Analyse

Correspondant aux cours d'Analyse III et IV donné respectivement par le Prof. J. Douchet et le Prof. R. Dalang aux sections Sciences de la Vie et Microtechnique pendant la période académique 2008-2009

Johan Boissard
13 juin 2009

Bibliographie

1. Notes de cours
2. B. DACOROGNA - C. TANTERI : Analyse avancée pour ingénieurs, Deuxième édition corrigée, PPUR, 2006.
3. E. KREYSZIG : Advanced Engineering Mathematics, Nineth edition, Wiley, 2006.

Table des matières

Première partie

Anayse Vectorielle

1

Opérateurs différentiels de la physique

1.1 Généralités

Définition **Gradient** de f
$gradf(x) = \nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)) \in \mathbb{R}^n$

pour $f \in \mathbb{C}^1$ et $n \geq 2$

Définition **Divergence** de F
Soit $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x)), F \in \mathbb{C}^1$

$divF(x) = \nabla \cdot F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$

Définition **Rotationnel** de F

1. si $n = 2$ et si $F(x) = (F_1(x), F_2(x)),\ F \in \mathbb{C}^1$

   $rotF(x) = \nabla \times F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$

2. si $n = 3$ et si $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)),\ F \in C^1$

   $rotF(x) = (\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)) \in \mathbb{R}^3$
   ou
   $rotF(x) = \nabla \times F(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

Définition **Laplacien** de f
$\Delta f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}$

pour $f \in \mathbb{C}^2$

Remarques : Le **gradient** et le **Laplacien** accepte des champs **scalaires** comme argument, tandis que les **divergences** et **rotationnels** prennent des champs **vectoriels** comme argument.

Exemple Soit $F(x,y,z) = (y^2\sin(xz), e^y\cos(x^2+z), \ln(2+\cos(xy)) = (f_1, f_2, f_3)$

1. Calculer les gradients de f_1, f_2, f_3
2. $\nabla \cdot F(x,y,z)$
3. $\nabla \times F(x,y,z)$

$\nabla f_1(x,y,z) = (y^2 z\cos(xz), 2y\sin(xz), xy^2\cos(xz))$
$\nabla f_2(x,y,z) = (-2xe^y\sin(x^2+z), e^y\cos(x^2+z), -e^y\sin(x^2+z))$
$\nabla f_3(x,y,z) = (-\frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, -\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, 0)$

$\nabla \cdot F(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = y^2 z\cos(xz) + e^y\cos(x^2+z)$

$\nabla \times F(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)} + e^y\sin(x^2+z) \\ xy^2\cos(xz) + \frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)} \\ -2xe^y\sin(x^2+z) - 2y\sin(xz) \end{pmatrix}$

Exemple Soit $f(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y))$ et $x = r\cos\theta$ et $y = r\cos\theta$
Montrer que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$
Calculer ensuite Δf pour
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + (\arctan\frac{y}{x})^2$

Tout d'abord on a : $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ avec les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r^2}$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x(x/r)}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4}$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$
et
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$

puis
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$
et
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$
puis en remplaçant par les dérivées calculées plus haut
$\Delta f =$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} =$
$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$

Deuxième partie :
$f(x,y) = g(r,\theta) = r + \theta^2$
$\Delta f = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2}{x^2+y^2}$

2

Intégrales curvilignes

2.1 Généralités

Définition Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière paramétrée par $\gamma : [a,b] \to \Gamma, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. On notera

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) \qquad et \qquad ||\gamma'(t)|| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu'(t))^2}$$

1. Soit $\Gamma \to \mathbb{R}$ une fontion continue. L'intégrale de f le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma f dl = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$$

2. Soit $F = (F_1, \cdot, F_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel continu. L'intégrale de F le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{\nu=1}^{n} F_n u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

3. si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière par morceaux et si $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel continu, alors

$$\int_\Gamma f dl = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt$$

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

4. **Remarques**

(a) La longueur d'une courbe Γ est obtenue en prenant $f \equiv 1$, c'est-à-dire

$$longueur(\Gamma) = \int_\Gamma dl$$

(b) Les définitions sont indépendantes du choix de la paramétrisation (au signe près pour un champs vectoriel).

Exemple Calculer la longueur d'un cercle de rayon r

$\Gamma = \{\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))\}$
alors $\gamma'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ et $|\gamma'(t)| = r$
et donc
$longueur(\Gamma) = \int_\gamma dl = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$

Exemple Calculer $\int_\Gamma f dl$ quand $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y = x^2, x \in [0, 1]\}$

On peut paramétriser comme suit $\gamma(t) = (t, \frac{t^2}{2})$
avec $\gamma'(t) = (1, t)$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + t^2}$
et donc
$\int_\Gamma f dl = \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^4}\sqrt{1 + t^2}\,dt = \int_0^1 t(1 + t^2)\,dt = \frac{3}{4}$

Exemple Calculer $\int_\Gamma F \cdot dl$ quand $F(x, y) = (x^2, 0)$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]\}$

On peut paramétriser comme suit $\gamma(t) = (t, \cosh t)$
avec $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$
et donc
$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_0^1 (t^2, 0) \cdot (1, \sinh t)dt = \frac{1}{3}$

Exemple Soient $F(x, y) = (x + y, -x)$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$

1. Montrer que $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est une paramétrisation de Γ.
2. Calculer $\int_\Gamma F \cdot dl$

Une façon de le prouver est la suivante :

$$\begin{aligned}
\sin^2 2t + 4\sin^4 t - 4\sin^2 t = 0 \\
\sin^2 2t = 4(\sin^2 t - \sin^4 t) \\
\sin^2 2t = 4\sin^2 t(1 - \sin^2 t) \\
\sin^2 2t = 4\sin^2 t\cos^2 t \\
\sin^2 2t = (2\cos t\sin t)^2 = \sin^2 2t
\end{aligned}$$

avec $\gamma'(t) = (\cos t, 2\cos 2t)$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F \cdot dl &= \\
\int_0^\pi (\sin t + \sin 2t, -\sin t) \cdot (\cos t, 2\cos 2t) dt &= \\
\int_0^\pi \cos t(\sin t + \sin 2t) - 2\sin t \cos 2t dt &= \\
\int_0^\pi \cos t(\sin t + 2\sin t \cos t) - 2\sin t(1 - 2\sin^2 t) dt &= \\
\int_0^\pi \cos t \sin t\, dt + 2\int_0^\pi \sin t \cos^2 t\, dt - 2\int_0^\pi \sin t + 4\int_0^\pi \sin^3 t\, dt &= \\
\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^\pi + 2\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi - 2\left[-\cos t\right]_0^\pi + 4\left[u + \frac{u^3}{3}\right]_{\cos 0}^{\cos \pi} &= \\
0 + \frac{4}{3} - 4 + 4\frac{4}{3} &= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

3

Champs qui dérivent d'un potentiel

3.1 Généralités

Définition Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F = F(x) = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On dit que F **dérive d'un potentiel** sur Ω s'il existe $f \in C^1(\Omega)$ (f est appelé **potentiel**) tel que

$$F(x) = \nabla f(x), \forall x \in \Omega$$

Théorème Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si F dérive d'un potentiel sur Ω, alors

$$\nabla \times F(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega$$

On peut également écire de la façon suivante :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad et \quad \forall x \in \Omega$$

Remarques :

1. La condition ci-dessous n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'un tel potentiel, il faut pour cela des conditions sur le dmonaine Ω. Si le domaine Ω est convexe, ou plus généralement si il est simplement connexe, la condition est bien suffisante.
   Dans $\mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe est un domaine sans trou.
2. Dans un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe), le potentiel est unique à une constante près.

Théorème Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Les affirmations suivantes sont alors équivalentes

1. F dérive d'un potentiel
2. Pour toute courbe simple, fermée, régulière par morceaux, $\Gamma \subset \Omega$
$$\int_\Gamma F \cdot dl = 0$$
3. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ deux courbes simples régulières par morceaux joingant A à B alors
$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$$

Exemple Soit $F(x, y, z) = (2x \sin z, ze^y, x^2 \cos z + e^y)$. Montrer que F dérive d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^3$ et trouver un tel potentiel.

