N. S. ARŻANIKOW i W. N. MALCEW

AERODYNAMIKA

ERRATA

Strona	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Jest	Powinno być
128		1	$\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r_0}$	$\frac{\Gamma^2 \varrho}{8\pi^2 r_0}$
139		6	nr^n	nr^{n-1}
150		3	$\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$	$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
155	5		$Y + iY$	$Y + iX$
169	6		$\zeta = Re^{i\theta}$	$\zeta = Re^{i\beta}$
197		5	$= 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right)$	$= 2\left(\mu_0 - \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right)$
199	8		$\frac{\zeta(\theta) + \zeta(2\pi - \theta)}{2}$	$\frac{\xi(\theta) + \xi(2\pi - \theta)}{2}$
288		1	$-\frac{1}{\delta^8}\frac{\partial^8 v_x}{\partial \eta^8}$	$-\frac{1}{\delta^3}\frac{\partial^3 v_x}{\partial \eta^3}$
294	9		$= 0{,}089$	$= -0{,}089$
315		12	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n(\pi - \theta)$	$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\pi - \theta)$
316		5	A_6	A_7
317	1		$(5\mu_4 + Y)$	$(5\mu_4 + 1)$
385		8	$\frac{2\varrho_2}{(k-1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}$	$\frac{2\varrho_2}{(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}$
390		1	$\frac{p_{20}}{p_1}$	$\frac{p_{10}}{p_1}$
401	7		$\frac{\partial v_y}{\partial y}$	$\frac{\partial v_y}{\partial x}$
419	Tabl. 16.1 kol. 2 w. 2 d.		126,04	126,03
446	Tabl. 18.1 kol. 5 w. 2 d.		0,5635	0,5649
495	Tabl. 19.1, kol. 3 i 5, w. 2 d.		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{2}$
502	5		$\varrho = \varrho'$	$\varrho = \varrho_1 + \varrho'$
510	Tabl. kol. 4 lp. 3 w. 2 g.		$\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right) -$	$\left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right)\right] -$

N. S. Arżanikow i W. N. Malcew, *Aerodynamika*.

SPIS TREŚCI

Przedmowa 11

Wstęp 12

Rozdział I. Przegląd historyczny 13

§ 1. Krótki przegląd historyczny rozwoju hydroaerodynamiki w XVII—XIX wieku 13

§ 2. Rola N. J. Żukowskiego i S. A. Czapłygina w rozwoju współczesnej aerodynamiki 20

§ 3. Przodująca rola uczonych radzieckich w rozwoju aerodynamiki . . . 26

Rozdział II. Podstawowe pojęcia hydroaerodynamiki 31

§ 1. Pojęcie płynu. Gęstość i ciężar właściwy 31

§ 2. Klasyfikacja płynów 33

§ 3. Pojęcie ciśnienia hydrodynamicznego w danym punkcie płynu . . . 36

§ 4. Klasyfikacja sił występujących w płynie 37

§ 5. Niezależność ciśnienia hydrodynamicznego od kierunku w płynie doskonałym 38

Rozdział III. Kinematyka płynu 39

§ 1. Metoda Eulera 39

§ 2. Metoda Lagrange'a 41

§ 3. Klasyfikacja ruchów płynu 42

§ 4. Linia prądu 43

§ 5. Równanie ciągłości 48

§ 6. Cyrkulacja prędkości 52

§ 7. Ruch elementu płynu 53

§ 8. Przepływ potencjalny 60

§ 9. Równanie ciągłości we współrzędnych prostokątnych dla płaskiego przepływu potencjalnego 62

§ 10. Równanie ciągłości we współrzędnych biegunowych dla płaskiego przepływu potencjalnego 64

§ 11. Cyrkulacja prędkości w przepływie potencjalnym 65

§ 12. Funkcja prądu 66

§ 13. Metoda superpozycji (nakładania) przepływów potencjalnych . . . 70

§ 14. Prostoliniowy przepływ jednowymiarowy 71

§ 15. Przepływ w narożu prostokątnym 72

§ 16. Źródło i upust 74

§ 17. Źródło podwójne (dipol) 77

§ 18. Wir 80

§ 19. Bezcyrkulacyjny opływ walca kołowego 83
§ 20. Cyrkulacyjny opływ walca kołowego 86
Rozdział IV. Podstawy hydrodynamiki płynów doskonałych 90
§ 1. Równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego w postaci Eulera . 90
§ 2. Równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego w postaci Gromeki 94
§ 3. Warunki początkowe i brzegowe 96
§ 4. Całki pierwsze równań różniczkowych ruchu 98
§ 5. Zasada pędu i popędu dla ustalonego ruchu płynu doskonałego 104
Rozdział V. Podstawy teorii wirów 107
§ 1. Pojęcie linii wirowej 107
§ 2. Rurka wirowa 108
§ 3. Twierdzenie Stokesa 109
§ 4. Twierdzenie Thomsona o stałości cyrkulacji 111
§ 5. Twierdzenie Helmholtza o wirach 114
§ 6. Rozkład ciśnień na zewnątrz wiru płaskiego i w jego rdzeniu . . . 117
§ 7. Wzór Biota—Savarta na prędkość indukowaną 119
§ 8. Zagadnienie wyznaczania prędkości indukowanej przez wiry w przypadku ogólnym 122
§ 9. Paradoks Eulera—d'Alemberta 125
§ 10. Twierdzenie Żukowskiego 126
§ 11. Dowód twierdzenia Żukowskiego dla dowolnego obwodu płaskiego 129
Rozdział VI. Zastosowanie teorii funkcji zmiennej zespolonej do badań przepływów płaskich płynu doskonałego 134
§ 1. Potencjał zespolony 134
§ 2. Prędkość zespolona 135
§ 3. Przykłady najprostszych przepływów 136
§ 4. Ruch pary wirów 144
§ 5. Łańcuch wirów 146
§ 6. Pojęcie ścieżki wirowej 148
§ 7. Opływ walca kołowego 149
§ 8. Residuum prędkości zespolonej 151
§ 9. Twierdzenie Żukowskiego—Czaplygina o wypadkowej sile pochodzącej od ciśnień (sile aerodynamicznej) 153
§ 10. Twierdzenie Czaplygina o momencie wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień (momencie aerodynamicznym) 156
Rozdział VII. Teoria płata nośnego w przepływie płaskim 161
§ 1. Pojęcie odwzorowania konforemnego 161
§ 2. Przykłady najprostszych odwzorowań konforemnych 165
§ 3. Inwersja 169
§ 4. Odwzorowanie Żukowskiego 172
§ 5. Profile Żukowskiego—Czaplygina 173
§ 6. Określenie wielkości siły nośnej profilu teoretycznego Żukowskiego—Czaplygina 175
§ 7. Profile teoretyczne 182
§ 8. Obliczenie siły i momentu dla profilu o dowolnym kształcie . . . 185
§ 9. Teoria profilu cienkiego 191

§ 10. Wyznaczenie przepływu potencjalnego dookoła profilu lotniczego o dowolnym kształcie (metoda S. G. Nużina) 198
Rozdział VIII. Teoria oporu w opływach z obszarem martwym i oporu wirowego 202
§ 1. Model opływu z obszarem martwym. Opływ płytki przy istnieniu obszaru martwego 202
§ 2. Pojęcie oporu wirowego 211
Rozdział IX. Podstawy teorii ruchu płynu lepkiego 217
§ 1. Równania różniczkowe ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego . . . 217
§ 2. Pojęcie podobieństwa przepływów 226
§ 3. Podstawowe kryteria podobieństwa 230
§ 4. Laminarny przepływ płynu lepkiego w kołowej rurze walcowej . . 235
§ 5. Pojęcie przepływu turbulentnego (burzliwego) 239
§ 6. Turbulentny przepływ w przewodach o przekroju prostokątnym i kołowym 246
Rozdział X. Warstwa przyścienna 254
§ 1. Pojęcie warstwy przyściennej 254
§ 2. Równania różniczkowe warstwy przyściennej 257
§ 3. Wzór całkowy dla warstwy przyściennej 263
§ 4. Obliczenie laminarnej warstwy przyściennej na płaskiej płytce . . 266
§ 5. Obliczenie turbulentnej warstwy przyściennej na płaskiej płytce . . 271
§ 6. Obliczenie warstwy przyściennej na płaskiej płytce w przypadku przepływu laminarnego i turbulentnego 275
§ 7. Warstwa przyścienna na powierzchni krzywoliniowej 277
§ 8. Obliczanie warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej (metoda L. G. Łojcjanskiego) 283
§ 9. Określenie punktu przejścia laminarnej warstwy przyściennej w turbulentną na ściance krzywoliniowej (metoda A. A. Dorodnicyna—L. G. Łojcjanskiego) 292
§ 10. Obliczenie turbulentnej warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej (metoda Łojcjanskiego) 295
Rozdział XI. Teoria płata nośnego o skończonej rozpiętości 302
§ 1. Modele hydrodynamiczne płata o skończonej rozpiętości 302
§ 2. Pojęcie odchylenia strug i oporu indukowanego w przypadku płata o skończonej rozpiętości 305
§ 3. Prędkość indukowana i odchylenie strug $[\Gamma = \Gamma(z)]$ 307
§ 4. Siły działające na płat nośny. Opór indukowany $[\Gamma = \Gamma(z)]$ 309
§ 5. Podstawowe równania całkowo-różniczkowe dla płata o skończonej rozpiętości 311
§ 6. Przybliżona metoda obliczania rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata 312
§ 7. Określenie siły nośnej i oporu indukowanego. Wzory na przeliczanie płatów niezwichrzonych z jednego wydłużenia na inne 318
§ 8. Kształt obrysu płata o skończonej rozpiętości i najmniejszym oporze indukowanym 322
§ 9. Rozwiązanie równania całkowo-różniczkowego płata metodą S. G. Nużina 326
Rozdział XII. Podstawowe pojęcia z dynamiki gazów 336
§ 1. Równanie stanu gazu (doskonałego) 336
§ 2. Pierwsze prawo termodynamiki 337

§ 3. Ciepło właściwe 338
§ 4. Entalpia 341
§ 5. Drugie prawo termodynamiki. Entropia 341
§ 6. Prędkość dźwięku 344
Rozdział XIII. Układ podstawowych równań różniczkowych dynamiki gazów 348
§ 1. Przedmiot i podstawowe równania dynamiki gazów 348
§ 2. Równanie energii 350
§ 3. Zakres stosowalności dla powietrza równania Bernoulliego dla płynu nieściśliwego 353
Rozdział XIV. Jednowymiarowy izentropowy przepływ gazu 358
§ 1. Podstawowe zależności dla jednowymiarowych przepływów izentropowych 358
§ 2. Związek pomiędzy prędkością przepływu a przekrojem strugi . . . 365
Rozdział XV. Teoria prostopadłej fali uderzeniowej 375
§ 1. Podstawowe zależności dla prostopadłej fali uderzeniowej 375
§ 2. Porównanie sprężenia w prostopadłej fali uderzeniowej ze sprężaniem izentropowym 384
§ 3. Prędkość rozchodzenia się fal zgęszczeniowych. Fala dźwiękowa . . 388
§ 4. Ciśnienie spiętrzenia za czołem prostopadłej fali uderzeniowej . . . 389
Rozdział XVI. Płaskie przepływy naddźwiękowe 392
§ 1. Kryteria istnienia potencjału prędkości w płaskim izentropowym przepływie gazu 392
§ 2. Podstawowe równanie różniczkowe płaskiego przepływu potencjalnego 394
§ 3. Charakterystyki w płaszczyźnie przepływu gazu 396
§ 4. Charakterystyki w płaszczyźnie hodografu prędkości 399
§ 5. Określenie kierunku charakterystyk w płaszczyźnie przepływu gazu i w płaszczyźnie hodografu dla zadanego wektora prędkości za pomocą elipsy 407
§ 6. Określenie pola prędkości w płaskim potencjalnym przepływie naddźwiękowym za pomocą metody charakterystyk 408
§ 7. Naddźwiękowy opływ wypukłego naroża (opływ Prandtla—Meyera) 414
Rozdział XVII. Teoria skośnej fali uderzeniowej 421
§ 1. Pojęcie skośnej fali uderzeniowej 421
§ 2. Określenie parametrów gazu za skośną falą uderzeniową 422
§ 3. Związek pomiędzy kątem odchylenia przepływu naddźwiękowego a położeniem skośnej fali uderzeniowej 424
§ 4. Biegunowa fali uderzeniowej 426
Rozdział XVIII. Podstawy teorii profilu i teorii płata w przepływie poddźwiękowym 431
§ 1. Pojęcie krytycznej liczby Macha 431
§ 2. Przybliżona teoria profilu lotniczego w przepływach poddźwiękowych (metoda linearyzacji) 433
§ 3. Równania Czapłygina dla przypadku przepływów poddźwiękowych o dużej prędkości 439
§ 4. Metoda S. A. Christjanowicza 443
§ 5. Przybliżona teoria G. F. Burago poddźwiękowego opływu profilu o dowolnym kształcie 450

§ 6. Przydźwiękowy opływ profilu w zakresie nadkrytycznym. Obliczenie oporu falowego metodą G. F. Burago 457
§ 7. Charakterystyki aerodynamiczne profilów w przepływie poddźwiękowym 461
§ 8. Wpływ ściśliwości na wielkość prędkości indukowanej płata 465
§ 9. Płat o skończonej rozpiętości w przepływach poddźwiękowych . . . 468
Rozdział XIX. Podstawy teorii profilu i płata w przepływie naddźwiękowym gazu 478
§ 1. Pojęcie zlinearyzowanego naddźwiękowego przepływu rozrzedzeniowego i zgęszczeniowego wzdłuż sztywnej ścianki 478
§ 2. Zlinearyzowana teorią naddźwiękowego opływu płaskiej płytki . . . 484
§ 3. Zlinearyzowana teoria naddźwiękowego opływu cienkiego profilu . . 486
§ 4. Ściślejsza teoria profilu w przepływie naddźwiękowym 490
§ 5. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia naddźwiękowego opływu profilu składającego się z odcinków prostoliniowych 495
§ 6. Siły aerodynamiczne działające na płytkę o nieskończenie wielkim wydłużeniu ustawioną skośnie do kierunku przepływu naddźwiękowego 498
§ 7. Zagadnienie naddźwiękowego opływu płata o skończonej rozpiętości 501
§ 8. Płaski płat o obrysie rombowym 506
Bibliografia 511

WSTĘP

Gałąź wiedzy zwana aerodynamiką poświęcona jest badaniom praw rządzących ruchem płynów nieściśliwych i ściśliwych; do tych ostatnich należy również powietrze.

Aerodynamika zajmuje się badaniem praw ruchu powietrza oraz sił, jakie wywiera ono na opływane ciała.

Rozpatrywanie powietrza jako płynu nieściśliwego spowodowało, że w aerodynamice istnieje szereg praw, metod oraz równań, wspólnych z hydrodynamiką badającą prawa ruchu płynu nieściśliwego. W związku z tym ta dziedzina aerodynamiki nazywana jest często hydroaerodynamiką.

Lotnictwo współczesne cechują duże prędkości lotu. Przy prędkościach zbliżonych do prędkości dźwięku ściśliwość powietrza wpływa w sposób istotny na charakter przepływu. Wskutek tego prawa dotyczące ruchu powietrza z dużymi prędkościami różnią się od praw dotyczących ruchu z prędkościami niewielkimi. Aerodynamika dużych prędkości nazywana jest często dynamiką gazów, jest ona zatem gałęzią wiedzy poświęconą badaniom przepływu płynów ściśliwych, czyli gazów.

Aerodynamika stanowi teoretyczną podstawę lotnictwa, podstawę obliczeń aerodynamicznych współczesnych samolotów i innych maszyn latających.

Rozdział I

PRZEGLĄD HISTORYCZNY

§ 1. Krótki przegląd historyczny rozwoju hydroaerodynamiki w XVII–XIX wieku

Chcąc scharakteryzować w ogólnym zarysie historyczny rozwój hydroaerodynamiki, należy przede wszystkim przedstawić we właściwym świetle historię rozwiązania głównego zagadnienia hydroaeromechaniki, a mianowicie określenia oporu, jaki wywiera płyn na poruszające się w nim ciała.

Pierwsze osiągnięcia w tej dziedzinie odnoszą się do XVII w. i pozostają w związku z badaniami nad spadaniem ciał oraz badaniami ruchu wahadła, które służyło wówczas jako instrument do mierzenia czasu. Z drugiej strony zbadanie tych zagadnień było niezbędne dla potwierdzenia teorii Kopernika o obrocie ziemi wokół słońca.

Do końca XVII w. dominował w nauce pogląd Arystotelesa, według którego czas spadania ciał miał być odwrotnie proporcjonalny do ich ciężaru, tzn. że ciężkie ciało miało spadać szybciej niż lekkie.

Teorię Arystotelesa obalił Galileusz, który w roku 1638 prowadził doświadczenia ze spadaniem ciał z pizańskiej pochyłej wieży. Jezuita Riccioli, który z pomocą biblii chciał dowieść błędności teorii M. Kopernika, powtórzył w latach 1640÷1650 te same doświadczenia na wieży Azinelli w Bolonii i ze zdziwieniem stwierdził, że potwierdzają one w zupełności wyniki uzyskane przez Galileusza.

W wyniku doświadczeń Galileusz po raz pierwszy w historii dowiódł, że opór, na jaki napotykają ciała poruszające się w ośrodku płynnym, rośnie ze wzrostem gęstości ośrodka oraz ze wzrostem prędkości.

Galileusz nie dokonał jednakże ilościowego określenia wielkości tego oporu. Wielkość jego po raz pierwszy określił w roku 1686 uczony Mariotte, który określił opór prostokątnej płytki, umieszczonej prostopadle do kierunku przepływu wody w rzece.

W końcu XVII i na początku XVIII wieku poświęcił zagadnieniom oporu liczne badania angielski uczony Izaak Newton (1642–1727).

ność momentów $WR = Pr$, gdzie W — opór kuli; R i r odpowiednio ramiona momentów. Następnie kulę zdejmowano i dobierano takie najmniejsze obciążenie p, które dawałoby tę samą liczbę obrotów, jaką uprzednio dawał ciężar P. Na podstawie tych pomiarów określono opór kuli w następujący sposób:

$$W = (P - p)\frac{r}{R}.$$

Robin ustalił, że współczynnik oporu kuli wynosi $C = 0{,}55$.

Sposób Robina odegrał poważną rolę w badaniach oporu, a zatem również w historii aerodynamiki, jako podstawowy sposób wyznaczania oporu — aż do chwili pojawienia się tuneli aerodynamicznych.

W 1763 roku, kapitan francuskiej floty, znany uczony Jean Borda przeprowadził przy zastosowaniu metody Robina liczne doświadczenia dla wyznaczenia oporu różnych ciał (kuli, płytki, walca) w powietrzu i w wodzie. J. Borda potwierdził prawo Newtona zależności oporu od kwadratu prędkości i jednocześnie (co jest jego wielką zasługą) wykazał nieprawdziwość uderzeniowej teorii Newtona, gdyż przeczyła ona wszystkim jego doświadczeniom. Pod tym względem jego badania oznaczają nowy etap w badaniach teorii oporu.

W związku z rozwojem żeglugi morskiej stało się aktualne zagadnienie wyznaczania oporu okrętu, co skłoniło uczonych do zajęcia się jeszcze bardziej szczegółowo zagadnieniami oporu w ogóle.

W siedemdziesiątych latach XVIII wieku Paryska Akademia Nauk, w związku z projektem budowy całej sieci morskich kanałów, postawiła zagadnienie ustalenia, w jakim stopniu opór zależy od stosunku poprzecznych przekrojów kanału i okrętu. Dla zbadania tego zagadnienia została utworzona specjalna komisja pod przewodnictwem znakomitego mechanika d'Alemberta, a w skład jej wchodzili uczeni A. Condorcet i Ch. Bossuet.

W okresie lat 1775÷1777 przeprowadzili oni doświadczenia polegające na przeciąganiu pływających modeli w prostokątnych naczyniach. Dało to początek szerokiego ujęcia takiego eksperymentu, z którego powstała obecnie metoda badania modeli ślizgowców, statków, wodnopłatowców w specjalnych kanałach wodnych.

W roku 1778 A. Condorcet i Ch. Bossuet przeprowadzili specjalne badania w celu potwierdzenia ustalonego przez Newtona prawa, które mówiło, że siła normalna do płytki jest proporcjonalna do kwadratu sinusa kąta natarcia. Obserwacje, poczynione przez nich w oparciu o 69 doświadczeń, potwierdziły jednakże wyniki uzyskane przez Bordę dowodzące błędności teorii Newtona.

W związku z tym znany rosyjski uczony D. I. Mendelejew powiedział[1]: „w historii badań zagadnienia oporu wniosek ten był głównym powodem odrzucenia teorii Newtona i znalezienia nowych praw dotyczących oporu".

[1] *О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании*, Dzieła, tom VII wyd. Akademii Nauk ZSRR.

Studiując spadanie kuli w różnych ośrodkach Newton ustalił, że opór Q kuli jest proporcjonalny do wielkości $\varrho v^2 D^2$, gdzie ϱ — gęstość ośrodka, v — prędkość ruchu kuli, D — średnica kuli. W ten sposób zostało odkryte podstawowe prawo oporu

$$Q = C \varrho S v^2,$$

przy czym ustalono, że dla kuli wielkość $C = 0{,}50$, która zupełnie dobrze zgadza się z najnowszymi danymi.

Oprócz doświadczalnych badań nad oporem opracował Newton teorię oddziaływania pewnych hipotetycznych nierzeczywistych płynów na poruszające się w nich ciała sztywne. Te wyidealizowane płyny, różniące się bardzo swoimi właściwościami od rzeczywistych ośrodków płynnych, rozpatrywał w tym celu, by dowieść, że przestrzeń międzyplanetarna lub międzygwiezdna nie jest zapełniona żadnym płynem, którego istnienie wynikało z niesłusznej teorii Arystotelesa.

Szczególnie wyczerpujące badanie przeprowadził Newton nad ruchem hipotetycznego płynu rozrzedzonego, składającego się z odrębnych (nie związanych ze sobą) cząsteczek, tzw. korpuskuł, i pozbawionego przy tym tarcia. Dla takiego płynu stworzył Newton tzw. uderzeniową teorię oporu płytki nachylonej pod pewnym kątem do kierunku swej prędkości względem płynu. Newton zakładał, że strumień nabiegający na płytkę składa się z wielkiej liczby sztywnych, niesprężystych cząsteczek, które uderzając o płytkę całkowicie tracą swą prędkość. Stosując zasadę ilości ruchu określił Newton wielkość oporu. Zakładając mianowicie, że masa płynu nabiegająca w jednostce czasu pod kątem natarcia α na płytkę o powierzchni S wynosi $\varrho S v \sin \alpha$, a prędkość cząsteczek płynu prostopadła do płytki wynosi $v \sin \alpha$ i całkowicie zanika w chwili uderzenia cząsteczki o płytkę, otrzymał Newton następujący wzór wyrażający siłę R normalną do płytki:

$$R = \varrho S v^2 \sin^2 \alpha.$$

Już po śmierci Newtona wielu uczonych usiłowało zastosować jego teorię do ruchu ciał w powietrzu, lecz nieuchronnie dochodzili do niewłaściwych wyników.

Wielkość siły nośnej płata obliczana zgodnie z prawem kwadratu sinusa wypadała tak mała, że przez długi czas fakt ten przytaczano jako dowód niezniszczalności latania na aparatach cięższych od powietrza.

W wieku XVIII nauka o oporze rozwijała się głównie pod wpływem potrzeb żeglugi morskiej, hydroenergetyki i artylerii.

Tak na przykład do rozwiązania zagadnienia ruchu pocisku trzeba było dokładnie znać opór pocisku. W związku z tym w r. 1746 uczony angielski Robin przeprowadził doświadczenia w celu określenia oporu kuli; zastosował do tego celu kołowrót obracający kulę. Ciężar P dobierano w ten sposób, aby kula obracała się ruchem jednostajnym. W tym przypadku miała miejsce rów-

Należy również wspomnieć o pracach angielskiego uczonego Beaufoya. W Anglii, w której wówczas poważnie rozwijało się budownictwo okrętowe, badania oporu okrętu musiały rzeczywiście budzić duże zainteresowanie. W latach 1793÷1798 Beaufoy przeprowadził wielką ilość doświadczeń dotyczących oporu ciał zarówno pływających na powierzchni cieczy, jak i zanurzonych w cieczy całkowicie. Największym rozpowszechnieniem cieszą się doświadczenia przeprowadzone przez niego już po utworzeniu specjalnego towarzystwa „Society for the Improvement of Naval Architecture", które dało Beaufoyowi możność przeprowadzania doświadczeń z dużymi modelami w obszernym zbiorniku Grenlandzkiego Doku w pobliżu Londynu. Na specjalną uwagę zasługują następujące wyniki uzyskane przez Beaufoya: określając opór kuli Beaufoya ustalił, że współczynnik jej oporu wynosi $C = 0{,}36$; znamiennym jest, że ustalił on to wówczas, gdy wszyscy eksperymentatorzy przed nim uzyskiwali wynik $C \approx 0{,}50$ (Newton — 0,50; Borda — 0,56; Chutton — 0,60). Przyczyną tej rozbieżności jest to, że dawniejsze doświadczenia przeprowadzano przy takich prędkościach, przy których przepływ dokoła kuli był laminarny, natomiast Beaufoy mierzył opór w warunkach przypływu turbulentnego. Ten wynik był szczegółowo zbadany w połowie XIX w. przez znanych uczonych: Poiseuille'a i Reynoldsa, którzy odkryli dwa rodzaje przepływów: laminarny i turbulentny.

Duże znaczenie w studiach nad teorią oporu mają badania Coulomba i Dubuata. Zasługa Coulomba polega na postawieniu zagadnienia oporu tarcia. Wówczas gdy Newton i inni uważali, że wielkość tarcia jest mała, a d'Alembert, Condorcet i Bossuet w swych badaniach starali się udowodnić, że jest ono znikomo małe, Coulomb uważał, że opór wyraża się sumą dwóch składników $av^2 + bv$, gdzie drugi składnik zależny jest od tarcia.

Coulomb zakładał, że przy małych prędkościach drugi składnik odgrywa zasadniczą rolę, a przy dużych prędkościach — odwrotnie — składnik ten można pomijać. Coulomb wykonał dużą ilość doświadczeń dla zbadania drgań skrętnych krążków płaskich w płynach. Ustalił on różnice między tarciem w płynie a tarciem ciał sztywnych oraz podał sposób określenia tej wielkości, którą Stokes, Maxwell, Meyer i inni nazywali tarciem wewnętrznym. Doświadczenia Coulomba dały Stokesowi możność wyprowadzenia równania różniczkowego ruchu płynu lepkiego (1850 r.).

Uczony francuski Dubuat próbował ustalić nowe podstawy nauki o oporze. W swojej pracy *Principes d'hydraulique* Paris 1779 r. opisuje on szereg doświadczeń i mówi: „możemy uważać się już za szczęśliwych dlatego, że udało się nam siłę oporu, jaka działa na ciało poruszające się w płynie, rozłożyć na dwie różne składowe: jedną działającą jako ciśnienie na przednią część ciała i drugą jako brak ciśnienia z tyłu. Pierwsza składowa jest stała, gdy wielkość i kształt przedniej części ciała pozostają niezmienione. Druga składowa zmienia się wraz z długością ciała i zawsze zmniejsza się wraz ze wzrostem długości niezależnie od kształtu rufy, który również ma wpływ na wielkość tylnego ciśnienia

(non pression)". Tę myśl Dubuata wykorzystali Anglicy i zaczęli również dzielić wszystkie opory na rufowe i czołowe, co zostało specjalnie wyraźnie zaznaczone w wspomnianych wyżej doświadczeniach Beaufoya.

Od doświadczeń Dubuata rozpoczyna się nowa nauka o oporze, gruntownie różniąca się od teorii Newtona. Charakterystyczną cechą jej jest wyjaśnienie roli, jaką odgrywa rufowa część ciała.

D. I. Mendelejew pisze, że „Dubuat pierwszy wyraźnie zdał sobie sprawę ze zjawiska oporu i starał się wypowiedzieć i objaśnić zarówno wpływ tarcia, jak i długości ciała oraz wiele innych szczegółów nauki o oporze. Wydaje mi się, że ten badacz jest właśnie pierwszym inicjatorem [właściwego rozwiązania zagadnień oporu".

Do czasów Dubuata określano opór przeważnie sposobem wagowym (na bezpośrednich pomiarach siły oparty był zarówno sposób obrotu kołowego Robina, jak również metoda badania pływających modeli); Dubuat pierwszy wprowadził sposób drenowania ciała w celu badania rozkładu ciśnienia na jego powierzchni. Jako miernik ciśnienia zastosował on tzw. *rurkę Pitota*, która to rurka została zastosowana przez Pitota w roku 1753 do pomiarów prędkości przepływu wody w rzekach. To również należy bez wątpienia uznać za wielką historyczną zasługę Dubuata.

Dubuat jest również znany z tego, że ujawnił znany obecnie paradoks, noszący jego imię i polegający na tym, że opór nieruchomej płytki w cieczy przepływającej (przez kanał o skończonym przekroju — przyp. red.) jest większy niż opór płytki przesuwającej się (w kanale — przyp. red.) w nieruchomej cieczy; stosunek tych oporów wyraża się liczbami 1,3 : 1.

Paradoks ten, wyjaśniony przez N. J. Żukowskiego, wynika z różnych warunków opływania nieruchomej i ruchomej płytki.

W połowie XVIII w. rozwinęły się w Rosji badania teoretyczne ruchu płynów, dając podwaliny teoretycznej hydrodynamice. Zaszczyt stworzenia tej nauki przypada Rosyjskiej Akademii Nauk w osobach dwóch jej akademików: Leonarda Eulera (1707—1783) i Daniela Bernoulliego (1700—1783).

W swej słynnej pracy *Ogólne zasady ruchu płynów* (1755) L. Euler wyprowadził pierwszy podstawowe równania różniczkowe ruchu dla tzw. cieczy doskonałej, co zapoczątkowało jedną z najważniejszych gałęzi mechaniki ośrodków ciągłych — hydroaerodynamiki.

Hydroaerodynamika zawdzięcza L. Eulerowi wprowadzenie pojęcia ciśnienia i przeciwstawienie tego pojęcia postawionej przez Newtona hipotezie „uderzeń" cząsteczek płynu o powierzchnię opływanego ciała.

Stworzenie podstawowego prawa hydroaerodynamiki, ustalającego związek między ciśnieniem i prędkością w strumieniu płynu nieściśliwego (rozszerzonego obecnie na płyny ściśliwe), jest dziełem D. Bernoulliego. Prawo to ogłosił on w pracy pt. *Hydrodynamika*.

Analityczne metody hydrodynamiki znalazły dalszy rozwój w pracach

znanego uczonego francuskiego Lagrange'a; dał on nową formę różniczkowym równaniom hydrodynamiki i rozwinął teorię potencjalnego ruchu płynu.

Wysunięte przez d'Alemberta zagadnienie teoretycznego obliczania oporu ciała, znajdującego się w potencjalnym (bezwirowym) przepływie płynu doskonałego, doprowadziło do nieoczekiwanego wyniku; okazało się, że opór równa się zeru.

Ten wynik nosi nazwę paradoksu d'Alemberta. Wymienione wyżej okoliczności doprowadziły do pewnego rodzaju impasu, w którym znalazła się teoria płynu doskonałego przy wyznaczaniu siły oporu.

Znacznie później znani niemieccy uczeni H. Helmholtz (1868 r.) i R. Kirchhoff (1896 r.) przeprowadzili nową próbę wykorzystania modelu płynu doskonałego do wyznaczenia oporu, podając zupełnie nowy schemat opływu ciała z oderwaniem strug.

Teoria ta została ulepszona w końcu zeszłego wieku przez prof. N. J. Żukowskiego, a na początku XX w. przez Levi—Civita i znalazła następnie szeroki rozwój w ZSRR w pracach akad. A. I. Niekrasowa, prof. N.S. Arżanikowa, prof. N.A. Slezkina, Miasnikowa, J. I. Sjekierż-Zjeńkowicza i innych.

Wśród poważniejszych prac XIX w. na temat kinematyki płynu doskonałego odgrywają szczególnie ważną rolę wspomniane wyżej prace Helmhotza i badania Rankine'a. Helmholtzowi zawdzięczamy stworzenie teorii wirowego ruchu płynu (1858 r), która znalazła poważne zastosowanie we współczesnej teorii płata i śmigła. Istotne rozwinięcie uzyskała teoria Helmholtza w znanej pracy prof. N.J. Żukowskiego *Kiniematika żidkowo tiela*. Zastosowania teorii wirów do stworzenia teorii płata i śmigła dokonał w Rosji N. J. Żukowski i S.A. Czapłygin oraz w Niemczech prof. Prandtl.

W 1862 roku Rankine dał podstawy teorii źródeł i upustów stosowanej obecnie do budowania potencjalnych przepływów dokoła profilów dowolnego kształtu. Teoria ta w późniejszych pracach Fuhrmana, Kármána i in. znalazła poważne zastosowanie praktyczne przy konstruowaniu obrysów okrętu, kadłuba samolotu, sterowca itd.

Konieczność uwzględniania w równaniach ruchu płynu istotnego czynnika fizycznego: lepkości płynu, doprowadziła w połowie XIX w. do stworzenia teorii ruchu płynu lepkiego. Opierając się na całym szeregu hipotez, francuski uczony Navier w 1826 r. wyprowadził po raz pierwszy równania różniczkowe ruchu cieczy lepkiej. Sławny hydrodynamik angielski Stokes w 1846 r. podał ścisłe wyprowadzenie tych równań i dlatego we współczesnej literaturze znane są one jako równania Naviera—Stokesa.

Ponieważ równania te są wyjątkowo skomplikowane, więc Stokesowi udało się za pomocą nich obliczyć tylko opór kuli (znajdującej się w strumieniu lepkiej cieczy), przy czym musiał on pominąć bezwładnościowe człony równań, tzn. dokonał on obliczenia w warunkach bardzo powolnego ruchu płynu.

Dopiero w początku XX w., wskutek wzrostu zainteresowania uczonych

zagadnieniami lotnictwa, tj. badaniami ruchu ciał w cieczy lepkiej przy stosunkowo dużych prędkościach, teoria tego rodzaju ruchu znacznie posunęła się naprzód. A mianowicie w 1904 r. prof. Prandtl stworzył teorię warstwy przyściennej; teoria ta stała się dużym wkładem do teorii obliczania oporu.

Szybki rozwój techniki w XIX w. sprzyjał nagromadzeniu się danych doświadczalnych. Nastąpił znaczny rozwój hydrauliki, a w szczególności rozwój doświadczalnych badań ruchu wody i innych płynów lepkich w rurach i kanałach. W związku z tym należy zatrzymać się na pracach dwóch wielkich uczonych: G. Poiseuille'a i O. Reynoldsa, którzy przeprowadzili szczegółowe badania ruchu płynu w rurach o małej średnicy. Z ich nazwiskami związane jest odkrycie dwóch rodzajów ruchu płynu lepkiego w rurach i kanałach: laminarnego i turbulentnego. Prace Reynoldsa dały początek teorii ruchu turbulentnego; teoria ta obecnie szeroko rozwinęła się i znalazła poważne zastosowanie w aerodynamice, hydraulice i meteorologii.

W końcu XIX w., a zwłaszcza w związku z lotami na specjalnych szybowcach niemieckiego badacza Otto Lilienthala i rosyjskiego eksperymentatora — szybownika S. S. Nieżdanowskiego, zaczęły rozwijać się doświadczalne metody badania oporu powietrza. Doświadczenia przeprowadzano zarówno na kołowrocie Robina, jak również za pomocą bezpośrednich pomiarów sił działających na modele odmuchiwane przez naturalny wiatr.

W dziewięćdziesiątych latach zeszłego stulecia powstała nowa metoda badania oddziaływania strumienia powietrza na opływane ciało; a mianowicie badanie ciał w tunelach aerodynamicznych, stosowane obecnie nie tylko w odniesieniu do modeli samolotów i ich poszczególnych części, ale również do rzeczywistych samolotów, skrzydeł, kadłubów itd.

Pierwszy tunel aerodynamiczny został zbudowany w Rosji w 1890 r. przez K.E. Ciołkowskiego, a następnie przez N.J. Żukowskiego na Uniwersytecie Moskiewskim (1902 r.) i Instytucie Badawczym w Kuczino (1906 r.). Za granicą pierwszy tunel aerodynamiczny został zbudowany przez La Coura w Danii (1890 r.), a następnie przez Philipsa (1894 r.) w Anglii; Renarda (1896 r.) we Francji. Nie zatrzymując się specjalnie nad rozpatrzeniem zasady pracy tuneli aerodynamicznych i ich rodzajów, należy jednakże zwrócić uwagę na to, że obecnie ten rodzaj badań na tyle się rozwinął i udoskonalił, że metody badań aerodynamicznych w tunelach stanowią osobny rozdział aerodynamiki, nazywany aerodynamiką doświadczalną.

Zagadnieniami żeglugi powietrznej i lotnictwa zajmował się w drugiej połowie XIX wieku rosyjski akademik M.A. Rykaczew, który przeprowadził szereg doświadczeń dotyczących siły nośnej śmigła. W artykule *Pierwyje opyty nad podjomnoj siloj winta, wraszczajemowo w wozduchie* opublikowanym w r. 1871, opracowana została metoda określania siły nośnej wirującego śmigła.

Duży wpływ na rozwój rosyjskiego lotnictwa wywarł genialny uczony

Rolę Żukowskiego, jako jednego z największych uczonych i inżynierów, dobrze określił jego uczeń oraz najbliższy przyjaciel Czapłygin w mowie poświęconej pamięci Żukowskiego: „Profesor Żukowski przebył olbrzymią drogę. Jego świetlana i potężna osobowość łączyła w sobie dużą wiedzę zarówno matematyczną, jak i inżynierską. Stanowił on najlepsze połączenie nauki i techniki — uosabiał sobą nieomal uniwersytet".

Poczynając od ostatniego dziesięciolecia XIX w. wnikliwa twórcza myśl tego wspaniałego uczonego rosyjskiego skierowała się ku całkowicie nowej, zaledwie powstającej, lecz rokującej olbrzymie perspektywy rozwojowe, technice lotniczej.

W tym czasie wielu czołowych rosyjskich wynalazców i uczonych osiąga poważne wyniki w dziedzinie lotnictwa.

Pierwszy w świecie lot na samolocie konstrukcji Aleksandra F. Możajskiego stał się rzeczywistością. Opublikowane zostały oryginalne doświadczenia Mendelejewa z dziedziny żeglugi powietrznej. Utalentowany badacz S. S. Nieżdanowski przeprowadził szereg doświadczeń ze skrzynkowymi latawcami i szybowcami; doświadczenia te pod wieloma względami wyprzedziły wyniki osiągnięte przez szybownika niemieckiego Otto Lilienthala i innych.

Aerodynamika jako teoretyczna podstawa lotnictwa staje się ulubioną dziedziną badań N. J. Żukowskiego.

Dzięki swym pracom w tej dziedzinie Żukowski stał się założycielem rosyjskiej szkoły aerodynamików.

W latach 90-tych ubiegłego stulecia Żukowski — ten rzecznik i organizator we wszystkich dziedzinach żeglugi powietrznej — pracuje intensywnie nad zagadnieniem lotu, bada lot szybowy ptaków oraz szybowców. Bierze udział w międzynarodowych kongresach, organizuje w Rosji zjazdy lotnicze, wygłasza odczyty w różnych stowarzyszeniach i miastach rosyjskich. W okresie tym Żukowski napisał szereg prac, m. in. *K tieorji letanija* (1890), *O parienji ptic* (1892), *O najwygodniejszem ugle nakłona aeropłana* (1897). W pracy pt. *O parienji ptic* Żukowski omówił zagadnienie lotu ślizgowego oraz udowodnił możliwość wykonania pętli, którą po 22 latach wykonał znany pilot rosyjski P. N. Niestierow. „Ta właśnie praca Żukowskiego, wyprzedzająca znacznie swoje czasy, stała się później podstawą całej dynamiki lotu ślizgowego, i wówczas dopiero została należycie oceniona" (akademik L. S. Lejbienson).

W okresie tym mechanika teoretyczna nie potrafiła wyjaśnić zjawiska siły nośnej działającej na skrzydło samolotu. Płatowce budowano wówczas na ślepo, nie posługując się odpowiednimi obliczeniami aerodynamicznymi.

W latach 1905÷1910 ukazały się doniosłe prace Żukowskiego, w których wyjaśnił on po raz pierwszy zjawisko powstawania siły nośnej utrzymujące lecący samolot w powietrzu. W roku 1905 Żukowski przedstawia w Moskiewskim Towarzystwie Matematycznym swoje słynne twierdzenie o związku

rosyjski Dymitr I. Mendelejew (1834—1907), poświęcając wiele swych prac zagadnieniom aerodynamiki.

W roku 1875 Mendelejew postanowił zbadać górne warstwy atmosfery za pomocą balonu stratosferycznego z kabiną ciśnieniową i 7 sierpnia 1878 wzniósł się sam na tym balonie.

W roku 1888 pisał on w jednym ze swych listów: „istnieją i będą istniały dwa rodzaje żeglugi powietrznej: na aerostatach i na aerodynach". Mendelejew przewidział więc możliwość lotu maszyn cięższych od powietrza. „Ten rodzaj żeglugi powietrznej — mówił — wskazuje sama przyroda, gdyż ptak jest cięższy od powietrza, jest zatem aerodyną". Myśl opanowania oceanu powietrznego skierowała uwagę Mendelejewa na zagadnienie oporu powietrza. Poświęcona temu problemowi praca pt. *O soprotiwlenji żidkostiej i wozduchoplawanji* jest szczególnie interesująca. W pracy tej Mendelejew dał nie tylko głęboką analizę krytyczną istniejących teorii oporu, lecz wskazał również znaczenie lepkości przy określaniu oporu tarcia ciał o dobrych kształtach opływowych. Wielki aerodynamik rosyjski, profesor N. J. Żukowski, oceniając wysoko tę pracę, pisał: „literatura rosyjska zawdzięcza mu podstawową monografię o oporze płynów, która może do dziś stanowić podstawową wytyczną dla osób zajmujących się budową okrętów, żeglugą powietrzną lub balistyką".

Z inicjatywy Mendelejewa w grudniu 1880 r. powstał w Rosyjskim Towarzystwie Technicznym wydział żeglugi powietrznej.

D. I. Mendelejew okazywał dużą pomoc rosyjskim wynalazcom z dziedziny żeglugi powietrznej i lotnictwa, m. in. Aleksandrowi F. Możajskiemu i Konstantemu E. Ciołkowskiemu.

W roku 1877 Mendelejew udzielił poparcia pierwszemu wynalazcy samolotu A. F. Możajskiemu, zaś w r. 1890 przedłożył w Rosyjskim Towarzystwie Technicznym projekt całkowicie metalowego sterowca K. E. Ciołkowskiego, którego prace miały duże znaczenie dla rozwoju współczesnej techniki w zakresie napędów odrzutowych.

§ 2. Rola N.J. Żukowskiego i S.A. Czapłygina w rozwoju współczesnej aerodynamiki

Powstanie i rozwój aerodynamiki rosyjskiej łączą się z imionami jej twórców, należących do grona największych rosyjskich uczonych, koryfeuszy nauki rosyjskiej — N. J. Żukowskiego i S. A. Czapłygina.

Genialny uczony, N. J. Żukowski, wzbogacił naukę rosyjską swymi podstawowymi badaniami w dziedzinie matematyki, mechaniki teoretycznej i stosowanej, astronomii oraz hydro- i aeromechaniki.

Znamienną cechą badań naukowych tego wielkiego rosyjskiego uczonego stanowiło ścisłe połączenie teorii z praktyką inżynierską.

która otwarła przed nim nieograniczone możliwości twórcze. Mimo podeszłego wieku Żukowski przystępuje z dużym zapałem do organizacji prac naukowo-badawczych w zakresie lotnictwa w młodym państwie radzieckim oraz do kształcenia naukowych i inżynierskich kadr lotniczych.

Zbrojna interwencja państw kapitalistycznych, skierowana w 1918 roku przeciwko młodej Republice Radzieckiej, wymagała intensywnej pracy w celu wzmocnienia potęgi Armii Czerwonej oraz jej wojskowych sił powietrznych.

Przeprowadzane w tym czasie prace badawcze z zakresu aerodynamiki samolotu, silników, wytrzymałości konstrukcji lotniczych, oraz poszukiwanie dla tych konstrukcji nowych kształtów — wszystkie te prace nie były zorganizowane i nie miały odpowiedniej bazy doświadczalnej. Zaistniała więc konieczność stworzenia potężnej placówki doświadczalnej dla prowadzenia badań w dziedzinie techniki lotniczej oraz skoordynowania tych badań w jednym ośrodku naukowo-badawczym.

Zgodnie z inicjatywą Lenina, Żukowski wraz z gronem swych uczniów przystąpił w 1918 r. do organizowania Centralnego Instytutu Hydroaerodynamicznego (ЦАГИ). Instytut ten, nazwany obecnie imieniem wielkiego uczonego rosyjskiego N.J. Żukowskiego, wniósł bezcenny wkład do rozwoju radzieckiej techniki lotnicze

Zasługa Żukowskiego jest również olbrzymia, jeśli idzie o stworzenie lotniczych kadr inżynierskich dla radzieckiej floty powietrznej.

W roku 1919, podczas największego nasilenia wojny domowej, Lenin poparł propozycję Żukowskiego zorganizowania w Moskwie Instytutu Inżynierów Floty Powietrznej. Rektorem tego Instytutu został mianowany Żukowski. Duże zapotrzebowanie rozwijającego się lotnictwa radzieckiego na inżynierów w zakresie eksploatacji spowodowało przekształcenie w r. 1922 Instytutu w Akademię wojskowo-lotniczą, która dziś nazwana jest imieniem jej organizatora, prof. Żukowskiego.

29 sierpnia 1920 r. minęło 50 lat od czasu rozpoczęcia przez Żukowskiego działalności naukowej i pedagogicznej. Jubileusz sławnego uczonego rosyjskiego, wybitnego organizatora lotnictwa rosyjskiego, wyróżniony został przez specjalną uchwałę Rady Komisarzy Ludowych.

W powyższej uchwale Lenin nazwał Żukowskiego „ojcem lotnictwa rosyjskiego", podkreślając w ten sposób wybitną rolę, jaką uczony ten odegrał w stworzeniu teoretycznych podstaw lotnictwa i naukowego ośrodka radzieckiej floty powietrznej oraz w przygotowaniu kadr pierwszych lotników rosyjskich i pierwszych inżynierów lotniczych.

Do powstania i rozwoju rosyjskiej aerodynamiki przyczynił się również w olbrzymim stopniu akademik Sergiusz A. Czapłygin.

Czapłygin był w zakresie lotnictwa jednym z najpoważniejszych teoretyków, jednym z twórców współczesnej teoretycznej aerodynamiki i dynamiki gazów.

Wydana w r. 1902 praca Czapłygina *O gazowych strujach*, odegrała olbrzymią

zachodzącym pomiędzy siłą nośną a cyrkulacją. Odkrycie to uczyniło nazwisko Żukowskiego nieśmiertelnym.

W latach 1912÷1918 powstaje jego teoria śruby okrętowej, rozwiązująca całkowicie zagadnienie, którego w ciągu dziesięcioleci nie mogli rozwiązać empirycy i teoretycy całego świata. Była to jedna z najbardziej wybitnych prac XX stulecia z zakresu hydrodynamiki.

W następnych swych pracach: *Dinamika aeroplanow w elemientarnom izłożenji* (1916), *Aerodinamiczeskij rasczot aeroplanow* (1917), *Dinamiczeskij mietod issledowanja prodolnoj ustojcziwosti aeroplana* (1920) i in. Żukowski stworzył podstawy obliczeń aerodynamicznych oraz dynamiki lotu, które zostały później opracowane przez jego najbliższych uczniów — akademika B.N. Jurjewa, prof. W.P. Wietczinkina oraz profesorów W. S. Pysznowa, A.N. Żurawczenko, I.W. Ostosławskiego, W.N. Matwiejewa, W.S. Wiedrowa, S. G. Kozłowa i innych.

Najcenniejszy wkład do literatury światowej z zakresu aerodynamiki stanowi wydany w r. 1912 kurs wykładów Żukowskiego *Tieorieticzieskije osnowy wozduchopławanja*; wykłady te były w ciągu wielu lat podstawową lekturą każdego aerodynamika.

Żukowski był twórcą nie tylko teoretycznych podstaw lotnictwa. Z imieniem jego łączy się powstanie i rozwój całego lotnictwa rosyjskiego. Opracował on metody doświadczalnych badań aerodynamicznych, skonstruował aerodynamiczne przyrządy pomiarowe, a w r. 1902 stworzył przy Uniwersytecie Moskiewskim pierwsze w Rosji laboratorium aerodynamiczne. Po kilku latach buduje w Moskiewskiej Wyższej Szkole Technicznej doskonałe, jak na owe czasy, laboratorium aerodynamiczne, które odegrało wielką rolę rozwoju lotnictwa rosyjskiego, a także laboratorium w Kuczino. Wykładając podstawy lotu oraz kierując w laboratoriach aerodynamicznych pracami doświadczalnymi, Żukowski stworzył kadry uczonych teoretyków, uzdolnionych badaczy i konstruktorów.

W roku 1909 powstało kółko naukowe, którego działalność i prace były gorąco popierane przez Żukowskiego.

Młodzież zgrupowana wokół Żukowskiego w M. W.S. T. na Uniwersytecie Moskiewskim zaczęła opracowywać zagadnienia aerodynamiki zarówno teoretycznej, jak i doświadczalnej, budować tunele aerodynamiczne oraz przyrządy, projektować maszyny latające itp.

Spośród członków tego kółka wywodzą się znani aerodynamicy — akademik B.N. Jurjew, profesor W.P. Wietczinkin, konstruktorzy lotniczy, Bohaterowie Pracy Socjalistycznej, akad. A.N. Tupolew i A.A. Archangielski, znani działacze lotnictwa akad. B.S. Stieczkin, profesorowie G.Ch. Sabinin, G.M. Musinianc, K. A. Uszakow i inni.

Syn wielkiego narodu rosyjskiego, prawdziwy patriota, N. J. Żukowski powitał entuzjastycznie Wielką Październikową Rewolucję Socjalistyczną,

rolę w rozwoju dynamiki gazów. Należy tu zaznaczyć, że zagadnienia te nie miały wówczas tak wielkiego znaczenia jak obecnie — w okresie niezwykłego rozwoju lotnictwa odrzutowego.

Stosując w tej pracy nową metodę badania przepływu gazów, Czapłygin doszedł do niezwykle oryginalnych i ważnych wyników. Przekształcił on nieliniowe różniczkowe równania ruchu płaskiego przepływu gazu na liniowe. Po opracowaniu metody całkowania tych równań Czapłygin zastosował ją do zagadnień wypływu gazu oraz do wyznaczenia ciśnień wywieranych przez strumień gazu na płytkę. Metoda umożliwiająca obliczanie poddźwiękowych płaskich przepływów gazu wyprzedza znacznie prace zagraniczne z zakresu dynamiki gazów; jest ona zaliczana do najwybitniejszych prac XX stulecia w tej dziedzinie.

Dopiero w okresie pierwszych pięciolatek, zapewniających wspaniały rozwój radzieckiej wiedzy i techniki lotniczej, powyższa praca została obszernie naświetlona zyskując olbrzymie zastosowanie praktyczne. Stała się ona podstawą nowej gałęzi aerodynamiki — dynamiki gazów.

„Dynamika gazów, ta nowa gałąź aerodynamiki, stworzona przez nieżyjącego już dziś ucznia Żukowskiego, słynnego uczonego rosyjskiego, akademika S. Czapłygina—mówi L.S. Lejbienson—stanowi nowe, wspaniałe osiągnięcie nauki radzieckiej, wywodzące się ze szkoły Żukowskiego".

Prace Czapłygina w zakresie aerodynamiki mają taką wartość i posunęły naprzód tę dziedzinę wiedzy tak dalece, że jest on zupełnie słusznie, na równi ze swym nauczycielem Żukowskim, uważany za jednego z twórców teoretycznych podstaw lotnictwa.

Począwszy od r. 1910, tzn. od chwili ukazania się pierwszej podstawowej pracy Czapłygina z zakresu aerodynamiki *O dawlenji płosko-paralelnowo potoka na priegrażdajuszczije tieła*, poświęca się on całkowicie zagadnieniom aerodynamicznym i prace jego wiążą się ściśle z rozwojem lotnictwa rosyjskiego.

W pracy tej Czapłygin stwarza ogólną metodę określania wypadkowej siły aerodynamicznej i momentu, działających na ciało w przepływie płaskim. Na podstawie tej metody opracował on teorię płaskiego opływu płata oraz rozwiązał szereg innych zagadnień.

O głębokiej naukowej wnikliwości Czapłygina świadczą jego prace dotyczące płatów szczelinowych. Na długo jeszcze przed wprowadzeniem podobnych płatów, Czapłygin przewidział możliwość ich praktycznego zastosowania. W roku 1914, w pracy pt. *Tieorja rieszotczatowo kryła* podał on metodę badania opływu palisady, przedstawiającej łopatki turbiny a składającej się z równoległych płytek o skończonej szerokości, zaś w r. 1921 w pracy *Schiematiczeskaja tieorja razrieznowo kryła*, poświęconej pamięci N.J. Żukowskiego, podał teorię takiego płata.

W roku 1922 ukazuje się jedna z największych prac Czapłygina — *K obszczej tieorji kryła monoplana*.

W pracy tej Czapłygin odkrywa szereg aerodynamicznych właściwości płata oraz ustala kryterium jego stateczności. Powyższa teoria ma obecnie szerokie zastosowanie w praktyce lotniczej.

Jedno z ważniejszych zagadnień aerodynamiki stanowi zagadnienie nieustalonego ruchu płata. W roku 1926 ukazuje się praca Czapłygina *O wlijanji płosko-paralelnowo potoka wozducha na dwiżuszczejesja w niom cilindriczeskoje kryło* — poświęcona temu niezwykle trudnemu problemowi. Autor podaje w niej wyrażenie na siłę nośną i moment w zastosowaniu do przypadku, gdy płat porusza się nie tylko ruchem postępowym, lecz podlega również pewnemu ruchowi obrotowemu; teoria ta zastosowana jest do płata o profilu eliptycznym oraz do płata o profilu w kształcie łuku okręgu.

Wspólna praca Czapłygina i prof. N.S. Arżanikowa pt. *K tieorji otkrylka i zakrylka*, poświęcona mechanizacji skrzydła, stanowi nową próbę teoretycznego wyjaśnienia roli lotki i klapy szczelinowej. Została ona oparta na badaniach opływu profilu prostoliniowego z odchyloną o różne kąty częścią końcową. Praca zawiera wzór na cyrkulację i siłę nośną w zależności od kąta odchylenia końcowej części profilu.

Krótko przed śmiercią akademika Czapłygina (1942) opublikowana została jego praca *O nowych tieorieticzeskich profilach tipa SACz*. Autor podał w niej nową serię profilów teoretycznych odpowiadających wymaganiom stawianym skrzydłom samolotów, przeznaczonych do lotów z dużymi prędkościami.

W przedmowie do pracy *Izbrannyje raboty S. A. Czapłygina po tieorii kryła* S. A. Christjanowicz mówi: „S. A. Czapłygin nie ograniczył się do stworzenia podstaw teorii skrzydła; w ciągu dwudziestu lat opracowywał on krok po kroku skończoną teorię tego zagadnienia. W pracach jego rozwiązane zostały wszystkie najistotniejsze kwestie matematycznej teorii profilu płata lotniczego oraz palisady profilów, tzn. podstawy teorii skrzydła oraz maszyn wirnikowych.

Omawiając znaczenie prac Czapłygina w zakresie aerodynamiki, należy oddzielnie podkreślić następujący szczegół.

W czasie pierwszej wojny światowej szereg laboratoriów prowadził badania modeli samolotów, sterowców itp. Zebrany materiał doświadczalny umożliwił niemieckiemu uczonemu L. Prandtlowi stworzenie w r. 1918 teorii skrzydła o skończonej rozpiętości.

Obecnie stwierdzono, że S.A. Czapłygin już w 1910 r. doszedł do całkowicie zakończonych wyobrażeń fizycznych o wirowym układzie płata skończonej rozpiętości, a 20 października 1913 r., a więc na pięć lat przed Prandtlem, wygłosił on na zebraniu Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego odczyt, w którym podał otrzymane przezeń wzory na siłę nośną oraz indukowany opór płata o skończonej rozpiętości. Z uwagi jednak na to, że otrzymane przez Czapłygina wyniki nie zostały we właściwym czasie potwierdzone na drodze doświadczalnej — praca jego nie została wydana drukiem.

W tymże czasie N. J. Żukowski stworzył wirową teorię śmigła, zawierającą jako szczególny przypadek wirową teorię płata o skończonej rozpiętości. Ponieważ ani Czapłygin, ani Żukowski nie wydali specjalnych publikacji na temat teorii skrzydła o skończonej rozpiętości, więc uczeni spoza ZSRR mogli uważać, że priorytet stworzenia teorii płata o skończonej rozpiętości należy do niemieckiego aerodynamika prof. L. Prandtla, który swoją teorię opublikował w roku 1918.

Charakteryzując całokształt prac Czapłygina, należy podkreślić wyjątkową ich monumentalność; przejawia się w nich olbrzymia siła twórcza tego potężnego uczonego. Potrafił on skomplikowane metody matematyczne stosować z wyjątkową wirtuozerią i kunsztem.

Akademik Kryłow wskazuje, że „prace Czapłygina należy traktować jako prace klasyczne, na których można i trzeba się uczyć".

Wyróżniającą cechę twórczości Czapłygina stanowi ogólny charakter podawanych przez niego metod, co pozwoliło zarówno jemu, jak i stworzonej przez niego szkole uczonych (do której należeli uczeni tak poważni akademicy, jak M.W. Kiełdysz, M. A. Ławrientjew, L.I. Siedow, S.A. Christjanowicz i inni) posunąć znacznie naprzód opracowanie zagadnień aerodynamiki współczesnej.

Wielka Październikowa Rewolucja Socjalistyczna otwarła przed Czapłyginem olbrzymie możliwości pod względem wykorzystania jego twórczych i organizacyjnych uzdolnień. Poczynając od r. 1918 nazwisko jego łączy się ściśle z rozwojem lotnictwa radzieckiego oraz działalnością przodującego instytutu naukowo-badawczego ЦАГИ im. prof. N.J. Żukowskiego. W roku 1920 Czapłygin staje na czele ЦАГИ w charakterze przewodniczącego kolegium ЦАГИ, kierując następnie całą pracą naukową tego instytutu.

§ 3. Przodująca rola uczonych radzieckich w rozwoju aerodynamiki

Przed rokiem 1917 ojczyzna lotnictwa — Związek Radziecki — nie mógł pretendować do roli państwa przodującego w lotnictwie. Ekonomiczne zacofanie carskiej Rosji, antynarodowa polityka klas rządzących, dążenia caratu do zabezpieczenia wojskowych sił powietrznych Rosji za pomocą importowanego z zagranicy sprzętu — uniemożliwiały stworzenie rodzimego przemysłu lotniczego, hamowały inicjatywę twórczą najlepszych przedstawicieli rosyjskiej wiedzy lotniczej. Znane słowa Żukowskiego, wypowiedziane podczas przemówienia na XIII zjeździe przyrodoznawców i lekarzy rosyjskich (r. 1913), pozostały jedynie marzeniem. Powiedział on: „Proszę mi pozwolić wypowiedzieć życzenie... aby środki naszych laboratoriów aerodynamicznych odpowiadały potędze oraz siłom twórczym naszej Ojczyzny".

Dopiero Wielka Październikowa Rewolucja socjalistyczna spowodowała zasadniczy przełom w rozwoju lotnictwa rosyjskiego.

Pod kierownictwem komunistycznej partii, w latach pierwszych pięciolatek, nastąpił niebywały rozwój radzieckiego przemysłu lotniczego i ZSRR, ojczyzna lotnictwa, stał się potężnym państwem lotniczym.

Partia i Rząd ZSRR poświęcali zawsze i poświęcają wiele uwagi zarówno rozwojowi radzieckiej nauki i techniki lotniczej, jak również organizacji prac naukowo-badawczych w dziedzinie lotnictwa.

Liczny zespół radzieckich uczonych aerodynamików rozwija chlubne tradycje, stworzonej przez Żukowskiego i Czapłygina, rosyjskiej szkoły aerodynamików i prowadzi aktywną działalność we wszystkich kierunkach współczesnej aerodynamiki.

Liczne, mające wyjątkowe znaczenie, badania w zakresie teorii płata i śmigła, teorii oporu i warstwy przyściennej, flatteru oraz ruchu nieustalonego, zagadnienia aerodynamiki dużych prędkości itp., powstały w wyniku potrzeb radzieckiego przemysłu lotniczego.

Uczniowie i współpracownicy wielkich uczonych rosyjskich, M. Żukowskiego i S. Czapłygina, posunęli znacznie naprzód prace badawcze w dziedzinie aerodynamiki.

Jeden z uczniów Żukowskiego, prof. W.P. Wietczinkin, rozwinął wirową teorię śmigła. Wietczinkin zastosował do teorii śmigła wirowy schemat teorii skrzydła o skończonym wydłużeniu ze zmienną cyrkulacją wzdłuż łopaty i podał nową metodę obliczania śmigła.

Metody obliczania śmigieł zostały poważnie rozwinięte w znanych pracach akademika B.N. Jurjewa, prof. G.Ch. Sabinina i G.I. Kuźmina i innych. Teoria śmigła została rozwinięta w pracach teoretycznych akademika M.W. Kiełdysza oraz prof. prof. F.I. Frankla, N.N. Polachowa, D.W. Chalezowa i innych.

Przy opracowywaniu twórczości Żukowskiego z zakresu dynamiki lotu, oraz twórczości Ciołkowskiego w zakresie teorii rakiet, duże zasługi ma W.P. Wietczinkin.

Jeden z najbliższych uczniów Żukowskiego, wybitny uczony, akademik B.N. Jurjew znacznie udoskonalił teorię skrzydła o skończonym wydłużeniu, opracował inżynieryjne metody obliczania śmigła oraz przeprowadził poważne badania w zakresie teorii i obliczania śmigłowców. Skonstruowany przez Jurjewa śmigłowiec z automatem do zmiany kąta łopat śmigła jest pierwszym tego rodzaju aparatem.

B.N. Jurjew napisał szereg podręczników z dziedziny aerodynamiki doświadczalnej i śmigieł; na podręcznikach tych wychowały się pokolenia radzieckich aerodynamików i inżynierów lotniczych.

Cykl poważnych badań teoretycznych w dziedzinie hydro- i aerodynamiki jest dziełem ucznia Żukowskiego, akademika A.I. Niekrasowa.

Bardzo cenny wkład do hydrodynamiki współczesnej stanowią prace Niekrasowa poświęcone teorii rozchodzenia się fal na powierzchni cieczy ciężkich; opracował on nową oryginalną metodę, opartą na zastosowaniu równań różniczkowych. Jego teoria fal została następnie rozwinięta przez akademików N. J. Koczina, M.W. Kiełdysza, członka-korespondenta Akademii Nauk ZSRR L.I. Srietienskiego i in.

Praca Niekrasowa pt. *Diffuzja wichria* poswięcona jest skomplikowanemu zagadnieniu rozchodzenia się wirów w płynie lepkim. Cenny wkład do teorii nieustalonego ruchu płata wniosła monografia Niekrasowa *Tieoria kryła w niestancjonarnom potokie*, wydana w r. 1947 przez Akademię Nauk ZSRR.

Jeden z najbliższych uczniów i współpracowników Żukowskiego, akademik L.S. Lejbienson, brał udział przy projektowaniu i budowie laboratorium aerodynamicznego w Kuczino. Przeprowadził on szereg badań zarówno w dziedzinie warstwy przyściennej, jak i w dziedzinie aerodynamiki dużych prędkości. Prace Lejbiensona poświęcone teorii sprężystości oraz hydraulice przyczyniły się szczególnie do rozwoju wiedzy radzieckiej. Hydraulika płynów lepkich, stanowiąca teoretyczną podstawę do obliczeń przewodów naftowych i gazowych została w Związku Radzieckim oparta przeważnie na pracach akademika Lejbiensona oraz stworzonej przezeń szkoły naukowej.

Charakteryzując pokrótce podstawowe kierunki działalności aerodynamików radzieckich, podkreślić należy duże osiągnięcia radzieckiej szkoły aerodynamików w dziedzinie teorii płata. Metody Żukowskiego i Czapłygina dały trwałe podstawy teorii skrzydła w przepływie płaskim i doprowadziły do powstania ważnych z punktu widzenia praktycznego profilów płata lotniczego. Dalsze rozwinięcie tej teorii wiąże się z imieniem ucznia Żukowskiego, członka-korespondenta Akademii Nauk ZSRR W.W. Gołubiewa. Prace jego zarówno w dziedzinie matematyki, jak i w zakresie teorii opływu multiplana gruntownie pogłębiły twórczość Czapłygina i jego uczni. Gołubiew był pierwszym, który uzasadnił na drodze teoretycznej możliwości uzyskania większej siły nośnej przez regulowanie warstwy przyściennej oraz mechanizację skrzydła. Zbadał on teoretycznie rozmaite rodzaje mechanizacji skrzydła, z odsysaniem i zdmuchiwaniem warstwy przyściennej włącznie. Gołubiew przeprowadził również badania w zakresie skrzydeł ruchomych („wiosłujących"), w zakresie teorii tworzenia się wirów oraz teorii płata o małym wydłużeniu.

Poważne prace dotyczące teorii płata należą również do akademika M.W. Kiełdysza oraz profesorów S.G. Nużina, G.G. Tumaszewa, W.W. Strumińskiego, J.M. Sjeriebrijskiego i innych.

W ZSRR zostało opublikowanych wiele prac dotyczących płata o skończonej rozpiętości. W ten sposób w dziedzinę inżynierskich sposobów obliczania płatów prostokątnych (nie skośnych) poważny wkład wnieśli akad. B.N. Jurjew, prof. G.F. Burago, prof. S.G. Nużin, A.B. Risberg i inni. Teoria płata skośnego i skośnie opływanego była podana przez akad A.A. Dorodnicyna, W.W. Strumińskiego. Inżynierskie sposoby obliczania takich skrzydeł zostały opracowane przez pracownika Kazańskiego Instytutu Lotniczego N.J. Lissa oraz innych radzieckich autorów. Teorię płatów z tarczami na końcach opracował J.M. Kurickies.

Jednym z poważniejszych problemów aerodynamiki jest teoria przepływu nieustalonego. W tej dziedzinie oddzielną pozycję stanowi zagadnienie badań drgań skrzydła oraz usterzenia — tzw. zagadnienie flatteru. Twórcą teorii flatteru i całej szkoły pracującej nad tymi zagadnieniami jest jeden z wybitnych uczonych radzieckich, akademik M.W. Kiełdysz.

Prace Kiełdysza oraz badania akad. L.I. Siedowa, N.J. Koczina oraz innych, związane z przepływem nieustalonym, wniosły niezwykle dużo do tej wyjątkowo trudnej dziedziny aerodynamiki współczesnej.

Wyjątkowe znaczenie — teoretyczne i praktyczne — mają dla lotnictwa badania aerodynamików radzieckich w dziedzinie zagadnień oporu, oparte na teorii warstwy przyściennej. Spośród nich zaszczytne miejsce zajmują prace prof. L.G. Łojcjanskiego, który stworzył nowe metody obliczania warstwy przyściennej. Cenne badania w zakresie turbulentnej warstwy przyściennej oraz wpływu szorstkości na opór przeprowadzili prof. prof. K.K. Fiediajewski, A.P. Mielnikow i inni. Poważny wkład do aerodynamiki stosowanej wniosły badania, związane z teorią profilów laminarnych, profesorów I.W. Ostosławskiego i K.K. Fiediajewskiego.

Duży wkład do nauki o warstwie przyściennej przy dużych prędkościach wnieśli uczeni radzieccy A.A. Dorodnicyn, Ł.G. Łojcjanski i inni.

W wyniku prac radzieckiej szkoły aerodynamików teoria warstwy przyściennej została w Związku Radzieckim wyjątkowo rozwinięta.

Inny rodzaj oporu, polegający na tworzeniu się wirów za opływanym ciałem, tzw. opór wirowy, został zbadany przez prof. A.A. Kosmodiemjanskiego, który obliczył opór kołowego i eliptycznego walca oraz profilów Żukowskiego i Czapłygina.

Wyjątkowo poważne badania, szczególnie w ciągu ostatnich lat, przeprowadziła radziecka szkoła dynamiki gazów.

W czasach, kiedy prędkość lotu nie przekraczała 500 km/godz, można było nie uwzględniać ściśliwości powietrza, ponieważ nie wpływała ona w sposób zasadniczy na aerodynamiczne obliczenia samolotu. Ze wzrostem prędkości lotu uwzględnianie ściśliwości stało się konieczne, co z kolei pociągnęło za sobą konieczność stworzenia metod umożliwiających badanie ruchu powietrza przy dużych prędkościach, a więc stworzenia aerodynamiki dużych prędkości, zwanej inaczej dynamiką gazów.

Zagadnieniem ściśliwości przy opływie profilów lotniczych zajmowali się również wybitni uczeni zagraniczni. Uczony niemiecki prof. Prandtl oraz angielski prof. Glauert stworzyli przybliżoną teorię skrzydła w przepływie pod-

dźwiękowym. W wyniku doświadczeń okazało się, że jest ona słuszna jedynie w przypadku profilów bardzo cienkich i przy bardzo małych kątach natarcia.

W roku 1940 ukazały się wyniki badań akademika S. A. Christjanowicza *Obtiekanje tieł gazom pri bolszich dozwukowych skorostiach*, rozwiązujących to zagadnienie w sposób wyczerpujący. Metoda Christjanowicza umożliwiła rozstrzygnięcie szeregu kwestii związanych z konstrukcjami lotniczymi. Na jej podstawie obliczono krzywe rozkładu ciśnień na profilach z uwzględnieniem ściśliwości, określono tzw. krytyczne liczby Macha, przy których powstają na profilu lokalne obszary naddźwiękowe itp. Za cykl prac w zakresie dynamiki gazów przyznano Christjanowiczowi w r. 1942 nagrodę stalinowską.

Dalszy wzrost prędkości oraz rozwój lotnictwa odrzutowego wymagały przestudiowania wielu zagadnień związanych z naddźwiękowym opływem ciał, a także zgłębienia tzw. zagadnienia mieszanego, odnoszącego się do przypadku, gdy na opływanym ciele występują jednocześnie obszary prędkości nad- i poddźwiękowych. Aerodynamicy radzieccy rozwiązują te zadania wszechstronnie i skutecznie. Poważne osiągnięcia w tym zakresie przynoszą dalsze prace Christjanowicza oraz akad. A. A. Dorodnicyna, prof. A A. Nikolskiego, G. I. Taganowa, J. A. Krasilszczikowej, W. W. Tatarienczika i in.

J. A. Krasilszczikowa, F. I. Frankl, L. A. Galin, S. W. Falkowicz, M. D. Chaskind i inni doszli w swych pracach do ważnych wyników w przypadku naddźwiękowego opływu płata lotniczego.

Z powodu ograniczonego rozmiaru książki nie został dokonany przegląd prac uczonych nieradzieckich za ostatni okres rozwoju współczesnej aerodynamiki. Zainteresowanych tym zagadnieniem można odesłać do książki pt. „Współczesny stan aerodynamiki dużych prędkości", która ukazała się pod ogólną redakcją L. Howartha. Książka ta została przetłumaczona na język rosyjski i wydana w 1955 r.

W oparciu o ogromne doświadczenia rosyjskiej szkoły aerodynamicznej Żukowskiego i Czapłygina aerodynamicy radzieccy prowadzą poważne badania w dziedzinie wiedzy lotniczej, stwarzając w ten sposób podstawy dla dalszego rozwoju i potęgi lotnictwa radzieckiego.

