Analyse Numérique - Résumé

Johan Boissard

16 juin 2009

Table des matières

Chapitre 1

Equations différentielles Ordinaires (ODE)

1.1 Problème général de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Un problème de Cauchy peut être
- linéaire
- non-linéaire

1.2 Dérivées numériques

Différence finie *progressive*

$$(Dy)_i^P = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.2}$$

Différence finie *rétrograde*

$$(Dy)_i^R = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} \quad i = 0, \dots, n \tag{1.3}$$

Différence finie *centrée*

$$(Dy)_i^C = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{2h} \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.4}$$

1.2.1 Erreur commise

Il existe pour tout t, un η entre t_i et t, un développement de Taylor

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{y''(\eta)}{2}(t - t_i)^2 \tag{1.5}$$

On obtient les *estimations* suivantes

1. $$|y'(t_i) - (Dy)_i^P| \leq Ch, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |y''(t)| \tag{1.6}$$

2.

$$|y'(t_i) - (Dy)_i^R| \leq Ch, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |y''(t)| \tag{1.7}$$

3.

$$|y'(t_i) - (Dy)_i^C| \leq Ch^2, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{6} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |y'''(t)| \tag{1.8}$$

La différence $\tau(h) = |y'(t_i) - (Dy)_i^P|$ est appelée **erreur de troncature en** t_i
On dira que τ est d'ordre $p > 0$, si : $\tau(h) \leq Ch^P$, pour une constante $C > 0$, on obtient que

1. ordre $p = 1$
2. ordre $p = 1$
3. ordre $p = 2$

1.3 Méthodes des différences finies

1. Euler progressif

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Schéma explicite

2. Euler rétrograde

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Schéma implicite

1.4 Conditions de stabilité

Le choix du pas de temps h n'est pas arbitraire et doit être choisi judicieusement. On verra plus tard que si h est trop petit, des problèmes de stabilité peuvent survenir.

1.4.1 Propriétés de stabilité (absolue)

Soit $\lambda < 0$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \quad \forall \mathbb{R}_+ \\ y \end{cases} \tag{1.11}$$

Dont la solution est $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ et $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$
Un schéma de dérivation est dit **absolument stable** si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

1. Schéma d'Euler progressif

$$u_{n+1} = (1 + \lambda h) u_n \quad u_n = (1 + \lambda h)^n y_0 \quad \forall n \geq 0 \tag{1.12}$$

La condition de stabilité est $|1 + \lambda h| < 1$ d'où $h < \frac{2}{|\lambda|}$

2. Schéma d'Euler rétrograde

$$u_{n+1} = (1 + \lambda h) u_n \quad u_n = (1 + \lambda h)^n y_0 \quad \forall n \geq 0 \tag{1.13}$$

comme $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ ce schéma est **inconditionellement** stable

1.4.2 Stabilité absolue contrôle les perturbations

Considérons le modèle généralisé suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t) \quad t \in (0, \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

soient r et λ des fonctions continues :
$\lambda_{max} \leq \lambda(t) \leq \lambda_{min}$ où $0 < \lambda_{min} \leq \lambda_{max} < \infty$

1.4.3 Convergence d'Euler progressif

La méthode est convergente si $\forall n = 1, \ldots, N_h$:

$$|u_n - y(t_n)| \leq C(h) \quad \text{où } C(h) \to 0 \text{ when } h \to 0 \tag{1.15}$$

Si en plus $\exists p > 0$, tel que $C(h) = O(h^P)$ alors on parle de méthode **convergente d'ordre** p

1.5 Récapitulatif

Méthode	*Explicite/Implicite*	*Pas*	*Stabilité*	*Ordre*
Euler progressif	Explicite	1	Conditionellement	1
Euler rétrograde	Implicite	1	Inconditionellement	1
Crank Nicholson	Implicite	1	Inconditionellement	2
Heun	Explicite	1	Conditionellement	2
Euler modifié	Explicite	1	Conditionellement	2