On vérifie si la condition nécessaire $rotF = 0$ est satisfaite.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x \sin z & ze^y & x^2 \cos z + e^y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\Omega = \mathbb{R}^3$ et donc convexe, F dérive d'un potentiel.

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int 2x \sin z \, dx = x^2 \sin z + \alpha(y, z)$$
$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int ze^y \, dy = ze^y + \beta(x, z)$$
$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int x^2 \cos z + e^y, dz = x^2 \sin z + ze^y + \gamma(x, y)$$
$$\Rightarrow f(x, y, z) = x^2 \sin z + ze^y + C$$

4

Théorème de Green

4.1 Généralités

Théorème **Théorème de green** soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement (de sorte que la surface soit sur la gauche)

$$\iint_\Omega rotF\, dxdy = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$$

Corollaire Théorème de la divergence dans le plan
Soient $\Omega, \partial\Omega$ et F comme précédemment. Soit ν un champ de normales extérieures unité à $\partial\Omega$, alors

$$\iint_\Omega divF\, dxdy = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) dl$$

Corollaire
Soient Ω et $\partial\omega$ comme précédemment. Soit $F(x,y) = (-y,x)$, $G_1(x,y) = (0,x)$ et $G_2(x,y) = (-y,0)$, alors

$$Aire(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl$$

Exemple Vérifier le théorème de Green pour $F(x,y) = (y^2,x)$ et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$

1. Calcul de $\iint_\Omega rotF\, dxdy$
   $rotF = 1 - 2y$
   Pour simplifier le problème on passe en coordonnées polaires $((x,y) \rightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta))$. Attention à ne pas oublier le **jacobien** (dans notre cas **r**)

lors de l'intégration.

$$\iint_\Omega rotF\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2r\sin\theta) r d\theta dr = \pi$$

2. Calcul de $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$
On paramétrise de la façon suivante $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ et $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl =$$
$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$
$$-\int_0^{2\pi} \sin^3 t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt =$$
$$-\int_{\cos 0}^{\cos 2\pi} 1 - u^2 du + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} dt = \pi$$

Le théorème de Green est bien vérifié ici.

Exemple Vérifier le théorème de Green pour $F(x,y) = (x + y, y^2)$ et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

1. Calcul de $\iint_\Omega rotF\,dxdy$
$rotF = -1$
Comme avant en passe en coordonnées polaires.

$$\iint_\Omega rotF\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r d\theta dr = -3\pi$$

2. Calcul de $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$
Ici on a deux courbes, le cercle extérieur Γ_1 de rayon 2 et le cercle intérieur Γ_2 de rayon 1. On paramétrise en prenant r en argument de façon a n'effectuer qu'une seule fois l'intégrale. On a donc $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ et $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$$\int_\Gamma F \cdot dl =$$
$$\int_0^{2\pi} (r\cos t + r\sin t, r\sin^2 t) \cdot (-r\sin t, r\cos t) dt =$$
$$\int_0^{2\pi} r^3 sin^2 t\cos t - r^2 \sin t\cos t - r^2 \sin^2 t dt =$$
$$r^3 \left[\frac{sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} - r^2 \left[\frac{sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} - r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} dt =$$
$$-\pi r^2$$

On remplace maintenant avec les bons r.

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Gamma_1} F \cdot dl - \int_{\Gamma_2} F \cdot dl = -\pi(2^2 - 1^2) = -3\pi$$

Le théorème de Green est bien vérifié ici.

Exemple Calculer l'aire d'un cercle de rayon r_0, à l'aide du corollaire.

Prenons $G_1(x,y) = (0,x)$
la paramétrisation est la suivante $\gamma(t) = (r_0\cos t, r_0 \sin t)$ et $\gamma'(t) = (-r_0\sin t, r_0\cos t)$

$$\int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl =$$
$$\int_0^{2\pi} (0, r_0\cos t)\cdot(-r_0\sin t, r_0\cos t)dt$$
$$\int_0^{2\pi} r_0^2\cos^2 t dt$$
$$r_0^2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\, dt$$
$$\pi r_0^2$$

On peut également trouver ce résultat en utilisant le théorème de Green
$\nabla \times G_1 = 1$ et attention à ne pas oublier le jacobien si on passe en coordonnées polaires.

$$\iint_\Omega rot G_1 dS =$$
$$\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r d\theta dr =$$
$$\pi r_0^2$$

5

Intégrales de surface

5.1 Généralités

Définition

1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière (avec $\sigma = \sigma(u,v) : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation) et $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ un champ scalaire continu, alors on définit l'intégrale du champ scalaire sur Σ comme

$$\iint_\Sigma f ds = \iint_A f(\sigma(u,v))||\sigma_u \wedge \sigma_v|| dudv$$

2. Si Σ est une surface régulière par morceaux telle que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ avec Σ_i régulière alors

$$\iint_\Sigma f ds = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} f ds$$

Définition

1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable (de paramétrisation $\sigma = \sigma(u,v) : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$).Soit $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu. On appelle intégrale du champ vectoriel F sur Σ dans la direction $\nu = \sigma_u \wedge \sigma_v$ la quantité

$$\iint_\Sigma F \cdot ds = \iint_A \left[F(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v\right] dudv$$

2. Si $\Sigma = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ avec Σ_i régulières, alors

$$\iint_\Sigma F \cdot ds = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} F \cdot ds$$

Propriété Si $f \equiv 1 alors$

$$Aire(\Sigma) = \iint_\Sigma ds$$

Exemple Calculer $\iint_\Sigma f ds$ où $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$ et

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \quad et \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

Tout d'abord on paramétrise la surface : $\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$, il faut ensuite calculer la normale à la surface

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

On trouve facilement la norme $||\sigma_\theta \wedge \sigma_z|| = 1$
Il reste maintenant à calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2z d\theta dz &= \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + 2z d\theta dz &= \\ 2\pi \int_0^1 1 + 2z dz &= \\ 2\pi \left[z + z^2\right]_0^1 &= 4\pi \end{aligned}$$

Exemple Calculer $\iint_\Sigma F ds$ où $F(x,y,z) = (0, z, z)$ et

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - 3x - 2y; x, y, z \geq 0\}$$

On paramètre : $\sigma(x,y) = (x, y, 6 - 3x - 2y)$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3, 2, 1)$$

On met les bornes en mettant à zéro z puis x, ce qui nous donne $x \in [0, \frac{6-2y}{3}]$ et $y \in [0, 3]$

On peut maintenant calculer l'intégrale.

$$\iint_{\Sigma} F ds =$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} (0, 6-3x-2y, 6-3x-2y)(3,2,1) dxdy =$$

$$3 \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} 6-3x-2y dxdy =$$

$$3 \int_0^3 \left[6x - \frac{3}{2}x^2 - 2xy \right]_0^{\frac{6-2y}{3}} dy =$$

$$3 \int_0^3 2(6-2y) - \frac{1}{6}(6-2y)^2 - \frac{2}{3}(6-2y)y dy =$$

$$3 \int_0^3 12 - 4y - \frac{1}{6}(6-2y)^2 - 4y + \frac{4}{3}y^2 dy =$$

$$3 \left[12y - 2y^2 - \frac{1}{6}\frac{1}{-6}(6-2y)^3 - 2y^2 + \frac{4}{9}y^3 \right]_0^3 =$$

$$3 \left[36 - 18 + 0 - 18 + \frac{4}{9}27 - 0 - 0 - 6 - 0 - 0 \right] =$$

$$18$$

6

Théorème de la divergence

6.1 Généralités

Théorème Théorème de la divergence
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν la normale extérieure unité à Ω. Soit $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3, F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot F(x,y,z)dxdydz = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)ds$$

Corollaire Si Ω et ν sont comme dans le théorème et si

$$F(x,y,z) = (x,y,z) \qquad G_1(x,y,z) = (x,0,0)$$
$$G_2(x,y,z) = (0,y,0) \qquad G_3(x,y,z) = (0,0,z)$$

alors

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(F \cdot \nu)ds = \iint_{\partial\Omega}(G_i \cdot \nu)ds, \qquad i = 1,2,3$$

