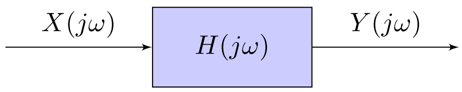

Figure 1. Typical representation of a system where $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

Première partie 1. **Signaux analogiques**

1. Size of a signal

1.1. **Signal Energy.**

(1)
$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt$$

1.2. **Signal Power.**

(2)
$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^2(t)| dt$$

2. Systèmes LIT

LIT : Linéaire, invariant dans le temps
Linéaire, invariant par translation

2.1. **Notation opérateur.**

(3)
$$y(t) = S_a\{x(t)\} \equiv y = S_a\{x\}$$

2.2. **Caractérisation d'un système LIT. Réponse impulsionelle :** $h(t) = S_a\{\delta(t)\}$

Système LIT : $h(t, \tau) = h(t - \tau)$

(4)
$$y(t) = (h * x)(t)$$

2.3. **Exemples.**

– Amplificateur

(5)
$$a \cdot I\{f(t)\} = a \cdot f(t) \Rightarrow h(t) = a \cdot I\{\delta(t)\} = a\delta(t)$$

– Retard

(6)
$$S_{t_0}\{f(t)\} = f(t - t_0) \Rightarrow h(t) = S_{t_0}\{\delta(t)\} = \delta(t - t_0)$$

– Dérivateur

(7)
$$D\{f(t)\} = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) \Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$$

– Intégrateur

(8)
$$D^{-1}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = F(t) \Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

3. Systèmes régis par des équations différentielles

Un système LIT peut être décrit par des équations différentielles, et en utilisant la notation "opérateur" écrit comme suit

(9)
$$\frac{d}{dt^n} y(t) + a_{n-1}\frac{d}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d}{dt^m} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

(10)
$$D^n\{y(t)\} + a_{n-1}D^{n-1}\{y(t)\} + \cdots + a_1 D\{y(t)\} + a_0 y(t) = b_m D^m\{x(t)\} + \cdots + b_1 D\{x(t)\} + b_0 x(t)$$

(11)
$$Q(D)\{y(t)\} = P(D)\{x(t)\}$$

$x(t)$: input
$y(t)$: output
Contraintes physiques : $n \geq m$ Polynôme caractéristique :

(12)
$$Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \Pi_{i=1}^{n}(s - s_i)$$

Solution générale :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} \tag{13}$$

3.1. **Fonction de Green.** La fonction de Green est

$$\varphi(t) = Q^{-1}(D)\{\delta(t)\} \tag{14}$$

de là on obtient l'égalité suivante

$$h(t) = P(D)\{Q^{-1}(D)\{\delta(t)\}\} = P(D)\{\varphi(t)\} \tag{15}$$

3.2. **Résolution d'équation différentielle.**

(1) Solution de l'équation homogène : combinaison linéaire de modes propres : $y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}$
(2) Solution particulière : on convolue la réponse impulsionnelle du système : $h(t) * x(t)$
(3) Solution de l'équation : $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} + h(t) * x(t)$ où les c_i peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales.

3.3. **Stabilité BIBO.**

$$|x(t)| \leq M_x < +\infty \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < +\infty \tag{16}$$

Un système est stable BIBO si, et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty \tag{17}$$

Tous les racines dans le demi-plan gauche. (pôlé à gauche)

3.4. **Resonance.**

4. Vecteurs et signaux

Energie d'un signal est "équivalente" à une norme
Espace vectoriel des signaux :

$$L_2([t_1, t_2]) = \left\{ f(t) : t \in [t_1, t_2] \& \int_{t_1}^{t_2} |f^2(t)| dt < +\infty \right\} \tag{18}$$

4.1. **Produit scalaire.**

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g*(t) dt \tag{19}$$

Meilleure approximation de $f(t)$ par $\phi(t)$.
Erreur quadratique :

$$||e(t)||_{L_2}^2 =< e, e >= \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - c\phi(t))^2 dt =< f, f > +c^2 < \phi, \phi > -2c < f, \phi > \tag{20}$$

