Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Semestre Tardor 2018

Final 1

1. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%)

   (a) Quantes seqüències de longitud 6 es poden construir amb els símbols "0", "1" i "2"? Quantes d'aquestes seqüències no comencen per "11"?

   (b) Sigui L una seqüència de bits de longitud n ($n \geq 1$). Considereu el següent algorisme:

   función $Func(L)$
     inicio
       $n \leftarrow Longitud(L)$
       $resultat \leftarrow 0$
       para $i = 1$ **hasta** n
           si $L[i] = 1$ **entonces**
               $resultat \leftarrow resultat + 2^{i-1}$
           finsi
       finpara
       retorno $resultat$
     fin

   i. Calculeu el resultat de la crida $Func$([1,0,1,1,0,1]).

   ii. En quin cas s'efectua el màxim nombre d'operacions?

   iii. Determineu la complexitat de l'algorisme, en funció del nombre de bits n.

Solució:

(a) Hi ha $3^6 = 729$ seqüències ternàries. N'hi ha 3^4 que comencen per "11", per tant n'hi ha $3^6 - 3^4 = 648$ que no comencen per "11".

(b) i. El resultat de la crida *Func*([1,0,1,1,0,1]) és 45.

ii. El nombre màxim d'operacions s'efectua quan el paràmetre d'entrada L té el màxim nombre d'uns, o sigui, quan $L[i] = 1$ per tot $i = 1, \ldots, n$, i això correspon al cas en que la seqüència conté tot uns.

iii. Si considerem que calcular 2^{i-1} representa una operació elemental, la complexitat de l'algorisme, en funció del nombre de bits n, és $O(n)$. En canvi, si considerem que necessitem $i-2$ operacions elementals (multiplicacions), aleshores en el pitjor dels casos, hem de calcular $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, o sigui, s'han de fer $0+0+1+2+\ldots+(n-2) = (n-1)(n-2)/2$ operacions elementals, i per tant la complexitat seria $O(n^2)$. Finalment, si apliquem l'algorisme de multiplicar i elevar per calcular les potències, la complexitat seria $O(n \log_2 n)$.

---

2. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%)

Sigui G un graf amb seqüencia no ordenada de graus $s : 4, 4, 4, 2, d, d$ tal que el seu complementari és un arbre.

(a) Determineu el valor de d.

(b) És G un graf eulerià?

(c) Doneu la seqüència gràfica del graf complementari, G^c, i determineu quantes fulles i quants vèrtexs interns té G^c.

(d) Justifiqueu que K_3 està inclòs a G. És G bipartit?

Solució:

(a) Sabem que G^c és un arbre amb ordre $n = 6$ i mida $m = n - 1 = 5$. Per tant, el graf G té mida $\binom{6}{2} - 5 = 10$. Pel lema de les encaixades, tenim que $2 \cdot 10 = 4 + 4 + 4 + 2 + d + d = 14 + 2d$. Per tant, $d = 3$.

(b) Com que G té dos vèrtexs de grau 3, el graf no és eulerià.

(c) La seqüència gràfica de G^c és $s^c : 1, 1, 1, 3, 2, 2$. Si triem com arrel un dels vèrtexs de grau 1, aleshores té 2 fulles i 4 vèrtexs interns. En canvi, si triem com arrel algun dels altres vèrtexs, aleshores té 3 fulles i 3 vèrtexs interns.

(d) Com que G^c és connex i té 3 vèrtexs de grau 1, aquests no estan connectats entre ells. Així, a G, els 3 vèrtexs estan connectats entre ells dos a dos i per tant K_3 està inclòs a G. Aleshores, podem assegurar que G té cicles de longitud 3 i no és bipartit.

---

3. (Valoració d'un 10+10+5=25%)

Considereu el graf G amb vèrtexs $\{A, B, C, D, E\}$ i amb pesos assignats a les arestes donats per la següent taula:

	A	B	C	D	E
A	0	24	15	25	10
B	24	0	9	11	30
C	15	9	0	10	25
D	25	11	10	0	28
E	10	30	25	28	0

(a) Quin és el pes mínim per connectar tots els vèrtexs? Doneu també en aquest cas totes les connexions i digueu si la solució és única.

