PAC1

Presentació

Aquesta PAC és una introducció a la teoria de grafs que cobreix els continguts estudiants en els 3 primers mòduls de l'assignatura. Els exercicis treballen tant els conceptes previs sobre funcions d'algorismes, els fonaments de la teoria de grafs i els problemes de recorreguts i connectivitats sobre grafs.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Enginyeria Informàtica:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Conèixer el concepte de complexitat temporal i espacial d'un algorisme i saber analitzar-la en algorismes concrets.
- Conèixer el concepte de graf i els diferents tipus de graf (grafs orientats, grafs ponderats, pseudografs, multigrafs, ...).
- Conèixer les principals propietats dels grafs i saber analitzar-les en un graf concret.
- Conèixer els problemes de connectivitat més usuals sobre grafs, els algorismes que els resolen i saber-los aplicar en un graf concret.
- Ser capaç de representar i analitzar un problema en termes de la teoria de grafs.

Descripció de la PAC

1. (Valoració d'un 20%) La companyia de telèfons d'un pais que s'ha independitzat recentment vol assignar números de telefon de 7 xifres $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ als seus usuaris. Utilizeu les tècniques estudiades en el tema de funcions per respondre:

   (a) Suposant que $0 \leq d_i \leq 9$, a quants usuaris pot donar servei?

   (b) Si la primera xifra, d_1, no pot ser 0, a quants usuaris pot donar servei?

   (c) Si totes les xifres han de ser diferents, a quants usuaris pot donar servei?

   (d) Si tenim les restriccions dels apartats (b) i (c) alhora (primera xifra diferent de 0, totes les xifres diferents), a quants usuaris pot donar servei? (Indicació: Considereu dos casos per separat: si s'utilitza el 0 en les darreres 6 xifres i si no s'utilitza).

Solució: $\mathbb{N}_7$ representa el conjunt de xifres i $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunt de possibles valors.

(a) El nombre s'usuaris serà el conjunt de funcions de $\mathbb{N}_7$ a D, és a dir, $VR(10, 7) = 10^7 = 10000000$.

(b) En aquest cas, traiem la primera xifra i calculem el nombre de funcions de $\mathbb{N}_6$ a D que seran $VR(10, 6) = 10^6 = 1000000$. La primera xifra només pot prendre 9 valors diferents. El total serà, $9 \cdot VR(10, 6) = 9000000$.

(c) El nombre d'usuaris serà el conjunt de funcions injectives de $\mathbb{N}_7$ a D, $V(10, 7) = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4 = 604800$ usuaris.

(d) De nou traiem la primera xifra. La resta és el nombre de funcions injectives de $\mathbb{N}_6$ a D, $V(10, 6) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$. Ara si afegim la primera xifra, distingim dos casos:

   i. El 0 no s'ha utilitzat en els darrers 6 dígits: això coincideix amb el nombre de funcions injectives de $\mathbb{N}_6$ al conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que és $V(9, 6) = 60480$. Ara, la primera xifra pot prendre 3 valors diferents (ja que el 0 no el pot prendre, encara que no s'hagi utilitzat en la resta de xifres). El total en aquest cas serà, $3 \cdot V(9, 6) = 181440$.

   ii. El 0 s'ha utilitzat en els darrers 6 dígits: el nombre de possibilitats serà $V(10, 6) - V(9, 6) = 90720$. Si afegim la primera xifra, aquesta només podrà tenir 4 valors diferents. En total, $4 \cdot 90720 = 362880$ possibilitats.

   Ajuntant els dos casos, tindrem $181440 + 362880 = 544320$ usuaris.

   Alternativament, una altra forma de comptar és la següent: el primer dígit només pot prendre 9 valors diferents (qualsevol xifra menys el 0); els 6 dígits restants poden prendre 9 valors (tots menys la xifra del primer dígit) però sense admetre repeticions, és a dir, $V(9, 6) = 60480$. En total serien $9 \cdot 60480 = 544320$ usuaris, igual com havíem vist abans.