1.5.1 Système d'ODE

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad t > 0, \tag{1.16}$$
$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{1.17}$$

$A \in \mathbb{R}^{pxp}$ et $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^p$ où l'on suppose que $\mathbf{A}$ possède p valeurs propres distinctes $\lambda_j, j = 1, \ldots, p$
La méthode d'Euler progressif devient

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{h} = A\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

La méthode d'Euler rétrograde devient

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{h} = A\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

1.5.2 Stabilité d'un système d'ODE

La méthode d'Euler est ***stable*** pour autant que la condition suivante soit vérifiée

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\ldots,p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} \tag{1.20}$$

où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.
La méthode d'Euler rétrograde est ***inconditionellement stable***.

Chapitre 2

Equations non linéaires

2.1 Méthode de Dichotomie ou Bissection

On construit une suite telle que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = 0 \tag{2.1}$$

Si il existe $a < b$ avec $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un zéro dans l'intervalle $[a, b]$

2.1.1 Méthode

1. on pose $x^{(0)} = \frac{a+b}{2}$
2. si $f(x^{(0)}) = 0$ alors $x^{(0)}$ est le zéro (α) cherché
3. si $f(x^{(0)}) \neq 0$
   soit $f(x^{(0)})f(a) > 0$ et donc $\alpha \in (x^{(0)}, b)$, on pose $a = x^{(0)}$
   si $f(x^{(0)})f(a) < 0$, $\alpha \in (a, x^{(0)})$ et donc on pose $b = x^{(0)}$

2.2 Méthode de Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

2.2.1 Convergence de la méthode de Newton

2.3 Critères d'arrêt

Un bon critère d'arrêt est le **contrôle d'incrément**

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon \tag{2.3}$$

où ϵ est fixé.

Un deuxième critère est celui de **contrôle des résidus** :

$$|f(x^{(k)})| < \epsilon \tag{2.4}$$

2.4 Méthode du point fixe

Un procédé général pour trouver les racines d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ consiste en la transformer en un problème équivalent $x - \phi(x) = 0$, où la fonction auxiliaire $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ doit avoir la propriété suivante : $\phi(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $f(\alpha) = 0$.
Le point α est dit alors point fixe de la fonction ϕ. Approcher les zéros de f se ramène donc au problème de la détermination des points fixes de ϕ. Idée : On va construire des suites qui vérifient $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ où $k \geq 0$. En effet, si $x^{(k)} \to \alpha$ et si ϕ est continue dans $[a, b]$, alors la limite α satisfait $\phi(\alpha) = \alpha$

2.4.1 Convergence globale

soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]\ \phi(x) \in [a, b]$
Alors il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$ de ϕ.
En plus, supposons que $\exists K < 1$ tel que $|\phi'(x)| \leq K \forall x \in [a, b]$. Alors

1. il existe un unique point fixe α de ϕ dans $[a, b]$.
2. $\forall x^{(0)} \in [a, b]$, la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$ converge vers α lorsque $k \to \infty$
3. on a le résultat de convergence suivant :

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq K|x^{(k)} - \alpha|, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

2.5 Méthode de la corde

La méthode de la corde est obtenue en remplacant $f'(x_k)$ par une constante q dans la méthode de Newton, ce qui donne

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^k)}{q} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Chapitre 3

Système linéaire

3.1 Formulation du problème

On appelle système linéaire d'ordre n (n entier positif), une expression de la forme

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice de taille $n \times n$ donnée, $b = (b_j)$ est un vecteur colonne également donné et $x = (x_j)$ est le vecteur des inconnues du système.

La matrice A est dite régulière (non singulière) si $detA \neq 0$.

On a l'existence et l'unicité de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

Théoriquement, si A est régulière, la solution peut être obtenue par la *formule de Cramer*

$$x_i = \frac{det(B_i)}{det(A)} \tag{3.2}$$

où

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur b est inséré à la place de la $i^{\text{ème}}$ colonne dans la matrice A.

