F={ (0, 1, 0, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 0, 1)}

a) Quina dimensió tenen E i F? Troba una base de cadascun dels dos.
b) Generen E i F el mateix subespai de R^6? Raona la teva resposta.

Resolució:

a) Tal com podeu trobar en la pàg 36 del mòdul 2,

Sigui W = □ v1, …, vk □ el subespai generat per aquests vectors. Donada la matriu A que s'obté disposant els vectors en files o columnes, es verifica que

dimW = rg(A)

Per tant, anem a veure el rang dels vectors que defineixen E:

$$rang\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&-5&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=4$$

Ja que podem trobar el menor 4x4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant la dimensió d'E és 4 i una base la poden formar els mateixos vectors amb que està definit { (1, 2, 0, -1, 0, 0), (2, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -5, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 0) }.

Ara anem a veure el rang dels vectors que defineixen F:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Ja que tots els menors 5x5 tenen determinant zero i podem trobar el menor 4x4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant la dimensió d'F també és 4 i una base la poden formar els 4 primers vectors amb que està definit { (0, 1, 0, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0)} ja que contenen el menor anterior.

b) Per comprovar si generen el mateix subespai vectorial, com que hem vist que les dimensions són iguals, n'hi haurà prou amb mirar si un subespai conté l'altre.
Per comprovar això podem mirar si els elements d'una base d'un espai formen part de l'altre espai.
Així mirarem si els elements de la base d'E formen part d'F.

Podríem anar mirant un a un, però si comencem per (0, 0, 0, 1, 1, 0) i plantegem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que ens dóna el sistema d'equacions sense solució:

$$\begin{cases} y=0 \\ x+y+z=0 \\ y+z+t=0 \\ 2x+y=1 \\ 0=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Per tant E i F no generen el mateix subespai de R^6.

Problema 3 (2.5 punts / 1.25 cada apartat).
Sigui W = {(x, y, z, t) | x=y, z=2t } un subespai vectorial de dimensió 2 a R^4 i sigui el vector v = (2, 2, 4, 2).

a. Comproveu que A={ (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)} és una base de W i calculeu les coordenades de v en la base A. Sabem que B={ (1, 1, 4, 2), (-2, -2, 0, 0)} és també una base de W, calculeu ara les coordenades de v en la base B.
b. Calculeu la matriu del canvi de base de A a B i comproveu la coherència del resultat amb l'apartat a).

Resolució: Per resoldre aquest exercici podíeu haver seguit la resolució de l'exercici d'autoavaluació 16 dels materials del mòdul 2.

a) Com que sabem que la dimensió del subespai vectorial és 2, per a comprovar A és una base de W és suficient veure que els vectors de A estan inclosos a W i que són linealment independents.

Veurem que els vectors són de W si verifiquen l'equació que determina els elements de W, així:
(1,1,0,0)=>1=1 i 0=2·0 i per tant (1,1,0,1) és de W
(0,0,2,1)=>0=0 i 2=2·1 i per tant (0,0,2,1) és de W

Per veure que són linealment independents, comprovarem que la matriu formada per aquests dos vectors és de rang 2:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$$

D'aquesta manera tenim que A és una base de W.

Per calcular les coordenades de v en la base A només cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(2, 2, 4, 2)=a(1, 1, 0, 0)+b(0, 0, 2, 1)

i aquest sistema té una única solució amb a=2 i b=2.
Nota: si el sistema no hagués tingut solució, voldria dir que v no pertany a W.

Per calcular les coordenades de v en la base B farem com abans, només cal imposar que v sigui combinació lineal dels vectors de la base, així resoldrem el sistema:

(2, 2, 4, 2)=a(1, 1, 4, 2)+b(-2, -2, 0, 0)

i aquest sistema té una única solució amb a=1 i b=-1/2.

b) Per escriure la matriu de canvi de base de la base A a la base B, posarem els vectors d'A com a combinació lineal dels vectors de la base B, així:

(1, 1, 0, 0)=x(1, 1, 4, 2)+y(-2, -2, 0, 0)

i aquest sistema té una única solució amb x=0 i y=-1/2, (0, -1/2) és el primer vector de la base A escrit en base B. Anàlogament

(0, 0, 2, 1)= x(1, 1, 4, 2)+y(-2, -2, 0, 0)

i aquest sistema té una única solució amb x=1/2 i y=1/4, (1/2, 1/4) és el segon vector de la base A escrit en base B.

Així la corresponent matriu de canvi de base és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

que efectivament, transforma el vector v en base A, el (2, 2) a (1, 1) que és el vector v en la base B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$