Première partie 1. **Signaux analogiques**

1. Size of a signal

1.1. **Signal Energy.**

(1) $$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt$$

1.2. **Signal Power.**

(2) $$P_f = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^2(t)| dt$$

2. Some useful signals

2.1. **Unit Step Function** $u(t)$**.**

(3) $$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Permet de rendre un signal causal.

2.2. **Unit Impulse Function** $\delta(t)$**.**

(4) $$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

(6) $$\int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = u(t)$$

2.3. **Exponential Function.**

(7) $$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\omega t}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$$

- $s = 0$: $e^{0t} = 1$: constant
- $s = \sigma \in \mathbb{R}$: $e^{\sigma t}$: monotonic exponential
- $s = j\omega$: $e^{j\omega t}$: pure sinusoid
- $s = \sigma + j\omega$: $e^{(\sigma + j\omega)t}$: vorging sinusoid

2.4. **Dilatation et translations de signaux.**

- Décalage : $f(t - t_0)$ est équivalent à $f(t)$ décalé de t_0 vers la **droite**, le signal est en **retard**.
- Dilatation : $f(at)$, le signal $f(t)$ est dilaté (shrinked) de a, si $a > 0$ sinon le signal est "expanded".
- Amplitude : $af(t)$.

Résumé : $af(b(t - t_0))$, est équivalent au signal $f(t)$ décalé de t_0 (vers la droite), dilaté de b, et avec amplitude modulée de a.

3. Convolution

(8) $$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau$$

3.1. **Propriétés de la convolution.**

- Commutativité

(9) $$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

- Distributivité

(10) $$(af(t) + bg(t)) * h(t) = a(f * h)(t) + b(g * h)(t)$$

- Associativité

(11) $$(f * g) * h = f * (g * h)$$

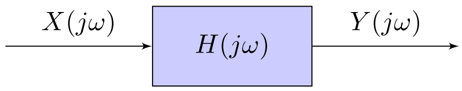

FIGURE 1. Typical representation of a system where $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

4. Systèmes LIT

LIT : Linéaire, invariant dans le temps
Linéaire, invariant par translation

4.1. Notation opérateur.

$$y(t) = S_a\{x(t)\} \equiv y = S_a\{x\} \tag{12}$$

4.2. Caractérisation d'un système LIT. Réponse impulsionelle : $h(t) = S_a\{\delta(t)\}$

Système LIT : $h(t,\tau) = h(t-\tau)$

$$y(t) = (h * x)(t) \tag{13}$$

4.3. Exemples.

- Amplificateur

$$a \cdot I\{f(t)\} = a \cdot f(t) \Rightarrow h(t) = a \cdot I\{\delta(t)\} = a\delta(t) \tag{14}$$

- Retard

$$S_{t_0}\{f(t)\} = f(t-t_0) \Rightarrow h(t) = S_{t_0}\{\delta(t)\} = \delta(t-t_0) \tag{15}$$

- Dérivateur

$$D\{f(t)\} = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) \Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t) \tag{16}$$

- Intégrateur

$$D^{-1}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = F(t) \Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) \tag{17}$$

5. Systèmes régis par des équations différentielles

Un système LIT peut être décrit par des équations différentielles, et en utilisant la notation "opérateur" écrit comme suit

$$\frac{d}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = b_m\frac{d}{dt^m}x(t) + \cdots + b_1\frac{d}{dt}x(t) + b_0x(t) \tag{18}$$

$$D^n\{y(t)\} + a_{n-1}D^{n-1}\{y(t)\} + \cdots + a_1D\{y(t)\} + a_0y(t) = b_mD^m\{x(t)\} + \cdots + b_1D\{x(t)\} + b_0x(t) \tag{19}$$

$$Q(D)\{y(t)\} = P(D)\{x(t)\} \tag{20}$$

$x(t)$: input
$y(t)$: output
Contraintes physiques : $n \geq m$ Polynôme caractéristique :

$$Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = \Pi_{i=1}^{n}(s-s_i) \tag{21}$$

