Analyse

Johan Boissard

25 décembre 2013

Table des matières

Première partie .

General

1. Qu'et-ce qu'une fonction

Une fonction est un objet mathématique qui associe une valeur à une autre. On peut se représenter l'effet d'une fonction par une boîte noire. Une valeur est entrée dans la boîte noire et une autre valeur en ressort. Une fonction décrit le comportement de cette boîte ; elle décrit les opérations que subiront la valeur d'entrée pour être transformée en valeur de sortie. Si on connaît la fonction on peut déterminer toutes les valeurs de sortie. Une fonction a un domaine de départ et un domaine d'arrivée. Le domaine de départ est l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction en argument : l'ensemble des valeurs qu'"accepte la boîte noire".

Le domaine d'arrivée est l'ensemble des valeurs que la fonction/la boîte noire peut retourner.

Chaque valeur du domaine correspond à une seule valeur du domaine d'arrivée, ceci n'est pas forcément réciproque. Si c'est le cas on dit que la fonction est **bijective**.

1.1. Représentation d'une fonction

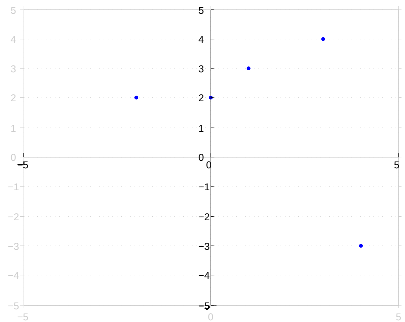
Dans le cadre de ce livre, nous allons uniquement considérer des fonctions à un variable. Dans ce cas on observe l'évolution de la fonction, généralement dénotée $f(x)$, en fonction de x, il s'agit donc de couples de valeurs, $(x, f(x))$. En mathématiques, il est courant de représenter ces couples dans un graphique.

Un graphique est composée de deux droites. Une droite horizontale : l'**abscisse**, souvent dénoté comme l'axe des x et une droite verticale l'**ordonnée** également appelée axe des y.

L'abscisse représente la première valeur du couple et l'ordonnée la deuxième. y est donc associée à $f(x)$ pour la représentation.

L'intersection

FIGURE 1.1.: A picture of a gull.



2. Elementary Algebra

2.1. Identities

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2.2}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{2.3}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{2.4}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \tag{2.5}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{2.6}$$

$$a^2 + b^2 = (a-ib)(a+ib) \tag{2.7}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)\left(a + (1+i\sqrt{3})\frac{b}{2}\right)\left(a + (1-i\sqrt{3})\frac{b}{2}\right) \tag{2.8}$$

$$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a-b)\left(a - (1+i\sqrt{3})\frac{b}{2}\right)\left(a - (1-i\sqrt{3})\frac{b}{2}\right) \tag{2.9}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \tag{2.10}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \tag{2.11}$$

2.2. Powers and roots

$a, b > 0$ and $\sqrt[n]{a}$ is only defined for $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a^0 = 1 \tag{2.12}$$
$$a^p = a \cdot a^{p-1} \tag{2.13}$$
$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{2.14}$$
$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \tag{2.15}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \tag{2.16}$$
$$a^p a^q = a^{p+q} \tag{2.17}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \tag{2.18}$$
$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \tag{2.19}$$
$$a^p b^p = (ab)^p \tag{2.20}$$
$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \tag{2.21}$$
$$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p} \tag{2.22}$$
$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} = a^{\frac{1}{pq}} \tag{2.23}$$
$$\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab} = (ab)^{\frac{1}{p}} \tag{2.24}$$
$$\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}^{\frac{1}{p}} \tag{2.25}$$

2.3. Absolute Value

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

$$|a| \cdot |b| = |ab| \tag{2.27}$$
$$\frac{|a|}{|b|} = |\frac{a}{b}| \tag{2.28}$$
$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{2.29}$$
$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \tag{2.30}$$

2.4. Means

Mean	of two numbers a_1 and a_2	of n numbers $a_1, a_2, \dots$
Arithmetic (A)	$\frac{a_1+a_2}{2}$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$
Weighted (W)	$\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2}{\lambda_1+\lambda_2}$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$
Geometric (G)	$\sqrt{a_1 a_2}$	$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$
Harmonic (H)	$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2 3}}$	$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$
Quadratic (Q)	$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$

Property

$$H \leq G \leq A \leq Q \tag{2.31}$$

2.5. Polynomes

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{2.32}$$

Zeros are x_i that satisfies $P(x_i) = 0$.

2.5.1. Second degree polynome

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0 \tag{2.33}$$

Can always be rewritten

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1) \tag{2.34}$$

where x_0 and x_1 are the *zeros* of $f(x)$. Zeros can be determined as follows

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.35}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{2.36}$$

For Δ we have the following properties

$$\text{if } \Delta > 0, \text{ then } x_0, x_1 \in \mathbb{R} \tag{2.37}$$

$$\text{if } \Delta = 0, \text{ then } x_0 = x_1 \tag{2.38}$$

$$\text{if } \Delta < 0, \text{ then } x_0, x_1 \in \mathbb{C} \tag{2.39}$$

Exemple Find the zeros of $f(x) = x^2 + 7x + 12$

$$\begin{aligned}\Delta &= 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1\\ x_0 &= \frac{-7+1}{2} = -3\\ x_1 &= \frac{-7-1}{2} = -4\end{aligned}$$

And $f(x)$ can be rewritten

$$f(x) = (x+4)(x+3)$$

Exemple Find the zeros of $f(x) = 2x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

$$\begin{aligned}\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{25}{8} &= -25\\ \sqrt{\Delta} &= 5i\\ x_0 = \frac{5+5i}{4} &= \frac{5}{4}(1+i)\\ x_1 = \frac{5-5i}{4} &= \frac{5}{4}(1-i)\end{aligned}$$

Thus $f(x)$ can be rewritten

$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}(1+i)\right)\left(x + \frac{5}{4}(i-1)\right)$$

Exemple Find the zeros of $f(x) = x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned}\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &= -3\\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{3}i\\ x_0 &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\ x_1 &= -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

Thus $f(x)$ can be rewritten

$$f(x) = \left(x + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

La relation de Viète nous dit que pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, les zéros x_0 et x_1 satisfont

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{b}{a} \\ x_0 x_1 = \frac{c}{a} \end{cases} \tag{2.40}$$