Exemple Vérifier le théorème de la divergence pour

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \qquad et \qquad F(x,y,z) = (xy, y, z)$$

1. Calcul de $\iiint_\Omega divF dxdydz$
   On trouve $\nabla \cdot F = y + 2$
   On passe en coordonnées sphériques $x = r\cos\theta\sin\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ et $r\cos\phi$.
   Le jacobien dans ce cas est $r^2\sin\phi$

On obtient

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega y + 2dxdydz = \\
\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin\theta \sin\phi + 2) r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi = \\
2\pi \int_0^1 \int_0^\pi 2r^2 \sin\phi dr d\phi = \\
\frac{4}{3}\pi \int_0^\pi \sin\phi d\phi = \\
\frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

2. Calcul de $\iint_\partial \Omega(F \cdot \nu) ds$
   On paramétrise de la façon suivante : $\sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta \wedge \sigma_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = \\
-\sin\phi(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) = \\
-\sigma(\theta, \phi) \sin\phi
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\iint_\partial \Omega(F \cdot \nu) ds = \\
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin\theta \cos\theta \sin^2\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) \cdot -\sigma(\theta, \phi) \sin\phi \, d\phi d\theta = \\
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \sin^4\phi + \sin^2\theta \sin^3\phi, \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi d\theta = \\
\pi \int_0^\pi \sin^3\phi \, d\phi + 2\pi \int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi = \\
\pi \int_{\cos 0}^{\cos\pi} 1 - u^2 du + 2\pi \int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi = \\
\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{\cos 0}^{\cos\pi} + 2\pi \left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^\pi = \\
\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = \\
\frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

On a bien vérifié dans ce cas le théorème de la divergence.

Exemple Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (x, y, z)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \qquad et \qquad x^2 + y^2 < 3z\}$$

1. avec le thérorème de la divergence
   On passe en coordonnées cylindriques et div F=3.

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : \theta \in (0, 2\pi), r \in (1, 2), \frac{r^2}{3} < z < \sqrt{4 - r^2}\}$$

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot F dV =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz dr d\theta =$$
$$6\pi \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{3}) r\, dr =$$
$$\frac{19}{2}\pi$$

2. Sans le théorème de la divergence

$$\Sigma_1 = \{\alpha(\theta,\phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi) : \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$$
$$\Sigma_2 = \{\beta(r,\phi) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3}) : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{3}]\}$$

Le calcul des normales donne :

$$\alpha_\theta \wedge \alpha_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\phi & 2\cos\theta\sin\phi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\phi & 2\sin\theta\cos\phi & -2\sin\phi \end{vmatrix} =$$
$$-4\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$
$$\beta_r \wedge \beta_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{2}{3}r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$(-\frac{2}{3}r^2\cos\theta, -\frac{2}{3}r^2\sin\theta, r)$$

qui sont toutes les deux des normales intérieures
On peut désormais calculeer les intégrales de surface

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu) ds =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta,\phi) \cdot 2\sin\phi\, \alpha(\theta,\phi)\, d\theta d\phi =$$
$$8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \sin\phi(\cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi)\, d\theta d\phi =$$
$$8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \sin\phi(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\, d\theta d\phi =$$
$$8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\theta d\phi =$$
$$16\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\, d\theta d\phi =$$
$$16\pi\, [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$8\pi$$

7

Théorème de Stokes

7.1 Généralités

Théorème Théorème de Stokes
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière par morceaux et orientable. Soit $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3, F = (F_1, F_2, F_3)$, où les F_i sont C^1 sur un ouvert contenant $\Sigma \cup \partial\Sigma$, alors

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$$

Remarques

1. pour toutes les surfaces régulières par morceaux $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, avec paramétrisation $\sigma = \sigma(u, v) : \overline{A} \to \Sigma$, que nous considérons, le bord de Σ, noté $\partial\Sigma$, est donné par $\sigma(\partial A)$ où on a enlevé les parties qui sont parcourues deux foisdans des sens opposés ainsi que les points
2. Une fois la paramétrisation choisie $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$, la normale $\sigma_u \wedge \sigma_v$, c'est-à-dire

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot ds = \iint_A (\mathrm{rot} F(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v)\, dudv$$

   Par ailleurs le sens de parcours de $\partial\Sigma$ est alors celui induit par la paramétrisation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ et c'est donc celui obtenu en parcourant positivement ∂A

Exemple Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (z, y, x)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \ et\ 0 < z < 1\}$$

1. Calcul de $\iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot ds$
   on a

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Pour la paramétrisation, on a

$$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \ avec \ (\theta, z) \in A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$$

la normale est donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & z \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)$$

On peut maintenant passer au calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot ds &= \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1,1,1)\cdot(z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\, dzd\theta \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\cos\theta + z\sin\theta - z\, dzd\theta \\ \int_0^1 z\, dz \int_0^{2\pi} \cos\theta + \sin\theta - 1\, d\theta \\ \frac{1}{2}\cdot(-2\pi) &= \\ -\pi \end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$
Commençons par calculer

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (0,0,0)\} = (0,0,0) \\ \Gamma_2 &= \{\gamma_2(z) = \sigma(2\pi, z) = (z, 0, z), z : 0 \to 1\} \\ \Gamma_3 &= \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1), \theta : 2\pi \to 0\} \\ \Gamma_4 &= \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (z, 0, z), z : 1 \to 0\} = -\Gamma_2 \end{aligned}$$

On remarque que

$$\partial\Sigma = \Gamma_3$$

et on a $\gamma_3'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ On trouve donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \\ \int_{2\pi}^0 (1, \cos\theta, \sin\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta &= \\ \int_{2\pi}^0 -\sin\theta + \cos^2\theta\, d\theta &= \\ \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{2\pi}^0 &= \\ -\pi \end{aligned}$$

On a bien vérifié le théorème de Stokes dans ce cas.

Exemple Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = (0,0,y^2)$ et

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \ et \ z \le 0\}$$

1. Calcul de $\iint_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot ds$
   on a

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 0, 0)$$

   On paramétrise de la façon suivante

$$\sigma(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

   avec $(\theta,\phi) \in A = (0, 2\pi) \times (\frac{\pi}{2}, \pi)$
   On a la normale suivante

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = -\sin\phi\,\sigma(\theta,\phi)$$

   On peut maintenant calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot ds &= \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} (2\sin\theta\sin\phi, 0, 0) \cdot -\sin\phi\,\sigma(\theta,\phi)\, d\theta d\phi &= \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} -2\sin\theta\cos\theta\sin^3\phi\, d\theta d\phi &= \\ -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta &= \\ -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} &= \\ 0 \end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$
   Commençons par calculer

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

   où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, \frac{\pi}{2}) = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \theta : 0 \to 2\pi\} \\ \Gamma_2 &= \{\gamma_2(\phi) = \sigma(2\pi, \phi) = (\sin\phi, 0, \cos\phi), \phi : \frac{\pi}{2} \to \pi\} \\ \Gamma_3 &= \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, \pi) = (0,0,-1)\} = \{(0,0,-1)\} \\ \Gamma_4 &= \{\gamma_4(\phi) = \sigma(0, \phi) = (\sin\phi, 0, \cos\phi), \phi : \pi \to \frac{\pi}{2}\} = -\Gamma_2 \end{aligned}$$

   On remarque que

$$\partial\Sigma = \Gamma_1$$

et on a $\gamma_3'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ On trouve donc

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl =$$
$$\int_0^{2\pi} (0, 0, \sin^2\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot 0\, d\theta =$$
$$0$$

Deuxième partie

Analyse Complexe

8

Fonctions complexes

8.1 Généralités

$i^2 = \sqrt{-1}$
Tout d'abord on a
En coordonnées cartésiennes :

Définition $z = x + iy$
$f(z) = Ref(z) + iImf(z) = u(x) + iv(x)$

où x est la partie réelle du nombre complexe $Re(z)$ et y la partie imaginaire de z $Im(z)$. x,y $\in \mathbb{R}$ et z définit un nouvel ensemble $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes.
Module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$
Argument : $\theta = arg(z) + 2k\pi$
Conjugué complexe : $\overline{z} = x - iy$ et $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
si $z \neq 0$ $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
En coordonnées polaires : $z = re^{i\theta} = |z|e^{iarg(z)}$
$e^{iz} = \cos z + i \sin z$
Identité d'Euler : $e^{i\pi} - 1 = 0$