---

2. (Valoració d'un 20%) Considereu l'algorisme següent on n és un nombre enter $n > 1$.

```
funció DivisorMesGran(n)
  inici
    d ← n − 1
    mentre n mod d ≠ 0
            d ← d − 1
    fimentre
    retorn d
  fi
```

   (a) Calculeu el resultat de les següents crides: *DivisorMesGran*(24), *DivisorMesGran*(17), *DivisorMesGran*(39), *DivisorMesGran*(100).

   (b) Calculeu, en el pitjor dels casos, el nombre d'operacions elementals que efectua l'algorisme.

(c) Determineu, en funció d'n, la complexitat de l'algorisme.

(d) Podeu proposar una alternativa que millori l'algorisme?

Solució:

(a) Els resultats són: 12, 1, 13, 50.

(b) Les línies 3 i 7 efectuen 1 operació elemental cada una. La línia 5 efectua una operació elemental multiplicada pel nombre de vegades que s'executa el bucle mentre.

El nombre d'iteracions és igual al nombre de vegades que la divisió entre n i d no és exacta (residu diferent de 0). Aquest nombre de vegades depèn del valor d'n. En el pitjor dels cassos, haurem d'efectuar $n-1$ divisions quan n sigui un nombre primer.

Per tant, el nombre total d'operacions elementals serà, en el pitjor dels cassos, $(n-1)\cdot 1+2$.

(c) D'acord amb les propietats de la complexitat, aquest algorisme tindrá una complexitat $O(n-1) = O(n)$.

(d) Observem que si a és un divisor d'n aleshores existeix b tal que $a \cdot b = n$ i $a \leq \sqrt{n}$ o $b \leq \sqrt{n}$. El següent algorisme efectua, en el pitjor dels cassos, $\sqrt{n}$ divisions ($<< n-1$):

```
funció DivisorMesGran(n)
  inici
    d ← 2
    limit ← √n
    mentre n mod d ≠ 0 ∧ d ≤ limit
           d ← d + 1
    fimentre
    si d > limit
       aleshores mesGran ← 1
           si_no mesGran ← n div d
    fisi
    retorn mesGran
  fi
```

Observem que la complexitat d'aquest algorisme en funció d'n és $O(n^{1/2})$. A l'apartat de Complexitat Computacional veurem que en realitat aquest algorisme té una complexitat exponencial (respecte a la mida de la codificació del nombre n).

---

3. (Valoració d'un 20%) En un centre educatiu disposen de 4 aules d'informàtica amb 7 ordinadors cadascuna. A cada aula, el tècnic del centre ha connectat entre si els ordinadors formant una xarxa. No hi ha connexions entre ordinadors de diferents aules. A la taula següent figura el nombre de connexions realitzades a cada ordinador:

Aula	
A_1	$3,3,3,3,2,2,2$
A_2	$4,3,3,3,2,2,1$
A_3	$4,3,3,3,3,1,1$
A_4	$3,3,2,2,2,1,1$

Usant la teoria de grafs, responeu a les qüestions següents:

(a) Quines de les configuracions anteriors corresponen realment a una xarxa d'ordinadors.

(b) Per a les configuracions correctes, calculeu el nombre de cables que s'han utilitzat.

(c) Per a les configuracions correctes, dibuixeu una topologia de xarxa que es correspongui amb la configuració donada.

(d) Existeix una topologia de xarxa que permeti connectar tots els ordinadors d'una aula? Raoneu la resposta. Es considera que dos ordinadors estan connectats si un paquet pot arribar de l'un a l'altre seguint 1 o més connexions.

Solució: Podem pensar cada xarxa d'ordinadors com un graf de 7 vèrtexs i amb la seqüència de graus donada per cada configuració.