(b) Fixeu-vos que el graf verifica la desigualtat triangular.

i. Trobeu un circuit H que passi per tots els vèrtexs una única vegada aplicant l'algorisme TSP-aproximat. Doneu també el pes del circuit.

ii. A partir del resultat anterior, indiqueu entre quins valors està el pes del cicle hamiltonià òptim.

Solució:

(a) Apliquem l'algorismes de Kruskal. Considerem les arestes ordenades per pes. Triem i marquem amb un asterisc les 4 primeres arestes que no formen cap cicle, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Aresta	Pes
$\{B,C\}^*$	9
$\{A,E\}^*$	10
$\{C,D\}^*$	10
$\{\mathbf{B},\mathbf{D}\}$	11
$\{A,C\}^*$	15
$\{A,B\}$	24
$\{A,D\}$	25
$\{C,E\}$	25
$\{D,E\}$	28
$\{B,E\}$	30

Així, aplicant l'algorisme de Kruskal obtenim que el pes és 44 i les arestes necessàries per obtenir l'arbre generador de pes mínim són les següents: $\{A,C\}, \{A,E\}, \{C,B\}$, $\{C,D\}$. En aquest cas, la solució és única, ja que no escollim entre arestes d'un mateix pes.

(b) i. Podem utilitzar el TSP-aproximat ja que el graf verifica la desigualtat triangular. A partir de l'apartat anterior tenim que les arestes de l'arbre generador de pes mínim són: $\{A,C\}, \{A,E\}, \{C,B\}, \{C,D\}$. Un recorregut de l'arbre en preordre és $\{A,C,B,D,E\}$ i el cicle seria $\{A,C,B,D,E,A\}$, amb pes $15+9+11+28+10=73$.

ii. De l'algorisme TSP-aproximat obtenim que una cota superior és 73 i una cota inferior $\frac{73}{2}=36.5$. A partir de l'arbre generador minimal també tenim que 44 és una cota inferior. La millor cota inferior és la més elevada, o sigui 44. Podem dir que el pes del cicle hamiltonià òptim està entre 37 i 73, o de forma més ajustada entre 44 i 73.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

(a) Sigui A un problema la solució del qual pot verificar-se en temps polinòmic i B un problema NP-Complet. Indiqueu si són certes o falses les següents afirmacions (són independents entre sí) justificant la vostra resposta.

i. A i B pertanyen a la mateixa classe de complexitat.

ii. $A \leq_p 3SAT$ i $3SAT \leq_p B$.

(b) El problema de decisió $PARTICIO$ rep un conjunt S d'enters i retorna SÍ si existeix una partició del conjunt original en $S_1, S_2 \subset S$ tals que $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ i

$$\sum_{s_1 \in S_1} s_1 = \sum_{s_2 \in S_2} s_2.$$

En cas contrari, retorna NO. Sabem que $PARTICIO$ és NP-Complet.

i. Proporcioneu com a testimoni un conjunt de 5 elements que retorni com a resposta SÍ per al problema $PARTICIO$.

ii. Donat un problema $C \leq_p PARTICIO$ i, sabent que existeix un algorisme per a resoldre C de complexitat $O(2^n)$, podem garantir que C és NP-Complet?

Solució:

(a) i. Cert, ja que A pertany a NP i B també pertany a NP per ser NP-Complet.

ii. Cert. Com que $3SAT$ és NP-Complet, sabem que qualsevol problema NP es pot reduir a ell. El problema A és NP, ja que la seva solució es pot verificar en temps polinòmic. Per tant, la primera reducció és certa. Com que B és NP-Complet, i $3SAT$ és NP, pel mateix motiu, també es compleix la segona reducció.

