Universitat Oberta de Catalunya - 2017-18 tardor

Resolució PAC2

Problema 1 (2 punts): Donats els conjunts de vectors A = {(0, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 1, 0)} i B = {(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 1, 1)} de R^3:

a) Comproveu que A i B són bases de R^3 i calculeu les coordenades del vector v = (2, 1, 0) en les bases A i B, respectivament.

b) Calculeu la matriu del canvi de base de A a B i comproveu la coherència del resultat de l'apartat a).

Solució:

a) Per a comprovar que els conjunts A i B són base només cal comprovar que els 3 vectors de R^3 són linealment independents, ja que tenim tants vectors com dimensió té l'espai. Per això és suficient veure que el determinant de les matrius respectives és diferent de zero (Mod. 2, Sec. 4.5).

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per a trobar les components del vector (2, 2, 0) en cada base només cal resoldre el corresponent sistema d'equacions lineals. En el cas de la base A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=-1, y=0 i z=2, Per tant les coordenades de v en la base A són (-1,0,2).

En el cas de la base B:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=1 i z=1, Per tant les coordenades de v en la base A són (1,1,1).

b) La matriu del canvi de base de A a B és $C = B^{-1} \cdot A$ (Mod. 2, Sec. 4.7), és a dir:

$$\frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprovem també la coherència del resultat de l'apartat anterior:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 punts): Sigui F un subespai generat pels següents vectors de R^4, F=<(1+*a*,1,1,1), (1,1+*a*,1,1), (1,1,1+*a*,1), (1,1,1,1+*a*)>. Determina en funció d'*a* la dimensió del subespai F.

Solució:

Calculem el rang de la matriu amb els vectors generadors (Mod. 2, Sec. 4.5). Per això calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = 4a^3 + a^4$$

Així per *a* diferent de 0 i de -4 el determinant serà no nul i per tant la dimensió de F serà 4.

Per al cas *a*=0 calculem

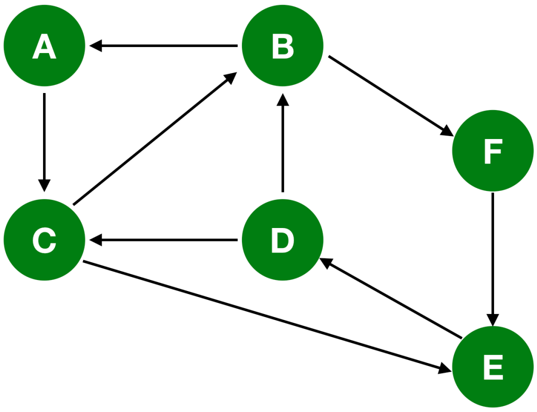
$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$ i per tant la dimensió de F és1.

Per al cas *a*=-4 calculem

$$rang\begin{pmatrix} 1-4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-4 \end{pmatrix} = 3$$ ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

i per tant la dimensió de F és 3.

Problema 3 (2 punts): El graf següent mostra els enllaços directes i dirigits entre sis nodes de distribució de dades:



a) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior.
b) Trobeu, fent ús de la matriu anterior, la matriu que representa els enllaços de fins a dues connexions, és a dir, que compta el total de camins (d'enllaç directe o de fins a dos enllaços indirectes) entre dos nodes qualsevols.
c) Determineu el nombre mínim d'enllaços indirectes que es necessiten per anar del node F al node A fent us de la notació matricial.

Solució:

a) La matriu demanada és (Mod. 2, Ex. 15):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La matriu que representa els enllaços de fins a dos connexions és $N=M+M^2+M^3$.

$$N = M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Per a determinar el nombre mínim d'enllaços indirectes per anar de F fins a A, hem de veure en quin moment, en calcular M^p obtenim un 1 en la 6ena fila (F), 1era columna (A).
Això s'obté quan p=4. Per tant, es necessiten un mínim de 3 enllaços indirectes (visites a altres nodes) per anar de F a A.