3. La droite

$$f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

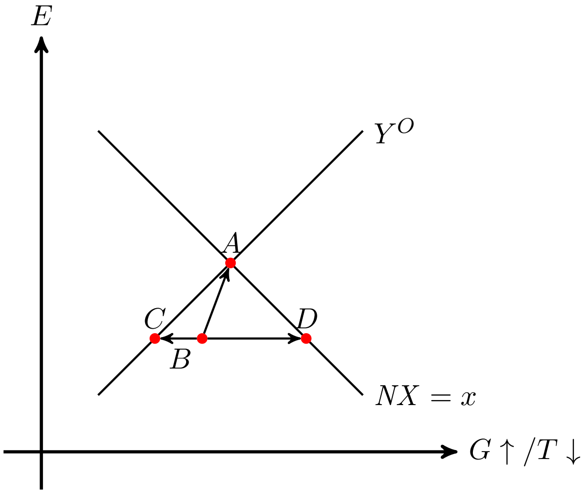
exemple de la piscine, + abo

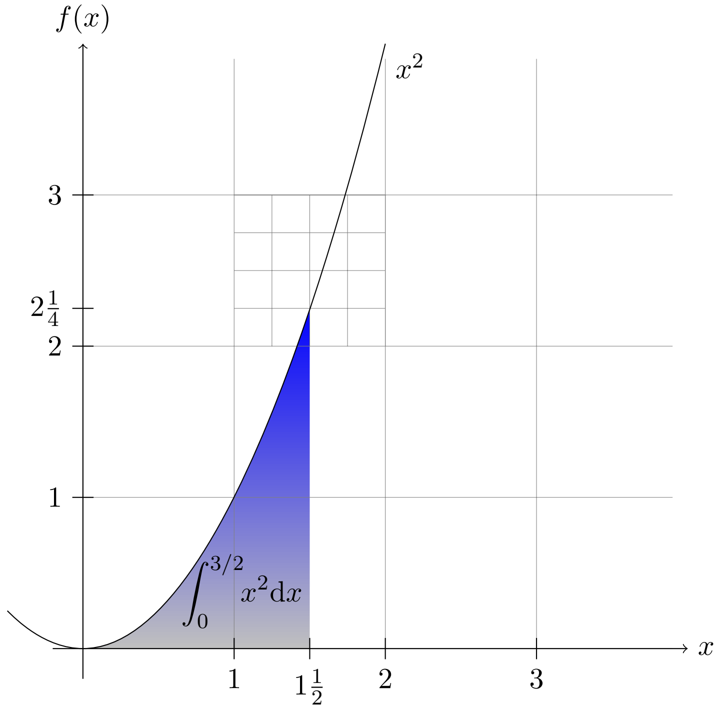
4. La parabole

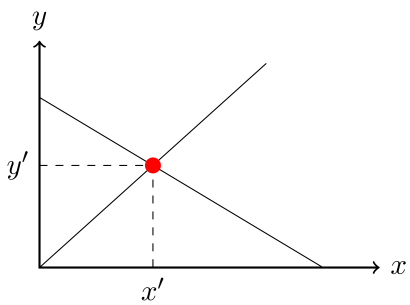
5. Les fonctions polynomiales

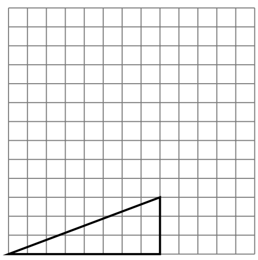
6. Les fonctions rationelles

7. Algèbre élémentaire









8. Trigonométrie

$$\sin x = y \Leftrightarrow \arcsin y = x \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{8.1}$$

$$\cos x = y \Leftrightarrow \arccos y = x \quad -1 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{8.2}$$

$$\tan x = y \Leftrightarrow \arctan y = x \quad x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{8.3}$$

8.1. Valeurs exacts des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0° 0	1	0	0
30° $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45° $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° $\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90° $\frac{\pi}{2}$	0	1	-

8.2. Périodicité des fonctions trigonométriques

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \tag{8.4}$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \tag{8.5}$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \tag{8.6}$$

8.3. Relations entre fonctions trigononmétriques d'un même arc

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$	$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

8.4. Relations entre fonctions trigononmétriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

Remarques : ces relations peuvent être facilement retrouvées en utilisant la formule de Moivre : $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$, voir le chapitre sur les nombres complexes.

8.5. Conversion des mesures d'angles

On note respectivement d, r, m et g la mesure d'angle en degrés, en radians, en minutes et en grades.

Pour un même angle, on a

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{m}{30} = \frac{g}{200} \tag{8.7}$$

Deuxième partie .

Analysis in $\mathbb{R}$

9. Dérivée

9.1. Fonction composée

Définition $y = f(u)$ $u = g(x)$ $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Exemple $y = f(u) = \sqrt{u}$
$u = g(x) = x^2 + 1$
$y = (f \circ g)(x)$ Calculer $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \\ g'(x) &= 2x \\ (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{9.1}$$

$$\frac{d}{dx}(af(x)) = a\frac{d}{dx}f(x) \tag{9.2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \tag{9.3}$$
$$\frac{d}{dx}\left((f \circ g)(x)\right) = (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \tag{9.4}$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{9.5}$$
$$\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{9.6}$$

Exemple :

$$\left(7\frac{x^2 + x + 5}{e^{2x}}\right)'$$

On peut récrire sous la forme suivante

$$\left(a\frac{f}{g}\right)' = a\left(\frac{f}{g}\right)' = a\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{9.7}$$

où $a = 7$, $f = x^2 + x + 5$ et $g = e^{2x}$.

On a $f'(x) = 2x + 1$ et $g'(x) = 2e^{2x}$ et obtient donc :

$$\left(7\frac{x^2+x+5}{e^{2x}}\right)' = 7\frac{e^{2x}((2x+1) - 2\cdot(x^2+x+5))}{4e^{4x}} = -\frac{7}{4}\frac{2x^2+9}{e^{2x}}$$

Pour $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$, on a $dx = \Delta x$ **mais** $dy \neq \Delta y$!

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ ou } \Delta y + f(x) = f(x + \Delta x) \tag{9.8}$$

Exemple $y = 3x^2 - 5$, $x = 2$ et $\Delta x = 0.1$ Calculer Δy et dy.

Tout d'abord on remarque que $\Delta x = dx$ et $f'(x) = 6x$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2) = 1.23$$

et

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)dx = f'(x)\Delta x = f'(2)\cdot 0.1 = 1.2$$

9.2. Dérivée de fonctions implicites

si $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ défini sur une fonction implicite $f(x)$, alors on dérive tous les termes par x et on factorise par y'.

$$\begin{aligned}(y^4)' + (3y)' - (4x^3)' = (5x)' + (1)' &= \\ 4y^3y' + 3y' - 12x^2 &= 5 \\ y'(4y^3 + 3) &= 12x^2 + 5\end{aligned}$$

et

$$y' = f'(x) = \frac{12x^2 + 5}{4(f(x))^3 + 3}$$

Exemple Taux liés

Soit $x^3 - 2y^2 + 5x = 16$, $\frac{dx}{dt} = 4$, $x = 2$, $y = -1$ et $\frac{dy}{dt} = ?$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^3)' - \frac{d}{dt}(2y^2)' + \frac{d}{dt}(5x)' &= \frac{d}{dt}(16) \\ 3x^2\frac{dx}{dt} - 4y\frac{dy}{dt} + 5\frac{dx}{dt} &= 0 \\ 3\cdot 2^2\cdot 4 - 4\cdot(-1)\frac{dy}{dt} + 5\cdot 4 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20 - 48}{4} &= -17\end{aligned}$$

10. Applications de la dérivée

10.1. Extremums

Si $f(x)$ est continue et que $f'(x) = 0$ a une solution cette dernière est un point critique (max, min, point de selle).

Exemple

$$f(x) = 2\sin(x) + \cos(2x)$$
$$f'(x) = 2\cos(x) - 2\sin(2x) = 2\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)(1 - 2\sin(x))$$

Il nous faut donc trouver les solutions du système d'équation suivant

$$\begin{cases} \cos(x) = 0 \\ 1 - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sin(x) \end{cases}$$

La solution de la première équation est $x = (1 + 2k)\pi$, la résolution de la deuxième équation est un peu plus délicate mais on trouve

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{6} + (1 + 2k)\pi \end{cases}$$

Les extremums de $f(x)$ sont donc donnés par

$$x = \begin{cases} (1 + 2k)\pi \\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{6} + (1 + 2k)\pi \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

10.2. Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. $f'(c) = 0$, avec $c \in]a, b[$, en au moins un point de $]a, b[$.

Théorème **Théorème de accroissements finis** Si f est dérivable sur $[a, b]$ alors

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{10.1}$$

10.3. Test de la dérivée première

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

1. si $f'(x) > 0$ fonction croissante
2. si $f'(x) < 0$ fonction décroissante
3. si $f'(x) = 0$ point critique

10.4. Concavité et test de la dérivée seconde

1. si f"(x)>0 convexe
2. si f"(x)<0 non convexe (concave)
3. si f"(x)=0 point d'inflexion (Wendepunkt)

10.5. Problème d'optimisation

1. créer une fonction représentant la donnée du problème
2. dériver
3. déterminer quelle genre d'optimum on trouve et quel genre d'optimum on cherche. Attention aux "rand"max qui sont déterminés par la donnée du problème et qui ne correspondent pas forcément à l'optimum trouvé.

Exemple $f(x) = (32 - 2x)x$, $f'(x) = 32 - 4x$, $\hat{x} = 8$

10.6. Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode numérique permettant de trouver les zéros d'une fonction, pour plus de détails se référer au cours d'analyse numérique.

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$, une approximation de $f(x) = 0$ peut être donnée par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \tag{10.2}$$

où $x^{(0)} \in [a, b]$ est choisi arbitrairement.

Exemple On cherche les zéros de $f(x) = x - \cos(x)$.
On a $f'(x) = 1 - \sin(x)$ la méthode s'écrit donc

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - \cos(x^{(k)})}{1 - \sin(x^{(k)})}$$

en prenant $x^{(0)} = 0.8$ on a

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= & & 0.8 \\
x^{(1)} &= & 0.8 - \tfrac{0.8-\cos(0.8)}{1-\sin(0.8)} = & 0.74 \\
x^{(2)} &= & \cdots & 0.739 \\
x^{(3)} &= & \cdots & 0.739 \\
x^{(4)} &= & \cdots & 0.739085133\ldots
\end{aligned}$$

10.7. The differential operator : d

The d operator indicates an infinitely small interval.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \mathrm{d}x \tag{10.3}$$

10.8. Operator Algebra

The operator d followed by its associated variable can be treated as a common variable and allows to find interesting and practical identities. Be aware that the operator is not dissociable from its attached variable ; not allowed to divide by d ! For instance

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x \tag{10.4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}x^2 = 2x\mathrm{d}x \tag{10.5}$$

or

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \tag{10.6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\ln(x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \tag{10.7}$$

The latter proves that a percentage change can simply be expressed as the derivative of the log function.