(b) i. Un testimoni que retorna SÍ per al problema $PARTICIO$ podria ser $S = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, ja que si prenem $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ i $S_2 = \{10\}$, tenim que es compleix $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ i $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

ii. Fals. Com que $C \leq_p PARTICIO$ i $PARTICIO \in NP$, sabem que $C \in NP$, però això no implica que hagi de ser NP-Complet. La segona condició, o sigui, saber que existeix un algorisme per resoldre'l de complexitat $O(2^n)$ tampoc ens assegura que sigui NP-Complet, només ens indica que és EXP.

Final 2

1. (Valoració d'un 5+5+5+10=25%)

   (a) Considerem el conjunt $A = \{1, \ldots, 10\}$ i el conjunt $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

      i. Quantes funcions d'A a B hi ha?

      ii. Quantes d'aquestes funcions són injectives? I quantes són bijectives?

      iii. Quantes funcions $f : A \to B$ compleixen que $f(2) = c$?

   (b) De quantes maneres podem assignar 5 pacients a 8 doctors, de forma que cap doctor tingui assignat més d'un pacient?

Solució:

(a) i. Hi ha $VR(6, 10) = 6^{10}$ funcions de A a B.

ii. Com que $|A| > |B|$, no n'hi ha cap d'injectiva, ni de bijectiva.

iii. N'hi ha $VR(6, 9) = 6^9$ que compleixen aquesta condició.

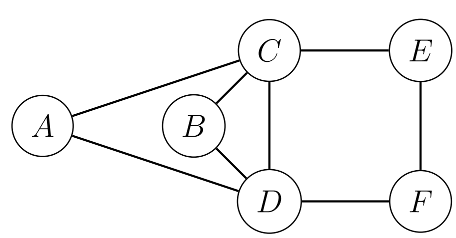
(b) La solució és equivalent al nombre de funcions injectives d'un conjunt A amb 5 elements a un conjunt B amb 8 elements, que és $V(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

---

2. (Valoració d'un 5+5+10+5=25%)

   (a) Sigui G un graf eulerià. Quines condicions ha de complir per tal que el seu graf complementari G^c sigui eulerià?

   (b) Considereu el següent graf:



Responeu justificadament les següents preguntes:

i. És bipartit? En cas negatiu justifiqueu per què no ho és i en cas afirmatiu doneu una partició del conjunt de vèrtexs.

ii. Té un circuit o un recorregut eulerià? En cas negatiu justifiqueu per què no existeix i en cas afirmatiu doneu un circuit o recorregut eulerià, fent servir l'algorisme de Hierholzer.

iii. És hamiltonià? En cas negatiu justifiqueu per què no ho és i en cas afirmatiu doneu un cicle hamiltonià.

Solució:

(a) Com que G és eulerià, tots els seus vèrtexs tenen grau parell. Si el grau d'un vèrtex és d a G, aleshores el grau d'aquest vèrtex és $n-1-d$ a G^c, on n és l'ordre del graf. Per tant, si volem que G^c sigui eulerià, aleshores n ha de ser senar.

(b) i. El graf no és bipartit ja que conté el subgraf C_3, que és un cicle d'ordre senar.

ii. Per determinar si existeix un circuit o un recorregut eulerià mirem els graus dels vèrtexs. Tots els vèrtexs del graf tenen grau parell. Per tant, té un circuit eulerià i no conté cap recorregut eulerià. Apliquem l'algorisme de Hierholzer per donar el circuit eulerià.

Iteració	v	C'	C
0	A		$\{A\}$
1	A	$\{A, C, D, A\}$	$\{A, C, D, A\}$
2	C	$\{C, B, D, F, E, C\}$	$\{A, C, B, D, F, E, C, D, A\}$

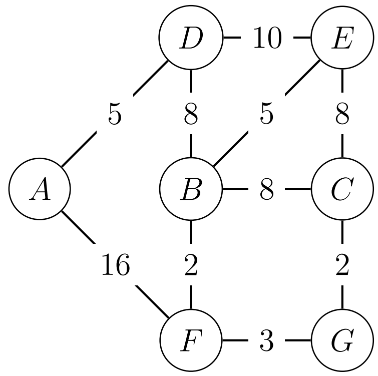
Un circuit eulerià és $\{A, C, B, D, F, E, C, D, A\}$.

iii. Si eliminem els dos vèrtexs C i D, obtenim tres components connexes i, per tant, no és hamiltonià.

