

## PAC3

### Presentació

Aquesta PAC aprofundeix en el concepte de complexitat computacional que cobreix els continguts estudiats en els mòduls 6 i 7 de l'assignatura. Els exercicis treballen els conceptes de mesures de complexitat, la reducció i completesa, la classe NP-complet i alguns dels problemes intractables més importants que es coneixen.

### Competències

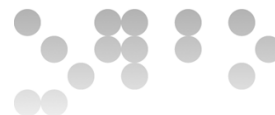
En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

### Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Entendre els conceptes d'intractabilitat i no-determinisme.
- Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cada una d'aquestes.
- Entendre el concepte de reducció entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- Reconèixer problemes intractables que apareixen de forma habitual en informàtica i en enginyeria.
- Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinòmica dels problemes NP-complets.

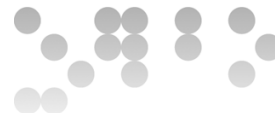


## Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) Definiu cadascun dels problemes següents en forma de funció, i classifiqueu-los com a problemes de decisió, càlcul o optimització. Reformuleu els de càlcul i els d'optimització com a problemes de decisió i indiqueu a quina classe de complexitat pertanyen:
  - (a) Donat un graf  $G = (V, A)$  i dos vèrtexs  $u, v \in V$ , determinar si existeix un camí de  $u$  a  $v$ .
  - (b) Donat un graf  $G = (V, A)$  connex, obtenir un arbre generador de  $G$  amb el nombre màxim de fulles (vèrtexs de grau 1).
  - (c) Donada una llista d'enters ordenada  $L$  de longitud  $n$  i un enter  $e$ , trobar la posició que ocupa  $e$  a  $L$ .
  - (d) Donat un graf  $G = (V, A)$ , obtenir una partició dels seus vèrtexs,  $(V_1, V_2)$ , de manera que  $TALL(V_1, V_2) = |\{(u, v) \in A \mid u \in V_1, v \in V_2\}|$  sigui màxim.
2. (Valoració d'un 15%) Considereu les fórmules següents,
  - $(a \wedge \bar{b}) \vee c$ .
  - $(a \vee \bar{b}) \wedge ((\bar{b} \vee c) \wedge a)$ .
  - $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{c}) \wedge (b \vee c)$ .
  - $a \vee (b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c)$ .
  - (a) Trobeu totes les assignacions que satisfan cadascuna.
  - (b) Indiqueu quines estan en FNC i quines no. Passeu a FNC les que no ho estan.
  - (c) Quines fórmules són possibles entrades del problema SAT? I, un cop passades totes a FNC, quines ho són del problema 3SAT?
3. (Valoració d'un 30%) Volem trobar un arbre generador d'un graf connex en que cap vèrtex tingui un grau major que un cert nombre  $k$ . Anomenem al problema ARBGENGAF (arbre generador de grau afitat).
  - (a) Descriuiu de manera formal el problema ARBGENGAF.
  - (b) El problema ARBGENGAF és un problema de decisió, de càlcul o d'optimització? Descriuiu de manera formal els altres dos problemes associats.
  - (c) Demostreu que el problema ARBGENGAF és verificable en temps polinòmic.
  - (d) Expliqueu quines semblances hi ha entre el problema decisional ARBGENGAFDEC corresponent al problema ARBGENGAF i el problema decisional HAM\_CYCLE que consisteix en determinar si existeix un cicle hamiltonià en un graf.
  - (e) Demostreu que  $HAM\_CYCLE \leq_p ARBGENGAFDEC$ .
  - (f) A partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors, a quina classe de complexitat podem afirmar que pertany el problema ARBGENGAFDEC?
4. (Valoració d'un 20%) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:
  - (a) El problema "Determinar si existeix un subgraf complet d'un graf  $G$  d'ordre  $k$ " pertany a NP perquè si ens donen un subgraf complet de  $k$  vèrtexs del graf  $G$  tenim un testimoni.
  - (b) Si  $A \leq_p B$  i  $B \leq_p A$ , aleshores  $A$  i  $B$  són NP-complets.
  - (c) Si  $A$  és NP-difícil segur que no és NP-complet.
  - (d) Si es demostrés que un determinat problema  $A \notin P$  i  $A \in NP$  però no és NP-complet, aleshores s'hauria demostrat que  $P = NP$ .
5. (Valoració d'un 15%) Considereu el problema de la motxilla.



- (a) Quina és la solució del problema si  $C = 30$ ,  $U = \{1, 2, 3, 4\}$  amb pesos  $w = \{17, 11, 14, 7\}$  i valors  $v = \{34, 33, 56, 35\}$ ?
- (b) Sabem que el problema de la motxilla és intractable i per tant, és interessant trobar algorismes que donin una solució aproximada en temps polinòmic. Us donem una heurística voraç perquè la proveu amb l'exemple donat: ordenar els objectes per valor/pes (de major a menor) i anar-los escollint mentre no superem la capacitat total  $C$  (els objectes que ens portin a superar-la els rebutgem). Quina és la solució? En cas que retorni l'òptim, doneu un exemple en que no sigui així.
- (c) Què haurem de canviar en l'enunciat del problema perquè l'algorisme de l'apartat anterior ens retorni sempre l'òptim? Justifiqueu la resposta.



## Recursos

### Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 6. Complexitat computacional.
- Mòdul didàctic 7. Problemes intractables.
- Collecció de problemes

### Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors.
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs.
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs.

## Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

## Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha de ser: **PAC3\_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 18/12/2013**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**