Théorème Fromule de De Moivre $\left(e^{iz}\right)^n = e^{inz} = \cos nz + i \sin nz$

si $z_1, z_2 \neq 0$ $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ et $arg(z_1) = arg(z_2)$
Mettre image plan z équivalent à plan $\mathbb{R}^2$

Exemple fonction exponentielle $z = x + iy$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
$u(x, y) = e^x \cos y$
$v(x, y) = e^x \sin y$
- e^z est $2\pi i$ périodique
- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

Quelques fonctions utiles :
- $\cos z = Re\{e^{iz}\} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = Im\{e^{iz}\} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
- $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$
- $\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

$\Rightarrow$ Toutes continues

8.2 Fonction logarithme

Définition $\ln(z) = \ln(|z|) + i\,(arg(z) + 2\pi k)\; z \in \mathbb{C}^*$

Propriété

$$\begin{aligned} e^{ln(z)} &= e^{ln(|z|)}e^{iarg(z)} = |z|e^{iarg(z)} = z \\ ln(e^z) &= ln|e^z| + iarg(e^z) = x + iy = z \\ ln(ab) &= ln(a) + ln(b) \end{aligned}$$

$ln(z) = ln|z| + iarg(z)$
$u(x,y) = ln|z| = ln(x^2+y^2)$

$$v(x,y) = arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{if } x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0, y < 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{if } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{if } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

et donc

$$v(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{if } x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y} & \text{if } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{y} & \text{if } x \in \mathbb{R}, y < 0 \end{cases}$$

Exemple Résoudre $(z^4-1)sin(\pi z) = 0$
$z^4 - 1 = 0$
avec $y = z^2$
$y^2 - 1 = (y-1)(y+1) = 0$
$y = z^2 = \pm 1$ et donc $z^2 - 1 = (z-1)(z+1) = 0$ ce qui donne $z = \pm 1$
et $z^2 + 1 = (z-i)(z+i) = 0$ et donc $z = \pm i$
mais on a aussi $sin(\pi z) = 0$
$sin(z)$ s'annule tous les multiples de π donc $z = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

finalement $z = \begin{cases} k & \text{for } k \in \mathbb{Z} \\ i \\ -i \end{cases}$

9

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

9.1 Généralités

Définition On dit que $f : O \Rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** (ou **analytique complexe**) dans O si f est dérivable $\forall z_0 \in O$, c'est-à-dire que

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0}$

existe et est finie. On note la dérivée par $f'(z_0)$.

Théorème Equations de Cauchy-Riemann

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$

Exemple La fonction e^z est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) = e^z$

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = u(x, y) + iv(x, y)$

$u(x, y) = e^x cosy$ et $v(x, y) = e^x siny$

$\begin{cases} u_x = v_y = e^x \cos y \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$

et donc $f'(z) = u_x + iv_x = e^z$

Exemple Montrer que $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ est holomorphe et calculer sa dérivée

$\cosh z = \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y))$

$u(x, y) = \frac{1}{2} \cos y(e^x + e^{-x})$ et $v(x, y) = \frac{1}{2} \sin y(e^x - e^{-x})$

$u_x = \frac{1}{2} \cos y(e^x - e^{-x}) = v_y$

$u_y = -\frac{1}{2} \sin y(e^x + e^{-x}) = -v_x$

Les équations de **Cauchy-Riemann** sont satisfaites.

$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{2}(e^x e^{iy} - e^{-x}e^{-iy}) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sinh z$

Exemple Montrer que les équations de Cauchy-Riemann, en coordonnées polaires, s'écrivent
$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$
Tout d'abord on a : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$ et $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$
$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}$
$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}$
$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta}$
et donc $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$

en suivant le même raisonnement mais en partant avec $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$
on arrive sur $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

10

Intégration complexe

10.1 Généralités

Définition La définition de l'intégrale curviligne reste valable pour les complexes
$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème **Théorème de Cauchy**
$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Théorème **Formule intégrale de Cauchy**
$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$.
en particulier quand $n = 0$, cette formule s'écrit
$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi$.

Exemple Soit γ une courbe simple fermée et régulière par morceaux.
Discuter en fonction de γ l'intégrale suivante :
$\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\,dz$.
On observe que $\xi = 0$ est une singularité pour $f(\xi) = \cos 2\xi/\xi$. On distingue plusieurs cas.

Cas 1 : $0 \in int\gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $g(\xi) = \cos 2\xi$
$g(0) = 1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos 2\xi}{\xi - 0}\,d\xi$
Remarquons que dans ce cas une intégration directe n'aurait pas été évidente :
$\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2e^{i\theta}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\,dz = i\int_0^{2\pi} \cos 2e^{i\theta}\,dz$

Cas 2 : $0 \notin \overline{int\gamma}$
Grâce au théorème de Cauchy, on peut immédiatement dire que
$\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\,dz = 0$

Cas 3 : $0 \in \gamma$ Dans ce cas l'intégrale n'est pas bien définie.Pourquoi ?

Exemple Calculer $\int_\gamma z^2 + 1\,dz$ où $\gamma = [1, 1+i]$

$\{\gamma(t) = 1 + it$ où $t \in [0,1]\}$
$\int_\gamma z^2 + 1\,dz = i\int_0^1 (1+it)^2 + 1\,dt = i\int_0^1 2 + 2it - t^2\,dt = \frac{5}{3}i + 1$

Exemple Calculer $\oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz$
dans les cas suivants :

1. γ est le cercle centré en (1 ; 0) et de rayon 1
2. γ est le bord du rectangle [-1/2 ; 1/2] x [0 ; 4]
3. γ est le bord du rectangle [-2 ; 0] x [-1 ; 1]

Tout d'abord on ré-écrit l'intégrale de la façon suivante : $\oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)}\,dz$
On a donc 3 pôles : 1 (d'ordre 2) et $\pm 2i$ (d'ordre 1)
cas 1 : $1 \in int\gamma$ et la formule intégrale de Cauchy nous donne
$n = 1$ et $z = 1$ $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{(\xi-1)^2(\xi-2i)(\xi+2i)}\,d\xi$
avec $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2+4}$ et $f'(z) = \frac{2ze^{z^2}(z^2+3)}{(z^2+4)^2}$
et donc $2\pi i f'(z) = \oint_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{(\xi-1)^2(\xi-2i)(\xi+2i)}\,d\xi = \frac{16}{25}e\pi i$

Cas 2 : $2i \in \gamma$ et donc avec $n = 0$, $z = 2i$ et $f(z) = \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2+2i)}$
et donc $2\pi i f(2i) = \oint_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{(\xi-1)^2(\xi-2i)(\xi+2i)}\,d\xi = -\frac{e^{-4}}{2(3+4i)}$

Cas 3 : dans ce cas, la fonction est holomorphe dans $\overline{int\gamma}$ $(\pm 2i, 1 \notin \gamma)$ et donc : $\oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz = 0$

11

Séries de Laurent

11.1 Généralités

Théorème Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$. Soient $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $N \in \mathbb{N}$
$L_N f(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(z-z_0)^n$
$= c_N(z-z_0)^N + ... + c_1(z-z_0) + c_0 + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + ... + \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N}$

où
$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi$ (en particulier $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)\,d\xi$)

On a : $Lf(z) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Définition

1. L'expression $Lf(z)$ est appelée **Série de Laurent** de f au voisinage de z_0.
2. On appelle **partie régulière** de la série de Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
3. On appelle **partie singulière** (ou principale) de la série de Laurent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$
4. On dit que z_0 est un **point régulier** pour f(z) si et seulement si la partie singulière de la série de Laurent est zéro.
5. On dit que z_0 est un **pôle d'ordre m** pour f(z) si et seulement si $c_m \neq 0$ et $c_k = 0, \forall k \geq m+1$ on a alors
$Lf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + ... + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$

6. On dit que z_0 est une **singularité essentielle isolée** pour $f(z)$ si et seulement si $c_{-k} \neq 0$, pour une infinité de k. Dans ce cas $Lf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$
7. On appelle **résidu de f en** z_0 et on note $Res_{z_0}(f)$, la valeur c_1
8. Le **rayon de convergence** de la série est le plus grand $R > 0$ tel que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$

Remarque Si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors le développement de Laurent coïncide avec la **série de Taylor**, c'est-à-dire que $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et $Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

Dans les exemples qui suivent, il s'agira de trouver les séries de Laurent correspondantes.