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}t} \tag{10.8}$$

In discrete time, we find the following approximation for small changes

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} \approx \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \tag{10.9}$$

More generally, one can state

$$\mathrm{d}f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = f'(x)\mathrm{d}x \tag{10.10}$$

Exemple In physics it is know that work is the line integral of the force :

$$W_\Gamma = \int_\Gamma F d\gamma. \tag{10.11}$$

So the instantaneous force can be retrieved by differentiating W at $\mathbf{x}$.

When the W is only potential energy, i.e. $W = U = mgh = mg(x-0)$ it is very easy to retrieve the gravity force.

$$F = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = mg. \tag{10.12}$$

Now, if we do the same exercie with work that comprises only kinetic energy, i.e. $W = K = \frac{1}{2}mv^2$, one can retrieve Newton's second law by using operator algebra.

1. Rewrite v in the differental form
$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{10.13}$$

2. apply differentiation rigorously and methodically, also to operators

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) && (10.14)\\
&= \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) && (10.15)\\
&= \frac{m}{2\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\mathrm{d}x)^2\right) && (10.16)\\
&= \frac{m}{2\mathrm{d}t^2}\frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\mathrm{dd}x && (10.17)\\
&= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} && (10.18)\\
&= ma && (10.19)
\end{aligned}$$

11. Intégrales

11.1. Primitives et intégrales définies

$F(x)$ est primitive de $f(x)$, si $F'(x) = f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{11.1}$$

11.2. Changement de variables dans les intégrales définies

si F est primitive de f

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \tag{11.2}$$

si $u = g(x)$ et $du = g'(x)dx$

$$\int f(u)du = F(u) + C \tag{11.3}$$

Exemple

$$\int \sqrt{5x+7}dx \quad u = 5x+7 \quad du = 5dx$$

$$\int \sqrt{u}\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + C$$

11.3. Symbole de sommation et aires

<u>Notation :</u> $\sum_{k=0}^{n} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
On peut approximer une intégrale en utilisant des rectangles sous la courbe.

$$A = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

$$A = \sum_{k=0}^{n} \Delta x f(x_k) = \Delta x \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

11.4. Intégrale définie

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11.4}$$

11.5. Théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11.5}$$

– si f impaire ($f(-x) = -f(x)$) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \tag{11.6}$$

– si f paire ($f(x) = f(-x)$) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \tag{11.7}$$

11.6. Intégration numérique

Pour plus de détails sur les intégrations numériques, se référer au cours d'analyse numérique.

11.6.1. Méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right) - f(x_0) - f(x_n) \tag{11.8}$$

11.6.2. Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \tag{11.9}$$

avec n pair.

12. Applications de l'intégrale définie

12.1. Aires

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \tag{12.1}$$

12.2. Solides de révolution

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2) dx \tag{12.2}$$

12.3. Valeurs par les tubes cylindriques

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{12.3}$$

Exemple Calculer le volume sous la paraboloïde : $f(x) = x^2 + c$ avec $c > 0$ délimitée par le disque $x^2 + y^2 = r^2$.

On pose

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_0^r x f(x) dx = \\ 2\pi \int_0^r x^3 + cx dx = \\ 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + c\frac{x^2}{2} \right]_0^r = \\ \pi r^2 \left[\frac{r^2}{2} + c \right] \end{aligned}$$

12.4. Valeurs d'après les sections transversales

$$V = \int_a^b A(x) dx \tag{12.4}$$

Exemple On veut calculer le volume d'une pyramide de base $a \times a$ et de hauteur h.

On a

$$A(x) = (2y)^2 = 4y^2$$

En suivant un raisonnement géométrique, on a

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$$
$$\Rightarrow y = \frac{ax}{2h}$$

On peut donc écrire

$$A(x) = \frac{a^2x^2}{h^2}$$

et donc

$$V = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}dx$$
$$= \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$$
$$= \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$V = \frac{a^2}{3}h$$

12.5. Longueur d'arc et surface de révolution

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{12.5}$$

12.5.1. Abscisse curviligne

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt \tag{12.6}$$

et

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{12.7}$$

$\rightarrow$ approximation de la longueur.

12.6. Surface de révolution

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{12.8}$$

13. Fonctions logarithmiques et exponentielles

13.1. Fonctions réciproques

Définition **Injective** $f(x)$ et injective quand $f(a) \neq f(b) \Leftrightarrow a \neq b$, c-à-d la fonction n'a jamais deux fois la même valeur, elle est donc soit strictement croissante ou décroissante.

Définition **Réciproque** $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, alors $g(y)$ est la fonction réciproque de $f(x)$.

On note la réciproque de f, $f^{-1}(x)$.

On a également la propriété suivante : $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

Si $g(x) = f^{-1}(x)$ alors $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Exemple $f(x) = 3x - 5$, trouver la fonction réciproque.

On pose tout d'abord $y = f(x)$ et donc $y = 3x - 5$. Par raisonnement algébrique on trouve $x = \frac{y+5}{3}$ et donc $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

13.2. Logarithme naturel

Définition

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \tag{13.1}$$

On en déduit tout de suite que

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \tag{13.2}$$

On a les propriétés suivantes :

$$\ln (ab) = lna + \ln b \tag{13.3}$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \tag{13.4}$$

$$\ln a^b = b \ln a \tag{13.5}$$

13.2.1. Dérivation logarithmique

$$\begin{aligned}y &= f(x)\\ \ln y &= \ln f(x)\\ \frac{1}{y}y' = \frac{f'(x)}{f(x)} &= (\ln f(x))'\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}y &= \frac{(5x-4)^3}{\sqrt{2x-1}}\\ \ln y &= \ln\left(\frac{(5x-4)^3}{\sqrt{2x-1}}\right)\\ &= \ln\left((5x-4)^3\right) - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)\\ &= 3\ln(5x-4) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)\end{aligned}$$

Maintenant il est facile d'obtenir une dérivée.

$$(\ln y)' = 3\frac{5}{5x-4} - \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1} = \frac{15}{5x-4} - \frac{1}{2x-1}$$

13.3. Fonction exponentielle

Définition La fonction exponentielle est la fonction réciproque du logarithme.

$$e^x = \exp x = y \Leftrightarrow x = \ln y \tag{13.6}$$

On a donc

$$\exp(\ln y) = \ln(e^y) = y \tag{13.7}$$

Notons que $e^1 = e \backsimeq 2.71828\ldots$

On a les relations sivantes

$$e^p e^q = e^{p+q} \tag{13.8}$$
$$(e^p)^r = e^{pr} \tag{13.9}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{13.10}$$
$$(e^u)^r = u'e^u \tag{13.11}$$

Notez l'équation 13.10 qui est particulièrement intéressante. L'exponentielle est la seule fonction à posséder cette propriété ; $f(x) = f'(x)$.

13.4. intégration

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \tag{13.12}$$

$$\int e^u du = \frac{e^u}{u'} + C \tag{13.13}$$

$$\int \tan (u) du = - \ln |\cos u| + C \tag{13.14}$$

$$\int \cot u du = \ln |\cos u| + C \tag{13.15}$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C \tag{13.16}$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u + \cot u| + C \tag{13.17}$$

Rappel :

$$\tan^{-1} u = \cot u \tag{13.18}$$

$$\sin^{-1} u = \csc u \tag{13.19}$$

$$\cos^{-1} u = \sec u \tag{13.20}$$

13.5. Fonctions exponentielles et logarithmes de bases quelconque

$$a^x = e^{x \ln (a)} \tag{13.21}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{13.22}$$

$$(a^u)' = a^u \ln (a) u' \tag{13.23}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln (a)} \tag{13.24}$$

$$\int a^u dx = \frac{a^u}{\ln (a) u'} \tag{13.25}$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \tag{13.26}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{13.27}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{lnx}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x} \tag{13.28}$$

Pour prouver que $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, on part de

$$a^y = x$$

Par définition, on a

$$\log_a a^y = y = \log_a x$$

Mais aussi

$$\ln a^y = y \ln a = \ln x$$

et donc

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x$$

Notons que ce résultat se généralise aisément pour obtenir

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{13.29}$$

On peut vérfier le théorème précédent de la façon suivante

$$\begin{aligned} \ln(x) = \log_a(x) \ln(a) = \ln(a^{\log_a(x)}) \\ x = a^{\log_a(x)} = x \end{aligned}$$

13.6. Loi de croissance

$$y(t) = y_0 e^{kt} \tag{13.30}$$

où y_0 est la valeur initiale, à $t = 0$. y_0 a la même unité que y. k est une constante d'unité $[\frac{1}{s}]$, si elle est multipliée au temps t. L'exposant, ici kt, n'a jamais d'unité.

