Universitat Oberta de Catalunya

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació

ASSIGNATURA: Grafs i Complexitat

Final 1

1. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

   El següent algorisme ordena una llista de longitud n ($n \geq 1$).

```
funció Seleccio(T)
  inici
    n ← Longitud(T)
    per i = 1 fins n − 1
        imenor ← i
        per j = i + 1 fins n
            si T[j] < T[imenor] aleshores
                imenor ← j
            fisi
        fiper
        intercanviar(T[i], T[imenor])
    fiper
    retorn T
  fi
```

   Justifiqueu quines de les següents afirmacions són correctes:

   a) El resultat de la crida Seleccio([7,5,3,1,6,4,2]) és [7,6,5,4,3,2,1].

   b) Si volem ordenar de major a menor, només cal canviar la condició del **si** de "<" a ">".

   c) La complexitat de l'algorisme, en funció de la longitud n, és $O(n)$.

   d) En l'entrada on l'algorisme és més eficient, la complexitat és d'un altre ordre de magnitud (com passava en l'algorisme d'inserció de la PAC1).

   Solució:

   a) Falsa. El resultat de la crida Seleccio([7,5,3,1,6,4,2]) és [1,2,3,4,5,6,7].

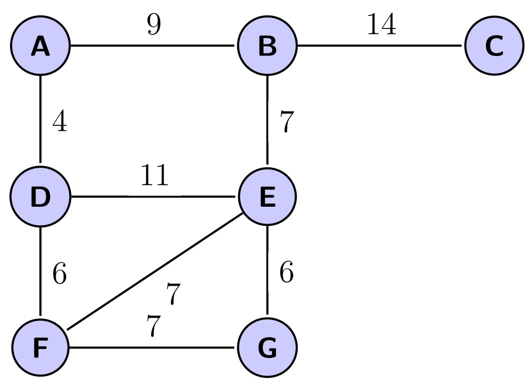
   b) Certa. El bucle intern selecciona l'index de l'element major en lloc del menor.

c) Falsa. La complexitat és $O(n^2)$.

d) Falsa. En el millor dels casos, quan la llista ja està ordenada, només ens estalviem l'assignació del **si** , però les dues iteracions es fan exactament el mateix nombre de vegades.

2. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

   Donat el següent graf:



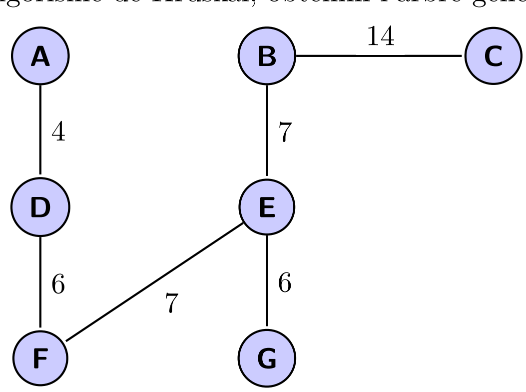
a) Trobeu-ne un arbre generador minimal.

b) Els algorismes de Prim i Kruskal ens donen el mateix arbre generador minimal? És únic?

c) Afectaria als algorismes de Prim i Kruskal que hi pogués haver més d'una aresta entre tot parell de vèrtexs? I que hi pogués haver llaços? Justifiqueu les respostes.

Solució:

a) Aplicant l'algorisme de Kruskal, obtenim l'arbre generador minimal següent:



b) Els algorismes de Prim i Kruskal poden donar el mateix arbre generador minimal (tant l'un com l'altre algorismes poden donar un altre arbre generador minimal o el mateix, segons com es triïn les arestes) però aquest no és únic. L'arbre generador minimal té un pes de 44. Podíem haver obtingut un arbre generador minimal diferent. Observeu que l'algorisme ha triat l'aresta $\{E, F\}$ que té pes 7 però també podíem haver triat l'aresta $\{F, G\}$ amb el mateix pes. Per tant, segons l'ordre amb el qual haguéssim triat les arestes en l'algorisme de Kruskal o Prim podríem haver obtingut un arbre minimal diferent.

