Taylor Series

Johan Boissard

October 12, 2011

1 Théorie

La série de Taylor d'une fonction $f(x)$ qui est infiniment différentiable dans le voisinage de α est

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^k}{k!} \tag{1}$$

2 Exemple

2.1 Série de Taylor d'une fonction polynomiale autour de $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^a \\ f^{(k)}(x) &= \frac{a!}{(a-k)!}x^{a-k} \\ f^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(0) &= \begin{cases} 0 \ a \neq k \\ a! \ a = k \end{cases} \end{aligned}$$

On voit donc que la série se résume à

$$f(x) = a!\frac{(x-0)^a}{a!} = x^a \tag{2}$$

2.2 Trouver la valeur de $\ln(2)$

Pour cela, on cherche la série de taylor de $\ln(x)$ autour de $\alpha = 1$.

$$f(x) = \ln(x) \tag{3}$$

$$f(1) = 0 \tag{4}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(k+1)}(k-1)!}{x^k} \tag{5}$$

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{(k+1)}(k-1)! \tag{6}$$

On a donc $(\alpha = 1)$

$$\ln(x) \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k+1)}\frac{(x-1)^k}{k} \tag{7}$$

Si on se limite à $n = 4$ on obtient

$$\ln(x) \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \tag{8}$$

et donc pour $\ln(2)$, on obtient $\ln(2) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = .583333$ qui n'est pas trop éloigné de $\ln(2) = .69$. Plus n grandit et plus l'écart entre la vraie valeur et la valeur calculée diminue.

Il est facile de montrer que (par extension de ce qui a été fait précédemment) que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} \tag{9}$$