Exemple $f(z) = \frac{1}{z}$ et $z_0 = 0$

On cherche quelque chose de la forme $Lf(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$
On a immédiatement $Lf(z) = \frac{1}{z} + 0$
$R = \infty$,$Res_{z_0} = 1$, z_0 est un pôloe d'ordre 1, la partie singulière est $1/z$ et la partie régulière est 0.

Exemple $f(z) = \frac{1}{z}$ et $z_0 = 1$

$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = Lf(z)$
$R = \infty$, $Res_{z_0} = 0$ et z_0 est un point régulier (i.e. il n'y a pas de partie singulière)

Exemple $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ et z_0

$\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = Lf(z)$
$R = 1$ $(0 < |z| < 1)$, $Res_{z_0} = 1$ et z_0 est un pôle d'ordre 1

Exemple $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ pour $z_1 = 0$ et $z_2 = -2$

Cas $z_1 = 0$:
$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z}\frac{1}{(\frac{z}{2}+1)^3}$ et on sait $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + ...$
$Lf(z) = \frac{1}{8z}(1 - 3\frac{z}{2} + \frac{12}{2!}(\frac{z}{2})^2 - \frac{60}{3!}(\frac{z}{2})^3 + ...) = \frac{1}{8z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + ...$
$R = 2$, $Res_{z_1} = \frac{1}{8}$, z_1 est un pôle d'ordre 1

Cas $z_2 = -2$:
on fait la substitution $u = z - z_0 = z + 2$
$\frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{8u}\frac{1}{(\frac{u}{2}+1)^3} = -\frac{1}{2u^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{u}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^{n-3}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+2)^{n-3}}{2^{n+1}}$
$R = 2$, $Res_{z_2} = -\frac{1}{8}$ et z_2 est un pôle d'ordre 3

Exemple $f(z) = e^{1/z} \sin 1/z$ en $z_0 = 0$

On pose $y = \frac{1}{z}$ et donc $f(y) = e^y \sin y$
Le développement de **Taylor** nous donne

1. $f'(y) = e^y(\sin y + \cos y)$ et $f'(0) = 1$
2. $f''(y) = e^y(2\cos y)$ et $f''(0) = 2$
3. $f^3(y) = e^y(2\cos y - 2\sin y)$ et $f^3(0) = 2$
4. $f^4(y) = e^y(4\sin y)$ et $f^4(0) = 0$
5. $f^5(y) = e^y(4\cos y)$ et $f^5(0) = 4$

$Tf(y) = y + y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{30} + ...$
et donc $Lf(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{30z^5} + ...$
$R = \infty$, $Res_{z_0} = 1$ et z_0 est une singularité isolée pour f.

12

Théorème des résidus et applications

12.1 Généralités

Théorème Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, γ une courbe simple fermée et régulière par morceaux contenue dans D. Soient $z_1, ..., z_m \in int\gamma$ ($z_i \neq z_j$, si $i \neq j$) et $f : D\backslash\{z_1, ..., z_m\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors
$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res_{z_k}(f)$

Proposition $Res_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

Proposition Soit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$
$Res_{z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

Exemple Calculer $\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz$

Cas 1 : $0 \in int\gamma$
On a $Res_0(f) = 1 \Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i$
Cas 2 : $0 \notin \overline{int\gamma}$
Le théorème de Cauchy implique $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$
Cas 3 : $0 \in \gamma$
L'intégrale n'est pas bien définie.

Exemple Calculer $\oint_\gamma \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}\,dz$

Les singularités sont les suivantes : $Res_0(f) = 2$ et $Res_1(f) = 3$
On va distinguer plusieurs cas.

1. $0, 1 \in int\gamma$
   $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(2+3) = 10\pi i$
2. $0 \in int\gamma$ et $1 \notin \overline{int\gamma}$
   $\oint_\gamma f(z)\,dz = 4\pi i$
3. $1 \in int\gamma$ et $0 \notin \overline{int\gamma}$
   $\oint_\gamma f(z)\,dz = 6\pi i$
4. $0, 1 \notin \overline{int\gamma}$
   $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$
5. $0 \in \gamma$ ou $1 \in \gamma$
   Dans ce cas l'intégrale n'est pas bien définie

Exemple Calculer $\oint_\gamma \frac{1}{(z-i)(z+2)^3(z-4)}\,dz$ où $\gamma = \{Re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$
$R_1 = 3$ et $R_2 = 5$

On calcule les résidus :
$Res_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{(i+2)^2(i-4)}$
$Res_4(f) = \lim_{z\to 4}(z-4)f(z) = \frac{1}{36(4-i)}$
$Res_{-2}(f) = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}[(z-2)^2 f(z)] = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z-i)(z-4)}] = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}[\frac{-2z+4+i}{(z-i)^2(z-4)^2}] = \frac{8+i}{36(i+2)^2}$
Cas 1 : $R_1 = 3$
$4, -2 \in int\gamma \Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(Res_4(f) + Res_{-2}(f)) = \frac{2\pi i}{i-4}(\frac{1}{(i+2)^2} - \frac{1}{36})$
Cas 2 : $R_2 = 5$
$4, -2, i \in int\gamma \Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(Res_4(f) + Res_{-2}(f) + Res_i(f)) = 2\pi i(\frac{1}{(i-4)(i+2)^2} + \frac{8+i}{36(i+2)^2} - \frac{1}{36(i-4)}) = 0$

Exemple Calculer $\oint_\gamma \frac{x^2+2z+1}{(x-3)^3}\,dz$ où $\gamma = \{5e^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$

Tout d'abord que z_0 est un pôle d'ordre 3 et que donc
$Res_3(f) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[(z-3)^3 f(z)] = \lim_{z\to 3}\frac{1}{2!}2 = 1$
et donc comme $3 \in int\gamma$, $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i$

12.2 Applications au calcul des intégrales réelles (I)

Propriété $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

On pose $z = e^{i\theta}$, on a alors
$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$
Noter qu'on a aussi $d\theta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$
Par conséquent si γ dénote le cercle unité et si on pose
$\tilde{f}(z) = \frac{1}{iz}f(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))$
On déduit du théorème des résidus que

$\int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^m Res_{z_k}(\tilde{f})$
Où z_k sont les singularités de $\tilde{f}$ à l'intérieur du cercle unité γ.

Exemple Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

$f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta}$ et
$\tilde{f}(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{2}{i(z^2+4z+1)} = \frac{2}{i(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}$
Les singularités de $\tilde{f}$ sont $z_1 = -(2+\sqrt{3})$ et $z_2 = -2+\sqrt{3}$ mais seulement z_2, qui est un pôle d'ordre 1, fait partie du cercle unité.
$Res_{\sqrt{3}-2}(\tilde{f}) = \lim_{z\to\sqrt{3}-2}(z-\sqrt{3}+2)\tilde{f}(z) = \lim_{z\to\sqrt{3}-2}\frac{2}{i(z+2+\sqrt{3})} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$
$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

12.3 Applications au calcul des intégrales réelles (II)

Propriété Pour calculer des intégrales de la forme : $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx$ avec $a \geq 0$, $R(x) = P(x)/Q(x)$, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes tels que $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $degQ - degP \geq 2$ (deg dénotant le degré des polynômes) dans ce cas, l'intégrale suivante existe :
$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m Res_{z_k}(R(z)e^{iaz})$

Exemple Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx$

On cherche les zéros (complexes) de $Q(x)$
$z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16e^{i(\pi+2n\pi)} \Leftrightarrow z = 2e^{\frac{i\pi}{4}(1+2n)}, n = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i) \\ z_1 &= 2e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i) \\ z_2 &= 2e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1-i) \\ z_3 &= 2e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i) \end{aligned}$$