c) Si hi pogués haver més d'una aresta entre tot parell de vèrtexs, no afectaria a cap dels dos algorismes, simplement triaríem la de menor pes i descartaríem la resta. Tampoc afectaria que hi pogués haver llaços perquè aquests no es triarien mai ja que provoquen cicle (en el cas de Kruskal) o no afegeixen cap vèrtex nou (en el cas de Prim).

3. (Valoració d'un 10+15=25%)

   a) Quin és el nombre mínim d'arestes que s'han d'eliminar d'un graf complet de n vèrtexs ($n \geq 3$) per tal que passi a tenir tres components connexes?

   b) Sigui $G = (V, A)$ el graf bipartit complet $K_{11,15}$. Justifica quines de les següents TRES afirmacions són certes: el graf complementari de G és eulerià, G és hamiltonià, i el graf complementari de G és un graf complet.

   Solució:

   a) El graf complet K_n conté $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ arestes. Un graf amb tres components connexes té, com a màxim, $\binom{n-2}{2} = \frac{n^2-5n+6}{2}$ arestes. Per tant, s'han d'eliminar, com a mínim, $\binom{n}{2} - \binom{n-2}{2} = 2n - 3$ arestes.

   b) Les tres afirmacions són falses. El graf complementari G^c és el graf $K_{11} \cup K_{15}$, per tant no és un graf complet. A més, com que no és connex, no pot ser eulerià. Finalment, un graf (V_1, V_2)-bipartit per ser hamiltonià ha de complir que $|V_1| = |V_2|$, per tant G no és hamiltonià, ja que $11 \neq 15$.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

   Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

   a) El problema "Determinar si dos grafs són isomorfs" és un problema de càlcul.

   b) Si A és un problema de la classe NP i $A \leq_p B$, aleshores B també pertany a la classe NP.

c) Determinar si un graf donat conté un circuit hamiltonià és un problema de complexitat polinòmica.

d) La fórmula booleana $a \wedge (b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee c) \wedge \overline{b}$ està en FNC (forma normal conjuntiva).

Solució:

a) Falsa. És un problema decisional, ja que la solució és SÍ o NO.

b) Falsa, seria cert si la reducció fos $B \leq_p A$.

c) Falsa, és un problema NP-complet.

d) Certa, és una conjunció de disjuncions.

Final 2

1. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

   El següent algorisme ordena una llista de longitud n ($n \geq 1$).

```
funció Bombolla(T)
  inici
    n ← Longitud(T)
    per i = 1 fins n − 1
        per j = n fins i + 1 pas −1
            si T[j − 1] < T[j] aleshores
                intercanviar(T[j − 1], T[j])
            fisi
        fiper
    fiper
    retorn T
  fi
```

   Justifiqueu quines de les següents afirmacions són correctes:

   a) El resultat de la crida Bombolla([6,4,2,7,5,3,1]) és [7,6,5,4,3,2,1].

   b) Si volem ordenar de forma creixent, només cal canviar la condició del **si** de "<" a ">".

   c) La complexitat de l'algorisme, en funció de la longitud n, és $O(n)$.

   d) En l'entrada on l'algorisme és més eficient, la complexitat és del mateix ordre de magnitud (al revés del que passava en l'algorisme d'inserció de la PAC1).

   Solució:

   a) Certa. En la versió que hem donat, ordena de major a menor.