Solution générale :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} \tag{22}$$

5.1. Fonction de Green.

La fonction de Green est

$$\varphi(t) = Q^{-1}(D)\{\delta(t)\} \tag{23}$$

de là on obtient l'égalité suivante

$$h(t) = P(D)\{Q^{-1}(D)\{\delta(t)\}\} = P(D)\{\varphi(t)\} \tag{24}$$

5.2. Résolution d'équation différentielle.

(1) Solution de l'équation homogène : combinaison linéaire de modes propres : $y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}$
(2) Solution particulière : on convolue la réponse impulsionnelle du système : $h(t) * x(t)$
(3) Solution de l'équation : $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} + h(t) * x(t)$ où les c_i peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales.

5.3. Stabilité BIBO.

$$|x(t)| \leq M_x < +\infty \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < +\infty \tag{25}$$

Un système est stable BIBO si, et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty \tag{26}$$

Tous les racines dans le demi-plan gauche. (pôlé à gauche)

5.4. Resonance.

6. Vecteurs et signaux

Energie d'un signal est "équivalente" à une norme
Espace vectoriel des signaux :

$$L_2([t_1, t_2]) = \left\{ f(t) : t \in [t_1, t_2] \& \int_{t_1}^{t_2} |f^2(t)| dt < +\infty \right\} \tag{27}$$

6.1. Produit scalaire.

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g * (t) dt \tag{28}$$

Meilleure approximation de $f(t)$ par $\phi(t)$.
Erreur quadratique :

$$||e(t)||_{L_2}^2 =< e, e >= \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - c\phi(t))^2 dt =< f, f > +c^2 < \phi, \phi > -2c < f, \phi > \tag{29}$$

Minimisation :

$$\frac{\partial < e, e >}{\partial c} = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{< f, \phi >}{< \phi, \phi >} \tag{30}$$

6.2. Théorème de Pythagore.

$$||x||^2 = ||x - g||^2 + ||g||^2 \tag{31}$$

6.3. Approximation moindres carrés.

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} < x, \phi_i > \phi_i \tag{32}$$

6.4. Corrélation et similarité. Intercorrélation :

$$c_{xy}(t) = (x(-\cdot) * y^*(\cdot))(t) \tag{33}$$

7. Série de Fourier

Pulsion fondamentale : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t} \quad c_n =< x, \phi_n >= \tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega t} dt \tag{34}$$

Parseval

$$||x^2|| = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)| dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \tag{35}$$

8. Fourier Transform

Notation : $w_n = n\frac{2\pi}{T_0}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x\}(\omega) \in \mathbb{C} \tag{36}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}^{-1}\{x\}(t) \tag{37}$$

$$X(\omega)|_{\omega=0} = X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \tag{38}$$

Coefficients de la série de Fourier :

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} X_g(\omega)\big|_{\omega=n\omega_0} \tag{39}$$

9. Décomposition en fractions simples

On a le théorème suivant :

Theorem 1. *Toute fraction rationelle peut se décomposer de manière unique comme une somme de fractions simples à coefficients complexes et d'un polynôme :*

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-X_i)^j} + R(X) \tag{40}$$

où l'on a défini ($N = Deg(P)$, $M = Deg(Q)$) :
- *X_i sont les racines distinctes du dénominateur $Q(X)$*
- *m_i sont les multiplicités de chaque racine X_i*
- *$R(X)$ est un polynôme de degré $N-M$ si $N \geq M$ et sinon $R(X) = 0$.*

Marche à suivre :

(1) Si $Deg(P) \geq Deg(Q)$, on effectue une division euclidienne afin de se ramener à la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = R(X) + \frac{S(X)}{Q(X)} \tag{41}$$

(2) Poser

$$\frac{S(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-X_i)^j} \tag{42}$$

(3) Mettre au même dénominateur

$$S(X) = Q(X)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-X_i)^j}$$

(4) Résoudre pour trouver les $a_{i,j}$, puis réécrire l'équation avec les coefficients trouvés.