Minimisation :

$$\frac{\partial < e, e >}{\partial c} = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{< f, \phi >}{< \phi, \phi >} \tag{21}$$

4.2. **Théorème de Pythagore.**

$$||x||^2 = ||x - g||^2 + ||g||^2 \tag{22}$$

4.3. **Approximation moindres carrés.**

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} < x, \phi_i > \phi_i \tag{23}$$

4.4. **Corrélation et similarité.** Intercorrélation :

$$c_{xy}(t) = (x(-\cdot) * y^*(\cdot))(t) \tag{24}$$

5. Série de Fourier

Pulsion fondamentale : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

(25) $$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t} \quad c_n =< x, \phi_n >= \tfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega t}dt$$

Parseval

(26) $$||x^2|| = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)|dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

6. Fourier Transform

Notation : $w_n = n\frac{2\pi}{T_0}$

(27) $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x\}(\omega) \in \mathbb{C}$$

(28) $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}^{-1}\{x\}(t)$$

(29) $$X(\omega)|_{\omega=0} = X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

Coefficients de la série de Fourier :

(30) $$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} X_g(\omega)\big|_{\omega=n\omega_0}$$

(31) $$sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$$

6.1. β-spline.

(32) $$\beta^0(t) = \mathrm{rect}(t)$$

(33) $$\beta^n(t) = (\beta^{n-1} * \beta^0)$$

(34) $$\beta^n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})^{n+1}$$

6.2. Relation de Parseval.

(35) $$< f(x), g^*(x) >= \frac{1}{2\pi} < F(\omega), G^*(\omega) >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k^*$$

7. Echantillonnage

(36) $$x_e(t) = x(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

(37) $$X_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)e^{j\omega t}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)e^{-j\omega nT_e} = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$$

7.1. Formule de Poisson.

(38) $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) \quad \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t + kT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{jn\omega_0 t}$$

Theorem 1. *Théorème d'échantillonnage - Shannon x(t) avec ω_{max} peut-être parfaitement retrouvée si*

(39) $$\omega_e \geq 2\omega_{max}$$

NB en pratique le signal est filtré pour avoir une largeur de bande B, bien définie.

7.2. Formule de reconstruction de Shannon.

Reconstruction par filtrage idéal

(40) $$h(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_e}) = \mathcal{F}^{-1}\left\{T_e \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_e}\right)\right\}$$

8. Applications aux communications

8.1. Largeur de bande essentielle.

(41)
$$B_{ess} = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} |X(\omega)|^2 d\omega = \alpha \cdot E_{tot} \quad \alpha = 0.95$$

8.2. Modulation d'amplitude (AM).

(42)
$$x_{AM}(t) = x(t)A_p \cos\omega_p t = x(t)p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

8.3. Demodulation synchrone. multiplier x_{AM} avec $p'(t) = 2\cos\omega_p t = 1 + \cos 2\omega_p t$, puis filtre passe-bas.

9. Analyse et synthèse des filtres analogiques

9.1. Filtre passe-tout.

(43)
$$s_{0k} = -s_{pk}^*$$

(44)
$$H(\omega) = \frac{j\omega - d}{j\omega + d}$$

Deuxième partie 2. Signaux numériques

10. Signaux et systèmes discrets

10.1. **Signaux types.**

10.1.1. *Impulsion discrète.*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{45}$$

10.1.2. *Saut unité discret.*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{46}$$

10.1.3. *Polynôme causal discret discret.*

$$S_+^N[n] = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)...(n+N)}{N!} & n \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{47}$$