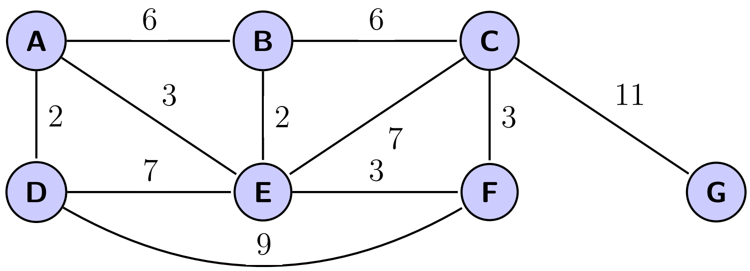
   b) Certa. Es tracta de la versió explicada al material docent.

   c) Falsa. La complexitat és $O(n^2)$.

   d) Certa. En el millor dels casos, quan la llista ja està ordenada, només ens estalviem l'assignació del **si** , però les dues iteracions es fan exactament el mateix nombre de vegades.

2. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

   Considerem el següent graf:



a) Trobeu la distància mínima entre el vèrtex A i el vèrtex G del graf anterior, aplicant l'algorisme de Dijkstra. Mostreu tots els passos de l'algorisme.

b) Recupereu el camí de cost mínim a partir de la taula que heu elaborat per resoldre l'apartat a).

c) Digueu, justificant la resposta, si el graf donat és eulerià o hamiltonià.

Solució:

a) Aplicant l'algorisme de Dijkstra començant pel vèrtex A s'obté la següent taula:

A	B	C	D	E	F	G
$(0, A)^*$	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(6, A)$	(∞, A)	$(2, A)^*$	$(3, A)$	(∞, A)	(∞, A)
$(0, A)$	$(6, A)$	(∞, A)	$(2, A)$	$(3, A)^*$	$(11, D)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(5, E)^*$	$(10, E)$	$(2, A)$	$(3, A)$	$(6, E)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(5, E)$	$(10, E)$	$(2, A)$	$(3, A)$	$(6, E)^*$	(∞, A)
$(0, A)$	$(5, E)$	$(9, F)^*$	$(2, A)$	$(3, A)$	$(6, E)$	(∞, A)
$(0, A)$	$(5, E)$	$(9, F)$	$(2, A)$	$(3, A)$	$(6, E)$	$(20, C)^*$

Per tant, la distància mínima és 20.

b) El camí de cost mínim des del vèrtex A al vèrtex G és $A - E - F - C - G$.

c) El graf no és eulerià ni conté cap circuit eulerià ja que conté més de dos vèrtexs de grau senar. El graf tampoc és hamiltonià, ja que no és 2-connex i aquesta és una condició necessària perquè un graf sigui hamiltonià.

3. (Valoració d'un 10+5+10=25%)

a) Dibuixeu l'arbre corresponent a l'expressió aritmètica

$$\frac{5^{a+\frac{b}{c}} + c}{2a + b3^a}$$

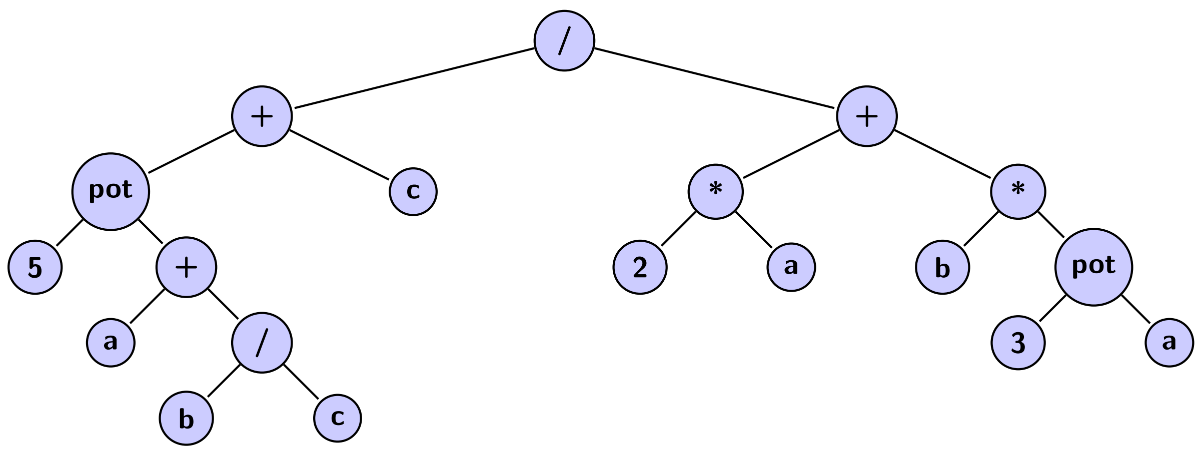
tenint en compte la prioritat habitual dels operadors.

