SOL practica ibe P2018

Algebra (Universitat Oberta de Catalunya)

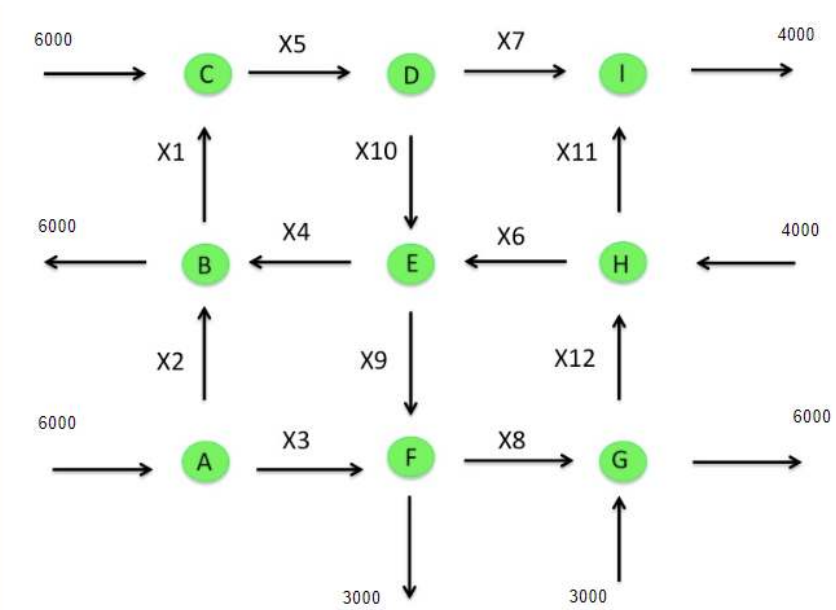
75.557 Álgebra / 81.506 Matemáticas I

Solución Práctica

Álgebra. Práctica

Problema 1. Ejemplo de enunciado

El esquema de la figura representa una parte de la red circulatoria de vehículos de las calles de la ciudad de Boston con la dirección y sentido marcados. Tras analizar un histórico de datos, se ha logrado obtener información sobre la cantidad media, en unidades hora, de vehículos que entran y salen de algunas calles en una hora:



a) (2 puntos) Suponiendo una condición de equilibrio en cada cruce (es decir, el número total de vehículos que entra en un cruce es el mismo del número de vehículos que sale), plantea, discute y resuelve el correspondiente sistema de ecuaciones, donde podremos determinar la media del número de vehículos que circula por cada calle por hora.

b) (2 puntos) ¿Cuál debe ser el número medio de vehículos por hora, en un día determinado, si se hacen obras en las calles X4 y X12, donde no pueden circular ningún vehículos?

Resolución:

a) En primer lugar definimos la matriz de adyacencia a partir de cada nodo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Definir}$$

$$F = [6000,6000,6000,0,0,3000,3000,4000,4000] \quad \text{Definir}$$

y la matriz ampliada con los flujos exteriores

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4000 \end{pmatrix} \quad \text{Definir}$$

Observamos que el rango de la matriz y el de la matriz ampliada coinciden

$$\text{rango}(M) = 8 \quad \text{Calc}$$

$$\text{rango}(N) = 8 \quad \text{Calc}$$

de esta manera el sistema es compatible indeterminado, ya que el numero de variables es 12 y el rango es 8, así tenemos 12-8=4 grados de libertad:

Resolvemos el sistema:

$R = \text{resolver}(M,F)$ Definir

$H = R_1$ Definir

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Calc

H es el núcleo de M, y sus columnas son base del núcleo, de manera que podemos determinar todas les soluciones de la ecuación a partir de una solución particular P

$P = R_2$ Definir

$P = [-2000,0,6000,4000,4000,4000,4000,3000,0,0,0,0]$ Calc

$H\cdot[a,b,c,d]+P = [-b+c-2000,-a+d,a-d+6000,a-b+c-d+4000,-b+c+4000,a-b+4000,-b+4000,a+3000,d,c,b,a]$ Calc

donde la solución general tiene 4 grados de libertad, que se corresponden con la dimensión del núcleo, que es 4.

b)

Sea ahora que X4=X12=0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Definir

$\text{rango}(A) = 8$ Calc

Así que el rango de la nueva matriz A continua siendo 8, y el sistema es compatible y indeterminado, podemos resolver el sistema,

$S = \text{resolver}(A,F)$ Definir

$T = S_1$ Definir

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

$$U = S_2 \quad \text{Definir}$$

$$U = [-2000,4000,2000,4000,4000,4000,3000,4000,0,0] \quad \text{Calc}$$

$$T\cdot[a,b]+U = [-a+b-2000,-a+b+4000,a-b+2000,-a+b+4000,-a+4000,-a+4000,3000,-a+b+4000,b,a] \quad \text{Calc}$$

Problema 2. Ejemplo de enunciado

La matriz de una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calculad la dimensión y una base del núcleo.
b) (1 punto) Calculad la dimensión y una base de la imagen.
c) (1 punto) Calculad el polinomio característico de f.
d) (1 punto) Hallad los valores y vectores propios de la matriz.
e) (1 punto) Estudiad si A es diagonalizable, y en caso afirmativo, hallad la correspondiente matriz diagonal D.
f) (1 punto) Calculad D^4 y a partir de este resultado calculad A^4.