Example 1. *Décomposer en éléments simples*

$$H(X) = \frac{X^3+1}{(X-1)^2(X+2)}$$

- *Après la division euclidienne on trouve*

$$H(X) = \overbrace{1}^{R(X)} + \frac{\overbrace{3X-1}^{S(X)}}{\underbrace{(X-1)^2(X+2)}_{Q(X)}}$$

– *On pose*

$$\frac{3X-1}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{A}{(X-1)^2} + \frac{B}{(X-1)} + \frac{C}{(X+2)} \quad \Bigg| \cdot (X-1)^2(X+2)$$
$$\Rightarrow$$
$$3X-1 = A(X+2) + B(X-1)(X+2) + C(X-1)^2$$

– *Après résolution on trouve*

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{7}{9} \\ C = -\frac{7}{9} \end{cases}$$

et donc

$$H(X) = \frac{X^3+1}{(X-1)^2(X+2)} = 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{7}{9}\frac{1}{(X-1)} - \frac{7}{9}\frac{1}{(X+2)}$$

Si H était une réponse impulsionelle dans le domaine fréquentiel, on peut trouver la réponse dans le domaine temporel en appliquant la transformée de Fourier inverse.

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}(t) = \delta(t) + u(t)\left[\frac{7}{9}e^t - \frac{7}{9}e^{-2t} + \frac{2}{3}\frac{t}{2}e^t\right].$$

$$sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x} \tag{43}$$

9.1. **β-spline.**

$$\beta^0(t) = \mathrm{rect}(t) \tag{44}$$
$$\beta^n(t) = (\beta^{n-1} * \beta^0) \tag{45}$$
$$\beta^n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})^{n+1} \tag{46}$$

9.2. **Relation de Parseval.**

$$< f(x), g^*(x) >= \frac{1}{2\pi} < F(\omega), G^*(\omega) >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k^* \tag{47}$$

10. Echantillonnage

$$x_e(t) = x(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT_e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t-nT_e) \tag{48}$$

$$X_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t-nT_e)e^{j\omega t}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)e^{-j\omega nT_e} = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \tag{49}$$

10.1. **Formule de Poisson.**

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) \quad \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t+kT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{jn\omega_0 t} \tag{50}$$

Theorem 2. *Théorème d'échantillonnage - Shannon x(t) avec ω_{max} peut-être parfaitement retrouvée si*

$$\omega_e \geq 2\omega_{max} \tag{51}$$

NB en pratique le signal est filtré pour avoir une largeur de bande B, bien définie.

10.2. **Formule de reconstruction de Shannon.** Reconstruction par filtrage idéal

$$h(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_e}) = \mathcal{F}^{-1}\left\{T_e \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_e}\right)\right\} \tag{52}$$

11. Applications aux communications

11.1. **Largeur de bande essentielle.**

$$B_{ess} = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} |X(\omega)|^2 d\omega = \alpha \cdot E_{tot} \quad \alpha = 0.95 \tag{53}$$

11.2. **Modulation d'amplitude (AM).**

(54) $$x_{AM}(t) = x(t)A_p \cos\omega_p t = x(t)p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

11.3. **Demodulation synchrone.** multiplier x_{AM} avec $p'(t) = 2\cos\omega_p t = 1 + \cos 2\omega_p t$, puis filtre passe-bas.