b) Digueu quina és l'altura de l'arbre resultant, i si és un arbre binari complet.

c) Doneu el recorregut en preordre, i postordre de l'arbre de l'apartat anterior.

Solució:

a) L'arbre és



b) L'altura de l'arbre és 5, i és un arbre binari complet, ja que tots els vèrtexs interns tenen grau de sortida 2.

c) Aquests són els recorreguts:

- Preordre: / + pot 5 + a / b c c + * 2 a * b pot 3 a;
- Postordre: 5 a b c / + pot c + 2 a * b 3 a pot * + /.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) El problema SAT és un problema d'optimització.

b) Donats tres problemes A, B i C, si $A \leq_p B$ i $B \leq_p C$, aleshores $A \leq_p C$.

c) El problema del viatjant de comerç pertany a NP.

d) Si A és NP-difícil, aleshores A és NP-complet.

Solució:

a) Falsa. És un problema decisional, ja que la solució és SÍ o NO.

b) Certa, la reducció polinòmica és transitiva.

c) Certa, ja que si ens donen una possible ruta com a testimoni podem comprovar que és correcta en temps polinòmic.

d) Falsa, és certa justament la inversa: si A és NP-complet, aleshores A és NP-difícil.

Final 3

1. (Valoració d'un 10+15=25%)

   a) Quantes paraules de longitud 4 es poden formar amb les lletres A,B,C,D,E,F,G, H,I,J,K? Quantes paraules de longitud 4 es poden formar amb les lletres anteriors de forma que totes les lletres de la paraula siguin diferents?

   b) Quantes funcions injectives podem construir de $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ en un conjunt X amb 11 elements? Dissenyeu un algorisme que retorni el nombre de funcions injectives de $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ a un conjunt X amb n elements i digueu quina complexitat té.

   Solució:

   a) Es poden formar $VR(11, 4) = 11^4 = 14641$ paraules de longitud 4. Amb totes les lletres diferents es poden formar $V(11, 4) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$ paraules de longitud 4.

   b) El número de funcions injectives de $\mathbb{N}_4$ en X és $V(11, 4) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$. El següent algorisme permet calcular el nombre de funcions injectives de $\mathbb{N}_r$ en el conjunt X amb n elements, que ve donat per la fórmula $V(n, r) = n \cdot n - 1 \cdot \ldots (n - r + 1)$.

```
funció NumFuncionsInjectives(n, r)
  inici
    resultat ← 1
    per i = n − r + 1 fins n
        resultat ← resultat ∗ i
    fiper
    retorn resultat
  fi
```

   Si suposem que fer un producte representa una operació elemental, aquest algorisme té una complexitat $O(r)$.

2. (Valoració d'un 15+10=25%)

   a) Considereu la seqüència $s: \; n, 5, 5, 2, 2, 1, 1$. Determineu per a quins valors $1 \leq n \leq 5$ obtenim una seqüència gràfica usant l'algorisme de Havel-Hakimi.

   b) Un arbre de 35 vèrtexs té un vèrtex de grau 8, 4 de grau 5, x de grau 3 i la resta són fulles. Quantes fulles té?