Resolución:

En primer lugar definimos la matriz en wiris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

Definir

a) Wiris permite calcular directamente el núcleo de la aplicación

$$\text{nucleo}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calc

y los vectores columna que nos proporciona ya son base del núcleo, de manera que su dimensión es 8.

b) De manera similar, wiris permite calcular la imagen

$$\text{imagen}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \\ 8 & 9 \\ 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Calc

y la dimensión de la imagen es 2.

c) Ahora calculamos el polinomio característico

$$p = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3-\lambda & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5-\lambda & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7-\lambda & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9-\lambda & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11-\lambda & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13-\lambda & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15-\lambda & 16 & 17 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17-\lambda & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19-\lambda \end{Vmatrix}$$

y calcularemos sus raíces, que serán los valores propios de la aplicación.

$$p = \lambda^{10} - 100\cdot\lambda^{9} - 825\cdot\lambda^{8} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resolver}(p) = \left\{\{\lambda=0\},\{\lambda=-5\cdot\sqrt{133}+50\},\{\lambda=5\cdot\sqrt{133}+50\}\right\} \quad \text{Calc}$$

d) Tal y como hemos visto en el apartado anterior tenemos 3 valores propios diferentes (las raíces del polinomio característico). Para ver si diagonaliza la matriz podemos comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Alternativamente, wiris nos proporciona directamente los vectores propios linealmente independientes de la aplicación.

$$\text{veps}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & 1 & \frac{3\cdot\sqrt{133}}{38}-\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{66}+\frac{65}{66} & \frac{4\cdot\sqrt{133}}{57}-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{133}}{33}+\frac{32}{33} & \frac{7\cdot\sqrt{133}}{114}-\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{22}+\frac{21}{22} & \frac{\sqrt{133}}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{31}{33} & \frac{5\cdot\sqrt{133}}{114}+\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{61}{66} & \frac{2\cdot\sqrt{133}}{57}+\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{11}+\frac{10}{11} & \frac{\sqrt{133}}{38}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{59}{66} & \frac{\sqrt{133}}{57}+\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{29}{33} & \frac{\sqrt{133}}{114}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{3\cdot\sqrt{133}}{22}+\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

e) La matriz A diagonaliza, dado que tenemos una base de vectores propios. De manera que podemos definir directamente la matriz de cambio de base B, de la base de vectores propios a la base canónica:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & 1 & \frac{3\cdot\sqrt{133}}{38}-\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{66}+\frac{65}{66} & \frac{4\cdot\sqrt{133}}{57}-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{133}}{33}+\frac{32}{33} & \frac{7\cdot\sqrt{133}}{114}-\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{22}+\frac{21}{22} & \frac{\sqrt{133}}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{31}{33} & \frac{5\cdot\sqrt{133}}{114}+\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{61}{66} & \frac{2\cdot\sqrt{133}}{57}+\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{133}}{11}+\frac{10}{11} & \frac{\sqrt{133}}{38}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7\cdot\sqrt{133}}{66}+\frac{59}{66} & \frac{\sqrt{133}}{57}+\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\cdot\sqrt{133}}{33}+\frac{29}{33} & \frac{\sqrt{133}}{114}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{3\cdot\sqrt{133}}{22}+\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

y la matriz de valores propios la podemos definir manualmente, o directamente con wiris

$$D = \mathrm{jordan}(A) \quad \text{Definir}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-5\cdot\sqrt{133}+50&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5\cdot\sqrt{133}+50 \end{pmatrix} \quad \text{Calc}$$

donde D es la matriz A diagonalizada.

f) Para calcular las potencias de A, usaremos que A diagonaliza en su base de vectores propios:

$$A^4 = (B\cdot D\cdot B^{-1})^4 = (B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot D\cdot B^{-1}) =$$
$$= B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1}\cdot B\cdot D\cdot B^{-1} = B\cdot D\cdot I\cdot D\cdot I\cdot D\cdot I\cdot D\cdot B^{-1} =$$
$$= B\cdot D^4\cdot B^{-1}$$

De esta manera:

$$B\cdot D^4\cdot B^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 4250125 & 4928000 & 5605875 & 6283750 & 6961625 & 7639500 & 8317375 & 8995250 & 9673125 & 10351000 \\ 4928000 & 5714125 & 6500250 & 7286375 & 8072500 & 8858625 & 9644750 & 10430875 & 11217000 & 12003125 \\ 5605875 & 6500250 & 7394625 & 8289000 & 9183375 & 10077750 & 10972125 & 11866500 & 12760875 & 13655250 \\ 6283750 & 7286375 & 8289000 & 9291625 & 10294250 & 11296875 & 12299500 & 13302125 & 14304750 & 15307375 \\ 6961625 & 8072500 & 9183375 & 10294250 & 11405125 & 12516000 & 13626875 & 14737750 & 15848625 & 16959500 \\ 7639500 & 8858625 & 10077750 & 11296875 & 12516000 & 13735125 & 14954250 & 16173375 & 17392500 & 18611625 \\ 8317375 & 9644750 & 10972125 & 12299500 & 13626875 & 14954250 & 16281625 & 17609000 & 18936375 & 20263750 \\ 8995250 & 10430875 & 11866500 & 13302125 & 14737750 & 16173375 & 17609000 & 19044625 & 20480250 & 21915875 \\ 9673125 & 11217000 & 12760875 & 14304750 & 15848625 & 17392500 & 18936375 & 20480250 & 22024125 & 23568000 \\ 10351000 & 12003125 & 13655250 & 15307375 & 16959500 & 18611625 & 20263750 & 21915875 & 23568000 & 25220125 \end{pmatrix}$$