



PAC2

05.579 - Autòmats i gramàtiques
Grau en Enginyeria Informàtica

feb18-jun18

Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació



Presentació

En aquesta Prova d'Avaluació Continuada es treballen els conceptes bàsics de l'assignatura sobre alfabets, mots i llenguatges, així com diferents conceptes sobre llenguatges incontextuals i autòmats amb pila.

Competències

En aquesta PAC es desenvolupen les competències següents:

- Capacitat per utilitzar els fonaments matemàtics, estadístics i físics per comprendre els sistemes TIC.
- Capacitat per analitzar un problema en el nivell d'abstracció adequat a cada situació i aplicar les habilitats i coneixements adquirits per a resoldre'l.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta Prova d'Avaluació Continuada són:

- Conèixer les operacions sobre llenguatges i mots (concatenació, clausures) i saber utilitzar-les per descriure llenguatges complexos.
- Saber construir gramàtiques incontextuals que generin un llenguatge donat.
- Saber construir autòmats amb pila per reconèixer les paraules d'un llenguatge donat.
- Saber expressar una gramàtica en qualsevol de les formes simplificades i normals més habituals.

Recursos

Els següents recursos són d'utilitat per la realització de la PAC:

Bàsics

- Mòdul didàctic 1. Alfabets, mots i llenguatges.
- Mòdul didàctic 3. Gramàtiques incontextuals i autòmats amb pila.

Complementaris

- Eines de suport com exàmens, proves de validació/síntesi i PACs de semestres anteriors.



Criteris de valoració

La ponderació dels exercicis és la següent:

- Exercici 1: 35%
- Exercici 2: 15%
- Exercici 3:
 - 3.1: 10%
 - 3.2: 30%
 - 3.3: 10%

Format i data de lliurament

Cal lliurar **un únic document** Word, Open Office, Latex o PDF amb el nom (**Cognom1 Cognom2, Nom**) i les respostes a les preguntes. El nom del fitxer ha de ser: **Cognom1-Cognom2-Nom-PAC2.ext** on **"ext"** fa referència a l'extensió del fitxer.

Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de **Lliurament i Registre d'AC** de l'aula abans de les **23:59** del dia **22 de maig de 2018**.

No s'acceptaran lliuraments fora de termini.

Nota: Propietat intel·lectual

Sovint és inevitable, en produir una obra multimèdia, fer ús de recursos creats per terceres persones. És per tant comprensible fer-ho en el marc d'una pràctica dels estudis del Grau Multimèdia, sempre i això es documenti clarament i no suposi plagi en la pràctica.

Per tant, en presentar una pràctica que faci ús de recursos aliens, s'ha de presentar juntament amb ella un document en què es detallin tots ells, especificant el nom de cada recurs, el seu autor, el lloc on es va obtenir i el seu estatus legal: si l'obra està protegida pel copyright o s'acull a alguna altra llicència d'ús (Creative Commons, llicència GNU, GPL, ...). L'estudiant haurà d'assegurar-se que la llicència que sigui no impedeix específicament seu ús en el marc de la pràctica. En cas de no trobar la informació corresponent haurà d'assumir que l'obra està protegida pel copyright.

Hauran, a més, adjuntar els fitxers originals quan les obres utilitzades siguin digitals, i el seu codi font si correspon.

Un altre punt a considerar és que qualsevol pràctica que faci ús de recursos protegits pel copyright no podrà en cap cas publicar-se en Mosaic, la revista del Graduat en Multimèdia a la UOC, a no ser que els propietaris dels drets intel·lectuals donin la seva autorització explícita.



Descripció de la PAC a realitzar

Exercici 1 [35%]

Trobeu una gramàtica incontextual que generi el llenguatge següent:

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq 2j\}$$

Solució:

$$L = \{a^i b^j \mid i \neq 2j\} = L_1 \cup L_2$$

On:

$$L_1 = \{a^i b^j \mid i > 2j\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j \mid i < 2j\}$$

L_1 :

$$S_1 \rightarrow A_1 B_1 \mid A_1$$

$$A_1 \rightarrow a A_1 \mid a$$

$$B_1 \rightarrow aa B_1 b \mid aab$$

Observacions:

- La gramàtica ha de poder generar el conjunt a^+ .
- Una vegada hem garantit que per cada “b” hi ha dues “a” (la producció B_1), el nombre de “a” pot créixer tant com vulguem, cosa que podem fer amb la producció A_1 .