Rozdział II

PODSTAWOWE POJĘCIA HYDROAERODYNAMIKI

§ 1. Pojęcie płynu. Gęstość i ciężar właściwy

Ruch płynu jest znacznie bardziej skomplikowany niż ruch ciała sztywnego, ponieważ w ośrodku płynnym nie istnieją więzy sprężyste właściwe ciału sztywnemu.

Struktura płynu jest w swej istocie cząsteczkowa; znaczy to, że płyn składa się z dużej liczby oddzielnych cząsteczek poruszających się względem siebie z określonymi prędkościami. W celu zbadania praktycznych zagadnień wzajemnego oddziaływania na siebie ośrodka płynnego oraz znajdującego się w nim ciała sztywnego — stanowiących podstawowe zagadnienie hydroaerodynamiki — można jednak nie wnikać w cząsteczkową budowę płynu i rozpatrywać płyn jako ośrodek ciągły, pomijając istnienie obszarów nie wypełnionych płynem, występowanie ruchu cząsteczkowego i swobodnych dróg międzycząsteczkowych. To wspólne dla wszystkich objętych aerodynamiką rodzajów płynów założenie nazywane jest ***hipotezą ciągłości ośrodka płynnego***.

Założenie ciągłości jest nader użyteczne, umożliwia ono bowiem rozpatrywanie kinematycznych i dynamicznych parametrów przepływu poruszającego się płynu (prędkość, ciśnienia i in.) jako ciągłych funkcji pewnych argumentów (np. współrzędnych prostokątnych x, y, z oraz czasu t); umożliwia to wykorzystanie aparatu matematycznego opartego na funkcjach ciągłych.

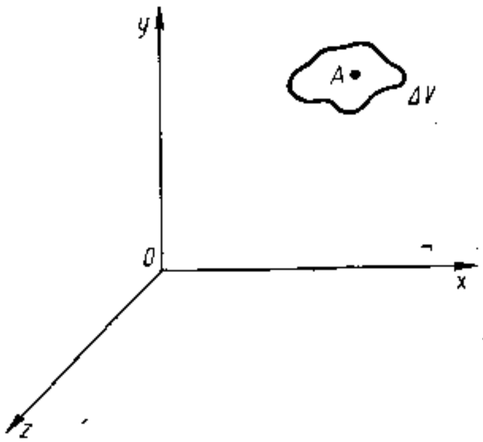
Wiadomo że w mechanice ciała sztywnego lub w mechanice układu ciał sztywnych pomijane są — z wyjątkiem szczególnych przypadków — fizyczne właściwości poruszającej się materii. W mechanice ciała płynnego natomiast uwzględnia się pewne właściwości fizyczne poruszającego się płynu, np. gęstość, lepkość, temperaturę itp.

Niezwykle ważną charakterystykę ośrodka płynnego stanowi g ę s t o ś ć określająca rozkład masy płynu w przestrzeni.

W celu określenia gęstości wyodrębnimy w płynie jakąś objętość ΔV (rys. 2.1) oraz oznaczymy masę tej objętości przez Δm. Stosunek $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ będziemy nazywali średnią gęstością płynu zawartego w objętości ΔV. Sprowadźmy obecnie

objętość ΔV do punktu A. Stosunek $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ będzie wówczas dążył do pewnej granicy[1] zwanej *gęstością w danym punkcie* i oznaczonej przez

$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{2.1}$$



2.1. Do określenia gęstości płynu w danym punkcie

Znajdźmy teraz wymiar gęstości w technicznym układzie jednostek:

$$[\varrho] = [\text{masa/objętość}] = \text{kG sek}^2/\text{m}^4.$$

Dla powietrza przy normalnym ciśnieniu (760 mm sł. rt.) i temperaturze $t = 15°C$ jest $\varrho = 0{,}125$ kG sek²/m⁴, dla wody zaś przy $t = 15°C$ jest $\varrho = 102$ kG sek²/m⁴.

Niech ciężar objętości ΔV równa się ΔG. Stosunek $\frac{\Delta G}{\Delta V}$ nazywa się średnim *ciężarem właściwym*, a granica[1] tego stosunku przy $\Delta V \to 0$ — *ciężarem właściwym w danym punkcie*; oznaczamy go przez

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V}. \tag{2.2}$$

W tablicy 2.1 podana jest w funkcji temperatury gęstość ϱ i ciężar właściwy γ powietrza przy ciśnieniu 760 mm sł. rt.

Tablica 2.1

Gęstość ϱ i ciężar właściwy γ powietrza przy ciśnieniu 760 mm sł.rt.

Temperatura °C	—20	—10	0	10	20	40	60	80	100
ϱ kG sek²/m⁴	0,142	0,137	0,132	0,127	0,123	0,114	0,108	0,101	0,096
γ kG/m³	1,39	1,34	1,29	1,24	1,20	1,12	1,06	0,99	0,94

Między gęstością a ciężarem właściwym zachodzi związek

$$\gamma = \varrho g. \tag{2.3}$$

Wiadomo bowiem że

$$\Delta G = g \Delta m,$$

skąd, dzieląc przez ΔV i przechodząc do granicy, otrzymamy związek (2.3). Jest rzeczą oczywistą, że wymiar ciężaru właściwego wyrazi się w sposób następujący:

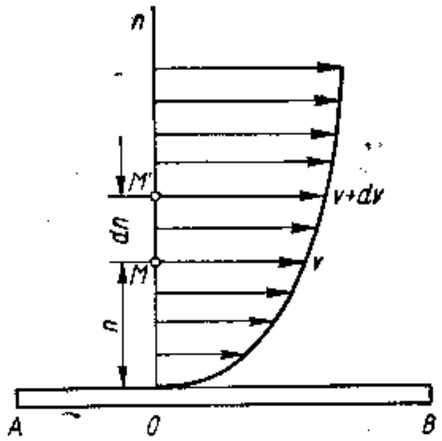
$$[\gamma] = [\text{ciężar/objętość}] = \text{kG/m}^3.$$

[1] Przy założeniu, że płyn jest ciągły (przyp. red.).

§ 2. Klasyfikacja płynów

Pod wpływem ciśnienia lub temperatury ciecze i gazy zmieniają swoją objętość w większym lub mniejszym stopniu. Zgodnie z tym odróżniamy płyny nieściśliwe (tzn. takie, których ściśliwość można zaniedbać) i ściśliwe lub sprężyste. Do pierwszych należy przede wszystkim woda, zmieniająca swą objętość przy ciśnieniu 100 atm jedynie o 0,5% objętości początkowej.

Przy rozwiązywaniu wielu zagadnień można w pierwszym przybliżeniu, rozpatrywać także powietrze jako płyn nieściśliwy. Badania wykazały jednak, że przy dużych prędkościach przepływu nie można już traktować powietrza jako płynu nieściśliwego i uwzględnianie jego ściśliwości staje się konieczne.



2.2. Przepływ płynu lepkiego wzdłuż płytki

Z matematycznego punktu widzenia zaniedbywanie ściśliwości zaciera różnicę pomiędzy cieczą a powietrzem; ustalone na tej podstawie prawa ruchu dają się więc jednakowo stosować zarówno do cieczy, jak i do powietrza. W związku z tym aerodynamika klasyczna, w której zaniedbuje się ściśliwość powietrza, jest często nazywana hydroaerodynamiką.

Właściwością każdego płynu rzeczywistego jest — oprócz ściśliwości — opór stawiany zewnętrznym siłom ścinającym. Lepkość płynu polega na występowaniu naprężeń stycznych. Im bardziej płyn jest lepki, tym większe są powstające w nim naprężenia styczne.

Rozwiązywanie zagadnień aerodynamiki z uwzględnieniem lepkości związane jest jednak często z dużymi trudnościami matematycznymi. Jednocześnie, w szeregu przypadków lepkość płynu nie odgrywa decydującej roli, można ją zatem pominąć. Dlatego też wygodnie jest posługiwać się uproszczonym modelem płynu rzeczywistego — tak zwanym płynem doskonałym. Pojęciem płynu doskonałego[1] określamy taki płyn wzorcowy, w którym nie występuje lepkość, tzn. że przy względnym poślizgu jego elementów nie powstają naprężenia styczne.

Nie wnikając w fizyczną naturę lepkości, będącej skutkiem cząsteczkowej budowy płynu, rozważymy na przykładzie pewnego przypadku szczególnego, jakie siły będą powstawały pod wpływem lepkości przy opływie ciała sztywnego oraz jakie zmiany przepływu wywołuje pojawienie się tych sił.

[1] Nie należy mylić tego pojęcia z pojęciem gazu doskonałego stosowanym w termodynamice (przyp. tłum.).

Niech strumień płynu lepkiego porusza się wzdłuż płytki AB (rys. 2.2). Gdyby płyn był doskonały, wszystkie jego elementy znajdujące się w danej chwili na normalnej On do płytki miałyby prędkość jednakową zarówno co do wielkości, jak i kierunku. W przypadku płynu rzeczywistego jego elementy, znajdujące się bezpośrednio na płytce, „przyklejają się" do niej pod wpływem cząsteczkowych sił adhezji, wskutek czego prędkość ich jest równa zeru.

W dużej odległości od płytki (w nieskończoności) płyn porusza się z pewną prędkością stałą. Wpływ lepkości powoduje powstanie tarcia wewnętrznego (naprężeń stycznych), co jest z kolei powodem zmniejszania się prędkości płynu wraz ze zmniejszaniem się odległości od płytki. W ten sposób, na skutek wpływu lepkości, każda warstwa płynu będzie miała inną prędkość.

Wielkość powstających w płynie lepkim naprężeń stycznych można wyznaczyć za pomocą podanego przez Newtona w r. 1687 prawa tarcia wewnętrznego. Według tego prawa naprężenia wywołane tarciem wewnętrznym w płynie zależą tylko od lepkości płynu i względnej prędkości poślizgu jednej jego warstwy względem drugiej. Wyraźmy to prawo analitycznie. Rozważmy w tym celu jakikolwiek punkt M leżący na normalnej On (rys. 2.2). Prędkość w tym punkcie oznaczmy przez v. Prędkość v będzie oczywiście zależała od współrzędnej n mierzonej wzdłuż normalnej, czyli $v = v(n)$.

Obierzmy na normalnej punkt M' znajdujący się w nieskończenie małej odległości dn od punktu M. W danym przypadku prędkość w punkcie M', którą oznaczymy przez v', można określić z dokładnością do małych pierwszego rzędu w następujący sposób:

$$v' = v(n + dn) = v(n) + \frac{\partial v}{\partial n} dn.$$

Jak z powyższego wyrażenia widać, prędkość w punkcie M' różni się od prędkości w punkcie M o wielkość $\frac{\partial v}{\partial n} dn$, stanowiącą względną prędkość poslizgu jednej warstwy względem drugiej. Tę względną prędkość poślizgu, od wielkości której zależy tarcie wewnętrzne, określa się wielkością pochodnej $\frac{\partial v}{\partial n}$ zwanej gradientem prędkości wzdłuż normalnej. Oznaczając przez τ siłę tarcia wewnętrznego odniesioną do jednostki powierzchni, można prawo Newtona dotyczące tarcia wewnętrznego wyrazić analitycznie w następującej postaci:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \tag{2.4}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności μ, zależny od rodzaju płynu i jego temperatury, nosi nazwę *dynamicznego współczynnika lepkości.*

Ze wzoru (2.4) łatwo jest określić wymiar dynamicznego współczynnika lepkości μ w układzie jednostek technicznych:

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{\frac{\partial v}{\partial n}}\right] = \frac{\mathrm{kG/m^2}}{1/\mathrm{sek}} = \frac{\mathrm{kG\ sek}}{\mathrm{m^2}}.$$

Obok dynamicznego współczynnika lepkości używa się często *kinematycznego współczynnika lepkości* ν, równego ilorazowi μ przez gęstość ϱ:

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}. \tag{2.5}$$

Wymiar kinematycznego współczynnika lepkości, który w technicznym układzie jednostek wyraża się przez:

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\varrho}\right] = \frac{\mathrm{kG\ sek/m^2}}{\mathrm{kG\ sek^2/m^4}} = \mathrm{m^2/sek},$$

ma charakter wyłącznie kinematyczny, dlatego też współczynnik ten nazywany jest kinematycznym współczynnikiem lepkości.

Jako jednostkę lepkości w układzie CGS przyjmuje się tzw. *poise*. Jeżeli do wzoru

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{\partial v}{\partial n}}$$

podstawimy wielkość τ, równą jednej dynie na centymetr kwadratowy, oraz $\frac{\partial v}{\partial n} = 1$ (o wymiarze 1/sek), tzn. jeżeli przyjmiemy, że przy zmianie wielkości n o 1 cm prędkość zmienia się o 1 cm/sek, wówczas lepkość będzie miała wartość 1 poise. Jak wiadomo,

$$1\ \mathrm{kG\ sek/m^2} = \frac{981\,000}{10\,000}\ \mathrm{dyna\ sek/cm^2} = 98{,}1\ \mathrm{dyna\ sek/cm^2} = 98{,}1\ \mathrm{poise}.$$

Dla powietrza przy $t = 15°\mathrm{C}$ liczbowe wartości współczynników lepkości wynoszą:

$$\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kG\ sek/m^2},$$

$$\nu = 1{,}45 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/sek}.$$

Dla wody przy $t = 15°\mathrm{C}$

$$\mu = 1{,}164 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kG\ sek/m^2},$$

$$\nu = 0{,}1145 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/sek}.$$

Porównując te wielkości, otrzymamy:

$$\frac{\nu_{\text{pow.}}}{\nu_{\text{wody}}} = \frac{1{,}45 \cdot 10^{-5}}{0{,}1145 \cdot 10^{-5}} = 12{,}7,$$

tzn. kinematyczny współczynnik lepkości powietrza jest 12,7 razy większy od kinematycznego współczynnika lepkości wody.

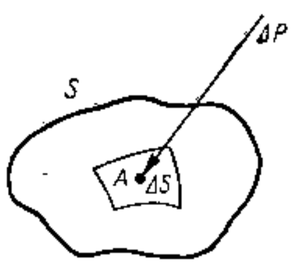
Lepkość powietrza zmienia się wraz z temperaturą według prawa liniowego wyrażającego się następującym wzorem:

$$\mu = (1{,}745 \cdot 10^{-6} + 5{,}03 \cdot 10^{-9}\, t)\ \text{kG sek/m}^2.$$

Należy zaznaczyć, że przy badaniu ruchu płynu jednoczesne uwzględnianie omówionych powyżej właściwości — lepkości i ściśliwości — stwarza wyjątkowe trudności matematyczne, w związku z czym zagadnienia ruchu płynów lepkich oraz ruchu płynów ściśliwych są przeważnie wyodrębnione jako oddzielne dyscypliny, m. in. ze względu na odmienność stosowanych metod. Badania ruchu płynów ściśliwych (doskonałych) tworzą obecnie oddzielną gałąź hydroaerodynamiki, zwaną dynamiką gazów.

§ 3. Pojęcie ciśnienia hydrodynamicznego w danym punkcie płynu

Wyodrębnijmy na powierzchni S rozpatrywanej objętości płynu (rys. 2.3) elementarne pole ΔS. Niech na ten wycinek działa wypadkowa siła ΔL wywierana przez otaczający płyn. W płynie doskonałym siła ta będzie skierowana normalnie do powierzchni elementu ΔS, gdyż w przeciwnym przypadku istniałaby składowa styczna, która po odniesieniu do powierzchni ΔS dawałaby naprężenie styczne występujące jedynie w płynie lepkim. W celu określenia intensywności oddziaływania otaczającego płynu w punkcie A będziemy pole ΔS zmniejszali do zera, tzn. będziemy je zacieśniali do punktu A, określając w ten sposób granicę stosunku



2.3. Do określenia ciśnienia hydrodynamicznego

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = p. \tag{2.6}$$

Granicę tę nazywamy *ciśnieniem hydrodynamicznym w danym punkcie*. Wymiar ciśnienia hydrodynamicznego określony jest przez

$$[p] = \text{kG/m}^2.$$

Ciśnienie atmosferyczne mierzy się zwykle barometrem w milimetrach słupa rtęci i oznacza się literą B. Za normalne ciśnienie atmosferyczne przyjęto ciśnienie $B_0 = 760$ mm sł. rt. W aerodynamice mierzy się zwykle ciśnienia w kilogramach (siły) na metr kwadratowy lub w milimetrach słupa rtęci. Niejednokrotnie, na przykład przy obliczeniach silników lotniczych, używa się również atmosfery technicznej, równej 1 kG/cm².

W meteorologii posługujemy się bezwzględną jednostką ciśnienia zwaną *barem*. Bar = 10^6 dyn/cm². W praktyce często używamy jako jednostkę ciśnienia *milibar*, stanowiący tysiączną część bara. Między jednostkami ciśnienia istnieją następujące zależności:

$$1\ \text{at} = 760\ \text{mm sł. rt.} = 1{,}0333\ \text{kg/cm}^2 = 10\,333\ \text{kG/m}^2 = 10\,333\ \text{mm sł. wody};$$

$$1\ \text{kG/cm}^2 = 10\,000\ \text{kG/m}^2 = 735{,}6\ \text{mm sł. rt.};$$

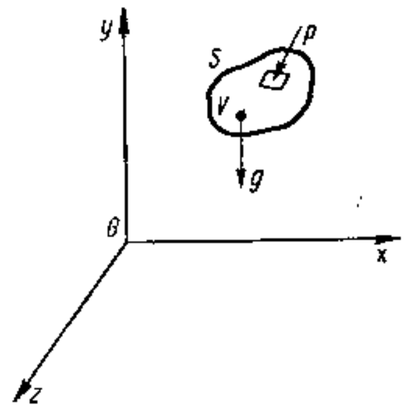
$$1\ \text{milibar} = \text{dyna} \cdot 10^6/\text{cm}^2 \cdot 10^3 = \frac{1}{98{,}1}\ \text{kG/cm}^2;$$

$$p\ \text{milibarów} = 1{,}33\ B\ \text{mm sł. rt.}$$

§ 4. Klasyfikacja sił występujących w płynie

Siły występujące w płynie dzieli się na siły powierzchniowe i siły masowe.

Wyodrębnijmy w płynie pewną dowolną objętość V, ograniczoną zamkniętą powierzchnią S (rys. 2.4). W wyniku oddziaływania otaczającego płynu na objętość V, rozłożone są na powierzchni S w określony sposób naprężenia styczne (jeżeli płyn jest lepki) oraz normalne. Te wewnętrzne siły rozłożone na powierzchni wydzielonej, objętości wywołane oddziaływaniem płynu otaczającego, nazywane są *siłami powierzchniowymi*. Jak widzimy, siły pochodzące od ciśnienia hydrodynamicznego są siłami powierzchniowymi.



2.4. Siła powierzchniowa i masowa w płynie

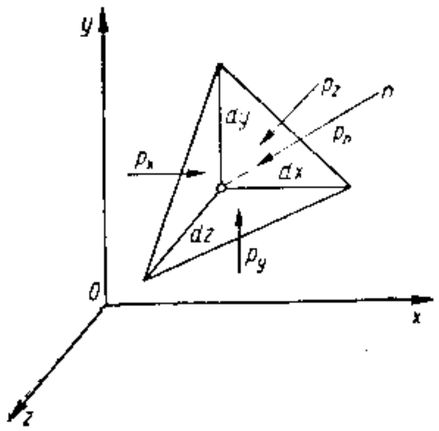
Prócz tego na wyodrębnioną objętość płynu będą działały siły rozłożone w całej objętości V, niezależne od istnienia obok niej innych elementów płynu. Siły takie nazywane są siłami objętościowymi lub masowymi. Do sił tych należą: siła ciężkości, siły elektromagnetyczne, siła odśrodkowa i inne. Dla określenia sił masowych przyjmiemy następujące oznaczenia. Siłę masową będziemy odnosili do jednostki masy, a jej rzuty na osie współrzędnych oznaczymy przez X, Y, Z[1]. Jest rzeczą oczywistą, że X, Y, Z są rzutami przyspieszenia, odpowiadającego sile masowej, na osie współrzędnych. Na przykład jeżeli na masę elementu płynu będzie działała siła ciężkości stanowiąca siłę masową, wówczas rzuty tej masowej siły na osie współrzędnych będą w przyjętych oznaczeniach równe:

$$X = 0, \quad Y = -\frac{mg}{m} = -g, \quad Z = 0.$$

[1] Pod pojęciem sił masowych autor rozumie w dalszym ciągu tylko siły wywołane polem przyspieszeń np. siły ciężkości (przyp. tłum.).

§ 5. Niezależność ciśnienia hydrodynamicznego od kierunku w płynie doskonałym

Rozpatrzmy w poruszającym się płynie doskonałym nieskończenie mały element w kształcie elementarnego czworościanu o krawędziach dx, dy, dz (rys. 2.5) i zastosujmy do tego elementu zasadę d'Alemberta. Połączmy mianowicie siły powierzchniowe i masowe, działające na dany element, z siłami bezwładności i napiszmy warunek równowagi tych sił. Na każdą ścianę czworościanu będą działały naprężenia powierzchniowe (ciśnienia hydrodynamiczne) p_x, p_y, p_z, p_n, powstające na skutek oddziaływania otaczającego płynu na dany element. Działające na czworościan siły masowe (w tej liczbie również siły bezwładności) będą, wobec ich proporcjonalności do objętości rozpatrywanego elementu, małymi trzeciego rzędu. Inaczej ma się rzecz z siłami powierzchniowymi, które są małymi drugiego rzędu. Z tego względu można równania równowagi wzdłuż osi współrzędnych napisać w następującej postaci:



2.5. Rozkład sił powierzchniowych na elementarnym czworościanie

$$p_x \Delta S_x - p_n \Delta S \cos(n, x) + \text{niesk. małe trzeciego rzędu} = 0,$$

$$p_y \Delta S_y - p_n \Delta S \cos(n, y) + \text{niesk. małe trzeciego rzędu} = 0,$$

$$p_z \Delta S_z - p_n \Delta S \cos(n, z) + \text{niesk. małe trzeciego rzędu} = 0,$$

gdzie ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z, ΔS są to płaszczyzny boczne czworościanu prostopadłe do odpowiednich osi x, y, z oraz normalnej n.

Ponieważ

$$\Delta S \cos(n, x) = \Delta S_x,$$

$$\Delta S \cos(n, y) = \Delta S_y,$$

$$\Delta S \cos(n, z) = \Delta S_z,$$

więc w granicy, przy zmniejszaniu elementarnego czworościanu do punktu, otrzymamy

$$p_x - p_n = 0, \quad p_y - p_n = 0, \quad p_z - p_n = 0,$$

skąd

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p. \tag{2.7}$$

A więc *ciśnienie hydrodynamiczne w dowolnym punkcie płynu doskonałego nie zależy od kierunku* i w danym punkcie płynu stanowi w określonej chwili całkowicie określoną wielkość, jest więc funkcją skalarną jedynie współrzędnych i czasu:

$$p = f(x, y, z, t).$$

Rozdział III

KINEMATYKA PŁYNU

§ 1. Metoda Eulera

Zbadanie przepływu pod względem kinematycznym polega na określeniu prędkości poruszającego się płynu w każdym punkcie i w dowolnej chwili t. Jak wykażemy dalej, znając prędkość, można znaleźć rozkład ciśnień, a zatem również siły działające w płynie.

Ruch płynu można badać w sposób dwojaki.

Sposób pierwszy zwany *metodą Eulera* polega na określaniu prędkości w dowolnym punkcie przestrzeni wypełnionej poruszającym się płynem. Przy zastosowaniu metody Eulera rozważa się nie ustalony element płynu, a punkt przestrzeni o współrzędnych x, y, z i bada się w tym punkcie zmianę prędkości płynu w funkcji czasu. A więc metoda Eulera polega na przedstawieniu prędkości płynu w funkcji czasu t i współrzędnych x, y, z punktów przestrzeni, tzn. na wyznaczeniu pola prędkości. Wielkości x, y, z, t nazywa się *zmiennymi Eulera*. Wynika stąd, że ruch płynu określa się przy zastosowaniu metody Eulera w następujący sposób:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Zakładając ciągły ruch płynu, będziemy powyższe funkcje traktowali jako jednoznaczne, ciągłe i różniczkowalne funkcje współrzędnych x, y, z oraz czasu t.

W tym przypadku, dla znalezienia toru elementu płynu należy w równaniach (3.1) zastąpić v_x, v_y, v_z odpowiednio przez $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ i $\frac{dz}{dt}$ oraz scałkować układ równań różniczkowych

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Po scałkowaniu otrzymamy równania

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, a, b, c), \\ y &= \varphi_2(t, a, b, c), \\ z &= \varphi_3(t, a, b, c) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

zawierające trzy stałe dowolne a, b, c, których wartości określane są na podstawie warunków początkowych (patrz dalej). Eliminując z tych równań czas t, znajdziemy równanie toru elementu płynu.

W celu określenia rzutów przyspieszenia elementu płynu w zmiennych Eulera

$$w_x = \frac{dv_x}{dt},$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt},$$

$$w_z = \frac{dv_z}{dt}$$

należy wziąć pod uwagę, że na podstawie równań (3.1) składowe v_x, v_y, v_z są funkcjami x, y, z, gdzie z kolei x, y, z zależą podczas ruchu elementów płynu od t. Wykorzystując regułę różniczkowania funkcji złożonej, otrzymamy zatem:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

a ponieważ

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

wobec tego

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Analogicznie

$$\left.\begin{aligned} w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Należy jeszcze raz zaznaczyć, że przy obliczaniu pochodnych zupełnych[1] (3.4) należy brać pod uwagę nie tylko zmienność czasu t, lecz i zmienność w czasie współrzędnych $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ elementu płynu podczas

[1] Zwanych również substancjalnymi (przyp. tłum.).

jego ruchu wzdłuż swego toru. Pochodne te nazywają się *pochodnymi unoszenia*. Pochodne cząstkowe względem czasu bierze się jak zwykle przy stałych wartościach współrzędnych x, y, z i nazywa się je *pochodnymi lokalnymi*.

§ 2. Metoda Lagrange'a

Drugi sposób badania ruchu płynu, zwany *metodą Lagrange'a*, w odróżnieniu od metody Eulera rozpatruje ruch poszczególnych wyróżnionych elementów płynu wzdłuż ich torów. Ponieważ elementów tych jest niezliczona ilość, musimy w jakiś sposób wyróżnić rozpatrywany element. Możemy to uczynić charakteryzując element płynu za pomocą jego współrzędnych odpowiadających początkowej chwili $t = 0$. Niech przy $t = 0$ współrzędnymi danego elementu będą a, b, c. Znaczy to, że z całej niezliczonej liczby torów torem danego elementu będzie tor przechodzący przez punkt a, b, c. W ten sposób współrzędne rozpatrywanego elementu płynu x, y, z będą zależały od wielkości a, b, c oraz t, zwanych *zmiennymi Lagrange'a*, tzn.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, a, b, c), \\ y &= \varphi_2(t, a, b, c), \\ z &= \varphi_3(t, a, b, c). \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Równania te są to równania rodziny torów, zapełniających całą przestrzeń zajętą przez płyn; a, b, c — są to parametry określające tor.

Jeżeli zatem za pomocą metody Eulera otrzymujemy tory elementów płynu na podstawie całkowania równań różniczkowych (3.2), to za pomocą metody Lagrange'a tory te otrzymujemy z równań (3.5). Wychodząc z równań (3.5), możemy znaleźć rzuty prędkości i przyspieszenia elementów:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1(t,a,b,c)}{\partial t}, & w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1(t,a,b,c)}{\partial t^2}, \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2(t,a,b,c)}{\partial t}, & w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2(t,a,b,c)}{\partial t^2}, \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_3(t,a,b,c)}{\partial t}, & w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_3(t,a,b,c)}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Metoda Eulera znalazła szersze zastosowanie w aerodynamice z uwagi na to, że jest prostsza i umożliwia szerokie stosowanie analizy wektorowej. Metoda Eulera stosowana jest w całej niniejszej książce.

§ 3. Klasyfikacja ruchów płynu

W najbardziej ogólnym przypadku ruchu płynu, rzuty prędkości v_x, v_y, v_z oraz ciśnienie p (dla płynu ściśliwego również gęstość ϱ) będą funkcjami współrzędnych x, y, z oraz czasu t, tzn.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t)\,, \\ v_y &= f_2(x, y, z, t)\,, \\ v_z &= f_3(x, y, z, t)\,, \\ p &= f_4(x, y, z, t)\,, \\ \varrho &= f_5(x, y, z, t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Znaczy to, że w określonym punkcie przestrzeni o współrzędnych x, y, z rzuty prędkości v_x, v_y, v_z, ciśnienie p oraz gęstość ϱ będą funkcjami czasu t, tzn. będą się zmieniały z upływem czasu. Taki ruch płynu nazywamy *przepływem nieustalonym*[1].

Jeżeli natomiast w określonym punkcie przestrzeni wielkości v_x, v_y, v_z, p oraz ϱ nie zmieniają się w czasie — ruch płynu nazywamy *przepływem ustalonym*. Oznacza to, że każdy element płynu przechodzący przez dany nieruchomy punkt przestrzeni będzie miał takie same wartości v_x, v_y, v_z, p i ϱ, jak poprzedni dowolny element. W tym przypadku równania (3.7) będą miały następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z), & p &= f_4(x, y, z), \\ v_y &= f_2(x, y, z), & \varrho &= f_5(x, y, z). \\ v_z &= f_3(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Z określenia przepływu ustalonego wynika, że odpowiada on następującym warunkom:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{3.9}$$

Pochodne zupełne tych wielkości nie są jednak równe zeru, ponieważ w ogólnym przypadku prędkość, ciśnienie i gęstość zmieniają się przy przejściu z jednego punktu przestrzeni do drugiego. Jedynie w przypadku szczególnym, jeżeli płyn nieściśliwy i jednorodny ($\varrho = \text{const}$) porusza się ruchem równomiernym i prostoliniowym, tzn. jeżeli $v = \text{const}$ i $p = \text{const}$; wówczas

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0\,.$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0\,, \quad \frac{dp}{dt} = 0\,.$$

[1] Tego rodzaju przepływ ma miejsce w czasie ruchu ciała sztywnego w płynie, w czasie wibracji skrzydeł lub usterzenia ogonowego w czasie lotu lub innych okolicznościach.

Jeżeli rzuty prędkości v_x, v_y, v_z są funkcjami tylko jednej współrzędnej oraz czasu t, wtedy ruch płynu nazywamy *przepływem jednowymiarowym nieustalonym*. W przypadku szczególnym, przy przepływie wzdłuż osi x ($v_y = v_z = 0$) będziemy mieli

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Przepływ nazywamy *płaskim* lub *dwuwymiarowym*[1], jeżeli wszystkie elementy płynu, znajdujące się na jednej i tej samej płaszczyźnie prostopadłej do pewnej nieruchomej wybranej płaszczyzny, poruszają się w jednakowy sposób w każdej innej płaszczyźnie równoległej do tej płaszczyzny.

Przy przepływie płaskim nieustalonym ($v_z = 0$) będziemy mieli

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial t}.$$

Jeżeli przepływ przestrzenny jest symetryczny względem pewnej osi, wtedy nazywamy go przepływem *osiowosymetrycznym*.

Z przepływem osiowosymetrycznym mamy do czynienia w dyszach i dyfuzorach o przekroju kołowym oraz przy osiowym opływie brył obrotowych różnego kształtu (na przykład w kształcie cygara).

§ 4. Linia prądu

Na równi z pojęciem toru jako krzywej, zakreślanej w przestrzeni przez poruszający się element płynu, wprowadzone zostało do aerodynamiki pojęcie *linii prądu*.

Rozpatrzmy w danej chwili t jakiś punkt *1* przestrzeni wypełnionej płynem. Niech prędkość tego punktu określona zostanie przez wektor v_1 (rys. 3. 1). Przyjmijmy w tym samym czasie t na wektorze prędkości v_1 punkt *2*, położony nieskończenie blisko punktu *1*. W punkcie tym znajduje się inny element płynu. Ponieważ punkt *2* ma inne współrzędne niż punkt *1*, prędkość w nim będzie również inna, wyrażona wektorem v_2. W tym samym czasie t obieramy na wektorze prędkości v_2 punkt *3*, położony nieskończenie blisko punktu *2*. W punkcie tym wektor prędkości elementu płynu będzie v_3 itd.

W wyniku takiego postępowania otrzymujemy (dla określonej chwili)

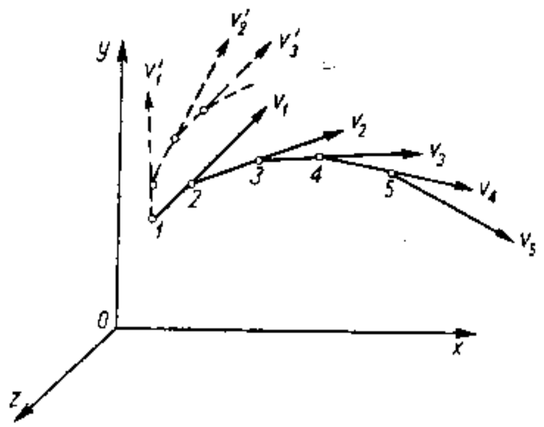
[1] Pojęcie przepływu dwuwymiarowego ma zazwyczaj szersze znaczenie; pod pojęciem tym rozumiemy również przepływy osiowo-symetryczne (przyp. tłum.).

linię łamaną *1—2—3—4—5...* mającą tę właściwość, że wektor prędkości odpowiadający punktowi początkowemu dowolnego odcinka linii skierowany jest wzdłuż tego odcinka.

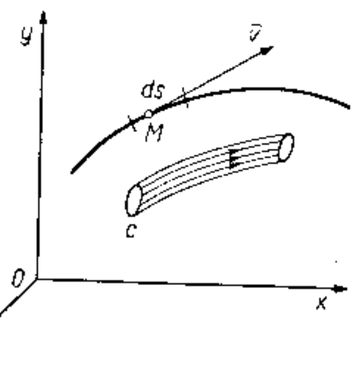
Będziemy teraz powiększali w sposób nieograniczony liczbę odcinków linii łamanej, a zatem zmniejszali do zera długość każdego odcinka. Otrzymamy wówczas w granicy (rys. 3.2) krzywą, zwaną *linią prądu*.

Linia prądu ma zatem tę właściwość, że każdy element płynu, znajdujący się na niej w określonej chwili, ma prędkość zgodną co do kierunku ze styczną do tej linii.

Rozważmy teraz rozkład prędkości w chwili t. Jeżeli przepływ jest nieustalony, wówczas w chwili t' prędkość w punkcie *1* będzie v_1', różna od v_1. Aby przejść do sąsiedniego, położonego nieskończenie blisko punktu, trzeba



3.1. Konstruowanie linii prądu



3.2. Linia prądu i rurka prądu

więc poruszać się teraz w nowym kierunku, zaznaczonym na rys. 3.1 linią przerywaną. Wynika stąd, że chwili t' będzie odpowiadała inna linia prądu, tzn. w przepływie nieustalonym wszystkie linie prądu będą się zmieniały w czasie.

Natomiast jeżeli przepływ jest ustalony, to znaczy prędkości w punktach *1*, *2* itd. nie są zmienne w czasie, wtedy oczywiście linie prądu nie będą zależne od czasu.

Jest również oczywiste, że w przypadku przepływu ustalonego linie prądu pokrywają się z torami. Istotnie, w ciągu czasu dt element płynu przesunie się wzdłuż wektora v_1 z punktu *1* do punktu *2*, gdzie prędkość wyrażona jest wektorem v_2. Ponieważ przepływ jest ustalony, wektor prędkości v_2 w punkcie *2* nie zmieni się w czasie dt. Świadczy to o tym, że element płynu po przyjściu do punktu *2* będzie się poruszał wzdłuż wektora v_2. Rozpatrując kolejno dalsze przesuwanie się elementu płynu, łatwo jest się przekonać, że w przepływie ustalonym tor elementu płynu będzie pokrywał się z linią prądu.

Znajdźmy teraz równanie różniczkowe linii prądu. Z warunku styczności w danym punkcie linii prądu i wektora prędkości wynika, że

$$\bar{v} \times d\bar{s} = 0$$

lub, przedstawiając iloczyn wektorowy w postaci wyznacznika,

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ są to wektory jednostkowe skierowane wzdłuż odpowiednich osi współrzędnych. Rozwijając względem pierwszego wiersza, otrzymamy

$$\bar{i}\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ dy & dz \end{vmatrix} + \bar{j}\begin{vmatrix} v_z & v_x \\ dz & dx \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

skąd

$$v_y dz - v_z dy = 0,$$
$$v_z dx - v_x dz = 0,$$
$$v_x dy - v_y dx = 0.$$

Otrzymane równania można napisać w następującej postaci:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \tag{3.10}$$

Równanie (3.10) nazywane jest *równaniem różniczkowym linii prądu*. Natomiast równanie różniczkowe toru elementu płynu można napisać jak niżej (§ 1):

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} = dt. \tag{3.10'}$$

Wprowadźmy pojęcie rurki prądu. W tym celu zakreślmy w płynie dowolny zamknięty kontur C, nie będący linią prądu i przez każdy punkt tego konturu poprowadźmy linię prądu.

Zbiór poprowadzonych w ten sposób linii prądu tworzyć będzie powierzchnię nazywaną rurką prądu (rys. 3.2). Płyn przepływający wewnątrz rurki prądu przyjęło się nazywać strugą.

Rozważymy teraz kilka przykładów.

P r z y k ł a d 1. Zakładamy, że przepływ jest określony przez składowe prędkości:

$$v_x = -ky, \quad v_y = kx, \quad v_z = 0,$$

gdzie k jest stałą. Należy znaleźć linię prądu.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ v_x, v_y nie zależą bezpośrednio od czasu, przyjmujemy, że rozpatrywany przepływ jest przepływem ustalonym, a zatem linie prądu pokrywają się z torami. Z uwagi na to, że $v_z = 0$ — przepływ jest

płaski. W przypadku przepływu płaskiego równania różniczkowe linii prądu (3.10) można napisać w następującej postaci:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \tag{3.11}$$

Podstawiając założone wartości v_x, v_y do równania (3.11), otrzymamy

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx}$$

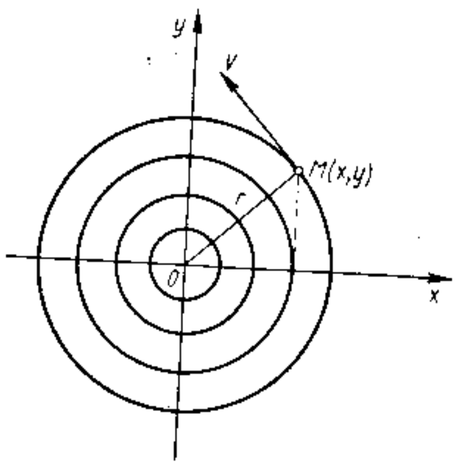
lub, rozdzielając zmienne,

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = C,$$

to znaczy, że linie prądu stanowią rodzinę okręgów współśrodkowych, których środek znajduje się w początku układu współrzędnych (rys. 3.3). W celu określenia kierunku przepływu znajdziemy cosinusy kątów pomiędzy wektorem prędkości a osiami x i y:



3.3. Ruch płynu po torach kolistych koncentrycznych

$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{v_x}{v} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v} = +\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ponieważ dla punktu M o obu współrzędnych dodatnich (rys. 3.3) jest $\cos(v, x) < 0$, więc znaczy to, że prędkość tworzy z osią x kąt rozwarty, a kierunek ruchu jest przeciwny do kierunku wskazówki zegara.

Przykład 2. Zakładamy, że przepływ dany jest przez następujące składowe prędkości:

$$v_x = x + t, \quad v_y = -y + t, \quad v_z = 0.$$

Należy określić:

a. rodzinę linij prądu oraz linię prądu przechodzącą przez punkt $A(-1, -1)$ w chwili $t = 0$;

b. tor elementu M, który w chwili $t = 0$ znajdował się w punkcie $A(-1, -1)$.

Rozwiązanie. Jak widać, rozważany przepływ jest przepływem płaskim ($v_z = 0$) nieustalonym, ponieważ do wyrażenia na v_x i v_y wchodzi

wyraźnie czas t. Równanie różniczkowe (3.11) linij prądu będzie miało następującą postać:

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}.$$

Całkując otrzymane równanie (traktując t jako stałe), otrzymamy

$$\ln(x+t) = -\ln(-y+t) + \ln C$$

lub

$$(x+t)(t-y) = C; \tag{a}$$

wynika z tego, że linie prądu stanowią w każdej określonej chwili czasu rodzinę hiperbol. W celu znalezienia linii prądu przechodzącej w chwili $t = 0$ przez punkt $A(-1, -1)$ podstawiamy powyższe wartości t, x, y do równania (a); otrzymamy wówczas

$$(-1)\cdot(+1) = C, \text{ tzn. } C = -1$$

i równanie poszukiwanej linii prądu przybierze postać

$$xy = 1. \tag{b}$$

Dla określenia toru trzeba scałkować następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + t, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + t. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Po przepisaniu układu równań (c) w formie[1]:

$$\frac{dx}{dt} - x = t,$$

$$\frac{dy}{dt} + y = t,$$

stwierdzamy, że każde z tych równań jest niejednorodnym równaniem liniowym ze stałymi współczynnikami. A więc

$$x = C_1 e^t - t - 1, \tag{d}$$

$$y = C_2 e^{-t} + t - 1. \tag{e}$$

W celu otrzymania równania toru, po którym porusza się element M znajdujący się w chwili $t = 0$ w punkcie $A(-1, -1)$, określimy wartości stałych

[1] Uwaga: równania (c) można scałkować łatwo również bez użycia podstawień podanych przez autora, są to bowiem równania typu $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, którego ogólna całka jest znana (przyp. red.).

C_2 i C_3. Podstawiając do wzorów (d) i (e) $t = 0, x = -1, y = -1$, otrzymamy $C_2 = C_3 = 0$. W ten sposób dla poszukiwanego toru będziemy mieli

$$x = -t - 1,$$
$$y = t - 1,$$

skąd rugując t znajdziemy równanie toru

$$x + y = -2;$$

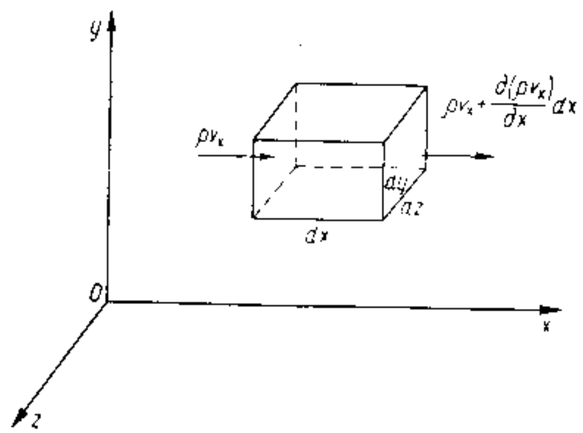
jest to równanie prostej.

Powyższy przykład wykazuje zatem, że w przepływie nieustalonym linie prądu i tory na ogół nie pokrywają się.

§ 5. Równanie ciągłości

Przy rozpatrywaniu dowolnego przepływu płynu ściśliwego będziemy zakładali, że płyn wypełnia całkowicie przestrzeń, albo jej określoną część, czyli że nie powstają próżnie lub nieciągłości. Warunek ten nazywany jest *warunkiem ciągłości przepływu.*

Jeżeli zatem w pewnym określonym odcinku czasu wydatek (objętościowy) płynu wypływającego przez pewną określoną zamkniętą powierzchnię przestrzenną będzie większy od wydatku płynu dopływającego, wówczas w obszarze



3.4. Do wyprowadzenia równania ciągłości we współrzędnych kartezjańskich

wewnątrz tej powierzchni nastąpi zmiana gęstości. (W przypadku płynu nieściśliwego wydatek wypływającego płynu powinien, zgodnie z warunkiem ciągłości, równać się ściśle wydatkowi płynu dopływającego). Powyższe możemy przedstawić analitycznie w postaci równania różniczkowego, zwanego równaniem ciągłości przepływu.

W aerodynamice równanie ciągłości wyraża prawo zachowania materii; zostało ono podane po raz pierwszy przez wielkiego uczonego rosyjskiego M.W. Łomosonowa w r. 1748.

Rozważmy określoną w przestrzeni, zamkniętą powierzchnię w kształcie prostokątnego równoległościanu o bokach dx, dy, dz (rys. 3.4), przez którą przepływa dowolny płyn ściśliwy.

Niech w jednostce czasu przepływa w kierunku osi x przez jednostkę powierzchni lewej ścianki równoległościanu masa płynu ϱv_x.

Ponieważ ϱv_x jest funkcją współrzędnych i czasu, tzn. $\varrho v_x = f(x, y, z, t)$, więc dla określenia masy płynu przepływającego w kierunku osi x w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prawej ścianki trzeba współrzędną x w funkcji $f(x, y, z, t)$ powiększyć o dx, to znaczy trzeba znaleźć $f(x + dx, y, z, t)$. Z dokładnością do małych pierwszego rzędu

$$f(x + dx, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

tzn. że w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prawej ścianki przepływa w kierunku osi x masa płynu równa

$$\varrho v_x + \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} dx.$$

Różnica pomiędzy obliczonym powyżej wydatkiem (masowym) płynu wypływającego i dopływającego równa się

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} dx,$$

a zatem przez ścianki o powierzchni $dy\,dz$ wypłynie w czasie dt w kierunku osi x masa płynu

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} dx\,dy\,dz\,dt.$$

Analogicznie, różnicę pomiędzy wypływającym i dopływającym w czasie dt wydatkiem masowym płynu w kierunku osi y i z, określają:

$$\frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$\frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} dx\,dy\,dz\,dt.$$

Jeżeli zsumujemy te trzy wyrażenia, otrzymamy całkowitą różnicę pomiędzy masą płynu, który wypłynął i dopłynął w czasie dt:

$$\left[\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,dt.$$

Od różnicy mas płynu wypływającego i dopływajacego zależy masa płynu znaj-

dującego się wewnątrz równoległościanu. Istotnie, jeżeli w chwili t gęstość była ϱ, wówczas w chwili $t + dt$ gęstość będzie równa

$$\varrho(x, y, z, t + dt) = \varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt,$$

a zatem masa płynu wewnątrz równoległościanu zmieni się w czasie dt od wartości $\varrho\, dx\, dy\, dz$ do

$$\left(\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt\right) dx\, dy\, dz,$$

czyli o wielkość

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

(przyjmujemy tutaj znak minus, ponieważ obliczaliśmy powyżej różnicę pomiędzy masą płynu wypływającego i dopływającego).

Zgodnie z warunkiem ciągłości różnica pomiędzy masą wypływającego i wpływającego płynu powinna być równa zmianie masy płynu w równoległościanie. W związku z tym, przyrównując odpowiednie wyrażenia, otrzymamy

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

lub

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0. \tag{3.12}$$

Równanie to nazywa się *równaniem różniczkowym ciągłości dla płynu ściśliwego.*

Jeżeli przepływ płynu ściśliwego jest ustalony, wówczas oczywiście $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ i równanie ciągłości przybierze postać

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.13}$$

lub w formie wektorowej

$$\operatorname{div}(\varrho \bar{v}) = 0. \tag{3.13'}$$

Równanie ciągłości (3.12) lub (3.13) podawane bywa często w innej nieco postaci. W celu otrzymania jej wykonajmy różniczkowanie w równaniu (3.12); otrzymamy wtedy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \varrho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \varrho}{\partial z} v_z + \varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że pierwsze cztery składniki stanowią pochodną zupełną ϱ względem czasu t otrzymamy równanie ciągłości w postaci

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Równanie to można napisać również nieco inaczej wprowadzając pojęcie współczynnika rozszerzalności objętościowej θ określającego względną zmianę objętości płynu w jednostce czasu:

$$\theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Udowodnimy, że θ istotnie ma charakter współczynnika rozszerzalności objętościowej. Z równania (3.14) znajdujemy

$$\theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}.$$

Niech $m = \varrho\tau$ będzie masą małego poruszającego się elementu płynu, a τ — jego objętością. W czasie ruchu płynu gęstość ϱ i objętość τ tego elementu mogą się zmieniać, jednakże masa elementu powinna pozostawać stała ($m = \text{const}$).

W takim przypadku będziemy mieli

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\tau + \varrho\frac{d\tau}{dt} = 0.$$

Stąd

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = \theta,$$

tzn. rzeczywiście wielkość θ charakteryzuje prędkość rozszerzania się jednostki objętości, a w związku z tym nazywa się ją współczynnikiem rozszerzalności objętościowej.

Przy użyciu tego oznaczenia równanie ciągłości przybierze postać

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\theta = 0. \tag{3.15}$$

W przypadku szczególnym, gdy płyn jest nieściśliwy, to znaczy $\varrho = \text{const}$, współczynnik rozszerzalności objętościowej jest równy zeru: $\theta = 0$. Równanie ciągłości będzie zatem miało postać następującą:

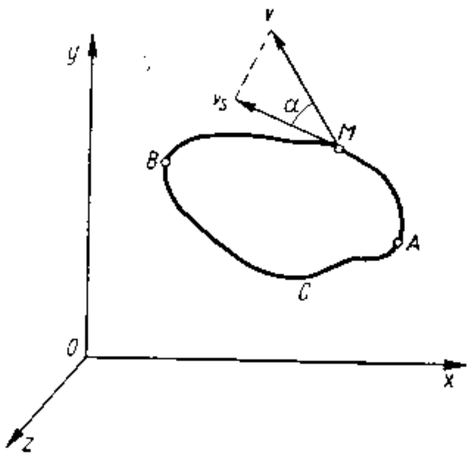
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{3.16}$$

Równanie to nazywa się *równaniem ciągłości dla płynu nieściśliwego*. W postaci wektorowej wyraża się ono wzorem:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \tag{3.17}$$

§ 6. Cyrkulacja prędkości

Zarówno w teoretycznej, jak i stosowanej aerodynamice dużą rolę odgrywa pojęcie cyrkulacji prędkości. Z pojęciem cyrkulacji (oznaczanej literą Γ) wiąże się pojęcie intensywności lub natężenia wirów. Od jej rozkładu wzdłuż rozpiętości płata samolotu zależą wielkości sił i momentów działających na płat.



3.5. Do określenia cyrkulacji prędkości

Wyodrębnijmy w poruszającym się płynie dowolny określony w przestrzeni obwód zamknięty C (rys. 3.5). Niech w pewnym jego punkcie M prędkość będzie wyrażona przez wektor $\bar{v}$. Napiszemy iloczyn $v \cos(\bar{v}, \bar{ds})\, ds = v \cos \alpha\, ds$, przypominający wyrażenie na pracę elementarną w mechanice teoretycznej (gdzie zamiast wektora prędkości $\bar{v}$ występuje wektor siły $\bar{F}$). Weźmy z tego wyrażenia całkę krzywoliniową wzdłuż łuku AB:

$$\Gamma = \int_A^B v \cos(\bar{v}, \bar{ds})\, ds\,. \tag{3.18}$$

Wzór ten wyraża *cyrkulację* prędkości wzdłuż łuku AB. Cyrkulację oblicza się zwykle wzdłuż całego obwodu zamkniętego C, to znaczy

$$\Gamma = \int_C v \cos(\bar{v}, \bar{ds})\, ds. \tag{3.19}$$

Kierunek całkowania będziemy traktowali jako dodatni, jeżeli ograniczony przez obwód C obszar (który możemy sobie wyobrazić np. jako błonkę bańki mydlanej naciągniętej na obwód C) pozostaje przy całkowaniu po lewej stronie.

Zastępując we wzorze (3.19) $v \cos(\bar{v}, \bar{ds})$ przez v_s, gdzie v_s — rzut prędkości na kierunek stycznej, otrzymamy

$$\Gamma = \int_C v_s ds. \tag{3.20}$$

Biorąc pod uwagę, że wyrażenie podcałkowe w równaniu (3.20) jest skalarnym iloczynem wektora $\bar{v}$ przez wektor $\bar{ds}$, możemy napisać:

$$\Gamma = \int_C (\bar{v}\ \bar{ds}). \tag{3.21}$$

Korzystając ze znanego wyrażenia na iloczyn skalarny dwóch wektorów $\bar{a}[a_x, a_y, a_z]$ oraz $\bar{b}[b_x, b_y, b_z]$:

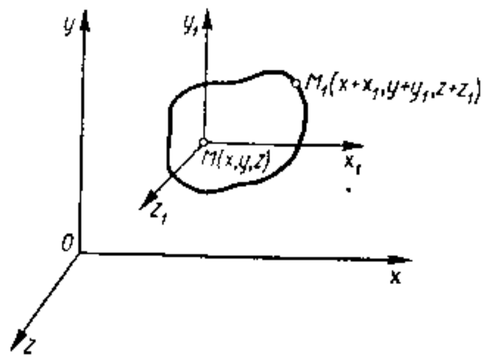
$$(\bar{a}\ \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

możemy na podstawie wzoru (3.21) określić cyrkulację Γ w następującej, bardzo często używanej, postaci:

$$\Gamma = \int_C v_x dx + v_y dy + v_z dz. \tag{3.22}$$

§ 7. Ruch elementu płynu

W kinematyce ciała sztywnego dowodzi się, że w ogólnym przypadku ruch ciała sztywnego składa się w każdej chwili z ruchu postępowego i obrotowego dokoła pewnej osi, zwanej chwilową osią obrotu. Ruch płynu jest znacznie bardziej skomplikowany, ponieważ każdy element płynu porusza się nie tylko ruchem postępowym i obrotowym, lecz podlega również odkształceniu (deformacji). Ostatnie zjawisko wymaga zatem zbadania tak zwanego *ruchu deformacyjnego*.



3.6. Do analizy ruchu elementu płynu

Rozpatrzmy w dowolnej chwili t ruch nieskończenie małego elementu płynu. Niech w pewnym punkcie $M(x, y, z)$ wewnątrz elementu (rys. 3.6) składowymi prędkości będą $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$. Składowe prędkości w pewnym punkcie $M_1(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ na powierzchni elementu mogą być wówczas napisane w postaci

$$v_{x1} = v_x(x + x_1,\ y + y_1,\ z + z_1),$$
$$v_{y1} = v_y(x + x_1,\ y + y_1,\ z + z_1),$$
$$v_{z1} = v_z(x + x_1,\ y + y_1,\ z + z_1).$$

Wykorzystując rozwinięcie na szereg Taylora i zachowując jedynie wielkości małe pierwszego rzędu, czyli człony zawierające x_1, y_1, z_1 w potędze nie wyższej niż pierwsza, otrzymamy następujący wzór na prędkości v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}:

$$\left.\begin{aligned} v_{x1} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1, \\ v_{y1} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial z} z_1, \\ v_{z1} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_z}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

w których dla uproszczenia podstawiono $v_x = v_x(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z)$ oraz $v_z = v_z(x, y, z)$. Przekształćmy teraz te wzory. W tym celu dodamy do prawej strony pierwszego równania (3.23) wielkości $\pm \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x} y_1$ oraz $\pm \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x} z_1$ i dokonamy przegrupowania wyrazów.

Ostatecznie otrzymamy

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z} z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x} z_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z} z_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x} z_1,$$

skąd

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) y_1.$$

Za pomocą analogicznych przekształceń można z drugiego i trzeciego równania (3.23) otrzymać

$$v_{y1} = v_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) z_1,$$

$$v_{z1} = v_z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) x_1.$$

Dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), & \varepsilon_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), & \theta_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x},\\
\omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), & \varepsilon_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), & \theta_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y},\\
\omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), & \varepsilon_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), & \theta_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Otrzymane powyżej wyrażenia na v_{x1}, v_{y1} i v_{z1} można wówczas napisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned}
v_{x1} &= v_x + \theta_x x_1 + \varepsilon_z y_1 + \varepsilon_y z_1 + \omega_y z_1 - \omega_z y_1,\\
v_{y1} &= v_y + \varepsilon_z x_1 + \theta_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \omega_z x_1 - \omega_x z_1,\\
v_{z1} &= v_z + \varepsilon_y x_1 + \varepsilon_x y_1 + \theta_z z_1 + \omega_x y_1 - \omega_y x_1.
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Wprowadźmy następującą pomocniczą funkcję:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\theta_x x_1^2 + \theta_y y_1^2 + \theta_z z_1^2 + 2\varepsilon_x y_1 z_1 + 2\varepsilon_y z_1 x_1 + 2\varepsilon_z x_1 y_1), \tag{3.26}$$

której pochodne względem współrzędnych x_1, y_1, z_1 mają postać

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \theta_x x_1 + \varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \theta_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \varepsilon_z x_1,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} &= \theta_z z_1 + \varepsilon_x y_1 + \varepsilon_y x_1.
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Za pomocą funkcji Φ możemy napisać wzory na rzuty prędkości w następującej skróconej postaci:

$$\left.\begin{aligned}
v_{x1} &= v_x + \omega_y z_1 - \omega_z y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1},\\
v_{y1} &= v_y + \omega_z x_1 - \omega_x z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1},\\
v_{z1} &= v_z + \omega_x y_1 - \omega_y x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Wyjaśnijmy fizyczny sens równań (3.28).

Wyrazy v_x, v_y i v_z są oczywiście rzutami prędkości przesuwania się w przestrzeni rozpatrywanej cząstki jako ciała sztywnego.

Wykorzystajmy rozwiązanie zadania z mechaniki teoretycznej o obrocie ciała sztywnego do koła nieruchomej osi i zauważmy, że różnice $\omega_y z_1 - \omega_z y_1$, $\omega_z x_1 - \omega_x z_1$, $\omega_x y_1 - \omega_y x_1$ wyrażają rzuty prędkości kątowej elementu płynu (oraz ciała sztywnego) dookoła chwilowej osi, przechodzącej przez punkt M. Taki ruch obrotowy elementu płynu nazywany jest *ruchem wirowym*, a składowe prędkości kątowej ω_x, ω_y ω_z — *składowymi wiru*.

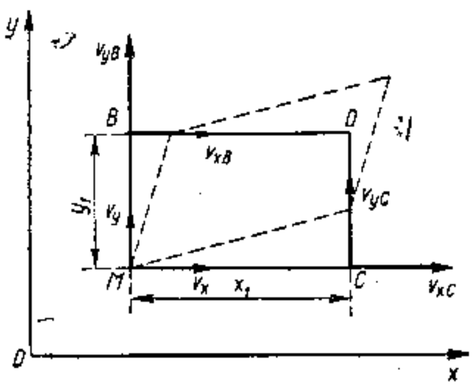
Jak wynika z równań (3.24)

$$2\,\overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{v}. \tag{3.24'}$$

Wyjaśnimy z kolei sens składników

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}.$$

Z rozważań fizycznych widać wyraźnie przede wszystkim to, że element płynu, na skutek różnicy prędkości w różnych jego punktach, będzie ulegać deformacji. Wynika stąd bezpośrednio[1], że wyrażenia $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$ stanowią składowe prędkości deformacji elementu. Udowodnimy to na prostym przykładzie.



3.7. Deformacja elementu płynu o kształcie prostopadłościanu

Niech nieskończenie mały element płynu ma w chwili t kształt prostokątnego równoległościanu. Dla uproszczenia rozpatrzymy rzuty tego elementu na płaszczyznę x, y, to znaczy nieskończenie mały prostokąt $MBDC$ (rys. 3.7). Jeżeli składowe prędkości punktu $M(x, y)$ prostokąta oznaczymy przez v_x i v_y, wówczas możemy napisać składowe prędkości w punktach $C(x + x_1, y)$ oraz $B(x, y + y_1)$ z dokładnością do małych pierwszego rzędu w postaci:

$$\left.\begin{aligned} v_{xC} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1, \quad & v_{yC} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1, \\ v_{xB} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1, \quad & v_{yB} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Ponieważ interesuje nas względne przesunięcie punktów C i B (względem punktu M), przepiszemy równania (3.29) w następujący sposób:

$$v_{xC} - v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1, \quad v_{yC} - v_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1,$$

$$v_{xB} - v_x = \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1, \quad v_{yB} - v_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1.$$

Jak widzimy, prędkości $\frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 = \theta_x x_1$ oraz $\frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 = \theta_y y_1$ są prędkościami liniowej deformacji boków prostokąta $MBDC$. Natomiast prędkości $\frac{\partial v_y}{\partial x} x_1$ oraz

[1] Ponieważ, jak wykazano uprzednio, pozostałe wyrazy poza $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ nie mają nic wspólnego z deformacją (przyp. tłum.).

$\frac{\partial v_x}{\partial y} y_1$ wskazują na obrót boków MC i MB (rys. 3.7), są zatem prędkościami deformacji postaciowej prostokąta $MBDC$ przekształcającymi go w pewien równoległobok (linia kreskowana na rys. 3.7). Widzimy, że bok MC obraca się z prędkością kątową $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, bok zaś MB — z prędkością kątową $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Ponieważ prędkość zmiany kąta prostego MBC składa się z prędkości kątowych obrotu boków MC i MB, stanowi ona zatem sumę

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\varepsilon_z.$$

Rozważając w sposób analogiczny inne boki równoległościanu (albo ich rzuty na płaszczyzny współrzędnych), można równie prosto dowieść, że wielkość $\frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 = \theta_z z_1$ stanowi prędkość deformacji liniowej wzdłuż osi z oraz że wielkości prędkości kątowych odkształcenia postaciowego pozostałych kątów prostych równoległościanu są wyrażone przez zależności

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\varepsilon_x \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\varepsilon_y.$$

Z powyższego wynika, że wielkości

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$$

są istotnie składowymi prędkości deformacji elementu płynu, przy czym wielkości ε_x, ε_y i ε_z określają odkształcenia postaciowe, zaś wielkości θ_x, θ_y i θ_z — deformację liniową (rozciąganie lub ściskanie). Powracając do równań (3.28), których sens fizyczny został całkowicie wyjaśniony, dochodzimy do następującego ważnego wniosku:

Elementarny ruch elementu płynu składa się z ruchu postępowego jego środka z prędkością $\bar{v}[v_x, v_y, v_z]$; *obrotu z prędkością kątową* $\bar{\omega}[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ *dookoła pewnej osi przechodzącej przez ten środek oraz ruchu deformacyjnego określonego funkcją* $\Phi(x_1, y_1, z_1)$.

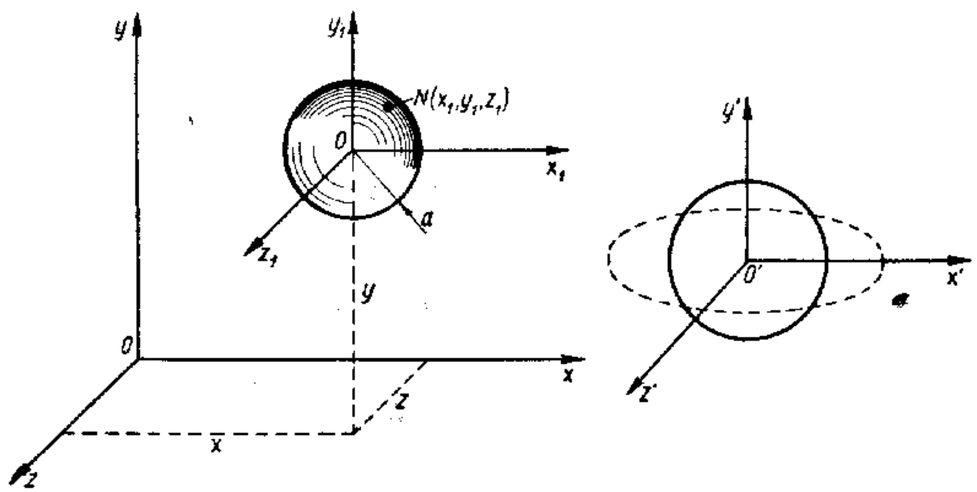
W celu lepszego uświadomienia sobie istoty ruchu deformacyjnego rozpatrzymy na zakończenie niniejszego paragrafu fizyczną interpretację tego ruchu, podaną przez Żukowskiego w wykładach „Osnowy wozduchopławanja".

Niech nieskończenie mały element płynu ma w pewnej chwili t kształt kuli, której środek leży w punkcie $O(x, y, z)$ i której promień równa się a (rys. 3.8). Obierzemy ruchome osie współrzędnych x_1, y_1, z_1 (równoległe do nieruchomych osi x, y, z) w ten sposób, aby początek układu znajdował się w środku kuli, oraz aby układ przesuwał się ruchem postępowym wraz ze środkiem kulistego elementu płynu. Niech składowe prędkości środka

O elementu będą v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}. Na podstawie powyższego możemy wówczas podać składowe prędkości dowolnego punktu $N(x_1, y_1, z_1)$ na powierzchni elementu w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1), \\ v_y &= v_{y0} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1), \\ v_z &= v_{z0} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1). \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Łatwo przekonać się, że funkcja Φ, będąc jednorodnym wielomianem drugiego stopnia względem współrzędnych x_1, y_1, z_1, stanowi powierzchnię drugiego stopnia mającą środek symetrii leżący w początku układu współrzędnych — jest to elipsoida, zwana elipsoidą



3.8. Deformacja elementu płynu o kształcie kulki

deformacji. Jeżeli osie współrzędnych x_1, y_1, z_1 skierujemy wzdłuż osi elipsoidy deformacji wówczas — jak wiadomo — znikną wyrazy zawierające iloczyny współrzędnych różnoimiennych. Osie elipsoidy deformacji nazywamy *głównymi osiami deformacji*. Przy takim wyborze osi będziemy mieli

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} x_1^2 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1^2 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1^2\right)$$

a zatem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \tag{3.31}$$

co oznacza, że wzdłuż głównych osi deformacji zachodzą jedynie deformacje liniowe.

Rozpatrywany przez nas element płynu ma w chwili początkowej (przed deformacją) kształt kulki. Napiszemy równanie tej kulki w postaci

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2.$$

Oznaczmy przez x_2, y_2, z_2 współrzędne (względem środka O), jakie będzie miał punkt

N elementu po upływie nieskończenie małego odcinka czasu dt. Ograniczając się do rozpatrzenia jedynie ruchu deformacyjnego, możemy wówczas na podstawie (3.31) napisać:

$$x_2 = x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dt = x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 dt,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dt = y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 dt,$$

$$z_2 = z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dt = z_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 dt,$$

gdyż $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$ są prędkościami deformacji.

Stąd

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt},$$

$$y_1 = \frac{y_2}{1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt},$$

$$z_1 = \frac{z_2}{1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt}.$$

Podstawiając wartości x_1, y_1, z_1 do równania kuli, otrzymamy

$$\frac{x_2^2}{a^2\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right)^2} + \frac{y_2^2}{a^2\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right)^2} + \frac{z_2^2}{a^2\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right)^2} = 1.$$

Równanie to jest równaniem elipsoidy z półosiami:

$$a\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right),$$

$$a\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right),$$

$$a\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right).$$

Zatem *nieskończenie mała kulka deformując się zmienia się w nieskończenie małą elipsoidę, której osie skierowane są wzdłuż głównych osi deformacji* (rys. 3.8).

Znajdźmy teraz zmianę objętości rozpatrywanego, nieskończenie małego elementu. W tym celu musimy od objętości elipsoidy odjąć objętość kulki:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi a^3 \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right)\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right)\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right) - \frac{4}{3}\pi a^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt = \frac{4}{3}\pi a^3 \theta dt,$$

gdzie $\theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ — współczynnik rozszerzalności objętościowej. Jeżeli płyn

jest nieściśliwy, wtedy współczynnik rozszerzalności objętościowej $\theta = 0$, otrzymamy więc znane równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

§ 8. Przepływ potencjalny

W wielu zagadnieniach aerodynamiki i dynamiki gazów rozpatruje się tzw. przepływ potencjalny. *Przepływem potencjalnym nazywany jest przepływ niewirowy, a więc taki, w którym składowe wirowości ω_x, ω_y, ω_z równe są zeru.*

Należy zaznaczyć, że w rzeczywistości obserwuje się zawsze tworzenie się ruchów wirowych na skutek tego, że rzeczywiste płyny nie są płynami doskonałymi. Powodem tego jest cały szereg czynników, z których najważniejszym jest istnienie tarcia wewnętrznego w płynie. Mimo to obraz bezwirowego ruchu potencjalnego jest obrazem bliskim rzeczywistości w wielu przypadkach ważnych dla rozwiązania zadań praktycznych.

Rozpatrzymy podstawowe własności potencjalnego przepływu płynu.

Wychodząc z określenia przepływu potencjalnego będziemy mieli:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0.$$

W formie wektorowej ten warunek można napisać w następujący sposób:

$$\overline{\omega} = 0$$

lub

$$\operatorname{rot} \overline{v} = 0.$$

Z otrzymanych wzorów wynika:

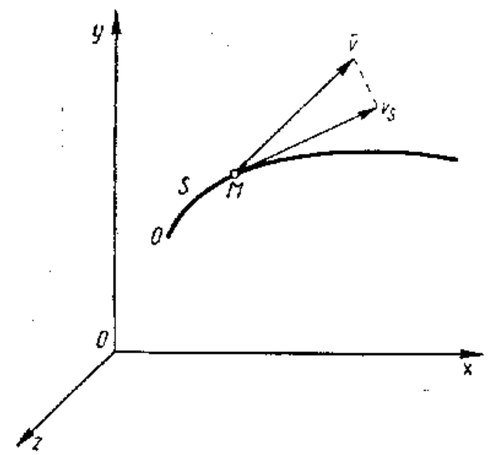
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Rozważmy teraz wyrażenie różniczkowe $v_x dx + v_y dy + v_z dz$. Łatwo jest stwierdzić, że równania (3.32) stanowią niezbędny i wystarczający warunek, by owo wyrażenie było różniczką zupełną pewnej funkcji $\varphi(x, y, z)$, to znaczy

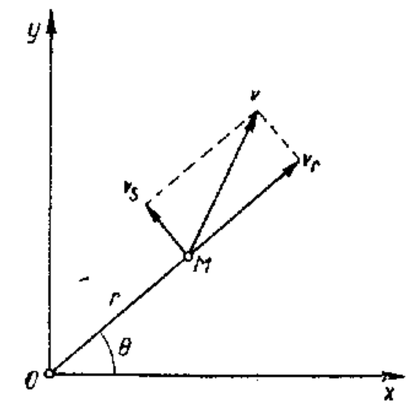
$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi(x, y, z).$$

Funkcja φ nazywa się *potencjałem prędkości* i ma duże znaczenie w aerodynamice[1]. Rozwińmy jej różniczkę zupełną; otrzymamy wówczas

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$



3.9. Do określenia podstawowej właściwości potencjału prędkości



3.10. Składowe prędkości we współrzędnych biegunowych

Przyrównując współczynniki przy dx, dy, dz otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

tzn. że *rzut prędkości na oś współrzędnej równy jest pochodnej cząstkowej potencjału prędkości względem odpowiedniej współrzędnej.*

Ta ważna właściwość potencjału prędkości jest niezależna od kierunku osi. Rozpatrzmy jakikolwiek punkt M w płynie, położony na dowolnej krzywej (rys. 3.9). Niech prędkość w punkcie M równa się $\overline{v}$. Poprowadźmy z punktu M styczną do krzywej. Ponieważ rozważamy przepływ potencjalny, istnieje więc potencjał φ prędkości i możemy napisać:

[1] Będziemy zakładać, że funkcja φ jest ciągła razem ze swoimi pochodnymi cząstkowymi, aż do drugiego rzędu włącznie.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}=$$

$$=v\left[\cos(v,x)\frac{dx}{ds}+\cos(v,y)\frac{dy}{ds}+\cos(v,z)\frac{dz}{ds}\right].$$

Ponieważ

$$\frac{dx}{ds}=\cos(s,x),\quad \frac{dy}{ds}=\cos(s,y),\quad \frac{dz}{ds}=\cos(s,z),$$

więc będziemy mieli ostatecznie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=v\cos(v,s)=v_s. \tag{3.34}$$

Analogicznie, dla dowolnego kierunku r

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=v\cos(v,r)=v_r, \tag{3.35}$$

to znaczy, że *rzut prędkości na dowolny kierunek równa się pochodnej potencjału prędkości w tym kierunku*. W szczególności, dla współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie będziemy mieli

$$\left.\begin{aligned} v_r&=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\\ v_s&=\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

gdzie v_r, v_s — rzuty wektora prędkości $\bar{v}$ w punkcie M na kierunek promienia wodzącego r oraz na kierunek prostopadły do promienia wodzącego (rys. 3.10).