13.7. Factorial

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot 1 \tag{13.31}$$

where $k \in \mathbb{N}$

13.7.1. Stirling's Approximation

for large values of n, $n!$ can be approximated as following

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{13.32}$$

13.7.2. Binomial Coefficients

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{13.33}$$

14. Fonctions trigonométriques réciproques et hyperboliques

14.1. Dérivées et intégrales

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \tag{14.1}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \tag{14.2}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \tag{14.3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \tag{14.4}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C \tag{14.5}$$

14.2. Fonctions hyperboliques

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{14.6}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{14.7}$$

14.2.1. Propriétés

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{14.8}$$

14.2.2. Dérivées et intégrales

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)\frac{du}{dx} \tag{14.9}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)\frac{du}{dx} \tag{14.10}$$

14.3. Fonctions hyperboliques réciproques

$$\arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{14.11}$$
$$\arg\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{14.12}$$

arg est l'argument.

14.3.1. Dérivées et intégrales

$$\frac{d}{dx}\arg\sinh(x) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx} \tag{14.13}$$
$$\frac{d}{dx}\arg\cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \tag{14.14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}du = \arg\sinh\left(\frac{u}{a}\right) + C \tag{14.15}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du = \arg\cosh\left(\frac{u}{a}\right) + C \tag{14.16}$$

15. Techniques d'intégration

15.1. Intégration par parties

Définition

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{15.1}$$

$\int udv = uv - \int vdu$

Exemple

$$\int xe^{2x}dx = ?$$

$dv = e^{2x}dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$, $u = x$ et $du = dx$

$$\begin{aligned} \int xe^{2x}dx &= \\ \int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int \frac{du}{dx}vdx &= \\ x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx &= \\ e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Exemple

$$\int \ln(x)dx = ?$$

On pose $dv = dx$, $v = x$, $du = \frac{1}{x}$ et $u = \ln(x)$

$$\int \ln(x) \cdot 1dx = x\ln(x) - \int 1 \cdot dx = x(\ln(x) - 1)$$

15.2. Substitutions

a faire

15.3. Intégrales trigonométriques

Pour une intégrale du type

$$\int \sin^n(x)dx$$

utiliser $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Exemple

$$\int \sin^5(x)dx = \int \sin^4(x)\sin(x)dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)^2 \sin(x)dx$$
$$\int \left(1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)\right)\sin(x)dx$$

On pose $u = \cos(x)$ et $du = -\sin(x)$ et notre expression devient

$$\int \sin^5(x)dx = -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

On peut utiliser le même principe pour une puissance impaire de $\cos(x)$, on remplace simplement par $1 - \sin(x)$ cette fois.

Pour une puissance paire de cos ou sin utiliser les substitutions suivantes : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ et $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

Exemple

$$\int \sin^4(x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2 dx = \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)dx$$

on remplace $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$ ce qui donne

$$\int \sin^4(x)dx = \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

15.4. Substitutions trigonométriques

15.5. Intégrales de fonctions rationelles

Exemple Le but est d'intégrer

$$\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}dx$$

La clé dans ce genre de problème est de faire une décomposition en éléments simples. Tout d'abord on remarque que

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3).$$

On pose

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}\\ \Rightarrow 4x^2+13x-9 &= A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)\end{aligned}$$

Quand $x=0$: $-3A=-0 \Rightarrow A=3$
quand $x=1$: $4B=8 \Rightarrow B=2$
et quand $x=-3$: $12C=-12 \Rightarrow C=-1$.

On a donc

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+3}$$

et

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}dx &= \int \frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+3}dx\\ &= \int \frac{3}{x}dx+\int \frac{2}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+3}dx\\ &= 3\ln|x|+2\ln|x-1|-\ln|x+3|+C\\ &= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right|+C\end{aligned}$$

15.6. Intégrales d'expressions quadratiques

Si ax^2+bx+c est irréductible on peut effectuer la marche à suivre illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple On veut calculer

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx$$

On remarque que $\Delta = 36-4\cdot 13 = -16 < 0$, on récrit donc l'expression

$$x^2-6x+13 = x^2-6x+9+13-9 = (x-3)^2+4$$

On pose $u=x-3$ et $du=dx$, et on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-1}{(x-3)^2+4}dx &= \int \frac{2u+5}{u^2+4}du\\ = 2\int \frac{u}{u^2+4}du+5\int \frac{1}{u^2+4}du &= \ln\left|u^2+4\right|+\frac{5}{2}\arctan\left|\frac{u}{2}\right|+C\\ &= \ln\left|x^2-6x+13\right|+\frac{5}{2}\arctan\left|\frac{x-3}{2}\right|+C\end{aligned}$$

16. Les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

16.1. La règle de l'Hôpital

Théorème Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ ou } \infty$$

et si $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ existe, alors

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{16.1}$$

Exemple On veut calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 2x - 1}{3x}$$

On remarque qu'on tombe sur une forme indéterminée $(\frac{0}{0})$. En dérivant l'expression du haut et du bas on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 2x - 1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + 2}{3} = \frac{2}{3} \tag{16.2}$$

17. Suites

Une **suite** est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. L'image de $n \in \mathbb{N}$ par cette application, notée u_n, converge vers un nombre réel a si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

1. Une suite croissante et majorée converge
2. Une suite décroissante et minorée converge

17.1. Suite arithmétique

La suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est une suite **arithmétique** de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_n = u_1 + (n-1)r \tag{17.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = n\frac{u_1 + u_n}{2} \tag{17.2}$$

17.2. Suite géométrique

La suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est une suite **géométrique** de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = r \cdot u_n$.

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1} \tag{17.3}$$

$$a\sum_{i=0}^{n} q^i = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{17.4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1 \tag{17.5}$$

17.2.1. Proof

One very elegant proof is to consider the following equation

$$x = 1 + ax$$

we know $x = \frac{1}{1-a}$

We substitute $1 + ax$ to x on the RHS of the equation which gives

$$\begin{aligned} x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1 + ax) \\ &= 1 + a(1 + a(1 + x)) \\ &= 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1}x \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}x \end{aligned}$$

which leads to

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \quad = \quad x - a^{n+1}x = x\left(1 - a^{n+1}\right)$$

since we know from eq 17.2.1 $x = \frac{1}{1-a}$, we subsitute and find

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \left(1 - a^{n+1}\right)\frac{1}{1-a}$$

which is the geometric serie.

18. Series

La série de termes u_k convege si la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ converge. La limite de cette suite, notée $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, est la somme de la série.

18.1. Series convergentes et divergentes

18.1.1. Power serie

Power series are defined as follows :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{18.1}$$

Two very important properties applies to those series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{18.2}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx \tag{18.3}$$

Here is one example

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z -z^{-n-1} dz = \int_0^z \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} -z^{-n-1} \right)}_{-\frac{1}{1-z}} dz = -\int_0^z \frac{1}{1-z} dz = 1 - \ln(1-z)$$

18.1.2. Série géométrique

Somme de nombre consécutifs

$$\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1) \tag{18.4}$$

Somme de carrés

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{1}{3} n (n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{18.5}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2 (n+1)^2 \tag{18.6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{4}n^2 (n+1)^2 \tag{18.7}$$

18.1.3. Série téléscopique

18.2. Séries à termes positifs

18.2.1. Série de Riemann

18.3. Les tests d'Alembert et les racines

18.3.1. Critèredu quotient (Alembert)

Si $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c$ et $c \begin{cases} c < 1 \text{ , la série converge} \\ c > 1 \text{ , la série diverge} \end{cases}$

18.3.2. Critère de la racine (Cauchy)

Si $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{u_k} = \lim_{k\to+\infty} u_k^{1/k} = c$ et $\begin{cases} c < 1 \text{, la série converge} \\ c > 1 \text{, la série diverge} \end{cases}$

18.4. Séries alternées et convergence absolue

18.5. Fonctions représentées par une série entière

18.6. La série du binôme

18.7. Série entière

Une série de terme général u_k est appelée **série entière** si $u_k = a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$.
Rayon de convergence :

$$r = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_k}{a_k + 1} \right| \tag{18.8}$$

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k}} \tag{18.9}$$

La série entière de terme $a_x^k \begin{cases} \text{converge si } |x| < r \\ \text{diverge si } |x| > r \end{cases}$ Si $|x| = r$, il y a un doute.