---

3. (Valoració d'un 15+10=25%)

Considereu el següent graf:



(a) Volem connectar tots els vèrtexs del graf amb el mínim nombre d'arestes. Digueu quin algorisme podem fer servir si volem que el pes total sigui mínim. Feu servir aquest algorisme per donar les arestes i el pes total. La solució donada és única?

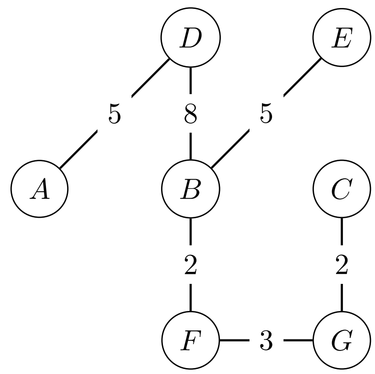
(b) Volem connectar tots els vèrtexs del graf amb el mínim nombre d'arestes. Digueu quin algorisme podem fer servir si volem que el pes del camí del vèrtex A a cadascun dels altres vèrtexs sigui mínim. Feu servir aquest algorisme per donar les arestes i el pes total.

Solució:

(a) Volem trobar un arbre generador minimal. Podem fer servir l'algorisme de Kruskal o Prim. En aquest cas, farem servir l'algorisme de Kruskal per resoldre l'exercici. Considerem les arestes ordenades per pes. Triem i marquem amb un asterisc les 6 primeres arestes que no formen cap cicle, i marquem amb negreta les descartades perquè formen un cicle.

Aresta	Pes
$\{B,F\}^*$	2
$\{C,G\}^*$	2
$\{F,G\}^*$	3
$\{A,D\}^*$	5
$\{B,E\}^*$	5
$\{\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	8
$\{B,D\}^*$	8
$\{C,E\}$	8
$\{D,E\}$	10
$\{A,F\}$	16

Així, les arestes de l'arbre generador minimal són $\{B, F\}$, $\{C, G\}$, $\{F, G\}$, $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, i $\{B, D\}$, amb un pes total de 25.



L'arbre generador minimal és únic perquè, si ens fixem en les arestes que tenen el mateix pes, hem escollit totes les de pes 2 i 5, i de les 3 arestes diferents de pes 8, només podem escollir l'aresta $\{B, D\}$ ja que qualsevol de les altres dues forma un cicle.

(b) Fem servir l'algorisme de Dijkstra per trobar el camí de pes mínim del vèrtex A a la resta de vèrtexs.

A	B	C	D	E	F	G
$(0,A)$	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
$(0,A)^*$	(∞,A)	(∞,A)	$(5,A)$	(∞,A)	$(16,A)$	(∞,A)
	$(13,D)$	(∞,A)	$(5,A)^*$	$(15,D)$	$(16,A)$	(∞,A)
	$(13,D)^*$	$(21,B)$		$(15,D)$	$(15,B)$	(∞,A)
		$(21,B)$		$(15,D)^*$	$(15,B)$	(∞,A)
		$(21,B)$			$(15,B)^*$	$(18,F)$
		$(20,G)$				$(18,F)^*$
		$(20,G)^*$				

Les arestes de l'arbre de distàncies mínimes, començant pel vèrtex A són $\{B, D\}, \{C, G\}, \{A, D\}, \{E, D\}, \{F, B\}$ i $\{G, F\}$, amb un pes de 30.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

(a) Sigui A un problema la solució del qual pot verificar-se en temps polinòmic i B un problema NP-Difícil. Indiqueu si són certes o falses les següents afirmacions (són independents entre sí) justificant la teva resposta.

i. Les solucions de B poden verificar-se també en temps polinòmic.

ii. Si existeix un problema C tal que $A \leq_p C$ i $C \leq_p B$, aleshores C és NP.