3.2 Méthode de factorisation LU

Idée : Soit A une matrice singulière $n \times n$. Supposons qu'il existe une matrice triangulaire supérieure U et une matrice triangulaire inférieure L, telles que : $A = LU$ qui s'appelle une factorisation LU de A.

Si on connaît LU de A, résoudre $Ax = b$ équivaut à résoudre 2 systèmes à matrice triangulaire :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \tag{3.3}$$

On peut calculer facilement les solutions de ces deux systèmes :

- on utilise une substitution progressive pour calculer $Ly = b$ (ordre n^2 flops),
- on utilisee une substitution rétrograde pour calculer $Ux = y$ (ordre n^2 flops)

Cependant, il faut d'abord déterminer (s'il est possible) les matrices L et U (ce qui requiert un ordre de $\frac{2n^3}{3}$ flops).

3.3 Systèmes triangulaires

Définition : Une matrice A est
- *triangulaire supérieure* si : $a_{ij} = 0 \ \forall i, j : 1 \leq j \leq i \leq n$
- *triangulaire inférieure* si : $a_{ij} = 0 \ \forall i, j : 1 \leq i \leq j \leq n$

On a également la propriété suivante :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3.4}$$

on en déduit immédiatement que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}^*$.

1. **Méthode de substitution progressive :** Si A est régulière et *triangulaire inférieure* on a :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.5}$$

et donc

$$x_1 = b_1/a_{11} \tag{3.6}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) \tag{3.7}$$

où $i = 2, 3, \ldots, n$.

2. **Méthode de substitution rétrograde :** Si A est régulière et *triangulaire inférieure* on a :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.8}$$

et donc

$$x_n = b_n/a_{nn} \tag{3.9}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right) \tag{3.10}$$

où $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

3.3.1 matrice de permutation

Si ontrouve une factorisation du type

$$PA = LU \tag{3.11}$$

le vecteur x, solution du système $Ax = b$, vérifie également

$$PAx = \tilde{b} \tag{3.12}$$

où $\tilde{b} = Pb$. Ce deuxième système s'écrit

$$LUx = \tilde{b} \tag{3.13}$$

Donx, comme auparavant, on le résout par $Ly = \tilde{b}$ et $Ux = y$

3.4 Méthodes itératives pour systèmes linéaires

3.4.1 Idée :

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \tag{3.14}$$
$$x^{k+1} = Bx^{(k)} + g \tag{3.15}$$
$$x = Bx + g \tag{3.16}$$

on trouve que $g = (I - B)A^{-1}b$

3.4.2 Erreur

$$e^{(k)} = x - x^{(k)} = Be^{(k-1)} = B^k e^{(0)} \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{3.17}$$
$$\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = 0 \quad \forall e^{(0)} \Leftrightarrow \rho(B) < 1 \tag{3.18}$$

où $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$ est le rayon spectral de la matrice B.

3.5 Jacobi

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g_j \tag{3.19}$$

où $B_J = I - D^{-1}A$ et $g_J = D^{-1}b$ et $D = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ij} & i = j \end{cases}$

3.6 Gauss-Siedel

$$B_{GS} = I - L^{-1}A \tag{3.20}$$
$$L = \begin{cases} 0 & i < j \\ a_{ij} & i \geq j \end{cases} \tag{3.21}$$

On peut également écrire de la façon suivante

$$E = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$
$$F = \begin{cases} -a_{if} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$
$$A = D - (E + F)$$
$$L = D - E$$
$$B_{GS} = (D - E)^{-1}(D - E - A)$$

3.7 Convergence

- si A diagonale dominante stricte ($a_{ii} > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$), alors GS et J convergent
- si A régulière et tridiagonale (trois diagonales au centre symétriques) et $a_{ii} \neq 0$ alors GS et J sont soit divergent soit convergent, dans le dernier cas on a : $\rho(B_{GS})^2 = \rho(B_J)$
- si A symétrique et définie positive ($\lambda_i \geq 0$), alors GS converge

3.8 Richardson

$$x^{k+1} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)} \tag{3.22}$$

où $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ est le résidu, α_k un coefficient.
- Si $\alpha_k =$ const, méthode statique

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \tag{3.23}$$

- Sinon méthode dynamique :

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}, \tag{3.24}$$

où $(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$ est le produit scalaire.