Si $r = +\infty$, alors la série entière converge pour tout réel x.

18.8. Exemples de séries

18.8.1. Exemples de séries divergentes

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty \quad \text{Série harmonique} \tag{18.10}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} = +\infty \tag{18.11}$$

et plus généralement

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} = +\infty \quad \text{si } \alpha \leq 1 \tag{18.12}$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k + \cdots = +\infty \quad \text{si } r \geq 1 \tag{18.13}$$

18.8.2. Exemples de séries convergentes

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \tag{18.14}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \tag{18.15}$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1 \tag{18.16}$$

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha) \quad \text{fonction zêta de Riemann} \tag{18.17}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{18.18}$$

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \cdots = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \tag{18.19}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\frac{1}{49} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{18.20}$$

$$1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625}\frac{1}{2401} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \tag{18.21}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=1 \tag{18.22}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{2} \tag{18.23}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)\cdot(k+1)}=\frac{3}{4} \tag{18.24}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)\cdot(4k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8} \tag{18.25}$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}=\frac{1}{e} \tag{18.26}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}=\ln 2 \quad \text{Série harmonique alternée} \tag{18.27}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4} \tag{18.28}$$

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi}{4} \tag{18.29}$$

18.9. Formule de Taylor d'ordre n

On note f une fonction $n+1$ fois continuement dérivable dans un intervalle ouvert I contenant a.

Pour tout $x \in I$:

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_n(x) \tag{18.30}$$

avec

$$R_n(x)=\int_a^x\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1} \tag{18.31}$$

où c est compris entre a et x.

Estimation du reste : $|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in I}|f^{(n+1)}(t)|$.

Si $\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0$, alors $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$ et la série de terme $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$ est appelée **série de Taylor de f contrée en a**.

18.9.1. Formule de MacLaurin

Si $a=0$, on obient la formule de MacLaurin :

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x) \tag{18.32}$$

19. Sujets de géométrie analytique

19.1. Parabole

19.2. Ellipse

19.3. Hyperbole

19.3.1. Rotation d'axe

Troisième partie .

Analysis in $\mathbb{R}^n$

20. Courbes planes et coordonnées polaires

20.1. Courbes planes

20.2. Tangentes et longueur d'arc

20.3. Coordonnées polaires

20.4. Intégrales en coordonnées polaires

20.5. Equation polaire des coniques

21. Vecteurs et surfaces

21.1. Produit scalaire

21.2. Produit vectoriel

21.3. Droites et plans

22. Fonctions vectorielles

23. Dérivation partielle

23.1. fonction de plusieurs variables

$$f(x, y, z) \tag{23.1}$$

ou plus généralement

$$f(\mathbf{x}) \tag{23.2}$$

23.2. Limites et continiuité

même chose que pour une variable : la variable d'intérêt varie et les autres restent fixées.

23.3. Dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \tag{23.3}$$

23.3.1. Exemple

For $f(x, y, z) = x^2 + 3y + \sin(z)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos(z) \end{aligned} \tag{23.4}$$

23.4. Dérivée de fonctions composées

23.5. Dérivée directionelle

23.6. Normales et plans tangents

23.7. Valeurs extrêmes des fonctions à plusieurs variables

23.8. Gradient

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{23.5}$$

Hence the example eq 23.4 can be rewritten

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \\ \cos(z) \end{pmatrix} \tag{23.6}$$

23.9. Total derivative

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{23.7}$$

More generally

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \ . \tag{23.8}$$

In vector form, this writes

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \tag{23.9}$$

$$= \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{23.10}$$

23.9.1. Application : error calculation

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \tag{23.11}$$

works for small Δ.

Quatrième partie .

Linear Algebra

24. Grands concepts

Définition Matrices $m \times n$ où m est le nombre de lignes et n le nombre de colonnes.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 6 \\ 6x_1 + 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 8x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Le système ci-dessus peut être récrit sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

24.1. Matrix addition and scalar multiplication

Définition Sum of two matrices $A[a_{jk}]$ and $B[b_{jk}]$ of the same size.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{24.1}$$

24.2. Multiplying by a scalar

Définition

$$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix} \tag{24.2}$$

24.3. Matrix multiplication

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{24.3}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{24.4}$$

[n x m][m x p]=[n x p]

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ik} \tag{24.5}$$

Exemple Exemple de multiplication d'une matrice 2×2 par une matrice 2×1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 43 \end{pmatrix}.$$

Exemple de multiplication d'une matrice 2×3 par une matrice 3×3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 23 & 14 & 30 \end{pmatrix}$$

24.4. Transposition

Définition si $\mathbf{A}[a_{jk}]$, alors $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}[a_{kj}]$.

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = [a_{kj}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{24.6}$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

24.4.1. Propriétés

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \tag{24.7}$$
$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathbf{T}} \tag{24.8}$$
$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} \tag{24.9}$$

Définition Symmetric matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{24.10}$$

Skew symmetric matrix

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{A} \tag{24.11}$$

thus $a_{jk} = -a_{kj}$ and $a_{jj} = 0$.

Définition Triangular matrix

– upper triangular

$$a_{jk} = 0 \quad j > k \tag{24.12}$$

Example

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

– lower triangular

$$a_{jk} = 0 \quad j < k \tag{24.13}$$

Example

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

24.5. Identity Matrix

Définition

$$a_{jj} = 1 \quad a_{jk} = 0 \quad \forall j \neq k \tag{24.14}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{24.15}$$

Définition Diagonal Matrix

$$\mathbf{A} = c\mathbf{I} \tag{24.16}$$

24.6. Linear Systems of Equations

24.6.1. Gauss Elimination

Exemple

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_2 + 25x_3 = 90 \\ 20x_1 + 10x_2 = 80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

$l_1 = l_2$, $\frac{l_3}{5}$ and $\frac{l4}{4}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$l_3 - 2l_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$l_3 - \frac{3}{2}l_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{2} & -19 \end{pmatrix}$$

$-\frac{2}{19}l_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$l_2 - 5l_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\frac{l_2}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$l_1 + l_2 - l_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on ré-écrit désormais le système, on obtient

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

25. Linear Independance. Rank of a Matrix. Vector Space

$$c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{a_n} = 0 \tag{25.1}$$

Si la seule solution du système 25.1 est $c_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors les vecteurs $\overrightarrow{a}_i$ sont linéairement indépendants.

Le rang est le nombre de vecteurs indépendants d'une matrice.

Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ consiste de tous les vecteurs à n composantes à la dimension n.

25.1. Déterminants. Cramer's Rule

$$\mathbf{D} = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{25.2}$$

– if $n = 1$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \tag{25.3}$$

– if $n = 2$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{25.4}$$

– if $n = 3$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} \tag{25.5}$$

Définition Matrice des signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \cdots & \end{pmatrix} \tag{25.6}$$

This can also be expressed in the following manner

$$a_{jk} = \begin{cases} + & \text{if } (j+k) \text{ is even} \\ - & \text{if } (j+k) \text{ is odd} \end{cases} \tag{25.7}$$

Exemple Calculate

$$\mathbf{D} = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{25.8}$$

Using minors and cofactors one can write

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - 3 \cdot 8 + 0 = -12$$

25.2. Evaluation of det by Reduction to Triangular Form

Exemple

$$\mathbf{D} = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$l_2 - 2l_1$ and $l_4 + \frac{3}{2}l_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$l_3 - \frac{2}{5}l_2$ and $l_4 + \frac{8}{5}l_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & 0 & 47.25 \end{vmatrix} = 47.25 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{vmatrix} = 47.25 \cdot 2.5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 47.25 \cdot 2.5 \cdot 2 \cdot 5 = 1134$$

Définition

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \text{square matrix } n \times n \text{ has rank } n \tag{25.9}$$

25.3. Cramer's Rule

If we have to solve the following system

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{25.10}$$

The solution is given by

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ x_m = \frac{D_m}{D} \end{cases} \tag{25.11}$$

