Solución PEC3

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

EIMT.UOC.EDU

Universitat Oberta de Catalunya

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ x + y + kz = 1 \\ x + y + z + kt = 2 \\ x + y + z + t = k \end{cases}$$

a) Discutid el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resolved el sistema per a $k = -4$, en caso que tenga solución.

Resolución:

a) Para discutir el sistema utilizaremos el teorema de Rouché-Frobenius. Que podéis encontrar en el apartado 4, página 13, del módulo 3 " Sistemas de Ecuaciones Lineales". Calculamos los rangos de la matriz del sistema (M) y de la matriz ampliada (MA).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango, para hacerlo primero simplificamos restando las columnas.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-k)^3$$

Por lo tanto tenemos que el determinante de la matriz M solo se anula cuando $k = 1$.

- Para $k \neq 1$ rango(M)= 4
- Para $k = 1$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Podemos encontrar un menor de orden 3 diferente de 0 por tanto el rango(M)= 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Podemos comprobar también que la matriz ampliada tiene rango 4 ya que encontramos un menor de orden 4 diferente de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$ rango (MA)=4

Así pues:

- Para $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado ya que $rang(M) = rang(MA) = 4$.
- Para $k = 1$ el sistema es incompatible ya que $3 = rang(M) < rang(MA) = 4$

b) Para $k = -4$, el sistema es compatible determinado. El sistema es:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \\ x + y + z + t = -4 \end{cases}$$

Lo podemos escribir :

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 \\ x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \end{cases}$$

Reducimos la matriz por **Gauss**, tal y como se explica en el apartado 6, página 19, del módulo 3 “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Substituimos: 2fila por 2fila – 1fila, 3 fila por 3fila – 1fila, 4fila por 4fila – 1fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

Así obtenemos:

$$t = \frac{-6}{5}$$
$$z = \frac{-5-t}{5} = \frac{-19}{25}$$
$$y = \frac{-4-t-z}{5} = \frac{-51}{125}$$
$$x = -4-t-z-y = \frac{-204}{125}$$

2.- Considerad los siguientes planos de R^3

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x - 2y + z = a \\ &\pi_2 : (2-a)x + (2a-4)y + (4-2a)z = 5 \\ &\pi_3 : (a+1)x - (a+1)y + (a+1)z = a+1 \end{aligned}$$

donde $a \in R$

a) Estudiad según los valores de a la posición relativa de los tres planos.
b) Calculad para aquellos valores de a que tenga sentido los puntos de intersección de los tres planos.
c) Utilizando la calculadora Wiris encontrad la posición relativa de los tres planos para $a = 0$ y su representación gráfica.

Resolución:

a) Tal y como se explica en el apartado 8, página 27, del módulo 3 " Sistemas de Ecuaciones Lineales", para estudiar la posición relativa, planteamos la matriz 3x4 correspondiente al sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas formado por los tres planos.

Calcularemos primero los valores que hacen que *M* tenga rango máximo (es decir, rango(*M*)=3). Para estos valores el sistema será compatible determinado.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a \\ a+1 & -a-1 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a & 5 \\ a+1 & -a-1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante substituimos la 2a columna por 2a columna + 3a columna y la 3a columna por 3a columna- 1a columna y obtenemos.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2(a-2) & 2(2-a) \\ a+1 & -(a+1) & (a+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2-a & 0 & 2-a \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)(2-a)$$

Así pues $\det(M) = -(a+1)(2-a) = 0$ si $a=-1$ o $a=2$.

La matriz *M* tiene rango 3 para todos los valores de a, excepto $a=-1,2$.

- Así para $a \neq -1,2$ tenemos $rang(M) = rang(MA) = 3$ y el sistema será **COMPATIBLE DETERMINADO y por tanto los tres planos se intersectan en un punto.**

Para $a=-1$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

- El sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO CON 1 GRADO DE LIBERTAD, por tanto los tres planos se intersectan en una recta.**

Para $a=2$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

- El sistema es **INCOMPATIBLE y por tanto los tres planos no tienen ningún punto en común.**

Resumiendo:

- Para $a \neq -1,2$ **los tres planos se cortan en un punto.**
- Para $a=-1$ **los tres planos se cortan en una recta.**
- Para $a=2$ **los tres planos no tienen ningún punto en común.**

b) Para $a \neq -1,2$, sabemos que los tres planos se cortan en un punto.
Para encontrar este punto podemos utilizar la regla de **Cramer** del apartado 7, página 23, del módulo 3 “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ 5 & -2(2-a) & 2(2-a) \\ a+1 & -(a+1) & (a+1) \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2(2-a) \\ a+1 & 0 & (a+1) \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{5(a+1)-2(2-a)(a+1)}{(a-2)(a+1)}=$$

$$\frac{5-4+2a}{(a-2)}=\frac{1+2a}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2-a & 5 & 2(2-a) \\ a+1 & (a+1) & (a+1) \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -(2-a) & 5 & 2(2-a) \\ 0 & a+1 & (a+1) \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=$$

$$\frac{(2-a)(a(a+1)-(a+1))}{(a-2)(a+1)}=1-a$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2-a & -2(2-a) & 5 \\ a+1 & -(a+1) & a+1 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ 2-a & -(2-a) & 3+a \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=$$

$$\frac{(a+1)(-(3+a)+(a-1)(2-a))}{(a-2)(a+1)}=\frac{-a^2+2a-5}{a-2}$$

En conclusión, el punto que buscamos en función de a es:

$$x=\frac{1+2a}{a-2}$$
$$y=1-a$$
$$z=\frac{-a^2+2a-5}{a-2}$$

Para $a=-1$, los tres planos se cortan formando una recta:

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 3x-6y+6z=5 \end{cases}$$

c) Cuando $a=0$ los tres planos se cortan en un punto: $(-\frac{1}{2},1,\frac{5}{2})$

La representación gráfica de los tres planos la podemos ver en la imagen siguiente:

Calc sense títol

$x - 2y + z = 0$ Dibuixa 3D: tauler1

$2x - 4y + 4z = 5$ Dibuixa 3D: tauler1

$x - y + z = [\square]1$ Dibuixa 3D: tauler1