3.8.1 Convergence

$$||x^{(k)} - x||_A \leq \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}\right)^k ||x^{(0)} - x||_A \quad k \geq 0 \tag{3.25}$$

où $K(A)$ est le conditionnement de la matrice A défini par

$$K(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)} \tag{3.26}$$

3.8.2 Préconditionneur

On peut ajouter une matrice P pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode, on obtient

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha_k r^{(k)} \tag{3.27}$$

On a les α_k suivants :

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)} \tag{3.28}$$

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, P^{-1}r^{(k)})}{(AP^{-1}r^{(k)}, P^{-1}r^{(k)})}. \tag{3.29}$$

Et pour la convergence

$$||x^{(k)} - x||_A \leq \left(\frac{K(P^{(-1)}A) + 1}{K(P^{(-1)}A) - 1}\right)^k ||x^{(0)} - x||_A \quad k \geq 0 \tag{3.30}$$

Remarques : Si on remplace P^{-1} par la matrice identité I dans les formules précédentes, on retombe sur les formules originales.

Chapitre 4

Interpolation

4.1 Position du problème

Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Etant donnés $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$ et $n+1$ valeurs $y_0, y_1, \dots, y_n$, on cherche un polynôme p de degré n, tel que

$$p(x) = y_j \quad 0 \leq j \leq n \tag{4.1}$$

Dans le cas affirmatif, on note $p = \Pi_n$ et on appelle Π_n le polynôme d'interpolation aux points x_j, $j = 0, \dots, n$.

Soit $f \in C^0(I)$ et $x_0, \dots, x_n \in I$. Si comme valeurs y_j on prend $y_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$, alors le polynôme d'interpolation $\Pi_n(x)$ est noté $\Pi_n f(x)$ et est appelé l'interpolant de f aux points $x_0, \dots, x_n$.

4.2 Base de Lagrange

On considère les polynômes $\varphi_k, k = 0, \dots, n$ de degré n tels que

$$\varphi_k(x_j) = \delta_{jk}, \quad k, j = 0, \dots, n,$$

où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$. Explicitement, on a

$$\varphi_k(x) = \Pi_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}. \tag{4.2}$$

Le polynôme d'interpolation Pi_n des valeurs y_j aux points $x_j, j = 0, \dots, n$, s'écrit

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(x), \tag{4.3}$$

car il vérifie $\Pi_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(x_j) = y_j$.

Par conséquent on aura

$$\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \varphi_k(x). \tag{4.4}$$

4.3 Interpolation d'une fonction régulière

Théorème (Erreur d'interpolation) Soient $x_0, x_1, \dots, x_n, n+1$ noeuds équirépartis dans $I = [a, b]$ et soit $f \in C^{n+1}(I)$. Alors, on a

$$E_n(f) = \max_{x \in I} |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{4.5}$$

4.4 Interpolation par intervalles

Soient $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ des points qui divisent l'intervalle $I = [a, b]$ dans une réunion d'intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de longueur H où $H = \frac{b-a}{N}$.