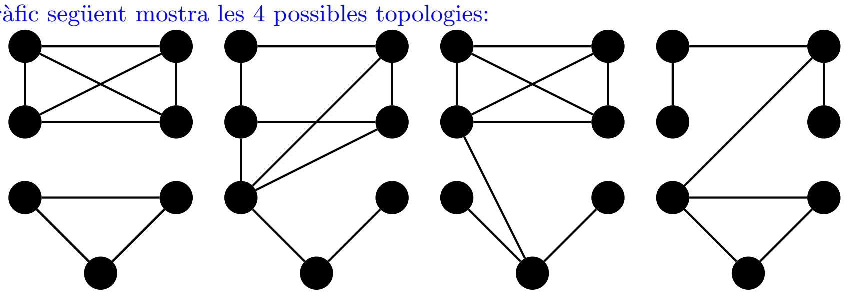
(a) Apliquem l'algorisme de Havel-Hakimi a les quatre seqüències:

S_1	S_2	S_3	S_4
$3,3,3,3,2,2,2$	$4,3,3,3,2,2,1$	$4,3,3,3,3,1,1$	$3,3,2,2,2,1,1$
$2,2,2,2,2,2$	$2,2,2,1,2,1$	$2,2,2,2,1,1$	$2,1,1,2,1,1$
$1,1,2,2,2$	$2,2,2,2,1,1$	$1,1,2,1,1$	$2,2,1,1,1,1$
$2,2,2,1,1$	$1,1,2,1,1$	$2,1,1,1,1$	$1,0,1,1,1$
$1,1,1,1$	$2,1,1,1,1$	$0,0,1,1$	$1,1,1,1,0$
$0,1,1$	$0,0,1,1$	$1,1,0,0$	$0,1,1,0$
$1,1,0$	$1,1,0,0$	$0,0,0$	$1,1,0,0$
$0,0$	$0,0,0$		$0,0,0$

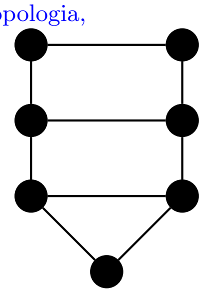
De la taula es dedueix que les quatre seqüències són gràfiques i, pertant, que les configuracions corresponen a una xarxa d'ordinadors.

(b) El nombre de cables es correspon amb la mida del graf. Usant el lema de les encaixades obtenim: 9, 9, 9, 7.

(c) El gràfic següent mostra les 4 possibles topologies:



(d) Per tal que es puguin connectar tots els ordinadors de l'aula, cal que el graf sigui connex. En l'aula 2, 3 i 4 sí tal com es pot veure en el gràfic anterior. En canvi, a l'aula 1 la topologia proposada no és connexa. En canvi, si agafem la topologia,



Aleshores sí que el graf és connex.

---

4. (Valoració d'un 20%) Donat un graf qualsevol $G = (V, A)$, es defineix el seu *graf línia* $L(G)$ com el graf $L(G) = (A, A')$ tal que els vèrtexs de $L(G)$ són les arestes de G i dos vèrtexs són adjacents en $L(G)$ si i només si les arestes corresponents a G tenen un vèrtex en comú.

(a) Representeu gràficament els grafs $K_3 + T_2$ i $T_2 \times E_3$ i determineu l'ordre dels seus grafs línia.

(b) Determineu el graf línia dels grafs següents: graf estrella E_n, graf trajecte T_n i graf cicle C_n.

(c) Demostreu que si G és connex aleshores $L(G)$ també és connex.

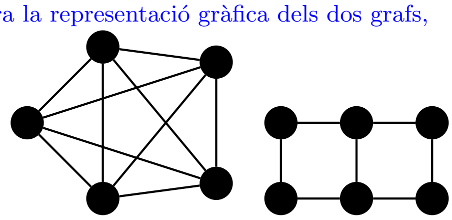
(d) Demostreu que si G és regular aleshores $L(G)$ també és regular.

(e) Si G és regular d'ordre n, mida m i grau d, calculeu l'ordre de $L(G)$, la mida de $L(G)$ i el grau dels vèrtexs de $L(G)$ en funció d'n, m i d.

(f) Quina condició hauria de complir un graf G per a que $L(G)$ tingui tots els seus vèrtexs de grau parell?