   Solució:

a) Pel lema de les encaixades, sabem que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell, per tant n ha de ser parell. Així, només hem d'analitzar dos casos: $n = 2$ i $n = 4$:

$n = 2$	$n = 4$
$5, 5, 2, 2, 2, 1, 1$	$5, 5, 4, 2, 2, 1, 1$
$4, 1, 1, 1, 0, 1$	$4, 3, 1, 1, 0, 1$
$4, 1, 1, 1, 1, 0$	$4, 3, 1, 1, 1, 0$
$0, 0, 0, 0, 0$	$2, 0, 0, 0, 0$
	$-1, -1, 0, 0$
És gràfica	No és gràfica

b) Si denotem per y el nombre de fulles, aplicant la fórmula dels graus:

$$2(35 - 1) = 1 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + x \cdot 3 + y \cdot 1.$$

D'aquesta equació obtenim $68 = 28+3x+y$. Per altra banda, tenim $35 = 1+4+x+y$. De les dues equacions deduïm que $x = 5$ i $y = 25$. Per tant, hi ha 25 fulles.

3. (Valoració d'un 5+10+10=25%)

Segons la revista *NeoFronteras* (`http://neofronteras.com/?p=3281`) les abelles han après a minimitzar el camí recorregut quan han de sortir a recollir el pol·len. Suposem que un eixam recull pol·len a 5 camps de flors. Un biòleg ha calculat la distància entre aquests camps i l'eixam tal com mostra la taula següent,

	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
E		15	30	20	50	65
C_1			40	30	40	75
C_2				35	75	95
C_3					40	60
C_4						50
C_5						

a) Amb la solució de quin problema de la teoria de grafs podrien les abelles haver calculat el camí mínim que sortint i tornant a l'eixam, passa per tots els vèrtexs del graf determinat per la taula anterior?

b) Utilitzant la teoria de grafs, trobeu una fita inferior a la longitud del camí mínim que, sortint i arribant a l'eixam, passa per tots els vèrtexs del graf.

c) Utilitzant la teoria de grafs, trobeu una fita superior a la longitud del camí mínim que, sortint i arribant a l'eixam, passa per tots els vèrtexs del graf.

Solució:

a) El problema que han de resoldre és el del viatjant de comerç.

b) Podem calcular una fita inferior a partir del pes de l'arbre generador minimal. Aplicant l'algorisme de Kruskal obtenim l'arbre $\{E, C_1\}$, $\{E, C_3\}$, $\{E, C_2\}$, $\{C_1, C_4\}$, $\{C_4, C_5\}$ amb un pes total de 155.

c) Podem aplicar l'algorisme TSP-aproximat al graf determinat per la taula de l'exercici, atès que el graf satisfà la desigualtat triangular.

   1) Calculem l'arbre generador minimal: $\{E, C_1\}$, $\{E, C_3\}$, $\{E, C_2\}$, $\{C_1, C_4\}$, $\{C_4, C_5\}$ amb un pes total de 155.
   2) Recorregut en preordre: $P = \{E, C_1, C_4, C_5, C_2, C_3\}$.
   3) Cicle hamiltonià: $H = \{E, C_1, C_4, C_5, C_2, C_3, E\}$ amb una longitud de 255.

4. (Valoració d'un 6.25+6.25+6.25+6.25=25%)

Digueu si són certes o falses les afirmacions següents, justificant la resposta:

a) Un algorisme amb complexitat temporal $O(n^2)$ pot tenir una complexitat espacial $O(n^3)$.

b) Si $B \in P$ i $A \leq_p B$, aleshores $A \in P$.

c) El problema SAT és NP-complet però el problema 3SAT no.

d) Si A és NP-difícil, aleshores $A \in NP$.

Solució:

a) Falsa, la complexitat espacial no pot ser superior a la temporal.

b) Certa, per les propietats de les reduccions.

c) Falsa, tant el problema SAT com el problema 3SAT són NP-complets.

d) Falsa, només seria cert si A fos NP-complet.