On prend que celle qui sont dans le plan supérieur ($Im(z) > 0$), c'est-à-dire z_0 et z_1.
On calcule les résidus : $Res_{z_0} = \frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1+i}{8i\sqrt{2}}$ et $Res_{z_1} = \frac{1-i}{8i\sqrt{2}}$
et pour finir
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx = 2\pi i(Res_{z_0} + Res_{z_1}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Troisième partie

Anayse de Fourier

13

Séries de Fourier

13.1 Définitions et résultats théoriques

Définition Soient $N \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, T-périodique, $T \geq 0$, (i.e. $f(x+T) = F(x), \forall x$) et intégrable sur $[0, T]$. Soient $n \in N$ et

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{2\pi n}{T} x), n = 0, 1, 2 \dots \tag{13.1}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{2\pi n}{T} x), n = 0, 1, 2 \dots \tag{13.2}$$

1. On appelle **série de Fourier partielle d'ordre** N de f et on note

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)\} \tag{13.3}$$

2. On appelle **série de Fourier** de f la limit, quand elle existe, de $F_N f(x)$. On la note

$$Ff(x) = \lim_{N \to \infty_N} F f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)\} \tag{13.4}$$

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique , régulière par morceaux. Soient a_n, b_n et $F_N f$ comme dans la définition précédente. Alors la limite $Ff(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \tag{13.5}$$

(où $f(x+0) = lim \underset{y \to xy > x}{f}(y)$ et $f(x-0) = lim \underset{y \to xy < x}{f}(y)$). Donc en particulier, si f est continue en x, alors

$$Ff(x) = f(x) \tag{13.6}$$

De plus, si f est continue, alors la convergwnce de la séride ci-dessus vers la fonction f est uniforme.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, régulière par morceaux. Alors Ff est T-périodique et de plus

1. si f est **paire** (i.e. $f(x) = f(-x), \forall x$), alors $b_n = 0$ et

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x)\} \tag{13.7}$$

2. si f est **impaire** (i.e. $f(x) = -f(-x), \forall x$), alors $a_n = 0$ et

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x) \tag{13.8}$$

3. La série de Fourier s'écrit en **notations complexes**

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \tag{13.9}$$

où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} \tag{13.10}$$

Théorème Différentiation terme à terme Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, régulière par morceaux. Soit

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)\}$$

sa série de Fourier. Alors la série obtenue par la différentiation terme à terme de la série de Fourier de f converge et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f'(x+0) + f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{T} \{-a_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x)\} \tag{13.11}$$

Théorème Intégration terme à terme Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, régulière par morceaux. Soit

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)\}$$

sa série de Fourier. Alors, pour tout $x_0, x \in [0,T]$, on a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \{a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}x)\}\,dt \tag{13.12}$$

De plus, pour x_0 fixé, la convergence est uniforme.

Théorème Identité de Parseval. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, régulière par morceaux. Alors

$$\frac{2}{T} \int_0^T (f(x))^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{13.13}$$

Série de Fourier en cosinus. Soit $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série suivante converge

$$F_c f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n}{L} x) \tag{13.14}$$

où

$$a_n = \frac{L}{2} \int_0^L f(y) \cos(\frac{\pi n}{L} y)\,dy \tag{13.15}$$

De plus en tous points $x \in (0,L)$ où f est continu, l'égalité suivante a lieu

$$F_c f(x) = f(x) \tag{13.16}$$

Série de Fourier en sinus. Soit $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série suivante converge

$$F_s f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{\pi n}{L} x) \tag{13.17}$$

où

$$b_n = \frac{L}{2} \int_0^L f(y) \sin(\frac{\pi n}{L} y)\,dy \tag{13.18}$$

De plus en tous points $x \in (0,L)$ où f est continu, l'égalité suivante a lieu

$$F_s f(x) = f(x) \tag{13.19}$$

14

Transformées de Fourier

14.1 Définitions et résultats théoriques

Définition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morcceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$. La **transformée de Fourier** de f est définie par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\alpha y}\, dy \tag{14.1}$$

Remarque : certains auteur définissent la transformée de Fourier en remplaçant le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par 1 ou par $\frac{1}{2\pi}$.

Théorème Soient $f, g; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < \infty$$

Les propriétés suivantes ont lieu.

1. **Continuité** : La fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est alors continue et
$$\lim_{|\alpha| \to \infty} |\hat{f}(\alpha)| = 0 \tag{14.2}$$
2. **Linéarité** : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors
$$\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g) \tag{14.3}$$
3. **Dérivée** : Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| < \infty$, alors
$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathfrak{F}(f)(\alpha), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{14.4}$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}, f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|dx < \infty$, pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors

$$\mathfrak{F}(f^{(n)})(\alpha) = (i\alpha)^n \mathfrak{F}(f)(\alpha), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{14.5}$$

4. **Décalage** : Si $a.b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, et

$$g(x) = e^{-ibx} f(ax)$$

alors

$$\mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|} \mathfrak{F}(f)(\frac{\alpha + b}{a}) \tag{14.6}$$

5. **Convolution** : Si on définit le produit de convolution par

$$f \times g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

alors

$$\mathfrak{F}(f \times g) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f) \mathfrak{F}(g) \tag{14.7}$$

6. **Identité de Plancherel** : Si en outre $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx < \infty$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 \, d\alpha \tag{14.8}$$

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha)| \, d\alpha < \infty$$

1. **Formule d'inversion** : On a

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \, d\alpha \tag{14.9}$$

En particulier si f est continue en x, alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \, d\alpha \tag{14.10}$$

2. **Transformée en cosinus** : Si f est paire, alors

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(y) \cos(\alpha y) \, dy \tag{14.11}$$

et en tout point x de continuité de f

$$f(x)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha x)\, d\alpha \tag{14.12}$$

3. **Transformée en sinus** : Si f est impaire, alors

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y)\sin(\alpha y)\, dy \tag{14.13}$$

et en tout point x de continuité de f

$$f(x)(\alpha) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}(\alpha)\sin(\alpha x)\, d\alpha \tag{14.14}$$

15

Transformée de Laplace

15.1 Définitions et résultats théoriques

Définition Soit $f : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux (étendue à $\mathbb{R}$ de manière que $f(x) = 0, \forall x < 0$) et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < \infty \tag{15.1}$$

(γ_0 est appelé l'**abscisse de convergence** de f), La **transformée de Laplace** de f est définie par

$$\mathcal{L}(f)(z) = F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt, \quad \forall z \in \overline{O} \tag{15.2}$$

où

$$O = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z > \gamma_0\} \text{ et } \overline{O} = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z \geq \gamma_0\}$$

Théorème Soient f, γ_0 et O comme dans la définition précédente. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux ($g(x) = 0, \forall x < 0$) telle que

$$\int_0^{+\infty} |g(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < \infty$$

Alors les propriétés suivantes ont lieu

1. **Holomorphie** : La transformée de Laplace de f, F, est holomorphe dans O et

$$F'(z) = -\int_0^{\infty} t f(t) e^{-tz} = -\mathcal{L}(g)(z), \quad \forall z \in O, \tag{15.3}$$

   où $g(t) = t f(t)$.