Na zakończenie zauważymy, że rozważona przez nas w paragrafie poprzednim funkcja kwadratowa Φ stanowi, oczywiście, potencjał prędkości deformacji, ponieważ jej pochodne cząstkowe wzdłuż współrzędnych równe są odpowiednim składowym prędkości deformacji równania (3.27). Przepływ deformacyjny jest zatem przepływem potencjalnym w obszarze nieskończenie małym.

§ 9. Równanie ciągłości we współrzędnych prostokątnych dla płaskiego przepływu potencjalnego

Powiedzieliśmy powyżej, że równanie ciągłości można w ogólnym przypadku napisać w następującej postaci:

$$\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$$

Podstawiając wartości składowych prędkości z równań (3.33), otrzymamy:

$$\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0. \tag{3.37}$$

Jeżeli płyn jest nieściśliwy, to znaczy $\varrho=\text{const}$, równanie ciągłości przybierze następującą postać:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{3.38}$$

Równanie to nazywane jest *równaniem Laplace'a*, zaś każda funkcja, spełniająca to równanie — *funkcją harmoniczną*. Dla przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego potencjał prędkości będzie zatem harmoniczną funkcją współrzędnych x, y, z.

Równanie Laplace'a (3.38) jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu z pochodnymi cząstkowymi. Sposoby rozwiązania takiego równania są obecnie wystarczająco dobrze znane. Każdemu konkretnemu przepływowi potencjalnemu odpowiada potencjał prędkości, tzn. określone rozwiązanie równania (3.38). Ponieważ istnieje nieskończona ilość przepływów, więc równanie (3.38) ma nieskończoną ilość rozwiązań. Powstaje zatem pytanie, jak rozwiązywać równania (3.38), tzn. jak wyznaczać z tej nieskończonej ilości rozwiązań potencjał odpowiadający danemu konkretnemu przepływowi. W celu znalezienia rozwiązania równania Laplace'a, odpowiadającego ciału o zadanym kształcie, z zadanymi warunkami na zewnętrznych granicach przepływu, trzeba wprowadzić tzw. warunki brzegowe.

Przypuśćmy, że pewne ciało sztywne, którego powierzchnię określa równanie $f(x, y, z)=0$ znajduje się w przepływie, którego prędkość w nieskończoności ($r=\infty$) jest równoległa do osi x i równa v_∞. W takim przypadku dla $r=\infty$ prędkość

$$v_x=v_\infty,\ v_y=v_z=0.$$

Zakładając, że przepływ nie odrywa się od powierzchni ciała, tzn. w każdym punkcie ciała „ślizga się" wzdłuż niego, otrzymany drugi warunek brzegowy:

na powierzchni ciała $v_n=0$.

W przypadku płaskiego przepływu potencjalnego równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego (równanie Laplace'a) przybierze postać:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{3.38'}$$

§ 10. Równanie ciągłości we współrzędnych biegunowych dla płaskiego przepływu potencjalnego

Rozpatrzmy płaski przepływ potencjalny płynu nieściśliwego. Wyodrębnijmy w tym przepływie nieskończenie małą powierzchnię $ACDB$ ograniczoną przez dwa nieskończenie blisko siebie położone promienie wodzące oraz przez dwa nieskończenie bliskie łuki o promieniach r i $r + dr$ (rys. 3.11). Obliczmy wydatek płynu dopływającego przez odcinki AB i AC oraz wypływającego przez odcinki CD i BD. Przez odcinek AC dopływa w jednostce czasu masa płynu, równa

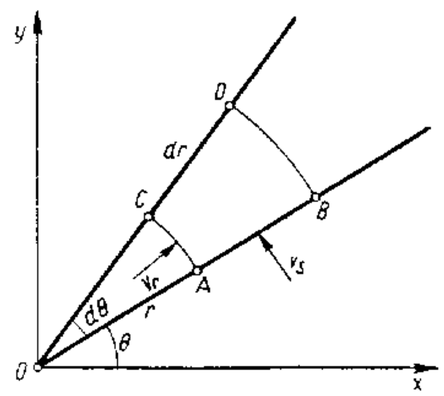
$$\varrho v_r r\, d\theta,$$

zaś przez odcinek AB

$$\varrho v_s dr.$$

Przez odcinek BD wypływa w jednostce czasu masa płynu

$$\varrho v_r r\, d\theta + \frac{\partial}{\partial r}(\varrho v_r r\, d\theta)\, dr.$$



3.11. Do wyprowadzenia równania ciągłości we współrzędnych biegunowych

Analogicznie przez odcinek CD wypływa masa

$$\varrho v_s dr + \frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho v_s dr)\, d\theta.$$

Dla płynu nieściśliwego warunek ciągłości wymaga, aby wydatek wypływającego i dopływającego płynu był jednakowy. Przyrównując obliczony wydatek płynu dopływającego i wypływającego, będziemy mieli

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varrho v_r r\, d\theta)\, dr + \frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho v_s dr)\, d\theta = 0.$$

Podstawiając wartości v_r i v_s ze wzorów (3.36) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0.$$

Różniczkując i dzieląc stronami przez r, otrzymamy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{3.39}$$

Równanie (3.39) jest równaniem Laplace'a we współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie

§ 11. Cyrkulacja prędkości w przepływie potencjalnym

Wzór na cyrkulację prędkości w przepływie potencjalnym przybiera szczególnie prostą postać. Jeżeli napiszemy wzór na cyrkulację wzdłuż jakiegoś dowolnego łuku AB

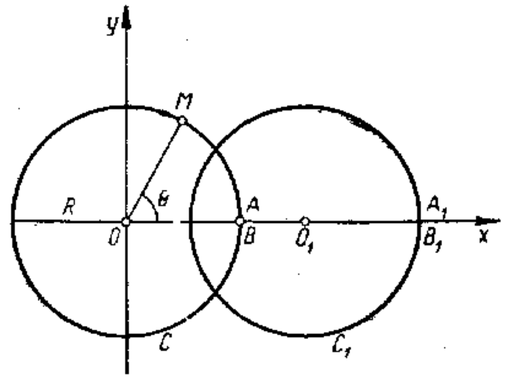
$$\Gamma = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

i podstawimy zamiast v_x, v_y, v_z ich wartości ze wzorów (3.33), to otrzymamy

$$\Gamma = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A. \tag{3.40}$$

Wynika stąd, że cyrkulacja wzdłuż łuku AB nie zależy od kształtu łuku i równa jest różnicy wartości potencjału prędkości w końcowych punktach łuku. W przypadku gdy punkty A i B pokrywają się, to znaczy gdy obwód jest zamknięty oraz funkcja φ jest jednoznaczną funkcją współrzędnych, cyrkulacja staje się równa zeru.

Należy zaznaczyć, że potencjał prędkości może być jednoznaczną jak również wieloznaczną funkcją współrzędnych. Wyjaśnimy to na następującym przykładzie.



3.12. Do obliczania cyrkulacji prędkości w przepływie potencjalnym

P r z y k ł a d. Płaski przepływ potencjalny (rys. 3.12) jest określony potencjałem prędkości

$$\varphi = \theta,$$

gdzie θ — kąt biegunowy. Należy obliczyć:

a. cyrkulację Γ wzdłuż okręgu C, którego równanie

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

b. cyrkulację Γ wzdłuż okręgu C_1, którego równanie

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2,$$

gdzie $a > R$.

Rozwiązanie. Cyrkulację wzdłuż okręgu C obliczymy ze wzoru

$$\Gamma = \varphi_B - \varphi_A.$$

Ponieważ w danym przypadku $\varphi_A = \theta_A = 0$, $\varphi_B = \theta_B = 2\pi$, gdyż przy całkowitym okrążeniu okręgu kąt θ dozna przyrostu o 2π, więc cyrkulacja $\Gamma = 2\pi$, tzn. nie jest równa zeru i $\varphi_B = \varphi_A + 2\pi$.

Przyjmijmy otrzymaną wartość φ_B jako wartość początkową odpowiadającą punktowi A i wykonajmy ponownie pełne obejście wzdłuż okręgu C. Wówczas zgodnie z poprzednim równaniem nową wartość potencjału prędkości $(\varphi_B)_{\text{now.}}$ w punkcie B będzie można napisać w sposób następujący:

$$(\varphi_B)_{\text{now.}} = \varphi_B + 2\pi = \varphi_A + 4\pi.$$

Czyniąc to samo dalej dochodzimy do wniosku, że w jednym i tym samym punkcie potencjał prędkości może mieć nieskończenie wiele różnych wartości (potencjał nie jest jednoznaczną funkcją punktów płaszczyzny):

$$\varphi = \varphi_A + n\,2\pi,$$

gdzie n jest to dowolna liczba całkowita. Przy tym, jak widzieliśmy, okazało się, że cyrkulacja prędkości wzdłuż okręgu C nie równa się zeru. Inny wynik otrzymamy dla okręgu C_1.

Cyrkulację dla okręgu C_1 obliczymy według tego samego wzoru

$$\Gamma = \varphi_{B1} - \varphi_{A1}.$$

Ponieważ w tym przypadku kąt θ przy całkowitym okrążeniu okręgu C_1 powraca do swej wartości początkowej, więc

$$\varphi_{B1} = 0,$$

$$\varphi_{A1} = 0,$$

a zatem cyrkulacja wzdłuż okręgu C_1 jest równa zeru.

Rozpatrzony przykład wykazuje, że gdy potencjał nie jest jednoznaczną funkcją punktów płaszczyzny, to mogą zdarzyć się zarówno obwody zamknięte, wzdłuż których cyrkulacja prędkości nie równa się zeru, jak i obwody, wzdłuż których cyrkulacja prędkości równa się zeru.

§ 12. Funkcja prądu

W aerodynamice, przy badaniu przepływów, dużą rolę odgrywa tzw. funkcja prądu ψ. Wytłumaczymy jej sens i znaczenie w nawiązaniu do płaskiego, potencjalnego, ustalonego przepływu płynu nieściśliwego.

Jak wiadomo, równanie różniczkowe linij prądu w przepływie płaskim ma postać

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

lub

$$v_x dy - v_y dx = 0. \tag{a}$$

Podstawiając do tego równania wartości v_x i v_y, wyrażone w funkcji współrzędnych x i y, oraz całkując otrzymujemy równanie wiążące x, y oraz stałą dowolną. Każdej wartości stałej dowolnej będzie odpowiadała określona linia prądu. Dwumian różniczkowy z lewej strony równania (a) całkuje się bardzo prosto, gdyż, jak to poniżej udowadniamy, jest równy różniczce zupełnej pewnej funkcji $\psi(x, y)$.

Mianowicie równanie ciągłości ma postać

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \tag{b}$$

Z równania tego wynika, że v_x i v_y możemy wyrazić za pomocą funkcji ψ w sposób następujący:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3.41}$$

Istotnie, podstawiając (3.41) do (b), otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y},$$

czyli tożsamość.

Podstawiając następnie wartości v_x oraz v_y z (3.41) do (a), będziemy mieli

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0,$$

skąd, po scałkowaniu, znajdziemy równanie linij prądu

$$\psi(x, y) = C, \tag{3.42}$$

gdzie C jest to stała dowolna.

Równanie (3.42) jest równaniem rodziny linij prądu.

Nadając stałej C różne wartości, będziemy otrzymywali rozmaite linie prądu należące do danej rodziny. Funkcja ψ nazywana jest *funkcją prądu* (lub *potencjałem prądu* — przyp. tłum.)

Porównanie wzorów (3.33) i (3.41) daje równania:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

Jeżeli potencjał prędkosci φ, stanowiący funkcję współrzędnych x i y, przyrównać do stałej

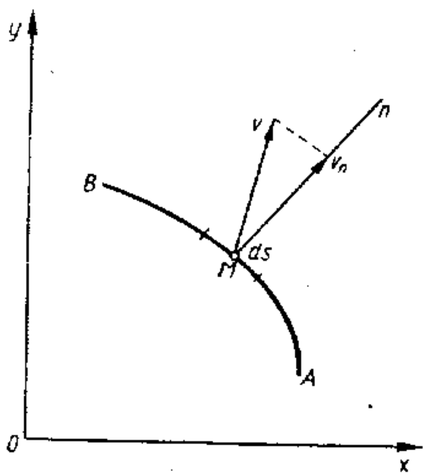
$$\varphi(x, y) = C, \tag{3.44}$$

otrzymamy równanie rodziny linij mających tę właściwość, że wzdłuż każdej takiej linii potencjał prędkości zachowuje wartość stałą. Linie te nazywane są *liniami ekwipotencjalnymi*, czyli *liniami o równym potencjale*.

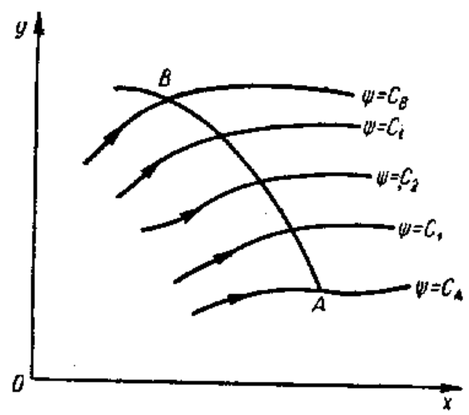
Z równań (3.43) można przez pomnożenie ustalić następujący związek pomiędzy funkcjami φ i ψ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Jak wiemy z matematyki, wyrażenie to jest warunkiem ortogonalności krzywych $\varphi(x, y) = C$ i $\psi(x, y) = C$. W ten sposób w płaskim ustalonym przepływie potencjalnym rodzina linij prądu oraz rodzina linij ekwipotencjalnych są względem siebie ortogonalne.



3.13. Do określenia fizykalnego sensu funkcji prądu



3.14. Rodzina linii prądu

Za pomocą równania (3.43) można również dowieść, że funkcja prądu ψ dla przepływu potencjalnego spełnia równanie Laplace'a. Wykorzystując mianowicie warunek potencjalności

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

oraz równanie (3.43), otrzymamy

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

czyli równanie Laplace'a.

Wyjaśnimy teraz fizyczny sens funkcji prądu ψ. Rozpatrzmy w przestrzeni, w której odbywa się płaski przepływ potencjalny, dowolny łuk łączący jakieś dwa punkty A i B (rys. 3.13).

Obierzmy na tym łuku pewien punkt M oraz oznaczmy prędkość w tym punkcie wektorem $\bar{v}$. Obliczmy elementarny wydatek w punkcie M łuku, czyli wydatek przez nieskończenie mały element łuku ds[1].

Oczywiście

$$dQ = v_n ds \cdot 1 = v_n ds,$$

gdzie v_n — rzut prędkości na normalną w punkcie M. Wiadomo że rzut prędkości na normalną v_n możemy wyrazić za pomocą rzutów prędkości na osie współrzędnych: v_x i v_y, w następujący sposób:

$$v_n = v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y),$$

skąd

$$dQ = [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)]ds.$$

Wykorzystując znane wzory na cosinusy kątów utworzonych przez normalną z osiami współrzędnych:

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$

oraz równania (3.43), otrzymamy

$$dQ = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right]ds = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy,$$

czyli

$$dQ = d\psi. \tag{3.45}$$

Jak widać, różniczka funkcji prądu równa jest wydatkowi płynu przez element łuku ds w jednostce czasu. W celu określenia wydatku przez całą krzywą AB trzeba scałkować równanie (3.45)

$$Q = \int_{AB} d\psi = \psi_B - \psi_A, \tag{3.46}$$

znaczy to, że *wydatek płynu przez dowolną krzywą AB równy jest różnicy wartości funkcji prądu w jej punktach końcowych i nie jest zależny od kształtu krzywej*. Wynika stąd, że jeżeli sama krzywa AB stanowi odcinek linii prądu, wtedy wydatek $Q = 0$ (ponieważ wzdłuż linii prądu $\psi = \text{const}$). Z równania (3.46) oraz rysunku 3.14 widać, że masa płynu przepływająca pomiędzy dwiema liniami prądu, na przykład $\psi = C_A$ i $\psi = C_B$, jest na całej ich długości wielkością

[1] Przez wydatek płynu przez pewien łuk przy przepływie płaskim rozumiemy wydatek przez powierzchnię walcową, zbudowaną na tym łuku o tworzącej, której wysokość równa jest jedności.

stałą. Jeżeli obwód jest zamknięty, tzn. jeżeli punkty A i B pokrywają się, wtedy przy jednoznaczności funkcji prądu ψ wydatek $Q = 0$.

Jeżeli natomiast ψ jest funkcją niejednoznaczną, to znaczy jeżeli przy całkowitym okrążeniu obwodu funkcja prądu nie wraca do swej wartości początkowej, wtedy wydatek Q przez taki obwód będzie różny od zera. Może to zachodzić, jeżeli wewnątrz obwodu odbywa się dopływ lub odpływ płynu, tzn. jeżeli wewnątrz obwodu znajdują się tak zwane źródła lub upusty (szczegóły patrz § 16).

§ 13. Metoda superpozycji (nakładania) przepływów potencjalnych

Przy badaniu przepływów potencjalnych duże znaczenie praktyczne ma metoda superpozycji przepływów potencjalnych, której istotę omówimy poniżej. Załóżmy, że mamy dwa przepływy potencjalne o potencjałach φ_1 i φ_2 spełniających, jak wiadomo, równanie Laplace'a, to znaczy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

W tym przypadku[1] potencjał prędkości, równy ich sumie

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{3.48}$$

będzie również spełniał równanie Laplace'a, czyli będzie określał pewien przepływ płynu nieściśliwego. Na podstawie (3.48) i (3.47) będziemy więc mieli

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Nowy złożony przepływ o potencjale $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ powstaje z nałożenia dwóch przepływów wyjściowych, czyli z geometrycznego sumowania w każdym punkcie przestrzeni prędkości pierwszego i drugiego przepływu. Dla przepływu złożonego

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = v_{x1} + v_{x2}, \\ v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = v_{y1} + v_{y2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Analogicznie możemy wykazać, że dla nowego przepływu złożonego funkcja prądu

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \tag{3.50}$$

[1] Ze względu na liniowość równania Laplace'a (przyp. red.).

to znaczy równa jest algebraicznej sumie funkcji prądu przepływów wyjściowych.

A więc *nałożenie dwóch lub więcej przepływów sprowadza się do zwykłego algebraicznego sumowania potencjału prędkości oraz funkcji prądu przepływów wyjściowych.*

W ten sposób, gdy znane są poszczególne rozwiązania równania Laplace'a (3.38) lub (3.38'), to na skutek liniowości tego równania każda liniowa kombinacja poszczególnych rozwiązań będzie również jego rozwiązaniem.

Dysponując szeregiem prostszych rozwiązań odpowiadających prostym przepływom płynu, możemy uzyskać drogą sumowania tych rozwiązań rozwiązania bardziej złożone, odpowiadające bardziej złożonym przepływom.

W paragrafach następnych rozważone zostaną najbardziej charakterystyczne przykłady prostszych płaskich ustalonych przepływów potencjalnych, z których nałożenia można otrzymać ważne pod względem praktycznym przepływy złożone.

§ 14. Prostoliniowy przepływ jednowymiarowy

Załóżmy, że przepływ płaski dany jest przez potencjał

$$\varphi = ax + by,$$

gdzie a i b — pewne liczby rzeczywiste.

W celu zbadania charakteru przepływu zróżniczkujemy potencjał względem współrzędnych x i y; otrzymamy wtedy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = b.$$

Składowe prędkości przepływu wzdłuż osi współrzędnych są zatem

$$v_x = a \quad \text{i} \quad v_y = b,$$

to znaczy, że przepływ ma prędkość stałą v, równą

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Znajdźmy linie prądu. Ponieważ równanie linij prądu

$$d\psi = v_x dy - v_y dx,$$

więc w danym przypadku

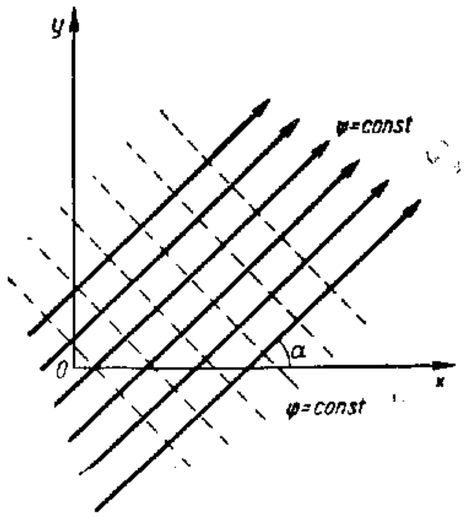
$$d\psi = a\,dy - b\,dx,$$

skąd

$$\psi = ay - bx.$$

Widoczne jest, że linie prądu stanowią rodzinę prostych równoległych

$$\psi = ay - bx = \text{const},$$



3.15. Prostoliniowy przepływ jednostajny o równoległych liniach prądu

nachylonych względem osi x pod kątem α, którego tangens $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{b}{a}$ (rys. 3.15). Jeżeli przepływ skierowany jest równolegle do osi x, funkcje φ i ψ mają postać

$$\varphi = ax, \quad \psi = ay; \tag{3.51}$$

przy przepływie skierowanym równolegle do osi y

$$\varphi = by, \quad \psi = -bx. \tag{3.52}$$

§ 15. Przepływ w narożu prostokątnym

Załóżmy, że przepływ płaski dany jest przez następujący potencjał prędkości:

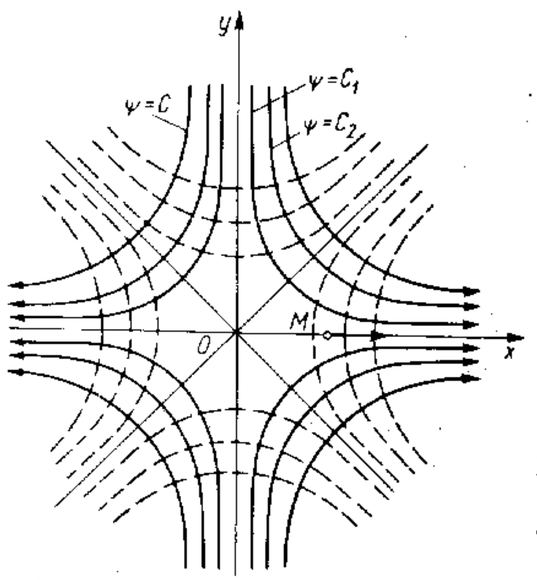
$$\varphi = a(x^2 - y^2), \tag{3.53}$$

gdzie stała a jest liczbą rzeczywistą i prócz tego $a > 0$. Zanim przejdziemy do badania tego przepływu, wykażemy, że jeżeli znane jest φ, można na podstawie równań (3.43) określić funkcję prądu ψ (oraz odwrotnie, jeżeli dana jest funkcja ψ — znaleźć φ). Istotnie, z równania pierwszego (3.43)

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

znajdujemy

$$\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy + C(x). \tag{a}$$



3.16. Linie prądu oraz linie ekwipotencjalne dla przepływu, określanego potencjałem prędkości $\varphi = a(x^2 - y^2)$

Stała całkowania C jest funkcją x, ponieważ przy całkowaniu względem y ustala się tylko zmienna x. Podstawiając wartość $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, znajdujemy z równania (3.53):

$$\psi = \int 2ax\,dy + C(x) = 2axy + C(x). \tag{b}$$

W celu określenia dowolnej funkcji $C(x)$ zróżniczkujemy równanie (b) względem x. Otrzymamy

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2ay + \frac{dC}{dx}. \tag{c}$$

Wykorzystując drugie równanie (3.43) $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, będziemy mieli

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2ay + \frac{dC}{dx}.$$

Ponieważ w danym przypadku

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay.$$

zatem

$$2ay = 2ay + \frac{dC}{dx},$$

$$\frac{dC}{dx} = 0, \quad \text{to znaczy} \quad C(x) = \text{const}.$$

Podstawiając znalezioną wartość $C(x)$ do równania (b), otrzymamy

$$\psi = 2axy + \text{const},$$

a opuszczając stałą dowolną otrzymamy ostatecznie równanie funkcji prądu rozpatrywanego przepływu

$$\psi = 2axy. \tag{3.54}$$

W celu znalezienia linij prądu przyrównamy funkcję prądu ψ do stałej:

$$\psi = 2axy = \text{const},$$

skąd

$$xy = C,$$

czyli linie prądu stanowią rodzinę hiperbol o asymptotach będących osiami współrzędnych (rys. 3.16). Przy $C > 0$ albo $x > 0$, $y > 0$ albo $x < 0$, $y < 0$, tzn. obie gałęzie hiperbol leżą w pierwszej i trzeciej ćwiartce. Przy $C < 0$ albo $x < 0$, $y > 0$, albo $x > 0$, $y < 0$, tzn. obie gałęzie hiperbol leżą w ćwiartce drugiej i czwartej. Jeżeli $C = 0$ — linie prądu stanowią osie współrzędnych $x = 0$, $y = 0$; stąd wniosek, że osie współrzędnych stanowią *zerowe* linie prądu (*zerowymi* liniami prądu będziemy nazywali linie prądu odpowiadające wartości $C = 0$). Łatwo się przekonać, że w początku układu $v_x = v_y = 0$. Punkt przepływu, w którym prędkość równa się zeru, nazywany jest *punktem krytycznym*[1]. W celu określenia kierunku przepływu rozpatrzymy pewien punkt M na osi x o współrzędnych $x > 0$, $y = 0$. Dla punktu M będziemy mieli

$$v_{xM} = 2ax > 0,$$

$$v_{yM} = 0,$$

co oznacza, że prędkość w punkcie M skierowana jest zgodnie z dodatnim zwrotem osi x; taki kierunek przepływu przedstawiono na rys. 3.16 liniami ciągłymi.

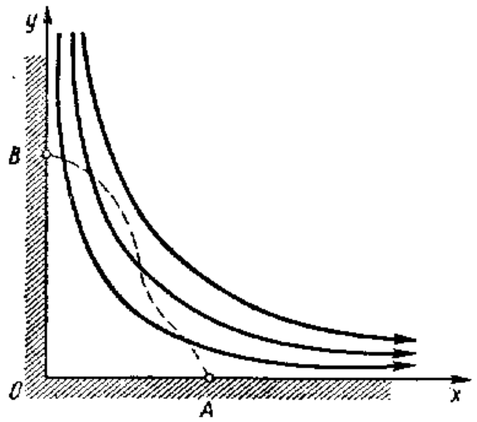
Jeżeli potencjał prędkości φ przyrównać do wielkości stałej, otrzymamy równanie rodziny linij ekwipotencjalnych. W danym przypadku rodzina linij

$$\varphi = a(x^2 - y^2) = \text{const}$$

[1] Również *punktem spiętrzenia* (przyp. tłum.).

będzie stanowiła rodzinę hiperbol o asymptotach będących dwusiecznymi kątów współrzędnych, ortogonalną do rodziny hiperbol $xy = C$.

Jeżeli dodatnie półosie x i y, stanowiące zerowe linie prądu, będziemy traktowali jako sztywne ścianki (w przypadku płynu doskonałego można z uwagi na brak lepkości zawsze tak postąpić nie zmieniając charakteru przepływu), wówczas badany przepływ będzie przepływem w narożu prostokątnym (rys. 3.17).



3.17. Opływ naroża prostokątnego

Obliczymy wydatek płynu przez dowolną krzywą AB, której końce znajdują się w puktach $A(x, 0)$ i $B(0, y)$. W tym przypadku

$$Q = \psi_B - \psi_A = (2\,a\,x\,y)_B - (2\,a\,x\,y)_A = 0;$$

powinno tak być, ponieważ punkty A i B leżą na jednej i tej samej linii prądu $\psi = 0$, składającej się z dwóch półprostych. Masa płynu dopływającego w danym odcinku czasu przez krzywą AB do obszaru AOB jest zatem równa masie płynu wypływającego z tego obszaru przez tę samą krzywą.

§ 16. Źródło i upust

Niech potencjał prędkości dany będzie w następującej postaci:

$$\varphi = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.55}$$

lub we współrzędnych biegunowych

$$\varphi = \ln r. \tag{3.56}$$

Znajdźmy przede wszystkim funkcję prądu na podstawie równania (3.43). Z równania pierwszego

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

mamy

$$\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy + C(x). \tag{a}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

więc

$$\psi = \int \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy + C(x)$$

lub

$$\psi = \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + C(x).$$

Całkując znajdujemy

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + C(x). \tag{b}$$

W celu określenia funkcji dowolnej $C(x)$ zróżniczkujmy równanie (b) względem x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x)$$

lub

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} + C'(x). \tag{c}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

zatem, podstawiając znaleziony wyraz $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ do (c), otrzymamy

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C'(x),$$

skąd

$$C'(x) = 0 \quad \text{lub} \quad C(x) = \text{const}.$$

W ten sposób funkcję prądu dla danego przepływu przedstawia (z dokładnością do stałej dowolnej) wyrażenie:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.57}$$

lub we współrzędnych biegunowych

$$\psi = \theta. \tag{3.58}$$

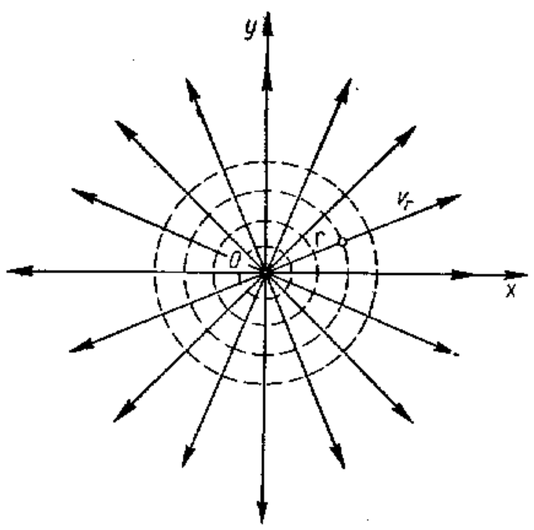
Zbadamy obecnie charakter przepływu. Znajdziemy w tym celu linie prądu, przyrównując funkcję prądu do stałej

$$\psi = \theta = \text{const.}$$

Widzimy z otrzymanego wyrażenia, że zbiór linij prądu stanowi rodzinę prostych, przechodzących przez początek układu (rys. 3.18). W celu znalezienia kierunku przepływu znajdziemy v_r. Oczywiście

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} > 0,$$

to znaczy, że kierunek prędkości zgodny jest z kierunkiem promienia wodzącego. Przepływ taki (rys. 3.18) nazywany jest *źródłem*. Płyn wypływa z początku układu (źródła) wzdłuż linij prądu stanowiących rodzinę promieni prostoliniowych.



3.18. Wypływ ze źródła

W celu otrzymania rodziny linij ekwipotencjalnych trzeba potencjał prędkości przyrównać do stałej:

$$\varphi = \ln r = \text{const}, \text{ to znaczy } r = \text{const.}$$

Linie ekwipotencjalne stanowią zatem rodzinę okręgów współśrodkowych (linie przerywane na rys. 3.18) ortogonalnych do linij prądu; ich środki leżą w początku układu.

Załóżmy, że wydatek płynu wypływającego ze źródła równa się Q. Wielkość Q będziemy nazywali natężeniem źródła. Ustalmy związek między natężeniem źródła a funkcjami φ i ψ. Zgodnie z warunkiem ciągłości wydatek płynu Q, przepływający przez okrąg o promieniu r, równa się:

$$Q = 2\pi r v_r.$$

Ponieważ

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr}$$

(gdyż φ zależy wyłącznie od r), więc

$$Q = \frac{d\varphi}{dr} 2\pi r,$$

skąd

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

Całkując, znajdziemy

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r. \tag{3.59}$$

Łatwo jest wykazać, że funkcja ψ będzie miała postać

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta. \tag{3.60}$$

Widzimy teraz, że równania (3.55) ÷ (3.58) przedstawiają potencjał prędkości oraz funkcję prądu źródła, którego natężenie $Q = 2\pi$.

W przypadku gdy płyn przepływa w kierunku odwrotnym, tzn. dopływa wzdłuż promieni do początku układu, przepływ nazywamy *upustem*. Funkcje φ i ψ dla upustu o natężeniu Q będą się różniły od analogicznych funkcji dla źródła jedynie znakiem, czyli dla upustu:

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r, \tag{3.61}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta. \tag{3.62}$$

§ 17. Źródło podwójne (dipol)

Dipolem lub *źródłem podwójnym* nazywana jest kombinacja źródła o natężeniu Q oraz upustu o natężeniu $-Q$, położonych w nieskończenie małej odległości od siebie. Korzystając z metody superpozycji, można potencjał dipola napisać w postaci (rys. 3.19)

$$\varphi = \varphi_{\text{źr}} + \varphi_{\text{up}} = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Oznaczając przez x, y współrzędne dowolnego punktu M, przez r_1 i r_2 — odległości punktu M od źródła i upustu, znajdziemy zgodnie z rys. 3.19

$$r_1 = \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}.$$

Równanie potencjału prędkości przyjmie przy tym postać

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+\varepsilon)^2 + y^2}{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}$$

lub

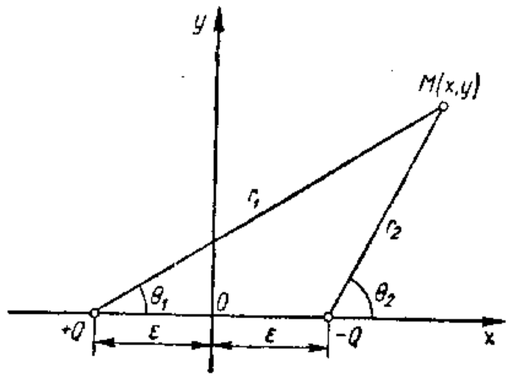
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \{\ln[(x+\varepsilon)^2 + y^2] - \ln[(x-\varepsilon)^2 + y^2]\}.$$

Jeżeli następnie będziemy zbliżali do siebie źródło i upust, to wielkość ε będzie dążyła do zera. Oznaczamy

$$F(x, y) = \ln (x^2 + y^2). \tag{a}$$

W takim razie poprzednie wyrażenie można przepisać w następującej formie:

$$\varphi = \frac{Q\,2\varepsilon}{4\pi}\,\frac{F(x+\varepsilon, y) - F(x-\varepsilon, y)}{2\varepsilon}. \tag{b}$$



3.19. Źródło podwójne (dipol)

Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$, tj. zbliżając źródło do upustu, będziemy zakładać, że wydatki ich wzrastają nieograniczenie w ten sposób, że w granicy iloczyn $Q\,2\varepsilon$ dąży do pewnej wielkości skończonej M. Wielkość M nazywa się momentem źródła podwójnego (momentem dipola) i przeważnie przedstawia się go w formie wektora zwróconego w kierunku od upustu do źródła. W tym przypadku oś x nazywa się osią źródła podwójnego (osią dipola). Wyrażenie (b) przyjmie w granicy kształt

$$\varphi = \frac{M}{4\pi}\,\frac{\partial F}{\partial x};$$

a więc różniczkując wyrażenie (a)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

znajdujemy

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\,\frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{3.63}$$

Rozważymy teraz funkcję prądu dla rozpatrywanego przepływu. Łatwo przekonać się, że funkcja prądu będzie miała postać

$$\psi = \psi_{\text{ar}} + \psi_{\text{up}} = \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2).$$

Ponieważ z rys. 3.19 wynika, że

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y}{x+\varepsilon}, \qquad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{y}{x-\varepsilon},$$

więc wyrażenie na funkcję prądu przyjmie formę

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-\varepsilon}\right].$$

Oznaczmy

$$F_1(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

W tym przypadku wyrażenie na ψ można napisać w sposób następujący:

$$\psi = \frac{Q\,2\varepsilon}{2\pi}\,\frac{F_1(x+\varepsilon, y) - F_1(x-\varepsilon, y)}{2\varepsilon}$$

lub w granicy dla $\varepsilon = 0$:

$$\psi = \frac{M}{2\pi}\,\frac{\partial F_1}{\partial x}.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

więc

$$\psi = -\frac{M}{2\pi}\,\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{3.64}$$

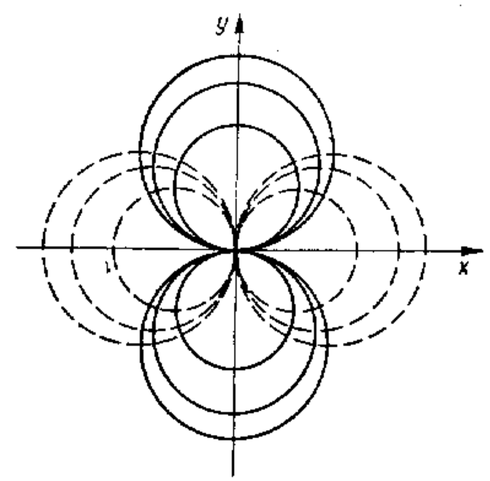
Określiwszy potencjał prędkości φ (3.63) i funkcję prądu φ (3.64) źródła podwójnego będzie można wyznaczyć dla niego linie prądu oraz linie stałego potencjału prędkości.

W celu określenia linij prądu przyrównamy funkcję prądu do stałej

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

skąd

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$



3.20. Linie prądu oraz linie ekwipotencjalne źródła podwójnego

Wszystkie linie prądu będą stanowiły rodzinę okręgów ze środkami na osi y, stycznych do osi x w początku układu (rys. 3.20). Płyn wypływa wzdłuż wymienionych okręgów z początku układu i ponownie do niego wpływa. W tym przypadku wydatek płynu przez dowolny zamknięty obwód, otaczający źródło podwójne, równa się zeru.

Zbiór linij ekwipotencjalnych

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$$

będzie stanowił rodzinę okręgów, ortogonalnych do linij prądu, ze środkami na osi x, stykających się z osią y w początku układu (rys. 3.20).

§ 18. Wir

W paragrafie 16 otrzymaliśmy równania potencjału prędkości φ oraz funkcji prądu ψ dla źródła płaskiego:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta,$$

gdzie Q — natężenie źródła. Rozpatrzymy teraz taki przepływ płaski, w którym potencjał prędkości φ stanie się funkcją prądu ψ i odwrotnie:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \theta,$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

gdzie Q — pewna stała, której sens fizyczny dla nowego przepływu należy określić.

W celu określenia charakteru przepływu znajdziemy linie prądu, przyrównując funkcję prądu do stałej:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \text{const}$$

lub

$$r = \text{const}.$$

W danym przypadku zatem wszystkie linie prądu będą stanowiły rodzinę okręgów współśrodkowych ze środkami w początku układu. Znajdźmy kierunek przepływu; obliczymy w tym celu prędkość w dowolnym punkcie M (rys. 3.21) o współrzędnych biegunowych r i θ. Korzystając z otrzymanych poprzednio równań rzutu prędkości v_r na promień wodzący oraz na prostopadły do niego kierunek v_s, będziemy mieli

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} > 0.$$

Prędkość v w punkcie M jest zatem skierowana wzdłuż stycznej do okręgu o promieniu r i punkt M porusza się wzdłuż niej w kierunku rosnących kątów θ, to znaczy w kierunku przeciwnym do wskazówki zegara. W ten sposób

wszystkie punkty płynu poruszają się po okręgach współśrodkowych ze stałą dla danego okręgu prędkością.

Taki ruch płynu nazywany jest *wirem płaskim*, zaś początek układu — *środkiem wiru*. Wynika stąd, że wzdłuż osi z znajduje się nieskończenie długi wir prostoliniowy, powodujący w prostopadłej do niego płaszczyźnie ruch elementów płynu po okręgach współśrodkowych (bardziej szczegółowe uwagi na ten temat znajdują się w rozdz. V).

Wytłumaczmy sens fizyczny stałej Q. Obliczymy w tym celu wartość cyrkulacji w rozpatrywanym przepływie:

$$\Gamma = \oint v_s ds.$$

Podstawiając $v_s = \frac{Q}{2\pi r}$ oraz całkując wzdłuż okręgu o promieniu r, znajdziemy

$$\Gamma = \oint \frac{Q}{2\pi r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r\, d\theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

lub

$$Q = \Gamma,$$

wynika stąd, że stała dowolna Q równa jest cyrkulacji Γ (jak to zostanie wykazane w rozdz. V, pojęcie cyrkulacji związane jest z tzw. natężeniem wiru, wskutek czego cyrkulacja rozpatrywanego przepływu będzie całkowicie zależała od natężenia wiru; wraz ze wzrostem tego ostatniego cyrkulacja będzie rosła i na odwrót).

W ten sposób równania potencjału prędkości oraz funkcji prądu dla wiru płaskiego przybierają postać:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \tag{3.65}$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \tag{3.66}$$

Przyrównując potencjał prędkości φ do stałej, znajdziemy rodzinę linij ekwipotencjalnych:

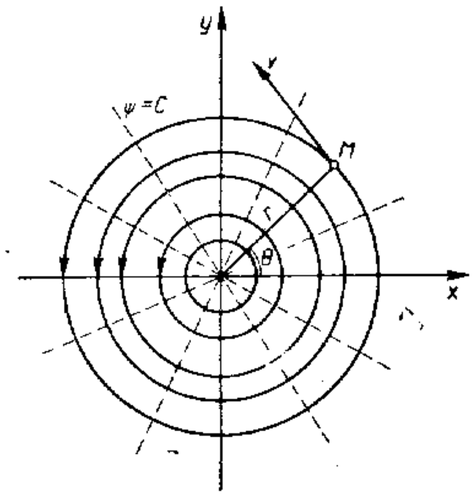
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \text{const}.$$

lub

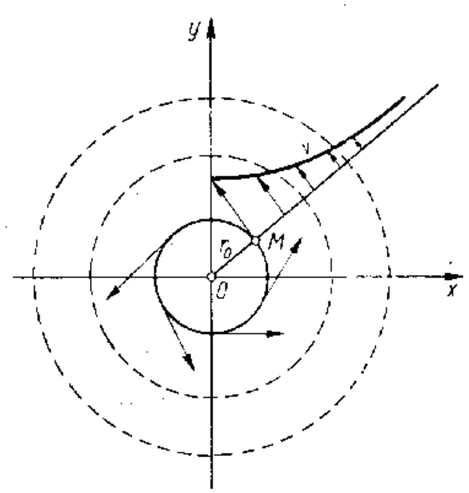
$$\theta = \text{const},$$

to znaczy, że zbiór linij ekwipotencjalnych stanowi rodzinę prostych, wychodzących z początku układu i ortogonalnych względem linij prądu (rys. 3.21).

Przyjmiemy jedną jakąś linię prądu, na przykład okrąg o promieniu $r = r_0$, jako przekrój sztywnej ścianki, co nie zmieni charakteru przepływu i będziemy rozpatrywali przepływ na zewnątrz tego okręgu. Otrzymamy wówczas tzw. *opływ wyłącznie cyrkulacyjny* nieskończenie długiego (w kierunku osi z) walca kołowego o promieniu r_0, przy którym to opływie wszystkie linie prądu są współśrodkowymi walcami kołowymi.



3.21. Wir płaski kołowy



3.22. Opływ walca kołowego, wywołany samą tylko cyrkulacją

Prędkość v w dowolnym punkcie na zewnątrz walca wyrazi się w postaci następującej:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{3.67}$$

Prędkość będzie osiągała wartość maksymalną na powierzchni walca kołowego

$$v_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

W miarę oddalania się od walca, to znaczy wraz ze zwiększaniem się promienia r, prędkość będzie malała i w nieskończoności

$$v_\infty = 0.$$

Jak widać z równania (3.67), prędkość będzie malała hiperbolicznie

$$v r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const};$$

zależność ta jest przedstawiona wykreślnie na rys. 3.22.

Można zatem wyciągnąć ostateczny wniosek, że potencjał

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

stanowi potencjał wyłącznie cyrkulacyjnego opływu walca kołowego.

§ 19. Bezcyrkulacyjny opływ walca kołowego

W paragrafie niniejszym rozpatrzony zostanie złożony przepływ płaski, powstały wskutek nałożenia dwóch zbadanych poprzednio przepływów:

1. Jednowymiarowego przepływu płaskiego o równoległych liniach prądu w kierunku osi x z prędkością, równą jedności:

$$\varphi = x, \quad \psi = y.$$

2. Przepływu wywołanego źródłem podwójnym o momencie $M = 2\pi$:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Jak już zostało powiedziane (§ 13), w celu znalezienia potencjału prędkości φ oraz funkcji prądu ψ przepływu złożonego należy zsumować potencjały i funkcje prądu przepływów wyjściowych. W rozpatrywanym przypadku będziemy zatem mieli następujące równania funkcji φ i ψ przepływu złożonego:

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \tag{3.68}$$

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{3.69}$$

W celu znalezienia linii prądu, przyrównamy funkcję prądu do stałej:

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

skąd

$$y[(x^2 + y^2) - 1] = C(x^2 + y^2).$$

Widzimy, że linie prądu stanowią rodzinę krzywych trzeciego stopnia. W celu określenia obrazu przepływu znajdziemy zerową linię prądu (odpowiadającą $C = 0$). Dla zerowej linii prądu otrzymujemy dwa równania:

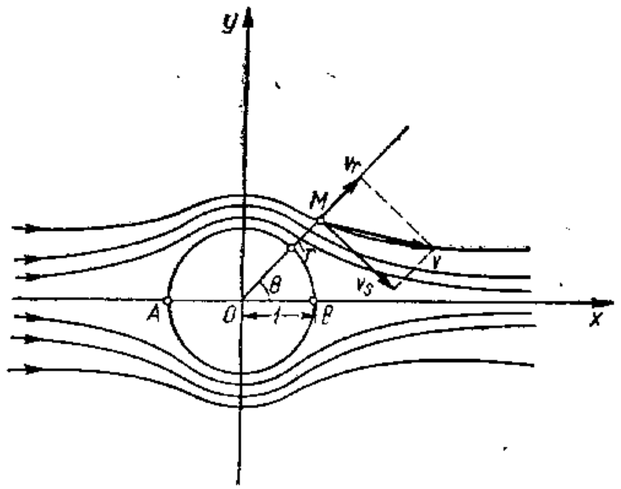
$$y = 0$$

oraz

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Zerową linię prądu stanowi zatem oś x oraz okrąg o promieniu równym

jedności ze środkiem w początku układu. Przyjmując wskazany okrąg jako przekrój ścianki sztywnej oraz rozpatrując przepływ na zewnątrz tego okręgu, można otrzymany przepływ traktować jako opływ nieskończenie długiego walca o promieniu jednostkowym. Linie prądu będą wyglądały jak na rys. 3.23. Wykażemy teraz, że w dostatecznie dużej odległości od walca lub, jak przyjęto mówić, w nieskończoności, prędkość jest istotnie skierowana zgodnie z do-



3.23. Bezcyrkulacyjny opływ walca kołowego

datnim zwrotem osi x i równa jest $v_\infty = +1$ (v_∞ stanowi prędkość przepływu niezakłóconego w dostatecznie dużej odległości od walca). Znajdźmy rzuty prędkości v_x i v_y:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

lub we współrzędnych biegunowych:

$$v_x = 1 - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2};$$

$$v_y = -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}.$$

Przechodząc do granicy przy $r \to \infty$, otrzymamy $(v_x)_{r=\infty} = +1$, $(v_y)_{r=\infty} = 0$.

Punkty przecięcia się A i B zerowych linij prądu na walcu będą punktami krytycznymi. Aby to wykazać, wyrazimy potencjał prędkości (3.68) we współrzędnych biegunowych:

$$\varphi = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta. \tag{3.70}$$

Znajdziemy rzuty prędkości w punkcie M (rys. 3.23) na promień biegunowy r oraz na prostopadły doń kierunek, czyli v_r i v_s:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Ze wzoru na v_s widać, że cyrkulacja prędkości dokoła walca równa jest zeru. Istotnie, całkując wzdłuż okręgu obejmującego walec, otrzymamy:

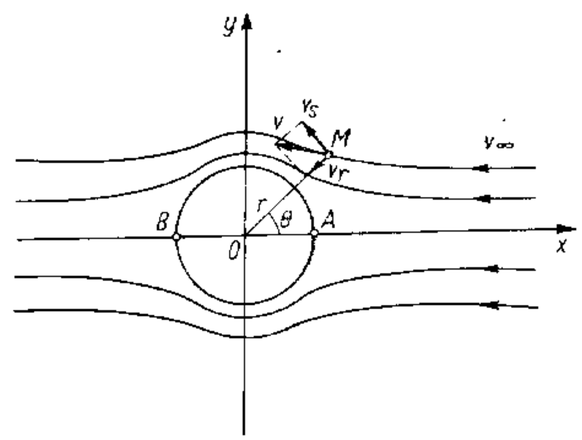
$$\Gamma = \oint v_s\, ds = \int_0^{2\pi} v_s\, r\, d\theta = \left[r\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Sprawdzimy, czy spełnione zostały warunki brzegowe, polegające na tym, że opływ walca odbywa się bez oderwania strug, tzn. że w każdym jego punkcie prędkości elementów płynu skierowane są wzdłuż stycznej.

Na walcu, czyli przy $r = 1$,

$$(v_r)_{r=1} = 0, \qquad (v_s)_{r=1} = -2\sin\theta.$$

Wynik pierwszy wykazuje, że przy opływie walca nie zachodzi oderwanie strug, tzn. że prędkość jest wszędzie skierowana wzdłuż stycznej i strugi nie



3.24. Bezcyrkulacyjny opływ walca kołowego

odrywają się od walca. Oznaczając wielkość (moduł) prędkości na walcu przez v, znajdujemy z równania drugiego

$$v = 2\,|\sin\theta|.$$

Otrzymane równanie daje rozkład prędkości wzdłuż powierzchni walca. W punkcie A kąt $\theta = 0$, a zatem $v = 0$; w punkcie B kąt $\theta = \pi$; zatem $v = 0$. Punkty A i B są więc istotnie punktami krytycznymi.

Łatwo przekonać się, że w przypadku przepływu mającego w nieskończoności prędkość v_∞ zwróconą przeciwnie do osi x oraz opływającego walec o promieniu $r = r_0$, potencjał prędkości φ wyrazi się za pomocą następującego równania:

$$\varphi = -v_\infty\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right)\cos\theta. \tag{3.71}$$

Rzuty prędkości v_r i v_s w dowolnym punkcie M przybiorą w danym przypadku następującą postać (rys. 3.24):

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -v_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = v_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Wielkość (moduł) prędkości na walcu znajdziemy wtedy na podstawie równania:

$$v = 2\,v_\infty|\sin\theta|. \tag{3.72}$$

Oznacza to, że w każdym punkcie powierzchni walca prędkość równa jest podwojonej prędkości w nieskończoności, pomnożonej przez sinus odpowiedniego kąta biegunowego. Punkty A i B będą, jak dawniej, punktami krytycznymi.

Jeżeli $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, to $v = v_{max} = 2\,v_\infty$. Świadczy to o tym, że w punktach przecięcia się okręgu z osią rzędnych prędkość v przybiera wartość maksymalną, niezależną od promienia walca i równą podwojonej prędkości w nieskończoności.

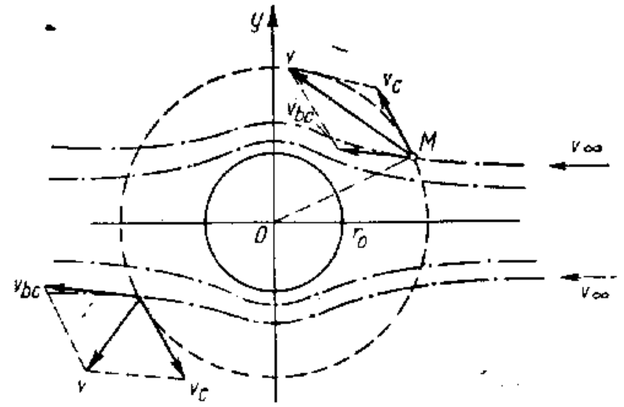
§ 20. Cyrkulacyjny opływ walca kołowego

W celu otrzymania tak zwanego cyrkulacyjnego opływu walca kołowego nałóżmy na przepływ, rozpatrzony w paragrafie poprzednim, przepływ wyłącznie cyrkulacyjny, wywołany wirem płaskim, leżącym w początku układu współrzędnych (§ 18). Po dodaniu potencjałów prędkości wymienionych przepływów otrzymamy:

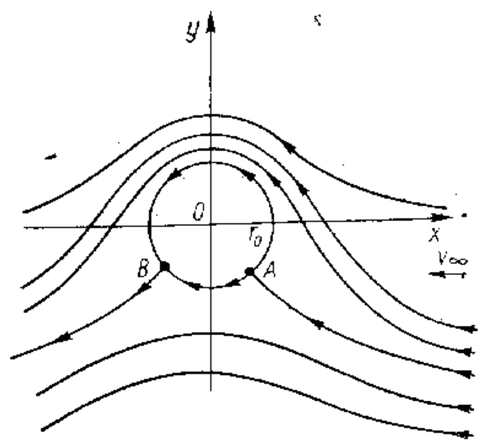
$$\varphi = -v_\infty\cos\theta\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta. \tag{3.73}$$

W ten sposób w każdym punkcie M dodana zostanie do prędkości v_{bc} przepływu bezcyrkulacyjnego prędkość v_c przepływu wyłącznie cyrkulacyjnego; prędkość wypadkową przedstawiać będzie przekątna równoległoboku, zbudowanego z prędkości v_{bc} i v_c (rys. 3.25).

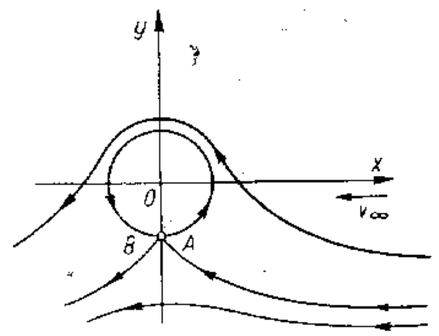
Nałożenie przepływu cyrkulacyjnego zakłóci oczywiście symetrię linij prądu, ponieważ „u góry" prędkość przepływu wyłącznie cyrkulacyjnego będzie skierowana w tę samą stronę co prędkość przepływu bezcyrkulacyjnego, „u dołu" zaś prędkość przepływu cyrkulacyjnego będzie skierowana w stronę przeciwną. W związku z tym obraz przepływu przybierze postać przedstawioną na rys. 3.26. Wskutek dodania prędkości powstanie nad walcem obszar prędkości zwiększonych, natomiast pod walcem — obszar prędkości zmniejszonych, ponieważ na dole prędkości odejmują się.



3.25. Nałożenie przepływu cyrkulacyjnego na bezcyrkulacyjny opływ walca kołowego



3.26. Cyrkulacyjny opływ walca kołowego ($\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$)



3.27. Cyrkulacyjny opływ walca kołowego ($\Gamma = 4\pi\, v_\infty\, r_0$)

Krytyczne punkty A i B będą w danym przypadku leżały nie na osi x, lecz na powierzchni walca, poniżej osi x. Znajdźmy kąt θ_{kr} określający położenie punktów krytycznych. W tym celu znajdziemy rzuty prędkości v_r i v_s w dowolnym punkcie M przepływu.

Ponieważ

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -v_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = v_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

więc dla punktów położonych na walcu, gdzie $r = r_0$:

$$(v_r)_{r=r_0} = 0,$$

$$(v_s)_{r=r_0} = 2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Jak w przypadku poprzednim, pierwsze równanie wskazuje na opływ bez oderwania, drugie zaś równanie daje wzór na prędkość v na walcu:

$$v = 2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \tag{3.74}$$

Ponieważ w punktach spiętrzenia prędkość $v = 0$, więc przyrównując prawą stronę do zera, znajdziemy:

$$2v_\infty \sin\theta_{kr} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0,$$

skąd

$$\sin\theta_{kr} = -\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty r_0}. \tag{3.75}$$

Tej wartości sinusa będą oczywiście odpowiadały dwa kąty (przy $\Gamma > 0$) w trzeciej i czwartej ćwiartce (w których sinus jest ujemny), określające położenie punktów spiętrzenia A i B. Jak widać ze wzoru (3.75), ze wzrostem Γ punkty spiętrzenia będą się przesuwały w dół. W przypadku gdy

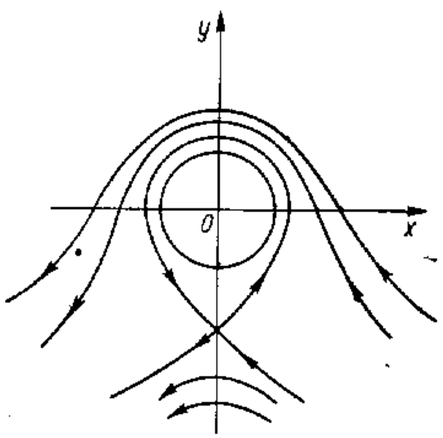
$$\Gamma = 4\pi v_\infty r_0$$

otrzymamy

$$\sin\theta_{kr} = -1.$$

Oznacza to, że punkty spiętrzenia zlały się w jeden punkt i przepływ będzie się kształtował tak, jak na rys. 3.27. Przy dalszym wzroście Γ, tzn. przy

$$\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$$



3.28. Cyrkulacyjny opływ walca kołowego ($\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$)

punkty spiętrzenia nie będą leżały na walcu, ponieważ sinus nie może przekraczać jedności i przepływ będzie się kształtował jak na rys. 3. 28. W przeciwieństwie do przypadku poprzedniego, w którym cały płyn po opłynięciu walca

oddalał się do nieskończoności, część płynu cyrkuluje stale wokół walca, przy czym jest ona od pozostałego płynu oddzielona zamkniętą linią prądu.

Na zakończenie udowodnijmy, że w rozpatrywanym przypadku cyrkulacja prędkości dokoła walca będzie ściśle równa cyrkulacji wiru. Istotnie, całkując wzdłuż okręgu o promieniu r, będziemy mieli

$$\oint v_s\, ds = \int_0^{2\pi}\left[v_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right] r\, d\theta = \Gamma.$$

Rozdział IV

PODSTAWY HYDRODYNAMIKI PŁYNÓW DOSKONAŁYCH

§ 1. Równania różniczkowe płynu doskonałego w postaci Eulera

Jak już wspomnieliśmy, dynamika płynu doskonałego opracowana została przez słynnego matematyka i mechanika, członka Rosyjskiej Akademii Nauk, L. Eulera w r. 1755, który po raz pierwszy podał podstawowe równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego.

Wyprowadźmy równania różniczkowe dla dowolnego doskonałego płynu ściśliwego poruszającego się względem prostokątnego układu współrzędnych xyz. Wyodrębnijmy w określonej chwili spośród wszystkich poruszających się elementów płynu element dowolny o kształcie prostopadłościanu i o wymiarach dx, dy, dz (rys. 4. 1). Jeżeli wymiary dx, dy, dz będą dążyły do zera, wówczas w granicy rozważany prostopadłościan przejdzie w punkt.

Dynamiczne równania ruchu płynu otrzymamy za pomocą zasady d'Alemberta.

Zakładając, że w danej chwili nieskończenie mały element płynu jak gdyby zesztywniał, rozpatrzymy warunki równowagi tego elementu. Jak wiadomo, warunki równowagi stanowi sześć równań równowagi — trzy równania dla rzutów sił na osie współrzędnych oraz trzy równania momentów. W celu ułożenia tych równań należy zdać sobie sprawę z sił, jakie będą działały na rozważany element płynu.

Na powierzchnię ograniczającą element będą działały siły powierzchniowe $P_1, \ldots, P_6$ będące wynikiem oddziaływania otaczającego płynu na rozpatrywany element (rys. 4. 1). Wielkość każdej z tych sił wyraża się iloczynem średniego ciśnienia hydrodynamicznego p[1], działającego na odpowiednią ściankę przez pole powierzchni ds tej ścianki.

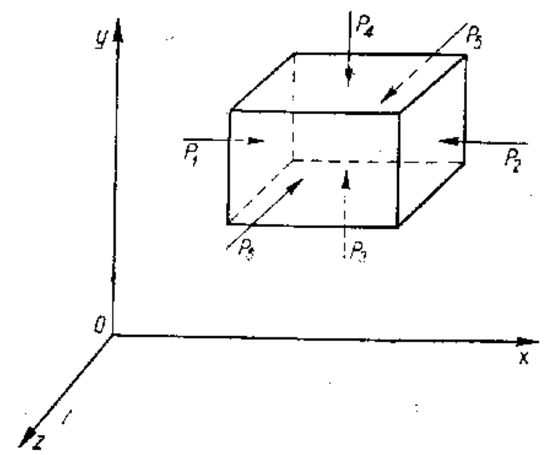
Oprócz sił powierzchniowych będą na element działały siły masowe rozłożone w całej jego objętości, tzn. oddziaływające na każdy punkt wewnątrz elementu (np. siły ciężkości). Rzuty sił masowych, odniesionych do jednostki masy elementu, oznaczymy przez X, Y i Z. Aby otrzymać rzuty sił masowych

[1] Z uwagi na założenie płynu doskonałego siły powierzchniowe są normalne do powierzchni, na którą działają (przyp. tłum.).

działających na cały element, trzeba wartości X, Y, Z pomnożyć przez masę elementu, równą $\varrho\, dx\, dy\, dz$. Rzuty siły masowej mogą być zatem napisane w postaci

$$\varrho X\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho Y\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho Z\, dx\, dy\, dz.$$

Po ustaleniu, jakie siły działające na element płynu — powierzchniowe siły $P_1, P_2, \ldots, P_6$ i masowe siły X, Y, Z — w celu otrzymania równań równowagi należy zastosować zasadę d'Alemberta. Zgodnie z tą zasadą siły powierzchniowe i masowe, działające na element, są w każdej chwili zrównoważone przez siły



4.1. Do wyprowadzenia różniczkowych równań ruchu w postaci Eulera

bezwładności. Znajdźmy siły bezwładności. Oznaczymy przez v_x, v_y, i v_z rzuty prędkości nieskończenie małego elementu płynu na osi współrzędnych. Rzuty przyspieszenia elementu mogą być wtedy napisane w postaci

$$\frac{dv_x}{dt}, \quad \frac{dv_y}{dt} \quad \text{oraz} \quad \frac{dv_z}{dt}.$$

Wiadomo że siła bezwładności jest liczbowo równa iloczynowi przyspieszenia przez masę, lecz skierowana przeciwnie niż przyspieszenie. Dla rzutów siły bezwładności będziemy zatem mieli następujące wzory:

$$-\varrho \frac{dv_x}{dt}\, dx\, dy\, dz, \quad -\varrho \frac{dv_y}{dt}\, dx\, dy\, dz, \quad -\varrho \frac{dv_z}{dt}\, dx\, dy\, dz.$$

W celu ułatwienia sobie dalszych obliczeń ułożymy tablicę rzutów na osie współrzędne wszystkich otrzymanych powyżej sił (tabl. 4. 1).

Dla otrzymania równania równowagi trzeba przyrównać do zera sumę sił powierzchniowych, masowych oraz bezwładności. W tym celu dodamy najpierw pierwszy wiersz tablicy i przyrównamy sumę do zera, następnie zrobimy to samo z wierszem drugim i, wreszcie, trzecim. Otrzymamy następujące trzy równania równowagi:

$$(p_1 - p_2)\,dy\,dz + \varrho X\,dx\,dy\,dz - \varrho\frac{dv_x}{dt}\,dx\,dy\,dz = 0,$$

$$(p_3 - p_4)\,dz\,dx + \varrho Y\,dx\,dy\,dz - \varrho\frac{dv_y}{dt}\,dx\,dy\,dz = 0,$$

$$(p_5 - p_6)\,dx\,dy + \varrho Z\,dx\,dy\,dz - \varrho\frac{dv_z}{dt}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Przed przekształceniem tych równań zwrócimy uwagę na następujący fakt. Przy układaniu równań równowagi ciała sztywnego pisze się również trzy równania momentów względem odpowiednich osi współrzędnych. W danym przypadku równania te nie są oczywiście potrzebne, gdyż w granicy przy $dx \to 0$, $dy \to 0$, $dz \to 0$ element będzie stawał się punktem i wszystkie siły będą dążyły do pokrycia się, czyli równania momentów staną się tożsamościowo równe zeru.

Dla przekształcenia otrzymanych trzech równań obliczymy przede wszystkim różnicę $p_1 - p_2$.

Tablica 4.1

Rzuty na oś	Siły[1] powierzchniowe	Siły masowe	Siły bezwładności
x	$p_1\,dy\,dz$ $-p_2\,dy\,dz$	$\varrho X\,dx\,dy\,dz$	$-\varrho\frac{dv_x}{dt}\,dx\,dy\,dz$
y	$p_3\,dz\,dx$ $-p_4\,dz\,dx$	$\varrho Y\,dx\,dy\,dz$	$-\varrho\frac{dv_y}{dt}\,dx\,dy\,dz$
z	$p_5\,dx\,dy$ $-p_6\,dx\,dy$	$\varrho Z\,dx\,dy\,dz$	$-\varrho\frac{dv_z}{dt}\,dx\,dy\,dz$

[1] Gdzie $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ — ciśnienia hydrodynamiczne działające na odpowiednie ścianki (rys. 4.1).

Ponieważ w płynie doskonałym ciśnienie nie zależy od kierunku, zatem ciśnienie na trzy ortogonalne względem siebie, nieskończenie małe pola przechodzące przez jeden i ten sam punkt jest jednakowe. Ciśnienie to oznaczymy literą p. Oczywiście, $p_1 = p_3 = p_5 = p$ (rys. 4.1). W ogólnym przypadku ciśnienie w płynie jest funkcją współrzędnych i czasu, a więc $p = p(x, y, z, t)$. Dlatego też ciśnienie p_2 na prawy bok równoległościanu, odległy od boku lewego o dx, równe jest $p_2 = p(x + dx, y, z, t)$.

Rozkładając funkcję p na szereg Taylora i zachowując w rozwinięciu jedynie człony z wielkościami pierwszego rzędu, otrzymamy

$$p_2 = p(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x}\,dx = p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx.$$

Zatem szukana różnica

$$p_1 - p_2 = p - p - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx.$$

Podstawmy znaleziony wzór dla $p_1 - p_2$ do równania pierwszego. Otrzymamy

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \varrho X\,dx\,dy\,dz - \varrho\frac{dv_x}{dt}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Skracając przez $dx\,dy\,dz$, będziemy mieli następujące równanie:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X - \varrho\frac{dv_x}{dt} = 0.$$

Równanie to można napisać inaczej:

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dwa pozostałe równania otrzymuje się w sposób analogiczny. Ostatecznie będziemy mieli następujący układ równań różniczkowych:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Otrzymane równania stanowią podstawowe *równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego w postaci Eulera*. Równania te odnoszą się zarówno do płynu nieściśliwego, jak i do ściśliwego, czyli do gazu. Różnica polega jedynie na zmienności gęstości ϱ. Jeżeli płyn jest nieściśliwy, wówczas ϱ jest wielkością stałą; dla gazu ϱ będzie wielkością zmienną[1].

Równania te stanowią więc równania wyjściowe nie tylko hydroaerodynamiki, lecz również dynamiki gazów.

Przekształćmy równania Eulera. W tym celu wyrazimy rzuty przyspieszenia przez rzuty prędkości zgodnie z równaniem (3.4). Otrzymamy wtedy następujące równania różniczkowe, będące równaniami Eulera w postaci rozwiniętej[2]:

[1] W wielu zagadnieniach (małe prędkości przepływu) można jednak i tu przyjąć $\varrho = \text{const}$ (przyp. tłum.).

[2] Układ tych równań może być zastąpiony jednym równaniem wektorowym $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\bar{v}}{\partial z} = \bar{F} - \frac{1}{\varrho}\,\text{grad}\,p$, gdzie $\bar{F}(X, Y, Z)$ — wektor sił masowych (przyp. tłum.).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.2)$$

W szczególnym przypadku nieściśliwego płynu doskonałego ($\varrho = \text{const}$) podstawowe zagadnienie hydrodynamiki polega na określeniu w każdym punkcie poruszającego się płynu oraz w dowolnej chwili t trzech rzutów prędkości v_x, v_y, v_z i ciśnienia p, tzn. na określeniu czterech funkcji:

$$\begin{aligned}
v_x&=f_1(x,\ y,\ z,\ t),\\
v_y&=f_2(x,\ y,\ z,\ t),\\
v_z&=f_3(x,\ y,\ z,\ t),\\
p&=f_4(x,\ y,\ z,\ t).
\end{aligned}$$

Dla znalezienia tych czterech funkcji trzeba mieć układ czterech równań. Równaniami tymi będą trzy równania Eulera (4.2) oraz równanie ciągłości

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

§ 2. Równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego w postaci Gromeki

Profesor I. S. Gromeko (1851 ÷ 1889), kierownik Katedry Mechaniki Uniwersytetu Kazańskiego, jeden z pierwszych rosyjskich hydromechaników podał w swej pracy doktorskiej (1881) po raz pierwszy nową, bardzo dogodną postać równań różniczkowych ruchu (podanych znacznie później przez angielskiego uczonego Lamba).

W celu wyprowadzenia równań ruchu w postaci Gromeki skorzystamy z równań różniczkowych ruchu w postaci Eulera:

$$\begin{aligned}
X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},\\
Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z},\\
Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Przekształcimy pierwsze równanie Eulera. Dodajmy i odejmijmy po prawej stronie pierwszego równania następujące wielkości:

$$\pm v_y\frac{\partial v_y}{\partial x},\qquad \pm v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Otrzymamy wówczas

$$X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+$$
$$+v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right).$$

Łatwo zauważyć, że pierwszy nawias zawiera pochodną cząstkową względem x połowy kwadratu prędkości. Istotnie:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Stąd

$$X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y.$$

Wyrażenia zawarte w nawiasach po prawej stronie stanowią, jak wiadomo, podwojone prędkości kątowe obrotu: $2\omega_y$ i $2\omega_z$ (równania 3.24), wobec czego pierwsze z równań Eulera i analogicznie dwa równania pozostałe można przepisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_y v_z-\omega_z v_y),\\
Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_z v_x-\omega_x v_z),\\
Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_x v_y-\omega_y v_x).
\end{aligned}\right\}\qquad(4.3)$$

Równania te nazywane są *różniczkowymi równaniami ruchu płynu doskonałego w postaci Gromeki*. Zaletą tych równań jest wyróżnienie członów uwzględniających wirowość ruchu[1].

[1] Układ tych równań może być zastąpiony jednym równaniem wektorowym

$$\bar{F}-\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p-\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}-\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}=-\bar{v}\times\operatorname{rot}\bar{v}$$

(przyp. tłum.).

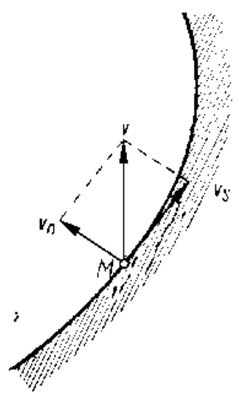
§ 3. Warunki początkowe i brzegowe

Całkując podstawowe równania różniczkowe hydrodynamiki, otrzymamy całki zawierające dowolne funkcje i dowolne stałe. W celu ich określenia trzeba wprowadzić dodatkowe warunki, zwane *warunkami początkowymi* i *brzegowymi*. Rozważymy przede wszystkim warunki początkowe. Polegają one na zadaniu pola prędkości w początkowej chwili $t = 0$. Wynika stąd, że znalezione rozwiązania $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ powinny przy $t = 0$ przekształcać się w założone z góry funkcje współrzędnych f_1, f_2, f_3, tzn.

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z, 0) &= f_1(x, y, z), \\ v_y(x, y, z, 0) &= f_2(x, y, z), \\ v_z(x, y, z, 0) &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Łatwo zauważyć, że warunki początkowe są niezbędne przy rozwiązywaniu zagadnień ruchu płynu.

Warunki brzegowe, odgrywające olbrzymią rolę w zagadnieniach hydro- i aerodynamiki, dzielą się na dwa rodzaje — dynamiczne, odnoszące się do sił, oraz kinematyczne, odnoszące się do prędkości.



4.2. Warunki brzegowe na nieruchomej ściance

Dynamiczne warunki brzegowe muszą być spełnione na powierzchni swobodnej płynu; sprowadzają się one do równości ciśnienia Π ośrodka zewnętrznego na powierzchni oraz ciśnienia p płynu na samej powierzchni, tzn. do równania

$$p = -\Pi. \tag{4.5}$$

Omówimy teraz kinematyczne warunki brzegowe. Rozważmy, jakie będą warunki brzegowe na nieruchomej ściance umieszczonej w strumieniu płynu. Niech równanie ścianki ma postać:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{a}$$

Jeżeli prędkość v elementów płynu w dowolnym punkcie M ścianki (rys. 4.2) będzie miała składową v_n skierowaną wzdłuż normalnej n do ścianki, wówczas, albo będzie zachodziło oderwanie strug od ścianki, albo ścianka będzie przepuszczalna. Opływ bez oderwania i nieprzepuszczalność ścianki prowadzi zatem do warunku koniecznego:

$$v_n = 0 \text{ (wzdłuż ścianki)} \tag{4.6}$$

stanowiącego kinematyczny warunek brzegowy dla przypadku nieruchomej ścianki.