L_2 :

$$S_2 \rightarrow A_2 B_2 \mid A_2 \mid B_2$$

$$A_2 \rightarrow a A_2 b \mid aa A_2 b \mid ab$$

$$B_2 \rightarrow b B_2 \mid b$$

Observacions:

- La gramàtica ha de poder generar el mot “ab” i el conjunt b^+ .



- En aquest cas hem de tenir en compte que per a cada “b” podem posar una o dues “a”.

I la producció inicial:

$$S \rightarrow S_1|S_2$$

Exercici 2 [15%]

Poseu la gramàtica següent en forma normal de Chomsky:

$$G(V, T, P, S), V = \{A, B, C, D\}, T = \{a, b, d\}$$

$$S \rightarrow ABC|BD|CD$$

$$A \rightarrow aA|C$$

$$B \rightarrow bB|b|CAB$$

$$C \rightarrow \lambda$$

$$D \rightarrow CA|d$$

Solució:

Eliminació de regles de producció buides:

$$S \rightarrow ABC|AB|BC|B|BD|CD|C|D$$

$$A \rightarrow aA|a|C$$

$$B \rightarrow bB|b|CAB|AB|CB|B$$

$$D \rightarrow CA|C|A|d$$

Eliminació de regles unitàries:

$$S \rightarrow ABC|AB|BC|bB|b|CAB|CB|BD|CD|CA|aA|a|d$$

$$A \rightarrow aA|a$$

$$B \rightarrow bB|b|CAB|AB|CB$$

$$D \rightarrow CA|aA|a|d$$

Eliminació de símbols redundants:

$$V' = \{D, B, S, A\}$$

$$S \rightarrow AB|bB|b|BD|aA|a|d$$

$$A \rightarrow aA|a$$

$$B \rightarrow bB|b|AB$$



$$D \rightarrow aA|a|d$$

FNC:

$$S \rightarrow AB|C_bB|b|BD|C_aA|a|d$$

$$A \rightarrow C_aA|a$$

$$B \rightarrow C_bB|b|AB$$

$$D \rightarrow C_aA|a|d$$

$$C_a \rightarrow a$$

$$C_b \rightarrow b$$

Exercici 3 [50%]

Els autòmats amb pila amb dues piles es poden definir formalment com una 9-tupla $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \Sigma, \Gamma_0, \Gamma_1, \delta, \mathbf{q}_0, \mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \mathbf{F})$. En aquests tipus d'autòmats, $\mathbf{Q}, \Sigma, \Gamma_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{Z}_0$ i \mathbf{F} són els mateixos que en els autòmats amb pila normals, però \mathbf{Z}_1 denota el símbol inicial de la segona pila, Γ_1 és l'alfabet de la segona pila, i la funció de transició δ és defineix de la forma següent:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma_0 \times \Gamma_1 \rightarrow (Q \times \Gamma_0^* \times \Gamma_1^*)$$

Observem que quan es descriu una transició de l'autòmat es té en compte un símbol de cadascuna de les piles. Per exemple, una transició de la forma $\delta(\mathbf{q}, \sigma, \gamma_1, \gamma_2,) = \{(\mathbf{p}, \gamma, \lambda)\}$ canviaria de l'estat \mathbf{q} a l'estat \mathbf{p} , substituiria el símbol γ_1 de la primera pila pel símbol o cadena γ , i desempilaria un símbol de la segona pila. Direm que un autòmat amb dues piles accepta una paraula per pila buida quan, després de llegir la paraula d'entrada, totes dues piles resten buides.

1. [15%] Demostreu **formalment** que qualsevol llenguatge incontextual és acceptat per un autòmat amb pila amb dues piles (per pila buida). En aquesta demostració podeu utilitzar qualsevol dels resultats vistos a la part teòrica de l'assignatura.
2. [30%] Definiu un autòmat amb dues piles (la segona pila no es pot deixar inactiva) que accepti el llenguatge següent (**per pila buida**) i justifiqueu cada transició o grup de transicions.

$$L = \{a^i b^i c^i | i \geq 1\}$$

3. [5%] Determineu les descripcions instantànies per a les paraules d'entrada: *aabbcc*, *abb*, *abcc*.