(b) Donades les següents expressions, convertiu-les a FNC i proporcioneu un conjunt de valors que les facin certes:

i. $(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee c)$.

ii. $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \bar{c}$.

Solució:

(a) i. Fals. En ser B NP-Difícil, B pot pertànyer a NP o a una classe de complexitat superior. La única cosa garantida és que tot problema $Prob \in NP$ pot reduir-se a B. Si $B \notin NP$, aleshores les seves solucions no podran verificar-se en temps polinòmic.

ii. Fals, B i C podrien ser EXP, i tot i així complir-se les reduccions plantejades.

(b) i. Ja està en FNC. Es podria simplicar més i obtenir l'expressió $a \wedge b \wedge c$. L'únic conjunt de valors que fa certa l'expressió és $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

ii. L'expressió en FNC és $(\bar{a} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$. Les solucions que fan certa l'expressió són

$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$,
$a = 0$, $b = 0$, $c = 1$,
$a = 0$, $b = 1$, $c = 0$,
$a = 1$, $b = 0$, $c = 0$,
$a = 1$, $b = 1$, $c = 0$.

Final 3

1. (Valoració d'un 15+5+5=25%)

   (a) Quants nombres parells hi ha de set xifres decimals? Quants d'aquests nombres són també capicua?

   (b) Siguin L_1 i L_2 dues seqüències de bits de longitud n ($n \geq 1$). Considereu el següent algorisme:

función $Func(L_1, L_2)$
  inicio
    $n \leftarrow Longitud(L_1)$
    $comptador \leftarrow 0$
    para $i = 1$ **hasta** n
      si $L_1[i] = L_2[i]$ **entonces**
        $comptador \leftarrow comptador + 1$
      finsi
    finpara
    retorno $n - comptador$
  fin

   i. Calculeu el resultat de la crida *Func*([1,0,1,1,0,1], [1,1,1,1,1,0]). Què calcula la funció?

   ii. Determineu la complexitat de l'algorisme, en funció del nombre de bits n.

Solució:

(a) Com que la primera xifra no pot ser 0 i la darrera ha de ser parell, hi ha $9 \cdot 10^5 \cdot 5 = 4500000$ nombres parells de set xifres decimals. D'aquests, n'hi ha $10^3 \cdot 4 = 4000$ que són capicua, ja que la última i la primera xifra han de ser un número parell diferent de zero.

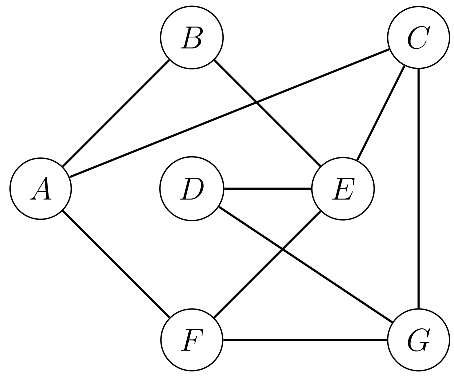
(b) i. El resultat de la crida *Func*([1,0,1,1,0,1], [1,1,1,1,1,0]) és 3. La funció calcula el nombre de posicions en que difereixen les dues seqüències.

   ii. La complexitat de l'algorisme, en funció del nombre de bits n, és $O(n)$.

---

2. (Valoració d'un 5+5+10+5=25%)

   Considereu el següent graf, G, on totes les arestes tenen pes 1:



   (a) Quin és l'ordre i la mida del seu graf complementari G^c a partir de l'ordre i la mida de G?

   (b) Doneu un graf amb la mateixa seqüència gràfica que G però que no sigui isomorf a G. Justifiqueu perquè els dos grafs no són isomorfs.

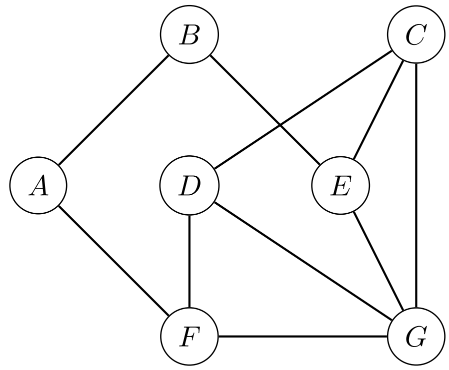
   (c) Doneu el recorregut en BFS de G començant pel vèrtex A i considereu l'arbre que s'obté amb aquest recorregut. És un arbre generador minimal?