10.1.4. *Fonction exponentielle causale discrète.*

$$a_+[n] = a^n \cdot u[n] \tag{48}$$

10.1.5. *Signaux périodiques.*

$$f[n+N] = f[n] \quad \forall n \tag{49}$$

10.1.6. *Représentation canonique.*

$$f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]\delta[k-n] \tag{50}$$

10.2. **Quelques Opérateurs.**

(1) Décalage : $f[n] \to Zf[n] = f[n-1]$
(2) Sous-échantillonage : $f[n] \to (M\downarrow)f[n] = f[Mn]$
(3) Sur-échantillonage : $f[n] \to (M\uparrow)f[n] = f[n/M]$

10.3. **Systèmes linéaires discrets.**

10.3.1. *Convolution discrète.*

$$(f * g)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n-k]g[k] \tag{51}$$

10.3.2. *FIR - Finite Impulse Response.*

$$\forall n \notin [n_0, n_1], \quad h[n] = 0 \tag{52}$$

ou

$$H(z) = z^{-n_0} P(z^{-1}) \quad \text{où } P(X) \text{ est un polynôme} \tag{53}$$

10.3.3. *BIBO - Bounded Input Bounded Output.*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[n]| < +\infty \tag{54}$$

10.4. **Transformée en Z.**

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n} \tag{55}$$

10.4.1. *Relation avec Taylor.*

(56) $$f[n+n_0] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left(z^{-n_0} F(z^{-1}) \right) \big|_{z=0}$$

Suite géométrique

(57) $$\sum_{i=0}^{N-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$$

(58) $$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$$

11. Analyse temporelle des signaux discrets

11.0.2. *Pôles et zéros.*

(1) z_0 est un **Zéro** $\Leftarrow H(z_0) = 0$, **zéro multiple d'ordre N** $\Leftrightarrow \frac{d^n H}{dz^n}(z_0) = 0$ pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$

(2) z_0 est un **Pôle** $\Leftarrow \frac{1}{H(z_0)} = 0$, **pôle multiple d'ordre N** $\Leftrightarrow \frac{d^n(1/H)}{dz^n}(z_0) = 0$ pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$

11.0.3. *Causalité et stabilité.*

(1) Causal ssi la zone de convergence est à l'extérieur des pôles
(2) Anti-causal ssi la zone de convergence est à l'intérieur des pôles
(3) Stable ssi le cercle unité est inclus dans la zone de convergence

11.0.4. *Filtres réels.*

(59) $$H(z)^* = H(z^*)$$

11.1. **Equations aux différences.** Forme générale :

(60) $$(a * g)[n] = (b * f)[n]$$

où f est l'input, g l'output.

11.1.1. *Polynôme caractéristique.*

(61) $$A(z) = a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \cdots + a_0 = a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - r_k z^{-1})$$

où r_k sont les racines du polynômes caractéristiques.

11.1.2. *Solution générale de l'équation homogène g.*

(62) $$g_{\text{homogène}}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k r_k^n$$

où c_k sont des constantes à déterminer par des conditions.

11.1.3. *Fonction de Green γ.*

(63) $$(a * \gamma)[n] = \delta[n]$$

(64) $$\gamma[n] = \frac{1}{a_0} \big((r_1)_+ * (r_2)_+ \ldots (r_N)_+ * \big)[n]$$

11.1.4. *Fonction de transfert $h[n]$.*

(65) $$y[n] = (h * x)[n]$$

(66) $$h[n] = (\gamma * b)[n]$$

11.1.5. *Solution générale.*

(67) $$g[n] = \underbrace{(h * f)[n]}_{g_{\text{homogène}}[n]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k r_k^n}_{g_{\text{particulière}}[n]}$$

11.1.6. *Résolution par la transfornée en Z, $H(z)$.*

(1) $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

(2) Décomposition en fractions simples

(3) A l'aide des tables, transformée inverse

12. Fourier discret

12.1. **DTFT.**

$$F(e^{j\omega}) = \sum_n f[n]e^{-jn\omega} \quad \omega \in [-\pi, \pi] \tag{68}$$

12.1.1. *Lien avec Fourier continu.*

$$\hat{f}(\omega) = F(e^{j\omega T}) \cdot rect(\frac{\omega T}{2\pi}) \tag{69}$$