Solució:

(a) El gràfic següent mostra la representació gràfica dels dos grafs,



$K_3 + T_2$ té ordre 5 i mida 10. El seu graf línia tindrà ordre 10. $T_2 \times E_3$ té ordre 6 i mida 7. Per tant, el seu graf línia tindrà ordre 7.

(b) $L(E_n) = K_{n-1}$, $L(T_n) = T_{n-1}$ i $L(C_n) = C_n$.

(c) Si a i b són dos vèrtexs de $L(G)$. $a = \{a_1, a_2\}$ a G i $b = \{b_1, b_2\}$. Com que G és connex, existeix un camí a G que uneix elx vèrtexs a_1 i b_1. Sigui $a_1 = c_1, c_2, \ldots, c_k = b_1$ aquest camí. Aleshores les arestes $\{c_1, c_2\}, \{c_2, c_3\}, \ldots, \{c_{k-1}, c_k\}$ formen un camí a $L(G)$ que uneix a i b.

(d) Si $v = \{a, b\}$ és un vèrtex de $L(G)$ aleshores es compleix que $gr(v) = gr(a) + gr(b) - 2$. Si G és regular de grau d aleshores $gr(v) = 2d - 2$.

(e) L'ordre de $L(G)$ és m. El $gr(v) = 2d - 2$ i, aplicant el lema de les encaixades, la mida de $L(G)$ serà $\frac{1}{2}m(2d-2) = m(d-1)$.

(f) El grau d'un vèrtex $e = \{a, b\}$ de $L(G)$ és $g(e) = g(a) + g(b) - 2$, on $g(a)$ i $g(b)$ són els graus de a i b a G. $g(e)$ és parell si i només si $g(a)$ i $g(b)$ tenen la mateixa paritat. Així, a $L(G)$ els vèrtexs tenen grau parell si i només si a G tots els vèrtexs de G tenen la mateixa paritat.

---

5. (Valoració d'un 20%) Una companyia de transport aeri vol enviar mercaderies entre 6 ciutats, a, b, c, d, e, f. La taula següent mostra el cost (en milers d'euros) de fletar un avió de transport entre les diferents ciutats:

	a	b	c	d	e	f
a	–	14	–	16	–	–
b	14	–	9	6	13	25
c	–	9	–	–	4	12
d	16	6	–	–	8	–
e	–	13	4	8	–	11
f	–	25	12	–	11	–

Utilitzant l'algorisme més adequat, responeu les questions següents:

(a) L'escenari plantejat per aquesta taula correspon a un graf dirigit o a un graf simple (no dirigit)? Justifiqueu la resposta.

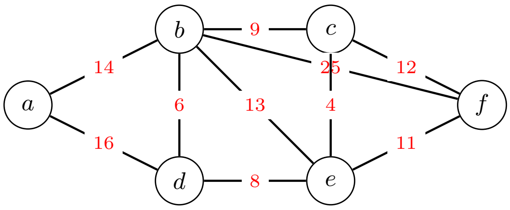
(b) Podem afirmar que la companyia podrà transportar les mercaderies entre qualsevol de les 6 ciutats?

(c) Calculeu el cost mínim de fletar un avió que des de la ciutat a pugui arribar a les altres cinc ciutats. Indiqueu les ciutats que caldria passar en cada cas.

(d) Quines són les dues ciutats més allunyades entre sí, és a dir, les dues ciutats amb el cost més alt per fletar un avió que permeti anar d'una a l'altra?

(e) A quina ciutat caldria posar el centre de distribució de manera que el cost total de fletar avions a la resta de ciutats sigui el menor possible.

Solució: Podem modelar el problema com el graf següent:



(a) La taula és simètrica per la qual cosa el graf serà simple.