Przypuśćmy teraz, że ścianka jest ruchoma i równaniem jej jest

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{b}$$

Oznaczając przez $v_{n_{śc}}$ normalną prędkość punktów samej ścianki, otrzymamy warunek brzegowy (warunek opływu bez oderwania) w postaci

$$v_n = v_{n_{śc}}. \tag{4.7}$$

Przedstawmy ten warunek w sposób analityczny. Przypuśćmy, że w ciągu nieskończenie małego odcinka czasu dt ścianka zmieniła swe położenie i punkt $M(x, y, z)$ ścianki przesunął się do punktu $M'(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$. Ponieważ punkt M' leży na ściance — jej współrzędne powinny spełniać równanie (b), tzn.

$$f(x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ t + dt) = 0.$$

Rozkładając funkcję f na szereg i zachowując jedynie człony zawierające małe pierwszego rzędu, otrzymamy

$$f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

skąd, dzieląc każdy człon przez dt oraz uwzględniając równanie (b), otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ponieważ

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_{śc}}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{y_{śc}}, \quad \frac{dz}{dt} = v_{z_{śc}}$$

(gdzie $v_{x_{śc}}$, $v_{y_{śc}}$, $v_{z_{śc}}$ są to składowe prędkości punktów ścianki), więc równanie powyższe przybierze postać następującą:

$$\frac{\partial f}{\partial x} v_{x_{śc}} + \frac{\partial f}{\partial y} v_{y_{śc}} + \frac{\partial f}{\partial z} v_{z_{śc}} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{c}$$

Korzystając ze znanych wzorów dla cosinusów kierunkowych kątów między normalną a odpowiednimi osiami:

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{N}, \quad \cos(n, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N}, \quad \cos(n, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{N},$$

gdzie

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

oraz z równania $v_x = v\cos(\bar{v}, x)$, $v_y = v\cos(\bar{v}, y)$, $v_z = v\cos(\bar{v}, z)$, można równanie (c) napisać w następujący sposób:

$$N v_{śc}[\cos(v_{śc}, x)\cos(n, x) + \cos(v_{śc}, y)\cos(n, y) +$$

$$+ \cos(v_{śc}, z)\cos(n, z)] = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

lub

$$N v_{śc}\cos(v_{śc}, n) = -\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Stąd

$$v_{n_{śc}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{N}.$$

Kinematyczny warunek brzegowy dla przypadku ścianki ruchomej będzie zatem miał postać ostateczną:

$$v_n = v_{n_{śc}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{4.8}$$

W przypadku szczególnym, jeżeli ścianka jest nieruchoma, wówczas $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ i warunek kinematyczny (4.7) sprowadza się do poprzedniego równania (4.6):

$$v_n = 0.$$

§ 4. Całki pierwsze równań różniczkowych ruchu

Równania różniczkowe ruchu w postaci Eulera lub Gromeki nie całkują się w postaci ogólnej. Jedynie w przypadkach szczególnych, gdy przepływ jest 1) potencjalny i 2) ustalony, można podać pierwsze całki równań różniczkowych Eulera.

Rozważmy najpierw przypadek potencjalnego przepływu nieustalonego. Jeżeli przepływ jest potencjalny, wówczas, jak wiemy

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

W tym przypadku równania Gromeki (4.3) upraszczają się i przybierają następującą postać:

$$X = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$Y = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v_y}{\partial t},$$

$$Z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Przekształćmy te równania w sposób następujący. Wiadomo że w przepływie potencjalnym:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Wykorzystując te równania oraz właściwość niezależności pochodnej mieszanej od kolejności różniczkowania, można pochodne cząstkowe $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v_y}{\partial t}$, $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ napisać w postaci:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Równania Gromeki będą miały wtedy postać:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \\ Y &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \\ Z &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Przedstawimy pierwsze wyrazy prawych części równania w postaci pochodnych cząstkowych względem odpowiednich współrzędnych pewnej funkcji $P(x, y, z)$:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez dx, dy, dz i dodając, znajdziemy

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz$$

lub

$$dP=\frac{dp}{\varrho},$$

skąd

$$P=\int\frac{dp}{\varrho}. \tag{4.10}$$

Funkcja $P(x, y, z)$ będzie określona, jeśli będzie dana zależność (jednoznaczna — przyp. tłum.) ϱ od p, gdyż tylko w tym przypadku całka (4.10) może być obliczona.

Ruch płynu, którego gęstość wyraża się jednoznaczną funkcją samego tylko ciśnienia, nazywa się ruchem barotropowym. Dla ruchu barotropowego całka (4.10) jest funkcją tylko ciśnienia.

W aerodynamice są zazwyczaj rozważane takie przypadki, w których gęstość ϱ wyrażona jest bezpośrednio przez ciśnienie, tzn. przypadki, w których rzeczywiście istnieje funkcja $P(x, y, z)$. Wprowadzając tę funkcję do równania (4.9), znajdziemy

$$X=\frac{\partial}{\partial x}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$Y=\frac{\partial}{\partial y}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$Z=\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

W celu scałkowania powyższych równań pomnóżmy je odpowiednio przez dx, dy i dz oraz zsumujmy:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\frac{\partial}{\partial x}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dx+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dz.$$

Wyrażenia w nawiasach są funkcjami nie tylko x, y, z, lecz także i t. Dlatego też całkując je będziemy przyjmowali, że i t nie ulega zmianie. Prawa strona będzie wówczas różniczką zupełną, a zatem

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=d\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Jeżeli prawa strona jest różniczką zupełną, wówczas strona lewa będzie również różniczką zupełną. Różniczka zupełna strony lewej, określającej elementarną pracę sił masowych, jest różniczką funkcji U (potencjału sił masowych — przyp. tłum.), tzn.

$$dU=d\left(P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Równanie powyższe jest łatwo scałkować, przy czym otrzymamy

$$P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t),$$

gdzie C — dowolna funkcja czasu t.

Podstawiając zamiast P jego wartość ze wzoru (4.10), znajdziemy ostatecznie

$$\int\frac{dp}{\varrho}+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t). \tag{4.11}$$

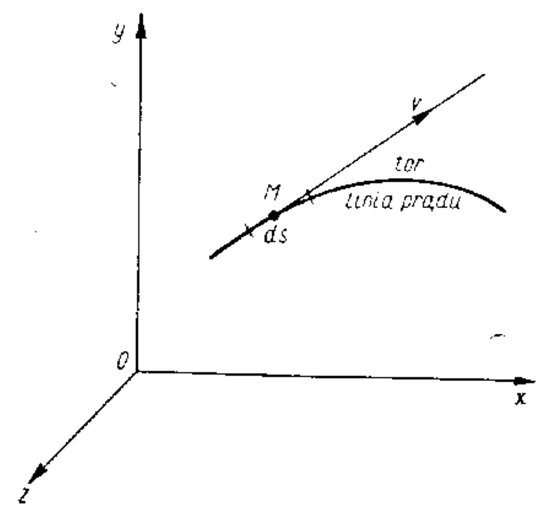
Całka ta nazywa się *całką Lagrange'a* dla nieustalonego potencjalnego przepływu płynu ściśliwego.

Jeżeli płyn jest nieściśliwy, tzn. $\varrho=\text{const}$, całka Lagrange'a przybierze postać

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t). \tag{4.12}$$

Przy przepływie ustalonym płynu nieściśliwego pochodna $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ oraz funkcja dowolna $C(t)$ przekształci się w stałą. Całka (4.12) będzie miała wówczas następującą postać:

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}=U+C. \tag{4.13}$$



4.3. Do wyprowadzenia całki Bernoulliego dla dowolnego przepływu ustalonego

Powyższa całka nazywa się *całką Lagrange'a — Bernoulliego*. Stała C będzie miała niezmienną wartość dla całej masy płynu[1]).

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób można scałkować różniczkowe równanie ruchu dla dowolnego (niepotencjalnego) przepływu ustalonego. Całkę tę podał po raz pierwszy D. Bernoulli, jest ona dlatego nazywana *całką* lub *równaniem Bernoulliego*.

[1] Z powyższego wynika, że założenie przepływu potencjalnego i barotropowości prowadzi do warunku istnienia potencjału sił masowych. Znaczy to, że przepływ potencjalny i barotropowy jest możliwy jedynie w polu sił zachowawczych.

Niech płyn porusza się względem układu współrzędnych xyz. Jeżeli przepływ jest ustalony, tory i linie prądu pokrywają się, i element płynu M porusza się z pewną prędkością v wzdłuż toru stanowiącego jednocześnie linię prądu (rys. 4.3).

W ciągu czasu dt element płynu przebędzie wzdłuż toru odcinek drogi ds. Długość tego odcinka jest równa prędkości pomnożonej przez czas:

$$ds = v\,dt.$$

Rzutując elementarne przesunięcie ds elementu płynu wzdłuż linii prądu na osie współrzędnych x, y, z otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} dx &= v_x dt, \\ dy &= v_y dt, \\ dz &= v_z dt. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Zakładając, że przepływ jest barotropowy napiszemy teraz równania różniczkowe ruchu płynów w postaci (4.1), wprowadzając funkcję $P(x, y, z)$. Będziemy mieli

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Aby te równania scałkować, pomnożmy każde z nich przez odpowiednią składową elementarnego przesunięcia wzdłuż linii prądu równania (a) i dodajmy je. Ostatecznie otrzymamy

$$(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = (X dx + Y\,dy + Z\,dz) - \\ - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right).$$

Przechodząc do scałkowania otrzymanego równania, zauważymy, że jeżeli dx, dy, dz określają składowe elementarnego przesunięcia wzdłuż linii prądu, wówczas całkowanie równania będziemy przeprowadzali również wzdłuż linii prądu. To zaś oznacza, że otrzymana w wyniku całkowania stała będzie miała wartość niezmienną jedynie wzdłuż danej linii prądu, podczas gdy w poprzedniej całce Lagrange'a—Bernoulliego stała miała wartość niezmienną dla całej masy płynu.

Lewa strona otrzymanego równania jest oczywiście różniczką zupełną $\frac{dv^2}{2}$.

Wyrażenia po prawej stronie są również różniczkami zupełnymi, tzn.

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP,$$

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU.$$

Równanie to można zatem napisać w postaci

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dU - dP$$

oraz

$$d\left(-U + P + \frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$-U + P + \frac{v^2}{2} = C$$

lub, na podstawie równania (4.10),

$$-U + \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C. \qquad (4.14)$$

Całka ta nazywana jest *całką Bernoulliego* dla ustalonego przepływu ściśliwego. Jeżeli $\varrho = \text{const}$, całka Bernoulliego będzie miała postać

$$-U + \frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C. \qquad (4.15)$$

Jak już zostało powiedziane, stała C wchodząca do równań (4.14) i (4.15) ma wartość niezmienną jedynie wzdłuż danej linii prądu. Przy przejściu do sąsiednich linij prądu stała ta może przybierać wartości odmienne.

Jeżeli zaniedbamy siły masowe i przyjmiemy dla powietrza potencjał sił masowych U równy zeru, wtedy równanie (4.15) przybierze postać

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C \qquad (4.16)$$

lub

$$p = C - \frac{\varrho v^2}{2}; \qquad (4.17)$$

dla płynu ściśliwego

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C. \qquad (4.18)$$

P r z y k ł a d. Załóżmy, że nieściśliwy płyn porusza się w sposób dowolny i w nieskończoności występuje ciśnienie $p_\infty = p_0$, a prędkość $v_\infty = 0$. Określając z tego warunku stałą C w równaniu (4.17) wyliczamy, że

$$p = p_0 - \frac{\varrho v^2}{2}. \tag{a}$$

Wyliczmy prędkość, przy której w płynie wystąpi naruszenie ciągłości przepływu pod postacią pustych obszarów tworzących się koło sztywnych ścianek kanału lub poruszającego się w płynie ciała.

Zjawisko to nazywa się kawitacją, a prędkość, przy której ono następuje — prędkością kawitacji. Powróćmy do równania (a). Wskutek zwiększenia v, rośnie człon $\frac{\varrho v^2}{2}$ osiągając wartość p_0, gdy ciśnienie p staje się równe zeru.

Ponieważ przy dalszym zwiększaniu prędkości v, ciśnienie p musiałoby być ujemne, co nie może mieć miejsca, więc w cieczy następuje naruszenie ciągłości przepływu, tzn. zjawisko kawitacji. Z wyrażenia

$$0 = p_0 - \frac{\varrho v_{\text{kaw}}^2}{2}$$

znajdujemy

$$v_{\text{kaw}} = \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}.$$

Dla wody, w jednostkach technicznych $p_0 = 10\,333$ kG/m², $\varrho = 102$ kGcm²/m⁴, a więc

$$v_{\text{kaw}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10333}{102}} = 14{,}3 \text{ m/sek} = 51 \text{ km/godz},$$

tzn. w wodzie kawitacja występuje już przy stosunkowo niedużej prędkości rzędu 50 km/godz. Zjawisko kawitacji, zachodzące na łopatkach śrub okrętowych i łopatkach szybkobieżnych turbin wodnych wysoce szkodliwie odbija się na ich pracy, gdyż obniża ich sprawność i jest powodem korozji metalu.

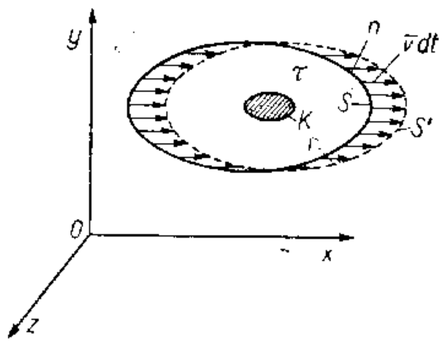
Dla powietrza kawitacja występuje przy znacznie większych prędkościach rzędu $v = 750$ m/sek $= 2700$ km/godz (rozdz. XIV, § 1).

§ 5. Zasada pędu i popędu dla ustalonego ruchu płynu doskonałego

Wyznaczając wypadkowe parcia na opływane ciało jest zwykle o wiele wygodniej korzystać z ogólnych twierdzeń mechaniki, a w ich liczbie z twierdzenia o zmianie ilości ruchu niż z całkowania różniczkowych równań ruchu.

Wyodrębnijmy ze strumienia dowolną zamkniętą powierzchnię S, wewnątrz

której znajduje się opływane ciało K (rys. 4.4). Zastosujmy twierdzenie o zmianie ilości ruchu do skończonej objętości płynu zawartego między powierzchnią S, nazywaną powierzchnią płynną, a ciałem K. Oznaczmyl iterą M ilość ruchu tej objętości płynu. Powierzchnia kontrolna, ograniczająca tę objętość płynu, przesuwa się wraz z tworzącymi ją elementami płynu, a więc skutkiem tego musi się ona odkształcać. Po upływie czasu dt powierzchnia S przesunie się i zajmie położenie S' (zarys powierzchni S' można uzyskać w ten sposób, że od każdego punktu powierzchni S odkłada się wektor, równy $\bar{v}\,dt$; końce tych wektorów tworzą powierzchnię S'). Masa płynu ograniczonego powierzchnią S' będzie miała ilość ruchu M'. Różnica $d\bar{M} = \bar{M}' - \bar{M}$ wyraża zmianę ilości ruchu w czasie dt.



4.4. Do wyprowadzenia równania impulsów

Dla ustalonego przepływu różnica $d\bar{M}$ będzie równa ilości ruchu płynu, zawartego między powierzchniami S i S'. Jest to oczywiste, gdyż dla reszty objętości płynu, wspólnej dla obydwóch położeń rozpatrywanej masy płynu, ilości ruchu są w ruchu ustalonym jednakowe i przy odejmowaniu dadzą w wyniku zero. A więc trzeba obliczyć tylko tę zmianę ilości ruchu, która miała miejsce na skutek przesunięcia się powierzchni S do położenia S'. W tym celu obieramy na powierzchni S poletko dS, które po upływie czasu dt przeszło w położenie dS'. Ilość ruchu, odpowiadająca objętości $d\tau$, znajdującej się między powierzchniami S i S' równa jest oczywiście

$$\varrho\, d\tau\, \bar{v} = \varrho\, v_n\, dt\, dS\, \bar{v},$$

gdyż objętość $d\tau$ można rozpatrywać jako elementarny walec o podstawie dS i wysokości $v_n dt$, gdzie v_n — składowa normalna prędkości $\bar{v}$ na poletku dS. Całkowitą zmianę ilości ruchu $d\bar{M}$ objętości τ można przedstawić jako całkę wyżej podanego wyrażenia, rozciągniętą na całą powierzchnię S

$$d\bar{M} = \iint_S \varrho v_n\, dt\, \bar{v}\, dS = dt \iint_S \varrho v_n \bar{v}\, dS. \tag{a}$$

Załóżmy następnie, że powierzchnia S jest nieruchoma, a tylko płyn przez nią przepływa (będzie to wtedy tzw. powierzchnia kontrolna — przyp. red.). Wówczas można podać prostą interpretację fizyczną całki powierzchniowej (a). Iloczyn $\varrho v_n\, dS$ przedstawia masę cieczy przepływającej w jednostce czasu przez poletko dS, a iloczyn $\varrho v_n\, dS\, \bar{v}$ — ilość ruchu, jaką w tym samym czasie przenosi ta masa do wnętrza powierzchni S lub z powierzchni tej unosi na zewnątrz (zależnie od znaku v_n).

W takim razie wyrażenie

$$\iint_S \varrho v_n \bar{v}\, dS$$

przedstawia ilość ruchu przenoszoną w jednostce czasu poprzez nieruchomą powierzchnię kontrolną S. A więc zmiana ilości ruchu płynnej objętości za dowolny okres czasu, w przypadku przepływu ustalonego, równa się ilości ruchu, jaką przenosi płyn w tymże czasie poprzez powierzchnię S ograniczającą tę objętość, tzn. równa się ona różnicy między ilością ruchu płynu dopływającego do wnętrza S i z niego wypływającego.

Oznaczmy przez $\bar{F}$ wypadkową zewnętrznych sił, przyłożonych do rozpatrywanej masy płynu. Zgodnie z twierdzeniem o zmianie ilości ruchu można napisać

$$\bar{F}\, dt = d\bar{M}.$$

Podstawiając wartość $d\bar{M}$ z wyrażenia (a) otrzymamy

$$\bar{F}\, dt = dt \iint_S \varrho v_n \bar{v}\, dS$$

lub skracając przez dt:

$$\bar{F} = \iint_S \varrho v_n \bar{v}\, dS. \tag{4.19}$$

Ten wzór wyraża zasadę pędu i popędu w odniesieniu do ustalonego przepływu skończonej objętości płynu doskonałego.

Rozdział V

PODSTAWY TEORII WIRÓW

Badania przepływów wirowych mają duże znaczenie praktyczne. Przepływy wirowe występują często w przyrodzie i mogą być łatwo zaobserwowane.

Obserwując bieg rzeki oraz opływ filarów mostowych łatwo jest dostrzec tworzenie się wirów; przy uderzeniu wiosłem o wodę zawsze powstają wiry itd.

Poruszające się w wodzie ciało (okręt, kuter) pozostawia za sobą zawsze obszar wirów, którego powstawanie dokonuje się zawsze kosztem pewnej energii. Stanowi to źródło odrębnego rodzaju oporu, zwanego oporem wirowym, który trzeba umieć obliczyć dla ciał o rozmaitych kształtach.

Obserwowane w atmosferze trąby powietrzne i cyklony są również wirami.

Niewielkie wiry powietrzne lub wodne powodują tak zwaną *turbutencję* przepływu, której poznanie stanowi jedno z najbardziej skomplikowanych zagadnień współczesnej aero- i hydrodynamiki.

Przepływ wirowy odgrywa dużą rolę w aerodynamice. Z wirowej teorii profilu Żukowskiego — Czapłygina i Prandtla wynika teoria płata o rozpiętości zarówno nieskończonej, jak i skończonej.

W rozdziale niniejszym omówione zostaną podstawy teorii wirów.

§ 1. Pojęcie linii wirowej

Jak wykazaliśmy w § 7 rozdziału III, ruch obrotowy elementu płynu określają prędkości kątowe

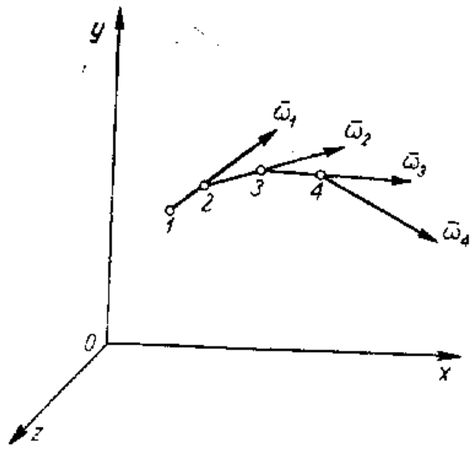
$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Znaczy to, że w każdym punkcie przestrzeni ruch obrotowy elementu płynu może być określony przez wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$, którego moduł równa się

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{5.2}$$

W sposób podobny, jak to czyniliśmy przedstawiając pole prędkości prze-

pływu w postaci nieskończonego układu wektorów $\bar{v}$, których obwiednie stanowiły linie prądu — możemy również rozważyć pole wektorów prędkości kątowych $\bar{\omega}$, nazywając je umownie polem wirowym. Każdy wektor $\bar{\omega}$ będzie określał lokalny ruch obrotowy płynu. Załóżmy, że w danej chwili w jakimś punkcie *1* wektor prędkości lokalnego ruchu obrotowego równa się $\bar{\omega}_1$ (rys. 5.1). Obierzmy w tej właśnie chwili na tym wektorze punkt *2* położony nieskończenie blisko punktu *1*, i poprowadźmy odpowiadający mu wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}_2$. Postępując tak w dalszym ciągu, otrzymamy dla danej chwili linię łamaną *1—2—3—4...*, która w granicy, tzn. przy dążeniu długości każdego odcinka łamanej do zera, stanie się tak zwaną linią wirową. Stąd powstało następujące określenie linii wirowej: linia wirowa jest to taka linia w strumieniu płynu, na której wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$ jest styczny do niej w każdym punkcie.



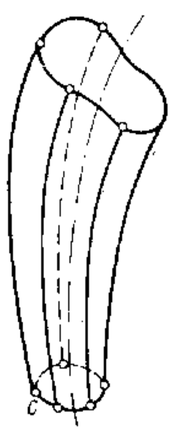
5.1. Konstruowanie linii wirowej

Zgodnie z analogią do linij prądu widzimy, że równanie różniczkowe linij wirowych będzie miało postać:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \tag{5.3}$$

§ 2. Rurka wirowa

Wyobraźmy sobie przestrzeń całkowicie wypełnioną wirami (liniami wirowymi). Jeżeli obierzemy w tej przestrzeni dowolny m a ł y obwód zamknięty C, nie będący linią wirową, i przez każdy punkt obwodu C poprowadzimy linie wirowe, wówczas zbiór tych wszystkich linij będzie tworzył tak zwaną rurkę wirową, a zawarta w niej objętość płynu będzie stanowiła element wiru, zwany włóknem wirowym[1] (rys. 5.2). Z rurką wirową wiąże się pewne ważne pojęcie aerodynamiki, mianowicie pojęcie natężenia lub intensywności wiru. Pod pojęciem *natężenia wiru*, oznaczanego literą $\varkappa$, rozumiemy podwójny iloczyn prędkości[2] kątowej ω wiru przez powierzchnię σ_n normalnego przekroju rurki, czyli



5.2. Rurka wirowa

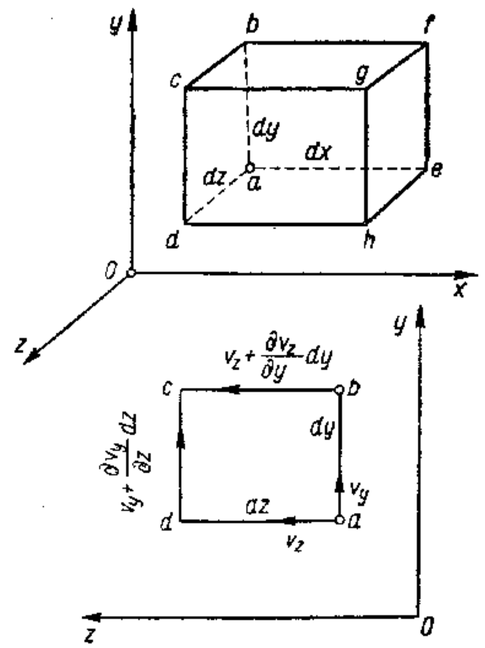
$$\varkappa = 2\omega\,\sigma_n. \tag{5.4}$$

[1] Podkreślamy, że obwód C jest mały (przyp. tłum.).
[2] Średniej (przyp. tłum.).

Wielkość natężenia $\varkappa$ lub intensywności wiru związana jest z powstającą dokoła wiru cyrkulacją Γ. Związek ten określa twierdzenie Stokesa.

§ 3. Twierdzenie Stokesa

Rozważmy w poruszającym się płynie pole wirowe, tzn. załóżmy, że w płynie rozłożone są w sposób ciągły wiry (wektory $\bar{\omega}$). Wyodrębnijmy w płynie nieskończenie małą objętość w kształcie prostopadłościanu o wymiarach dx, dy, dz (rys. 5.3). Obliczmy cyrkulację wzdłuż nieskończenie małego obwodu zamkniętego (*abcda*) okrążając w ten sposób oś, równoległą do osi x. Dla wygody rozpatrzymy w płaszczyźnie yz (rys. 5.3) nieskończenie mały prostokąt *abcda* o wymiarach dy i dz, stanowiący rzut rozpatrywanego prostopadłościanu na płaszczyznę yz. Obliczmy cyrkulację Γ_x wzdłuż obwodu elementarnego (*abcda*).



5.3. Obliczenie cyrkulacji wzdłuż nieskończenie małego obwodu prostokątnego

Niech v_y i v_z będą rzutami na osie y i z prędkości v punktu a. Obliczymy prędkości skierowane wzdłuż boków bc i dc w punktach b i d:

$$(v_z)_b = v_z(x,\ y+dy,\ z,\ t) = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy,$$

$$(v_y)_d = v_y(x,\ y,\ z+dz,\ t) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,dz.$$

Cyrkulacja $d\Gamma_x$ wzdłuż obwodu *abcda* będzie oczywiście składała się z cyrkulacji wzdłuż poszczególnych nieskończenie małych boków; każda z tych cyrkulacji jest równa iloczynowi prędkości przez długości odpowiednich boków prostokąta. W związku z tym będziemy mieli

$$d\Gamma_x = v_y dy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy\right) dz - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,dz\right) dy - v_z dz.$$

Przyjmujemy znak minus dla boków cd i da dlatego, że kierunek okrążenia jest przeciwny do kierunku prędkości. Otwierając nawiasy i skracając, otrzymamy

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy\,dz$$

lub, zgodnie z wzorami (5.1), oraz oznaczając $dy\,dz = d\sigma_x$,

$$d\Gamma_x = 2\,\omega_x\,d\sigma_x.$$

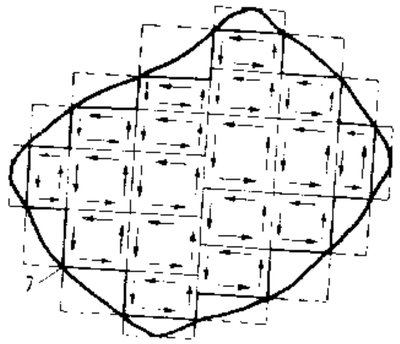
Analogicznie, dla osi y i z otrzymamy

$$d\Gamma_y = 2\,\omega_y\,d\sigma_y, \qquad d\Gamma_z = 2\,\omega_z\,d\sigma_z.$$

Uogólniając otrzymany wynik na położoną dowolnie w przestrzeni nieskończenie małą powierzchnię prostokątną $d\sigma$, będziemy mieli

$$d\Gamma = 2\,\omega_n\,d\sigma = 2\,\omega\,d\sigma_n, \tag{5.5}$$

gdzie ω_n — rzut prędkości kątowej $\bar{\omega}$ na normalną do płaszczyzny.

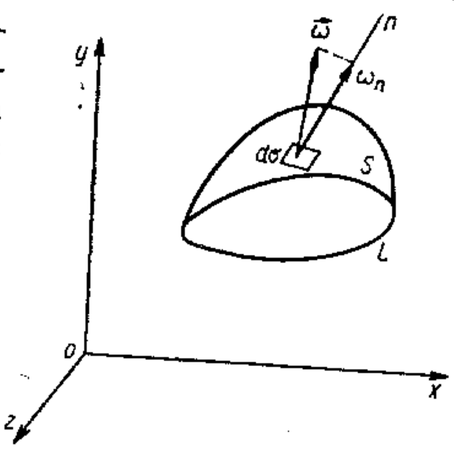


5.4. Obliczenie cyrkulacji wzdłuż zamkniętego obwodu płaskiego

Otrzymaliśmy zatem następujący wynik: *cyrkulacja wzdłuż nieskończenie małego obwodu prostokątnego równa jest natężeniu wiru przecinającego powierzchnię ograniczoną tym obwodem.*

Otrzymany wynik można łatwo rozszerzyć na dowolny skończony obwód płaski L (rys. 5.4). W tym celu podzielimy powierzchnię ograniczoną obwodem L za pomocą układu wzajemnie ortogonalnych prostych na nieskończenie dużą liczbę prostokątów elementarnych. Rozpatrując zewnętrzne boki prostokątów, leżące na krańcach, stwierdzimy, że tworzą one wielokąt wpisany w dany obwód. Rozpatrzmy cyrkulację wzdłuż boków każdego nieskończenie małego prostokąta oddzielnie. Zgodnie z tym, co zostało dowiedzione, cyrkulacja będzie równa natężeniu przecinającego ją wiru. Sumując cyrkulację wzdłuż wszystkich nieskończenie małych prostokątów zauważymy, że cyrkulacje wzdłuż przyległych boków prostokątów będą się wzajemnie znosiły jako cyrkulacje o różnych znakach. Zatem, w granicy przy nieograniczonym powiększaniu liczby nieskończenie małych prostokątów, suma cyrkulacji elementarnych da cyrkulację wzdłuż obwodu L (ponieważ w granicy wpisany wielokąt przekształci się w obwód L), stąd więc

$$\Gamma = 2\iint_S \omega_n\,d\sigma. \tag{5.6}$$



5.5. Dowolna powierzchnia S w przestrzeni przecięta strumieniem wirów

Poprzedni wniosek można uogólnić na przypadek dowolnej powierzchni ograniczonej dowolnym obwodem L (rys. 5.5). Podzielimy, jak poprzednio, powierzchnię S na nieskończenie dużą liczbę nieskończenie małych powierzchni. Traktując powierzchnie $d\sigma$ wskutek ich małych wymiarów jako płaskie, można wówczas dla każdej z nich napisać

$$d\Gamma = 2\,\omega_n\,d\sigma. \tag{5.7}$$

Sumując otrzymane wyrażenie wzdłuż wszystkich powierzchni i przechodząc do granicy, będziemy mieli

$$\Gamma = 2\iint_S \omega_n\,d\sigma. \tag{5.8}$$

Równanie to nazywane jest *całkowym wzorem Stokesa.* Dowodzi ono, że *cyrkulacja wzdłuż dowolnego obwodu L w przestrzeni równa jest sumie natężeń wirów przecinających powierzchnię S naciągniętą na obwód L*[1].

Jeżeli przez analogię do wyrażenia $v_n d\sigma$, określającego elementarny wydatek przez powierzchnię $d\sigma$, wprowadzimy wyrażenie $\omega_n d\sigma$, nazywane strumieniem wirowości przez powierzchnię $d\sigma$, wówczas równanie całkowe Stokesa można sformułować w następujący sposób: *cyrkulacja prędkości wzdłuż obwodu zamkniętego równa jest podwojonemu całkowitemu strumieniowi wirowości przez powierzchnię naciągniętą na ten obwód.*

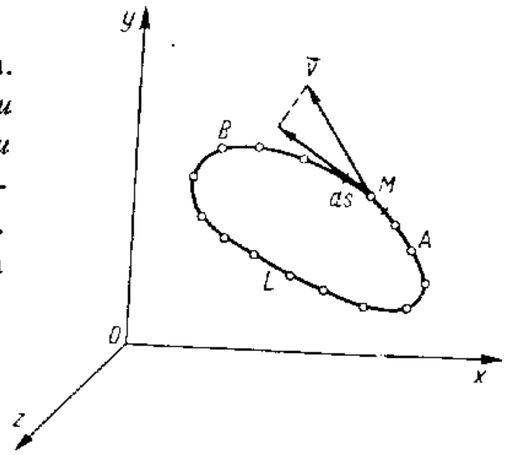
§ 4. Twierdzenie Thomsona o stałości cyrkulacji

Rozważmy w płynie doskonałym, przepływ którego będziemy traktowali jako barotropowy, zamknięty obwód L (rys. 5.6), składający się wciąż z tych samych elementów płynu. Podczas ruchu płynu obwód ten przesuwa się wraz z nim, zmieniając swój kształt geometryczny. Obwód taki będziemy nazywali *obwodem płynnym.* Dowiedźmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie Thomsona. *Cyrkulacja wzdłuż zamkniętego obwodu płynnego w płynie doskonałym przy istnieniu sił masowych, mających jednoznaczny potencjał i barotropowości, nie zmienia się w czasie.*

Dla udowodnienia tego twierdzenia obierzmy na obwodzie łuk AB o skończonej długości. Cyrkulację prędkości wzdłuż łuku AB można przedstawić w postaci

$$\Gamma = \int_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz. \tag{5.9}$$



5.6. Do wyprowadzenia twierdzenia o stałości cyrkulacji wzdłuż zamkniętego obwodu płynnego

Aby wykazać niezależność Γ od czasu, trzeba dowieść, że dla zamkniętego obwodu płynnego $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$. Trzeba zatem przede wszystkim obliczyć $\frac{d\Gamma}{dt}$. Różniczkując (5.9) znajdujemy

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_{AB} \frac{d}{dt}(v_x dx + v_y dy + v_z dz).$$

[1] Twierdzenie to jest słuszne tylko dla obszarów jednospójnych (przyp. tłum.).

Różniczkując wyrażenie podcałkowe i biorąc przy tym pod uwagę, że obwód jest płynny, będziemy mieli

$$\frac{d}{dt}(v_x dx) = \frac{dv_x}{dt}dx + v_x\frac{d}{dt}(dx) = \frac{dv_x}{dt}dx + v_x dv_x,$$

$$\frac{d}{dt}(v_y dy) = \frac{dv_y}{dt}dy + v_y\frac{d}{dt}(dy) = \frac{dv_y}{dt}dy + v_y dv_y,$$

$$\frac{d}{dt}(v_z dz) = \frac{dv_z}{dt}dz + v_z\frac{d}{dt}(dz) = \frac{dv_z}{dt}dz + v_z dv_z.$$

Podstawmy znalezione wyrażenia na pochodne pod znak całki:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB}\left[\left(\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz\right) + (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z)\right].$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie przedstawia $d\left(\frac{v^2}{2}\right)$. Zastępując rzuty całkowitego przyspieszenia na osie współrzędnych $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$ przez ich wartości wyznaczone z różniczkowych równań ruchu (4.1)

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z},$$

otrzymamy

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB}\left[dU - dP + d\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]$$

lub

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB} d\left(U - P + \frac{v^2}{2}\right), \tag{5.10}$$

skąd

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left(U - P + \frac{v^2}{2}\right)_B - \left(U - P + \frac{v^2}{2}\right)_A. \tag{5.11}$$

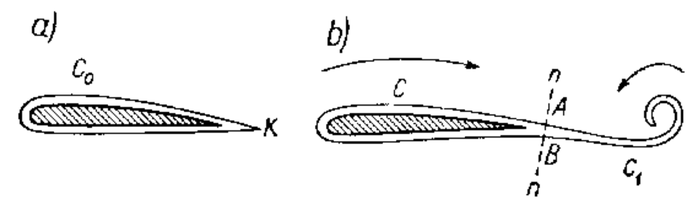
Ponieważ wielkości w nawiasie, tzn. U, p i v, są funkcjami jednoznacznymi,

w przypadku obwodu zamkniętego, tzn. jeżeli punkty A i B pokrywają się, mamy

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{lub} \quad \Gamma = \text{const.}$$

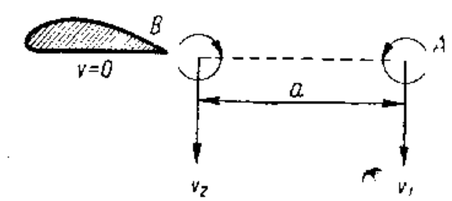
Zatem cyrkulacja istotnie nie będzie zależała od czasu.

Z twierdzenia Thomsona wynika, że w przypadku gdy przepływ cieczy doskonałej rozpoczyna się ze stanu spoczynku i jest ciągły, to cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnego obwodu będzie równa zeru, ponieważ była ona równa zeru w chwili początkowej.



5.7. Do wyjaśnienia powstawania cyrkulacji dokoła profilu a. płyn jest nieruchomy względem profilu; b. płyn porusza się względem profilu

W takim razie zgodnie z twierdzeniem Stokesa wnioskujemy, że taki przepływ na pewno będzie potencjalny i nie będzie w nim wirów. A więc w płynie doskonałym, przy założeniu potencjalności sił masowych i barotropowości, cyrkulacja może powstać tylko wówczas, gdy funkcja ciśnienia p lub prędkość v przepływu nie jest ciągła na pewnych powierzchniach, na skutek czego różnica (5.11) nie jest równa zeru. Rozpatrzmy dla przykładu dowolny profil płata (rys. 5.7a) i poprowadźmy wokół niego dowolny obwód płynny C_0. Załóżmy, że w chwili początkowej płyn pozostawał w spoczynku. W takim razie cyrkulacja prędkości Γ_0 wzdłuż tego płynnego obwodu C_0 będzie równa zeru.



5.8. Powstawanie cyrkulacji wokół opływanego ciała

W miarę wzrostu prędkości przepływu strumień płynu opływając profil zacznie schodzić z jego tylnej krawędzi. Załóżmy, że na tylnej krawędzi szybkość spływu strumienia nie równa się zeru. W tym przypadku płynny obwód C_0 będzie się rozciągał i unosił w prawo (rys. 5.7b). Przy tylnej krawędzi profilu rozetnijmy rozciągnięty obwód płynny C_0 na dwie części (wzdłuż n-n): na obwód C, obejmujący profil i na obwód C_1, który już profil opuścił. Ponieważ strumienie opływające górną i dolną część profilu dochodzą do tylnej krawędzi z różnymi prędkościami, więc powoduje to nieciągłość stycznych składowych prędkości w przekroju n-n. W wyniku tego, cyrkulacje wzdłuż obwodów C i C_1 nie są równe zeru zgodnie z twierdzeniem Thomsona, a suma ich, na podstawie tego twierdzenia, równa się zeru, tzn.

$$\Gamma_C + \Gamma_{C_1} = \Gamma_0 = 0,$$

$$\Gamma_C = -\Gamma_{C_1}.$$

Powstawanie cyrkulacji Γ_{C_1} potwierdza doświadczenie, które pokazuje, że po rozpoczęciu ruchu profilu lotniczego z niego spływa tak zwany wir początkowy (rys. 5.8 wir A), a po zatrzymaniu się profilu spływa z niego drugi wir B (rys. 5.8), którego cyrkulacja równa się cyrkulacji wiru początkowego z przeciwnym znakiem. Tworząca się para wirów będzie się przesuwała ruchem postępowym w kierunku ruchu cieczy z prędkością

$$v_1 = v_2 = \frac{\Gamma}{2\pi a},$$

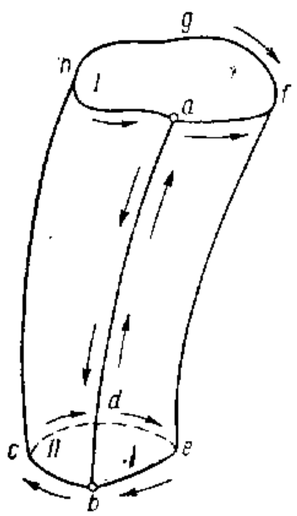
gdzie a oznacza odległość między wirami A i B.

§ 5. Twierdzenie Helmholtza o wirach

W swej znanej pracy pt. *O ruchu wirowym* (1858) Helmholtz sformułował i dowiódł trzy twierdzenia o wirach, stanowiące na równi z twierdzeniem Stokesa podstawy teorii wirów.

Pierwsze twierdzenie Helmholtza głosi: *natężenie wiru nie zmienia się wzdłuż rurki wirowej.*

Aby to udowodnić, rozważmy część rurki wirowej (rys. 5.9), zawartej pomiędzy dwoma dowolnymi przekrojami I i II. Twierdzenie zostanie dowiedzione, jeżeli potrafimy pokazać, że natężenie w przekrojach I i II jest jednakowe, czyli że $\varkappa_I = \varkappa_{II}$.



5.9. Dowód niezmienności natężenia wirowości wzdłuż rurki wirowej

Połączmy punkty a i b obydwu przekrojów za pomocą dowolnej linii ab leżącej na powierzchni rurki wirowej i zbadajmy cyrkulację wzdłuż obwodu $abcdebafgha$. Ponieważ obwód ten jest prostym obwodem zamkniętym, więc

$$\Gamma(abcdebafgha) = 0.$$

Cyrkulacja wzdłuż niego składa się jednak z cyrkulacji wzdłuż obwodów I, II oraz linij ab i ba. Zatem

$$\Gamma_I + \Gamma_{ab} - \Gamma_{II} + \Gamma_{ba} = 0.$$

Ponieważ oczywiście

$$\Gamma_{ba} = -\Gamma_{ab},$$

więc

$$\Gamma_I = \Gamma_{II},$$

a zatem na podstawie twierdzenia Stokesa również

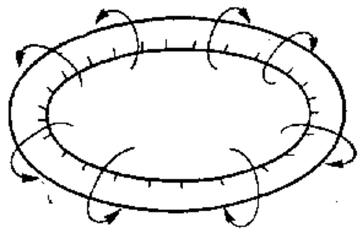
$$\varkappa_I = \varkappa_{II};$$

twierdzenie zostało dowiedzione.

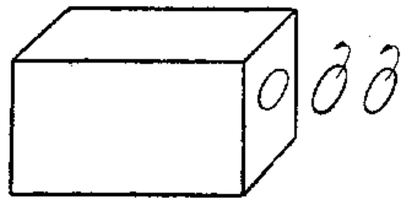
Na podstawie tego twierdzenia można wyprowadzić wniosek o możliwych kształtach wirów. Istotnie, ważnym wnioskiem wynikającym z tego twierdzenia jest to, że na skutek stałego natężenia rurki wirowej wzdłuż jej długości, tzn.

$$\varkappa = 2\omega\sigma = \text{const},$$

wir nie może w płynie kończyć się ostrzem, gdyż w tym przypadku $\sigma = 0$, zaś $\omega = \infty$, co jest niemożliwe. W przyrodzie występują następujące kształty wirów:



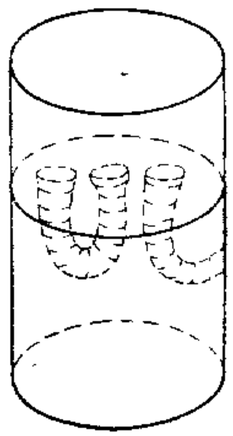
5.10. Pierścień wirowy — jedna z możliwych fizykalnie postaci wiru



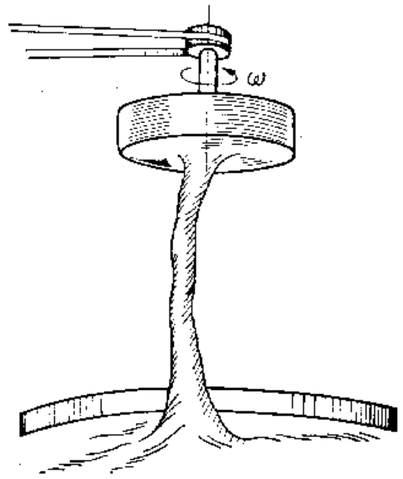
5.11. Urządzenie do demonstrowania pierścieni wirowych

1. Końce wiru schodzą się, tzn. rurka wirowa zamyka się, tworząc obserwowany często pierścień wirowy (rys. 5.10).

Tworzenie się pierścieni wirowych łatwo jest zademonstrować za pomocą następującego doświadczenia. Jeżeli weźmiemy skrzynkę (rys. 5.11), której jedna scianka ma otwór, zaś ścianka przeciwległa zamknięta jest tkaniną, i napełnimy tę skrzynkę dymem, wówczas przy lekkim uderzeniu w tkaninę będą z otworu wychodziły wiry pierścieniowe, przy czym każdy wychodzący z otworu wir dopędzi wir poprzedni i przejdzie przez niego.



5.12. Możliwe postacie istnienia wirów



5.13. Urządzenie wytwarzające sztucznie trąbę morską

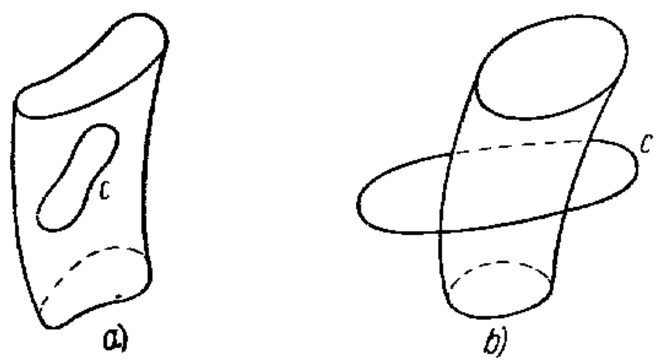
W ciekawej pracy pt. *K woprosu o razriezanji wichriewych koliec* (1894) dowiódł Żukowski analitycznie, znany z doświadczenia fakt, że przy przyłożeniu

z boku do pierścienia wirowego ostrza noża pierścień wirowy gwałtownie odchyla się od niego, a zatem przecięcie wiru nożem jest niemożliwe.

2. Końce wiru leżą bądź na granicach rozważanego płynu, bądź też jeden koniec wiru dochodzi do granicy płynu, drugi zaś — do sztywnej granicy, na przykład do ścianki. Przypadek ten pokazany jest na rys. 5.12. Do tego rodzaju wirów należą obserwowane często w przyrodzie trąby zarówno powietrzne, jak i morskie.

Trąbę morską (sztuczną) łatwo jest wywołać za pomocą następującego urządzenia, opisanego przez Żukowskiego w jego książce *Tieoriticzieskije osnowy wozduchopławanja*. Jeżeli nad zbiornikiem wody umieścić w odległości około 3 m wydrążony krążek o średnicy 1 m z kilkoma przegródkami rozmieszczonymi w płaszczyznach promieniowych oraz nadać temu krążkowi szybki ruch obrotowy, wówczas krążek zaczyna zawirowywać powietrze (rys. 5.13). Wobec tego, że wewnątrz powstałego wiru powietrznego ciśnienia jest mniejsze, woda zaczyna podnosić się i wprowadzona zostaje w ruch obrotowy spowodowany tarciem o wirujące powietrze. Po pewnym czasie powstanie trąba morska, ciągła u dołu, u góry zaś składająca się z kropelek.

D r u g i e t w i e r d z e n i e H e l m h o l t z a. *Jeżeli w płynie doskonałym działają siły masowe, mające jednoznaczny potencjał i zachodzi barotropowość, przepływu, to rurka wirowa nie zostanie nigdy „zniszczona" i pozostanie zawsze rurką wirową.*



5.14. Do dowodu twierdzeń o niezniszczalności rurki wirowej (a) i o niezmienności natężenia rurki wirowej z upływem czasu (b)

Aby to udowodnić, obierzmy na bocznej powierzchni rurki wirowej obwód zamknięty C (płynny — przyp. tłum.) (rys. 5.14a) przechodzący przez wciąż te same elementy płynu. Ponieważ powierzchni objętej obwodem C nie przecinają wiry ($\omega_n = 0$), to cyrkulacja wzdłuż tego obwodu jest, zgodnie z twierdzeniem Stokesa, równa zeru, czyli $\Gamma_C = 0$. Ponieważ jednak według twierdzenia Thomsona cyrkulacja nie będzie w danym przypadku zmieniała się w czasie, będzie ona zatem zawsze równa zeru. Świadczy to o tym, że przez obwód C linie wirowe nie przejdą nigdy i obwód C będzie zawsze leżał na bocznej powierzchni rurki wirowej, a więc rurka wirowa nie zostanie „zniszczona".

Podana właściwość wirów jest słuszna tylko dla płynu doskonałego. W płynie rzeczywistym zachodzi proces zanikania (dyfuzja) wirów. Badaniom tego skomplikowanego procesu dyfuzji wirów w płynie lepkim poświęcona jest praca akademika A. I. Niekrasowa pt. *Difuzja wichria* [31].

T r z e c i e t w i e r d z e n i e H e l m h o l t z a. *Jeżeli w płynie doskonałym działają siły masowe mające jednoznaczny potencjał i zachodzi barotropowość, wówczas natężenie rurki wirowej nie zmienia się w czasie.*

Okrążmy rurkę wirową (rys. 5.14b) zamkniętym obwodem płynnym C. Zgodnie z twierdzeniem Thomsona cyrkulacja wzdłuż tego obwodu pozostanie niezmienna. Ponieważ jednak na podstawie twierdzenia Stokesa cyrkulacja Γ równa jest natężeniu rurki wirowej, zatem natężenie również nie będzie zmieniało się w czasie.

Z drugiego i trzeciego twierdzenia Helmholtza wynika, że w płynie doskonałym, przy założeniu potencjału sił masowych i barotropowości, ruch wirowy nie może ani powstać, ani zniknąć.

§ 6. Rozkład ciśnień na zewnątrz wiru płaskiego i w jego rdzeniu

Oznaczmy przez r_0 promień rdzenia wiru[1] oraz prędkość na granicy rdzenia przez v_0 (rys. 5.15). Ciśnienie w dowolnym punkcie poza wirem można wówczas określić za pomocą równania Lagrange'a—Bernoulliego (4.15); zaniedbując siły masowe ($U = 0$), napiszemy to równanie w następującej postaci:

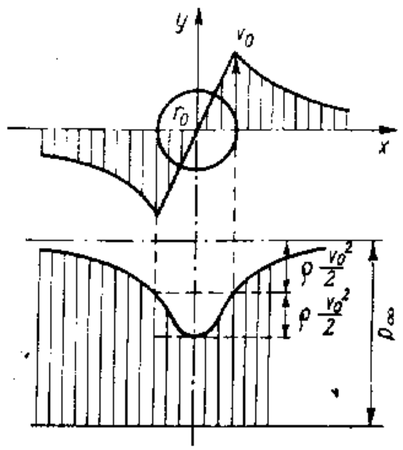
$$p + \frac{\varrho v^2}{2} = C.$$

Ponieważ na zewnątrz wiru $v = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$, więc w nieskończoności $v_\infty = 0$, ciśnienie zaś będzie równe ciśnieniu statycznemu otoczenia p_∞. W oparciu o to można określić stałą C:

$$p_\infty = C,$$

skąd

$$p = p_\infty - \frac{\varrho v^2}{2}. \qquad (5.12)$$



5.15. Rozkład prędkości i ciśnień na zewnątrz wiru płaskiego oraz w jego rdzeniu

Widzimy, że w miarę zbliżania się do wiru (rys. 5.15) prędkość v będzie wzrastała zgodnie z prawem hiperbolicznym, a ciśnienie p będzie malało. Ciś-

[1] Rdzeń wirowy jest to środkowa część wiru obracająca się ze stałą prędkością kątową jak ciało sztywne (przyp. tłum.).

nienie będzie najmniejsze na granicy rdzenia, gdzie prędkość osiąga wartość maksymalną i jest równa v_0. Ciśnienie na granicy rdzenia będzie określał następujący wzór:

$$p_0 = p_\infty - \frac{\varrho v_0^2}{2}. \tag{5.13}$$

Rozpatrzmy obecnie, jak będzie zmieniało się ciśnienie wewnątrz samego wiru, tzn. w obszarze, gdzie wirowość strumienia nie jest równa zeru.

W tym przypadku nie można stosować całki Lagrange'a—Bernoulliego, gdyż przepływ nie jest potencjalny. Wydawałoby się, że trzeba skorzystać z całki Bernoulliego. Jednakże i tej całki wykorzystać nie można, gdyż dla poszczególnych linii strumienia wewnątrz wiru stała równania Bernoulliego jest różna i nieznana.

Wykorzystajmy więc w tym celu równania Eulera. Ponieważ przepływ jest płaski, ustalony i pomijamy siły masowe, więc napiszemy równania Eulera w postaci

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Oznaczając przez ω prędkość kątową obrotu wiru, można napisać wyrażenia na v_x i v_y w postaci następującej:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x.$$

W tym przypadku

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

i równania Eulera przybiorą postać

$$\omega^2 x = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\omega^2 y = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Mnożąc ostatnie równania odpowiednio przez dx i dy oraz całkując, znajdujemy

$$p = \frac{\varrho \omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C$$

lub

$$p = \frac{\varrho \omega^2 r^2}{2} + C = \frac{\varrho v^2}{2} + C. \tag{5.14}$$

Napiszemy równanie (5.14) dla granicy wiru. Będziemy mieli

$$p_0 = \frac{\varrho v_0^2}{2} + C,$$

skąd

$$C = p_0 - \frac{\varrho v_0^2}{2},$$

czyli

$$p = \frac{\varrho v^2}{2} + p_0 - \frac{\varrho v_0^2}{2}.$$

Podstawmy zamiast p_0 jego wartość (5.13). Otrzymamy

$$p = p_\infty + \frac{\varrho v^2}{2} - \varrho v_0^2. \tag{5.15}$$

Na podstawie tego równania można obliczyć ciśnienie w każdym punkcie wewnątrz wiru. W środku wiru $p = p_C$, $v = 0$, a zatem

$$p_C = p_\infty - \varrho v_0^2. \tag{5.16}$$

Wynika stąd, że w środku wiru ciśnienie zmniejszyło się w porównaniu z ciśnieniem w płynie nieruchomym na zewnątrz wiru o podwójną wielkość ciśnienia prędkości na granicy wiru, tzn. o ϱv_0^2.

Porównując ciśnienia w środku wiru z ciśnieniem na jego granicy otrzymamy

$$p_0 - p_C = \frac{\varrho v_0^2}{2}, \tag{5.17}$$

co wskazuje na to, że spadek ciśnienia na granicach przepływu potencjalnego (na zewnątrz jądra wiru) jest równy spadkowi ciśnienia wewnątrz wiru; zmiana ciśnienia wewnątrz wiru jest paraboliczna.

Spadek ciśnienia w rdzeniu wiru wyjaśnia tworzenie się lejków na powierzchni wody. To wyjaśnia również znane zasysające własności wirów. Obserwowane w przyrodzie trąby morskie zawsze zasysają przedmioty spotykane na swej drodze. Niszczącą siłę trąby morskiej można tłumaczyć zarówno dużym spadkiem ciśnienia w ich wnętrzu, jak również olbrzymią energią kinetyczną ruchu płynu wokół wiru.

§ 7. Wzór Biota—Savarta na prędkość indukowaną

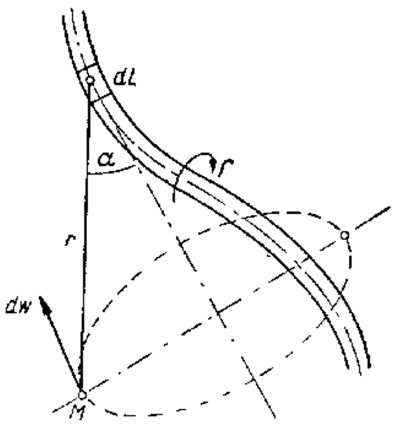
Znajdźmy w jakimkolwiek punkcie M płynu prędkość wywołaną wirem o dowolnym kształcie i natężeniu Γ (rys. 5.16). Wyodrębnijmy w tym celu element dL wiru. Odległość od punktu M do elementu dL oznaczmy literą

r; literą α — kąt, jaki tworzy promień r z osią elementu wirowego. Można dowieść w sposób ścisły, że prędkość dw, indukowana przez element wiru dL w punkcie M, będzie wówczas określona za pomocą wzoru

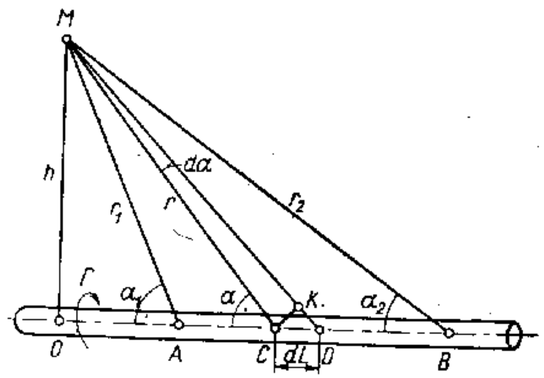
$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin\alpha \, dL, \tag{5.18}$$

zwanego *wzorem Biota—Savarta* i mającego duże znaczenie w aerodynamice.

Należy zauważyć, że wzór (5.18) ustala ciekawą analogię z elektrodynamiką. Jeżeli bowiem krzywoliniowe włókno wirowe zastąpimy w myśli przewodnikiem



5.16. Do obliczenia prędkości indukowanych w płynie przez wir o dowolnym kształcie



5.17. Do obliczenia prędkości indukowanych w płynie przez nieskończenie długi wir prostoliniowy

liniowym, przez który płynie prąd o natężeniu Γ, wówczas prąd ten działając na jednostkę masy magnetycznej w punkcie M wywoła siłę, której wielkość i kierunek określa wzór (5.18) wyrażający znane prawo Biota—Savarta.

Dla określania prędkości, indukowanej przez cały wir w punkcie M, trzeba wzór (5.18) scałkować po linii L długości wiru:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin\alpha \, dL}{r^2}. \tag{5.19}$$

Zastosujemy wzór (5.18) do przypadku nieskończenie długiego wiru prostoliniowego o natężeniu $\varkappa = \Gamma$. Znajdziemy najpierw prędkość indukowaną w w punkcie M przez odcinek AB tego wiru o skończonej długości (rys. 5.17).

Promienie wodzące r_1 i r_2 oraz kąty α_1 i α_2, odpowiadające punktom A i B, a także długość prostopadłej h do osi wiru, poprowadzonej z punktu M, są dane (dana jest również wielkość Γ).

Wyodrębnimy na odcinku AB wiru nieskończenie mały element $CD = dL$. Z nieskończenie małych trójkątów CKD i CMK znajdujemy

$$CD = dL = \frac{CK}{\sin\alpha}, \qquad CK = r d\alpha,$$

skąd

$$dL = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Z drugiej strony, z trójkąta OCM mamy

$$r = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Podstawiając wartości r i dL do wzoru (5.18), znajdziemy

$$dw = \frac{\Gamma \sin^2\alpha}{4\pi h^2} \sin\alpha \frac{h \, d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

lub

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin\alpha \, d\alpha.$$

W celu znalezienia prędkości indukowanej przez cały wir AB w punkcie M, trzeba to równanie scałkować w granicach od α_2 do α_1 (w kierunku wzrastających kątów α). Wówczas

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1). \tag{5.20}$$

Oznaczając $OA = x_1$ i $OB = x_2$, można równaniu (5.20) nadać postać:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\frac{x_2}{\sqrt{h^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{h^2 + x_1^2}} \right). \tag{5.20'}$$

Rozważmy dwa przypadki szczególne.

P r z y p a d e k p i e r w s z y: nieskończenie długie włókno wirowe, ciągnące się od punktu 0 do nieskończoności. Wtedy

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_2 = 0,$$

a zatem

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \tag{5.21}$$

Z równania tego będziemy korzystali w teorii płata o skończonej rozpiętości.

P r z y p a d e k d r u g i: nieskończenie długie włókno wirowe ciągnące się w obydwie strony w nieskończoność. Wtedy

$$\alpha_1 = \pi, \quad \alpha_2 = 0$$

i równanie (5.20) przybierze postać

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \tag{5.21'}$$

Widzimy, że prędkość indukowana w pierwszym przypadku jest dwukrotnie mniejsza niż w przypadku drugim.

§ 8. Zagadnienie wyznaczania prędkości indukowanej przez wiry w przypadku ogólnym

W paragrafie 7 rozważyliśmy oddziaływanie pojedynczego wiru na otaczający go płyn. Rozważmy obecnie zagadnienie wyznaczania wpływu wirowości postawione w sposób najbardziej ogólny.

Załóżmy, że w pewnym obszarze, o objętości V, dane są w każdym punkcie składowe prędkości kątowej ω_x, ω_y, ω_z wiru w funkcji współrzędnych x, y, z. Należy w każdym punkcie tej objętości określić prędkość liniową v wywołaną (indukowaną) wirami, czyli wielkości v_x, v_y, v_z. Jak wiadomo, v_x, v_y, v_z związane są z ω_x, ω_y, ω_z następującymi zależnościami (wzory 5.1):

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Łatwo sprawdzić, że prócz tego ω_x, ω_y, ω_z spełniają następujące równanie:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \tag{5.22}$$

Dla wyznaczenia v_x, v_y, v_z zastosujemy następującą metodę. Wprowadzimy do rozważań wektor pomocniczy $\bar{a}$, odgrywający w stosunku do wektora prędkości liniowej $\bar{v}$ tę samą rolę co $\bar{v}$ w stosunku do $\bar{\omega}$; składowe wektora $\bar{a}$ powinny więc spełniać równania analogiczne do (5.1):

$$v_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right), \quad v_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right), \quad v_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{5.23}$$

Jeżeli dla znanego pola wektorów prędkości kątowej $\bar{\omega}$ znajdziemy teraz odpowiadające mu pole wektorów $\bar{a}$, znajdziemy tym samym pole wektorów prędkości liniowej $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ za pomocą wzorów (5.23).

Bezpośrednie sprawdzenie wskazuje, że zarówno rzut wektora $\bar{a}$, jak również rzuty wektorów prędkości liniowej $\bar{v}$ i prędkości kątowej $\bar{\omega}$ spełniają zależność

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 \tag{5.24}$$

stwierdzającą, że zarówno pole wektorów $\bar{a}$, jak również pole wektorów $\bar{v}$ i $\bar{\omega}$ są polami solenoidalnymi.

Podstawmy teraz do prawej części równań (5.1) zamiast v_x, v_y, v_z ich wartości z równań (5.23). Będziemy mieli

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\right].$$

Biorąc pod uwagę warunek (5.24) oraz wykonując analogiczne przekształcenie dla ω_y, ω_z, otrzymamy następujące trzy równania:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} &= -4\,\omega_x, \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} &= -4\,\omega_y, \\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} &= -4\,\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Równania te, o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, noszą nazwę równań Poissona. W przypadku szczególnym, gdy $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, równania Poissona przekształcają się w znane nam równania Laplace'a. Zatem wewnątrz obszaru wirowego wielkości a_x, a_y, a_z spełniają równania Poissona, na zewnątrz zaś obszaru wirowego — równania Laplace'a.

Rozwiązanie równań Poissona ma postać [10]

$$a_x = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_x \frac{dV}{r}, \quad a_y = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_y \frac{dV}{r}, \quad a_z = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_z \frac{dV}{r}, \tag{5.26}$$

przy czym całkowanie rozciąga się na całą objętość V, wypełnioną wirami $\bar{\omega}$.

Zastosujmy równania (5.26) do przypadku, gdy w płynie nieruchomym znajduje się włókno wirowe o dowolnym kształcie. Element objętości włókna wirowego dV równa się oczywiście elementowi długości dL, pomnożonemu przez powierzchnię σ przekroju poprzecznego włókna: $dV = \sigma\, dL$. Składowe wektora $\bar{\omega}$ mogą być przedstawione w postaci:

$$\omega_x = \omega \cos(\omega, x) = \omega \frac{d\xi}{dL}, \quad \omega_y = \omega \frac{d\eta}{dL}, \quad \omega_z = \omega \frac{d\zeta}{dL},$$

gdzie ξ, η i ζ są to bieżące współrzędne wiru w odróżnieniu od x, y, z — współrzędnych płynu na zewnątrz włókna wirowego.

Wyrażenia podcałkowe w równaniu (5.26) można teraz napisać w postaci:

$$\frac{\omega_x\, dV}{r} = \frac{\omega\,\sigma\, d\xi}{r}, \quad \frac{\omega_y\, dV}{r} = \frac{\omega\,\sigma\, d\eta}{r}, \quad \frac{\omega_z\, dV}{r} = \frac{\omega\,\sigma\, d\zeta}{r},$$

skąd, oznaczając $\omega\,\sigma = \frac{1}{2}\Gamma$, otrzymamy

$$a_x = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L \frac{d\xi}{r}, \quad a_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L \frac{d\eta}{r}, \quad a_z = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L \frac{d\zeta}{r}. \tag{5.27}$$

Podstawmy wyrażenia (5.27) do równań (5.23). Będziemy wówczas mieli

$$v_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\int_L \frac{d\eta}{r}\right)\right] = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta\right].$$

Obliczmy pochodne cząstkowe $\frac{1}{r}$, biorąc pod uwagę, że

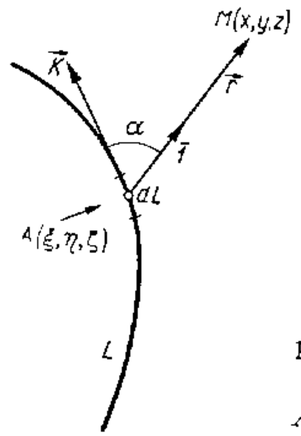
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\eta - y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\zeta - z}{r^3}.$$

W tym przypadku wyrażenia na składowe prędkości liniowej przybiorą następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\eta - y}{r}\frac{d\zeta}{dL} - \frac{\zeta - z}{r}\frac{d\eta}{dL}\right]\frac{dL}{r^2}, \\ v_y &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\zeta - z}{r}\frac{d\xi}{dL} - \frac{\xi - x}{r}\frac{d\zeta}{dL}\right]\frac{dL}{r^2}, \\ v_z &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\xi - x}{r}\frac{d\eta}{dL} - \frac{\eta - y}{r}\frac{d\xi}{dL}\right]\frac{dL}{r^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5.28)$$



5.18. Do obliczenia prędkości indukowanych w płynie przez wir o dowolnym kształcie

Z równań tych można łatwo otrzymać wzór Biota—Savarta, podany w paragrafie poprzednim.

Obierzmy na linii wirowej L (rys. 5.18) dowolny punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$. Niech odległość punktu $M(x, y, z)$ od punktu A będzie określona przez promień wodzący r. Odłóżmy w punkcie A wektor jednostkowy $\bar{k}$ wzdłuż stycznej. Rzutami jego będą

$$\frac{d\xi}{dL}, \quad \frac{d\eta}{dL}, \quad \frac{d\zeta}{dL}.$$

Odłóżmy wzdłuż promienia r wektor jednostkowy $\bar{1}$. Jego składowe będą miały postać

$$-\frac{\xi - x}{r}, \quad -\frac{\eta - y}{r}, \quad -\frac{\zeta - z}{r}.$$

Oznaczmy przez $d\bar{w}$ prędkość, indukowaną w punkcie M przez element wiru dL. Widzimy, że składowymi $d\bar{w}$ będą wówczas wyrażenia podcałkowe wzorów (5.28), sama zaś wielkość $d\bar{w}$ wyraża się w postaci iloczynu wektorowego

$$d\bar{w} = \frac{\Gamma}{4\pi}(\bar{k}\times\bar{1})\frac{dL}{r^2}.$$

Biorąc moduł z obydwu części powyższego wyrażenia, otrzymamy wzór Biota—Savarta (5.18):

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi r^2}\sin\alpha\, dL.$$

§ 9. Paradoks Eulera—d'Alemberta

Rozpatrzmy bezcyrkulacyjny opływ walca o promieniu R doskonałym płynem nieściśliwym (rys. 5.19).

Jak stwierdziliśmy powyżej, prędkość v na walcu będzie wyrażał następujący wzór:

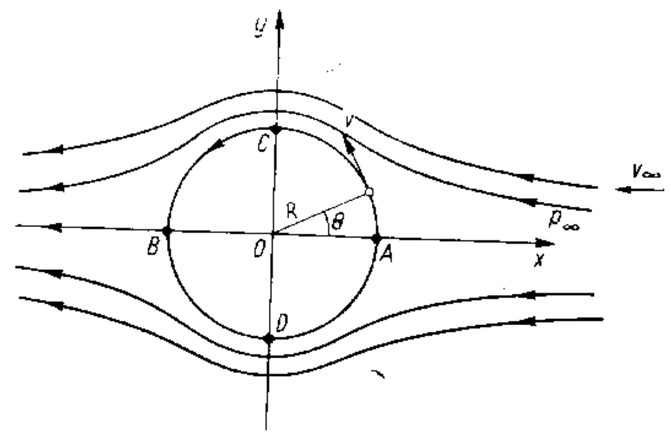
$$v = 2 v_\infty \sin\theta.$$

Obliczmy ciśnienie na walcu za pomocą równania Bernoulliego

$$p = p_\infty + \frac{\varrho v_\infty^2}{2} - \frac{\varrho v^2}{2}.$$

Podstawiając wartość v, znajdziemy

$$p - p_\infty = \frac{\varrho v_\infty^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta).$$



5.19. Do wyjaśnienia paradoksu Eulera—d'Alemberta

Wprowadzimy bezwymiarowy współczynnik ciśnienia (zwanym także ciśnieniem zredukowanym — przyp. tłum.) $\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho v_\infty^2}{2}}$. Otrzymamy dla walca

$$\bar{p} = 1 - 4\sin^2\theta.$$

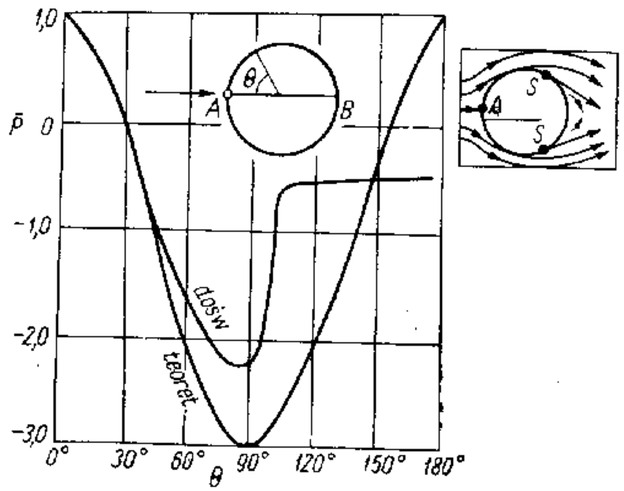
Widzimy, że ciśnienie zredukowane nie zależy ani od promienia walca, ani od v_∞ i p_∞.

Przy $\theta = 0$ (punkt A) $\bar{p} = 1$.

Przy $\theta = \pi$ (punkt B) $\bar{p} = 1$.

W punktach C i D ciśnienie zredukowane $\bar{p} = \bar{p}_{\min} = -3$, tzn. że w punktach tych panuje maksymalne podciśnienie.

Z symetrii rozkładu ciśnienia na powierzchni walca (ponieważ $\bar{p}$ zależy od $\sin^2\theta$) wynika, że wypadkowa siła działająca na walec i pochodząca od ciśnień — równa jest zeru. Wynik ten może być uogólniony na przypadek dowolnego ciała umieszczonego w ciągłym przepływie potencjalnym, w którym nie tworzą się wiry i nie ma oderwania. A zatem jeżeli w jednostajnym przepływie ustalonym płynu doskonałego znajduje się jakieś ciało i opływ odbywa się bez oderwania



5.20. Teoretyczna i doświadczalna zależność ciśnienia zredukowanego $\bar{p}$ od kąta θ

oraz tworzenia się cyrkulacji, wówczas wypadkowa ciśnień działających na ciało jest równa zeru, tzn. że ciało nie stawia oporu. Na tym polega znany paradoks Eulera—d'Alemberta.