12.2. **DFT.**

$$F[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{70}$$

$$F[n] = F^*[-n] \qquad f[n] \in \mathbb{R} \tag{71}$$

$$F[n] = F[n+N] \quad \text{périodicité} \tag{72}$$

12.2.1. *Lien avec DTFT.*

$$F_N[n] = F(e^{j\frac{2n\pi}{N}}) \quad f_N[n] = \textstyle\sum_k f[n+kN] \tag{73}$$

13. Analyse fréquentielle des systèmes discrets

13.1. **Réponse fréquentielle.**

$$e^{j\omega n} * h[n] = e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega}) \tag{74}$$

13.2. **Distorsions.**

$$\underset{H}{Att}(\omega) = 20\log_1 0 \left(\frac{A_H(\omega)}{A_H(\omega_c)}\right) [dB] \tag{75}$$

$$\underset{H}{TPG}(\omega) = -\Im\left\{\frac{d}{d\omega}\ln\left(H(e^{j\omega})\right)\right\} = -\Re\left\{e^{j\omega}\frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})}\right\} \tag{76}$$

$$\underset{h_1 * h_2}{TPG} = \underset{h_1}{TPG} + \underset{h_2}{TPG} \tag{77}$$

13.2.1. *Phase linéaire.* Les filtres à phase linéaire sont soit symétriques ($\epsilon = 1$) soit antisymétriques ($\epsilon = -1$).

$$H = \epsilon z^{-n} H(z^{-1}) \tag{78}$$

13.2.2. *Transformation bilinéaire.*

$$H_{\text{bilinéaire}}(e^{j\omega}) = \hat{h}\left(\frac{2}{jT}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{j\omega}}\right) \quad \text{où } \hat{h} \text{ est une fraction rationelle et BIBO} \tag{79}$$

13.3. **Générale.**

$$h[n] = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{h}(\omega)e^{jnT\omega}d\omega \tag{80}$$

13.4. **Filtres passe-tout.**

$$H(z) = \gamma z^N \frac{P(z)}{P^*(z^-1)} \tag{81}$$

14. Propriétés statistiques des signaux

14.1. **Probabilités.**

14.1.1. *Variables aléatoires.*

$$\mathcal{E}(f(x)) =< f(x), p(x) >= \int f(x)p(x)dx \tag{82}$$

$$P(x \leq x_0) = \mathcal{E}(u(x_0 - x)) = (p * u)(x_0) = \int_{-\infty}^{0} p(x)dx \tag{83}$$

$$p(a) = \mathcal{E}(\delta(x-a)) \tag{84}$$

14.1.2. *Fonction caractéristique.*

$$P(\omega) = \mathcal{E}\left\{e^{-j\omega x}\right\} = \mathfrak{F}(p(x))(\omega) \tag{85}$$

$$p(y) = (p_1 * p_2 * \cdots * p_N)(y) \Leftarrow y = \sum_{k}^{N} x_k \tag{86}$$

$$\mu_n = \mathcal{E}(x^n) = j^n \left.\frac{d^n P(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} \tag{87}$$

14.2. **Processus aléatoires.**

14.2.1. *Stationnarité.*

$$\text{Stationnaire sens large (SSL ou WSS)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}(x(t)) = 0 \\ \mathcal{E}(x(t)x^*(t')) = s_x(t-t') \end{cases} \tag{88}$$

14.2.2. *Ergodicité.* "moyenne verticale (différents essais) équivaut à la moyenne horizontale (par rapport à t)".
Ergodicité $\Rightarrow$ Stationarité

14.2.3. *Densité spectrale de puissance (DSP).*

$$S_x(\omega) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\mathcal{E}\{|X_A(\omega)|^2\} \tag{89}$$

14.2.4. *Thérorème de Wiener-Khintchine.*

$$S_x(\omega) = \mathfrak{F}\{p_x(t)\}(\omega) \tag{90}$$

14.2.5. *DSP d'un signal filtré.*

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \tag{91}$$