(b) Per comprovar si des de la ciutat a podem arribar a les altres 5 ciutats, haurem de comprovar si el graf és connex. Apliquem el test de connexió:

P	Vèrtex afegit	Vèrtex eliminat	R
a	a	$-$	$[a]$
ab	b	$-$	$[a,b]$
abc	c	$-$	$[a,b,c]$
$abce$	e	$-$	$[a,b,c,e]$
$abced$	d	$-$	$[a,b,c,e,d]$
$abce$	$-$	d	$[a,b,c,e,d]$
$abcef$	f	$-$	$[a,b,c,e,d,f]$
$abce$	$-$	f	$[a,b,c,e,d,f]$
abc	$-$	e	$[a,b,c,e,d,f]$
ab	$-$	c	$[a,b,c,e,d,f]$
a	$-$	b	$[a,b,c,e,d,f]$
$-$	$-$	a	$[a,b,c,e,d,f]$

Per tant el graf és connex.

(c) Haurem d'aplicar l'algorisme de Dijkstra a partir de la ciutat a:

a	b	c	d	e	f
$(0,a)$	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)
$(0,a)$	$(14,a)$	(∞,a)	$(16,a)$	(∞,a)	(∞,a)
$(0,a)$	$(14,a)$	$(23,b)$	$(16,a)$	$(27,b)$	$(39,b)$
$(0,a)$	$(14,a)$	$(23,b)$	$(16,a)$	$(25,d)$	$(39,b)$
$(0,a)$	$(14,a)$	$(23,b)$	$(16,a)$	$(25,d)$	$(35,c)$
$(0,a)$	$(14,a)$	$(23,b)$	$(16,a)$	$(25,d)$	$(35,c)$
$(0,a)$	$(14,a)$	$(23,b)$	$(16,a)$	$(25,d)$	$(35,c)$

La taula següent resumeix el resultat:

b	c	d	e	f
14	23	16	25	35
a,b	a,b,c	a,d	a,d,e	a,b,c,f

(d) Utilitzarem l'algorisme de Floyd per calcular el diàmetre del graf:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & \infty & 16 & \infty & \infty \\ 14 & 0 & 9 & 6 & 13 & 25 \\ \infty & 9 & 0 & \infty & 4 & 12 \\ 16 & 6 & \infty & 0 & 8 & \infty \\ \infty & 13 & 4 & 8 & 0 & 11 \\ \infty & 25 & 12 & \infty & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu final serà:

$$d^6 = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 23 & 16 & 24 & 35 \\ 14 & 0 & 9 & 6 & 13 & 21 \\ 23 & 9 & 0 & 12 & 4 & 12 \\ 16 & 6 & 12 & 0 & 8 & 19 \\ 24 & 13 & 4 & 8 & 0 & 11 \\ 35 & 21 & 12 & 19 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Segons aquesta matriu les ciutats més allunyades són a i f.

(e) Hem de posar el centre de distribució en la ciutat tal que la suma de costos a la resta de ciutats sigui mínima. De nou, revisant la darrera matriu observem que la suma mínima correspon a la fila 3 o 5 amb un cost 60. Per tant, caldrà situar el centre en la ciutat c o e.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Conceptes previs: funcions i algorismes
- Mòdul didàctic 2. Fonaments de grafs
- Mòdul didàctic 3. Recorreguts i connectivitat
- Col·lecció de problemes

Recursos Complementaris

- PACs i exàmens de semestres anteriors
- Programari per a l'estudi d'algorismes sobre grafs
- Enllaç: Applets interactius sobre algorismes de grafs

Criteris d'avaluació

- La PAC s'ha de resoldre **de forma individual**.
- Cada exercici té un pes del 20% de la nota final.
- És necessari justificar la resposta a cadascun dels apartats. Es valorarà tant la correctesa de la resposta com la justificació donada.
- En els apartats on calgui aplicar algun algorisme, es valorarà la tria de l'algorisme apropiat, els passos intermedis, el resultat final i les conclusions que se'n derivin.

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** PDF amb les respostes a tots els exercicis. El nom del fitxer ha ser: **PAC1_Cognom1Cognom2Nom.pdf**.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula **abans de les 23:59 del dia 24/10/2012**. **No s'acceptaran lliuraments fora de termini.**