Exemple We want to solve

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

We write

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5) + 2 \cdot (-7) = -19$$

$$\mathbf{D_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 18 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 18 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = (-40) + 2 = -38$$

$$\mathbf{D_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 18 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 18 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 18 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-40) + (-36) = -76$$

$$\mathbf{D_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 18 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 18 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-2) + (-36) = -38$$

hence we obtain

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\mathbf{D_1}}{\mathbf{D}} = 2 \\ x_2 = \frac{\mathbf{D_2}}{\mathbf{D}} = 4 \\ x_3 = \frac{\mathbf{D_3}}{\mathbf{D}} = 2 \end{cases}$$

26. Inverse of a Matrix

Définition

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{26.1}$$

26.1. Inverse of a Matrix : Gauss-Jordan Elimination

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}] &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Théorème

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[c_{jk}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \tag{26.2}$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C^T} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Définition

$$\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \mathbf{A^{-1}}\overrightarrow{b} \tag{26.3}$$

27. Matrix Eigenvalue Problem

Définition

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{27.1}$$

$\Rightarrow \mathbf{A}\vec{x} \propto \vec{x}$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\vec{x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

now we write

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\vec{x} = 0$$
$$= \begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$
$$= (5+\lambda)(2+\lambda) - 4 = (\lambda+1)(\lambda+6)$$

Thus we find our **eigenvalues** :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

Eigenvectors with λ_1

$$\begin{pmatrix} -5+1 & 2 \\ 2 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow 2x_1 = x_2$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

with λ_1

$$
\begin{pmatrix} -5+6 & 2 \\ 2 & -2+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\Rightarrow x_1 = -2x_2
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

27.1. Matrice rotation

Counterclockwise rotation of θ.

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \tag{27.2}
$$

Cinquième partie .

Differential Equations

28. Equations différentielles

28.1. Equations différentielles à variables séparables

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{28.1}$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \tag{28.2}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} y^4 e^{2x} + \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \int e^{2x}dx + \int \frac{dy}{y^4} &= C \\ \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}y^{-3} &= C \\ y^{-3} &= \frac{3}{2}e^{2x} - C \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{3e^{2x}} - K} \tag{28.3}$$

28.2. Linéaire du premier ordre

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{28.4}$$

Avec $Q(x) = 0$

$$y' + P(x)y = 0 \tag{28.5}$$

On retombe su la forme à variables séparables et la solution générale est

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + K \tag{28.6}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - 3x^2 y &= x^2 \\
P(x) &= -3x^2 \\
\int P(x)dx &= -x^3 \\
Q(x) &= x^2 \\
ye^{-x^3} = \int x^2 e^{-x^3} dx + K &= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + K \\
y &= -\frac{1}{3} + K e^{x^3}
\end{aligned}$$

28.3. Linéaires du second ordre

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{28.7}$$

On écrit l'équation caractéristique

$$m^2 + bm + c = 0 \tag{28.8}$$

Soient m_1 et m_2 les solutions de (28.8)

– Si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{28.9}$$

– Si $m_1 = m_2 = m$

$$y = Ce^{mx} \tag{28.10}$$

– Si $m_1, m_2 \in \mathbb{C}, m = s \pm it$

$$y = e^{sx} \left(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx \right) \tag{28.11}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
y'' - 10y' + 41y = 0 \\
m^2 - 10m + 41 = 0
\end{aligned}$$

Les racines sont : $m = 5 \pm 4i$, on trouve donc

$$y = e^{5x} \left(C_1 \cos (4x) + C_2 \sin (4x) \right)$$

28.4. Equations différentielles non-homogènes

$$y'' + by' + cy = k(x) \tag{28.12}$$

Si $y = C_1y_1 + C_2y_2$ est la solution générale de l'équation homogène $y'' + by' + c = 0$, alors

$$y_p = uy_1 + vy_2 \tag{28.13}$$

est une solution particulière de (28.12) où

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = k(x) \end{cases} \tag{28.14}$$

Solution :

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + uy_1 + vy_2 \tag{28.15}$$

Exemple :

$$y'' + y = \cot x \tag{28.16}$$

On réout d'abord

$$y'' + y = 0$$

L'équation caractéristique est $m^2 + 1 = 0$, dont les solutions sont $m = 1 \pm i$, la solution générale est donc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

On résout à présent le système

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \sin x = 0 \\ -u' \sin x + v' \cos x = \cot x \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned} u' &= -\cos x \\ v' &= \csc x - \sin x \Rightarrow \\ u &= -\sin x \\ v &= \ln|\csc x - \cot x| + \cos x \end{aligned}$$

La solution particulière est donc donnée par

$$y_p = \sin x \cos x - \sin x \cos x + \sin x \ln|\csc x - \cot x|$$

et la solution

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln|\csc x - \cot x|$$

Théorèmes sur les solutions particulières

1. $y'' + by' + cy = e^{nx} \Rightarrow y_p = Ae^{nx}$
2. $y'' + by' + cy = xe^{nx} \Rightarrow y_p = (A + Bx)e^{nx}$
3. $y'' + by' + cy = e^{sx} \sin tx \Rightarrow y_p = Ae^{sx} \cos tx + Be^{sx} \sin tx$
4. $y'' + by' + cy = e^{sx} \cos tx \Rightarrow y_p = Ae^{sx} \cos tx + Be^{sx} \sin tx$

Atention les deux derniers résultats ne sont pas valables si l'équation caractéristique admet $m = s + ti$ comme solution.

Exemple

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 8y &= e^{3x} \\ m^2 + 2m - 8 &= 0 \\ m_1 = 2, m_2 &= -4 \\ y = C_1 e^{2x} &+ C_2 e^{-4x} \end{aligned}$$

Dans notre cas la solutio particulière est

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{3x} \\ y_p' &= 3Ae^{3x} \\ y_p'' &= 9Ae^{3x} \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation

$$\begin{aligned} 9Ae^{3x} + 6Ae^{3x} - 8Ae^{3x} &= e^{3x} \\ \Rightarrow (9 + 6 - 8)A &= 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{7} \\ \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} &+ \frac{1}{7} e^{3x} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} y'' - 10y' + 41y &= \sin x \\ m^2 - 10m + 41 &= 0 \\ m &= 5 \pm 4i \\ y = e^5 \left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= A \cos x + B \sin x \\ y_p' &= -A \sin x + B \cos x \\ y_p'' &= y_p \end{aligned}$$

Substituting

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - 10B \cos x + 10A \sin x + 41B \sin x + 41A \cos x &= \sin x \\ (10A + 40B) \sin x + (40A - 10B) \cos x &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 10A + 40B = 1 \\ 40A - 10B = 0 \end{cases}$$

We find : $A = \frac{4}{170}$ and $B = \frac{1}{170}$, this yields

$$y = e^{5x} \left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x \right) + \frac{1}{170} (\cos x + 4 \sin x)$$

29. System of Differential Equations

29.1. Résoudre un système d'équations différentielles linéaire

Soit

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{29.1}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ et $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{29.2}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{29.3}$$

La solution est donnée par

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \tag{29.4}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A. Les $c_i \in \mathbb{C}$ sont des constantes qui peuvent être déterminée en appliquant des conditions aux systèmes (i.e. conditons initiales).

Exemple [1]

Solve the initial value problem $\dot{x} = x + y, \dot{y} = 4x - 2y$, subject to the initial condition $(x_0, y_0) = (2, 3)$.

Solution : The corresponding matrix equation is

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

First we find the eigenvalues of the matrix A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$$

1. Example taken from Nonlinear Dynamic and Chaos by Steven H. Strogatz 1994 Perseus book publishing on page 131

which gives $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

Next we find the eigenvectors. Given an eigenvalue λ, the corresponding eignevector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ satisfies

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{29.5}$$

which has a nontrivial solution $(v_1, v_2) = (1, 1)$, or any scalar multiple thereof.(Of course any multiple of an eigenvector is always an eignenvector ; we try to pick the simplest multiple, but any one will do.) Similarly, for $\lambda_2 = -3$, the eigenvector equation becomes

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

which has a nontrivial solution $(v_1, v_2) = (1, -4)$. In summary,

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Next we write the general solution as a linear combination of eigensolutions.

From (29.4), the general solution is

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \tag{29.6}$$

Finally, we compute c_1 and c_2 to satisfy the initial condition $(x_0, y_0) = (2, -3)$. At $t = 0$, (29.6) becomes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

which is equivalent to the algebraic system

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -3 = c_1 - 4c_2 \end{cases}$$

The solution is $c_1 = 1, c_2 = 1$. Substituting back into (29.6) yields

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} + e^{-3t} \\ y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t} \end{cases}$$

for the solution to the initial value problem.

