Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = -2 - 2i$$

b) Calcula les arrels sisenes del complex següent: $z = -1$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Solució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = -2 - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{-2}{-2} - 180^\circ = arctg(1) - 180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ = 225^\circ$

$z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^\circ}$

Oposat:

$-z = 2 + 2i$

Argument: $m = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = 45^\circ$

$-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^\circ}$

Conjugat:

$\bar{z} = -2 + 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{2}{-2} + 180^\circ = arctg(-1) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$

$\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$

Per tant:

$z = -2-2i = 2\sqrt{2}_{225^o}$

$-z = 2+2i = 2\sqrt{2}_{45^o}$

$\bar{z} = -2+2i = 2\sqrt{2}_{135^o}$

b) Escrivim el complex $z=-1$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{(-1)^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{-1}\right) + 180^o = arctg 0 + 180^o = 180^o$$

Observem que podem sumar o restar 180º ja que la part real és positiva i la part imaginària és nul·la, això és, 180º=-180º (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 i exemple segon de la página 29 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^o}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^o}} = 1_{\frac{180^o+360^o k}{6}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=1$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{180^o+360^o k}{6}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 30^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 30^o+60^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 30^o+120^o = 150^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 30^o+180^o = 210^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 30^o+240^o = 270^o$
- Si k=5, tenim que $\beta_4 = 30^o+300^o = 330^o$

Per tant, les sis arrels sisenes del complex $z=-1$ són:

$$\boxed{1_{30^o} = 1\cdot(\cos 30^o + i\cdot\sin 30^o) = 0{,}866 + 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{90^o} = 1\cdot(\cos 90^o + i\cdot\sin 90^o) = i}$$

$$\boxed{1_{150^o} = 1\cdot(\cos 150^o + i\cdot\sin 150^o) = -0{,}866 + 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{210^o} = 1\cdot(\cos 210^o + i\cdot\sin 210^o) = -0{,}866 - 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{270^o} = 1\cdot(\cos 270^o + i\cdot\sin 270^o) = -i}$$

$$\boxed{1_{330^o} = 1\cdot(\cos 330^o + i\cdot\sin 330^o) = 0{,}866 - 0{,}5i}$$

Exercici 2.

Siguin $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,2,0)$, $v_3=(1,2,0)$, $v_4=(6,6,0)$, $v_5=(-4,0,0)$ vectors de R^3.

Sigui $V=<v_1, v_2, v_3, v_4, v_5>$. Sigui $w=(-2,-4,0)$

a) Troba la dimensió de V i una base A. Pertany w a V? Si és que sí, troba'n les coordenades en la base A.

b) Sigui $B=\{e_1, e_2\}$ una base de V, on $e_1 = v_1 + v_2$ i $e_2 = v_1 - \frac{1}{2}v_2$. Troba la matriu de canvi de base de B a A.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que trobem el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Així la dimensió de V és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que contenen el determinant anterior $A=\{v_1, v_2\}$.

Per mirar si w pertany a V resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=-2, y=-1. Per tant les coordenades de w en la base A són (-2, -1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. I això és justament la definició. Així tenim que la matriu de canvi de base M és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercici 3.

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+3z &= 2x \\ ay-3z &= 2y \\ -x-y+(-a-1)z &= 2z \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema té més d'una solució.
b) Resoleu el sistema per als casos $a=-3$ i $a=0$.

Resolució:

a) El sistema plantejat és igual, després de traspassar els termes de la dreta a l'esquera al sistema homogeni

$$\left.\begin{aligned} -3x+2y+3z &= 0 \\ (a-2)y-3z &= 0 \\ -x-y+(-a-3)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

En tractar-se d'un sistema homogeni, sempre compatible, el sistema tindrà més d'una solució quan el rang de la matriu de coeficients sigui inferior al nombre d'incògnites, 3 en el nostre cas.