Teoretyczny wykres $\bar{p}$ podany jest na rys. 5.20. Jak wykazuje doświadczenie, krzywa rozkładu ciśnień $\bar{p}$ będzie miała w rzeczywistości zupełnie inny kształt. W szczególności, przy $\theta = 84 \div 120°$ strumień przestaje opływać walec i odrywa się od niego, tworząc za nim obszar zawirowań.

Taka zmiana opływu następuje na skutek istnienia w płynie rzeczywistym (lepkim) warstwy przyściennej. Udowodnimy dalej (rozdz. XI), że zasysając do wewnątrz walca warstwę przyścienną można otrzymać opływ, odpowiadający prawie dokładnie opływowi potencjalnemu (rys. 5.19).

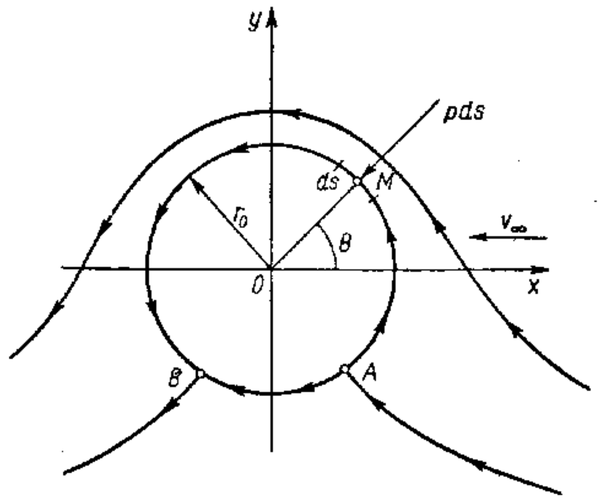
§ 10. Twierdzenie Żukowskiego

Podstawą współczesnej teorii płata nośnego jest słynne twierdzenie Żukowskiego o wypadkowej ciśnień działających na opływane ciało. Posługując się modelem cieczy doskonałej doszukiwał się Żukowski źródła oddziaływania przepływu na ciało w cyrkulacji.

Wyjaśnimy to z początku na szczególnym przykładzie opływu walca kołowego. Jak wykazaliśmy powyżej, przy bezcyrkulacyjnym opływie walca koło-

wego prędkości i ciśnienia rozkładają się symetrycznie, wobec czego wypadkowa siła ciśnień nie istnieje. Jeżeli natomiast opływ jest cyrkulacyjny, wówczas symetria rozkładu prędkości i ciśnień zostaje naruszona, wskutek czego powstaje siła wypadkowa. Powstanie cyrkulacji można traktować jako wynik oddziaływania na przepływ wiru, znajdującego się w środku opływanego walca.

Rozważmy taki schemat z dynamicznego punktu widzenia.



5.21. Do dowodu twierdzenia Żukowskiego

Załóżmy (rys. 5.21), że walec o promieniu r_0 opływa strumień jednostajny, skierowany od prawej strony ku lewej, o prędkości v_∞ w nieskończoności. Jak zostało wykazane, potencjał prędkości takiego przepływu cyrkulacyjnego wyraża następujące równanie:

$$\varphi = -v_\infty \cos\theta \left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta,$$

prędkość zaś opływu na powierzchni walca

$$v = 2 v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

W celu znalezienia wielkości wypadkowej siły R, pochodzącej od ciśnień, rozważmy najpierw rzuty na osie współrzędnych elementarnej siły $p\,ds$, działającej na powierzchnię ds. Rzuty siły $p\,ds$ na osie współrzędnych można napisać w postaci

$$-p\,ds\cos\theta,$$
$$-p\,ds\sin\theta.$$

W tym przypadku dla składowych siły R będziemy mieli następujące wzory:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int p\cos\theta\,ds, \\ Y &= -\int p\sin\theta\,ds, \end{aligned}\right\} \qquad (5.29)$$

gdzie całkowanie dokonywane jest wzdłuż okręgu o promieniu r_0. Podstawiając ciśnienie p ze wzoru

$$p = C - \frac{\varrho v^2}{2},$$

otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int\left(C - \frac{\varrho v^2}{2}\right)\cos\theta\, ds, \\ Y &= -\int\left(C - \frac{\varrho v^2}{2}\right)\sin\theta\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Obliczmy wielkość X. Podstawimy w tym celu do (5.30) wyrażenie na prędkość v na powierzchni walca oraz $ds = r_0\, d\theta$.

Otrzymamy

$$X = -\int_0^{2\pi}\left\{C - \frac{\varrho}{2}\left[4 v_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + 2\frac{v_\infty \Gamma}{\pi r_0}\sin\theta\right]\right\} r_0 \cos\theta\, d\theta,$$

skąd

$$X = -Cr_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + 2\varrho r_0 v_\infty^2 \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta +$$

$$+ \frac{\Gamma^2\varrho}{8\pi^2 r_0}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \frac{\varrho v_\infty \Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

Ponieważ całki

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0,$$

więc $X = 0$. Innymi słowy, przy opływie walca płynem doskonałym bez oderwania opór (tzn. siła skierowana przeciwnie do prędkości v_∞) równy jest zeru, nawet wówczas gdy cyrkulacja Γ jest różna od zera.

Obliczmy teraz wielkość siły, zwanej siłą nośną Y, skierowanej normalnie do prędkości v_∞. Otrzymamy:

$$Y = -\int_0^{2\pi}\left\{C - \frac{\varrho}{2}\left[4 v_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + 2\frac{v_\infty \Gamma}{\pi r_0}\sin\theta\right]\right\} r_0 \sin\theta\, d\theta$$

lub

$$Y = -Cr_0\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta + 2\varrho r_0 v_\infty^2 \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta +$$

$$+ \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r_0}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta + \frac{\varrho v_\infty \Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta.$$

Ponieważ całki

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \pi,$$

więc ostatecznie

$$Y = \varrho \Gamma v_\infty. \tag{5.31}$$

Zawarty w równaniu (5.31) wynik nazywany jest *twierdzeniem Żukowskiego i stanowi podstawowe twierdzenie aerodynamiki.*

Z równania (5.31) widać, że twierdzenie Żukowskiego może być sformułowane w sposób następujący: *działa na walec siła normalna do prędkości w nieskończoności v_∞ równa co do wartości liczbowej iloczynowi tej prędkości przez cyrkulację Γ i gęstość płynu ϱ.*

Uwaga. Ustalmy wymiar Y we wzorze (5.31)

$$[Y] = [\varrho][\Gamma][v_\infty] = \frac{\mathrm{kG\,sek^2\,m^2\,m}}{\mathrm{m^4\,sek\,sek}} = \frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{m}},$$

tzn. Y ma wymiar siły, odniesionej do jednostki rozpiętości walca, co jest oczywiste, jeżeli przypomnimy sobie, że dla przepływu płaskiego przyjmujemy grubość strumienia w kierunku normalnym do płaszczyzny przepływu równą jednostce.

§ 11. Dowód twierdzenia Żukowskiego dla dowolnego obwodu płaskiego

Przeprowadzimy dowód twierdzenia Żukowskiego dla dowolnego ciała walcowego opływanego przez płaski strumień cieczy doskonałej.

Załóżmy, że obrys ciała L, ogólnie biorąc — dowolny, spełnia warunek opływu bez oderwania. Przeprowadźmy dokoła rozpatrywanego obrysu L ciała dowolny zamknięty kontur C (kontur kontrolny).

W dowolnym punkcie M konturu kontrolnego C wystawmy normalną $\boldsymbol{n}$, która tworzy z osiami współrzędnych kąty α i β (rys. 5.22).

W celu wyprowadzenia twierdzenia Żukowskiego stosujemy twierdzenie o ilości ruchu do objętości płynu, zawartego między obrysem L ciała i konturem C.

Rzuty ilości ruchu masy płynu, przechodzącego w jednostce czasu przez kontur C, można napisać w następujący sposób:

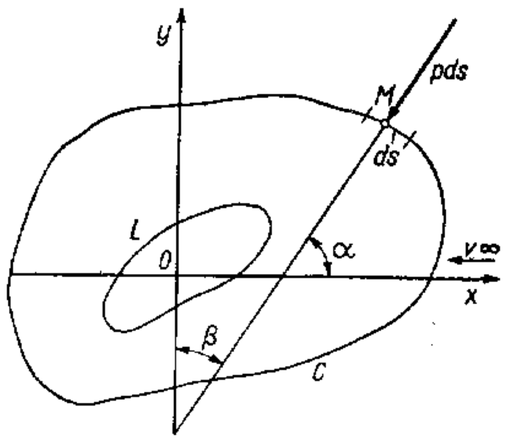
$$\int_C v_x \varrho v_n\, ds, \qquad \int_C v_y \varrho v_n\, ds, \tag{a}$$

a rzuty sił powierzchniowych działających wzdłuż konturu C w postaci

$$-\int p\cos\alpha\, ds, \qquad -\int p\cos\beta\, ds. \tag{b}$$

Na rozpatrywaną objętość płynu działa oprócz tego siła pochodząca od ciała, gdyż jeżeli przepływ będzie wywierał na ciało ciśnienie, wyrażające się siłą wypadkową $\bar{F}$ o rzutach X, Y, to zgodnie z trzecim prawem Newtona, o akcji i reakcji, ciało będzie oddziaływać na rozpatrywany płyn siłami $(-X)$ i $(-Y)$. Siły te dadzą impulsy (w jednostce czasu)

$$-X, \; -Y. \tag{c}$$



5.22. Do dowodu twierdzenia Żukowskiego dla dowolnego zarysu płaskiego

Przyrównując do siebie wyrażenia (a) i sumę wyrażeń (b) i (c) otrzymamy matematyczną postać zasady ilości ruchu

$$\left.\begin{aligned} \int_C \varrho\, v_n v_x\, ds &= -X - \int_C p \cos\alpha\, ds, \\ \int_C \varrho\, v_n v_y\, ds &= -Y - \int_C p \cos\beta\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Określmy ciśnienie p ze wzoru Lagrange'a—Bernoulliego (4.13) i podstawmy do wzorów (5.32). W wyniku otrzymamy:

$$X = -\int_C \varrho\, v_n v_x\, ds - C\int_C \cos\alpha\, ds + \int \varrho \frac{v^2}{2} \cos\alpha\, ds,$$

$$Y = -\int_C \varrho\, v_n v_y\, ds - C\int_C \cos\beta\, ds + \int_C \varrho \frac{v^2}{2} \cos\beta\, ds.$$

Ponieważ cosinusy kierunkowe kątów, jakie normalna tworzy z osiami współrzędnych, określa się wzorami

$$\cos\alpha = -\frac{dy}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dx}{ds},$$

więc drugie całki będą równe zeru. Rzeczywiście

$$\int_C \cos\alpha\, ds = -\int_C \frac{dy}{ds}\, ds = -\int_C dy = 0,$$

$$\int_C \cos\beta\, ds = -\int_C \frac{dx}{ds}\, ds = -\int_C dx = 0,$$

gdyż po obejściu po zamkniętym konturze C zmienne x i y przyjmują swoje poprzednie wartości. W takim razie wyrażenia dla X i Y przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned} X &= \varrho \int_C \left(\frac{v^2}{2}\cos\alpha - v_n v_x\right) ds, \\ Y &= \varrho \int_C \left(\frac{v^2}{2}\cos\beta - v_n v_y\right) ds. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

Dotychczas nie czyniliśmy żadnych założeń o rodzaju przepływu. W dalszym ciągu będziemy uważali, że przepływ jest potencjalny i w nieskończonosci ma prędkość v_∞ równoległą do osi x, o zwrocie przeciwnym do tej osi. Oznacza to, że

$$(v_x)_\infty = -v_\infty, \qquad (v_y)_\infty = 0. \tag{5.34}$$

Wprowadźmy następujący wzór na potencjał prędkości $\varphi(x, y)$ przepływu:

$$\varphi = -v_\infty x + f(x, y), \tag{5.35}$$

gdzie $f(x, y)$ jest dowolną, jednoznaczną, ciągłą i różniczkowalną funkcją współrzędnych (x, y), spełniającą równanie Laplace'a.

Ponieważ rzuty prędkości v w dowolnym punkcie przepływu określa się, jak wiadomo, ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

więc z warunku, że w nieskończoności istnieją zależności (5.34), wynikają natychmiast warunki, jakie powinna spełniać funkcja $f(x, y)$ w nieskończoności:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\infty = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\infty = 0. \tag{5.37}$$

Przedstawmy wszystkie człony wchodzące do wyrażenia podcałkowego (5.33)

za pomocą potencjału prędkości φ i jego pochodnych. Wyliczmy jeszcze przed tym wielkość kwadratu prędkości:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\infty^2 - 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

W celu uproszczenia tego wyrażenia wykorzystajmy warunek dowolności konturu C. Załóżmy, że kontur C jest tak duży, że zgodnie z warunkami (5.37), można pominąć wielkości

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

jako małe rzędu drugiego. W tym przypadku otrzymamy

$$v^2 = v_\infty^2 - 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{5.38}$$

Wyliczmy teraz v_n. Otrzymamy

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn}$$

lub zgodnie z wyrażeniem (5.36)

$$v_n = \left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta. \tag{5.39}$$

Analogicznie dla v_s otrzymamy

$$v_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha. \tag{5.40}$$

Na podstawie uzyskanych wzorów można obliczyć iloczyny $v_n v_x$ i $v_n v_y$ (odrzucając małe rzędu drugiego):

$$v_n v_x = -v_n v_\infty - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha, \tag{5.41}$$

$$v_n v_y = -v_\infty \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha. \tag{5.42}$$

Wyrażenia $\frac{v^2}{2}\cos\alpha$ i $\frac{v^2}{2}\cos\beta$ można napisać w sposób następujący:

$$\frac{v^2}{2}\cos\alpha = \frac{v_\infty^2}{2}\cos\alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha, \tag{5.43}$$

$$\frac{v^2}{2}\cos\beta = \frac{v_\infty^2}{2}\cos\beta - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta =$$

$$= -\frac{v_\infty^2}{2}\cos\beta + v_\infty\left(v_\infty - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\beta. \tag{5.44}$$

Korzystając ze wzorów (5.41) ÷ (5.44) znajdujemy z wzoru (5.33):

$$X = -\varrho v_\infty \int_C v_n\, ds + \frac{\varrho v_\infty^2}{2}\int_C \cos\alpha\, ds.$$

Ponieważ całka $\int v_n\, ds$ wyraża pełny wydatek płynu przez zamknięty kontur, wewnątrz którego nie ma ani źródeł, ani upustów, więc równa się ona zeru.

W ten sposób

$$\int_C v_n\, ds = 0, \qquad \int_C \cos\alpha\, ds = 0,$$

a więc

$$X = 0.$$

Oznacza to, że dla ciągłego, potencjalnego przepływu płynu doskonałego opór ciała jest równy zeru.

Obliczmy teraz Y. Znajdujemy

$$Y = -\frac{\varrho v_\infty^2}{2}\int_C \cos\beta\, ds + \varrho v_\infty \int_C v_s\, ds.$$

Wiadomo, że pierwsza całka równa się zeru, a druga wyraża cyrkulację prędkości Γ wzdłuż obwodu C:

$$\int_C v_s\, ds = \Gamma,$$

a więc

$$Y = \varrho v_\infty \Gamma.$$

W ten sposób dla ciała o dowolnym obrysie otrzymaliśmy twierdzenie Żukowskiego mówiące, że na ciało działa wypadkowa skierowana normalnie do prędkości w nieskończoności i równa iloczynowi gęstości płynu ϱ, prędkości v_∞ i cyrkulacji Γ. Twierdzenie Żukowskiego słuszne jest również dla ściśliwego gazu przy poddźwiękowych prędkościach przepływu, co po raz pierwszy zostało dowiedzione przez M.W. Kiełdysza i F.I. Frankla [11].

Rozdział VI

ZASTOSOWANIE TEORII FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ DO BADAŃ PRZEPŁYWÓW PŁASKICH PŁYNU DOSKONAŁEGO

§ 1. Potencjał zespolony

Skuteczną metodę badania właściwości przepływu płaskiego stanowi metoda funkcji zmiennej zespolonej; metoda ta znalazła duże zastosowanie w aerodynamice. Stosowalność powyższej metody wynika z następujących powodów. Jak wykazano w § 12 rozdziału III, podstawowe funkcje charakteryzujące właściwości płaskiego przepływu potencjalnego — funkcja prądu $\psi(x, y)$ oraz potencjał prędkości $\varphi(x, y)$ — są związane ze sobą za pomocą następujących równań

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6.1}$$

W teorii funkcji zmiennej zespolonej równania te znane są, jak wiadomo, pod nazwą równań Cauchy'ego—Riemanna; wyrażają one warunek, że zespół tych dwu funkcji zmiennych rzeczywistych, tzn. $\varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, jest holomorficzną funkcją zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Oznaczmy tę funkcję literą w:

$$w(z) = \varphi + i\psi. \tag{6.2}$$

Funkcja $w(z)$, będąca holomorficzną funkcją zmiennej z, odgrywa w aerodynamice przepływów płaskich ważną rolę i znana jest pod nazwą *potencjału zespolonego*. Wykażemy dalej, że każdy przepływ płaski (niewirowy — przyp. tłum.) może być określony odpowiednim potencjałem zespolonym $w = \varphi + i\psi$.

Ów związek aerodynamiki płaskich przepływów cieczy nieściśliwej z doskonale rozwiniętą teorią funkcji zmiennej zespolonej pozwala na rozwiązywanie, w przypadku przepływu płaskiego, wielu zagadnień nastręczających duże trudności w przypadku dowolnego przepływu przestrzennego. Metoda ta nabrała szczególnego znaczenia w zagadnieniach teorii płata nośnego.

§ 2. Prędkość zespolona

Weźmy pochodną potencjału zespolonego $w = \varphi + i\psi$ względem zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Jak wiadomo z teorii funkcji zmiennej zespolonej, wyrażenie na pochodną będzie miało postać:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Dowiedliśmy uprzednio, że

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

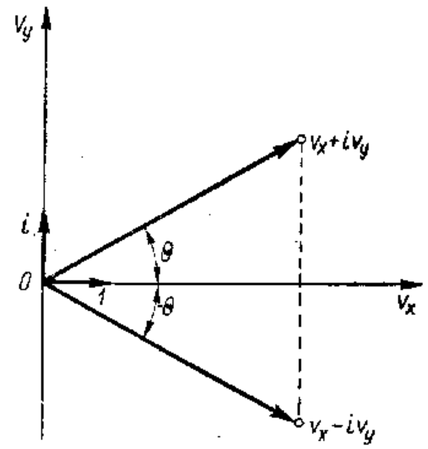
Zastępując pochodne we wzorze na $\frac{dw}{dz}$ za pomocą tych wzorów, znajdziemy

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i\,v_y. \tag{6.3}$$

Wyrażenie to zwane jest *prędkością zespoloną*.

Moduł prędkości zespolonej jest oczywiście równy modułowi samej prędkości v. Istotnie

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v. \tag{6.4}$$



6.1. Prędkość zespolona

Prędkość zespoloną można interpretować geometrycznie w następujący sposób (rys. 6.1). Narysujmy we współrzędnych v_x, v_y wektor określający prędkość $v_x + i\,v_y$. Stosując zwierciadlane odbicie względem rzeczywistej osi x wektora $v_x + i\,v_y$, tzn. rysując taki sam wektor pod kątem $-\theta$ do osi x, otrzymamy wektor określający wielkość prędkości zespolonej $v_x - i\,v_y$.

Równaniu (6.3) na prędkość zespoloną można nadać inną jeszcze postać. Ponieważ z rysunku wynika, że

$$v_x = v\cos\theta,$$

$$v_y = v\sin\theta,$$

zatem

$$\frac{dw}{dz} = v(\cos\theta - i\sin\theta) = ve^{-i\theta}. \tag{6.5}$$

§ 3. Przykłady najprostszych przepływów

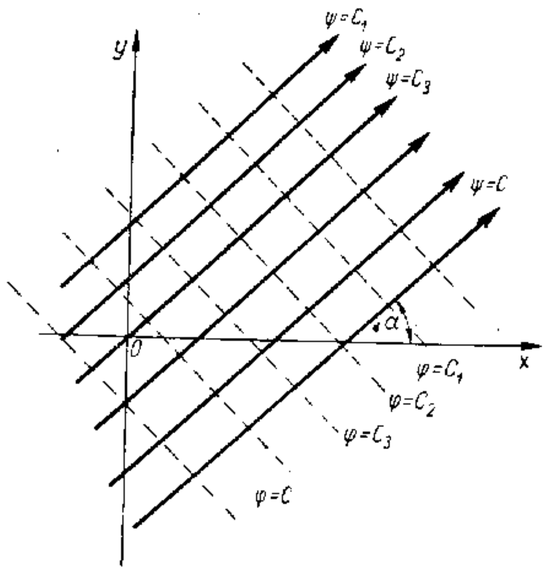
Przykład 1. Przepływ płaski określony jest przez potencjał zespolony

$$w = a z,$$

gdzie a oznacza wielkość zespoloną; $a = a_1 - i a_2$. Należy określić charakter przepływu.

Podstawiając wartości w, a oraz z, otrzymamy

$$\varphi + i\psi = (a_1 - i a_2)(x + iy),$$



6.2. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = az$

skąd, przyrównując części rzeczywiste i urojone, znajdziemy

$$\varphi = a_1 x + a_2 y,$$

$$\psi = -a_2 x + a_1 y.$$

Przyrównując φ i ψ do stałych, otrzymamy odpowiednio równania linij ekwipotencjalnych oraz linij prądu

$$a_1 x + a_2 y = C,$$

$$-a_2 x + a_1 y = C,$$

to znaczy równania rodzin wzajemnie ortogonalnych prostych (rys. 6.2). Prędkość zespolona będzie w tym przypadku równa $\frac{dw}{dz} = a = a_1 - i a_2$. Zatem

przepływ będzie się odbywał wzdłuż prostych nachylonych względem osi x pod kątem α, którego tangens: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1}$, z prędkością

$$v = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Przykład 2. Przepływ określony jest przez potencjał zespolony

$$w = a z^2,$$

gdzie a jest to wielkość rzeczywista.

W tym przypadku będziemy mieli

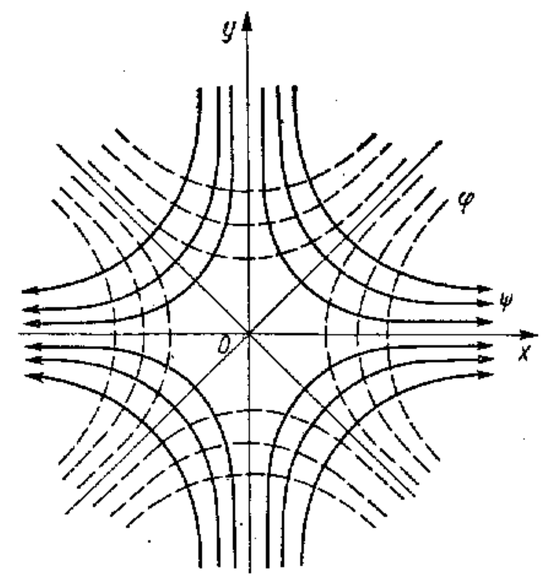
$$\varphi + i\psi = a(x + iy)^2$$

lub

$$\varphi = a(x^2 - y^2),$$

$$\psi = 2axy.$$

Przepływ taki omówiliśmy w § 15 rozdziału III. Linie będą stanowiły dwie



6.3. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = a z^2$

rodziny wzajemnie ortogonalnych hiperbol (rys. 6.3). Prędkość zespolona będzie w tym przypadku równa

$$\frac{dw}{dz} = 2az.$$

Zatem

$$v_x - i v_y = 2a(x + iy)$$

lub

$$v_x = 2ax,$$

$$v_y = -2ay,$$

to znaczy płyn będzie się poruszał wzdłuż hiperbolicznych linii prądu z prędkością

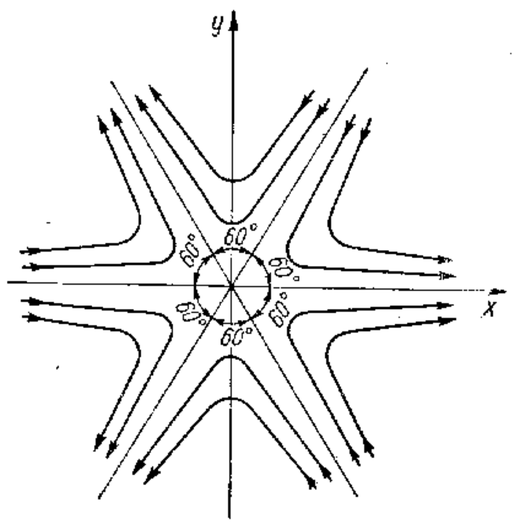
$$v = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{(2ax)^2 + (-2ay)^2} = 2a\sqrt{x^2+y^2} = 2ar.$$

Początek układu współrzędnych stanowi punkt krytyczny ($v = 0$).

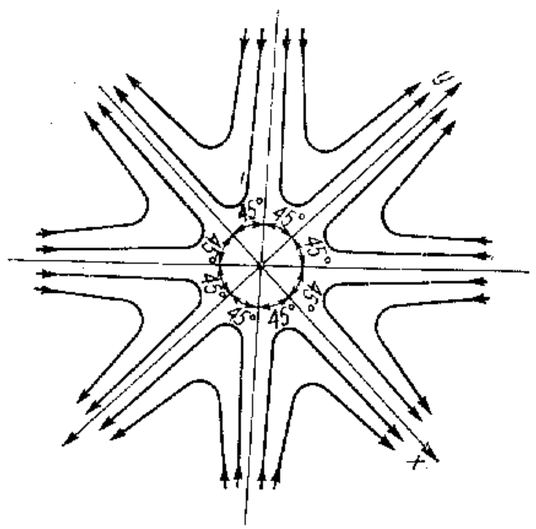
Przykład 3. Przepływ określony jest przez potencjał zespolony

$$w = z^n,$$

gdzie n — dowolna liczba całkowita, dodatnia. W tym przypadku, w celu zbadania charakteru przepływu, dogodniej jest posłużyć się zmienną zespoloną w postaci trygonometrycznej



6.4. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = z^3$



6.5. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = z^4$

$$w = \varphi + i\psi = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

skąd

$$\varphi = r^n \cos n\theta \quad \text{i} \quad \psi = r^n \sin n\theta.$$

Linie prądu określa rodzina krzywych n-tego rzędu

$$r^n \sin n\theta = C.$$

Znajdźmy zerowe linie prądu

$$r^n \sin n\theta = 0.$$

Stąd

$$\sin n\theta = 0$$

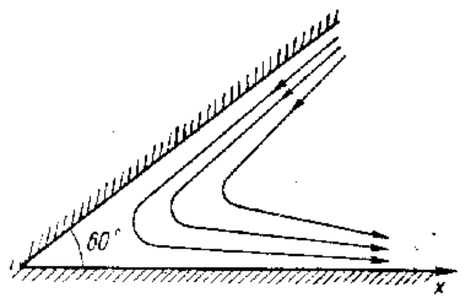
lub

$$n\theta = k\pi,$$

to znaczy

$$\theta = \frac{k\pi}{n},$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita, dodatnia zmieniająca się od 0 do $2n-1$. Nadając k wartości $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, stwierdzimy, że przepływ płaski będzie rozdzielony przez zerowe linie prądu — promieniami $\theta = \text{const}$ — na $2n$ klinowych obszarów o kątach $\frac{\pi}{n}$, między którymi będą się znajdowały pozostałe linie prądu. Na przykład przy $n = 3$ jest sześć takich obszarów i kąty ich wynoszą 60° (rys. 6.4). Przy $n = 4$ będzie osiem obszarów klinowych, zaś kąty ich będą wynosiły 45° (rys. 6.5). Zatem potencjał zespolony $w = z^n$ daje w ogóle opływ kąta o $\frac{\pi}{n}$ stopniach (rys. 6.6, odpowiadający $n = 3$). Obliczmy teraz prędkość zespoloną



6.6. Opływ naroża o kącie rozwarcia 60°

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = nz^{n-1} = nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta} =$$

$$= nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta].$$

Stąd

$$v_x = nr^{n-1}\cos(n-1)\theta \quad \text{oraz} \quad v_y = nr^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

Dla punktów leżących na osi x, gdzie $\theta = 0$, otrzymamy

$$v_x = nr^n > 0 \quad \text{oraz} \quad v_y = 0,$$

tzn. że przepływ jest taki jak na rys. 6.4 ÷ 6.6. Początek układu współrzędnych stanowi oczywiście punkt krytyczny, jeżeli $n > 1$. Istotnie, przy $r = 0$ i $n > 1$ mamy $v_x = v_y = 0$. Przy $n = 1$ początek układu współrzędnych nie jest punktem krytycznym, ponieważ potencjał zespolony $w = z$ odpowiada przepływowi jednostajnemu o równoległych liniach prądu, omówionemu w przykładzie 1.

Przykład 4. Przepływ określony jest przez potencjał zespolony

$$w = \ln z. \tag{6.6}$$

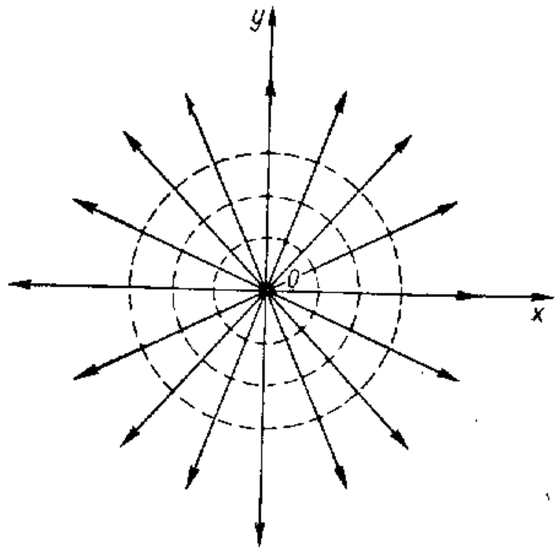
Postępując analogicznie jak poprzednio, znajdziemy

$$\varphi + i\psi = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta,$$

skąd

$$\varphi = \ln r, \quad \psi = \theta.$$

Linie prądu będą oczywiście stanowiły rodzinę promieni wychodzących z początku układu współrzędnych, czyli że początek układu będzie źródłem. Taki



6.7. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = \ln z$ — źródło

przepływ omówiliśmy w § 16 rozdziału III. Dowiedźmy, że kierunek przepływu odpowiada kierunkowi pokazanemu na rys. 6.7. Znajdźmy w tym celu rzut prędkości v na promień biegunowy r:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r},$$

czyli prędkość v_r jest zgodna istotnie[1] ze zwrotem promienia biegunowego r. (Potencjał zespolony $w = -\ln z$ będzie oczywiście upustem). Na prędkość zespoloną otrzymamy następujący wzór:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}. \tag{6.7}$$

[1] Łatwo zauważyć, że składowa v_θ prędkości w kierunku normalnym do promienia

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

jest równe zeru, wobec czego $v \equiv v_r$ (przyp. red.).

Jak widać, w tym przypadku potencjał zespolony w oraz prędkość zespolona, będące analitycznymi funkcjami zmiennej z, w początku układu współrzędnych przestają być analityczne, ponieważ zarówno w, jak i $\frac{dw}{dz}$ stają się przy $z = 0$ nieskończenie wielkie. W danym przypadku początek układu współrzędnych jest tak zwanym punktem osobliwym: dla funkcji w — izolowanym punktem logarytmicznym, dla prędkości zaś zespolonej $\frac{dw}{dz}$ — biegunem pierwszego rzędu.

Jeżeli wydatek źródła równy jest Q, wówczas (§ 16, rozdz. III):

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r,$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta.$$

W ogólnym przypadku potencjał zespolony będzie zatem miał postać:

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln z. \tag{6.8}$$

Jeżeli natomiast źródło leży nie w początku układu współrzędnych, lecz w punkcie $z = a$, wtedy

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - a). \tag{6.9}$$

Wreszcie, jeżeli na płaszczyźnie znajduje się n źródeł, leżących odpowiednio w punktach $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$, wówczas potencjał zespolony przybierze postać

$$w = \sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{2\pi}\ln(z - a_k). \tag{6.10}$$

Przykład 5. Przepływ określony jest przez potencjał zespolony

$$w = \frac{1}{z}. \tag{6.11}$$

Łatwo jest sprawdzić, że w tym przypadku

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

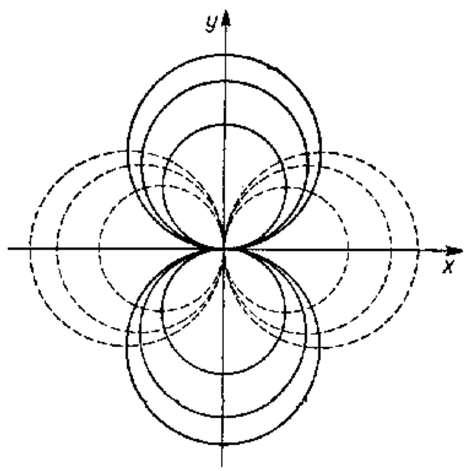
$$\psi = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

czyli otrzymujemy przepływ również już omówiony (§ 17, rozdz. III) i nazywany źródłem podwójnym (rys. 6.8).

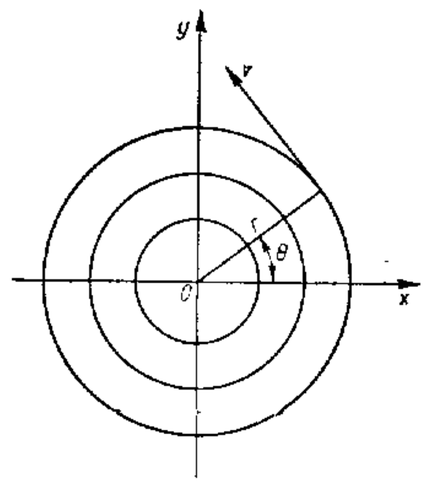
Prędkość zespolona źródła podwójnego będzie miała postać

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}. \tag{6.12}$$

Tak samo jak w przykładzie poprzednim, początek układu współrzędnych będzie stanowił punkt osobliwy: dla funkcji w — biegun pierwszego rzędu



6.8. Płaski przepływ określony zespolonym potencjałem $w = \frac{1}{z}$ — źródło podwójne (dipol)



6.9. Płaski przepływ określony potencjałem zespolonym $w = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z$ — wir

dla prędkości zaś zespolonej — biegun drugiego rzędu. Jeżeli moment źródła podwójnego równa się M, wówczas potencjał zespolony przybierze postać

$$w = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.13}$$

Jeżeli natomiast źródło podwójne znajduje się w punkcie $z = a$, wtedy potencjał zespolony ma postać

$$w = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z-a}. \tag{6.14}$$

P r z y k ł a d 6. Potencjał zespolony dany jest w postaci

$$w = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z. \tag{6.15}$$

Łatwo przekonać się, że w tym przypadku w stanowi potencjał zespolony wiru płaskiego (rys. 6.9). Istotnie, dla φ i ψ mamy

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \\ \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r, \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

gdzie wielkość Γ oznacza cyrkulację. Równania (6.16) omówione zostały w § 18 rozdziału III. Linie prądu będą stanowiły rodzinę okręgów współśrodkowych

$$r = \text{const}.$$

Dla ustalenia kierunku przepływu znajdziemy składowe prędkości v_r i v_s:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

czyli prędkość w każdym punkcie przepływu wyraża się za pomocą wzoru:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{6.17}$$

i jest skierowana wzdłuż stycznej do odpowiedniego okręgu.

Ze wzoru na v_s wynika, że przepływ ma kierunek zgodny z kierunkiem kąta θ.

Prędkość zespolona równa się

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.18}$$

Tak samo jak w przypadku źródła, początek układu współrzędnych będzie dla potencjału zespolonego wiru logarytmicznym punktem osobliwym, dla prędkości zaś zespolonej — biegunem pierwszego rzędu.

Jeżeli wir znajduje się nie w początku układu współrzędnych, lecz w punkcie $z = a$, wtedy wzór na w ma postać

$$w = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln(z-a). \tag{6.19}$$

Jeżeli natomiast na płaszczyźnie znajduje się n wirów, leżących w punktach $z = a_1$, $z = a_2$, $z = a_n$, wtedy potencjał zespolony ma postać

$$w = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k i}{2\pi}\ln(z-a_k). \tag{6.20}$$

§ 4. Ruch pary wirów

Niech w punktach $z = z_1$, $z = z_2$ płaszczyzny zmiennej zespolonej z istnieją dwa wiry o cyrkulacjach Γ_1 i Γ_2 (rys. 6.10). Zbadajmy charakter ruchu tych wirów. Na podstawie zasady superpozycji przepływów potencjał zespolony będzie w tym przypadku równy sumie potencjałów zespolonych każdego wiru, czyli

$$w = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln(z - z_2).$$

Prędkość zespolona

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z - z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z - z_2}.$$

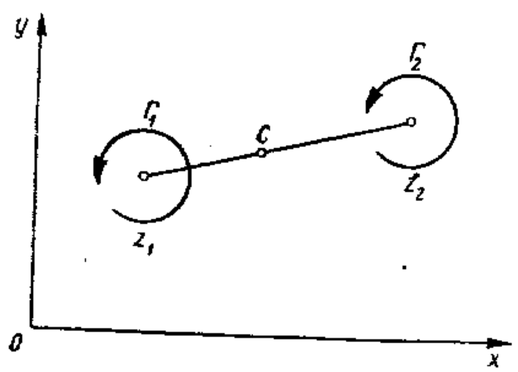
Nadajmy temu równaniu inną postać. Biorąc pod uwagę, że $\bar{z} = x - iy$, znajdziemy

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt} = v_x - i v_y = \frac{dw}{dz}$$

lub

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i(z - z_1)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i(z - z_2)}. \tag{6.21}$$

Na podstawie wzoru (6.21) można otrzymać równanie różniczkowe ruchu każdego wiru z osobna. Rozważymy pierwszy wir $z = z_1$. Ponieważ ruch wiru pierwszego, odbywający się po okręgu, wywołany jest jedynie przez wir drugi ($z = z_2$) i sam na siebie nie wpływa—więc w celu otrzymania równania różniczkowego jego ruchu trzeba ze wzoru (6.21) odrzucić pierwszy wyraz prawej strony, a w wyrazie pozostałym podstawić $z = z_1$. Wówczas otrzymamy



6.10. Para wirów

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i(z_1 - z_2)}.$$

Analogicznie dla wiru drugiego

$$\frac{d\bar{z}_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i(z_2 - z_1)}.$$

Oddzielając w otrzymanych wzorach części rzeczywiste i urojone, otrzymamy układ równań różniczkowych określających ruch pary wirów:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2},\\
\frac{dy_1}{dt} &= \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2},\\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2},\\
\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2},
\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

gdzie r oznacza odległość pomiędzy wirami

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

W celu scałkowania układu (6.22) pomnóżmy pierwsze równanie przez Γ_1, równanie trzecie przez Γ_2 i zsumujmy. Otrzymamy

$$\Gamma_1\frac{dx_1}{dt} + \Gamma_2\frac{dx_2}{dt} = 0,$$

skąd

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const}. \tag{6.23}$$

Mnożąc równanie drugie przez Γ_1, a czwarte przez Γ_2 i sumując je, otrzymamy

$$\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const}. \tag{6.24}$$

Dzieląc wzory (6.23) i (6.24) przez sumę $\Gamma_1 + \Gamma_2$ oraz wprowadzając oznaczenia x_C i y_C, otrzymamy

$$x_C = \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_C = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{6.25}$$

Punkt C ze współrzędnymi (x_C, y_C) nazywany jest *środkiem bezwładności wirów*. Z równań (6.23) i (6.24) wynika, że środek bezwładności wirów pozostaje podczas ruchu wirów nieruchomy i leży na prostej łączącej wiry.

Udowodnimy, że podczas ruchu wirów odległość pomiędzy nimi pozostaje stała. W tym celu trzeba od równania pierwszego (6.22) odjąć równanie trzecie, a od drugiego — czwarte:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2},$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2}.$$

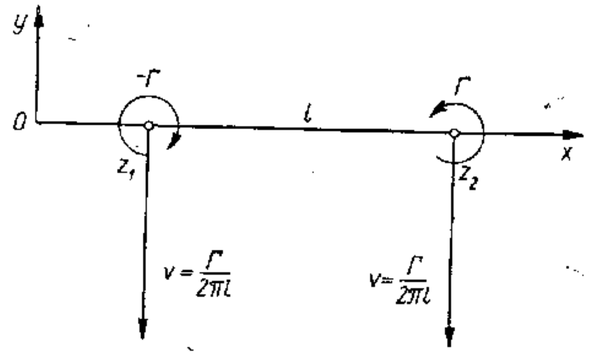
Pomnożymy otrzymane równania odpowiednio przez $(x_1 - x_2)$ i $(y_1 - y_2)$ oraz zsumujemy:

$$(x_1 - x_2)\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2)\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0.$$

Całkując otrzymamy

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2 = \text{const}.$$

Z równania tego wynika, że wiry krążą względem siebie w ten sposób, że odległość r między nimi pozostaje stała. Ponieważ jednak środek bezwładności jest nieruchomy i leży na prostej—łączącej wiry — wnioskujemy, że wiry będą krążyły wokół środka bezwładności.



6.11. Para wirów o cyrkulacjach jednakowych co do wielkości, lecz odwrotnych co do znaku

Obraz będzie inny, jeżeli wiry będą miały cyrkulacje jednakowe co do wielkości, lecz o przeciwnych znakach (rys. 6.11). W tym przypadku, ponieważ $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, punkt $C(x_C, y_C)$ oddala się w nieskończoność. Dowiedźmy, że ruch wirów będzie przy tym postępowy, prostopadły do łączącej je prostej i o jednakowej dla obu wirów prędkości $v = \frac{\Gamma}{2\pi l}$, gdzie l — odległość pomiędzy wirami. Istotnie, z równań (6.21) wynika:

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{d\bar{z}_2}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi i(z_1 - z_2)},$$

skąd wyciągamy wniosek, że $\frac{d\bar{z}_1}{dt} - \frac{d\bar{z}_2}{dt} = 0$, a zatem

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \text{const} = l.$$

Oczywiście, w danym przypadku również $z_1 - z_2 = l$, czyli

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{d\bar{z}_2}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi i l} = \frac{\Gamma i}{2\pi l}.$$

Rozdzielając części rzeczywiste i urojone otrzymamy ostatecznie

$$v_{x1} = v_{x2} = 0, \quad v_{y2} = v_{y1} = v = -\frac{\Gamma}{2\pi l},$$

to znaczy, że wiry przesuwają się z jednakową prędkością równolegle do osi y.

§ 5. Łańcuch wirów

Rozważmy nieskończony ciąg wirów, rozmieszczonych na jednej prostej w jednakowej odległości l od siebie (rys. 6.12). Niech wiry znajdują się w punktach

$$\ldots, z_{-k}, \ldots, z_{-4}, z_{-3}, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$$

i mają jednakową cyrkulację Γ.

Zbadajmy prędkości płynu, indukowane przez ten łańcuch wirów. Potencjał zespolony w dla dowolnego punktu płynu (oprócz punktów odpowiadających samym wirom) będzie miał postać

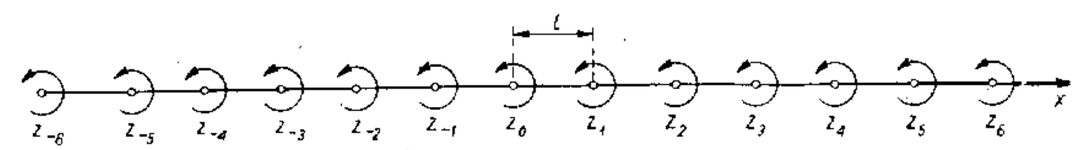
$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln(z - z_k) + \ln(z - z_{-k})\right]\right\}.$$

Mnożąc $(z - z_0)$ przez $\frac{\pi}{l}$ i dzieląc odpowiednio $(z - z_k)$ i $(z - z_{-k})$ przez $-lk$ i $+lk$, co wpłynie jedynie na wielkość stałej dowolnej, otrzymamy

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln\frac{(z - z_0)\pi}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{z - z_k}{-lk}\right) + \ln\left(\frac{z - z_{-k}}{lk}\right)\right]\right\}. \tag{6.26}$$

Podstawiając zamiast sumy logarytmów logarytm iloczynu, będziemy mieli

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\frac{(z - z_k)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z_k - z}{-lk}\right)\left(\frac{z - z_{-k}}{lk}\right)\right]. \tag{6.27}$$



6.12. Łańcuch wirów

Ponieważ $z_k = z_0 + lk$, $z_{-k} = z_0 - lk$, więc wzór (6.27) na w można napisać w następującej postaci:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left\{\frac{(z - z_0)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{z - z_0}{lk}\right)^2\right]\right\}.$$

Za pomocą znanego wzoru na rozkład $\sin \pi x$ na iloczyn nieskończony

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

przekształcimy wyrażenie na potencjał zespolony w do postaci następującej:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z - z_0). \tag{6.28}$$

Stąd prędkość zespoloną w dowolnym punkcie z

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z - z_0). \tag{6.29}$$

Łatwo przekonać się, że sam łańcuch wirów pozostaje nieruchomy. Istotnie, dowolnemu wirowi, znajdującemu się w punkcie $z = z_k$, wiry położone po prawej stronie nadają prędkość skierowaną „w dół", wiry zaś położone z lewej strony — prędkość skierowaną „w górę", przy czym wskutek symetrii prędkości te są równe. W związku z tym każdy wir z_k, a zatem i cały łańcuch pozostają nieruchome.

§ 6. Pojęcie ścieżki wirowej

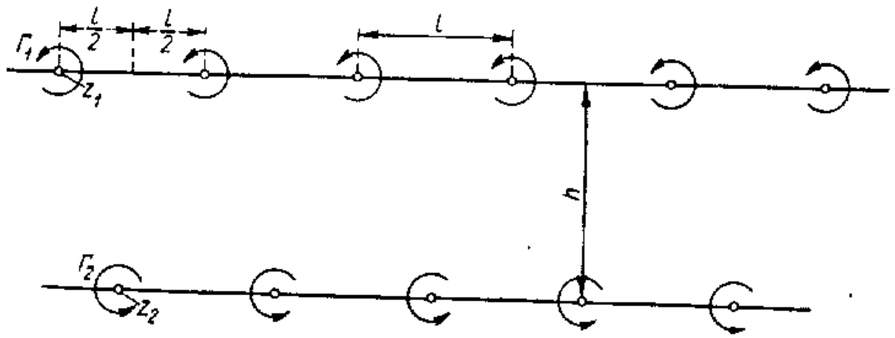
Rozważmy teraz dwa łańcuchy wirowe, tzn. dwa równoległe rzędy wirów (rys. 6.13). Odległość między każdą parą wirów jest jednakowa i równa l, odległość zaś między łańcuchami wirów równa h. Dwa takie łańcuchy wirów będziemy nazywali ścieżką wirową. Niech wiry „górnego" rzędu mają cyrkulację Γ_1, „dolnego" zaś rzędu — cyrkulację Γ_2. Wyróżnimy wir, znajdujący się w punkcie $z = z_1$ oraz położony najbliżej niego wir z rzędu dolnego w punkcie $z = z_2$. W tym przypadku potencjał zespolony ścieżki wirowej będzie miał postać:

$$w = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z - z_2). \tag{6.30}$$

Prędkość zespolona w dowolnym punkcie z płynu wyrazi się w sposób następujący:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y = \frac{\Gamma_1}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z - z_2). \tag{6.31}$$

Określmy, z jaką prędkością będą przesuwały się te dwa łańcuchy przy założeniu, że przesuwają się one jako jedna całość.



6.13. Ścieżka wirowa

Wyznaczmy prędkość wirów znajdujących się w punktach $z = z_1$ i $z = z_2$. Wir z_1 górnego rzędu będzie przesuwał się jedynie pod wpływem wirów drugiego rzędu[1]. Prędkość $v_{1x} - iv_{1y}$ wiru z_1 otrzymamy zatem, odrzucając ze wzoru (6.31) pierwszy człon i podstawiając do drugiego $z = z_1$, to znaczy

$$v_{1x} - i v_{1y} = \frac{\Gamma_2}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_1 - z_2). \tag{6.32}$$

Analogicznie dla prędkości wiru z_2

$$v_{2x} - i v_{2y} = -\frac{\Gamma_1}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_1 - z_2). \tag{6.33}$$

Ponieważ, zgodnie z warunkiem, ścieżka porusza się jako jedna całość — wynikają stąd równe prędkości

$$v_{1x} - i v_{1y} = v_{2x} - i v_{2y},$$

skąd znajdujemy, że

$$\Gamma_2 = -\Gamma_1 = -\Gamma, \tag{6.34}$$

[1] Zgodnie z wynikiem uzyskanym w poprzednim paragrafie (przyp. red.).

to znaczy, że natężenie wirów górnego i dolnego rzędu powinno mieć jednakową wielkość, lecz przeciwne znaki. Jeżeli założymy, że wiry przesuwają się równolegle do osi x (tzn. $v_{1y} = v_{2y} = 0$), wtedy można dowieść, że muszą one być rozmieszczone bądź symetrycznie, bądź też w szachownicę (rys. 6.13). W tym ostatnim przypadku rozmieszczenia wirów prędkość przesuwania się ścieżki wirowej będzie się wyrażała w następujący sposób [2]:

$$u = v_{1x} = v_{2x} = \frac{\Gamma}{2i}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l}. \tag{6.35}$$

§ 7. Opływ walca kołowego

Jak to wykazaliśmy w § 19 rozdziału III — jeżeli umieścić w początku układu współrzędnych źródło podwójne i nałożyć na nie płaski przepływ jednostajny o liniach prądu skierowanych równolegle do osi x, wówczas otrzymamy opływ walca kołowego.

Łatwo jest sprawdzić, że potencjał zespolony przepływu bezcyrkulacyjnego wokół walca o promieniu R z prędkością w nieskończoności v_∞ skierowaną w stronę ujemnej osi x, będzie miał postać

$$w = -v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{6.36}$$

Istotnie, prędkość zespolona w tym przypadku wynosi

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right). \tag{6.37}$$

Stąd $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} = -v_\infty$, czyli prędkość w nieskończoności jest rzeczywiście równa założonej prędkości. Punkty krytyczne znajdują się w tym przypadku na osi rzeczywistej. Sprawdźmy to. Przyrównajmy prędkość zespoloną do zera:

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = 0,$$

skąd

$$z = \pm R,$$

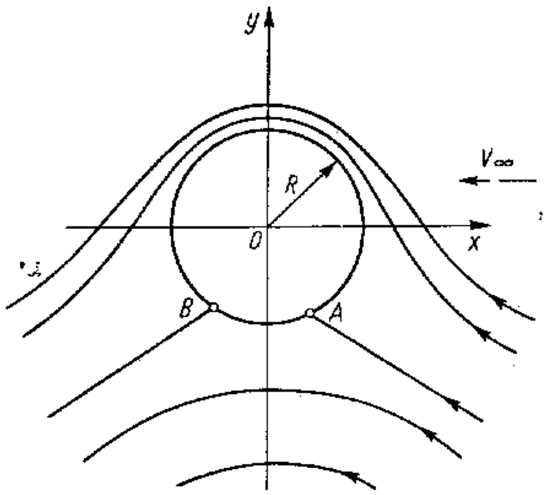
czyli istotnie punkty spiętrzenia (krytyczne) znajdują się na osi rzeczywistej w punktach $A(R, 0)$ i $B(-R, 0)$.

W celu otrzymania cyrkulacyjnego opływu walca o promieniu R trzeba na rozpatrywany przepływ nałożyć wir, umieszczając go w początku układu współrzędnych. W tym przypadku potencjał zespolony będzie miał postać:

$$w = -v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z. \tag{6.38}$$

Znajdźmy dla tego przypadku punkty spiętrzenia (rys. 6.14) przyrównując prędkość zespoloną do zera:

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z} = 0.$$



6.14. Cyrkulacyjny płaski opływ walca kołowego

Ponieważ na walcu zmienna $z = Re^{i\theta}$, zatem podstawiając to wyrażenie do równania $\frac{dw}{dz} = 0$, otrzymamy

$$-v_\infty(1-e^{-2i\theta}) = \frac{\Gamma i}{2\pi R}e^{-i\theta}.$$

Mnożąc obydwie części równania przez $e^{i\theta}$ oraz dzieląc przez v_∞ znajdziemy

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = -\frac{\Gamma i}{2\pi R v_\infty}.$$

Dzieląc obydwie części równania przez $2i$ otrzymamy

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = -\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}$$

lub uwzględniając, że $\frac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2i} = \sin\theta$, otrzymamy ostatecznie

$$\sin\theta_{kr} = -\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \tag{6.39}$$

to znaczy wzór podany w § 20 rozdziału III.

§ 8. Residuum prędkości zespolonej

W paragrafie niniejszym ustalimy związek istniejący pomiędzy tak zwanym residuum prędkości zespolonej $\frac{dw}{dz}$, cyrkulacją Γ oraz wydatkiem Q. Zależność odpowiednią, określającą związek między powyższymi wielkościami, będziemy nazywali *twierdzeniem o residuum prędkości zespolonej*. Załóżmy, że w przepływie płaskim, określanym za pomocą potencjału zespolonego w, dane jest n punktów osobliwych funkcji $\frac{dw}{dz}$, w których znajdują się źródła, upusty i wiry, rozmieszczone odpowiednio w punktach $z = a_1$, $z = a_2, \ldots, z = a_n$. Oznaczmy odpowiadające tym punktom residua przez $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jeżeli te[1] punkty osobliwe zamkniemy w dowolnym obwodzie L, wówczas — jak wiemy z teorii funkcji zmiennej zespolonej — całka krzywoliniowa

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz$$

równa będzie sumie residuów, pomnożonych przez $2\pi i$, to znaczy

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Oznaczając część rzeczywistą i urojoną każdego residuum przez α i β, czyli zakładając

$$A_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

będziemy mieli

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \tag{6.40}$$

Obliczmy teraz lewą część równania (6.40). Podstawiając wartości

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y,$$

$$dz = dx + i\,dy,$$

znajdziemy

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \int_L (v_x - i v_y)(dx + i\,dy)$$

[1] Wszystkie (przyp. red.).

lub, rozdzielając część rzeczywistą i urojoną,

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \int_L (v_x\,dx + v_y\,dy) + i\int_L v_x\,dy - v_y\,dx.$$

Jak wiadomo, całki te przedstawiają odpowiednio cyrkulację i wydatek Q, to znaczy

$$\int_L v_x\,dx + v_y\,dy = \Gamma,$$

$$\int_L v_x\,dy - v_y\,dx = Q.$$

Zatem

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \Gamma + iQ. \tag{6.41}$$

Podstawiając znalezioną wartość (6.41) do wzoru (6.40), otrzymamy następujące równania na Γ i Q:

$$\Gamma = -2\pi\sum_{k=1}^{u}\beta_k, \tag{6.42}$$

$$Q = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\alpha_k. \tag{6.43}$$

P r z y k ł a d. Przepływ określony jest przez następujący potencjał zespolony:

$$w = 5\ln z + 10\,i\ln z + \frac{1}{z}.$$

W tym przypadku w początku układu współrzędnych znajduje się źródło, którego potencjał zespolony $w = 5\ln z$, wydatek $Q = 10\pi$; wir, którego potencjał zespolony $w = 10\,i\ln z$, cyrkulacja $\Gamma = -20\pi$; podwójne źródło o momencie, równym 2π. Określimy wielkości Q i Γ za pomocą równania (6.41). W tym celu znajdziemy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{5}{z} + \frac{10\,i}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

Obliczmy całkę wzdłuż jakiegokolwiek zamkniętego obwodu L, okrążającego początek układu współrzędnych:

$$\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \int_L \left(\frac{5}{z} + \frac{10\,i}{z} - \frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i(5 + 10\,i).$$

Na podstawie równania (6. 41) znajdziemy rozdzielając część rzeczywistą i urojoną

$$Q = 10\pi,$$

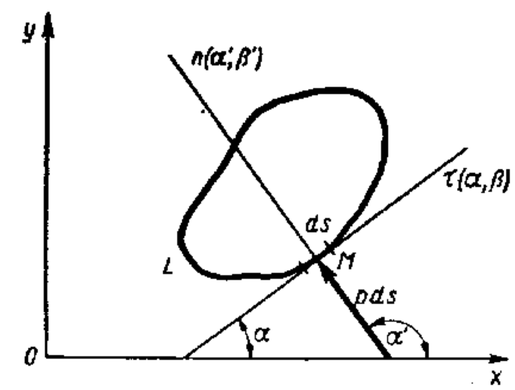
$$\Gamma = -20\pi.$$

Jak wiadomo, źródło podwójne nie daje wydatku przez zamknięty obwód.

Blasius

§ 9. Twierdzenie Żukowskiego—Czapłygina o wypadkowej sile pochodzącej od ciśnień (sile aerodynamicznej)

Badając właściwości przepływu płaskiego określanego za pomocą potencjału zespolonego w, rozpatrywaliśmy go dotychczas jedynie z kinematycznego punktu widzenia. Powstaje naturalne pytanie, w jaki sposób, znając potencjał zespolony w opływu dowolnego ciała, obliczyć działającą na nie wypadkową



6.15. Do dowodu twierdzenia Żukowskiego—Czapłygina o wypadkowej sile aerodynamicznej oraz twierdzenia Czapłygina o momencie wypadkowej siły aerodynamicznej

siłę pochodzącą od ciśnień. Zagadnienie to zostało rozwiązane po raz pierwszy w r. 1906 przez N.J. Żukowskiego w pracy *O prisojedinionnych wichriach*, w której wyprowadzony został wzór na wypadkową siłę dla przypadku, gdy przepływ dany jest przez potencjał zespolony.

W roku 1910 akademik S.A. Czapłygin w swej znanej pracy *O dawlienji płosko-paralielnowo potoka na priegrażdajuszczije tiela* podał ogólny sposób określania siły wypadkowej oraz jej momentu, tworząc w ten sposób podstawy teorii płata o nieskończonej rozpiętości[1].

Omówimy istotę metody Żukowskiego i Czapłygina. Załóżmy, że mamy płaski opływ walca dowolnego kształtu odbywający się bez oderwania; walec ten ograniczony jest w płaszczyźnie x, y obwodem L.

[1] Równania te otrzymał później niemiecki profesor Blasius; w literaturze zagranicznej są one nazywane jego imieniem.

Niech potencjał zespolony przepływu będzie $w = \varphi + i\psi$.

Obierzmy na obwodzie dowolny punkt M (rys. 6.15). Poprowadzimy przez ten punkt styczną τ oraz normalną n do obwodu. Oznaczając kąty, jakie tworzy styczna z osiami współrzędnych przez α i β oraz odpowiednie kąty dla normalnej przez α' i β', otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= -\frac{dy}{ds} = -\sin\alpha, \\ \cos\beta' &= +\frac{dx}{ds} = +\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Ciśnienie p w punkcie M obwodu określimy na podstawie równania Lagrange'a—Bernoulliego

$$p = C - \varrho\frac{V^2}{2},$$

gdzie V — prędkość na obwodzie. Mnożąc elementarną siłę pochodzącą od ciśnienia $p\,ds$ w punkcie M przez $\cos\alpha'$ i $\cos\beta'$, otrzymamy jej rzuty na osie x i y. Rzuty wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień R na osie współrzędnych, tzn. X i Y, będą miały postać

$$X = \int_L p\,ds\cos\alpha',$$

$$Y = \int_L p\,ds\cos\beta'$$

lub zgodnie z równaniami (6.44)

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int_L p\sin\alpha\,ds, \\ Y &= +\int_L p\cos\alpha\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Pomnóżmy obydwie części wzoru na X przez i i dodajmy go do wzoru drugiego. Otrzymamy

$$Y + iX = \int_L p(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds.$$

Podstawiając wyrażenie na p z równania Lagrange'a—Bernoulliego, otrzymamy

$$Y + iX = \int_L \left(C - \frac{\varrho V^2}{2}\right)(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds.$$

Ponieważ całki

$$\int_L C\cos\alpha\,ds = C\int_L \frac{dx}{ds}ds = C\int_L dx = 0,$$

$$\int_L C\sin\alpha\,ds = C\int_L \frac{dy}{ds}ds = C\int_L dy = 0,$$

gdyż współrzędne x i y przy pełnym okrążeniu obwodu L przybierają wartość początkową — wzór na $Y + iX$ przybierze następującą postać:

$$Y + iX = -\frac{\varrho}{2}\int_L V^2(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds. \tag{6.46}$$

Przekształcimy w otrzymanym wzorze (6.46) wyrażenie podcałkowe. Ponieważ na obwodzie prędkość skierowana jest wzdłuż stycznej, więc

$$\frac{d\varphi}{ds} = V$$

lub

$$d\varphi = V\,ds.$$

Z drugiej strony, ponieważ obwód L stanowi linię prądu, na której $d\psi = 0$, zatem na obwodzie L

$$dw = d(\varphi + i\psi) = d\varphi$$

i dlatego

$$V\,ds = dw. \tag{a}$$

Poza tym, na obwodzie L będziemy mieli prędkość zespoloną

$$\frac{dw}{dz} = V_x - iV_y = V\cos\alpha - iV\sin\alpha = V(\cos\alpha - i\sin\alpha). \tag{b}$$

Podstawiając równania (a) i (b) do wzoru (6.46), otrzymamy

$$Y + iX = -\frac{\varrho}{2}\int_L \frac{dw}{dz}\,dw.$$

Ponieważ jednak $dw = \frac{dw}{dz}\,dz$, więc ostatecznie

$$Y + iX = -\frac{\varrho}{2}\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \tag{6.47}$$

Równanie to, za pomocą którego można dla przepływu, danego przez potencjał zespolony w, znaleźć X i Y, a zatem również całkowitą siłę pochodzącą od ciśnień $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, nazywane jest *równaniem Żukowskiego—Czapłygina.*

§ 10. Twierdzenie Czapłygina o momencie wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień (momencie aerodynamicznym)

W aerodynamice ważna jest znajomość nie tylko wielkości wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień R, wywieranej przez przepływ na ciało, lecz również znajomość punktu jej przyłożenia, zwanego ś r o d k i e m p a r c i a. Możemy go otrzymać obliczając moment wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień. Twierdzenie Czapłygina pozwala określić ten moment na podstawie znajomości potencjału zespolonego w przepływu.

W celu znalezienia momentu M względem początku układu współrzędnych (ściślej — względem osi z) wypadkowej siły pochodzącej od ciśnień R, postąpimy w sposób następujący:

Niech

$$X_1 = p \cos \alpha',$$

$$Y_1 = p \cos \beta'$$

stanowią rzuty na osie współrzędnych x i y siły pochodzącej od ciśnień w punkcie M, odniesionej do jednostki długości obwodu. W tym przypadku moment tej siły względem początku układu współrzędnych wyrazi się w następujący sposób:

$$x\, Y_1 - y\, X_1 = x\, p \cos \beta' - y\, p \cos \alpha'.$$

Ponieważ ze wzorów (6.44)

$$\cos \alpha' = -\frac{dy}{ds} = -\sin \alpha,$$

$$\cos \beta' = \frac{dx}{ds} = \cos \alpha,$$

więc

$$x\, Y_1 - y\, X_1 = p\,(x \cos \alpha + y \sin \alpha).$$

Moment wypadkowej siły aerodynamicznej otrzymamy, biorąc z powyższego wyrażenia całkę wzdłuż obwodu zamkniętego L:

$$M = \int_L p\,(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds. \tag{6.48}$$

Podstawmy do tej całki wyrażenie na p z równania Lagrange'a—Bernoulliego:

$$p = C - \frac{\varrho V^2}{2},$$

gdzie V oznacza prędkość na obwodzie L. Wówczas

$$M = \int_L \left(C - \frac{\varrho V^2}{2}\right)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds$$

lub

$$M = C \int_L (x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds - \frac{\varrho}{2} \int_L V^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds.$$

Wykażemy, że pierwsza całka będzie równa zeru. Istotnie, ponieważ

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta = \sin \alpha,$$

więc

$$\int_L (x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds = \int_L \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}\right) ds = \int_L x\, dx + y\, dy =$$

$$= \int_L d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0,$$

gdyż przy pełnym okrążeniu obwodu L współrzędne x i y przybiorą wartość początkową. Wzór na moment M będzie miał zatem postać:

$$M = -\frac{\varrho}{2} \int_L V^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, ds. \tag{6.49}$$

W celu przekształcenia wyrażenia podcałkowego obliczymy iloczyn

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right) = (x + i y)(V_x - i V_y) = (x V_x + y V_y) + i\,(y V_x - x V_y).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$x V_x + y V_y = m,$$

$$y V_x - x V_y = n,$$

otrzymamy

$$z \frac{dw}{dz} = m + i\, n. \tag{a}$$

Obliczymy teraz iloczyn $\left(\frac{dw}{dz}\right) dz$:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) dz = (V_x - i V_y)(dx + i\,dy) = (V_x\,dx + V_y\,dy) + i\,(V_x\,dy - V_y\,dx).$$

Ponieważ

$$V_x\,dx + V_y\,dy = d\varphi,$$

$$V_x\,dy - V_y\,dx = d\psi$$

i na obwodzie L, stanowiącym linię prądu, $d\psi = 0$, $d\varphi = V\,ds$, zatem

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) dz = V\,ds. \tag{b}$$

Mnożąc wzory (a) i (b) otrzymamy

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = V\,(m + i\,n)\,ds. \tag{c}$$

Ponieważ wyrażenia na m i n mogą być podane w postaci:

$$m = x\,V_x + y\,V_y = V\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$

$$n = y\,V_x - x\,V_y = V\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha),$$

przepiszemy równanie (c) w następujący sposób:

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = V^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds + i\,V^2(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\,ds.$$

Porównując pierwszy wyraz prawej części otrzymanego równania z wyrażeniem podcałkowym (6.49) oraz biorąc pod uwagę, że

$$V^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = \mathrm{Re}\,z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

otrzymamy ostatecznie

$$M = -\,\mathrm{Re}\,\frac{\varrho}{2}\int_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \tag{6.50}$$

gdzie przez Re oznaczono część rzeczywistą.

Powyższe równanie nazywane jest *równaniem Czapłygina*; umożliwia ono obliczenie momentu wypadkowego M dla przepływu danego przez potencjał zespolony w.

Jako przykład ilustrujący zastosowanie wyprowadzonych równań (6.47) i (6.50) rozważymy cyrkulacyjny opływ walca.

Wykazaliśmy już, że potencjał zespolony w będzie w tym przypadku miał postać

$$w = -\,v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z.$$

Do wyznaczenia wypadkowej siły aerodynamicznej działającej na walec zastosujemy równanie Żukowskiego—Czapłygina

$$Y + i\,X = -\,\frac{\varrho}{2}\int_L\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

w którym całkowanie rozciągnięte jest na obwód walca. Obliczymy prędkość zespoloną. Różniczkując w względem z, znajdziemy

$$\frac{dw}{dz} = -\,v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\,\frac{1}{z}$$

oraz podstawiając znalezioną wartość $\frac{dw}{dz}$ do równania Żukowskiego—Czapłygina otrzymamy

$$Y + i\,X = -\,\frac{\varrho}{2}\int_L\left(v_\infty^2 + v_\infty^2\frac{R^4}{z^4} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{z^2} - 2\,v_\infty^2\frac{R^2}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \underline{v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\,\frac{1}{z}} - v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\,\frac{R^2}{z^3}\right) dz.$$

Widzimy, że residuum w biegunie $z = 0$ daje jedynie wyraz podkreślony jako zawierający $\frac{1}{z}$. Otrzymamy więc

$$Y + i\,X = -\,\frac{\varrho}{2}\,2\pi i\left(v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\right)$$

lub

$$Y + i\,X = \varrho\,\Gamma v_\infty,$$

skąd

$$X = 0,$$

$$Y = \varrho\,\Gamma v_\infty,$$

co oznacza, że opór X nie istnieje, zaś równanie na Y stanowi znane już nam twierdzenie Żukowskiego.

W celu znalezienia momentu M siły wypadkowej zastosujemy równanie Czapłygina:

$$M = -\,\mathrm{Re}\,\frac{\varrho}{2}\int_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Podstawiając wyrażenie $z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ do wzoru na M, znajdziemy

$$M = -\operatorname{Re}\frac{\varrho}{2}\int_L\left(z v_\infty^2 + v_\infty^2\frac{R^4}{z^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{z} - 2 v_\infty^2\frac{R^2}{z} + v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi} - \frac{v_\infty \Gamma i}{\pi}\frac{R^2}{z^2}\right)dz$$

lub

$$M = \operatorname{Re}\left[\frac{\varrho}{2}2\pi i\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2 v_\infty^2 R^2\right)\right].$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest wartością urojoną, więc

$$M = 0.$$

Wynika stąd, że siła wypadkowa $Y = \varrho \Gamma v_\infty$ przechodzi przez początek układu współrzędnych, względem którego obliczany jest moment M.

Rozdział VII

TEORIA PŁATA NOŚNEGO W PRZEPŁYWIE PŁASKIM

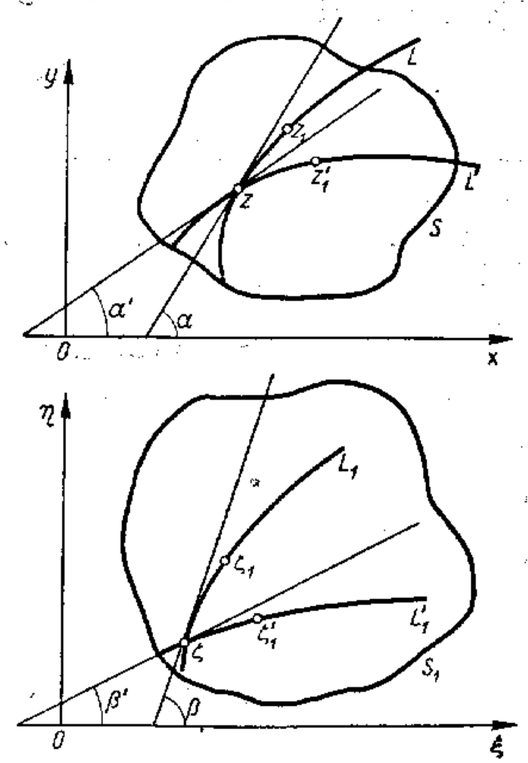
§ 1. Pojęcie odwzorowania konforemnego

W rozdziale poprzednim wykazano, że dla zbadania przepływu płaskiego cieczy doskonałej, opływającej dowolny kontur, wystarczy znajomość potencjału zespolonego tego przepływu $w(z)$. Ponieważ bezpośrednie określenie tej funkcji dla najprostszych nawet konturów nastręcza znaczne trudności — w wielu zagadnieniach potencjał zespolony znajdowany jest drogą pośrednią za pomocą metody tzw. *odwzorowania konforemnego*, odgrywającego dużą rolę zarówno w zagadnieniach teorii płata nośnego, jak i w innych zagadnieniach hydro- i aerodynamiki dotyczących płaskiego przepływu cieczy doskonałej.

W rozdziale VI omówiony został opływ walca kołowego, stanowiącego ciało o najprostszym konturze (profilu). Metoda odwzorowań konforemnych pozwala na przejście od tego przypadku szczególnego do potencjałów zespolonych określających opływ ciał (profilów) o dowolnym konturze.

Omówimy istotę odwzorowania konforemnego. Załóżmy, że w pewnym obszarze S płaszczyzny zmiennej zespolonej z dana jest pewna funkcja analityczna, tzn. różniczkowalna funkcja

$$\zeta = f(z). \tag{7.1}$$



7.1. Odwzorowanie konforemne

Zbiór punktów $\zeta = f(z)$ odpowiadających punktom obszaru S tworzy w płaszczyźnie ζ nowy obszar S_1, przy czym zakładamy, że funkcja $\zeta = f(z)$ jest taką funkcją, która każdemu punktowi obszaru S przypisuje jeden jedyny punkt obszaru S_1 i na odwrót. A więc rozpatrywana jednoznaczna funkcja

analityczna $\zeta = f(z)$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie obszar S płaszczyzny $z = x + iy$ na obszar S_1 płaszczyzny $\zeta = \xi + i\eta$. W szczególności, jeżeli w obszarze S poprowadzić pewną linię L, przechodzącą przez dowolny punkt z, wtedy w płaszczyźnie S_1 będzie jej odpowiadała pewna linia L_1, przechodząca przez punkt $\zeta = f(z)$ (rys. 7.1).