   (d) És G hamiltonià?

Solució:

(a) El graf G té ordre $n = 7$ i mida $m = 10$. Aleshores, el graf G^c té el mateix ordre, 7, i mida $\binom{7}{2} - 10 = 21 - 10 = 11$.

(b) La seqüència de graus ordenada de G és $s : 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2$. Un exemple de graf amb la mateixa seqüència de graus seria el graf G_2:



Els grafs G i G_2 no són isomorfs perquè, per exemple, G_2 té cicles de longitud 3 i G no. També es pot veure pel fet que a G_2 el vèrtex de grau 4 està connectat als 3 vèrtexs de grau 3 i això no passa a G.

(c) El recorregut en BFS és

Q	Vèrtex afegit	Vèrtex eliminat	*dist*
A	A	-	[A]
AB	B	-	[A,B]
ABC	C	-	[A,B,C]
ABCF	F	-	[A,B,C,F]
BCF	-	A	[A,B,C,F]
BCFE	E	-	[A,B,C,F,E]
CFE	-	B	[A,B,C,F,E]
CFEG	G	-	[A,B,C,F,E,G]
FEG	-	C	[A,B,C,F,E,G]
EG	-	F	[A,B,C,F,E,G,D]
EGD	D	-	[A,B,C,F,E,G,D]
GD	-	E	[A,B,C,F,E,G,D]
D	-	G	[A,B,C,F,E,G,D]
$\emptyset$	-	D	[A,B,C,F,E,G,D]

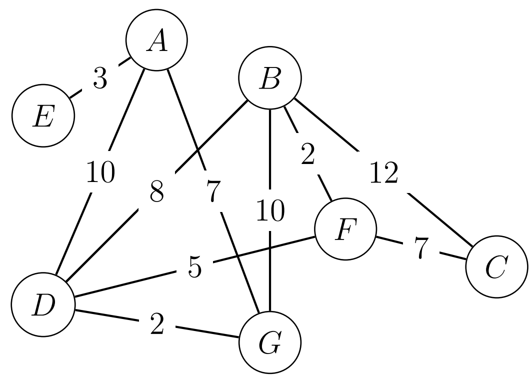
L'arbre obtingut del recorregut en BFS conté les arestes $\{A,B\},\{A,C\},\{A,F\}$, $\{B,E\}$, $\{C,G\},\{E,D\}$ que és un arbre generador. Com que totes les arestes tenen pes 1, qualsevol arbre generador també és un arbre generador minimal.

(d) Podem veure que G és bipartit considerant els conjunts $\{A,E,G\}$ i $\{B,C,D,F\}$. Com que els dos conjunts no tenen el mateix nombre d'elements, aleshores G no és hamiltonià.

---

3. (Valoració d'un 10+5+5+5=25%)

   Una ciutat turística té set punts d'interès. La ciutat disposa de diferents autobusos que connecten els punts entre ells. Els vèrtexs del següent graf representen els punts d'interès, les arestes representen l'existència d'un autobús que connecta els dos punts i el pes és el temps en minuts del trajecte.



   (a) Volem trobar la distància mínima de B a la resta de punts d'interès. Determineu quin és l'algorisme per resoldre el problema i feu servir aquest algorisme per donar la solució.

   (b) Per quins punts d'interès hem de passar per anar de B al punt d'interès més llunyà a B fent servir aquests autobusos?

   (c) Podem assegurar que el punt B i el més llunyà a B són els dos punts d'interès que es troben a més distància? En cas afirmatiu justifiqueu per què i en cas negatiu digueu quin algorisme eficient hauríem d'aplicar per trobar-los (no cal aplicar l'algorisme, només indicar quin seria).