La matriu dels coeficients és

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{pmatrix}.$$

Com que

$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

i per tal que el rang(A) es mantingui igual a 2 el que hem de calcular és el valor de a que anul·la el determinant de la matriu A.

Per tant

$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{vmatrix} = 3(a-2)(a+3) + 6 + 3(a-2) + 9 = 3a^2 + 6a - 9 = 3(a^2 + 2a - 3)$

.

Igualant a 0, obtenim

$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \left| \begin{array}{l} \boxed{a=1} \\ \boxed{a=-3} \end{array} \right.$.

Així doncs, pels valors a=1 i a= -3 el rang és 2 i per tant el sistema té infinites solucions.

El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu A.

b) Cas $a = -3$.

En aquest cas el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{aligned} -3x + 2y + 3z &= 0 \\ -5y - 3z &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

i sabem que rang(A)=2 i per tant que el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir amb una incògnita com a paràmetre.

Com que la primera equació és combinació lineal de la segona i la tercera, resoldrem el sistema directament a partir de les dues darreres equacions i obtenim $x = -y$ i $z = \frac{-5y}{3}$.

Per tant els punts solució del sistema són els de la forma $\boxed{\left(-y,\ y, \frac{-5y}{3}\right)}$.

Cas $a = 0$.

En aquest cas el sistema és compatible determinat i per tant l'única solució és el $\boxed{x = y = z = 0}$.

Exercici 4.

Sigui P el triangle de vèrtexs (0,0), (0,1), (1,1).

a) Sigui G el gir d'angle α radians en sentit antihorari des del punt (2,1). Anomenem $c=\cos(\alpha)$ i $s=\sin(\alpha)$. Sigui Q la imatge de P per G. Calculeu Q en funció de c i s.

b) Hi ha algun angle α de manera que Q tingui alhora dos vèrtexs a la recta $x=y$? Si és que sí, trobeu-lo.

Resolució:

a) Per fer un gir d'angle α des del punt (2,1), primer fem la translació que porta el (1,0) a l'origen *(veure apunts M6, Notació matricial eficient)*: $T=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després fem el gir d'angle α en sentit antihorari:

$$gir=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)&0\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-s&0\\s&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Després desfem la translació: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim G, el gir d'angle α en sentit antihorari des del punt (2,1):

$$G=T^{-1}\cdot gir\cdot T=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&-s&0\\s&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-s&-2c+s+2\\s&c&-2s-c+1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculem Q, la imatge del triangle P pel gir G:

$$\begin{pmatrix}c&-s&-2c+s+2\\s&c&-2s-c+1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2c+s+2&-2c+2&-c+2\\-2s-c+1&-2s+1&-s+1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

El triangle Q és el de vèrtexs:

$(-2c+s+2,-2s-c+1),(-2c+2,-2s+1),(-c+2,-s+1)$.

b) Per a que Q tingui alhora dos vèrtexs a la recta $x=y$, hem d'imposar dues de les següents igualtats alhora:

$-2c+s+2=-2s-c+1$,

$-2c+2=-2s+1$,

$-c+2=-s+1$.

Simplificant:

$-c+3s+1=0$,

$2s-2c+1=0$

$c=s+1$.

Si agafem les dues últimes obtenim:
$2s-2(s+1)+1=0; 2s-2s-2+1=0; -1=0$ Impossible!!!.

Si agafem les dues primeres obtenim:
$6s-2c+2=2s-2c+1; 4s+1=0; s=-1/4$

Substituint

$-c+3(-1/4)+1=-c-3/4+1=-c+1/4=0; c=1/4$

Impossible, no hi ha cap angle que ho compleixi!!!.

Ho provem amb la primera i la tercera:

$-c+3s+1=0$ i $c=s+1$.

Substituint: $-s-1+3s+1=0; 2s=0; s=0$

$c=s+1; c=0+1=1$

Així doncs hem trobat: s=0 i c=1

Per tant, per $\alpha = \mathbf{0^o}$,Q té dos vèrtexs en la diagonal x=y.