Sur chaque sous-intervalle I_i on interpole $f_{|I_i}$ par un polynôme de degré 1. Le polynôme par morceaux qu'on obtient est noté $\Pi_1^H f(x)$, et on a :

$$\Pi_1^H f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad x \in I_i. \tag{4.6}$$

Théorème Si $f \in C^2(I)$, $(I = [x_0, x_N])$ alors l'erreur est donnée par (pour $n \geq 1$)

$$E_n^H(f) \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{4.7}$$

4.5 Approximation au sens des moindres carrés

Définition On appelle polynôme aux moindres carrés de degré m, $\tilde{f}_m$ le polynôme de degré m tel que

$$\sum_{i=0}^{n} |y_i - \tilde{f}_m(x_i)|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |y_i - p_m(x_i)|^2 \quad \forall p_m(x) \in \mathbb{P}_m \tag{4.8}$$

Lorsque $y_i = f(x_i)$ (f étant une fonction continue) alors $\tilde{f}_m$ est dit l'approximation de f au sens des moindres carrés.

Autrement dit, le polynôme aux moindres carrés est le polynôme de degré m qui, parmi tous les polynômes de degré m, minimise la distance des données. Si on note $\tilde{f}_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, et on définit la fonction

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m)]^2 \tag{4.9}$$

alors les coefficients du polynôme aux moindres carrés peuvent être déterminés par les relations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = 0, \quad 0 \leq k \leq m \tag{4.10}$$

ce qui nous donne $m + 1$ relations linéaires entre les a_k.

En général, on observe que si pour calculer le polynôme interpolant aux moindres carrés $\tilde{f}_m(x)$ on impose les conditions d'interpolation $\tilde{f}_m(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$, alors on trouve le système linéaire $Ba = \tilde{y}$, où B est la matrice de dimension $(n + 1) \times (m + 1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}$$

Puisque $m < n$ le système est surdéterminé, c'est-à-dire que le nombre de lignes est plus grand que le nombre de colonnes. Donc on ne peut pas résoudre ce système de façon classique, mais on doit le résoudre au sens des moindres carrés, en considérant :

$$B^T B a = B^T \tilde{y}. \tag{4.11}$$

De cette façon on trouve le système linéaire $Aa = y$ (avec $A = B^T B$ et $y = B^T \tilde{y}$), dit système d'équations normales. On peut montrer que les équations normales sont équivalentes au système.

4.6 Interpolation par fonction splines

Soient $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ des points qui divisent l'intervalle $I = [a, b]$ dans une réunion d'intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.

Définition. On appelle spline cubique interpolant f une fonction s_3 qui satisfait

1. $s_{3|_{I_i}} \in \mathbb{P}_3$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, $\mathbb{P}_3$ étant l'ensemble des polynômes de degré 3,
2. $s_3(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 0, \ldots, n$,
3. $s_3 \in C^2([a, b])$.

Cela revient à vérifier les conditions suivantes (on indique par $s_3(xi^-)$ la limite à gauche de s_3 au point x_i et par $s_3(x_i^+)$ la limite à droite) :

$$\begin{aligned}
s_3(x_i^-) &= f(x_i) \quad 1 \leq i \leq n-1, \\
s_3(x_i^+) &= f(x_i) \quad 1 \leq i \leq n-1, \\
s_3(x_0) &= f(x_0), \\
s_3(x_n) &= f(x_n), \\
s_3'(x_i^-) &= s_3'(x_i^+) \quad 1 \leq i \leq n-1, \\
s_3''(x_i^-) &= s_3''(x_i^+) \quad 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $2(n-1) + 2 + 2(n-1) = 4n - 2$ conditions.

Il faut trouver $4n$ inconnues (qui sont les 4 coefficients de chacune des n restrictions $s_{3|_{I_i}}$, $i = 0, \ldots, n-1$) et on dispose de $4n - 2$ relations. On rajoute alors 2 conditions supplémentaires à vérifier.

– Si l'on impose

$$s_3''(x_0^+) = 0 \text{ et } s_3''(x_n^-) = 0$$

alors la spline s_3 est complètement déterminée et s'appelle *spline naturelle*.