Zgodnie z umową funkcja $\zeta = f(z)$ ma określoną pochodną w punktach z wewnątrz S, tzn. że istnieje granica stosunku

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

gdzie Δz oznacza przyrost zmiennej niezależnej z.

Wyjaśnimy geometryczny sens pochodnej funkcji analitycznej

$$f'(z) = \frac{d\zeta}{dz},$$

zakładając, iż jest ona różna od zera. W tym celu napiszemy liczbę zespoloną $f'(z)$ w postaci

$$f'(z) = Re^{i\mu},$$

gdzie R oznacza moduł pochodnej, μ — jej argument (R i μ są oczywiście funkcjami z).

Rozpatrzmy w obszarze S dowolną krzywą L, przechodzącą przez punkt z. Obierzmy na krzywej L punkt $z_1 = z + \Delta z$, położony nieskończenie blisko punktu z.

Krzywej L na płaszczyźnie z odpowiada w płaszczyźnie ζ krzywa L_1, przechodząca przez punkt $\zeta = f(z)$. Dzięki ciągłości funkcji $\zeta = f(z)$ punktowi $z_1 = z + \Delta z$ w obszarze S_1 odpowiada punkt ζ_1 położony nieskończenie blisko punktu ζ, tzn. $\zeta_1 = \zeta + \Delta\zeta$.

Przyrosty Δz i $\Delta\zeta$ będące liczbami zespolonymi, można napisać w następującej postaci:

$$\Delta z = r e^{i\varphi}, \quad \Delta\zeta = r_1 e^{i\varphi_1},$$

gdzie φ i φ_1 oznaczają kąty, jakie tworzą odcinki prostych przechodzących przez punkty z i ζ oraz z_1 i ζ_1, z osiami rzeczywistymi, r zaś i r_1 — wielkości tych odcinków.

Z równania

$$f'(z) = R e^{i\mu} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{r_1}{r} e^{i(\varphi_1 - \varphi)}$$

znajdujemy

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta z \to 0} \frac{r_1}{r} = R \\ &\lim_{\Delta z \to 0} (\varphi_1 - \varphi) = \mu. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

W granicy kierunek wektora Δz zgodny jest z kierunkiem stycznej do linii L w punkcie z, kierunek zaś wektora $\Delta\zeta$ — z kierunkiem stycznej do linii L_1 w punkcie $\zeta = f(z)$.

Oznaczając kąty, jakie tworzą styczne do krzywych L i L_1 w punktach z i ζ z osiami rzeczywistymi, odpowiednio przez α i β (rys. 7.1), otrzymamy

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\varphi_1 - \varphi) = \beta - \alpha = \mu$$

lub

$$\beta = \alpha + \mu. \tag{a'}$$

Z równania (a') wynika, że argument μ pochodnej — jest to kąt, o jaki obraca się styczna do linii L w punkcie z przy odwzorowaniu za pomocą funkcji analitycznej $\zeta = f(z)$ lub inaczej: μ — kąt pomiędzy kierunkiem pierwotnym i odwzorowanym.

Ponieważ linia L jest linią dowolną, przechodzącą przez punkt z, zatem przy zmianie kierunku linii L w punkcie z zmieniać się będą kąty α i β, lecz kąt μ pozostanie taki sam. Prowadząc więc przez punkt z inną linię L' oraz oznaczając odpowiadającą jej linię, przechodzącą przez punkt $\zeta = f(z)$, przez L'_1, kąty zaś, jakie tworzą styczne do tych linij w punktach z i ζ z osiami rzeczywistymi, przez α' i β', otrzymamy

$$\beta' = \alpha' + \mu. \tag{b}$$

Z równań (a') i (b) znajdujemy

$$\beta' - \beta = \alpha' - \alpha, \tag{c}$$

tzn. kąt między stycznymi do krzywych L i L' w punkcie z równa się kątowi między stycznymi do krzywych L_1 i L'_1 w punkcie ζ.

Zatem dwie linie dowolne przechodzące przez punkt z odwzorowują się za pomocą funkcji analitycznej na dwie linie przechodzące przez punkt $\zeta = f(z)$ tak, że kąt między stycznymi do linij pierwotnych i odwzorowanych nie ulega zmianie. *Odwzorowanie za pomocą funkcji analitycznej ma tę właściwość, że we wszystkich punktach, w których pochodna różna jest od zera, kąty nie ulegają zmianie.*

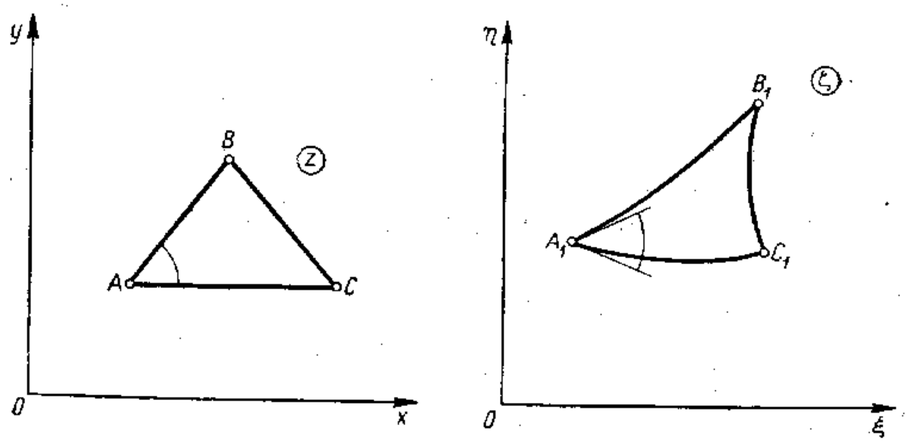
Wyjaśnimy obecnie geometryczny sens modułu pochodnej

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{r_1}{r} = R,$$

gdzie r oznacza odległość między punktami z i $z + \Delta z$, r_1 zaś — odległość między punktami ζ i $\zeta + \Delta\zeta$. Wzór (d) wykazuje, że moduł pochodnej jest granicą stosunku odległości między punktami odwzorowanymi ζ i ζ_1 do odległości między punktami pierwotnymi z i z_1. Dlatego można moduł pochodnej $|f'(z)| = R$ rozpatrywać jako wielkość liniowego zniekształcenia skali w dowolnym punkcie z przy odwzorowaniu za pomocą funkcji analitycznej. Równanie (d) dowodzi, że wielkość R nie zależy od kierunku krzywej L.

Odwzorowanie za pomocą funkcji analitycznej $\zeta = f(z)$ ma zatem w każdym punkcie, w którym $f'(z) \neq 0$, właściwość stałych zniekształceń niezależnie od kierunku.

Tak więc *odwzorowanie za pomocą funkcji analitycznej $\zeta = f(z)$ ma w każdym punkcie z, w którym $f'(z) \neq 0$, właściwość stałych kątów i stałych zniekształceń liniowych.*



7.2. Odwzorowanie konforemne nieskończenie małych figur

Jeżeli w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z obrać nieskończenie mały trójkąt, którego jeden z wierzchołków leży w punkcie z (rys. 7.2), wówczas w płaszczyźnie zmiennej zespolonej ζ będzie mu odpowiadał nieskończenie mały trójkąt krzywoliniowy z wierzchołkiem w punkcie $\zeta = f(z)$. Wskutek właściwości zachowania kątów przy odwzorowaniu za pomocą funkcji analitycznej, odpowiednie kąty w tych trójkątach będą równe; natomiast stosunki odpowiednich boków będą równe jednej i tej samej liczbie stałej $R \neq 0$, czyli te nieskończenie małe trójkąty będą w pewnym znaczeniu podobne. Zatem *odwzorowanie za pomocą funkcji analitycznej zachowuje podobieństwo w nieskończenie małych wymiarach.*

Odwzorowanie mające powyższą właściwość zachowania kątów i stałych zniekształceń liniowych nazywane jest *odwzorowaniem konforemnym* (nieraz — wiernokątnym, podobnym, wiernym. Przyp. tłum.). Wyciągamy stąd wniosek, że *każde odwzorowanie, uzyskane za pomocą funkcji analitycznej, będzie odwzorowaniem konforemnym we wszystkich punktach, w których pochodna funkcji odwzorowującej nie jest równa zeru.*

§ 2. Przykłady najprostszych odwzorowań konforemnych

Rozpatrzmy kilka najprostszych odwzorowań konforemnych, niezbędnych do dalszych, bardziej skomplikowanych przekształceń.

Przykład 1. Funkcja odwzorowująca ma postać:

$$\zeta = z + b, \tag{7.2}$$

gdzie b jest liczbą zespoloną, równą $b = b_1 + ib_2$.

Ponieważ dla płaszczyzny ζ

$$\zeta = \xi + i\eta,$$

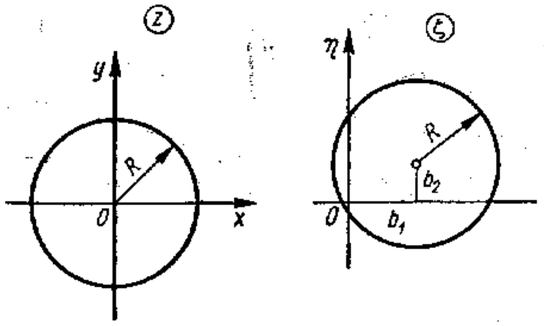
a dla płaszczyzny z

$$z = x + iy,$$

więc, na podstawie (7.2) mamy

$$\xi = x + b_1,$$
$$\eta = y + b_2.$$

Zatem przekształcenie (7.2) przesuwa po prostu każdy punkt w płaszczyźnie z w kierunku wektora b o odległość równą jego modułowi. Dlatego przekształcenie (7.2) nazywane jest *przesunięciem.*



7.3. Przekształcenie przesunięcia: $\zeta = z + b$

Wytłumaczymy powyższe na przykładzie.

Niech w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z dany jest okrąg o promieniu R ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 7.3):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Zakładając $\zeta = \xi + i\eta$ oraz wykorzystując dla punktów okręgu znane wyrażenie

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

otrzymamy

$$\xi = R\cos\theta + b_1,$$
$$\eta = R\sin\theta + b_2.$$

Rugując θ znajdujemy

$$(\xi - b_1)^2 + (\eta - b_2)^2 = R^2.$$

Z otrzymanego równania wynika, że przekształcenie (7.2) jest istotnie przekształceniem przesunięcia, ponieważ odwzorowuje ono okrąg w płaszczyźnie z o promieniu R oraz ze środkiem w początku układu współrzędnych na okrąg o tym samym promieniu R, lecz ze środkiem w punkcie (b_1, b_2).

P r z y k ł a d 2. Funkcja odwzorowująca ma postać

$$\zeta = e^{i\mu} z, \tag{7.3}$$

gdzie μ jest liczbą rzeczywistą.

Wykorzystując trygonometryczne przedstawienie liczby zespolonej, możemy napisać

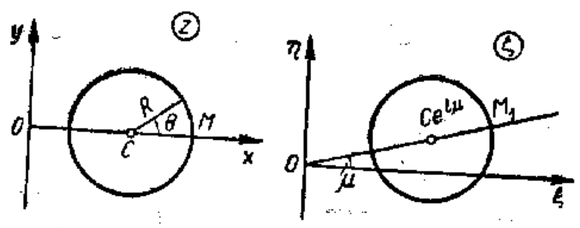
$$\zeta = \varrho e^{i\alpha} \quad \text{i} \quad z = Re^{i\theta}$$

i podstawiając (7.3) otrzymamy

$$\varrho e^{i\alpha} = R e^{i(\mu+\theta)},$$

skąd $\varrho = R$ oraz $\alpha = \mu + \theta$.

Przekształcenie (7.3) realizuje zatem obrót dowolnego wektora z (bez zmiany



7.4. Przekształcenie obrotu: $\zeta = e^{i\mu} z$

skali) o kąt μ. W szczególności, jeżeli w płaszczyźnie z dany jest okrąg o promieniu R ze środkiem w punkcie $(C, 0)$, wówczas dla jego punktów można napisać (rys. 7.4)

$$z = C + R e^{i\theta}.$$

Podstawiając do (7.3), otrzymamy

$$\zeta = C e^{i\mu} + R e^{i(\theta+\mu)}$$

lub

$$\zeta - C e^{i\mu} = R e^{i(\theta+\mu)}.$$

Widzimy, że w płaszczyźnie ζ powstał okrąg o tym samym promieniu R, lecz ze środkiem w punkcie $Ce^{i\mu}$. Punktom okręgu w płaszczyźnie z, określanym przez kąt biegunowy θ, odpowiadają na okręgu leżącym w płaszczyźnie ζ punkty

przesunięte o kąt μ. Przekształcenie (7.3) obraca zatem okrąg (jako ciało sztywne o kąt μ.

Jeżeli $\mu = \frac{\pi}{2}$, wówczas środek okręgu będzie leżał w płaszczyźnie ζ na osi η; przy $\mu = \pi$ środek będzie leżał na ujemnej osi ξ w odległości C od początku układu współrzędnych.

Funkcja $\zeta = e^{i\mu} z$, obraca więc kontur o kąt μ nie zmieniając skali. Dlatego też przekształcenie (7.3) nazywane jest obrotem.

P r z y k ł a d 3. Funkcja odwzorowująca ma postać

$$\zeta = a z, \tag{7.4}$$

gdzie a jest rzeczywistą liczbą dodatnią.

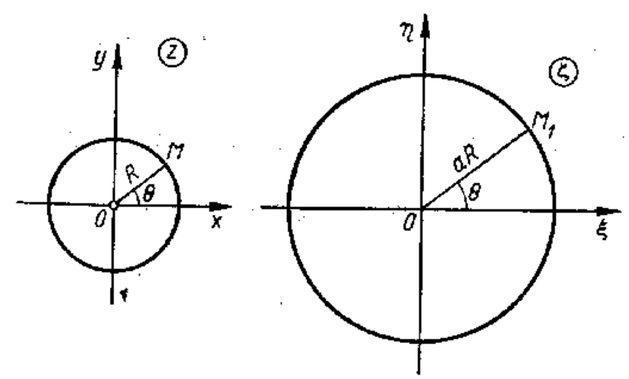
Wykorzystując trygonometryczne przedstawienie liczb zespolonych, możemy napisać $\zeta = \varrho e^{i\alpha}$ oraz $z = R e^{i\theta}$, skąd podstawiając do (7.4)

$$\varrho e^{i\alpha} = a R e^{i\theta}$$

otrzymujemy

$$\varrho = a R, \quad \alpha = \theta.$$

Przekształcenie (7.4) realizuje więc odkształcenie liniowe (rozciąganie lub ściskanie) dowolnego wektora z (rozciąganie, jeżeli $a > 1$ oraz ściskanie, jeżeli



7.5. Przekształcenie zmiany skali: $\zeta = a z$

$a < 1$). Dlatego nosi ono nazwę *przekształcenia zmiany skali*. W przypadku szczególnym, jeżeli w płaszczyźnie z dany jest okrąg o promieniu R ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 7.5)

$$z = R e^{i\theta},$$

wówczas w płaszczyźnie ζ odpowiada mu krzywa

$$\zeta = a R e^{i\theta},$$

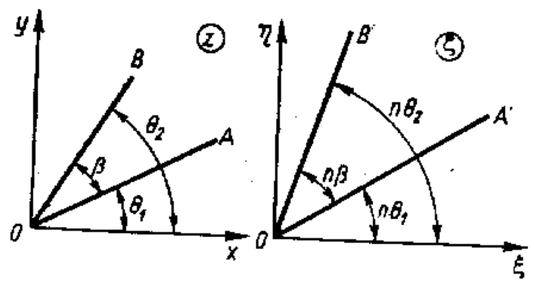
będąca oczywiście również okręgiem ze środkiem w początku układu współrzędnych, lecz o promieniu aR.

Przykład 4. Rozważyliśmy przykłady, w których funkcja odwzorowująca $\zeta = f(z)$ spełniała podstawowy warunek konforemności — jej pochodna $f'(z)$ była skończona i nie stawała się zerem w żadnym punkcie odwzorowywanego obszaru. W przykładzie niniejszym rozważona jest funkcja, której pochodna w pewnym punkcie odwzorowywanego obszaru staje się zerem, przy czym wykazano, że w tym przypadku zostaje naruszona konforemność odwzorowania w tym punkcie.

Obierzmy funkcję odwzorowującą w postaci

$$\zeta = z^n,$$

gdzie n jest liczbą rzeczywistą, przy czym $n \neq 1$. Jest oczywiste, że pochodna tej funkcji $\zeta' = n z^{n-1}$ staje się w pukcie $z = 0$ zerem (przy $n > 1$) lub nieskończonością (przy $n < 1$).



7.6. Naruszenie konforemności w przypadku odwzorowania $\zeta = z^n$

Wykorzystując, jak powyżej, trygonometryczną postać liczby zespolonej

$$\zeta = \varrho e^{i\alpha} \quad \text{oraz} \quad z = R e^{i\theta}$$

otrzymamy

$$\varrho e^{i\alpha} = R^n e^{in\theta},$$

skąd

$$\varrho = R^n \quad \text{oraz} \quad \alpha = n\theta.$$

Wynika stąd, że jeżeli w płaszczyźnie z obrać dwie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz tworzące między sobą kąt β, wówczas w płaszczyźnie ζ będą im odpowiadały proste przechodzące przez początek układu i przecinające się pod kątem $n\beta$ (rys. 7.6).

Jak widzimy — jeżeli pochodna funkcji odwzorowującej jest w jakimkolwiek punkcie równa zeru lub nieskończoności, to istotnie naruszona zostaje konforemność odwzorowania w tym punkcie — naruszona zostaje właściwość zachowania kątów. Punkty takie nazywane są *punktami osobliwymi odwzorowania konforemnego.*

§ 3. Inwersja

Rozważmy funkcję odwzorowującą o następującej postaci:

$$\zeta = \frac{l^2}{z}, \tag{7.5}$$

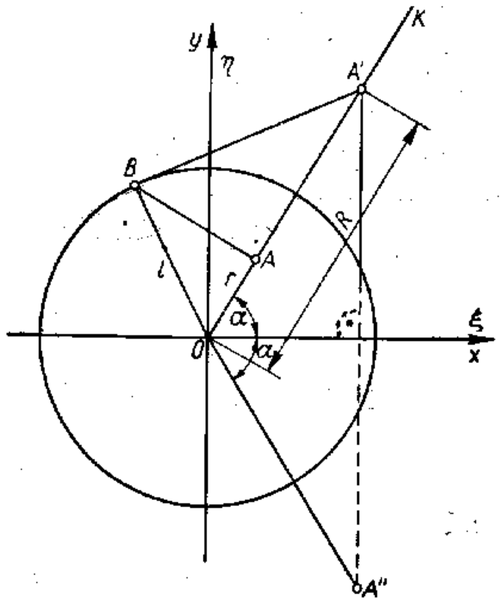
gdzie l jest wielkością rzeczywistą. W celu zbadania właściwości tego przekształcenia nazywanego *inwersją* *połóżmy*

$$z = r e^{i\alpha}, \quad \zeta = R e^{i\beta}.$$

Podstawiając wartości z i ζ do (7.5) otrzymamy

$$R = \frac{l^2}{r}, \quad \beta = -\alpha. \tag{7.6}$$

Wynika stąd, że odwzorowanie (7.5) powoduje zarówno zmianę skali, jak i obrót dowolnych krzywych, leżących w płaszczyźnie z. Zestawmy płaszczyzny zmiennej zespolonej z i ζ na jednym wykresie i zbudujmy w płaszczyźnie z okrąg o promieniu l ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 7.7). Okrąg ten nazwiemy *okręgiem inwersji.*



7.7. Okrąg inwersji

Obierając dowolny punkt $A(z = re^{i\alpha})$ wewnątrz okręgu o promieniu r określimy, na jaki punkt płaszczyzny ζ przejdzie ten punkt w wyniku przekształcenia $R = \frac{l^2}{r}$ dokonanego na module r.

Przedłużmy w tym celu linię OA do pewnego punktu K na zewnątrz koła, oraz poprowadźmy z punktu A prostopadłą do OA, aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie B. W punkcie B poprowadzimy styczną do okręgu, aż do przecięcia się z linią OK (w punkcie A').

Z podobieństwa trójkątów OBA' i OBA wynika, że

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB}{OA}.$$

Ponieważ jednak $OB = l$, $OA = r$, więc $OA' = \frac{l^2}{r} = R$.

Wynika stąd, że odwzorowanie $\frac{l^2}{r}$ przesuwa punkt A do punktu A', zwanego zwierciadlanym odbiciem punktu A względem okręgu o promieniu l.

Teraz łatwo jest zbudować odwzorowanie punktu A, odpowiadające funkcji odwzorowującej (7.5). Wyrażenie dla argumentu w płaszczyźnie ζ

$$\beta = -\alpha$$

wykazuje, że punkt A' trzeba odbić zwierciadlanie względem osi rzeczywistej. Punkt A'' leżący w płaszczyźnie ζ będzie wówczas odwzorowaniem punktu A za pomocą funkcji (7.5).

Ponieważ przy odwzorowaniu tym punkt $z = 0$ przechodzi w punkt $\zeta = \infty$, zatem wszystkie punkty płaszczyzny z, leżące wewnątrz okręgu inwersji, przechodzą w punkty płaszczyzny ζ leżące na zewnątrz okręgu inwersji lub — co na jedno wychodzi — zewnętrze okręgu w płaszczyźnie ζ odwzorowuje się na wnętrze okręgu w płaszczyźnie z.

Dowiedźmy następującego twierdzenia. *Inwersja przekształca okręgi oraz proste w płaszczyźnie z w okręgi lub proste w płaszczyźnie ζ.*

Pisząc przekształcenie inwersji w postaci

$$z = \frac{l^2}{\zeta}$$

oraz kładąc $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, otrzymamy

$$x + iy = \frac{l^2}{\xi + i\eta}.$$

Stąd

$$x = \frac{l^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$y = -\frac{l^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Jak wiadomo, równanie dowolnego okręgu (w tej liczbie również prostej stanowiącej okrąg o nieskończenie dużym promieniu)w płaszczyźnie z można napisać w postaci

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{a}$$

(przy $A = 0$ otrzymujemy równanie prostej).

Podstawmy do tego równania wartości x i y:

$$A l^4 \left[\frac{\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} + \frac{\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\right] + \frac{B l^2 \xi}{\xi^2+\eta^2} - \frac{C l^2 \eta}{\xi^2+\eta^2} + D = 0$$

lub po uproszczeniach

$$A l^4 + B l^2 \xi - C l^2 \eta + D(\xi^2 + \eta^2) = 0. \tag{b}$$

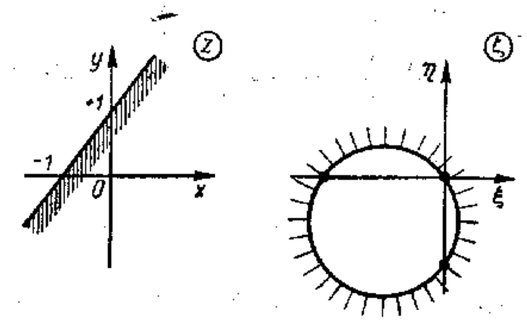
Równanie (b) jest również równaniem okręgu (lub prostej przy $D = 0$) w płaszczyźnie ζ. Z równań (a) i (b) wyciągamy wniosek:

1. Każdy okrąg leżący w płaszczyźnie z, nie przechodzący przez początek układu współrzędnych ($A \neq 0$, $D \neq 0$) przekształca się w okrąg, leżący w płaszczyźnie ζ, nie przechodzący przez początek układu współrzędnych.

2. Każdy okrąg na płaszczyźnie z przechodzący przez początek układu współrzędnych ($A \neq 0$, $D = 0$) przechodzi w płaszczyźnie ζ w prostą nie przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

3. Każda prosta na płaszczyźnie z, nie przechodząca przez początek układu współrzędnych ($A = 0$, $D \neq 0$), zmienia się na płaszczyźnie ζ w okrąg przechodzący przez początek układu współrzędnych.

4. Każda prosta na płaszczyźnie z przechodząca przez początek układu współrzędnych ($A = 0$, $D = 0$) zmienia się na płaszczyźnie ζ w prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.



7.8. Do przekształcenia inwersji: $\zeta = \frac{l^2}{z}$

Przykład. Na płaszczyźnie z dana jest prosta $y = x + 1$. Należy określić, na jaką linię przekształci się ta prosta za pomocą inwersji.

W danym przypadku

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 1.$$

Podstawiając te wartości współczynników do równania (b), otrzymamy

$$l^2 \xi + l^2 \eta + (\xi^2 + \eta^2) = 0$$

lub

$$\left(\xi + \frac{l^2}{2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{l^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{l^2}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

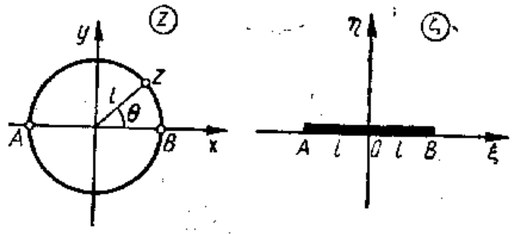
Wynika stąd, że w płaszczyźnie ζ prostej $y = x + 1$ odpowiada okrąg o promieniu $\frac{l^2}{\sqrt{2}}$ przechodzący przez początek układu współrzędnych (rys. 7.8).

Prawej części płaszczyzny z, zakreskowanej na rys. 7.8, będzie odpowiadało, po przekształceniu, zewnętrze okręgu na płaszczyźnie ζ, ponieważ punktowi $z = 0$ odpowiada punkt $\zeta = \infty$.

§ 4. Odwzorowanie Żukowskiego

Jednym z zagadnień teorii płata nośnego jest określenie geometrycznych i aerodynamicznych charakterystyk profilów, otrzymanych drogą odwzorowania konforemnego okręgu za pomocą dobieranych w tym celu funkcji odwzorowujących.

Zadanie takie polega po pierwsze, na doborze funkcji odwzorowującej oraz — po drugie — na wyrażeniu charakterystyk aerodynamicznych profilu za pomocą pewnych parametrów, wchodzących do obranej funkcji, przy zamianie których otrzymuje się rozmaite profile należące do tej samej rodziny.



7.9. Przekształcenie okręgu za pomocą odwzorowania Żukowskiego $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right)$

Do najprostszej rodziny teoretycznych profilów należy seria profilów Żukowskiego—Czapłygina, otrzymywanych z okręgu za pomocą odwzorowania

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right), \tag{7.7}$$

zwanego *odwzorowaniem Żukowskiego.*

Zanim przejdziemy do zbadania otrzymywanych za pomocą funkcji (7.7) profilów, rozważymy pewną geometryczną właściwość odwzorowania Żukowskiego.

Wykażemy mianowicie, że za pomocą tego odwzorowania okrąg o promieniu l ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 7.9) przekształca się w odcinek prostej AB o długości $2l$ w płaszczyźnie ζ.

Dla punktów okręgu o promieniu l będziemy mieli $z = le^{i\theta}$. Podstawiając tę wartość z do wzoru (7.7) znajdziemy

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right) = \frac{l}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = l\cos\theta.$$

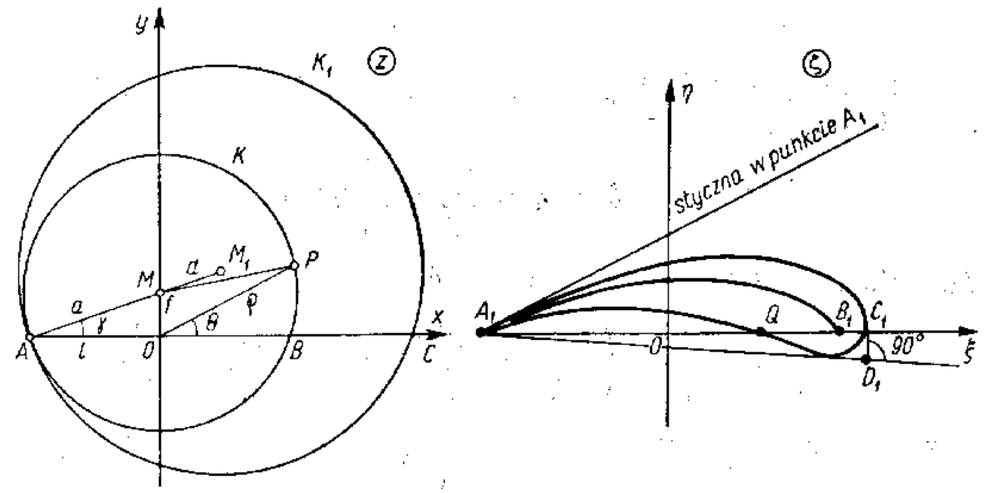
Otrzymane równanie wykazuje, że dla punktów okręgu, tzn. przy zmianie θ od 0 do 2π, ζ stanowi wielkość rzeczywistą zmieniającą się w granicach od $+l$ do $-l$ (przy zmianie θ od 0 do π) oraz od $-l$ do $+l$ (przy zmianie θ od π do 2π). Odwzorowanie (7.7) przekształciło zatem okrąg o promieniu l w odcinek[1] osi rzeczywistej o długości $2l$.

[1] Ściślej biorąc, jest to tzw. cięcie (przyp. red.).

§ 5. Profile Żukowskiego—Czapłygina

W paragrafie niniejszym rozważane są profile, otrzymywane za pomocą odwzorowania Żukowskiego $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right)$.

Weźmy w płaszczyźnie z okrąg K o promieniu a w ten sposób (rys. 7.10), aby jego środek leżał na osi urojonej w pewnej odległości $OM = f$ od początku układu współrzędnych. Długość odcinka osi rzeczywistej OA oznaczymy literą l.



7.10. Metoda Żukowskiego—Czapłygina „obudowania" szkieletowej

Dla punktów okręgu K mamy $z = \varrho e^{i\theta}$, gdzie ϱ jest to wielkość zmienna, ponieważ początek układu współrzędnych nie leży w środku koła K. Wobec tego po przekształceniu

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{l^2}{\varrho}\right)\cos\theta,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{l^2}{\varrho}\right)\sin\theta.$$

Mnożąc równanie pierwsze przez $\sin\theta$, równanie drugie przez $\cos\theta$, podnosząc do kwadratu i odejmując, otrzymamy

$$\xi^2\sin^2\theta - \eta^2\cos^2\theta = l^2\sin^2\theta\cos^2\theta. \tag{a}$$

Jeżeli obierzemy teraz na okręgu K dowolny punkt P, którego położenie określają wielkości ϱ i θ, wówczas z trójkątów OMP i OMA wynika, że

$$a^2 = l^2 + f^2 = f^2 + \varrho^2 - 2\varrho f\sin\theta,$$

skąd

$$\varrho - \frac{l^2}{\varrho} = 2f\sin\theta,$$

a zatem

$$\eta = f\sin^2\theta,$$

czyli

$$\sin^2\theta = \frac{\eta}{f}. \tag{b}$$

Podstawiając wyrażenie (b) do (a), otrzymamy po prostych przekształceniach równanie odwzorowanej krzywej

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{l^2}{f} - f\right)\eta = l^2,$$

równaniu temu łatwo jest nadać postać

$$\xi^2 + \left[\eta + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)\right)\right]^2 = l^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)^2.$$

Jak widać, otrzymaliśmy równanie okręgu, którego środek leży na osi urojonej w punkcie $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)$ oraz którego promień jest równy

$$\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)^2}.$$

Wzór (b) dowodzi, że odwzorowana krzywa nie będzie pełnym okręgiem, a jedynie jego łukiem, położonym nad osią rzeczywistą.

Jeżeli w płaszczyźnie z obierzemy okrąg K_0 o promieniu l ze środkiem w początku układu współrzędnych, wówczas, jak wiadomo, odwzorowanie (7.7) przekształci go w odcinek osi rzeczywistej o długości $2l$. Odwzorowanie (7.7) przekształca zatem punkty A i B okręgu K w punkty A_1 i B_1, położone na osi rzeczywistej ξ, których odległość od siebie wynosi $2l$. W ten sposób odcinek A_1B_1 będzie stanowił cięciwę łuku A_1B_1 (rys. 7.10), którego strzałka jest równa f (co wynika ze wzoru b).

Wrysujmy na płaszczyźnie z okrąg K_1 ze środkiem w punkcie M_1 w ten sposób, aby był on styczny do okręgu K w punkcie A; odległość MM_1 oznaczymy przez d. Środek okręgu K_1 będzie oczywiście leżał na przedłużeniu prostej AM.

Wyjaśnimy teraz, w co przekształci się okrąg K_1 za pomocą odwzorowania Żukowskiego. Ponieważ odwzorowanie to przekształciło zewnętrze koła K na zewnętrze łuku A_1B_1, zatem, jeżeli koło K_1 jest większe od koła K, powinna

mu w płaszczyźnie ζ odpowiadać pewna zamknięta krzywa, tzn. pewien zamknięty profil otaczający łuk A_1B_1.

Z ogólnej właściwości odwzorowań konforemnych (zachowanie kątów) wynika, że w punkcie A_1 kontur profilu powinien mieć wspólną styczną z łukiem A_1B_1 (ponieważ okręgi K i K_1 są do siebie styczne w punkcie A). Poza tym punkt C okręgu K_1 powinien oczywiście przechodzić w pewien punkt C_1 leżący na przedłużeniu odcinka A_1B_1. Ponieważ oprócz punktu A_1 profil nie będzie miał innych wspólnych punktów z łukiem A_1B_1, zatem w pobliżu punktu C_1 profil powinien być płynnie zaokrąglony. Powyższe rozważania potwierdza całkowicie obliczenie.

Otrzymany w ten sposób profil, zwany profilem Żukowskiego—Czapłygina, przedstawiony jest na rys. 7.10.

Z samej konstrukcji tego profilu wynika, że długość jego cięciwy A_1D_1 zależy od wielkości l, jego grubość—od wielkości d, jego wygięcie—od wielkości f. Im większe są wartości l, d oraz f, tym dłuższa jest cięciwa profilu, tym profil jest grubszy i bardziej wygięty.

Przy analizowaniu profilów Żukowskiego—Czapłygina używane jest często pojęcie cięciwy teoretycznej, przez którą rozumie się długość odcinka A_1C_1. Wielkość cięciwy teoretycznej można znaleźć analitycznie.

Zatem rozważaną klasę (określony rodzaj) profilów można otrzymać (czego po raz pierwszy dowiódł Żukowski) za pomocą odwzorowania (7.7) metodą „obudowania" łuku koła. Niezależnie od Żukowskiego, otrzymał tę samą klasę profilów S.A. Czapłygin w swej pracy *O dawlienji płosko-parallelnowo potoka na priegrażdajuszczije tieła.*

W pracy tej Czapłygin dowiódł, że profil taki należy do szerszej klasy profilów, otrzymywanych z paraboli przez zastosowanie do jej punktów inwersji; w związku z tym Czapłygin nazwał je profilami *inwersji paraboli.*

§ 6. Określenie wielkości siły nośnej profilu teoretycznego Żukowskiego—Czapłygina

W paragrafie poprzednim omówione zostały jedynie geometryczne właściwości profilu Żukowskiego—Czapłygina. Na przykładzie tego najprostszego profilu podamy obecnie metodę obliczenia siły nośnej i momentu. W paragrafie 8 metoda ta zostanie uogólniona na profile o dowolnym kształcie.

Gdyby znany był potencjał zespolony $w(\zeta)$ opływu profilu, wówczas na podstawie twierdzenia Żukowskiego—Czapłygina

$$Y + iX = -\frac{1}{2}\varrho \oint \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta \tag{7.8}$$

obliczenie siły nośnej sprowadzałoby się do znalezienia residuum kwadratu

prędkości zespolonej. Bezpośrednie określenie potencjału zespolonego dla profilu Żukowskiego—Czapłygina związane jest z dużymi trudnościami. Z tego względu będziemy zagadnienie obliczania siły nośnej profilu Żukowskiego—Czapłygina rozwiązywali metodą inną, opartą na odwzorowaniu konforemnym tego profilu na walec kołowy.

Niech w płaszczyźnie z zachodzi opływ cyrkulacyjny walca o promieniu R z prędkością w nieskończoności V_∞ skierowaną równolegle do osi rzeczywistej (rys. 7.11). Jak wiadomo, potencjał zespolony będzie w tym przypadku miał postać

$$w(z) = -V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z, \tag{7.9}$$

gdzie:

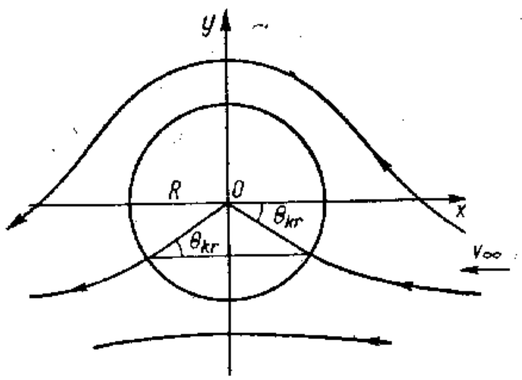
R — promień walca,

Γ — cyrkulacja prędkości wzdłuż obwodu otaczającego walec.

Wiemy, że wzór na cyrkulację Γ ma postać (równanie 3.75)

$$\Gamma = -4\pi R V_\infty \sin\theta_{kr},$$

gdzie θ_{kr} jest to kąt określający położenie punktów krytycznych na walcu.



7.11. Opływ walca kołowego o promieniu R

Z rozważań geometrycznych wynika (rys. 7.11), że kąt θ_{kr} określający położenie punktów krytycznych (drugiemu punktowi krytycznemu odpowiada kąt $\pi - \theta_{kr}$) równy jest kątowi zawartemu pomiędzy cięciwą, przechodzącą przez dwa punkty krytyczne na walcu, oraz promieniem walca. Wielkość tego kąta określa wielkość cyrkulacji. Wielkość kąta θ_{kr} nie zależy oczywiście od kierunku przepływu w nieskończoności. Wyobraźmy sobie, że przepływ mający w nieskończoności tę samą prędkość V_∞, tworzy kąt β z osią rzeczywistą. Zagadnienie to łatwo jest sprowadzić do zagadnienia poprzedniego, jeżeli obrócimy osie współrzędnych o kąt β.

Wykażemy obecnie, że *cyrkulacja prędkości nie zmienia się przy odwzorowaniu konforemnym*. Jeżeli wewnątrz konturu, wzdłuż którego oblicza się cyrkulację nie ma ani źródeł, ani upustów, wówczas cyrkulację w płaszczyźnie z można obliczyć ze wzoru

$$\Gamma = \oint \frac{dw}{dz}\,dz.$$

Przy przejściu od płaszczyzny z do płaszczyzny ζ za pomocą odwzorowania konforemnego $\zeta = f(z)$ otrzymamy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz},$$

$$dz = \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta.$$

Podstawiając te równania do wzoru na Γ, otrzymamy

$$\Gamma_z = \oint \frac{dw}{dz}\,dz = \oint \frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta = \Gamma_\zeta,$$

tzn., istotnie, cyrkulacja prędkości nie zmieni się przy odwzorowaniu konforemnym.

Jeżeli zatem cyrkulacja prędkości związana jest z wielkością siły nośnej (zgodnie ze wzorem Żukowskiego), wówczas można dla profilu Żukowskiego—Czapłygina określić siłę nośną za pomocą odwzorowania zewnętrza okręgu na zewnętrze profilu. Przy odwzorowaniu konforemnym linie prądu przechodzą oczywiście również w linie prądu, a linie ekwipotencjalne — w linie ekwipotencjalne. Istotnie, jeżeli w płaszczyźnie z oznaczymy potencjał zespolony przez $w(z)$, wówczas przy odwzorowaniu konforemnym $\zeta = f(z)$ lub $z = F(\zeta)$, gdzie f i F — funkcje odwrotne, potencjał zespolony w płaszczyźnie ζ będzie $w[F(\zeta)] = W(\zeta)$. Ponieważ jednak $w = \varphi + i\psi$, zaś $W = \Phi + i\Psi$; wobec tego w odpowiednich punktach, gdzie $w = W$, będziemy mieli

$$\varphi = \Phi \text{ oraz } \psi = \Psi.$$

Wynika stąd, że liniom w płaszczyźnie z, na których $\psi = \text{const}$ będą w płaszczyźnie ζ odpowiadały linie, na których $\Psi = \text{const}$. Ale to właśnie będzie świadczyło, że przy odwzorowaniu konforemnym linie prądu przechodzą w linie prądu. Analogiczny wniosek jest oczywiście słuszny również dla linij ekwipotencjalnych. Ortogonalne rodziny linij prądu oraz linij ekwipotencjalnych w płaszczyźnie z przejdą zatem przy odwzorowaniu konforemnym w ortogonalne rodziny linij prądu i linij ekwipotencjalnych w płaszczyźnie ζ profilu, tzn. odwzorowanie konforemne, przekształcające obwód walca na obwód profilu, przekształca strumień opływający walec w strumień opływający profil. Odwzorowanie powinno być przy tym tak dobrane, aby prędkości w obszarze ζ nie stawały się nieskończenie wielkie, gdyż zagadnienie traciłoby wówczas sens

fizyczny. Biorąc to pod uwagę, określimy zależność między prędkościami opływu okręgu oraz profilu lotniczego. Niech $w(z)$ — potencjał zespolony strumienia opływającego walec, $\zeta(z)$ zaś — funkcja dająca odwzorowanie konforemne zewnętrza walca na zewnętrze profilu. Wówczas

$$\bar{v} = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}} = \frac{\bar{V}}{\frac{d\zeta}{dz}}, \tag{7.10}$$

gdzie:

$\bar{v}$ — prędkość zespolona sprzężona w płaszczyźnie ζ profilu,
$\bar{V}$ — prędkość zespolona sprzężona w płaszczyźnie z walca.

Wynika stąd od razu, że prędkość w płaszczyźnie ζ może stać się nieskończenie wielka tam, gdzie $\frac{d\zeta}{dz} = 0$; w rozważanym przypadku funkcja określająca odwzorowanie konforemne ma postać

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right),$$

skąd

$$\bar{v} = \frac{2\bar{V}}{1 - \frac{l^2}{z^2}}. \tag{7.11}$$

Widzimy, że prędkość na profilu (rys. 7.11) może stawać się nieskończenie wielka w punkcie $z = -l$ odpowiadającym tylnemu ostrzu profilu. Można tego uniknąć (wzór 7.11), jeżeli w punkcie na obwodzie okręgu, odpowiadającym tylnemu ostrzu profilu, prędkość będzie równa zeru. Doszliśmy w ten sposób do znanego postulatu Żukowskiego—Czapłygina o spływie strug z profilu, które może być w danym przypadku sformułowane w następujący sposób: *Funkcja odwzorowująca powinna mieć taką postać, aby punktowi krytycznemu na obwodzie walca odpowiadało tylne ostrze profilu.*

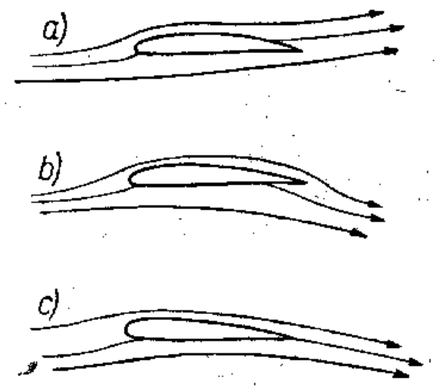
Ażeby móc należycie ocenić ten postulat, należy wziąć pod uwagę, że rozwiązanie zagadnienia opływu dowolnego profilu lotniczego zawiera pewną dowolność, polegającą na tym, że przy założonej prędkości w nieskończoności rozkład prędkości na profilu może być różny, w zależności od wielkości cyrkulacji Γ.

Przy opływie walca z zadaną prędkością w nieskończoności V_∞ mieliśmy również nieskończenie dużo rozwiązań, gdyż obierając w różny sposób cyrkulację Γ, można było uzyskać różne rodzaje opływu walca przy różnym rozłożeniu na nim punktów spiętrzenia.

To samo odnosi się również do profilu z tylnym ostrzem, przy czym dla opływu profilu z zadaną prędkością V_∞ z nieskończonej ilości rozwiązań można wyodrębnić trzy charakterystyczne przypadki (rys. 7.12).

W pierwszych dwóch przypadkach (rys. 7.12a i b) nie uzyskuje się opływu bez oderwania, gdyż przy przepływie strug z jednej powierzchni profilu na drugą powstaje na tylnym ostrzu nieskończenie wielka prędkość, czemu w płynie rzeczywistym odpowiada oderwanie przepływu.

W 1909 roku S. A. Czapłygin i niezależnie od niego N. J. Żukowski ustalili, że dla każdego płata z tylnym ostrzem istnieje dostatecznie duży zakres kątów natarcia, przy których profil jest opływany bez oderwania strug, przy skończonej prędkości w tylnym ostrzu (rys. 7.12c).



7.12. Do hipotezy Żukowskiego — Czapłygina

Postulat Żukowskiego—Czapłygina umożliwia jednoznaczne określenie **wielkości cyrkulacji, której nałożenie powoduje przepływ ciągły przy skończonej** prędkości w tylnym ostrzu i z tego też względu ma ona w aerodynamice wyjątkowo duże znaczenie.

Jak słusznie zauważył prof. L. G. Łojcjanski [1], „Te dwie koncepcje wielkich rosyjskich aerodynamików, N. J. Żukowskiego i S. A. Czapłygina: wir związany (powstawanie cyrkulacji — przyp. aut.) oraz postulat skończonej prędkości w tylnym ostrzu profilu — stały się podstawą całej współczesnej teorii płata".

Zgodnie z dowiedzioną właściwością niezmienności cyrkulacji przy odwzorowaniu konforemnym oraz na podstawie twierdzenia Żukowskiego dla profilu, możemy napisać

$$Y = \varrho v_\infty |\Gamma|$$

lub[1]

$$Y = \varrho v_\infty 4\pi R V_\infty \sin\theta_{kr},$$

gdzie v_∞ oznacza prędkość opływu profilu płata. W naszym jednak przypadku, zgodnie ze wzorem (7.11), $2V_\infty = v_\infty$. A zatem

$$Y = 2\pi R \varrho v_\infty^2 \sin\theta_{kr}. \tag{7.12}$$

Wartość kąta θ_{kr} łatwo jest określić na podstawie budowy samego profilu. Załóżmy, że mamy okrąg K_1 o promieniu R, opływany przez strumień, którego prędkość w nieskończoności tworzy kąt β z osią rzeczywistą (rys. 7.13, gdzie płaszczyzny z i ζ są nałożone na siebie).

[1] Przypominamy wzór (3.75) (przyp. red.).

Niech punkty A i B będą punktami krytycznymi; prosta łącząca te punkty będzie skierowana równolegle do prędkości w nieskończoności. Jak widać z rys. 7.13,

$$\theta_{kr} = \alpha + \delta \tag{a}$$

lub

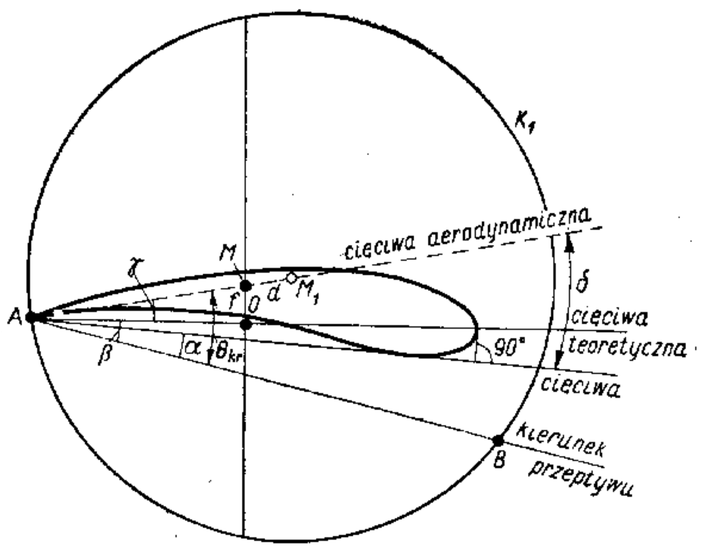
$$\theta_{kr} = \beta + \gamma. \tag{b}$$

Tutaj α jest kątem natarcia liczonym od cięciwy profilu, β zaś — kątem natarcia liczonym od cięciwy teoretycznej. Kąty γ i δ stanowią kąty wynikające z budowy profilu; mają one dla różnych profilów Żukowskiego—Czapłygina różne wartości.

Siła nośna może być zatem podana w następującej postaci

$$Y = 2\pi R \varrho v_\infty^2 \sin(\delta + \alpha). \tag{7.13}$$

Z równania (7.13) wynika, że przy $\alpha = -\delta$ siła $Y = 0$. Z tego względu kąt $\alpha = -\delta$ nazywany jest *kątem* (*natarcia*) *zerowej siły nośnej*.



7.13. Do określenia wielkości siły nośnej działającej na profil Żukowskiego—Czapłygina

Wprowadzając bezwymiarowy współczynnik siły nośnej c_y, możemy napisać

$$Y = c_y S \varrho \frac{v_\infty^2}{2}, \tag{7.14}$$

gdzie $S = b \cdot 1$ (b — długość cięciwy).

Przyrównując (7.13) do (7.14), znajdziemy

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin(\delta + \alpha). \tag{7.15}$$

Analogicznie można otrzymać

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin(\gamma + \beta). \tag{7.16}$$

Dla mało wygiętych cienkich profilów możemy w przybliżeniu uważać, że $b \approx 2R$, a zatem

$$c_y = 2\pi \sin(\delta + \alpha).$$

Wzór ten jest słuszny również dla szeregu profilów nie należących do serii profilów Żukowskiego—Czapłygina.

Przyjmując dla małych kątów natarcia

$$\sin(\alpha + \delta) \approx \alpha + \delta,$$

znajdziemy

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi,$$

czyli teoretyczne pochylenie krzywej zależności współczynnika siły nośnej od kąta natarcia $c_y(\alpha)$ równe jest 2π.

Ze wzoru (7.16) wynika, że przy $\beta = 0$

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin\gamma. \tag{7.17}$$

Podstawmy tę wartość c_y do równania na siłę nośną (7.14):

$$Y = 2\pi \varrho v_\infty^2 R \sin\gamma.$$

Na podstawie rys. 7.13 określimy R oraz γ:

$$R = \sqrt{f^2 + l^2} + d,$$

$$\sin\gamma = \frac{f}{\sqrt{f^2 + l^2}}.$$

Wzór na siłę nośną Y można wówczas sprowadzić do postaci

$$Y = 2\pi \varrho v_\infty^2 f \left(1 + \frac{d}{\sqrt{f^2 + l^2}}\right).$$

Po podstawieniu do tego równania $d = 0$ otrzymamy

$$Y = 2\pi \varrho v_\infty^2 f, \tag{7.18}$$

tzn. że wielkość siły nośnej profilu łukowego przy $\beta = 0$ zależy jedynie od jego strzałki. Wynik ten otrzymał po raz pierwszy Czapłygin w r. 1910 w pracy *O dawlenji płosko-parallelnowo potoka na priegrażdajuszczije tiela.*

W powyższej pracy przeanalizował Czapłygin wyczerpująco teorię profilów

łukowych. Rozwiązał on zatem całkowicie zagadnienie opływu profilu łukowego z walcowym zaokrągleniem na końcu. Rozwiązanie to jest przypisywane uczonemu niemieckiemu Sonnenfeldowi, który opracował to zagadnienie znacznie później. W tej samej pracy zbadał Czapłygin zagadnienie opływu profilu kołowego w obecności wiru „stojącego".

W paragrafie 8 podamy obliczenie momentu siły nośnej dla profilu Żukowskiego—Czapłygina.

§ 7. Profile teoretyczne

Profile teoretyczne są to profile, które można otrzymać za pomocą odwzorowania konforemnego. Kontur profilów teoretycznych nie jest zatem kształtowany przez sztuczny dobór łuków na podstawie zależności empirycznych oraz badań doświadczalnych, jak to się czyni w przypadku większości używanych profilów, lecz otrzymywany jest na drodze analitycznej. Znając funkcję odwzorowującą $\zeta = f(z)$ dla każdego profilu teoretycznego, można ściśle matematycznie, na podstawie podanej poprzednio teorii profilu, obliczyć siłę nośną i moment.

7.14. Profil uzyskany drogą inwersji elipsy; zaokrąglona krawędź spływu

Najprostszym profilem teoretycznym jest omówiony szczegółowo profil Żukowskiego—Czapłygina, należący, jak wiadomo, do serii profilów typu *inwersji paraboli*. Czapłygin dowiódł w pracy *K obszcziej tieorji kryła monopłana* (r. 1922), że za pomocą metody inwersji można zbudować inną serię profilów teoretycznych, stanowiących uogólnienie profilów poprzednich; noszą one nazwę profilów typu *inwersji elipsy*. Jedną z osobliwości takiego profilu (rys. 7.14) jest zaokrąglona krawędź spływu. Hipotezę Żukowskiego—Czapłygina dotyczącą spływu strug z tylnego ostrza profilu zastępuje w tym przypadku hipoteza Czapłygina, zgodnie z którą oderwanie strug zaczyna się w miejscu maksymalnej krzywizny krawędzi spływu.

Profile powyższe nie znalazły jednak większego praktycznego zastosowania, tak samo jak profile Żukowskiego—Czapłygina. Te ostatnie mają dwie zasadnicze wady:

1. W związku z tym, że kąt τ tylnego ostrza jest równy zeru, profil zastosowany do skrzydła nie zapewnia niezbędnej wytrzymałości.

2. Przy profilach cienkich linia szkieletowa profilu jest zbyt zbliżona do okręgu. Wpływa to ujemnie na stateczność profilu.

W roku 1911[1] opracował Żukowski teorię profilów składających się z dwóch przecinających się łuków okręgu, które nazwał profilami typu *Antoinette*, oraz

[1] Prace Oddziału Nauk Fizycznych Towarzystwa Przyjaciół Przyrodoznawstwa, tom XV, 1911.

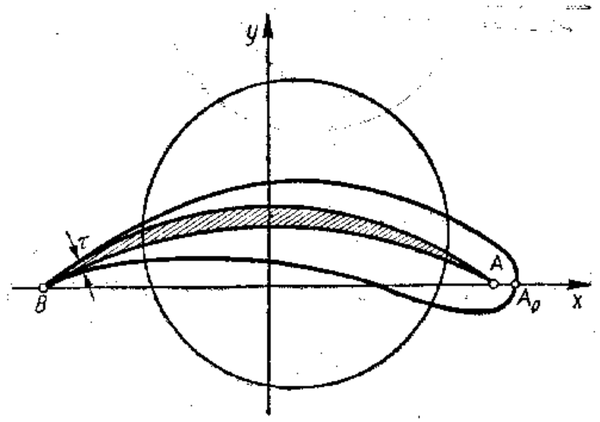
teorię profilów uogólnionych typu Antoinette z zaokrąglonym noskiem i ostrą krawędzią spływu o kącie τ różnym od zera. Płaty z profilami uogólnionymi typu Antoinette, które należy nazywać *uogólnionymi profilami N.J. Żukowskiego*, były szeroko stosowane w budowie płatowców i odegrały w rozwoju lotnictwa dużą rolę. W literaturze zagranicznej profile te nazywane są profilami Kármána—Trefftza według nazwisk uczonych [13], którzy w r. 1918 opracowali tego rodzaju profile, zbadane przez Żukowskiego o 7 lat wcześniej.

Uogólniony profil Żukowskiego oparty jest na następujących przesłankach.

Odwzorowanie Żukowskiego, za pomocą którego otrzymywany jest profil typu „inwersji paraboli", można napisać również w postaci następującej:

$$\frac{\zeta - 2l}{\zeta + 2l} = \left(\frac{z - l}{z + l}\right)^2. \tag{7.19}$$

Wykładnik potęgowy $n = 2$ w prawej części równania (7.19) powoduje podwojenie kąta w punkcie $z = -l$, gdzie naruszona zostaje konforemność, w związku z czym punktowi krytycznemu na walcu z kątem zewnętrznym π będzie odpowiadał na profilu tylny punkt oderwania strug z zewnętrznym kątem 2π; kąt wewnętrzny τ staje się więc równy zeru.



7.15. Uogólniony profil Żukowskiego

Żukowski dowiódł, że w celu otrzymania profilu ze skończonym kątem τ w tylnym ostrzu, odwzorowanie konforemne należy przeprowadzić za pomocą następującej funkcji odwzorowującej:

$$\frac{\zeta - nl}{\zeta + nl} = \left(\frac{z - l}{z + l}\right)^n, \tag{7.20}$$

gdzie

$$n = 2 - \frac{\tau}{\pi}.$$

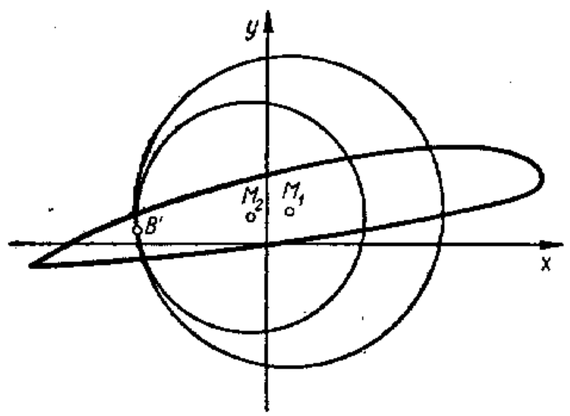
W tym przypadku „szkielet" nowego profilu będzie się składał z dwóch przecinających się łuków okręgu z kątami τ w punktach przecięcia różnymi od

zera (rys. 7.15). Jest to właśnie profil Antoinette opracowany po raz pierwszy przez Żukowskiego. Na ten „szkielet" można nakładać profil w sposób analogiczny jak poprzednio. Uogólniony profil Żukowskiego z zaokrąglonym noskiem i ostrą krawędzią spływu o kącie $\tau \neq 0$ podany jest na rys. 7.15.

Łatwo jest stwierdzić, że w tym przypadku kątowi zewnętrznemu π na okręgu w punkcie krytycznym będzie odpowiadał zewnętrzny kąt $2\pi - \tau$ na tylnym ostrzu profilu, tzn. łuki profilu będą się przecinały na krawędzi spływu pod kątem τ.

Uogólniony profil Żukowskiego zależy więc od trzech parametrów: grubości, wygięcia oraz kąta τ.

Charakterystyki aerodynamiczne tych profilów różnią się nieco od charakterystyk profilów typu Żukowskiego—Czapłygina ze względu na kąt $\tau \neq 0$.



7.16. Profil Niekrasowa

Można wykazać, że tangens kąta pochylenia krzywej $c_y(\alpha)$ będzie nieco większy niż 2π (w przypadku profilów poprzednich wynosił on równo 2π) i będzie się wyrażał w następujący sposób:

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi\left(1 + \frac{\tau}{2\pi}\right). \tag{7.21}$$

Opis teorii tych profilów oraz obliczenie siły wypadkowej i momentu podany jest w monografii W. W. Gołubiewa pt. *Tieoria kryła aeroplana w płaskoparallelnom potokie* [14].

Inną serię profilów można otrzymać za pomocą następującego odwzorowania konforemnego:

$$\zeta = z + \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z^2} + \ldots + \frac{k_n}{z^n}. \tag{7.22}$$

Profile otrzymane za pomocą odwzorowania (7.22) były po raz pierwszy podane przez akademika A.I. Niekrasowa (rys. 7.16) i szczegółowo zbadane przez niemieckiego profesora Misesa. Nie zatrzymując się przy teorii tych profilów, nadmienimy, że ich praktyczne zastosowanie ograniczała mała stateczność.

W ciągu szeregu lat zajmował się Czapłygin badaniem teorii profilów. We wspólnej pracy Czapłygina i prof. N. S. Arżanikowa [16] przestudiowany został profil, którego linię szkieletową stanowi łamana, składająca się z dwóch odcinków prostej. W pracy Czapłygina z r. 1912, opublikowanej w r. 1935 [17], zbadany został profil, którego linia szkieletowa składała się z dwóch łuków okręgów o różnym promieniu, stycznych w punktach końcowych.

Poważny wkład do teorii profilów stanowią profile Czapłygina z r. 1942, oznaczone literami САЧ według inicjałów tego wielkiego uczonego.

Profile САЧ otrzymał Czapłygin za pomocą odwzorowania konforemnego zewnętrza profilu na zewnętrze koła o promieniu jednostkowym. Podana przez Czapłygina funkcja odwzorowująca zawierała trzy dowolne parametry. Przez zmianę tych ostatnich osiągało się żądane wartości wygięcia profilu, jego grubości oraz kąta krawędzi spływu.

Podkreślając znaczenie metody profilów teoretycznych, Czapłygin wskazał, że „należy zaznaczyć, iż profile teoretyczne mają tę przewagę nad profilami zwykłymi, że możemy z góry wiedzieć, jaki będzie rozkład ciśnień na badanym profilu, a zatem przewidzieć także jego podstawowe charakterystyki. Obliczenie rozkładu ciśnień metodą odwzorowania konforemnego daje przy tym dobre wyniki".

§ 8. Obliczenie siły i momentu dla profilu o dowolnym kształcie

W paragrafie niniejszym omówiona zostanie metoda obliczania siły aerodynamicznej i momentu dla profilu o dowolnym kształcie.

Załóżmy, że w płaszczyźnie zmiennej zespolonej ζ dany jest potencjał zespolony $w(\zeta)$ przepływu płaskiego, opływającego określony profil. Jak wiadomo, w tym przypadku siłę wypadkową i moment wyrażają następujące równania:

$$Y + iX = -\frac{\varrho}{2}\int_C \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta,$$

$$M = -\operatorname{Re}\frac{\varrho}{2}\int_C \zeta\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta,$$

gdzie C oznacza dowolny kontur zamknięty otaczający profil.

Rozłóżmy prędkość zespoloną $\frac{dw}{d\zeta}$ na szereg Laurenta:

$$\frac{dw}{d\zeta} = A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \frac{A_3}{\zeta^3} + \ldots, \tag{7.23}$$

gdzie współczynniki A_n są liczbami zespolonymi. Wartości współczynników

tego rozłożenia zależą od charakteru opływu profilu oraz jego geometrycznego kształtu.

Wiadomo że

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = A_0,$$

skąd

$$A_0 = \bar{v}_\infty = |v_\infty|\, e^{-i\theta_\infty}, \tag{7.24}$$

czyli współczynnik A_0 określa wartość prędkości zespolonej sprzężonej $|v_\infty|^{-i\theta_\infty}$ w nieskończoności.

W celu określenia współczynnika A_1 zastępujemy twierdzenie o residuum prędkości zespolonej, które (na skutek braku źródeł i upustów w strumieniu) można napisać w postaci

$$\Gamma = \int_C \frac{dw}{d\zeta}\, d\zeta = \int_C \left(A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots\right) d\zeta = A_1\, 2\pi i,$$

skąd

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \tag{7.25}$$

A zatem współczynnik A_1 jest całkowicie określony przez wielkość cyrkulacji Γ. Udowodnimy, że siła aerodynamiczna i moment dla opływu dowolnego profilu zależą jedynie od trzech pierwszych współczynników A_0, A_1, i A_2 rozkładu prędkości zespolonej na szereg. Podnosząc $\frac{dw}{d\zeta}$ do kwadratu, otrzymamy

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 = \dots + \frac{2A_0A_1}{\zeta} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{\zeta^2} + \dots$$

oraz

$$Y + iX = -\frac{\varrho}{2}\int_C \left(\dots + \frac{2A_0A_1}{\zeta} + \dots\right) d\zeta = -\frac{\varrho}{2}\, 2A_0A_1\, 2\pi i$$

lub

$$Y + iX = -2\pi\varrho i A_0 A_1. \tag{7.26}$$

Stąd łatwo jest uzyskać twierdzenie Żukowskiego o sile nośnej. Wykorzystując równania (7.24) i (7.25), otrzymamy

$$Y + iX = -2\pi\varrho i |v_\infty| e^{-i\theta_\infty} \frac{\Gamma}{2\pi i} = -\varrho |v_\infty| \Gamma e^{-i\theta_\infty}.$$

W szczególności, przy $\theta_\infty = \pi$,

$$X = 0, \qquad Y = \varrho\, |v_\infty|\, \Gamma.$$

W ten sposób ponownie dowiedliśmy twierdzenia Żukowskiego o sile nośnej dla dowolnego profilu w przypadku cieczy nieściśliwej.

Analogicznie

$$M = -\operatorname{Re}\frac{\varrho}{2}\int_C \zeta\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta =$$

$$= -\operatorname{Re}\frac{\varrho}{2}\int_C \left(\dots + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{\zeta} + \dots\right) d\zeta = -\operatorname{Re}\frac{\varrho}{2}(A_1^2 + 2A_0A_2)\, 2\pi i$$

lub

$$M = -\pi\varrho \operatorname{Re}\left[i\,(A_1^2 + 2A_0A_2)\right].$$

Wykorzystując równania (7.24) i (7.25) dla współczynników A_0 oraz A_1, otrzymamy ostatecznie

$$M = -2\pi\varrho \operatorname{Re}(i\bar{v}_\infty A_2). \tag{7.27}$$

Do obliczenia siły aerodynamicznej i momentu nie jest więc potrzebna całkowita znajomość opływu płata, tzn. wszystkich współczynników rozkładu (7.23); wystarczy jedynie znajomość pierwszych trzech współczynników A_0, A_1 i A_2.

Jak widzimy, współczynnik pierwszy A_0 określony jest wielkością oraz kierunkiem prędkości przepływu w nieskończoności, ponieważ

$$A_0 = |v_\infty|\, e^{-i\theta_\infty}.$$

Następne dwa współczynniki A_1 i A_2 można określić za pomocą odwzorowania konforemnego zewnętrza rozważanego profilu na zewnętrze walca kołowego o promieniu R.

Niech funkcja

$$\zeta = f(z)$$

realizuje powyższe odwzorowanie, mające tę właściwość, że nieskończenie odległy punkt płaszczyzny ζ przechodzi w nieskończenie oddalony punkt płaszczyzny walca z, natomiast kierunki prędkości w nieskończoności w płaszczyźnie ζ oraz w płaszczyźnie z zostają zachowane, tzn. $\theta_\infty = \alpha_\infty$. Dzięki temu odwzorowanie konforemne określone jest jednoznacznie.

W tym przypadku współczynnik A_1, wchodzący do równania (7.26) na siłę nośną, daje się łatwo określić, ponieważ wielkość cyrkulacji Γ nie zmienia się przy odwzorowaniu konforemnym, wielkość Γ zaś dla walca łatwo jest określić przy zachowaniu warunku opływu bez oderwania.

W celu określenia brakującego współczynnika A_2, rozważymy bardziej szczegółowo funkcję $w = \zeta(z)$. Ponieważ prędkość zespolona $\frac{dw}{d\zeta}$ powinna być funkcją analityczną w całym obszarze przepływu, a jednocześnie

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}}, \tag{7.28}$$

rozkład $\zeta(z)$ na szereg Lauerenta na zewnątrz walca powinien mieć postać

$$\zeta(z) = a_\infty z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots, \tag{7.29}$$

a zatem

$$\frac{d\zeta}{dz} = a_\infty - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \ldots \tag{7.30}$$

W nieskończoności równanie (7.28) przybierze postać

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = \frac{\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty}}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty}}.$$

Lecz

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = \bar{v}_\infty = |v_\infty|\, e^{-i\theta_\infty}, \qquad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = \bar{V}_\infty = |V_\infty|\, e^{-i\alpha_\infty},$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty} = a_\infty.$$

Wobec tego

$$\bar{v}_\infty = \frac{\bar{V}_\infty}{a_\infty},$$

skąd

$$a_\infty = \frac{\bar{V}_\infty}{\bar{v}_\infty} = \frac{|V_\infty|\, e^{-i\alpha_\infty}}{|v_\infty|\, e^{-i\theta_\infty}}$$

oraz, ponieważ zgodnie z warunkiem

$$\theta_\infty = \alpha_\infty,$$

więc

$$a_\infty = \frac{|V_\infty|}{|v_\infty|}.$$

Współczynnik a_∞ jest zatem rzeczywistą liczbą dodatnią, wobec czego z równania

$$\bar{V}_\infty = a_\infty \bar{v}_\infty \tag{7.31}$$

wynika, że

$$V_\infty = a_\infty v_\infty. \tag{7.32}$$

Napiszmy potencjał zespolony dla walca kołowego[1] podstawiając jak wyżej

$$\bar{V}_\infty = |V_\infty|\, e^{-i\alpha_\infty},$$

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + V_\infty \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

Na podstawie (7.31) i (7.32) otrzymamy

$$w(z) = a_\infty\left(\bar{v}_\infty z + v_\infty \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z,$$

skąd

$$\frac{dw}{dz} = a_\infty \bar{v}_\infty - a_\infty v_\infty \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}.$$

Podstawiając wyrażenie na $\frac{dw}{dz}$ oraz $\frac{d\zeta}{dz}$ do równania (7.28), otrzymamy

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{a_\infty \bar{v}_\infty - a_\infty v_\infty \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}}{a_\infty - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \ldots}$$

lub

$$\frac{dw}{d\zeta} = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i a_\infty}\frac{1}{z} + \left(\frac{a_1}{a_\infty}\bar{v}_\infty - v_\infty R^2\right)\frac{1}{z^2} + \ldots \tag{7.33}$$

Powracając do równania (7.23), należy zwrócić uwagę, że

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dw}{d\zeta}\zeta d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dw}{d\zeta}\zeta\frac{d\zeta}{dz}dz.$$

[1] Jeżeli przepływ będzie skierowany wzdłuż osi x, tzn. $\bar{V}_\infty = V_\infty$, będziemy mieli znane wyrażenie dla potencjału zespolonego opływu walca (rozdz. VI, § 7).

Podstawiając tu $\frac{dw}{d\zeta}$, ζ oraz $\frac{d\zeta}{dz}$ odpowiednio według równań (7.33), (7.29) oraz (7.30), grupując pod całką współczynniki przy $\frac{1}{z}$, a także wykorzystując twierdzenie o residuum, otrzymamy

$$A_2 = \frac{a_0 \Gamma}{2\pi i} + a_1 a_\infty \bar{v}_\infty - a_\infty^2 R^2 v_\infty. \tag{7.34}$$

Po określeniu A_2 można wyrażenie (7.27) na moment sprowadzić do postaci

$$M = -2\pi\varrho \operatorname{Re}\left(\frac{a_0 \Gamma \bar{v}_\infty}{2\pi} + i a_1 a_\infty \bar{v}_\infty^2 - i a_\infty^2 R^2 v_\infty \bar{v}_\infty\right)$$

lub biorąc pod uwagę, że a_∞, R i $v_\infty \bar{v}_\infty = |v_\infty|^2$ są liczbami rzeczywistymi

$$M = -2\pi\varrho \operatorname{Re}\left(\frac{a_0 \bar{v}_\infty \Gamma}{2\pi} + i a_1 a_\infty \bar{v}_\infty^2\right). \tag{7.35}$$

W ten sposób moment M zależy w przypadku dowolnego profilu jedynie od trzech pierwszych współczynników a_∞, a_0 i a_1 rozłożenia na szereg funkcji $\zeta = f(z)$, dającej odwzorowanie konforemne profilu na okrąg o promieniu R.

Obliczmy moment M dla profilu Żukowskiego—Czapłygina.