   (d) Volem revisar tots els trajectes en autobús entre els diferents punts d'interès. És possible trobar un circuit o un recorregut que ens permeti passar per tots els trajectes sense repetir-ne cap? Quin algorisme ens permet trobar aquest tipus de recorregut o circuit? En cas que existeixi el circuit o el recorregut, apliqueu l'algorisme per donar la solució.

Solució:

(a) Fem servir l'algorisme de Dijkstra per trobar el camí de pes mínim del vèrtex B a la resta de vèrtexs.

A	B	C	D	E	F	G
(∞,B)	(0,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)
(∞,B)	(0,B)*	(12,B)	(8,B)	(∞,B)	(2,B)	(10,B)
(∞,B)		(9,F)	(7,F)	(∞,B)	(2,B)*	(10,B)
(17,B)		(9,F)	(7,F)*	(∞,B)		(9,D)
(17,B)		(9,F)*		(∞,B)		(9,D)
(16,G)				(∞,B)		(9,D)*
(16,G)*				(19,A)		
				(19,A)*		

(b) El punt d'interès més llunyà és E. A partir de la taula anterior, tenim que el camí de pes mínim és $\{B, F, D, G, A, E\}$. A partir de l'etiqueta del punt E, $(19, A)$, sabem que el camí ve de A. A partir de l'etiqueta de A, $(16, G)$, a A arribem des de G. A partir de l'etiqueta de G, $(9, D)$, venim de D. A partir de l'etiqueta de D, $(7, F)$, venim de F. Finalment, amb l'etiqueta de F, $(2, B)$, arribem al punt inicial B.

(c) El vèrtex E és el que està a major distància de B, però no podem assegurar que no hagin dos vèrtexs diferents a major distància. L'algorisme més eficient per trobar quins són els dos punts d'interès que es troben a major distància és l'algorisme de Floyd.

(d) Volem trobar un circuit o un recorregut eulerià. En aquest cas, podem veure que hi ha 4 vèrtexs de grau senar $\{A, E, F, G\}$ i, per tant, no existeix ni un circuit ni un recorregut eulerià. L'algorisme que permet trobar els circuits o recorreguts eulerians és l'algorisme de Hierholzer.

---

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

(a) Sigui A un problema qualsevol i B un problema P. Indiqueu si són certes o falses les següents afirmacions (són independents entre sí) justificant la vostra resposta i suposant que $P \neq NP$.

i. Si $3SAT \leq_p A$, aleshores $A \leq_p B$.

ii. Existeixen problemes a EXP que no estan a P.

(b) Una empresa de logística vol millorar els següents processos:

i. Carregar un camió: Carregar un camió amb objectes que cal enviar de manera que proporcioni el major benefici a l'empresa sense excedir la seva càrrega màxima autoritzada. Cada objecte a carregar té associat un pes i el benefici que té l'empresa.

ii. Determinar el nombre de repartidors necessaris: L'empresa de transport té un graf en el qual els nodes representen lliuraments a realitzar. Dos nodes estan connectats per una aresta si ambdues entregues tenen el mateix horari. Sabent que per a cada horari són necessaris tants repartidors com lliuraments a realitzar, calcular el mínim nombre de repartidors requerits per a realitzar tots els lliuraments.

Per a cadascun d'aquests problemes, establiu un paral·lelisme amb algun problema de complexitat tractat durant el curs.

Solució:

(a) i. Fals, donat que sabem que A és almenys NP, B pertany a una classe de complexitat inferior i, segons l'enunciat, $P \neq NP$.

ii. Cert, donat que $P \subsetneq EXP$. Un exemple seria el problema dels escacs (trobar una seqüència de jugades guanyadora a partir d'una posició al taulell).

(b) i. El problema associat és el de la motxilla. La capacitat que tenim seria la càrrega màxima del camió, el cost és el pes de la càrrega que volem carregar i el valor, el benefici que obté l'empresa.

ii. El problema associat seria la coloració de grafs. El nombre cromàtic associat al graf indica el nombre mínim d'empleats que necessitem de manera simultània.