– Une autre possibilité est d'imposer la continuité des dérivées troisièmes dans les noeuds x_2 et x_{n-1} , c'est à dire :

$$s_3'''(x_2^-) = s_3'''(x_2^+) \text{ et } s_3'''(x_{n-1}^-) = s_3'''(x_{n-1}^+)$$

dans ce cas elle s'appelle *not-a-knot*.

Chapitre 5

Intégration numérique

5.1 Formule d'intégrations simples

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée sur un intervalle $[a, b]$. On désire calculer numériquement la quantité :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.1}$$

On considère les formules d'intégrations simples suivantes :

1. Formule du rectangle :

$$I_{mp}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{5.2}$$

2. Formule du trapèze :

$$I_t(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{5.3}$$

3. Formule de Simpson :

$$I_s(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \tag{5.4}$$

5.2 Formules d'intégrations composites

On va considerer les M sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, M$, où $x_k = a + kH$ et $H = (b-a)/M$. Comme on a

$$I(f) = \sum_{K=1}^{M} \int_{I_k} f(x)\,dx \tag{5.5}$$

sur chaque sous-intervalle I_k on peut calculer une approximation de l'intégrale exacte de f avec l'intégrale d'un polynôme f approchant $\overline{f}$ sur I_k, c.-à.d. :

$$I(f) \text{ approchée par } \sum_{K=1}^{M} \int_{I_k} f(x)\,dx = \int_a^b \Pi_n^H f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

5.2.1 Formules d'intégration composite du rectangle

Cette formule est obtenue en remplaçant, sur chaque sous-intervalle I_k, la fonction f par un polynôme constant $\Pi_o f$ égal à la valeur de f au milieu de I_k : on obtient la formule composite du rectangle (ou du point milieu)

$$I_{pm}^c(f) = H \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k), \tag{5.7}$$

où $\overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

5.2.2 Formules d'intégration composite du trapèze

Si sur chaque intervalle I_k on remplace f par le polynôme d'interpolation $\overline{f} = \Pi_1 f$ de degré 1 aux noeuds x_{k-1} et x_k, on obtient la formule composite du trapèze :

$$I_t^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{M} [f(x_k) + f(x_{k-1})] = \frac{H}{2}[f(a) + f(b)] + H \sum_{k=1}^{M-1} f(x_k). \tag{5.8}$$

5.2.3 Formules d'intégration composite de Simpson

La formule de Simpson est obtenue en remplaçant f par son polynôme interpolant composite $\overline{f} = \Pi_2^H$ de degré 2 entre les noeuds x_k. En particulier, f est une fonction continue par morceaux qui sur chaque sous-intervalle I_k est obtenue comme le polynôme interpolant f aux noeuds $x_{k-1}, \overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ et x_k.

On obtient donc la formule composite de Simpson :

$$I_s^c(f) = \frac{H}{6} \sum_{k=1}^{M} [f(x_{k-1}) + 4f(\overline{x}_k) + f(x_k)] \tag{5.9}$$

5.3 Erreur d'intégration numérique

1. Formule composite du rectangle, si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{5.10}$$

2. Formule composite du trapèze, si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_t^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{5.11}$$

3. Formule composite de Simpson, si f est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_s^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \tag{5.12}$$

Les formules ci-dessus sont des cas particuliers de la **formule générale de quadrature**

$$I_{approx}(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) \tag{5.13}$$

où x_k sont les noeuds de la formule de quadrature, et α_k sont les poids (voir la table suivante).

Formule	*Dg. Exact*	x_k	α_k
Rectangle	1	$x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$	$\alpha_0 = b - a$
Trapèze	1	$x_0 = a, x_1 = b$	$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(b-a)$
Simpson	3	$x_0 = a, x_1 = \frac{1}{2}(a+b), x_2 = b$	$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}(b-a), \alpha_1 = \frac{2}{3}(b-a)$

Formule composite	*Deg. exact*	*Ordre par rapport à H*
Rectangle	1	2
Trapèze	1	2
Simpson	2	4