Solució:

1. Partim del fet següent: Si L és un llenguatge incontextual, llavors existeix M , autòmat amb pila, que accepta L . Donada l'equivalència entre els autòmats que accepten per pila buida amb els que accepten per estat final, sabem que existeix $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, F)$ tal que $N(M) = L$.

Anem a construir $M' = (Q', \Sigma', \Gamma'_0, \Gamma'_1, \delta', q'_0, Z'_0, Z'_1, F')$ a partir de M de manera que $N(M') = L$.

- $Q' = Q$
- $\Sigma' = \Sigma$
- $\Gamma'_0 = \Gamma'_1 = \Gamma$
- $q'_0 = q_0$
- $Z'_0 = Z'_1 = Z$
- F és irrellevant.
- M' tindrà les mateixes transicions que M , però repetint l'operació en totes dues piles (també es podria considerar l'opció de deixar inactiva la segona pila).
- Pel que fa a la funció de transició:

$$\delta(q, \sigma, \gamma) = \{(p, \gamma')\} \Leftrightarrow \delta'(q, \sigma, \gamma, \gamma) = \{(p, \gamma', \gamma')\}$$

$$q, p \in Q, \sigma \in \Sigma, \gamma \in \Gamma, \gamma' \in \Gamma^*$$

Observem que quan la pila de l'autòmat M es buidi, també es buidaran les dues piles de M' .

2.

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

Sigui $M = (Q, \Sigma, \Gamma_0, \Gamma_1, \delta, q_0, Z_0, Z_1, F)$ on

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma, \Gamma = \{a, b, c, Z\}$
- $Z_0 = Z_1 = Z$
- F és irrellevant.



| | $a/Z_0/Z_1$ | $a/a/Z_1$ | $b/a/Z_1$ | $b/a/b$ | $c/a/b$ | $\lambda/Z_0/Z_1$ |
|-------|--------------------|------------------|------------------|----------------|---------------------------|---------------------------|
| q_0 | (q_0, aZ_0, Z_1) | (q_0, aa, Z_1) | (q_1, a, bZ_1) | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| q_1 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | (q_1, a, bb) | (q_2, λ, λ) | \emptyset |
| q_2 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | (q_2, λ, λ) | (q_2, λ, λ) |

- Les transicions de la fila de l'estat q_0 empilen les “a” (com a mínim n’hi haurà una) fins que arriba una “b”, la qual s’emmagatzema a la segona pila i l'autòmat passa a l'estat q_1 , des del qual s’efectuarà el control de les “b”.
- Les transicions de la fila de l'estat q_1 empilen les “b” fins que arriba una “c”, moment en què es cancel·la una “a” i una “b”, i es passa a l'estat q_2 , des d'on es buidaran progressivament les dues piles conforme es van llegint les “c” fins que les dues piles quedin buides.

3. Descripcions instantànies de: {abc, abb, abcc}

- $(q_0, aabbcc, Z_0, Z_1) \dashv\vdash (q_0, abbcc, aZ_0, Z_1) \dashv\vdash (q_0, bbcc, aaZ_0, Z_1) \dashv\vdash (q_1, bcc, aaZ_0, bZ_1) \dashv\vdash (q_1, cc, aaZ_0, bbZ_1) \dashv\vdash (q_2, c, aZ_0, bZ_1) \dashv\vdash (q_2, \lambda, Z_0, Z_1)$ i buidem les dues piles.
- $(q_0, abb, Z_0, Z_1) \dashv\vdash (q_0, bb, aZ_0, Z_1) \dashv\vdash (q_1, b, aZ_0, bZ_1) \dashv\vdash (q_1, \lambda, aZ_0, bbZ_1)$ i anem a parar a l'estat pou.
- $(q_0, abcc, Z_0, Z_1) \dashv\vdash (q_0, bcc, aZ_0, Z_1) \dashv\vdash (q_1, cc, aZ_0, bZ_1) \dashv\vdash (q_2, c, Z_0, Z_1)$ i anem a parar a l'estat pou.