29.2. Nonlinear systems

Consider

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{29.7}$$

where $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ and $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

29.2.1. Fixed points

fixed points satisfy $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

29.2.2. Fixed points and Linearization

consider the system

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \tag{29.8}$$

and suppose that $(x*, y*)$ is a fixed point, i.e., $f(x^*, y^*) = 0$ and $g(x^*, y^*) = 0$.

Let $u = x - x^*$ and $v = y - y^*$

We have

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \quad \text{(since } x^* \text{ is a constant)} && (29.9) \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \qquad \text{(by substitution)} && (29.10) \\ &= f(x^*, y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \qquad \text{(Taylor expansion)} && (29.11) \\ &= u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad \text{(since } f(x^*, y^*) = 0\text{)} && (29.12) \end{aligned}$$

Similarly, we find

$$\dot{v} = u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv). \tag{29.13}$$

Hence the disturbance (u, v) evolves according to

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{quadratic terms.} \tag{29.14}$$

The matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \tag{29.15}$$

is the **Jacobian** evaluated at the fixed points (x^*, y^*).

Now since the quadratic terms in (29.14) are tiny we obtain the ***linearized system***

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{29.16}$$

whose dynamics can be analyzed by the methods of the previous section.

30. Optimization

30.1. Basic Concepts. Unconstrained Optimization

In an optimizing problem, the objective is to *optimize* (maximize or minimize) some function f ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). This function f is called the *objective function* and takes as parameter a vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ of n variables. These are called *control variables.*

In many problems, the control variables is subject to some *constraints* that are usually expressed in terms of inequalities (for example : $x_1 \geq 0$).

30.1.1. Unconstrained Optimization

By definition, f has a **minimum** at a point $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ iff

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0}) \tag{30.1}$$

Similarly, f has a **maximum** at a point $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ iff

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0}) \tag{30.2}$$

Furthermore, f is said to have a **local minimum** at $\mathbf{x_0}$ if

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0}) \tag{30.3}$$

for all x in a neighborhood of $\mathbf{x_0}$, that is

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| = \left((x_1 - x_{0_1})^2 + \cdots + (x_n - x_{0_n})^2\right)^{1/2} < r \tag{30.4}$$

for an arbitrarily chosen r.

If f is differentiable and has an extremum at point $\mathbf{x_0}$ then that point satisfies

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = 0 \tag{30.5}$$

This condition necessary but not sufficient. However, for $n = 1$, $\frac{df}{dx} = 0$ and $\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$ assure a maximum.

30.1.2. Method of steepest descent or gradient method

The idea of this method is to find a maximum of f by repeatedly computing mimima of a function $g(t)$ of a single variable t.

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - \nabla f(\mathbf{x_n}) \tag{30.6}$$

at which the function

$$g(t) = f(\mathbf{z}(t)) \tag{30.7}$$

has a minimum. $\mathbf{z}$(t) is the next approximation to $\mathbf{x_0}$.

Exemple Minimize $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2$.
$d_k = \nabla f(\mathbf{x_k}) = (-x_{1_k}, -9x_{2_k})$
Pour calculer le pas t, il faut résoudre

$$\min_t f(\mathbf{x_k} - t\nabla f(\mathbf{x_k}))$$

Dans ce cas, la solution est

$$t = \frac{x_{1_k}^2 + 81x_{2_k}^2}{x_{1_k}^2 + 729x_{2_k}^2}$$

La méthode de la plus forte pente génère à chaque itération le point

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} + \frac{x_{1_k}^2 + 81x_{2_k}^2}{x_{1_k}^2 + 729x_{2_k}^2}(-x_{1_k}, -9x_{2_k}).$$

30.2. Optimization under constraints : linear

One seeks to solve

$$\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \tag{30.8}$$
$$\tag{30.9}$$

subject to (s.t.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \tag{30.10}$$

which can also be written

$$\min f = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \tag{30.11}$$
$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \tag{30.12}$$
$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{30.13}$$

where $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
Can be solved with the simplex method.

30.2.1. Dual problem

the dual is defined

$$\max w = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \tag{30.14}$$

subject to

$$A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \tag{30.15}$$
$$\mathbf{y} \geq 0 \tag{30.16}$$

where $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (shadow prices).
When problems are solved $f = w$.

General Duality Rule

Maximization problem		**Minimization problem**
constraints		*variables*
$\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0
$\geq$	$\leftrightarrow$	≤ 0
$=$	$\leftrightarrow$	unrestricted
variables		*constraints*
≥ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$
unrestricted	$\leftrightarrow$	$=$

30.3. Optimization under constraints : non-linear

30.3.1. Multiplicateurs de Lagrange

Method to solve an optimization problem under constraints.
The problem writes

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{30.17}$$

where $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
A new function Λ is introduced

$$\Lambda(\lambda, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \tag{30.18}$$

$$= f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{30.19}$$

where λ is a $1 \times n$ vector.
The solution reads

$$\nabla \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_n} \end{pmatrix} = 0 \tag{30.20}$$

Note : pas tout a fait sûr pour plusieurs contraintes : a checker

30.3.2. Kuhn-Tucker theorem

Kuhn Tucker is a generalization of Lagrange. Consider the maximization problem

$$\max f(\mathbf{x}) \tag{30.21}$$

subject to

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1..k \tag{30.22}$$

Note that $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Then for a solution $\mathbf{x}^*$ to the maximization problem there exists Kuhn-Tucker multipliers $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ such that

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \tag{30.23}$$

$$\lambda_i \geq 0 \forall i \tag{30.24}$$

$$\lambda = 0 \text{ if } g_i(\mathbf{x}^*) < 0 \tag{30.25}$$

Note that the derivatives have to be taken on $\mathbf{x}$ and all λ_i then one does not have to care about eq 30.24 and 30.25.

30.4. Markov Chain

A markov chain describes the evolution of a system state over time given that we know the change of state probability for each time and state. It is described by

$$\mathbf{b}_{n+1} = A\mathbf{b}_n \tag{30.26}$$

where $\mathbf{b}$ is a $n \times 1$ vector and A a $n \times n$ matrix; n denoting the number of state in the system. The element a_{ij} can be read as the probability to jump from state i to state j. Note that $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\ \forall i \in (1, .., n)$, $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ and $a_{ij}, b_i \in (0, 1)$

If A remains constant over time ($A = A(n)$) the state of the system at time n is

$$\mathbf{b}_n = A^{n-k}\mathbf{b}_k = A^n\mathbf{b}_0 \tag{30.27}$$

Sometimes there exists a state where the system reaches an equilibrium and is described when

$$\mathbf{b} = A\mathbf{b} \tag{30.28}$$

30.4.1. Market evolution

The market shift from bull to bear and recession can be described (see wikipedia example and PUT IMAGE) using a Markov chain.

If state

1. is Bull market
2. is Bear Market
3. is recession

and we have

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.15 & .25 \\ 0.075 & .8 & .25 \\ 0.025 & 0.05 & .5 \end{pmatrix} \tag{30.29}$$

(e.g. transition from bull to bear market is $a_{21} = 7.5\%$). One can show that eventually the market will tend to

$$\mathbf{b} = A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 62.5\% \\ 31.25\% \\ 6.25\% \end{pmatrix} \tag{30.30}$$

31. Experiments and Math Beauty

31.1. Experiment 1

Is it possible to get a function that satisfies :

$$\frac{d^n f}{dx^n}(n+1) = f^{(n)}(n+1) = 0 \tag{31.1}$$

One of the possible answer (might be several) is

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x} &&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) && (31.2)\\
f'(x) &= \tfrac{-2}{x^3} + \tfrac{1}{x^2} &&= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{x} - 1\right) && (31.3)\\
f''(x) &= \tfrac{3!}{x^4} - \tfrac{2!}{x^3} &&= \frac{2}{x^3}\left(\frac{3}{x} - 1\right) && (31.4)\\
f'''(x) &= -\tfrac{4!}{x^5} + \tfrac{3!}{x^4} &&= -\frac{3!}{x^4}\left(\frac{4}{x} - 1\right) && (31.5)\\
& \dots && && (31.6)\\
f^{(n)} &= (-1)^n \tfrac{(n+1)!}{x^{n+2}} + (-1)^{(n+1)} \tfrac{n!}{x^{n+1}} &&= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\frac{n+1}{x} - 1\right) && (31.7)
\end{aligned}$$

for this we have

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(n) &= (-1)^n \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} && (31.8)\\
f^{(n)}(n+1) &= 0 && (31.9)\\
f^{(n)}(n+1) &= (-1)^{(n+1)} \frac{n!}{(n+2)^{(n+2)}} && (31.10)
\end{aligned}$$