W tym przypadku rozkład na szereg w wyrażeniu (7.29) ma postać

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{l^2}{z}\right) = \frac{1}{2} z + \frac{l^2}{2}\frac{1}{z}.$$

A więc

$$a_\infty = \frac{1}{2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{l^2}{2}$$

i dlatego

$$M = -2\pi\varrho \operatorname{Re}\left[i\frac{l^2}{2}\frac{1}{2}|v_\infty^2| e^{-2\theta_\infty}\right]$$

lub oznaczając $\theta_\infty = \beta$

$$M = -2\pi\varrho \operatorname{Re}\left[i\frac{l^2}{4}|v_\infty^2| (\cos 2\beta - i \sin 2\beta)\right].$$

Stąd znajdujemy

$$M = -\frac{\pi}{2}\varrho l^2 |v_\infty^2| \sin 2\beta. \tag{7.36}$$

Z powyższego wynika, że ustalenie konforemnej zależności między badanym

profilem płata a kołem o promieniu R umożliwia całkowite rozwiązanie zagadnienia opływu profilu w przypadku płaskiego przepływu cieczy doskonałej:

Istotnie, jeżeli zależność konforemna pomiędzy punktami koła a punktami na profilu jest znana, tzn. znana jest bądź funkcja $\zeta = f(z)$, bądź też jej rozkład na szereg Laurenta, wówczas rozkład prędkości v na profilu płata jest określony równaniem (7.28), które można napisać w postaci

$$|v| = \frac{|V|}{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|}.$$

Siłę nośną określamy na podstawie równania Żukowskiego $Y = \varrho v_\infty \Gamma$, gdzie wielkość Γ jest znana, ponieważ Γ jest dla profilu i dla okręgu jednakowa (wielkość tę określa się dla okręgu na podstawie warunku opływu bez oderwania).

Wreszcie moment M określamy ze wzoru (7.36).

S.A. Czapłygin dokonał ważnego odkrycia polegającego na tym, że jeżeli poprowadzimy linie działania siły nośnej dla różnych kątów natarcia, to obwiednia rodziny tych linij będzie parabolą, nazwaną przez niego *parabolą stateczności* lub parabolą metacentryczną. Ognisko paraboli stateczności ma tę właściwość, że moment siły nośnej względem ogniska jest wielkością stałą, niezależną od kąta natarcia [14].

§ 9. Teoria profilu cienkiego

W paragrafach poprzednich rozważyliśmy potencjalny opływ profilu cieczą doskonałą. Zagadnienie sprowadzone zostało do ustalenia odwzorowania konforemnego obszaru położonego na zewnątrz profilu na obszar położony na zewnątrz okręgu.

Klasyczne prace Żukowskiego i Czapłygina, oparte na wprowadzeniu funkcji odwzorowujących, umożliwiły wyprowadzenie ścisłego rozwiązania dla ograniczonego typu profilów.

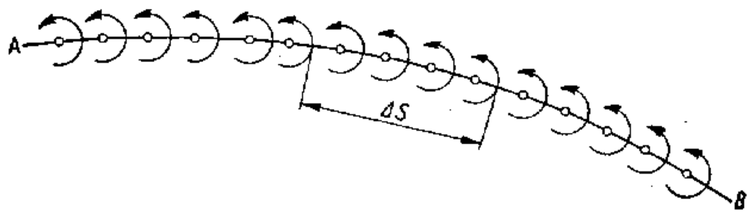
Zagadnienie opływu profilu o dowolnym kształcie może być rozwiązane do końca, jeżeli znane jest odwzorowanie konforemne zewnętrza tego profilu na zewnętrze okręgu. Znalezienie takiego odwzorowania konforemnego w skończonej postaci dla profilu o dowolnym kształcie przedstawia jednak duże trudności. Toteż obecnie istnieją metody przybliżone rozwiązania zagadnienia opływu rozmaitych profilów lotniczych.

Opływ takich profilów określa się zasadniczo albo metodą przybliżonego odwzorowania konforemnego, albo też metodą opartą na zastąpieniu profilu płata przez układ wirów, rozłożonych w sposób ciągły wzdłuż jego linii szkieletowej.

Metodę określenia opływu potencjalnego dookoła profilu płata o dowolnym kształcie omówimy w paragrafie następnym.

W metodzie opartej na zastąpieniu profilu przez układ wirów zakłada się, że poprzeczne wymiary profilu są w porównaniu z długością cięciwy profilu niewielkie; istotnie rozważa się więc opływ nie samego profilu, a jego szkieletowej. Metoda ta daje możność określenia, przy pewnych ograniczeniach, sumarycznych charakterystyk aerodynamicznych profilu cienkiego.

W zakresie teorii profilu cienkiego opublikowano już szereg prac [18, 19]. Omówienie oraz analiza tych prac przekracza jednak ramy niniejszej książki. W paragrafie niniejszym ograniczymy się do omówienia najprostszego zagadnienia teorii profilu cienkiego, opartej na zastąpieniu profilu wirami jednostajnie rozłożonymi wzdłuż jego linii szkieletowej, a podanej po raz pierwszy przez angielskiego profesora Glauerta.



7.17. Do określenia cyrkulacji jednostkowej

Przede wszystkim wprowadzimy pojęcie cyrkulacji na jednostkę długości γ w danym punkcie dowolnej krzywej, wzdłuż której rozmieszczone są jednostajnie wiry (rys. 7.17). Wyodrębnimy na tej krzywej element Δs oraz oznaczymy przez $\Delta\Gamma$ cyrkulację prędkości wirów, rozłożonych na elemencie Δs.

Podzielimy wielkość $\Delta\Gamma$ przez Δs. Stosunek $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta s}$ stanowi oczywiście średnią cyrkulację na jednostkę długości odcinka Δs. Redukując odcinek Δs do punktu i przechodząc do granicy, otrzymamy *wielkość cyrkulacji na jednostkę długości w punkcie*

$$\gamma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta s} = \frac{d\Gamma}{ds}.$$

Po wprowadzeniu pojęcia cyrkulacji na jednostkę długości w danym punkcie x, przejdziemy do omówienia teorii profilu cienkiego.

Załóżmy, że płaski ustalony strumień cieczy doskonałej o zadanej prędkości v_∞ opływa cienki profil (rys. 7.18), którego długość cięciwy oznaczymy przez $b\,(OA = b)$.

Umieśćmy początek układu współrzędnych w przedniej części profilu oraz skierujmy oś x wzdłuż cięciwy, oś y zaś — prostopadle do niej.

Wprowadzimy następujące uproszczenia:

1. Zakładając, że profil jest dostatecznie c i e n k i, będziemy uważali, iż różni się on mało od swej linii szkieletowej OA.

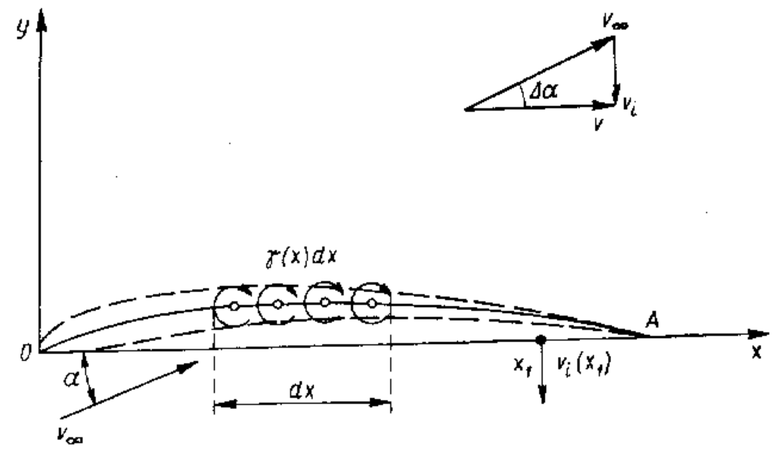
2. Zakładając, że profil jest m a ł o w y g i ę t y, będziemy uważali, iż

jego szkieletowa OA niewiele się różni od prostej OA, stanowiącej cięciwę profilu.

3. Założymy, że opływ tego cienkiego, prawie prostego, profilu odbywa się przy m a ł y m kącie natarcia.

Zastąpimy profil wirami, rozmieszczonymi wzdłuż jego szkieletowej OA w sposób ciągły; ich natężenie na elemencie dx oznaczymy przez $\gamma(x)\,dx$.

Funkcję $\gamma(x)$ należy dobrać z warunku, że opływ odbywa się bez oderwania, tzn. że szkieletowa profilu stanowi linię prądu.



7.18. Do teorii profilu cienkiego (metoda wirowa)

Przy takim układzie możliwe staje się ustalenie związku pomiędzy kształtem szkieletowej profilu a rozkładem prędkości na niej oraz określenie wielkości cyrkulacji prędkości, $\Gamma = \int_0^b \gamma(x)\,dx$, siły nośnej i momentu. Mając na względzie założenie 2, będziemy uważali, że wiry rozmieszczone są wzdłuż cięciwy profilu, a nie na jego szkieletowej. Wówczas prędkość, indukowaną przez wiry w pewnym punkcie x_1 cięciwy (rys. 7.18), określimy w sposób następujący:

$$v_i(x_1) = \int_0^b \frac{\gamma(x)\,dx}{2\pi(x - x_1)}. \tag{7.37}$$

Można przyjąć, że ta indukowana prędkość $v_i(x_1)$ na cięciwie profilu jest równa prędkości indukowanej na powierzchni profilu (mając na uwadze uproszczenia 1 i 2).

Istnienie tej prędkości zmieni kąt natarcia α cięciwy profilu w punkcie x_1 o wielkość $\Delta\alpha = \frac{v_i}{v_\infty}$ (zakładając, że v_i jest małe w porównaniu z v_∞); lokalny kąt natarcia będzie wówczas równy (rys. 7.18)

$$\alpha + \frac{v_i}{v_\infty}.$$

Aby nie zachodziło oderwanie strug, konieczne jest, by w każdym punkcie na profilu prędkość lokalna była skierowana wzdłuż stycznej do powierzchni profilu, czyli powinno być spełnione równanie

$$\alpha + \frac{v_i}{v_\infty} = \frac{dy}{dx}, \tag{7.38}$$

gdzie $y = y(x)$ jest równaniem szkieletowej profilu, a zatem $\frac{dy}{dx}$ jest również funkcją znaną.

Na podstawie wzoru (7.37) na v_i można równanie (7.38) napisać w postaci:

$$\alpha + \frac{1}{2\pi v_\infty}\int_0^b \frac{\gamma(x)\,dx}{x - x_1} = \frac{dy}{dx}. \tag{7.39}$$

Równanie (7.39) jest równaniem całkowym względem nieznanej funkcji $\gamma(x)$. Wprowadzimy zamiast x nową zmienną niezależną θ, określoną równaniem

$$x = \frac{b}{2}(1 - \cos\theta).$$

Jest oczywiste, że obszarowi $0 \leqslant x \leqslant b$, odpowiada $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Znajdźmy $\gamma(\theta)$ w postaci szeregu Fouriera:

$$\gamma(\theta) = 2v_\infty\left(A_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right), \tag{7.40}$$

którego współczynniki $A_0, A_1, A_2, \ldots$ powinny być dobrane w ten sposób, aby spełniony został warunek opływu bez oderwania (7.38) lub (7.39).

W tym celu przede wszystkim wprowadzimy do tych równań zmienną θ:

$$v_i(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{\gamma(x)\,dx}{x - x_1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\gamma(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta} = v_i(\theta_1). \tag{7.37'}$$

Obliczymy teraz wyrażenie

$$\gamma(\theta)\sin\theta = 2v_\infty\left(A_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right)\sin\theta =$$

$$= 2v_\infty\left[A_0(1 + \cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin\theta\right] =$$

$$= 2v_\infty\left[A_0(1 + \cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{2}\right].$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do równania (7.37') otrzymamy

$$v_i(\theta_1) = \frac{v_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{A_0\,d\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta} + \frac{v_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{A_0\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta} +$$

$$+ \frac{v_\infty}{2\pi}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta}\,d\theta. \tag{7.41}$$

Ponieważ [3]

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta} = 0,$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta} = -\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta}\,d\theta = -\pi\frac{\sin n\theta_1}{\sin\theta_1},$$

więc, podstawiając wartości tych całek do równania (7.41) i przekształcając, otrzymamy

$$v_i(\theta_1) = v_\infty\left(-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_1\right). \tag{7.42}$$

Warunek opływu bez oderwania (7.38) możemy teraz przepisać w następującej postaci:

$$\alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = \frac{dy}{dx}. \tag{7.43}$$

Współczynniki A_n tego równania można obliczyć za pomocą metody, stosowanej zwykle w przypadku szeregów Fouriera. Mnożąc obydwie części równania (7.43) kolejno przez 1, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta, \ldots$ oraz całkując w granicach od 0 do π otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\,d\theta, \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\cos n\theta\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

gdzie $y(x)$ wyrażone jest przez θ za pomocą podstawienia $x = \frac{b}{2}(1 - \cos\theta)$.

Podstawiając otrzymane wartości współczynników do wzoru (7.42) na v_t, otrzymamy wartość prędkości indukowanej w każdym punkcie szkieletowej profilu. W ten sposób zostało rozwiązane zadanie znalezienia przepływu dookoła szkieletowej profilu, równoznacznej w danym przypadku z samym profilem.

Łatwo jest teraz znaleźć siłę nośną i moment działające na profil. Według twierdzenia Żukowskiego

$$dY = \varrho\, \gamma(x)\, dx\, v_\infty = \varrho\, v_\infty\, d\Gamma,$$

a zatem

$$Y = \varrho\, v_\infty \int_0^b \gamma(x)\, dx = \varrho\, v_\infty\, \Gamma.$$

Przechodząc do zmiennej θ otrzymujemy

$$Y = \varrho\, v_\infty^2\, b \int_0^\pi \left[A_0 (1 + \cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta = \varrho\, v_\infty^2\, b\, \pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right),$$

skąd na współczynnik siły nośnej c_y będziemy mieli następujący wzór:

$$c_y = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right). \tag{7.45}$$

W sposób analogiczny obliczymy moment względem krawędzi natarcia profilu

$$M = -\varrho\, v_\infty \int_0^b \gamma(x)\, x\, dx.$$

Przechodząc do zmiennej θ otrzymamy:

$$\gamma(x)\, x\, dx = v_\infty \frac{b^2}{2} \left[A_0 (1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos\theta) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta =$$

$$= \frac{v_\infty b^2}{2} \left[A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right] d\theta,$$

skąd

$$M = -\frac{\varrho\, v_\infty^2 b^2}{2} \left[\int_0^\pi A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta + \int_0^\pi \sum_1^\infty A_n \sin n\theta \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \right] =$$

$$= -\varrho \frac{v_\infty^2 b^2}{2} \left(A_0 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} A_1 - \frac{\pi}{4} A_2 \right) = -\frac{\pi}{4} \varrho\, v_\infty^2\, b^2 \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right).$$

Otrzymamy stąd wzór na współczynnik momentu:

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right). \tag{7.46}$$

Jak widzimy, wartość siły nośnej i momentu określają jedynie trzy pierwsze współczynniki szeregu A_0, A_1 i A_2; współczynniki pozostałe nie wpływają na sumaryczne charakterystyki aerodynamiczne (siłę nośną i moment), a wpływają jedynie na rozkład lokalnych prędkości na profilu.

Podstawiając do wzorów (7.45) i (7.46) współczynniki A_n z równań (7.44), można wartości współczynników aerodynamicznych profilu napisać w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} c_y &= 2\pi (\alpha + \varepsilon_0), \\ c_m &= 2 \left(\mu_0 - \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 \right) - \frac{1}{4} c_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos\theta)\, d\theta$$

oraz

$$\mu_0 = -\frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta.$$

Kąt $\alpha = -\varepsilon_1$ jest to kąt natarcia odpowiadający zerowej sile nośnej.

Z wzoru na c_y widać, że dla wszystkich profilów cienkich współczynnik siły nośnej jest liniowo zależny od kąta natarcia α, a pochodna

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi$$

nie zależy od kształtu profilu.

Wyrażenie na współczynnik momentu można napisać prościej, a mianowicie

$$c_m = c_{m0} - \frac{1}{4} c_y, \tag{7.48}$$

gdzie c_{m0} — współczynnik momentu przy zerowej sile nośnej, tzn. $c_{m0} = 2\left(\mu_0 - \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right)$. Wzory (7.47) dobrze zgadzają się z danymi doświadczalnymi dla profilów o niedużej względnej krzywiźnie i grubości.

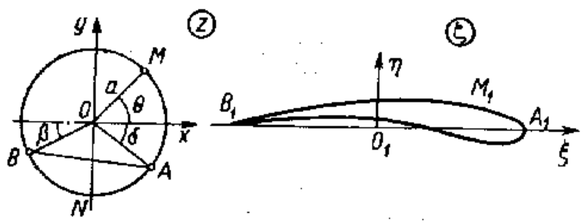
Określenie współczynników aerodynamicznych dla profilu cienkiego sprowadza się zatem do obliczenia dwóch prostych całek: ε_0 i μ_0, co nie przedstawia żadnych trudności, gdy znany jest kształt profilu $y = y(x)$.

Na zakończenie niniejszego paragrafu należy zaznaczyć, że omówiona teoria profilu cienkiego ma największe zastosowanie w przypadkach wymagających określenia sumarycznych charakterystyk aerodynamicznych profilu, gdyż otrzymywany za jej pomocą rozkład prędkości lokalnych (lokalnych ciśnień) na profilu odbiega znacznie od rzeczywistości.

§ 10. Wyznaczenie przepływu potencjalnego dookoła profilu lotniczego o dowolnym kształcie (metoda S.G. Nużina)

Najbardziej rozpowszechnioną metodą wyznaczania opływu dookoła profilu o dowolnym kształcie była dawniej metoda Theodorsena [20], polegająca na tym, że dobierano odwzorowanie konforemne przekształcające profil w krzywą zbliżoną do koła, następnie zaś taką przekształcano w okrąg.

W roku 1946 J.M. Sjeriebrijski [21] udoskonalił metodę Theodorsena. W roku 1947 opublikowane zostały prace S.G. Nużina [22] i L.A. Simonowa [23] zawierające oryginalne metody określania opływu dowolnego profilu na drodze bezpośredniego odwzorowania krzywą zewnętrza koła na zewnętrze profilu.



7.19. Konstruowanie potencjalnego opływu profilu o dowolnym kształcie

W paragrafie niniejszym omówione będą zasady metody prof. Nużina.

Metoda ta oparta jest na odwzorowaniu zewnętrza koła o promieniu a na zewnętrze profilu o cięciwie $b = 1$ w następujących warunkach (rys. 7.19):

$$\zeta(\infty) = \infty, \qquad \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{\infty} = 1. \tag{a}$$

Po przekształceniu grzbietowi profilu $B_1M_1A_1$ odpowiada łuk BMA okręgu, spodowi zaś – łuk BNA.

Krawędziom natarcia oraz spływu profilu będą odpowiadały punkty na okręgu $a\,e^{-i\delta}$ i $a\,e^{i(\pi+\beta)}$.

Funkcję odwzorowującą $\zeta(z)$ podaje Nużin w postaci szeregu

$$\zeta = c_0 + z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n a^n}{z^n}, \tag{7.49}$$

gdzie $c_n = \mu_n + i\,\nu_n$ – współczynniki zależne od kształtu profilu, które należy określić. Szereg (7.49) spełnia, jak widać, warunki (a). Na okręgu $z = a\,e^{i\theta}$ szereg przybiera postać

$$\zeta = c_0 + a\,e^{i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{-in\theta}. \tag{7.50}$$

Oddzielając w (7.50) część rzeczywistą od urojonej, otrzymamy[1]

$$\left.\begin{aligned} \xi(\theta) &= \mu_0 + a\cos\theta + \sum(\mu_n\cos n\theta + \nu_n\sin n\theta),\\ \eta(\theta) &= \nu_0 + a\sin\theta + \sum(\nu_n\cos n\theta - \mu_n\sin n\theta). \end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

Równania (7.51) są równaniami profilu w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest θ.

Rozbijmy współrzędne $\xi(\theta)$ i $\eta(\theta)$ na połowy sum i połowy różnic ich wartości na okręgu w punktach θ oraz $2\pi - \theta$:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(\theta) &= \frac{\xi(\theta) + \xi(2\pi-\theta)}{2} = \mu_0 + 2\,a\cos\theta - \sum B_n\cos n\theta,\\ \xi_2(\theta) &= \frac{\xi(\theta) - \xi(2\pi-\theta)}{2} = \sum A_n\sin n\theta,\\ \eta_1(\theta) &= \frac{\eta(\theta) + \eta(2\pi-\theta)}{2} = A_0 + \sum A_n\cos n\theta,\\ \eta_2(\theta) &= \frac{\eta(\theta) - \eta(2\pi-\theta)}{2} = \sum B_n\sin n\theta, \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

gdzie położyliśmy

$$A_n = \nu_n, \qquad B_n = -\mu_n, \qquad B_1 = a - \mu_1; \tag{7.53}$$

wówczas

$$\left.\begin{aligned} \xi(\theta) &= \xi_1(\theta) + \xi_2(\theta) = \mu_0 + 2\,a\cos\theta - \sum B_n\cos n\theta + \sum A_n\sin n\theta,\\ \eta(\theta) &= \eta_1(\theta) + \eta_2(\theta) = A_0 + \sum A_n\cos n\theta + \sum B_n\sin n\theta. \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Współczynniki Fouriera A_n i B_n określane są za pomocą znanych równań:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\eta_1(\theta)\,d\theta, \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\eta_1(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\\ B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\eta_2(\theta)\sin n\theta\,d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

Przy uwzględnieniu równań (7.53) funkcja odwzorowująca (7.49) przybierze postać:

$$\zeta = \mu_0 + i\,A_0 + z + \frac{a^2}{z} + \sum \frac{(-B_n + i\,A_n)a^n}{z^n}. \tag{7.56}$$

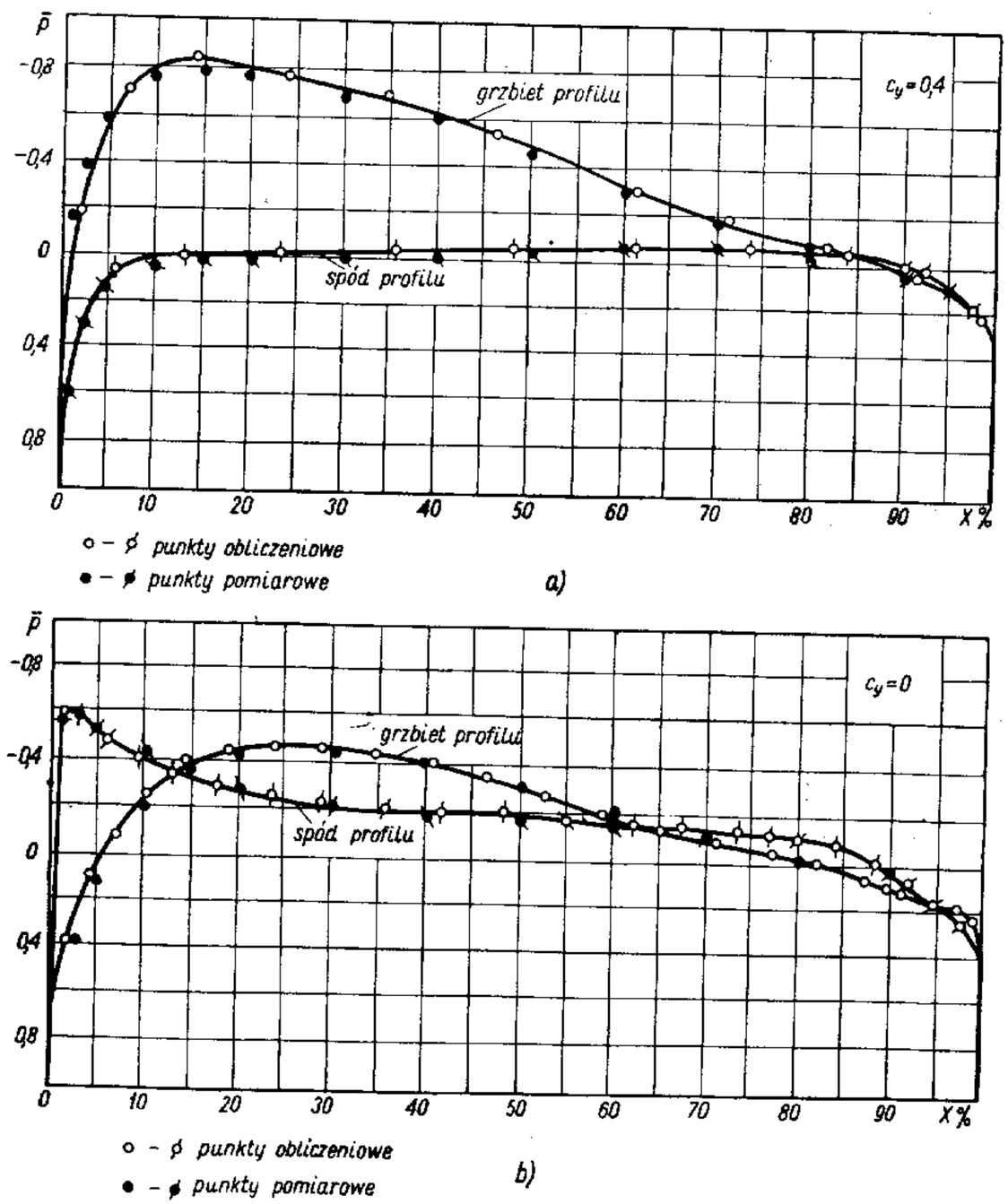
Równania profilu będą się przy tym wyrażały wzorami (7.54).

Dalsze postępowanie według metody Nużina jest następujące. Nieznane współczynniki A_n i B_n określa się metodą kolejnych przybliżeń. Jako przybliżenie zerowe przyjmuje się układ liczb

$$\xi^{(0)} = \frac{1}{2}\cos\theta, \qquad \eta^{(0)} = 0, \qquad A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = \mu_0^{(0)} = 0, \qquad a = \frac{1}{4}, \tag{b}$$

co odpowiada odwzorowaniu konforemnemu płaskiej płytki na okrąg.

[1] Dodawanie odbywa się wszędzie dla n od 1 do ∞.



7.20. Porównanie wyników obliczeń uzyskanych metodą S. G. Nużina z wynikami doświadczeń

Następnie, zakładając kolejne wartości θ (od 0 do 2π) oraz określając według (*b*) odpowiednie wartości $\xi^{(0)}$, znajdujemy z wykresu profilu wielkości rzędnych $\eta^{(1)}(\theta)$ oraz $\eta_1^{(1)}(\theta)$ i $\eta_2^{(1)}(\theta)$, poprowadzonych przez obrane odcięte. Wykorzystując równania (7.55), określamy w pierwszym przybliżeniu wartości współczynników $A_0^{(1)}$, $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$.

Znalezione wartości współczynników umożliwiają znalezienie na podstawie dwóch

pierwszych wzorów (7.52) nowych wartości funkcji $\xi_1^{(1)}(\theta)$, $\xi_2^{(1)}(\theta)$, co prowadzi do nadania bardziej dokładnych wartości rzędnym, a zatem również współczynnikom A_0, A_n, B_n itd. Zbieżność tej metody kolejnych przybliżeń została przez Nużina ściśle dowiedziona.

W następnej pracy [24] Nużin rozwija swoją metodę i udowadnia, że drogą specjalnego doboru osi współrzędnych, związanych z okręgiem, można zależność pomiędzy punktami na kole i punktami na profilu bardziej zbliżyć do zależności, określonej wzorem $\xi = \frac{1}{2}\cos\theta$, a tym samym zredukować liczbę kolejnych przybliżeń przy obliczaniu współczynników A_n, B_n.

Metoda Nużina pozwala więc znaleźć drogą kolejnych przybliżeń konforemną zależność między punktami na danym profilu a punktami na kole, czyli znaleźć funkcję $\zeta = f(z)$ (w postaci szeregu). Jeśli funkcja ta jest znaleziona, dalsze obliczenie rozkładu prędkości na profilu nie przedstawia trudności. Istotnie, prędkość zespolona

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}},$$

a ponieważ $\frac{dw}{dz}$ jest dla okręgu znane, $\frac{d\zeta}{dz}$ zaś zostało znalezione — można łatwo otrzymać wzór na prędkość v na profilu [25]. Obliczenia przeprowadzone na podstawie metody Nużina dobrze zgadzają się z doświadczeniem. Na rysunku 7.20 podano dla przykładu wykresy rozkładu ciśnień (ciśnienia zredukowanego $\bar{p}$) wzdłuż cięciwy profilu, otrzymane za pomocą metody Nużina oraz drogą pomiarów. Widzimy, że zgodność pomiędzy obliczeniem a doświadczeniem jest całkowicie zadowalająca.

Rozdział VIII

TEORIA OPORU W OPŁYWACH Z OBSZAREM MARTWYM I OPORU WIROWEGO

Jak już stwierdziliśmy, w płynie doskonałym można otrzymać wypadkową siłę aerodynamiczną (siłę nośną), jeżeli wprowadzona zostanie cyrkulacja prędkości. Jednak schemat opływu cyrkulacyjnego, przy którym ciało jest opływane bez tworzenia się nieciągłości (stanowi jedną z linii prądu), nie daje oporu, tak charakterystycznego dla rzeczywistego opływu jakiegokolwiek ciała.

Niemniej jednak, pozostając w granicach płynu doskonałego, można zbudować taki model opływu ciała, w którym będzie występował opór. Źródło oporu będą tu stanowiły nieciągłości powstające w płynie za opływanym ciałem lub też powstający za nim układ wirów.

Omówimy podstawy teorii opływu ciała z powstawaniem nieciągłości — tak zwany model opływu z obszarem martwym.

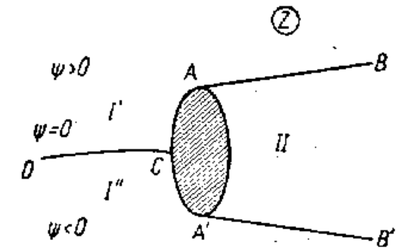
§ 1. Model opływu z obszarem martwym. Opływ płytki przy istnieniu obszaru martwego

Rozważany model opływu ciała płynem doskonałym oparty jest na założeniu, że strumień opływa całą powierzchnię umieszczonego w płynie ciała w sposób nieciągły i odrywa się w pewnym jego punkcie tworząc za ciałem tak zwany martwy obszar (cień aerodynamiczny) (rys. 8.1), gdzie prędkość płynu względem ciała $v = 0$, a zatem ciśnienie jest stałe i równe ciśnieniu w nieskończoności p_∞. Obszar wypełniony płynem dzieli się przy tym na dwie części — obszar przepływu I oraz obszar martwy II. Zakłada się, że ograniczenie oderwanego od ciała strumienia stanowi rozciągająca się do nieskończoności struga AB lub $A'B'$, która stanowi zarazem granicę obszaru martwego.

Ponieważ w obszarze martwym II ciśnienie jest stałe — powinno ono być stałe również na granicy strugi, skąd wynika, że wartość modułu prędkości na granicy strugi jest także stała i równa v_∞.

Widzimy, że przy takim modelu opływu pole prędkości (ale nie pole ciśnień) doznaje nieciągłości (składowej stycznej — przyp. tłum.) (na granicy AB $v = v_\infty$, zaś w obszarze II $v = 0$). Dowiedziemy dalej, że istnienie takiej nieciągłości powoduje powstawanie oporu.

Rzeczywiście — w pewnym obszarze na powierzchni czołowej ciała ciśnienie jest większe od ciśnienia p_∞ (na przykład w okolicy punktu spiętrzenia), a w tylnej części ciała równa się ono p_∞, co powoduje powstawanie oporu. Ten schemat potwierdzają również wyniki obliczeń teoretycznych.



8.1. Schemat opływu poślizgowego

Omówimy obecnie pewne właściwości opływu z obszarem martwym, zakładając, że przepływ jest płaski.

W obszarze przepływu I pole prędkości jest jednostajne i potencjalne, można więc je w ogólności określić za pomocą potencjału zespolonego

$$w = \varphi + i\psi.$$

Ponieważ potencjał zespolony określany jest z dokładnością do stałej addytywnej $a = a_1 + i a_2$ — można uważać, iż stałe a_1 i a_2 są obrane w ten sposób, że potencjał prędkości φ staje się zerem w punkcie rozgałęzienia C strumienia i że wzdłuż linii $DCAB$ lub $DCA'B'$ jest $\psi = 0$. Wzdłuż linii prądu $\psi = 0$ przepływ nie ma, prócz punktu C, innych punktów krytycznych, przy czym wzdłuż linii DC prędkość v zmienia się od $v = v_\infty$ do $v = 0$, wzdłuż zaś linii CAB lub $CA'B'$ zmienia się od $v = 0$ do $v = v_\infty$. Dlatego na linii prądu $\psi = 0$, gdzie spełnione jest równanie

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

(s — długość łuku linii $\psi = 0$), potencjał φ powinien zmieniać się monotonicznie, przy czym wzdłuż DC od $-\infty$ do 0, wzdłuż CAB lub $CA'B'$[1] zaś od 0 do $+\infty$.

Rozważmy zmianę funkcji prądu ψ wzdłuż linii $\varphi = \text{const}$. Oczywiście

$$d\psi = -v_y\,dx + v_x\,dy = v(-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy) =$$

$$= v\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)dx + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)dy\right] = v\,d\sigma,$$

gdzie

θ — kąt, jaki tworzy wektor prędkości z osią x,

$d\sigma$ — element linii ekwipotencjalnej, przy czym jako dodatni kierunek $d\sigma$ przyjmujemy kierunek dodatniego obrotu (przeciwny do kierunku obrotu wskazówki zegara) wektora v o kąt $\frac{\pi}{2}$.

[1] Wynika to stąd, że posuwając się wzdłuż linii prądu $\psi = 0$ w kierunku dodatnim (od lewej strony ku prawej), mamy $v > 0$ i $ds > 0$, a zatem $d\varphi = v\,ds > 0$, tzn. że potencjał φ monotonicznie wzrasta.

Wynika stąd, że przy przesuwaniu się na przykład wzdłuż linii $\varphi = 0$ (przechodzącej przez punkt C) w kierunku dodatnim (z dołu do góry) funkcja prądu powinna zmieniać się jednostajnie od $-\infty$ do $+\infty$, przechodząc przez 0 w punkcie C, czyli że linia prądu $\psi = 0$ dzieli obszar przepływu I na dwa obszary: I', wewnątrz którego $\psi > 0$, oraz I'', gdzie $\psi < 0$.

Powyższy charakter zmiany funkcji φ i ψ prowadzi do następującego ważnego wniosku. Przy opływie z obszarem martwym potencjał zespolony w jest zupełnie określoną funkcją współrzędnych punktów płaszczyzny przepływu, czyli każdemu punktowi płaszczyzny przepływu $z = x + iy$ odpowiada określony punkt płaszczyzny $w = \varphi + i\psi$. Wykażemy dalej, że jeżeli płaszczyznę potencjału zespolonego przeciąć wzdłuż osi rzeczywistej, wówczas związek pomiędzy obszarami z i w będzie wzajemnie jednoznaczny.

W celu ustalenia analitycznego związku między płaszczyznami z i w, wprowadzimy zmienną ζ:

$$\zeta = \xi + i\eta = v_\infty \frac{dz}{dw}. \tag{8.1}$$

Ponieważ

$$\frac{dw}{dz} = v e^{-i\theta},$$

więc

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v} e^{+i\theta}$$

i

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{v_\infty}{v} e^{i\theta}, \tag{8.2}$$

gdzie

θ — kąt, jaki tworzy wektor prędkości z osią x,
v — prędkość.

W szeregu przypadków łatwo jest ustalić związek między płaszczyznami ζ i w, tzn. znaleźć funkcję

$$\zeta = f(w). \tag{8.3}$$

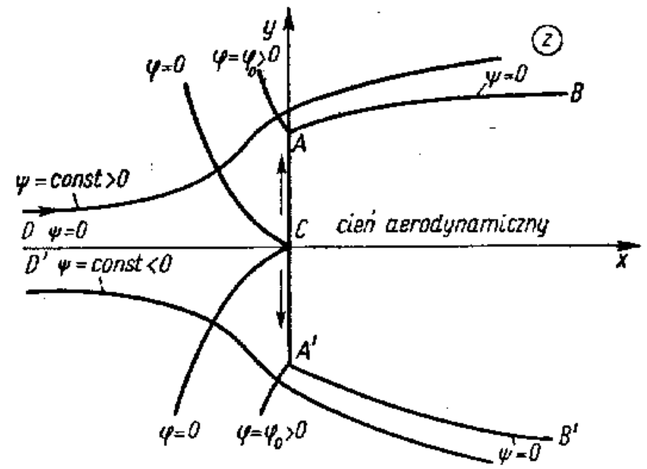
Jeżeli związek ten został znaleziony, tzn. określona została funkcja $\zeta = f(w)$, wówczas sprawa określenia opływu w płaszczyźnie z sprowadza się do kwadratury. Istotnie jeżeli

$$v_\infty \frac{dz}{dw} = f(w)$$

jest funkcją znaną, wtedy

$$z = \frac{1}{v_\infty} \int f(w)\, dw.$$

W ten sposób zagadnienie podstawowe polega na ustaleniu zależności (8.3), tzn. na zbudowaniu obszarów w i ζ oraz na określeniu pomiędzy nimi związku. Taką metodę rozwiązania zagadnień przepływów z obszarem martwym zaproponował Kirchhoff w r. 1896. W przypadku szczególnym, gdy kontur opływanego ciała w płaszczyźnie z składa się z prostoliniowych odcinków, granicami



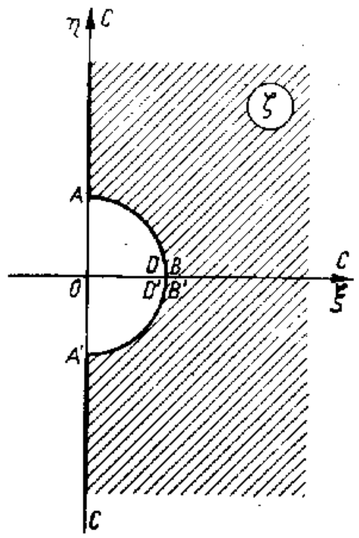
8.2. Schemat opływu płaskiej płytki z obszarem martwym

płynu będą sztywne prostoliniowe ścianki, swobodne granice płynu oraz powierzchnie nieciągłości, wzdłuż których wielkość prędkości jest stała. Na tej podstawie łatwo jest zbudować obszar ζ. Jego granicami będą oczywiście łuki okręgów, odpowiadające swobodnym granicom i powierzchniom nieciągłości, gdzie $v = \text{const}$, oraz odcinki prostoliniowe odpowiadające sztywnym (prostoliniowym) ściankom, gdzie $\theta = \text{const}$ (patrz wzór 8.2).

Aby dać najprostszy przykład zastosowania powyższej metody, rozważmy zagadnienie opływu płaskim nieograniczonym strumieniem płynu nieściśliwego płytki AA' (rys. 8.2), umieszczonej normalnie do kierunku przepływu w nieskończoności. W przypadku opływu z obszarem martwym linia prądu $\psi = 0$ rozgałęzia się w punkcie krytycznym C, biegnie wzdłuż ścianek płytki CA i CA' i w punktach A i A' odrywa się od płytki, tworząc tak zwane powierzchnie nieciągłości AB i $A'B'$. Rozkład pozostałych linij prądu podany jest na rys. 8.2. Linie ekwipotencjalne będą oczywiście normalne do linij prądu. Linię ekwipotencjalną przechodzącą przez punkt C będziemy traktowali jako linię zerową, tzn. będziemy uważali, że na niej $\varphi = 0$, na liniach $\varphi = \text{const}$ zaś przechodzących przez punkty A i A' założymy $\varphi = \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 > 0$.

Po ustaleniu charakteru przepływu w obszarze z przejdziemy do zbadania obszaru $\zeta = \xi + i\eta = \frac{v_\infty}{v} e^{i\theta}$. Ponieważ w płaszczyźnie z prędkość nigdzie nie staje się nieskończenie wielka, zatem $\zeta \neq 0$. Znaczy to, że obszar ζ nie zawiera początku układu współrzędnych.

W punktach $D(D')$, B i B' (rys. 8.2) $v = v_\infty$, $\theta = 0$, a zatem $|\zeta| = 1$, $\arg\zeta = 0$ (rys. 8.3). W punkcie A (granica strumienia) $v = v_\infty$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Zatem dla punktu tego $|\zeta| = 1$, $\arg\zeta = \frac{\pi}{2}$. W punkcie A' prędkość $v = v_\infty$, kąt $\theta = -\frac{\pi}{2}$, wobec czego $|\zeta| = 1$, $\arg\zeta = -\frac{\pi}{2}$.



8.3. Obszar ζ oraz jego ograniczenie

W punkcie C prędkość $v = 0$, w związku z czym odwzorowanie punktu C w obszarze ζ oddala się w nieskończoność. W ten sposób obszarowi przepływu w płaszczyźnie ζ będzie odpowiadała połowa prawej płaszczyzny z wyłączeniem połowy koła (rys. 8.3)[1].

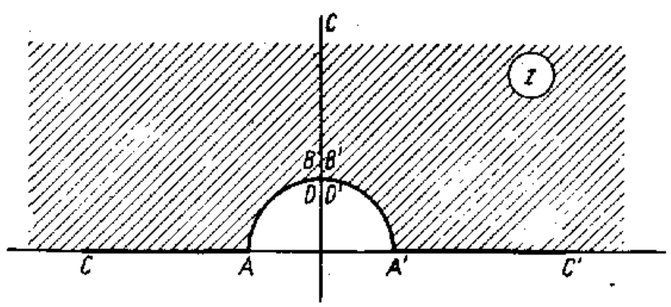
Nie ustalając na razie obszaru w, odwzorujemy otrzymany obszar ζ na górną półpłaszczyznę pomocniczej zmiennej t. Wykorzystamy w tym celu dwa kolejne odwzorowania:

$$Z = i\zeta \quad \text{i} \quad t = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right).$$

Pierwsze z nich obróci obszar ζ o 90° w kierunku dodatnim (rys. 8.4), drugie zaś odwzoruje obszar Z na górną półpłaszczyznę t (rys. 8.5). Zależność punktów pomiędzy płaszczyznami Z i t łatwo jest ustalić, ponieważ na jednostkowym okręgu ABA' jest $Z = e^{i\theta}$, zatem $t = \cos\theta$. Punkty płaszczyzn Z i t leżące w nieskończoności przechodzą w siebie nawzajem. Zatem odwzorowanie

$$t = \frac{1}{2}\left(i\zeta + \frac{1}{i\zeta}\right) = \frac{i}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \tag{8.4}$$

odwzorowuje obszar ζ na górną półpłaszczyznę t przy zależności punktów, podanej na rys. 8.3 i 8.5.



8.4. Obszar Z oraz jego ograniczenie

Zbudujmy obszar w. W punkcie C obszaru z (rys. 8.2) $\varphi = \psi = 0$, zatem punkt C w płaszczyźnie w będzie leżał w początku układu współrzędnych (rys. 8.6). Punkty A i A', dla których $\varphi = \varphi_0 > 0$ i $\psi = 0$, przejdą w punkty o tych samych odciętych $\varphi = \varphi_0 > 0$. Zakładając, że płaszczyzna w jest przecięta wzdłuż dodatniej części osi φ, wnioskujemy, że punkt A leży na przecięciu nad osią, punkt A' zaś — pod osią, ponieważ posuwając się

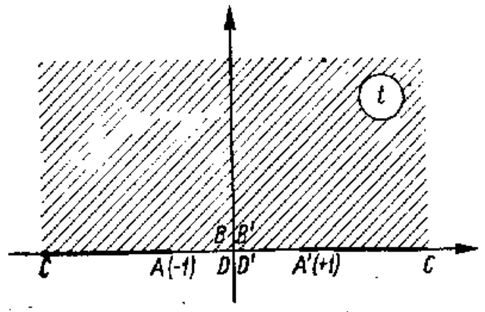
[1] Na rysunku 8.3 i dalej obszar przepływu odpowiada części zakreskowanej; liniami grubymi zaznaczone są granice sztywne, liniami cienkimi — powierzchnie swobodne.

wzdłuż płytki od punktu A' poprzez punkt C do punktu A, obszar przepływu leży po lewej stronie. Punkty $B(B')$ przesuną się oczywiście do nieskończoności na dodatniej części osi φ. Obszar w będzie zatem stanowił płaszczyznę przeciętą wzdłuż dodatniej części osi φ oraz, jak już zaznaczyliśmy, zależność pomiędzy obszarami z i w będzie wzajemnie jednoznaczna.

Odwzorujemy obszar w na półpłaszczyznę. W tym celu wykorzystamy odwzorowanie

$$\tau = \sqrt{w},$$

które odwzoruje oczywiście przecięcie w obszarze w w linię prostą. Ponieważ punkt A leży w górnej części przecięcia — argument jego równy jest zeru, wobec czego przejdzie on w płaszczyźnie τ w punkt $+\sqrt{\varphi_0}$. Argument punktu A' równy jest 2π, dlatego też będzie mu w płaszczyźnie τ odpowiadał punkt $-\sqrt{\varphi_0}$. Funkcja $\tau = \sqrt{w}$ odwzorowuje zatem obszar w na górną półpłaszczyznę τ (rys. 8.7).

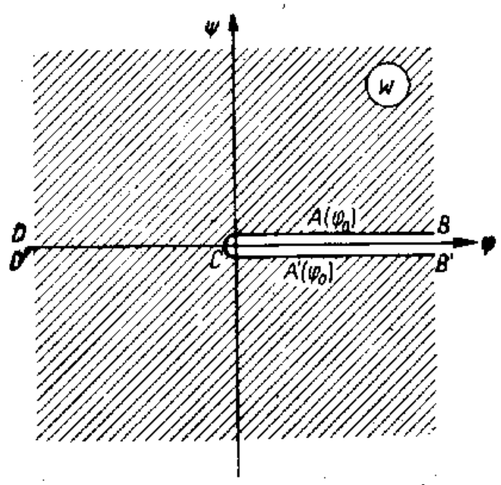


8.5. Obszar t oraz jego ograniczenie

Dla ustalenia związku między zmiennymi t i τ trzeba odwzorować półpłaszczyznę t na półpłaszczyznę τ w ten sposób, aby odpowiednie punkty przechodziły jeden w drugi. Łatwo jest przekonać się, że odwzorowanie

$$\tau = -\frac{\sqrt{\varphi_0}}{t} \tag{8.5}$$

jest żądanym odwzorowaniem. Istotnie, przy $t = +1$ mamy $\tau = +\sqrt{\varphi_0}$, czyli punkty A' przechodzą w siebie nawzajem tak samo jak i punkty A. Nieskończenie odległemu punktowi płaszczyzny t odpowiada w płaszczyźnie τ punkt zerowy i odwrotnie — punktowi zerowemu w płaszczyźnie t odpowiada w płaszczyźnie τ punkt nieskończenie odległy.



8.6. Obszar w oraz jego ograniczenie

Odwzorowanie umożliwiające przejście z obszaru w do górnej półpłaszczyzny t ma zatem postać

$$w = \frac{\varphi_0}{t^2}. \tag{8.6}$$

Rugując ze wzorów (8.4) i (8.6) zmienną pomocniczą t, otrzymamy poszukiwany związek między w i ζ

$$-\frac{w}{4}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 = \varphi_0. \tag{8.7}$$

Należy jeszcze określić wartość potencjału prędkości φ_0 w punktach A i A', wyrażając go przez szerokość płytki h.

Wzdłuż CA

$$\zeta = i\frac{v_\infty}{v}, \quad w = \varphi, \quad z = iy.$$

Zatem wzdłuż CA

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v_\infty}\zeta = \frac{i}{v}$$

i

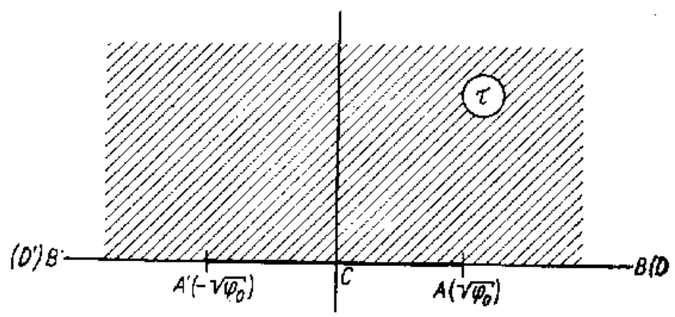
$$\frac{dz}{dw} = \frac{i\,dy}{d\varphi},$$

skąd otrzymamy

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{v}.$$

Równanie (8.6) dowodzi, że wzdłuż CA, gdzie $w = \varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\varphi_0}{t^3}.$$



8.7. Obszar τ oraz jego ograniczenie

Prędkość v na płytce wyrazimy przez zmienną t:

$$t = \frac{i}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_\infty}{v} + \frac{v}{v_\infty}\right),$$

skąd

$$v^2 + 2\,t\,v\,v_\infty + v_\infty^2 = 0$$

i

$$v = -t\,v_\infty \pm \sqrt{t^2 v_\infty^2 - v_\infty^2}.$$

Jeżeli chcemy, żeby przy $t = -\infty$ prędkość v stawała się zerem, musimy przed pierwiastkiem przyjmować znak minus. Zatem

$$v = -v_\infty(t + \sqrt{t^2 - 1}),$$

skąd

$$\frac{1}{v} = -\frac{1}{v_\infty(t + \sqrt{t^2 - 1})}.$$

Szukaną zależność między φ_0 i h określa następująca całka:

$$h = 2\int_{-\infty}^{-1}\frac{dy}{dt}\,dt = 2\int_{-\infty}^{-1}\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt = -2\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{v}\frac{2\varphi_0}{t^3}\,dt =$$

$$= \frac{4\varphi_0}{v_\infty}\int_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t^2(t + \sqrt{t^2 - 1})} = \frac{4\varphi_0}{v_\infty}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

W ten sposób

$$h = \frac{\varphi_0}{v_\infty}(4 + \pi)$$

lub

$$\varphi_0 = \frac{h\,v_\infty}{4 + \pi}. \tag{8.8}$$

Należy jeszcze określić siłę wypadkową oddziaływania przepływu na płytkę (opór płytki). Korzystając ze znanego równania

$$p - p_0 = \frac{\varrho}{2}(v_\infty^2 - v^2),$$

gdzie $p_0 = p_\infty$ jest to ciśnienie w martwym obszarze II, znajdziemy

$$X = 2\int_0^{+\frac{h}{2}}(p - p_0)\,dy = 2\int_{-\infty}^{-1}(p - p_0)\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

lub

$$X = 2\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2}\varrho(v_\infty^2 - v^2)\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt = -\int_{-\infty}^{-1}\varrho(v_\infty^2 - v^2)\frac{1}{v}\frac{2\varphi_0}{t^3}\,dt.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{v} = \frac{-1}{v_\infty(t + \sqrt{t^2 - 1})},$$

więc

$$\frac{v_\infty^2}{v} - v = 2\,v_\infty\sqrt{t^2 - 1},$$

a zatem

$$X = -4\,\varrho\,\varphi_0\,v_\infty\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^3}\,dt = \pi\,\varrho\,\varphi_0\,v_\infty.$$

Podstawiając wartość φ_0 znajdziemy szukaną siłę wypadkową

$$X = \frac{\pi}{\pi + 4}\varrho\,h\,v_\infty^2. \tag{8.9}$$

Jeżeli płytka umieszczona jest w przepływie pod kątem α, wówczas wzór na wypadkową siłę pochodzącą od ciśnień przybierze postać

$$X = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \varrho h v_\infty^2. \tag{8.10}$$

Z równania (8.9) wynika, że współczynnik oporu płaskiej płytki

$$c_x = \frac{2\pi}{4+\pi} = 0{,}88.$$

Wielkość tego teoretycznego współczynnika oporu płaskiej płytki jest mniej więcej dwukrotnie mniejsza od jego wartości doświadczalnej. Tłumaczy się to tym, że omówiony model opływu nie uwzględnia zjawiska zawirowań za płytką (w obszarze martwym) zmniejszającego ciśnienia na tylnej części płytki, a zatem zwiększającego jej opór.

N. J. Żukowski podał w r. 1890 [26] inną metodę rozwiązywania tych zagadnień; odegrała ona dużą rolę zarówno w rozwoju metod rozwiązywania powyższych zagadnień, jak i w rozwiązywaniu problemów dynamiki gazów.

Zasada metody Żukowskiego polega na wprowadzeniu funkcji

$$\zeta = \ln\left(\frac{\bar{v}_\infty}{\frac{dw}{dz}}\right) = \ln\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{v}}, \tag{8.11}$$

po czym ustala się odwzorowanie konforemne przeciętej płaszczyzny potencjału zespolonego w na część płaszczyzny ζ odpowiadającej obszarowi przepływu w płaszczyźnie t, tzn. ustalony zostaje analityczny związek $\zeta = f(w)$. Jeżeli związek ten jest znaleziony, wówczas, tak samo jak w metodzie Kirchhoffa, zadanie sprowadza się do kwadratury.

W przypadku gdy opływany w płaszczyźnie $z = x + iy$ kontur składa się z odcinków prostej, obszarowi przepływu I w płaszczyźnie z będzie w płaszczyźnie $\zeta = \xi + i\eta$ odpowiadał obszar ograniczony prostymi $\xi = \text{const}$ oraz $\eta = \text{const}$. Istotnie ponieważ

$$\bar{v} = v e^{-i\theta} \quad \text{i} \quad \bar{v}_\infty = v_\infty e^{-i\theta_\infty},$$

więc

$$\zeta = \xi + i\eta = \ln\frac{v_\infty e^{-i\theta_\infty}}{v e^{-i\theta}} = \ln\frac{v_\infty}{v} + i(\theta - \theta_\infty). \tag{8.12}$$

Widzimy stąd, że sztywnej granicy prostoliniowej opływanego ciała $\theta = \text{const}$ odpowiada w płaszczyźnie ζ prosta $\xi = \ln\frac{v_\infty}{v}$, $\eta = \text{const}$, granicy zaś swobodnej strugi, gdzie $v = v_\infty$ — prosta $\xi = \ln 1 = 0$, $\eta = \theta - \theta_\infty$.

Odwzorowanie konforemne rozciętego obszaru w na płaszczyznę ζ może być zrealizowane za pomocą znanego wzoru Christoffela — Schwartza [14].

Nie omawiając metody Żukowskiego szczegółowo, zaznaczymy tylko, że umożliwia ona rozwiązanie wielu zagadnień: uderzenie strumienia o klin, zderzenie się dwóch strumieni, uderzenie płynu o płytkę załamaną, wypływ płynu ze zbiornika o skończonej szerokości oraz wiele innych.

Badaniom opływu ciał krzywoliniowych poświęcone są prace uczonych zagranicznych: Levi-Civita oraz Willego [2]. Wobec tego że metody te są wyjątkowo skomplikowane, znalazły one małe zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych.

Dużym krokiem naprzód była praca akademika A.I. Niekrasowa *O prierywnom tieczienji żidkosti w dwóch izmierienjach wokrug priepiatswja w formie dugi kruga* (1922 r.) [27]. W pracy tej odał Niekrasow nową metodę rozwiązywania zagadnień związanych z opływem konturów krzywoliniowych, drogą zastosowania teorii nieliniowych równań całkowych. Koncepcje Niekrasowa zostały później rozwinięte przez radzieckich aerodynamików zarówno dla płynu nieściśliwego, jak i ściśliwego [28].

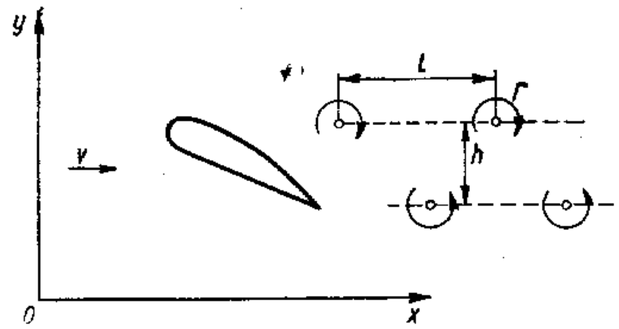
W roku 1910 S.A. Czapłygin napisał pracę pt. *O silach, diejstwujuszczich na cylinder, obtiekajemyj potokom s obrazowanjem powierchnostiej razrywa*, wydaną w r. 1935 w pracach ЦАГИ. Badając opływ walca z oderwaniem strug autor dowodzi, że kształt strug w dość dużej odległości od ciała upodabnia się do paraboli i że opór ciała jest proporcjonalny do parametru tej paraboli. Jeżeli parametr paraboli równa się zeru, tzn. jeżeli struga ma w nieskończoności szerokość skończoną, wówczas opór jest również równy zeru. W pracy tej rozwiązał Czapłygin także zagadnienie opływu walca kołowego z oderwaniem strug. Dopiero w 22 lata później (w r. 1932) zagadnienie to rozwiązał aerodynamik niemiecki Schmieden.

§ 2. Pojęcie oporu wirowego

Omówiony powyżej schemat opływu staje się w wielu przypadkach modelem zbliżonym do obrazu przepływu rzeczywistego. Doświadczenie wykazuje jednak, że strumień odrywający się od ciała nie jest na ogół jednolity, lecz na skutek niestateczności zwija się w wiry. Oderwanie strug oraz tworzenie się wirów ma przy tym charakter okresowy — wiry odrywają się na przemian z górnej lub dolnej części powierzchni opływanego ciała (rys. 8.8), tworząc za nim ścieżkę wirową o szachowym układzie wirów. Tworzenie się wirów powoduje powstanie oporu zwanego oporem wirowym. Doświadczenie prowadzi nas zatem do innego schematu opływu uwzględniającego tworzenie się wirów za ciałem.

Doświadczenia wykazały, że ciała nieopływowe, na przykład walce kołowe i eliptyczne, płytka ustawiona prostopadle do kierunku przepływu itp., powodują powstawanie intensywnych ścieżek wirowych, a zatem powodują znaczne powiększenie oporu. Ciała opływowe, do których należą profile lotnicze, mają na małych kątach natarcia nieznaczny opór wirowy, który można zaniedbać;

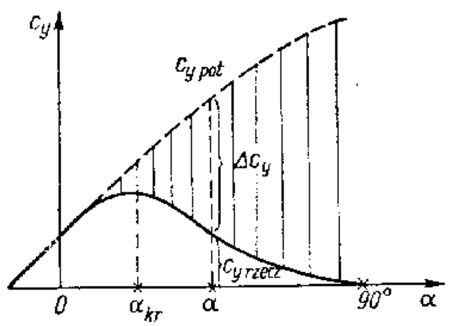
w tym bowiem przypadku opór powstaje głównie na skutek siły tarcia. Przy większych kątach natarcia, gdy regularny opływ profilu płata przechodzi w opływ z oderwaniem strug oraz intensywnym zawirowaniem, należy obliczać opór z uwzględnieniem istnienia oporu wirowego.



8.8. Schemat opływu wirowego

Kąt natarcia, który odpowiada oderwaniu strug, nazywa się *krytycznym* kątem natarcia i oznaczany jest α_{kr}. Dla większości stosowanych w praktyce profilów lotniczych $\alpha_{kr} = 10 \div 15°$.

Analityczne badanie opływu profilu komplikuje się przy kątach natarcia przekraczających α_{kr}, tzn. w obszarze nadkrytycznym. W obszarze tym nie można już traktować opływu jako potencjalnego, ponieważ przestrzeń za profilem wypełnia się intensywnymi wirami[1].



8.9. Porównanie zależności współczynnika siły nośnej od kąta natarcia dla przepływu potencjalnego ($c_{y_{pot}}$) oraz niepotencjalnego przepływu rzeczywistego ($c_{y_{rzecz}}$)

Istnieją duże rozbieżności między współczynnikami siły nośnej profilu otrzymanymi z pomiarów a współczynnikami teoretycznymi otrzymanymi przy założeniu, że w obszarze nadkrytycznym opływ profilu jest potencjalny (rys. 8.9).

Widzimy, że przy przejściu do obszaru nadkrytycznego należy posługiwać się wirowym modelem opływu nie tylko w celu otrzymania oporu, lecz również w celu określenia siły nośnej. Wirowy model opływu będzie zatem w danym przypadku w ogóle lepiej odzwierciedlał rzeczywistość.

Omówimy teraz pokrótce podstawowe założenia teorii profilu płata w obszarze nadkrytycznym, opracowane przez prof. G.W. Kamienkowa [29]. Poczynimy następujące założenia:

1. Płyn jest wszędzie doskonały, z wyjątkiem bardzo cienkiej warstwy przyściennej, przylegającej do powierzchni profilu.

[1] Ściśle mówiąc, przy małych kątach natarcia (obszar podkrytyczny) przepływ płynu za profilem również nie jest potencjalny, lecz tego się na ogół nie uwzględnia.

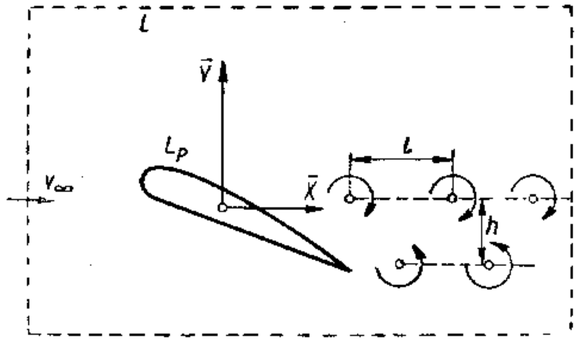
2. Z powierzchni profilu odrywają się okresowo wiry, których środki układają się w porządku szachowym w dwa równoległe szeregi.

3. Przepływ ma wszędzie potencjał prędkości, z wyjątkiem środków wirów spływających.

4. Cyrkulacja prędkości na profilu jest różna od zera.

Odpowiadający tym założeniom opływ profilu podany jest na rys. 8.10.

Zaniedbując wymiary warstwy przyściennej, rozwiązujemy zagadnienie za pomocą metod stosowanych w przypadku płynu doskonałego.



8.10. Do obliczenia siły nośnej Y i oporu X przy wirowym schemacie opływu

Wskutek okresowego spływu wirów z powierzchni profilu przepływ nie jest ustalony, tzn. wszystkie podstawowe elementy przepływu wyraźnie zależą od czasu t.

Biorąc to pod uwagę, wprowadzimy następujące średnie wartości siły nośnej Y, oporu X oraz cyrkulacji Γ:

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} Y(t)\, dt,$$

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(t)\, dt,$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \Gamma(t)\, dt,$$

gdzie T — okres czasu, w ciągu którego tworzy się jedna para wirów.

Stosując do omawianego przepływu zasadę ilości ruchu, w celu określenia siły nośnej i oporu można napisać następujące dwa równania:

$$X - \int_L p\, dy = \frac{d}{dt} \iint \varrho\, v_x\, ds,$$

$$Y + \int_L p\, dx = \frac{d}{dt} \iint \varrho\, v_y\, ds.$$

Całki po lewych stronach tych równań należy brać po konturze L, którego punkty są dostatecznie oddalone od profilu; po stronach prawych — wzdłuż płaszczyzny ograniczonej konturem L i profilem L_p (rys. 8.10).

Za pomocą tych dwóch podstawowych równań można wzory określające siłę nośną i opór otrzymać w postaci następującej [29]:

$$\overline{Y} = \varrho v_\infty |\overline{\Gamma}|,$$

$$\overline{X} = \varrho |\Delta\Gamma| \frac{h}{l}(2u - v_\infty) - \varrho \frac{(\Delta\Gamma)^2}{2\pi l}, \tag{8.13}$$

gdzie:

u — prędkość przesuwania się ścieżki wirowej (równanie 6.34);

$\Delta\Gamma$ — cyrkulacja prędkości wzdłuż konturu otaczającego jeden wir.

Jak widać, obliczenie siły oddziaływania przepływu na profil płata w obszarze nadkrytycznym sprowadza się do określenia wartości $\overline{\Gamma}$, $\Delta\Gamma$, h i l.

G. W. Kamienkow zaproponował, aby jako podstawę do określenia parametrów ścieżki wirowej $\Delta\Gamma$, h i l przyjąć zasadę najmniejszego oporu w przypadku ustalonego ruchu ciała sztywnego w płynie. Po ustaleniu związku tej zasady z zagadnieniem stateczności ścieżki wirowej, oraz wychodząc z zasady ilości ruchu, otrzymał Kamienkow równanie na określenie parametrów ścieżki dającej najmniejszy opór. Okazało się, że charakteryzujące tę ścieżkę wielkości $\Delta\Gamma$, h oraz l są związane dwoma równaniami: jedno z nich określa stosunek $\frac{h}{l}$:

$$T h \pi \sigma = \frac{1}{2\pi\sigma}, \tag{8.14}$$

gdzie[1] $\sigma = \frac{h}{l} = 0{,}245$, drugie zaś — wielkość cyrkulacji

$$\Delta\Gamma = c v l, \tag{8.15}$$

gdzie

$$c = \frac{4\pi\sigma}{1 + 4\pi^2\sigma^2} = 0{,}91.$$

Wzory na siłę nośną $\overline{Y}$ i opór $\overline{X}_k$ (będziemy go teraz oznaczali przez $\overline{X}_k$ w odróżnieniu od innych składowych) przybierają ostatecznie postać

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y} &= \varrho v_\infty |\overline{\Gamma}|, \\ \overline{X}_k &= \sigma \varrho v_\infty |\Delta\Gamma|. \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

Pierwszy z tych wzorów stanowi uogólnienie twierdzenia Żukowskiego dla zakresu nadkrytycznego kątów.

Wzór drugi dowodzi, że opór $\overline{X}_k$ *jest proporcjonalny do gęstości prędkości w nieskończoności oraz cyrkulacji prędkości wzdłuż konturu otaczającego pojedynczy wir ścieżki.* Współczynnik proporcjonalności σ staje się przy tym uniwersalny i równy 0,245. W ten sposób

[1] Należy zauważyć, że zgodnie z teorią Kármána przyjmowano stosunek $\frac{h}{l}$ równy 0,2806. W roku 1933 [33] Kamienkow wykazał błędność teorii stateczności ścieżki wirowej Kármána i zaproponował nowe kryterium stateczności wirów, wychodząc z zasady ekstremalnego oporu.

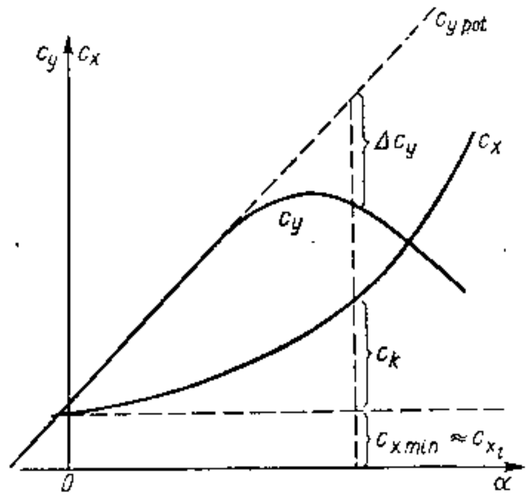
określenie wielkości $\overline{Y}$ i $\overline{X}_k$ sprowadza się jedynie do obliczenia cyrkulacji $\overline{\Gamma}$ oraz wielkości $\Delta\Gamma$.

Wprowadźmy następujące założenia, nazwane przez Kamienkowa „hipotezą cyrkulacji utraconej": *cyrkulacja prędkości utracona przez płat w okresie czasu T, równa jest cyrkulacji pojedynczego wiru w ścieżce*[1], tzn.

$$\Delta\Gamma = \Gamma - \overline{\Gamma},$$

gdzie

Γ — cyrkulacja prędkości, obliczona przy założeniu potencjalnego opływu bez oderwania.



8.11. Do obliczenia opływu profilu płata w zakresie nadkrytycznym metodą Kamienkowa

Wykorzystując równanie (8.16) oraz wprowadzając współczynnik c_y na siłę nośną $\overline{Y}$ i współczynnik c_k na opór $\overline{X}_k$, otrzymamy:

$$c_k = \sigma \Delta c_y. \tag{8.17}$$

Stosunek ten potwierdza doświadczenie.

Na podstawie powyższego można napisać dwa następujące równania (rys. 8.11):

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_y &= c_{yp} - c_y, \\ c_k &= c_x - c_{xt}, \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

zakłada się przy tym, że współczynnik tarcia jest stały w całym zakresie kątów natarcia i równy minimalnej wartości c_{x_t}, czyli $c_{xt} = c_{x_{min}}$.

Równania (8.17) i (8.18) można wykorzystać do zbudowania wykresu krzywej $c_y(\alpha)$, jeżeli znana jest zmiana c_x z kątem natarcia. Na podstawie tych równań otrzymamy

$$c_y = c_{yp} - \frac{c_k}{\sigma}, \tag{8.19}$$

gdzie współczynnik c_k należy przyjmować jako różnicę $c_x - c_{x_{min}}$.

[1] Podana zależność nie wynika z równań ruchu, lecz potwierdzona jest przez sprawdzenie na drodze doświadczalnej.

Krzywa, oparta na równaniu (8.19), jest zgodna z doświadczalnymi krzywymi zależności współczynnika siły nośnej od kąta natarcia w zakresie nadkrytycznym, a tym samym potwierdza prawidłowość powyższych założeń, stanowiących podstawę tej teorii.

Na zakończenie dowiedziemy, że na podstawie równań podanych przez prof. Kamienkowa można łatwo obliczyć opór płaskiej płytki.

Jak już zostało powiedziane, podane przez Kirchhoffa rozwiązanie tego zagadnienia daje opór prawie dwukrotnie mniejszy niż otrzymany na drodze doświadczalnej. Zgodnie z tym rozwiązaniem współczynnik oporu równa się:

$$c_x = \frac{2\pi}{4+\pi} = 0{,}88.$$

Przejdźmy do wyrażenia $\Delta\Gamma$

$$\Delta\Gamma = \Gamma - \overline{\Gamma} = 4\pi R v_\infty \sin(\alpha+\gamma) - \overline{\Gamma}.$$

Dla płytki ($\gamma = 0$, $R = l$) mającej względem przepływu niezakłóconego kąt natarcia $\alpha = 90°$, średnia wartość siły nośnej równa jest zeru, a zatem $\overline{\Gamma} = 0$ oraz $\Delta\Gamma = 4\pi l v_\infty$.

Podstawiając wyrażenie $\Delta\Gamma$ do wzoru na X_k, znajdziemy liczbową wartość oporu:

$$X_k = 4\pi v_\infty^2 l \varrho \sigma.$$

Współczynnik oporu płytki określa wzór

$$c_k = 2\pi\sigma = 1{,}54,$$

co jest wynikiem bardziej zbliżonym do wyniku doświadczalnego.

Rozdział IX

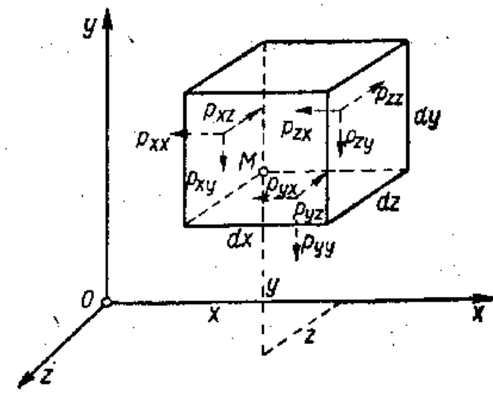
PODSTAWY TEORII RUCHU PŁYNU LEPKIEGO

§ 1. Równania różniczkowe ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego

Badania ruchu płynu lepkiego wykazują, że wpływ lepkości przejawia si nie tylko przez powstawanie naprężeń stycznych, ale również przez zmian wielkości naprężeń normalnych, w porównaniu z ich wartościami w przypadk płynu doskonałego. Komplikuje to znacznie postać równań różniczkowych ruch płynu lepkiego w stosunku do równań Eulera i stwarza oczywiście wielk trudności przy ich całkowaniu.

Tak samo jak w metodzie Eulera rozważymy elementarną objętość płyn w kształcie małego prostopadłościanu (rys. 9.1).

Równania różniczkowe ruchu płynu lepkiego można otrzymać w sposó podobny jak równania Eulera. Różnica będzie polegała jedynie na tym, że w przy padku płynu lepkiego będą na ścianki równoległościanu działały nie tylk naprężenia normalne p_x, p_y, p_z, lecz również naprężenia styczne, ponieważ w płynie lepkim siły powierzchniowe nie są ortogonalne do rozważanych powierzchni. Kierunek siły powierzchniowej, działającej na każdą ściankę prostopadłościanu, nie pokrywa się z kierunkiem normalnej do ścianki, a zatem każda z tych sił będzie miała trzy rzuty na osie współrzędnych (rys. 9.1).