2. **Linéarité :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{L}(af + bg)(z) = a\mathcal{L}(f)(z) + b\mathcal{L}(g)(z). \tag{15.4}$$

3. **Dérivées :** Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^\infty |f'(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < \infty$, alors

$$\mathbf{??}\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0), \quad \forall z \in O \tag{15.5}$$

   Plus généralement si $n \in \mathbb{N}, f \in C^{(n)}(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^\infty |f^{(k)}(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < \infty$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k f^{n-k-1}(0), \quad \forall z \in O. \tag{15.6}$$

4. **Intégration :** Si $f \in C(\mathbb{R}), \gamma_0 \geq 0$ et

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s)ds$$

   alors

$$\mathcal{L}(\varphi)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z}, \quad \forall z \in O. \tag{15.7}$$

5. **Décalage :** Si $a > 0, b \in \mathbb{R}$ et

$$\varphi(t) = e^{-bt}f(at),$$

   alors

$$\mathcal{L}(\varphi)(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{z+b}{a}), \quad \forall z \text{ tel que } Re(\tfrac{z+b}{a}) \geq \gamma_0. \tag{15.8}$$

6. **Convolution :**

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds,$$

   alors

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z), \quad \forall z \in \overline{O}. \tag{15.9}$$

Théorème (**Formule d'inversion**) Soient f une fonction régulière par morceaux ($f(t) \equiv 0$ si $t < 0$) et $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$, sa transformée de Laplace satisfaisant les conditions suivantes :

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma t}dt < \infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + is)|ds < \infty,$$

pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + is)e^{(\gamma+is)t}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[f(t+0) + f(t-0)\right] & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}f(0^+) & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \tag{15.10}$$

En particulier si f est continue et $f(0) = 0$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + is)e^{(\gamma+is)t}ds = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{15.11}$$

16

Applications aux équations différentielles ordinaires

16.1 Le problème de Cauchy

Exemple Le problème est de trouver une solution $y = y(t)$ de

$$\begin{cases} a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),\ t > 0 \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{16.1}$$

où $a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes données ($a_2 \neq 0$) et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donnée ($f(t) = 0$, si $t < 0$) avec une certaine régularité.

En prenant Laplace des deux côtés on obtient

$$a_2 \mathcal{L}(y'')(z) + a_1 \mathcal{L}(y')(z) + a_0 \mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \tag{16.2}$$

En utilisant la propriété **??**, on a

$$a_2(z^2 \mathcal{L}(y)(z) - z y_0 - y_1) + a_1(z \mathcal{L}(y)(z) - y_0) + a_0 \mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \tag{16.3}$$

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\mathcal{L}(y)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z) + a_2 y_0 z + a_2 y_1 + a_1 y_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \tag{16.4}$$

et donc

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(f)(z) + a_2 y_0 z + a_2 y_1 + a_1 y_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}\right)(t) \tag{16.5}$$

16.2 Le problème de Sturm-Liouville

Exemple Soit $L > 0$. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y = y(x), y \neq 0$, solution de

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \ x \in (0, L) \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \tag{16.6}$$

(Notons que $y(t) \equiv 0$ est solution triviale $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)

On peut montrer que pour $\lambda \leq 0$, seule la solution triviale ($f(t) \equiv 0$) satisfait le problème.

Dans le cas où $\lambda > 0$, on a

$$y(x) = \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} x) \tag{16.7}$$

Comme on doit encore imposer $y(L) = 0$ et si on veut une solution non triviale ($\Rightarrow y_1 \neq 0$), on obtient

$$\frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$
$$(\sqrt{\lambda} L) = n\pi, \text{avec } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$$

Les solutions sont donc données par

$$y(x) = \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{16.8}$$

où α_n est une constante arbitraire.

16.3 Autres problèmes résolus par l'analyse de Fourier

Exemple Soit f une fonction C^1 et 2π périodique. Soient $m, k \in mathbbR, m \neq 0$. Trouver une solution $y = y(t)$ du problème suivant

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t), \ t \in (0, 2\pi) \\ y(0) = y(2\pi), \ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases} \tag{16.9}$$

On commence par développer f en série de Fourier.

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

17

Applications aux dérivées partielles

17.1 Equation de la chaleur

17.1.1 Barre de longueur finie

Soit $a \neq 0, L > 0, f : [0, L] \to \mathbb{R}$, une fonction C^1, telle que $f(0) = f(L) = 0$. Trouver $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\, x \in (0, L) \end{cases} \tag{17.1}$$

Etape 1 **séparation des variables**

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

Les conditions aux limites deviennent

$$u(0,t) = v(0)w(t) = u(L,t) = v(L)w(t) = 0,\ \forall t$$
$$\Rightarrow v(0) = v(L) = 0.$$

On peut réécrire l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v(x) \frac{dw(t)}{dt} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} w(x) \end{cases}$$

d'où

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{a^2 w(t)} = -\lambda \tag{17.2}$$

On s'occupe mantenant de résoudre les systèmes indépendamment

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \tag{17.3}$$

et

$$w'(t) + a^2\lambda w(t) = 0 \tag{17.4}$$

On a vu (cf 16.3) que la solution de (17.3) est

$$v_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{17.5}$$

$$\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2 \tag{17.6}$$

La solution de (**??**) est obtenue facilement

$$w_n(t) = e^{-a^2\lambda t} \tag{17.7}$$

En remplacant λ par $(\frac{n\pi}{L})^2$ dans (17.7) on obtient

$$u_n(x,t) = v_n(x)w_n(t) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{17.8}$$

On peut maintenant écrire

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{17.9}$$

où α_n sont des constantes "quelconques".

Etape 2 conditions initiales

On va maintenant choisir ces constantes α_n de manière à satisfaire la condition initiale, $u(x,0) = f(x)$ dans (17.1). On doit donc avoir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x) \tag{17.10}$$

Il suffit de choisir α_n comme les coefficients de Fourier de la série en sinus, i.e.

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin(\frac{n\pi}{L}y)\,dy \tag{17.11}$$

Donc la solution de (17.1) est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{17.12}$$

où α_n est défini comme en (17.11)

17.1.2 Barre de longueur infinie

Soient $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$
$$et$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|d\alpha < \infty$$

Le problème est de trouver $u = u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\; t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x)\; x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{17.13}$$

Etape 1 **Transformée de Fourier en** x

On appelle

$$v(\xi,t) = \mathcal{F}(u)(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y,t) e^{-i\xi y}\, dy \tag{17.14}$$

On a, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\xi,t) = (i\xi)^2 \mathcal{F}(u)(\xi,t) = -\xi^2 v(\xi,t) \tag{17.15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) e^{-i\xi y}\, dy = \mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(\xi,t) \tag{17.16}$$

On pose

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \tag{17.17}$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membres de l'équation, on a que (17.13) es devenue une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans la variable t (ξ jouant le rôle du paramétre).

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) = -a^2\xi^2 v(\xi,t),\ t > 0 \\ v(\xi,0) = \mathcal{F}(f)(\xi) \end{cases} \tag{17.18}$$

Le problème ci-dessus a comme solution évidente

$$v(\xi,t) = \mathcal{F}(f)(\xi) e^{-a^2\xi^2 t} \tag{17.19}$$

Etape 2

On applique à la fonction ci-dessus la transformée de Fourier inverse (en x), ce qui nous donne comme solution de (17.13)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi x - a^2\xi^2 t}\, d\xi \tag{17.20}$$

17.2 Equation des ondes

17.3 Equation de Laplace dans un rectangle

18
Les distributions tempérées

18.1 Introduction

- O. Heaviside 1894
- P. Dirac 1925
- L. Schwartz 1945

Une motivation : décrire mathématiquement un choc (impulsion forte de courte durée).

Exemple : Objet de masse 1, mis en mouvement par un coup de marteau.

$$v(t) = \text{vitesse de la masse à l'instant } t \tag{18.1}$$

$$1 \cdot v'(t) = \text{force} = f_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si } 0 < t < \epsilon \\ 0 & \text{si } t > \epsilon \end{cases} \tag{18.2}$$

Une impulsion serait un objet mathématique δ tel que la solution de $y'(t) = \delta(t)$ $t \in \mathbb{R}$ est

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{18.3}$$

Il n'ya pas de fonction avec cette propriété !

18.2 Interactions entre fonctions

18.2.1 Concept classique

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est déterminé par les valeurs $f(x)$ $x \in \mathbb{R}$

18.2.2 Concept nouveau

les fonctions interragissent entre elles par l'intermédiare du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \tag{18.4}$$

Ces deux concepts sont proches

Si f est continue et intégrable, alors les valeurs de f sont déterminés par la donné de

$$< f, g >, \; g \text{ bornée}$$

Problème dans la définition de $< f, g >$: l'intégrale ne converge pas forcément.