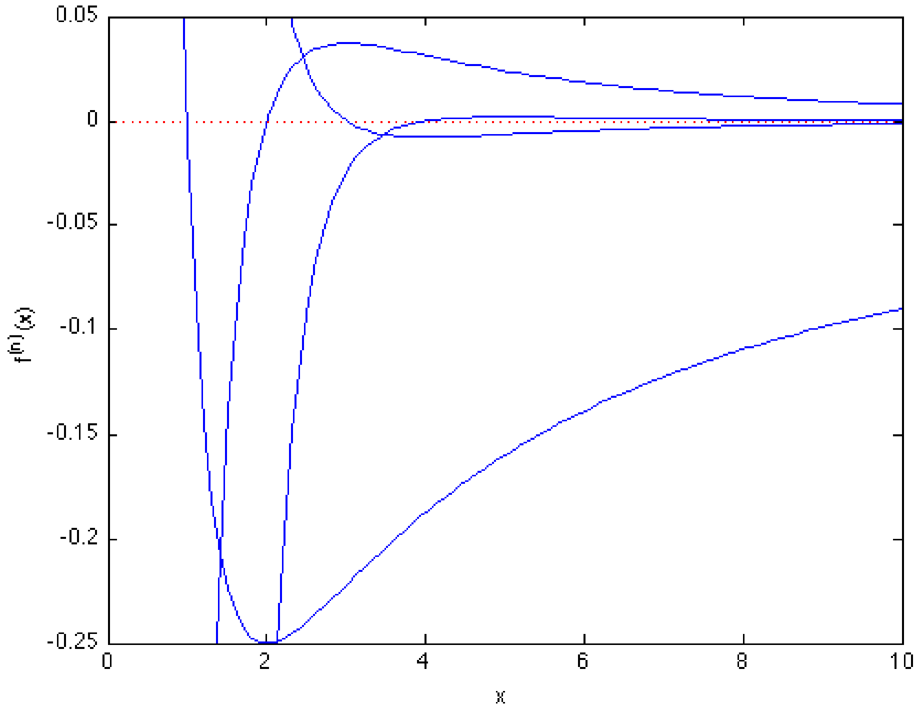


FIGURE 31.1.: Illustration of $f^{(n)}(x)$ for $n = 0, 1, 2, 3$

32. Music

32.1. Major scale

There are three way to generate the major scale
– Pythagorean scale
– Just scale
– Temperate scale

32.1.1. Pythagorean scale

Builds the major scale using the first and second harmonic ; respectively double and triple of base note or octave and fifth (one octave too high).
The notes are obtained in this order : C - G - D - A - E - B. F is found by going downward.

Pythagorean comma

With this method we found an inconsistency (called pythagorean comma).
If we go up 7 octaves or 12 fifth, we should theoretically find the same frequency, but we don't.

$$\frac{\frac{2}{3}^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \neq 1 \tag{32.1}$$

32.1.2. Just Scale

Uses octave (2nd harmonic), fifth (third harmonic) and third (fifth harmonic).
There is an inconsistency between this method and the pythagorean. Here a third is $\frac{5}{4}$ whereas in the case of the pythagorean scale it is $\frac{81}{64}$.

32.2. Note Generator

A note can be generated as following

$$f[n+k] = f[n] \cdot 2^{\frac{k}{12}} \tag{32.2}$$

where $f[n]$ is the frequency of a note and k is the number of half-tone above this note.
For instance, if one wants to calculate the frequency of a C, beginning with the frequency of an A (440 hz), he must add three half tones to A thus with $f[0] = 440Hz$ we have

$$f_C = f_A[3] = 440 \cdot 2^{3/12} = 440 \cdot 2^{1/4} \approx 523.25Hz$$

Note	Freq [Hz]
A	440.0000
Bb	466.1638
B	493.8833
C	523.2511
Cs	554.3653
D	587.3295
Eb	622.2540
E	659.2551
F	698.4565
Fs	739.9888
G	783.9909
Ab	830.6094
A	880.0000

Table 32.1.: One octave of notes with their respective frequencies. Note that the octave is exactly twice the fundamental's frequency

	Pythagorean	Just	Temperate
C	1	1	1
D	9/8	9/8	$2^{\frac{2}{12}}$
E	81/64	5/4	$2^{\frac{4}{12}}$
F	4/3	4/3	$2^{\frac{5}{12}}$
G	3/2	3/2	$2^{\frac{7}{12}}$
A	27/16	5/3	$2^{\frac{9}{12}}$
B	243/128	15/8	$2^{\frac{11}{12}}$
C	2	2	$2^{\frac{12}{12}} = 2$

Table 32.2.: One octave of notes with their respective frequencies. Note that the octave is exactly twice the fundamental's frequency

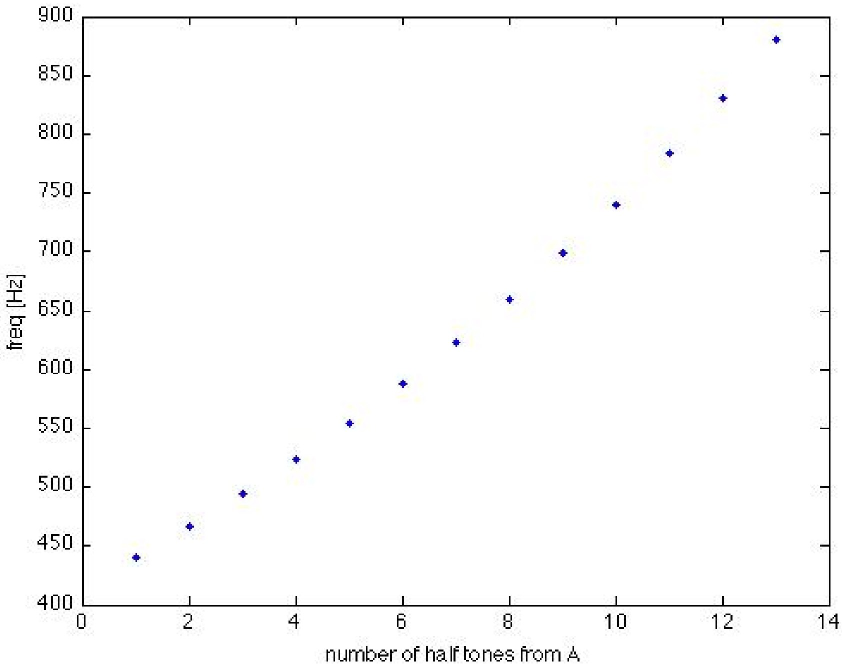


FIGURE 32.1.: Distribution of the notes with respect to their frequency

Sixième partie .

Appendix

32.3. Greek Letters

Lower case	**Upper case**	**Name**
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ or ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ or ϑ	Θ	theta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π or ϖ	Π	pi
ρ ou ϱ	P	rho
σ or ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ or φ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	ψ	psi
ω	Ω	omega

Table 32.3.: Greek letters

32.4. Famous constants

32.4.1. π number

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\ldots \tag{32.3}$$

32.4.2. Euler's number e

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{32.4}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{32.5}$$

$$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536\ldots \tag{32.6}$$

32.4.3. Le nombre d'or / Golden Ratio

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{32.7}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \tag{32.8}$$

$$\Phi \approx 1.61803\,39887\ldots \tag{32.9}$$

32.4.4. Fibonnacci numbers

In mathematics, the Fibonacci numbers are the numbers in the following sequence :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \tag{32.10}$$

By definition, the first two Fibonacci numbers are 0 and 1, and each remaining number is the sum of the previous two. Some sources omit the initial 0, instead beginning the sequence with two 1s.

Which can be rewritten

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \geq 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \tag{32.11}$$

Relation to the Golden Ratio

$$u_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} \tag{32.12}$$

where φ is the golden ratio (Equation : 32.7).

33. Conversion unité

33.1. Fahrenheit - Celsius

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) \tag{33.1}$$

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \tag{33.2}$$

Thus $-40°\mathrm{C} = -40°F$.

33.2. Notations

Here below are listed some common abbreviations used in mathematics, physics or economics.

Abbreviation	**Meaning**
$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$
$(f)'$	$\frac{df}{dx}$
f_x	$\frac{\partial x}{\partial t}$

Table 33.1.: Abbreviations