12. Analyse et synthèse des filtres analogiques

12.1. **Filtre passe-tout.**

(55) $$s_{0k} = -s_{pk}^*$$

(56) $$H(\omega) = \frac{j\omega - d}{j\omega + d}$$

Deuxième partie 2. Signaux numériques

13. Signaux et systèmes discrets

13.1. Signaux types.

13.1.1. *Impulsion discrète.*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{57}$$

13.1.2. *Saut unité discret.*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{58}$$

13.1.3. *Polynôme causal discret discret.*

$$S_+^N[n] = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)...(n+N)}{N!} & n \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{59}$$

13.1.4. *Fonction exponentielle causale discrète.*

$$a_+[n] = a^n \cdot u[n] \tag{60}$$

13.1.5. *Signaux périodiques.*

$$f[n+N] = f[n] \quad \forall n \tag{61}$$

13.1.6. *Représentation canonique.*

$$f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]\delta[k-n] \tag{62}$$

13.2. Quelques Opérateurs.

(1) Décalage : $f[n] \to Zf[n] = f[n-1]$
(2) Sous-échantillonage : $f[n] \to (M \downarrow)f[n] = f[Mn]$
(3) Sur-échantillonage : $f[n] \to (M \uparrow)f[n] = f[n/M]$

13.3. Systèmes linéaires discrets.

13.3.1. *Convolution discrète.*

$$(f * g)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n-k]g[k] \tag{63}$$

13.3.2. *FIR - Finite Impulse Response.*

$$\forall n \notin [n_0, n_1], \quad h[n] = 0 \tag{64}$$

ou

$$H(z) = z^{-n_0}P(z^{-1}) \quad \text{où } P(X) \text{ est un polynôme} \tag{65}$$

13.3.3. *BIBO - Bounded Input Bounded Output.*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[n]| < +\infty \tag{66}$$

13.4. Transformée en Z.

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]z^{-n} \tag{67}$$

13.4.1. *Relation avec Taylor.*

$$f[n+n_0] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left(z^{-n_0}F(z^{-1})\right)\Big|_{z=0} \tag{68}$$

14. Analyse temporelle des signaux discrets

14.0.2. *Pôles et zéros.*

(1) z_0 est un **Zéro** $\Leftarrow H(z_0) = 0$, **zéro multiple d'ordre N** $\Leftrightarrow \frac{d^n H}{dz^n}(z_0) = 0$ pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$

(2) z_0 est un **Pôle** $\Leftarrow \frac{1}{H(z_0)} = 0$, **pôle multiple d'ordre N** $\Leftrightarrow \frac{d^n(1/H)}{dz^n}(z_0) = 0$ pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$

14.0.3. *Causalité et stabilité.*

(1) Causal ssi la zone de convergence est à l'extérieur des pôles

(2) Anti-causal ssi la zone de convergence est à l'intérieur des pôles

(3) Stable ssi le cercle unité est inclus dans la zone de convergence

14.0.4. *Filtres réels.*

$$H(z)^* = H(z^*) \tag{69}$$

14.1. **Equations aux différences.** Forme générale :

$$(a * g)[n] = (b * f)[n] \tag{70}$$

où f est l'input, g l'output.

14.1.1. *Polynôme caractéristique.*

$$A(z) = a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \cdots + a_0 = a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - r_k z^{-1}) \tag{71}$$

où r_k sont les racines du polynômes caractéristiques.

14.1.2. *Solution générale de l'équation homogène g.*

$$g_{\text{homogène}}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k r_k^n \tag{72}$$

où c_k sont des constantes à déterminer par des conditions.

14.1.3. *Fonction de Green γ.*

$$(a * \gamma)[n] = \delta[n] \tag{73}$$

$$\gamma[n] = \frac{1}{a_0} \big((r_1)_+ * (r_2)_+ \ldots (r_N)_+ * \big)[n] \tag{74}$$

14.1.4. *Fonction de transfert $h[n]$.*

$$y[n] = (h * x)[n] \tag{75}$$

$$h[n] = (\gamma * b)[n] \tag{76}$$

14.1.5. *Solution générale.*

$$g[n] = \underbrace{(h * f)[n]}_{g_{\text{homogène}}[n]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k r_k^n}_{g_{\text{particulière}}[n]} \tag{77}$$

14.1.6. *Résolution par la transfornée en Z, $H(z)$.*

(1) $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

(2) Décomposition en fractions simples

(3) A l'aide des tables, transformée inverse