On va se restreindre à 2 classes de fonctions, une pour f, l'autre pour g

18.2.3 L'espace S des fonctions à décroissance rapide (espace de Schwartz)

Définition : $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des fonctions $\varphi \in C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n \varphi^m(x) \tag{18.5}$$

cette condition signifie que φ et toutes ses dérivées tendent vers 0 très rapidement (plus rapidement que $\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$)

Exemples

1. $\varphi(x) = e^{-x^2}$, alors $\lim_{x \to \pm\infty} x^n e^{-x^2} = 0$
2. $\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
3. Soit $a < b$, posons $p(x) = \Phi(x-a)\Phi(x-b) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}\right) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

18.2.4 Fonctions à croissance lente continue (CCL)

Définition : (a) une fonction CCL est une fonction $f : \mathbb{R} \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

(pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ grandit moins vite que x^n, lorsque $x \to \pm\infty$)

Exemples

1. $x^4 + x^2 + x$
   $\sin x, \cos(x)$
   $\ln(|x|)$ sont CCL
2. $f(x) = e^x$ n'est <u>pas</u> CCL, car $\lim_{x \to \infty} = \infty$

18.3 Les distributions tempérées

Définition : (b) une fonctionelle sur $\mathcal{S}$ est une application linéaire $T : \varphi \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ définie par

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{18.6}$$

Cette intégrale (eq :18.6) est toujours bien définie.

Définiton : On appelle T_f la fonctionelle associée à f, donc on écrit

$$< f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{18.7}$$

Définition : une distribution tempérée (ou distribution de Schwartz) est fonctionelle $T_f^{(n)} : \varphi \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ de la forme

$$< T_f^{(n)}, \varphi >= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx \tag{18.8}$$

où $\varphi^n(x)$ est la $n^{\text{ème}}$ dérivée de φ, $n \in \mathbb{N}$
où f est CCL.

L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'$.

Remarques : $T_f^{(0)} = T_f$: $T_f^{(0)}$ est identifiée à f.

Proposition : (lien entre $T_f^{(1)}$ et f)

Supposons que f' est aussi CCL, Alors $T_f^{(1)} = T_{f'}$, $T_f^{(1)}$ peut être identifiée à f'.

Interprétation

1. $T_f^{(1)}$ est appelée la dérivée (au sens des distributions) de T_f et même de f.
2. Si $f \in C^{(n)}$ et $f', f'', f^{(n)}$ CCL, alors

$$< T_f^{(n)}, \varphi' >=< f^{(n)}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}\varphi(x)dx$$

3. On écrit $(T_f)' = T_f^{(1)} = f'$, $(T_f)'' = T_f^{(2)} = (T_f')' = f''$, étant entendu que dans ce cas, $f_1, f_2, \ldots,$etc... représentent des distributions.

18.3.1 La distribution $\mathcal{S}$

Définition :

Soit $\varphi \to\in R$ définie par $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{S}$

On appelle δ la fonctionelle de Dirac.

Proposition :

Posons $r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

Alors $r' = H$ et $r'' = H' = \delta$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx$$

et

$$(-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\varphi''(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx =< \delta, \varphi >= \varphi(0)$$

Démonstration : cf exercices

Remarques :

$H' = \delta$

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

δ est l'objet mathématique qui correspond à la notion d'impulsion.

(b) On peut montrer que δ est la limite des fonctions f_ϵ dans l'exemple de la première heure.

18.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Définition :

Soit $T \in \mathcal{S}'$. La transformée de Fourier de T est l'élément $\mathcal{F}_T$ de φ' défini par $< \mathcal{F}_T, \varphi >=< T, \mathcal{F}_\varphi >$, où $\varphi \in \mathcal{S}$.

Remarques :

1. On peut montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{F}_\varphi \in \mathcal{S}$ (où $\mathcal{F}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\alpha x}$).
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

ce qui signifie que $\mathcal{F}f$ est défini comme au sens du chapitre 14, alors

$$< \mathcal{F}f, \varphi >=< f, \mathcal{F}\varphi > \tag{18.9}$$

de sorte que $T_{\mathcal{F}_f} = \mathcal{F}(T_f)$.

Proposition Pour $a \in \mathbb{R}$, définissons $\delta_a : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ par

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a) \tag{18.10}$$

(en particulier, δ_0 est la distribution de Dirac δ). Alors :

1. $\mathcal{F}\delta_a$ est la distribution associée à la fonction CCL $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iax}$. En particulier, $\mathcal{F}\delta$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
2. $\mathcal{F}(e^{iax}) = \sqrt{2\pi}\delta_a$;
3. $\mathcal{F}(\cos(x)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_1 + \delta_{-1})$
4. $\mathcal{F}(\sin(x)) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_{-1} - \delta_1)$

18.5 Opérations sur les distributions tempérées

Définition Réflection Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit une nouvelle fonction $f^v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f^v(x) = f(-x)$ (f^v se lit "f check").

Pour $T \in \mathcal{S}'$, on définit une nouvelle distribution tempérée $T^v \in \mathcal{S}'$ par

$$< T^v, \varphi >=< T, \varphi^v > \tag{18.11}$$

Définition Translation Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit une nouvelle fonction $\mathcal{T}_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\mathcal{T}_a f(x) = f(x+a)$

Pour $T \in \mathcal{S}'$, on définit une nouvelle distribution tempérée $\mathcal{T}_a T \in \mathcal{S}$ par

$$< \mathcal{T}_a T, \varphi > = < T, \mathcal{T}_{-a}\varphi > \tag{18.12}$$

Définition Changement d'échelle Etant donnés $a \neq 0$ et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit une nouvelle fonction $\mathcal{S}_a f(x) = f(ax)$.

Pour $T \in \mathcal{S}'$, on définit une nouvelle distribution tempérée $\mathcal{S}_a T \in \mathcal{T}'$ par

$$< \mathcal{S}_a T, \varphi > = < T, \frac{1}{|a|}\mathcal{S}_{1/a}\varphi > \tag{18.13}$$

Définition Multiplication par une fonction $C^\infty CL$ Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite C^∞ *à croissance lente* si f est C^∞.

Nous allons définir le produit d'une fonction $C^\infty CL g$ avec une distribution $T \in \mathcal{S}'$: on définit $g \cdot T \in \mathcal{S}'$ par

$$< g \cdot T, \varphi > = < T, g \cdot \varphi > . \tag{18.14}$$

Proposition Avec les définitions ci-dessus, la transformée de Fourier possède les propriétés suivantes :

1. (Linéarité) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $T_1, T_2 \in \mathbb{S}'$,
$$\mathcal{F}(aT_1 + bT_2) = a\mathcal{F}(T_1) + b\mathcal{F}(T_2) \tag{18.15}$$
2. (Transformée de Fourier de dérivées) Soit $T \in \mathbb{S}'$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\mathcal{F}(T^{(n)}) = (ix)^n \mathcal{F}T \tag{18.16}$$
3. (Transformé de Fourier de la translatée) Soit $T \in \mathbb{S}'$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors
$$\mathcal{F}(\mathcal{T}_a T) = e^{iax}\mathcal{F}T \tag{18.17}$$
ce qui signifie que
$$< \mathcal{T}_a T, \mathcal{F}\varphi > = < e^{iax}\mathcal{F}T, \varphi > = < \mathcal{F}T, e^{iax}\varphi > = < T, \mathcal{F}(e^{iax}\varphi) > \tag{18.18}$$
4. (Transformée de Fourier et changement d'échelle) Soit $T \in \mathbb{S}'$ et $a \neq 0$. Alors
$$\mathcal{F}(S_a T) = \frac{1}{|a|} S_{1/a}(\mathcal{F}T) \tag{18.19}$$
5. (Dérivée de la transformée de Fourier) Soit $T \in \mathbb{S}'$. Alors
$$(\mathcal{F}T)^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}(x^n T) \tag{18.20}$$

18.6 Convolution des distributions tempérées

L'objectif ici est de définir le produit de convolution $T_1 * T_2$ de deux distributions tempérées $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'$.

La proposition suivante présente deux observations concernant des propriétés de la convolution de fonctions.

Proposition

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est CCL et $\varphi \in \mathcal{S}$, alors

$$(f * \varphi)(x) =< f, \mathcal{T}_{-x}(\varphi^v) > \tag{18.21}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g * f)(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g * \varphi^V)(x)\, dx \tag{18.22}$$

18.7 Equations différentielles avec des distributions