9.1. Do wyprowadzenia różniczkowyc równań ruchu płynu lepkiego

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Każdy rzut wektora naprężenia $\bar{p}$ działającego na rozważaną ściankę zaopatrzymy w dwa indeksy: pierwszy będzie charakteryzował oś współrzędnych prostopadłą do rozważanej ściank drugi zaś będzie wskazywał, na jaką oś rzutuje się siła powierzchniowa (naprę żenie) działająca na tę ściankę. W oznaczeniach tych, składowe naprężeni powierzchniowego działającego na ściankę lewą prostopadłą do osi x napiszem w następującej postaci: p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; składowe działające na ściankę prostopadł

do osi y: p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} i wreszcie składowe działające na ściankę prostopadłą do osi z — w postaci p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}. Oczywiście p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} będą normalnymi naprężeniami sił powierzchniowych działających na ścianki rozważanego elementarnego równoległościanu, p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy} zaś — naprężeniami stycznymi. Dla łatwiejszego ich rozróżnienia będziemy naprężenia styczne oznaczali literą τ, tzn. przyjmujemy:

$$p_{xy} = \tau_{xy}, \quad p_{xz} = \tau_{xz},$$

$$p_{yx} = \tau_{yx}, \quad p_{yz} = \tau_{yz},$$

$$p_{zx} = \tau_{zx}, \quad p_{zy} = \tau_{zy}.$$

Rozkładając naprężenia na ściankach równoległościanu na normalne i styczne, umówimy się, że wszystkie składowe normalne będziemy kierowali wzdłuż normalnych zewnętrznych do ścianek. Na trzech ściankach przechodzących przez punkt $M(x, y, z)$ skierujemy składowe styczne przeciwnie do dodatnich kierunków osi współrzędnych, na trzech zaś pozostałych ściankach — zgodnie z dodatnim kierunkiem osi współrzędnych. Tego rodzaju rozkład na składowe normalne i styczne jest umowny, jest jednak najwygodniejszy dla wyprowadzenia różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego.

Dla rzutów sił masowych, odniesionych do jednostki masy, zachowamy ich poprzednie oznaczenia X, Y, Z.

Przystępując do ułożenia równania ruchu w kierunku osi x, zauważymy, że do równania tego wejdą jedynie naprężenia z drugim znaczkiem x.

Zaczniemy od składowych normalnych. Na lewą ściankę będzie oczywiście działała siła normalna $(-p_{xx}\,dy\,dz)$, a na ściankę prawą siła $\left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right) dy\,dz$.

Wypadkowa tych sił będzie równa $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\,dy\,dz$.

Spośród naprężeń stycznych trzeba w tym przypadku uwzględnić jedynie τ_{yx} i τ_{zx}.

Rzut na oś x siły stycznej działającej na tylną ściankę będzie równy $(-\tau_{zx}\,dx\,dy)$, na ściankę zaś przednią $\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right) dx\,dy$, a zatem wypadkowa tych sił wyrazi się w następującej postaci:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Dla rzutów sił stycznych działających na dolną i górną ściankę będziemy oczywiście mieli wypadkową

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dx\,dy\,dz.$$

Wykorzystując zasadę d'Alemberta, otrzymamy

$$\varrho X\,dx\,dy\,dz - \varrho\frac{dv_x}{dt}dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dx\,dy\,dz +$$

$$+ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dx\,dy\,dz + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\,dy\,dz = 0$$

lub

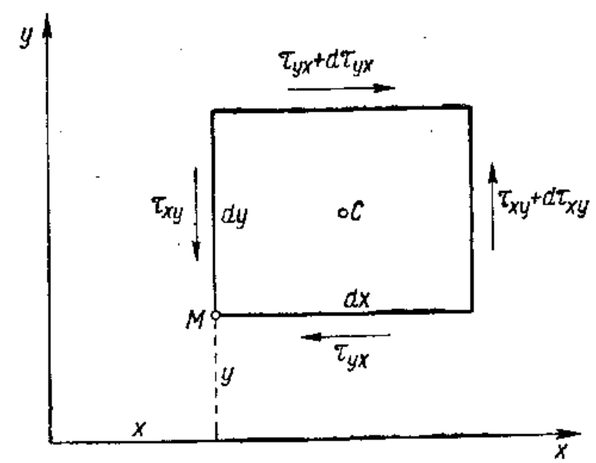
$$\varrho\frac{dv_x}{dt} = \varrho X + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right).$$

W sposób analogiczny można otrzymać jeszcze dwa równania:

$$\varrho\frac{dv_y}{dt} = \varrho Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right), \tag{9.1}$$

$$\varrho\frac{dv_z}{dt} = \varrho Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).$$

Przejdziemy teraz do równania momentów. Obliczymy moment sił działających na równoległościan względem osi równoległej do osi z i przechodzącej



9.2. Do wyprowadzenia różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego

przez środek C równoległościanu (rys. 9.2), ograniczając się do wielkości małych trzeciego rzędu. Ponieważ siły masowe stanowią wielkości małe trzeciego rzędu (są one proporcjonalne do objętości elementu $dx\,dy\,dz$), zatem moment tych sił (w wyniku pomnożenia przez nieskończenie małe ramię) będzie wielkością małą czwartego rzędu, wobec czego można go zaniedbać. Uwzględniając kierunek momentów, otrzymamy

$$-\tau_{yx}\,dx\,dz\frac{dy}{2}-(\tau_{yx}+d\tau_{yx})\,dx\,dz\frac{dy}{2}+$$

$$+\tau_{xy}\,dy\,dz\frac{dx}{2}+(\tau_{xy}+d\tau_{xy})\,dy\,dz\frac{dx}{2}=0$$

lub zaniedbując wielkości małe czwartego rzędu

$$(-\tau_{yx}-\tau_{yx}+\tau_{xy}+\tau_{xy})\frac{dx\,dy\,dz}{2}=0,$$

skąd

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}. \tag{9.2}$$

W sposób analogiczny możemy się przekonać, że

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},$$

a zatem

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}. \tag{9.3}$$

Równania (9.3) wykazują, że spośród dziewięciu naprężeń, wchodzących w równania (9.1), tylko część jest niezależna.

Można stąd wywnioskować, że stan naprężeń w płynie określają w dowolnym jego punkcie trzy naprężenia normalne i trzy naprężenia styczne na trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach przechodzących przez dany punkt.

Omówimy obecnie naprężenia normalne. Jeżeli płyn jest doskonały, wówczas

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p.$$

W przypadku płynu lepkiego powstają naprężenia styczne, naprężenia zaś normalne zmieniają (w stosunku do płynu doskonałego) swą wielkość. Zatem dla płynu lepkiego.

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=-p+\pi_{xx},\\ p_{yy}&=-p+\pi_{yy},\\ p_{zz}&=-p+\pi_{zz},\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

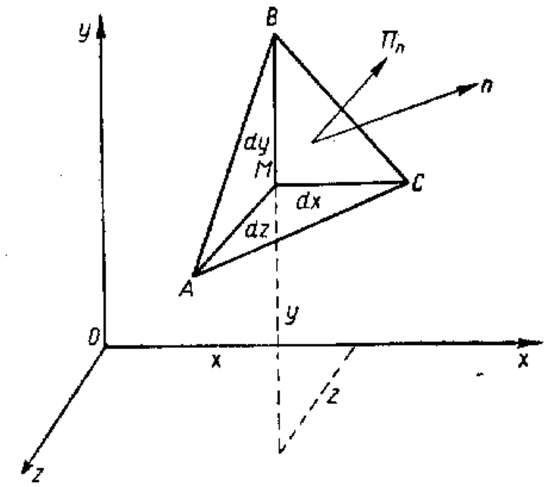
gdzie π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} są to dodatkowe naprężenia normalne, powstałe pod wpływem lepkości.

Przyjmiemy hipotezę, że naprężenia styczne oraz zmiany naprężeń normalnych nie zależą od wielkości ciśnienia p. Wartości naprężeń π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} nie będą wówczas zależały od ciśnienia p.

Rozważmy pewną objętość płynu zawartą w elementarnym czworościanie $ABCM$, zbudowanym z elementarnych odcinków dx, dy, dz (rys. 9.3).

Oznaczymy kierunek normalnej do płaszczyzny ABC przez n, a przez Π_n — siłę powierzchniową działającą na płaszczyznę ABC. Wskutek lepkości płynu wektor Π_n będzie oczywiście pochylony względem tej płaszczyzny i będzie miał składowe zarówno normalne, jak i styczne.

Ułożymy równanie równowagi wszystkich działających na czworościan sił. Nie będziemy przy tym uwzględniali sił bezwładności oraz sił masowych, jako proporcjonalnych do objętości czworościanu, ograniczając się do powierz-



9.3. Do wyprowadzenia różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego

chniowych sił lepkości, proporcjonalnych do elementarnych powierzchni. Dla składowych równoległych do osi x otrzymamy

$$-p_{xx}dS_x-\tau_{yx}dS_y-\tau_{zx}dS_z+\Pi_{nx}dS=0,$$

gdzie dS_x, dS_y, dS_z, dS są to odpowiednie powierzchnie ścianek czworościanu.

Na podstawie równań

$$dS_x=dS\cos(n,x),$$

$$dS_y=dS\cos(n,y),$$

$$dS_z=dS\cos(n,z)$$

znajdujemy

$$\Pi_{nx}=p_{xx}\cos(n,x)+\tau_{yx}\cos(n,y)+\tau_{zx}\cos(n,z).$$

Analogiczne równania można otrzymać dla naprężeń Π_{ny} i Π_{nz}, a zatem będziemy mieli

$$\Pi_{nx}=p_{xx}\cos(n,x)+\tau_{yx}\cos(n,y)+\tau_{zx}\cos(n,z),$$

$$\Pi_{ny}=\tau_{xy}\cos(n,x)+p_{yy}\cos(n,y)+\tau_{zy}\cos(n,z),$$

$$\Pi_{nz}=\tau_{xz}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+p_{zz}\cos(n,z).$$

Rzutując wektor Π_n na normalną do powierzchni ABC, otrzymamy wartość naprężenia normalnego Π_{nn}, równą

$$\Pi_{nn}=\Pi_{nx}\cos(n,x)+\Pi_{ny}\cos(n,y)+\Pi_{nz}\cos(n,z).$$

Podstawiając do tego równania wartości Π_{nx}, Π_{ny}, Π_{nz} oraz wykorzystując wzory (9.4), a także zależność

$$\cos^2(n,x) + \cos^2(n,y) + \cos^2(n,z) = 1,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}\Pi_{nn} = &-p + \pi_{xx}\cos^2(n,x) + \pi_{yy}\cos^2(n,y) + \pi_{zz}\cos^2(n,z) + \\ &+ 2\tau_{xy}\cos(n,x)\cos(n,y) + 2\tau_{yz}\cos(n,y)\cos(n,z) + \\ &+ 2\tau_{xz}\cos(n,x)\cos(n,z) = -p + \pi_{nn}.\end{aligned} \tag{9.5}$$

Załóżmy, że naprężenie normalne π_{nn} uwarunkowane wyłącznie istnieniem lepkości jest dla wszystkich kierunków n, wychodzących z danego punktu, proporcjonalne do prędkości odkształcenia liniowego $\frac{\partial v_n}{\partial n}$, przy czym współczynnik proporcjonalności jest dla wszystkich kierunków jednakowy i równy 2μ:

$$\pi_{nn} = 2\mu\frac{\partial v_n}{\partial n}. \tag{9.6}$$

Prędkość odkształcenia liniowego $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ w dowolnym kierunku n może być wyrażona przez prędkości liniowych odkształceń wzdłuż osi współrzędnych oraz prędkości odkształceń ścinających w odpowiednich płaszczyznach współrzędnych w sposób następujący. Ponieważ

$$v_n = v_x\cos(n,x) + v_y\cos(n,y) + v_z\cos(n,z),$$

więc dla obranego kierunku n

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial v_x}{\partial n}\cos(n,x) + \frac{\partial v_y}{\partial n}\cos(n,y) + \frac{\partial v_z}{\partial n}\cos(n,z). \tag{a}$$

Z kolei

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial n} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial v_x}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial v_x}{\partial z}\cos(n,z),\\ \frac{\partial v_y}{\partial n} &= \frac{\partial v_y}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial v_y}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial v_y}{\partial z}\cos(n,z),\\ \frac{\partial v_z}{\partial n} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial v_z}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\cos(n,z).\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Podstawiając wyrażenia (b) do równania (a), grupując odpowiednio człony oraz wprowadzając znane już z poprzedniego tekstu oznaczenia, otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_n}{\partial n} = &\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2(n,x) + \frac{\partial v_y}{\partial y}\cos^2(n,y) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\cos^2(n,z) + \\ &+ 2\varepsilon_x\cos(n,y)\cos(n,z) + 2\varepsilon_y\cos(n,x)\cos(n,z) + 2\varepsilon_z\cos(n,x)\cos(n,y).\end{aligned}$$

Ponieważ wielkości π_{nn} i $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ związane są równaniem (9.6) dla dowolnych kierunków n, wynika stąd, że we wzorze ostatnim i we wzorze (9.5) przy odpowiednich cosinusach współczynniki powinny być równe.

Mając powyższe na uwadze, otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= 2\mu\varepsilon_z = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\\ \tau_{yz} &= 2\mu\varepsilon_x = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\\ \tau_{zx} &= 2\mu\varepsilon_y = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

oraz uwzględniając równania (9.4)

$$\left.\begin{aligned}p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x},\\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y},\\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Równania (9.7) i (9.8) wykazują, że wprowadzona powyżej hipoteza (9.6) określa w istocie rzeczy proporcjonalność składowych naprężenia do składowych prędkości odkształcenia. W szczególności można z równań (9.7) otrzymać znane prawo Newtona dla płaskiego przepływu płynu. Zakładając mianowicie, że płyn porusza się wzdłuż osi x, otrzymamy z pierwszego równania (9.7)

$$\tau = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Na mocy równania ciągłości dla płynu nieściśliwego $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ znajdujemy z równań (9.8)

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}, \tag{9.9}$$

tzn. że ciśnienie hydrodynamiczne można w płynie lepkim rozważać jako przyjętą z odwrotnym znakiem średnią arytmetyczną naprężeń normalnych działających na trzy dowolne, wzajemnie prostopadłe płaszczyzny przechodzące przez dany punkt.

Podstawmy teraz wyrażenia (9.7) i (9.8) do równań (9.1). Otrzymamy

$$\varrho \frac{dv_x}{dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\, \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}$$

lub

$$\varrho \frac{dv_x}{dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

Ponieważ ostatni składnik jest równy zeru (na mocy równania ciągłości), więc

$$\varrho \frac{dv_x}{dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

W ten sposób różniczkowe równania ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego sprowadzają się do postaci

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{dv_x}{dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \varrho \frac{dv_y}{dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \varrho \frac{dv_z}{dt} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Wprowadzając kinematyczny współczynnik lepkości $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ i rozwijając wyrażenie na całkowite przyspieszenie (substancjalne — przyp. tłum.), można różniczkowe równania ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego napisać w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ &\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= Z - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Równania (9.10) i (9.11) są *podstawowymi równaniami różniczkowymi ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego* i są zwykle nazywane równaniami Naviera—Stokesa. Dołączając do tych równań równanie ciągłości

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.12}$$

otrzymamy podstawowy układ równań różniczkowych rządzących zagadnieniami ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego.

Jeżeli przy badaniu ruchu płynu lepkiego będziemy jednocześnie uwzględniali także ściśliwość, wówczas równania ruchu[1] będą bardziej skomplikowane [2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

gdzie

$$\theta = \operatorname{div} \overline{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{9.14}$$

Jednoczesne uwzględnianie ściśliwości i lepkości powoduje wyjątkowe trudności przy całkowaniu różniczkowych równań ruchu. W związku z tym w większości zagadnień dynamiki gazów rozważa się gaz jako płyn nielepki (doskonały), lecz ściśliwy.

Dla przepływu płaskiego układ różniczkowych równań ruchu lepkiego cieczy nieściśliwej ma następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

[1] Układ (9.13) można przepisać w postaci wektorowej:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \overline{V} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \overline{V}),$$

gdzie $\overline{F}$ (X, Y, Z) — wektor sił masowych (przyp. tłum.).

§ 2. Pojęcie podobieństwa przepływów

W aerodynamice odgrywa szczególnie ważną rolę teoria podobieństwa przepływów; daje ona możność przeniesienia otrzymanych przy badaniu modelu danych doświadczalnych na obiekt naturalny.

Rozważymy dwa opływy: ciała wielkości naturalnej oraz jego modelu. Odpowiadającymi sobie punktami tych przepływów nazwiemy takie punkty, które są rozmieszczone geometrycznie podobnie względem rozpatrywanych ciał, co do których zakładamy również, że są geometrycznie podobne.

Przepływami podobnymi nazwiemy takie przepływy, w których wszystkie charakteryzujące je jednorodne wielkości fizyczne znajdują się w jednakowym stosunku w dowolnych, odpowiadających sobie punktach. Stosunki te określane są za pomocą tak zwanych skal. Skale podstawowe stanowią skale długości, siły i czasu.

Jeżeli obierzemy dowolny liniowy wymiar modelu l_1 i podzielimy go przez odpowiedni wymiar l ciała rzeczywistego — otrzymamy wielkość skali liniowej, oznaczaną przez $k_l = \frac{l_1}{l}$. Dzieląc siłę R_1 działającą na cały model lub jego część, przez siłę R działającą na ciało rzeczywiste lub jego część, otrzymamy skalę siły $k_R = \frac{R_1}{R}$. Zakładając, że jakiekolwiek zjawisko zachodzi na modelu w ciągu odcinka czasu t_1, na ciele zaś modelowanym w ciągu czasu t, znajdziemy skalę czasu $k_t = \frac{t_1}{t}$. W przypadku podobieństwa skale te będą w odpowiadających sobie punktach stałe. Wszystkie pozostałe skale innych wielkości fizycznych są *dla podobnych zjawisk* również stałe i mogą być wyrażone za pomocą tych podstawowych skal. Rozważmy niektóre z nich. Niech S_1 i S będą odpowiadającymi sobie powierzchniami dwóch przepływów, l_1 i l zaś — liniowymi wymiarami tych powierzchni.

Oczywiście

$$k_S = \frac{S_1}{S} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 = k_l^2.$$

Przyjmując, że podobnymi odcinkami czasu t_1 i t są takie odcinki, w ciągu których elementy płynu przebywają odległości między dwoma podobnymi punktami, możemy dla skali prędkości napisać:

$$k_v = \frac{v_1}{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t_1 \to 0}} \frac{\frac{\Delta l_1}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta l}{\Delta t}} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t_1 \to 0}} \frac{\Delta l_1}{\Delta l} \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{k_l}{k_t}.$$

Analogicznie można wykazać, że skalą ciężaru właściwego wyraża równanie:

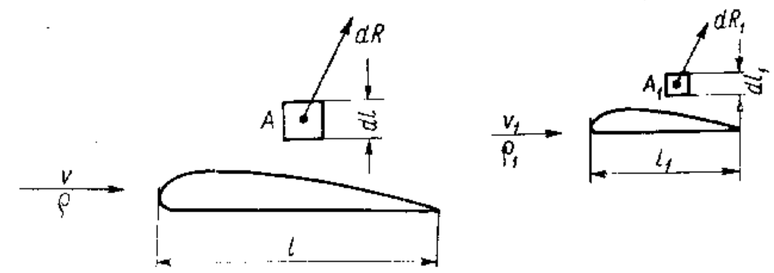
$$k_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta V_1 \to 0}} \frac{\frac{\Delta R_1}{\Delta V_1}}{\frac{\Delta R}{\Delta V}} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta V_1 \to 0}} \frac{\Delta R_1}{\Delta R} \frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{k_R}{k_l^3};$$

skalę gęstości zaś — równanie

$$k_\varrho = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{k_R k_t^2}{k_l^4}$$

i tak dalej.

Zatem — jak widzimy — przy zachowaniu podobieństwa w przestrzeniach, w których zachodzą porównywane zjawiska, skale wielkości jednorodnych powinny pozostawać stałe — i wobec tego można sformułować określenie po-



9.4. Podobne przepływy

dobieństwa w innej nieco postaci: *dwa przepływy nazywamy podobnymi, jeżeli w dowolnych odpowiadających sobie punktach oraz w dowolnych odpowiadających sobie chwilach skale wielkości jednorodnych charakteryzujących te przepływy są stałe.* Takie *podobieństwo* nazywamy *całkowitym.* Jeśli jednak warunek ten spełniają nie wszystkie skale, a jedynie pewna ich liczba, wówczas mówimy o *podobieństwie częściowym* (lub niezupełnym—przyp. red.).

Rozważmy dwa podobne przepływy: jeden — wokół ciała wielkości naturalnej, na przykład profilu płata, drugi zaś — wokół jego modelu (rys. 9.4).

Wyodrębnijmy w przepływającym płynie dwa odpowiadające sobie nieskończenie małe elementy. Niech na te elementy działają siły dR i dR_1 wywołujące przyspieszenia w i w_1. Można napisać następujące równania:

$$dR = w\, dm$$

oraz

$$dR_1 = w_1\, dm_1,$$

gdzie dm i dm_1 — masy tych elementów. Masy dm i dm_1 wyrazimy za pomocą gęstości oraz wymiarów liniowych:

$$dm = \varrho\, dl^3,$$

$$dm_1 = \varrho_1\, dl_1^3$$

Po podstawieniu do wyrażeń na siły otrzymamy

$$dR = \varrho\, w\, dl^3$$

oraz

$$dR_1 = \varrho_1 w_1\, dl_1^3.$$

Po podzieleniu stronami

$$k_R = \frac{dR_1}{dR} = \frac{\varrho_1 w_1\, dl_1^3}{\varrho\, w\, dl^3} = k_\varrho k_w k_l^3.$$

Ponieważ skala przyspieszenia

$$k_w = \frac{k_l}{k_t^2},$$

więc można wyrażenie na k_R przepisać w postaci

$$k_R = k_\varrho k_l^4 k_t^{-2}.$$

Uwzględniając, że

$$k_l^2 k_t^{-2} = k_v^2,$$

otrzymamy

$$k_R = k_\varrho k_l^2 k_v^2. \tag{9.16}$$

Znalezione równanie jest oczywiście słuszne nie tylko dla nieskończenie małych objętości płynu, ale również dla dowolnych objętości skończonych, ponieważ każdą objętość skończoną można rozbić na nieskończenie wielką liczbę objętości nieskończenie małych. Wyciągamy w ten sposób wniosek, że stałość stosunku $k_R = \frac{dR_1}{dR}$, ustalona dla nieskończenie małych objętości, powinna w przepływach podobnych odnosić się również do objętości skończonych, na które działają siły skończone. Przez R i R_1 będziemy nadal oznaczali całkowite siły aerodynamiczne, działające na — odpowiednio — rozważane ciało i jego model; stosunek sił, w myśl warunku podobieństwa przepływów, powinien pozostawać stały w dowolnych warunkach opływu[1]:

$$k_R = \frac{R_1}{R} = \text{const}.$$

Przechodząc od skal do wielkości podstawowych, możemy napisać

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\varrho_1 l_1^2 v_1^2}{\varrho l^2 v^2} = \text{const}$$

[1] Przejście od sił przyłożonych do płynu, do sił przyłożonych do opływanego ciała, zachodzi na podstawie trzeciego prawa Newtona o równości akcji i reakcji.

lub

$$\frac{R_1}{\varrho_1 l_1^2 v_1^2} = \frac{R}{\varrho\, l^2 v^2} = \text{const}.$$

Przepiszemy te równania w następujący sposób:

$$\frac{R_1}{\varrho_1 l_1^2 v_1^2}\frac{2S_1}{2S_1} = \frac{R}{\varrho\, l^2 v^2}\frac{2S}{2S}.$$

Wówczas biorąc pod uwagę, że na mocy podobieństwa

$$\frac{S_1}{2 l_1^2} = \frac{S}{2 l^2},$$

otrzymamy

$$\frac{R_1}{S_1 \frac{\varrho_1 v_1^2}{2}} = \frac{R}{S \frac{\varrho v^2}{2}} = c_R$$

lub

$$R = c_R\, \varrho \frac{v^2}{2} S, \tag{9.17}$$

gdzie c_R — bezwymiarowy współczynnik całkowitej siły aerodynamicznej, S — powierzchnia charakterystyczna, $\frac{\varrho v^2}{2} = q$ zaś — ciśnienie prędkości.

Obok siły aerodynamicznej wprowadza się w aerodynamice również jej moment M. Skalę momentu można wyrazić wzorem

$$k_M = k_R k_l = k_\varrho\, k_l^3\, k_v^2$$

lub, po przejściu do wielkości podstawowych,

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\varrho_1 l_1^3 v_1^2}{\varrho\, l^3 v^2},$$

skąd

$$\frac{M_1}{\varrho_1 l_1^3 v_1^2} = \frac{M}{\varrho\, l^3 v^2} = \text{const}.$$

Otrzymane wyrażenie umożliwia wprowadzenie następującego prostego równania na moment sił aerodynamicznych:

$$M = m\, S\, L \frac{\varrho v^2}{2} = m\, S\, L q, \tag{9.18}$$

gdzie m — bezwymiarowy współczynnik momentu aerodynamicznego. Nie

wchodząc w szczegóły teorii współczynników aerodynamicznych, gdyż jest ona wyczerpująco omówiona w podręcznikach aerodynamiki doświadczalnej [9], przejdziemy do zbadania podstawowych kryteriów określających w aerodynamice podobieństwo przepływów.

§ 3. Podstawowe kryteria podobieństwa

W paragrafie niniejszym ustalimy podstawowe kryteria dynamicznego podobieństwa przepływów, rozważając — jak poprzednio — dwa opływy: ciała w skali naturalnej oraz jego modelu.

Podstawowe kryteria podobieństwa mogą być ustalone za pomocą rozmaitych metod. Poniżej otrzymamy kryteria podobieństwa na podstawie struktury podstawowych równań różniczkowych ruchu płynu lepkiego.

Przejdziemy do różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&\quad+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x},\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\\
&\quad+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&\quad+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z},\\
&\text{gdzie}\\
&\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

Struktura tych równań nie powinna oczywiście zależeć od zmiany skal wchodzących do nich wielkości. Zmiana skal może doprowadzić jedynie do powstania współczynników liczbowych przy wszystkich wielkościach, których skale są w porównywanych przepływach różne.

Załóżmy istotnie, że przy przejściu od opływu modelu do opływu ciała w skali naturalnej (samolotu, rakiety itp.) wszystkie wymiary liniowe zmieniają się L razy, czas — T razy, prędkość — V razy, przyspieszenie sił masowych — G razy, ciśnienia — P razy, gęstość — R razy, dynamiczny współczynnik lepkości — M razy oraz kinematyczny współczynnik lepkości — N razy.

Zakładając, że równania (a) są napisane dla ciała w skali naturalnej, możemy je przepisać w postaci

$$\frac{V}{T}\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{V^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=GX-\frac{P}{RL}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{NV}{L^2}\left[\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]\qquad\text{(b)}$$

itd., gdzie wszystkie wielkości wymiarowe odnoszą się do modelu. Dla modelu można jednak po prostu napisać równania ruchu w postaci (a); wówczas porównanie tych równań z równaniami (b) prowadzi do następujących warunków podobieństwa:

$$\frac{V}{T}=\frac{V^2}{L}=G=\frac{P}{RL}=\frac{NV}{L^2}.\qquad(9.19)$$

Analiza otrzymanego równania umożliwia uzyskanie podstawowych kryteriów podobieństwa.

Określimy przede wszystkim kryterium podobieństwa odnoszące się do wpływu lepkości w poruszającym się płynie. Porównajmy w tym celu drugi wyraz równania (9.19), występujący jako współczynnik przy wyrażeniu proporcjonalnym do siły bezwładności w równaniach ruchu, z wyrazem ostatnim, uwzględniającym wpływ lepkości:

$$\frac{V^2}{L}=\frac{NV}{L^2}.$$

Otrzymamy stąd następujące kryterium podobieństwa

$$\frac{VL}{N}=1$$

lub biorąc pod uwagę, że

$$V=\frac{v_1}{v_2},\quad L=\frac{l_1}{l_2},\quad N=\frac{\nu_1}{\nu_2},$$

gdzie indeksy 1 i 2 odnoszą się do porównawczych przepływów podobnych, mamy

$$\frac{v_1 l_1}{\nu_1}=\frac{v_2 l_2}{\nu_2}.$$

Wielkość bezwymiarowa

$$\frac{v\,l}{\nu}=R\qquad(9.20)$$

zwana liczbą Reynoldsa stanowi kryterium podobieństwa częściowego uwzględniającego lepkość.

Jeżeli model i modelowane ciało opływa ten sam płyn z jednakowym współczynnikiem lepkości kinematycznej $\nu = \nu_1 = \nu_2$ ($N = 1$), wówczas warunek podobieństwa (9.20) redukuje się do następującej postaci:

$$v_1 l_1 = v_2 l_2, \tag{9.21}$$

Z równania (9.21) wynika, że prędkość płynu opływającego model powinna być większa od prędkości płynu opływającego ciało modelowane tylokrotnie, ilekrotnie wymiary liniowe modelu są mniejsze od wymiarow ciała modelowanego.

Otrzymany powyżej wynik wskazuje zatem, że *w celu zachowania częściowego podobieństwa przepływów uwzględniającego wpływ lepkości konieczne jest nie tylko podobieństwo geometryczne, ale także równość liczb Reynoldsa tych przepływów.*

Liczba Reynoldsa odgrywa w zagadnieniach aerodynamicznych dużą rolę[1]. Od liczby tej zależy w szczególności współczynnik oporu rozmaitych ciał opływanych płynem lepkim.

Otrzymamy obecnie inne kryterium podobieństwa, uwzględniające wpływ siły ciężkości. Porównując drugi oraz trzeci wyraz równania (9.19), znajdziemy

$$\frac{V^2}{L} = G.$$

Ponieważ do równań ruchu wchodzą siły masowe odniesione do jednostki masy, więc dla siły ciężkości będziemy mieli

$$X = 0, \quad Y = -g, \quad Z = 0,$$

skąd wynika, że

$$G = 1.$$

W ten sposób, dla zachowania podobieństwa dwóch przepływów, w odniesieniu tylko do sił bezwładności i sił ciężkości konieczne jest, aby spełnione zostało równanie

$$\frac{V^2}{L} = 1, \tag{9.22}$$

które można przepisać w postaci

$$\frac{v_1^2}{l_1} = \frac{v_2^2}{l_2}. \tag{9.22'}$$

[1] Liczba Reynoldsa stanowi miarę wpływu lepkości na ruch płynu: im mniejsza jest liczba R, tym większy jest ten wpływ.

Jeżeli podzielimy ostatnie równanie przez g, to otrzymamy *bezwymiarowe* kryterium podobieństwa

$$\frac{v^2}{g\,l} = F, \tag{9.23}$$

uwzględniające wpływ sił ciężkości i zwane liczbą Froude'a. Warunek podobieństwa częściowego z uwzględnieniem ciężaru płynu można zatem sformułować w następujący sposób: *dla zachowania podobieństwa (częściowego) dwóch przepływów uwzględniającego siły ciężkości konieczne jest zachowanie nie tylko podobieństwa geometrycznego, lecz także równości liczb F.*

Jak widzimy, przy zachowaniu podobieństwa uwzględniającego wpływ sił ciężkości, powinien być spełniony warunek (9.22') przeczący warunkowi (9.21). Istotnie, zgodnie z warunkiem (9.21), trzeba przy zmniejszeniu liniowych wymiarów modelu L-krotnie tylokrotnie powiększyć prędkość opływu, zgodnie zaś — z warunkiem (9.22') — przy zmniejszeniu wymiarów modelu trzeba zmniejszyć prędkość opływu $\sqrt{L}$ razy. A zatem jednoczesne zachowanie podobieństwa (przy $L \neq 1$) jest w odniesieniu do sił lepkości i sił ciężkości niemożliwe.

W większości zagadnień aerodynamicznych trzeba uwzględniać wpływ sił lepkości, tzn. zachowywać podobieństwo określone liczbą Reynoldsa (przy dużych prędkościach należy uwzględniać również ściśliwość płynu, o czym będzie mowa dalej). Podobieństwo określone liczbą Froude'a trzeba zachowywać w tych przypadkach, gdy rozważany jest na przykład ruch ciała zanurzonego częściowo w płynie o dużym ciężarze właściwym. Z ruchem takim mamy do czynienia przy badaniach w kanale hydrodynamicznym modelów wodnopłatowców, ślizgowców, kutrów itp. Podczas ruchu modelu tworzą się na powierzchni wody fale wywołujące tak zwany opór falowy. W tego rodzaju zagadnieniach nie można zaniedbywać wpływu sił ciężkości na powstawanie fal i należy uwzględniać podobieństwo określone liczbą Froude'a.

W zagadnieniach, w których mamy do czynienia z przepływem nieustalonym, wprowadzane jest szczególne kryterium podobieństwa zwane kryterium podobieństwa okresowości. Porównajmy dwa pierwsze wyrazy równania (9.19), z których pierwszy charakteryzuje przepływ nieustalony, a drugi, jak poprzednio, siły bezwładności:

$$\frac{V}{T} = \frac{V^2}{L}.$$

Stąd

$$\frac{VT}{L} = 1 \tag{9.24}$$

lub

$$\frac{v_1 t_1}{l_1} = \frac{v_2 t_2}{l_2}.$$

Otrzymane kryterium jest stosowane wtedy, gdy rozważane są jakiekolwiek nieustalone, lecz powtarzające się okresowo procesy, na przykład odrywanie się wirów, falowe drgania płynu itp. Liczba bezwymiarowa

$$\frac{vt}{l} = S \tag{9.25}$$

określa częściowo podobieństwo w odniesieniu do okresowości i zwie się liczbą Strouhala.

W ten sposób, *aby zachować częściowe podobieństwo przepływów w odniesieniu do zjawisk okresowych, potrzebne jest nie tylko podobieństwo geometryczne, lecz także równość liczb S.*

Liczba S odgrywa dużą rolę w zagadnieniach aerodynamiki dotyczących przepływów nieustalonych [32].

Przejdziemy teraz do ostatniego kryterium podobieństwa, odgrywającego obecnie, w związku z dużymi prędkościami lotu, olbrzymią rolę, mianowicie do kryterium podobieństwa uwzględniającego ściśliwość płynu.

Porównajmy drugi i czwarty wyraz równania (9.19) uwzględniające odpowiednio wpływ sił bezwładności oraz sił ciśnieniowych. Otrzymamy

$$\frac{V^2}{L} = \frac{P}{RL}$$

lub

$$\frac{P}{RV^2} = 1. \tag{a}$$

W płynie ściśliwym zmiana gęstości zależy od zmiany ciśnienia. Charakter tej zależności związany jest z prędkością dźwięku za pomocą równania

$$a^2 = \frac{dp}{d\varrho},$$

gdzie a — prędkość dźwięku.

Zmieniając w tym równaniu skale (powiększając na przykład prędkość dźwięku A razy, ciśnienie — P razy, gęstość — R razy) otrzymamy

$$A^2 = \frac{P}{R}. \tag{b}$$

Z równań (a) i (b) znajdujemy

$$\frac{P}{R} = V^2 = A^2$$

czyli

$$\frac{V}{A} = 1$$

lub

$$\frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2}. \tag{9.26}$$

Oznaczymy stosunek

$$\frac{v}{a} = M. \tag{9.27}$$

Warunek podobieństwa częściowego, uwzględniającego ściśliwość płynu, może być wówczas sformułowany w sposób następujący: *dla zachowania częściowego podobieństwa dwóch przepływów uwzględniającego ścisliwość potrzebne jest nie tylko podobieństwo geometryczne, ale także równość liczb M (Macha).*

Z powyższego wynika, że współczynnik siły aerodynamicznej określający oddziaływanie przepływu na umieszczone w nim ciało, zależy w ogólnym przypadku od kształtu ciała, jego położenia względem przepływu oraz kryteriów podobieństwa R, F, S i M. Zatem dla danego ciała ustawionego w określony sposób względem przepływu

$$c_R = f(R,\ F,\ S,\ M).$$

W wielu zagadnieniach z zakresu aerodynamiki decydujące znaczenie mają kryteria R i M, czyli z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością

$$c_R = f(R,\ M).$$

§ 4. Laminarny przepływ płynu lepkiego w kołowej rurze walcowej

Otrzymane w tym rozdziale ogólne równania różniczkowe ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego (9.11) całkują się tylko w pewnych przypadkach szczególnych, do których należy m.in. tak zwany laminarny przepływ płynu lepkiego w kołowej rurze walcowej.

Zanim przystąpimy do rozwiązania tego zagadnienia, poczynimy kilka uwag wstępnych o możliwych rodzajach przepływu płynu lepkiego (m.in w kołowej rurze walcowej). Obserwacje wykazały, że mogą istnieć dwa różne typy przepływu płynu lepkiego:

1. przepływ uporządkowany, w którym elementy płynu nie mieszają się między sobą i płyn porusza się w oddzielnych warstwach. Takie *przepływy* nazwano *laminarnymi* (*uwarstwionymi*);

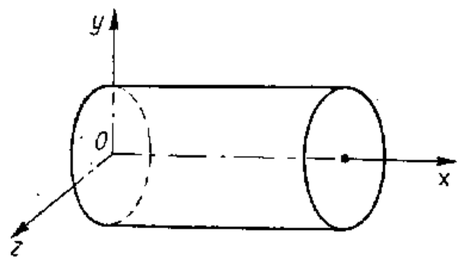
2. przepływ, w którym istnieje chaotyczny ruch elementów płynu, powodujący mieszanie się płynu. Takie przepływy nazwano *przepływami turbulentnymi* (*burzliwymi*).

Doświadczenia wykazały, że taki lub inny charakter przepływu wiąże się z rozmaitymi wartościami liczby Reynoldsa.

Przy małych liczbach Reynoldsa ($R < 2300$) przepływem ustalonym (w rurze kołowej — przyp. red.). jest laminarny przepływ płynu.

Przy dużych liczbach Reynoldsa (zwykle przy $R > 4000$) przepływem ustalonym jest przepływ turbulentny. Wartość liczby R, od której poczynając powstaje przepływ turbulentny, określana jest przez R_{kr} i jest nazywana *krytyczną liczbą Reynoldsa* (zwykle $R_{kr} = 2300 \div 4000$).

Przejdziemy z kolei do rozwiązania zagadnienia laminarnego przepływu ustalonego w rurze kołowej (tzw. przepływ Poiseuille'a — przyp. tłum.), wykorzystując w tym celu podstawowe równania ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego (9.11).



9.5. Do rozwiązania zagadnienia przepływu laminarnego przez rurę kołową

Rozważmy nieskończenie długą walcową rurę kołową, wewnątrz której odbywa się laminarny przepływ płynu. Oś x (rys. 9.5) skierujemy wzdłuż osi rury.

Ponieważ przepływ jest jednowymiarowy i laminarny, więc spośród trzech składowych prędkości tylko jedna $v_x \neq 0$, pozostałe dwie zaś $v_y = v_z = 0$. Równania ruchu (9.11) oraz równanie ciągłości uproszczają się przy tym i przybierają postać (siły ciężkości zaniedbujemy):

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \\ 0 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

Z ostatniego równania układu (9.28) wynika, że prędkość v_x jest funkcją tylko współrzędnych y i z, z drugiego zaś i trzeciego — że ciśnienie p jest funkcją jedynie współrzędnej x. Z tego względu można pierwsze równanie (9.28) przepisać w postaci

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \frac{dp}{dx}. \tag{9.29}$$

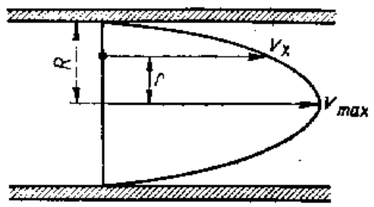
Jeżeli lewa część równania (9.29) jest funkcją tylko y i z, a część prawa — funkcją tylko x, wynika stąd, że równanie (9.19) może być spełnione wtedy tylko, gdy zarówno lewa, jak i prawa jego część są wielkościami stałymi.

Wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \tag{9.30}$$

gdzie $\Delta p = p_1 - p_2$ jest spadkiem ciśnienia na odcinku rury o długości l (znak minus postawiono dlatego, że ciśnienie zmniejsza się wzdłuż rury, tzn. $\frac{dp}{dx} < 0$, zaś $\Delta p > 0$). W ten sposób równanie (9.29) sprowadza się do równania o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \tag{9.31}$$



9.6. Rozkład prędkości w przekroju rury kołowej przy przepływie laminarnym

Równanie (9.31) będziemy rozwiązywali z uwzględnieniem warunku brzegowego opartego na tym, że w punktach, w których płyn lepki przywiera do sztywnej nieruchomej ścianki, prędkość płynu staje się zerem. Matematycznie warunek ten wyraża się w postaci

$$v_x = 0, \quad r = R, \tag{9.32}$$

gdzie

$r = \sqrt{y^2 + z^2}$ — promień bieżący,

R — promień rury.

Łatwo jest sprawdzić, że równanie (9.31) oraz warunek brzegowy (9.32) są spełnione, jeżeli v_x ma następującą postać:

$$v_x = C\left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2}\right) = C\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{9.33}$$

gdzie C — pewna stała, określana z równania (9.31):

$$-2C\frac{2}{R^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l},$$

czyli

$$C = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}. \tag{9.34}$$

Wyrażenie na v_x przybiera zatem postać

$$v_x = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

lub

$$v_x = \frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2 - r^2). \tag{9.35}$$

Otrzymane równanie na poszukiwaną prędkość v_x dowodzi, że rozkład prędkości w przekroju kołowej rury walcowej jest paraboliczny (rys. 9.6).

Z równania (9.35) wynika również, że prędkość maksymalna odpowiada osi rury (dla $r = 0$) i że wynosi ona

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{l}\frac{R^2}{4\mu}. \tag{9.36}$$

Z tego względu można wzór na v_x przepisać w postaci

$$v_x = v_{\max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \tag{9.37}$$

Określimy objętościowy wydatek płynu Q przez poprzeczny przekrój rury. Elementarny wydatek przez powierzchnię pierścienia ograniczonego promieniami r i $r + dr$ będzie równy

$$dQ = v_x 2\pi r\, dr. \tag{9.38}$$

W takim razie całkowity wydatek Q będzie miał następującą postać:

$$Q = \int_0^R v_x 2\pi r\, dr = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi}{2\mu}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr,$$

skąd po scałkowaniu

$$Q = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi}{8\mu}R^4. \tag{9.39}$$

Znając wydatek, można znaleźć średnią prędkość w przekroju. W tym celu podzielimy wielkość wydatku Q przez powierzchnię przekroju rury. Wówczas

$$v_{śr} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p}{l}\frac{R^2}{8\mu}. \tag{9.40}$$

Porównując (9.36) i (9.40), znajdziemy, że

$$v_{śr} = \frac{v_{\max}}{2}, \tag{9.41}$$

tzn., że srednia prędkość przy laminarnym przepływie płynu w kołowej rurze walcowej równa się połowie prędkości maksymalnej.

Określmy opór, jaki stawia rura w przypadku przepływu laminarnego. W tym celu przepiszemy równanie (9.40) w postaci

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{8 l \mu v_{śr}}{R^2} \tag{9.42}$$

lub

$$\Delta p = \frac{32\mu v_{śr}}{d^2} l, \tag{9.43}$$

gdzie $d = 2R$ jest średnicą rury.

Przekształcimy otrzymane wyrażenie, sprowadzając je do znanej z hydrauliki postaci. Pomnożymy w tym celu licznik i mianownik ostatniego wzoru przez $2\varrho v_{śr}$. W wyniku otrzymamy

$$\Delta p = \frac{64\nu}{v_{śr} d}\frac{l}{d}\frac{\varrho v_{śr}^2}{2}. \tag{9.44}$$

Wprowadzając liczbę Reynoldsa

$$R = \frac{v_{śr} d}{\nu}, \tag{9.45}$$

otrzymamy ostatecznie

$$\Delta p = \frac{64}{R}\frac{l}{d}\frac{\varrho v_{śr}^2}{2}. \tag{9.46}$$

Współczynnik bezwymiarowy $\frac{64}{R}$ po prawej stronie ostatniego wzoru nazywany jest *współczynnikiem oporu* przy laminarnym przepływie płynu w rurze kołowej i bywa oznaczany literą λ, tzn.

$$\lambda = \frac{64}{R}. \tag{9.47}$$

Wartości współczynnika oporu otrzymywane z równania (9.47) są zgodne z doświadczeniem dla małych liczb Reynoldsa, odpowiadających laminarnemu przepływowi w rurze kołowej.

§ 5. Pojęcie przepływu turbulentnego (burzliwego)

Przy badaniu ruchu płynów w rurach ustalono, że przy wartościach liczb $R > R_{kr} = 2300$ przepływ laminarny staje się niestateczny i przechodzi w tzw. przepływ turbulentny, odznaczający się tym, że elementy płynu poruszają się w sposób chaotyczny.

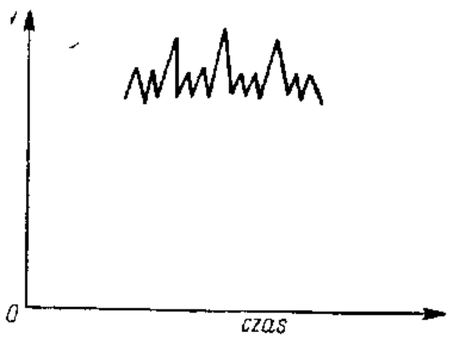
Przy przepływie turbulentnym elementy płynu, uczestnicząc w ogólnym ruchu płynu, doznają dodatkowych przesunięć zarówno poprzecznych, jak i powrotnych z chaotycznie przeplatanymi i prędko zmieniającymi się w czasie torami.

Mechanizm przepływu turbulentnego jest bardzo skomplikowany i nie jest

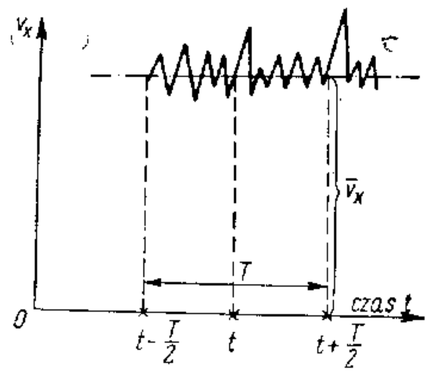
jeszcze w chwili obecnej dokładnie zbadany. Omówimy tu podstawowe właściwości przepływu turbulentnego.

Oznaczmy przez v prędkość elementu płynu w chwili jego przejścia przez pewien określony punkt przestrzeni. Doświadczenia wykazują, że wielkość i kierunek tej prędkości w każdym punkcie przepływu turbulentnego zmienia się w czasie (rys. 9.7 obrazuje zmianę prędkości elementów przechodzących przez pewien określony punkt przestrzeni).

Jak widać, wewnętrzna struktura turbulentnego przepływu płynu jest w swej istocie nieustalona; natomiast przepływ laminarny może być zarówno ustalony, jak i nieustalony.



9.7. Pulsacja prędkości w przepływie turbulentnym



9.8. Uśrednienie prędkości przepływu turbulentnego

Niezależnie od tego jak bardzo jest skomplikowana wewnętrzna struktura przepływu turbulentnego — podlega on ogólnym prawom dynamiki płynów, w szczególności równaniom ruchu płynu lepkiego (9.11). Jednocześnie dokładne postawienie sprawy odnośnie znalezienia rozwiązania tych równań przy ściśle ustalonych warunkach początkowych i brzegowych nie ma sensu, ponieważ przy przepływie turbulentnym niemożliwe jest postawienie ścisłych warunków początkowych i brzegowych.

Dlatego też do badań przepływu turbulentnego należy stosować metody specjalne, związane z zastąpieniem wielkości rzeczywistych chwilowych przez pewne ich wartości uśrednione. Spójrzmy na rys. 9.8, gdzie na osi odciętych odłożono czas t, a na osi rzędnych — prędkość rzeczywistą v_x. Zależność prędkości rzeczywistej v_x przepływu w danym punkcie od czasu przedstawiona jest łamaną. Obierając pewien odcinek T czasu o środku t jako okres uśrednienia, wprowadzimy prędkość uśrednioną $\bar{v}_x$ w następujący sposób (rys. 9.8):

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_x \, d\tau = \bar{v}_x T.$$

Prędkość uśrednioną $\bar{v}_x$ w czasie T będzie zatem określało równanie

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_x \, d\tau.$$

Analogicznie

$$\bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_y \, d\tau,$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_z \, d\tau.$$

Rzuty rzeczywistej (chwilowej) prędkości przepływu w danym punkcie mogą być oczywiście wyrażone jako sumy algebraiczne

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + \Delta v_x, \\ v_y &= \bar{v}_y + \Delta v_y, \\ v_z &= \bar{v}_z + \Delta v_z, \end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

gdzie wielkości Δv_x, Δv_y, Δv_z nazywa się *prędkościami pulsacyjnymi* lub, krócej, *pulsacjami*.

Na podstawie obserwacji ustalono, że zmiany rzeczywistych (chwilowych) prędkości przebiegają szybko i nie podlegają żadnemu określonemu prawu, natomiast uśrednione wartości prędkości zmieniają się w sposób uporządkowany. W przypadku szczególnym wartości uśrednione mogą pozostawać stałe w czasie.

W tym ostatnim przypadku uśredniony przepływ turbulentny jest przepływem ustalonym, sam zaś turbulentny przepływ—tzw. *przepływem quasi-ustalonym*[1].

Operacja uśredniana prędkości może być rozszerzona również na inne wielkości, charakteryzujące ruch płynu w warunkach przepływu turbulentnego. Na przykład uśredniona wartość ciśnienia w danym punkcie przepływu turbulentnego jest określona całką:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p \, d\tau,$$

[1] To znaczy ustalonym w odniesieniu do wartości uśrednionych (przyp. red.).

przy czym

$$p = \bar{p} + \Delta p$$

oznacza ciśnienie chwilowe, Δp zaś — pulsację ciśnienia.

Uogólniając powyższe, można uśrednioną wartość dla pewnej funkcji $f(x, y, z, t)$ wyrazić w postaci:

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, \tau)\, d\tau. \tag{9.49}$$

Jeżeli w wyniku uśrednienia, przeprowadzonego w danym punkcie w rozmaitych chwilach czasu t, będą występowały te same wartości f, wówczas będziemy taki uśredniony ruch płynu nazywali ustalonym. Innymi słowy, w tym przypadku

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}(x, y, z), \tag{9.50}$$

tzn. że zarówno funkcja f, jak również wynik jej uśrednienia będą zależne tylko od współrzędnych punktów przestrzeni, w której odbywa się turbulentny przepływ płynu, a nie od czasu. Jako wynik uzyskujemy ze wzoru (9.50) równanie

$$\Delta\bar{f} = \bar{f} - \bar{\bar{f}} = 0, \tag{9.51}$$

czyli uśrednione wartości samych pulsacji są równe zeru.

Rozważmy w quasi-ustalonym przepływie turbulentnym jeszcze jedną funkcję pulsacyjną $f_1(x, y, z, t)$. Uwzględniając równanie (9.50) otrzymamy

$$\overline{\bar{f}\bar{f}_1} = \bar{f}\bar{f}_1, \tag{9.52}$$

gdzie kreska u góry w dalszym ciągu określa uśrednienia w czasie.

Ponieważ operacje związane z różniczkowaniem względem współrzędnej oraz całkowanie według czasu są niezależne, zatem na podstawie równania (9.49) otrzymamy

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \tag{9.53}$$

czyli uśredniona wartość pochodnej pewnej funkcji względem współrzędnej równa jest pochodnej uśrednionej wartości funkcji względem tej samej współrzędnej.

Możemy się przekonać, że analogiczną właściwość ma również pochodna względem czasu, tzn.

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}. \tag{9.54}$$

Istotnie

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, \tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial f}{\partial \tau}\, d\tau = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t},$$

czyli otrzymujemy równanie (9.54).

Będziemy uważali, że przepływ turbulentny składa się z nałożonych na siebie dwóch przepływów: u ś r e d n i o n e g o i p u l s a c y j n e g o, przy czym ten ostatni charakteryzuje się tym, że jego parametry (prędkość, ciśnienie itp.) zmieniają się z upływem czasu (w sposób nieuporządkowany — przyp. tłum.).

Uwzględniając ten umowny podział przepływu turbulentnego na dwa przepływy, można uważać, że suma energii kinetycznej przepływu uśrednionego i pulsacyjnego jest energią kinetyczną wyjściowego przepływu turbulentnego.

Rozkładając prędkość przepływu pulsacyjnego wzdłuż osi współrzędnych, otrzymamy energie kinetyczne każdego z przepływów pulsacyjnych, które będą proporcjonalne do wielkości

$$\overline{\Delta v_x^2}, \quad \overline{\Delta v_y^2}, \quad \overline{\Delta v_z^2},$$

stanowiących uśrednione kwadraty prędkości pulsacyjnych.

Turbulencja nazywana jest *izotropową*, jeżeli w rozpatrywanym punkcie spełnione są równania

$$\overline{\Delta v_x^2} = \overline{\Delta v_y^2} = \overline{\Delta v_z^2},$$

tzn. jeżeli energia kinetyczna ruchu pulsacyjnego jest we wszystkich kierunkach jednakowa

Turbulencja jest *jednorodna* i *izotropowa*, jeśli warunek powyższy jest spełniony we wszystkich punktach przepływu turbulentnego

Po omówieniu podstawowych właściwości oraz po określeniu przepływu turbulentnego przejdziemy do wyprowadzenia różniczkowych równań przepływu turbulentnego.

Napiszemy podstawowe równania różniczkowe ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego[1]:

[1] Gdzie

$$\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ldots)}{\partial z^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x,\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v_y,\\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z
\end{aligned}\right\}\qquad(9.55)$$

(siły masowe zaniedbujemy).

Równania te zawierają, jak wiadomo, rzeczywiste (chwilowe) wartości prędkości i ciśnienia.

Wprowadzimy do równań ruchu (9.55) sumy odpowiednich uśrednionych i pulsacyjnych wielkości zamiast rzeczywistych wartości prędkości i ciśnień, po czym przeprowadzimy nad każdym składnikiem tych równań operację uśrednienia.

Korzystając z równania ciągłości dla płynu nieściśliwego, można pierwsze równanie układu (9.55) podać w następującej postaci:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial(v_xv_x)}{\partial x}+\frac{\partial(v_xv_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v_xv_z)}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x.\qquad(9.56)$$

Uśredniając wszystkie człony równania (9.56) oraz uwzględniając równania (9.53) i (9.54), otrzymamy

$$\frac{\partial \bar v_x}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{v_xv_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{v_xv_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{v_xv_z})}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar p}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar v_x.\qquad(9.57)$$

Zakładając, że przepływ jest q u a s i-u s t a l o n y oraz wykorzystując równania (9.50) i (9.52), można uśrednione wartości iloczynów rzutów prędkości napisać w postaci następującej:

$$\overline{v_xv_x}=\overline{(\bar v_x+\Delta v_x)(\bar v_x+\Delta v_x)}=\overline{\bar v_x\bar v_x+2\bar v_x\,\Delta v_x+\Delta v_x^2}=$$
$$=\bar v_x\bar v_x+2\bar v_x\,\overline{\Delta v_x}+\overline{\Delta v_x^2}$$

lub, uwzględniając równanie (9.51),

$$\overline{v_xv_x}=\bar v_x\bar v_x+\overline{\Delta v_x^2}.$$

Równanie (9.57) można zatem napisać, jak następuje:

$$\frac{\partial(\bar v_x\bar v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar v_x\bar v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar v_x\bar v_z)}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar p}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar v_x-$$
$$-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_x})}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_y})}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_z})}{\partial z}.$$

Wykorzystując uśrednione równanie ciągłości

$$\frac{\partial \bar v_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar v_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar v_z}{\partial z}=0,$$

będziemy mieli

$$\bar v_x\frac{\partial \bar v_x}{\partial x}+\bar v_y\frac{\partial \bar v_x}{\partial y}+\bar v_z\frac{\partial \bar v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar p}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar v_x-$$
$$-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_x})}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_y})}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{\Delta v_x\Delta v_z})}{\partial z}.$$

Po dokonaniu analogicznych przekształceń dwóch innych równań układu (9.55) otrzymamy następujący układ uśrednionych równań różniczkowych dla turbulentnego ruchu płynu, zwanych równaniami Reynoldsa:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\left(\bar v_x\frac{\partial \bar v_x}{\partial x}+\bar v_y\frac{\partial \bar v_x}{\partial y}+\bar v_z\frac{\partial \bar v_x}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial \bar p}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar v_x+\\
+\frac{\partial}{\partial x}(-\varrho\overline{\Delta v_x\Delta v_x})+\frac{\partial}{\partial y}(-\varrho\overline{\Delta v_x\Delta v_y})&+\frac{\partial}{\partial z}(-\varrho\overline{\Delta v_x\Delta v_z}),\\
\varrho\left(\bar v_x\frac{\partial \bar v_y}{\partial x}+\bar v_y\frac{\partial \bar v_y}{\partial y}+\bar v_z\frac{\partial \bar v_y}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial \bar p}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar v_y+\\
+\frac{\partial}{\partial x}(-\varrho\overline{\Delta v_x\Delta v_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\varrho\overline{\Delta v_y\Delta v_y})&+\frac{\partial}{\partial z}(-\varrho\overline{\Delta v_y\Delta v_z}),\\
\varrho\left(\bar v_x\frac{\partial \bar v_z}{\partial x}+\bar v_y\frac{\partial \bar v_z}{\partial y}+\bar v_z\frac{\partial \bar v_z}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial \bar p}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar v_z+\\
+\frac{\partial}{\partial x}(-\varrho\overline{\Delta v_x\Delta v_z})+\frac{\partial}{\partial y}(-\varrho\overline{\Delta v_y\Delta v_z})&+\frac{\partial}{\partial z}(-\varrho\overline{\Delta v_z\Delta v_z}).
\end{aligned}\right\}\qquad(9.58)$$

Porównanie otrzymanych równań (9.58) dla turbulentnego przepływu płynu z ogólnymi równaniami (9.11) wykazuje, że w przepływie turbulentnym powstają pewne naprężenia dodatkowe[1] od prędkości pulsacyjnych (oznaczenia analogiczne do tych, jakie wprowadzone zostały dla naprężeń w § 1 niniejszego rozdziału, lecz ze znaczkiem T)

$$\left.\begin{aligned}
\overline{p^T_{xx}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_x\Delta v_x},\quad \overline{p^T_{yy}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_y\Delta v_y},\quad \overline{p^T_{zz}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_z\Delta v_z},\\
\overline{\tau^T_{xy}}=\overline{\tau^T_{yx}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_x\Delta v_y},\quad \overline{\tau^T_{yz}}=\overline{\tau^T_{zy}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_y\Delta v_z},\\
\overline{\tau^T_{xz}}=\overline{\tau^T_{zx}}=-\varrho\,\overline{\Delta v_z\Delta v_x}.
\end{aligned}\right\}\qquad(9.59)$$

[1] Termin *naprężenia dodatkowe* należy tu rozumieć jako uzupełnienie tych naprężeń, jakie istniałyby w przepływie laminarnym, w którym rozkład prędkości zgodny jest z rozkładem uśrednionych prędkości w przepływie turbulentnym.

Wielkości całkowitych uśrednionych naprężeń w przepływie turbulentnym napiszemy w postaci następującej:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{p}_{xx} &= -\bar{p} + 2\mu\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \varrho(\overline{\Delta v_x \Delta v_x}),\\
\bar{p}_{yy} &= -\bar{p} + 2\mu\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \varrho(\overline{\Delta v_y \Delta v_y}),\\
\bar{p}_{zz} &= -\bar{p} + 2\mu\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \varrho(\overline{\Delta v_z \Delta v_z}),\\
\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x}\right) - \varrho(\overline{\Delta v_x \Delta v_y}),\\
\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right) - \varrho(\overline{\Delta v_y \Delta v_z}),\\
\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x}\right) - \varrho(\overline{\Delta v_x \Delta v_z}).
\end{aligned}\right\} \tag{9.60}$$

Z równań (9.59) widać, że w celu znalezienia naprężeń dodatkowych, powstających wskutek pulsacji prędkości, potrzebna jest znajomość uśrednionych wartości odpowiednich iloczynów prędkości pulsacyjnych. To ostatnie wymaga wprowadzenia dodatkowych równań.

W związku z tą komplikacją zachodzi konieczność wprowadzenia różnych dodatkowych hipotez odnośnie mechanizmu przepływu turbulentnego.

Nie analizując głębiej teorii przepływu turbulentnego, wspomnimy, że do badań przepływów turbulentnych wnieśli duży wkład uczeni radzieccy. Do profesorów A.A. Friedmana i L.W. Kellera należy zaszczyt stworzenia tak zwanej statystycznej teorii turbulencji, rozwiniętej przez A.N. Kołmogorowa, L.G. Łojcjanskiego, M.D.Miłłonszczikowa, L.I. Siedowa, A.M. Obuchowa [33].

§ 6. Turbulentny przepływ w przewodach o przekroju prostokątnym i kołowym

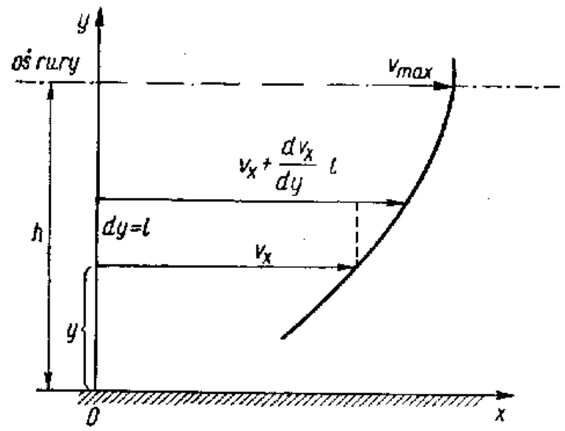
Zagadnienie quasi-ustalonego turbulentnego przepływu płynu w przewodzie o przekroju prostokątnym i kołowym daje się rozwiązać w sposób zadowalający za pomocą metod półempirycznej teorii turbulencji.

Badania turbulentnego przepływu płynu w przewodach przeprowadzili: L.G. Łojcjanski, A.M. Obuchow, K.K. Fiediajewski, A.P. Mielnikow, G.A. Gurżijenko i inni [33]. Szczególnie ten ostatni zbadał najbardziej wyczerpująco na drodze doświadczalnej przepływy turbulentne w przewodzie cylindrycznym.

Spośród prac zagranicznych można w tej dziedzinie zanotować prace L. Prandtla, T. Kármána i N. Nikuradzego [1].

W rozdziale X wykażemy, że półempiryczna teoria turbulencji znajduje zastosowanie również w zagadnieniach dotyczących tak zwanej warstwy przyściennej.

Omówimy najpierw turbulentny przepływ płynu wewnątrz nieskończenie długiego przewodu prostokątnego, którego oś symetrii będziemy traktowali jako oś x. W tym przypadku we wszystkich punktach przepływu uśrednione prędkości wzdłuż osi y i z będą równe zeru. Zakładając, że ruch jest quasi-ustalony, będziemy traktowali składową uśrednionej prędkości v_x (górną kreskę tu i w dalszym ciągu pomijamy) jako funkcję tylko poprzecznej współrzędnej y, czyli $v_x = v_x(y)$.



9.9. Turbulentny płaski przepływ płynu

W paragrafie poprzednim wspomnieliśmy już, że w przepływie turbulentnym, prócz u ś r e d n i o n e g o przepływu postępowego, istnieje jeszcze przepływ p u l s a c y j n y. W wyniku poprzecznego ruchu pulsacyjnego elementy płynu, poruszającego się z pewną uśrednioną prędkością v_x w kierunku osi x, przesuwają się w ciągu czasu dt również w kierunku poprzecznym o pewną niewielką odległość l (rys. 9.9). Element o prędkości osiowej v_x trafia do obszaru, w którym prędkość osiowa, wskutek istnienia gradientu prędkości, ma już inną wartość, różniącą się o wielkość $dv_x = \frac{dv_x}{dy} l$. W związku z tym w kierunku ruchu głównego następuje zmiana ilości ruchu elementów płynu, wywołująca powstawanie dodatkowych oporów przepływu.

Jeżeli prędkość pulsacyjną poprzecznego ruchu elementów płynu oznaczymy przez v_y, wówczas przez pewną skierowaną wzdłuż przepływu głównego powierzchnię dS (prostopadłą do v_y) przejdzie w ciągu czasu dt masa płynu

$$dm = \varrho\, dS\, v_y\, dt.$$

Zmiana ilości ruchu (w kierunku osi x) tej masy płynu, przesuwającej się wzdłuż normalnej o długość l, równa się

$$dm\,dv_x = \varrho\,dS\,v_y\,dt\,\frac{dv_x}{dy}\,l. \tag{9.61}$$

Zgodnie z zasadą ilości ruchu zmiana ilości ruchu w ciągu czasu dt jest równa impulsowi sił w ciągu tego samego odcinka czasu, tzn.

$$dm\,dv_x = F\,dt,$$

gdzie F oznacza siłę równoległą do kierunku przepływu głównego.

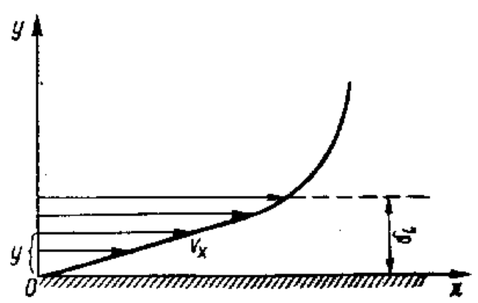
Dzieląc lewą i prawą część ostatniego równania przez $dS\,dt$ oraz uwzględniając równanie (9.61), otrzymamy

$$\tau_{\text{turb}} = \frac{F}{dS} = \varrho\,v_y\,\frac{dv_x}{dy}\,l = \varrho\,v_y\,dv_x.$$

Jeżeli założymy, że v_x i dv_x są małymi tego samego rzędu, czyli $v_y \approx dv_x$, wówczas w przybliżeniu

$$\tau_{\text{turb}} = \varrho\,(dv_x)^2 = \varrho\,l^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2. \tag{9.62}$$

Ostatnia zależność określa dodatkowe naprężenie styczne, powstające w turbulentnym quasi-ustalonym przepływie płynu wskutek istnienia poprzecznych ruchów elementów płynu, tzn. wskutek pulsacji prędkości.



9.10. Podwarstwa laminarna

L. Prandtl, wychodząc z podobieństwa pomiędzy zjawiskiem przenoszenia ilości ruchu przy turbulentnym mieszaniu się oraz przy zderzaniu się cząsteczek w przepływie laminarnym, zaproponował, aby wielkość l traktować jako turbulentny odpowiednik „drogi swobodnej międzycząsteczkowej" i nazwał ją *drogą mieszania* (Mischungsweg — przyp. tłum.).

Na podstawie powyższego można wyprowadzić wniosek, że całkowite naprężenie sił tarcia w przepływie turbulentnym będzie określone sumą podstawowego naprężenia lepkości oraz naprężenia dodatkowego, powstałego wskutek pulsacji, tzn.

$$\tau = \mu\,\frac{dv_x}{dy} + \varrho\,l^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2. \tag{9.63}$$

Ustalono na podstawie doświadczeń, że przy turbulentnym ruchu płynu

pozostaje on jednak laminarny bezpośrednio przy ściankach, w bardzo cienkiej warstwie (rys. 9.10) i że w tej warstwie tarcie podlega prawu

$$\tau = \mu\,\frac{dv_x}{dy}.$$

Wynika stąd, że względna wartość każdego z członów wchodzących do równania (9.63) zależy w stopniu istotnym od miejsca, w jakim badamy przepływ, do którego równanie to jest stosowane. W pobliżu ścianek, tzn. w obszarze warstwy laminarnej, gdzie przeważa wpływ jedynie podstawowych sił lepkości, pierwszy składnik równania (9.63) ma znaczenie decydujące. Natomiast w obszarze środkowym, gdzie zjawiska turbulentnego mieszania się są najintensywniejsze, odwrotnie — podstawową rolę odgrywa składnik drugi.

Ustalimy teraz grubość tzw. podwarstwy laminarnej. Będziemy zakładali, że pomiędzy grubością podwarstwy δ_l, stałymi fizycznymi płynu μ i ϱ oraz naprężeniem stycznym τ_0 zachodzi zależność

$$\delta_l = \alpha\,\mu^a\,\varrho^b\,\tau_0^c, \tag{9.64}$$

gdzie α jest pewną stałą bezwymiarową.

Wykorzystując analizę wymiarową, możemy napisać

$$|L| = \left|\frac{M}{TL}\right|^a \left|\frac{M}{L^3}\right|^b \left|\frac{M}{LT^2}\right|^c,$$

skąd otrzymamy

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2},$$

to znaczy

$$\delta_l = \alpha\,\mu\,\varrho^{-\frac{1}{2}}\,\tau_0^{-\frac{1}{2}}. \tag{9.65}$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}. \tag{9.66}$$

Wielkość v_* ma wymiar prędkości i jest czasami — umownie — nazywana prędkością dynamiczną (należy mieć na uwadze, że v_* nie jest prędkością elementów płynu). Zatem

$$\delta_l = \alpha\,\frac{\nu}{v_*}. \tag{9.67}$$

Stała α jest jedną z najbardziej charakterystycznych wielkości określających turbulentny przepływ w przewodach. Na drodze teoretycznej określić jej nie można. Na podstawie doświadczeń znaleziono wartość $\alpha = 11{,}5$.

Ostatnie wyrażenie na δ_l można przekształcić w następujący sposób:

$$\frac{\delta_l}{r_0} = \alpha \frac{\nu}{v_{\max} r_0} \frac{v_{\max}}{v_*} = \frac{\alpha}{R_m} \sqrt{\frac{\varrho v_{\max}^2}{\tau_0}},$$

tzn.

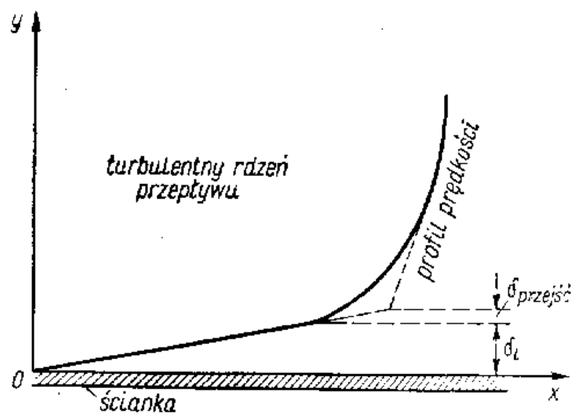
$$\frac{\delta_l}{r_0} = \frac{\text{const}}{R_m}, \tag{9.68}$$

gdzie

$$R_m = \frac{v_{\max} r_0}{\nu}$$

(przy czym r_0 oznacza promień przewodu — przyp. red.).

Na podstawie wzoru (9.68) można wywnioskować, że *przy dużych wartościach R_m grubość podwarstwy laminarnej stanowi znikomą część średnicy przewodu kołowego*[1].



9.11. Struktura strumienia przy turbulentnym przepływie przez rurę

Według poglądów obecnych za laminarną podwarstwą znajduje się pewien przejściowy obszar lub warstwa przejścia od ruchu laminarnego do turbulentnego, również bardzo cienka. Za warstwą przejścia w środkowej części przepływu mieści się tzw. rdzeń strumienia (rys. 9.11). W rdzeniu strumienia ruch płynu jest już turbulentny.

Zaniedbując grubość podwarstwy laminarnej, znajdziemy prawo rozkładu prędkości v_x w przekroju przewodu oraz wielkość naprężenia tarcia τ_0.

Empiryczne prawo oporu dla przepływów turbulentnych w przewodach gładkich może być wyrażone za pomocą następującego równania [1].

$$\Delta p = \frac{C_1}{\sqrt[4]{R}} \frac{l}{r_0} \varrho \frac{v_{\text{śr}}^2}{2}, \tag{9.69}$$

[1] Fakt ten pozwala zakładać, że praktycznie profil prędkości w podwarstwie laminarnej jest liniowy.

gdzie Δp — spadek ciśnienia na rozpatrywanym odcinku l gładkiego przewodu cylindrycznego, r_0 — promień przewodu, $v_{\text{śr}}$ — średnia prędkość przepływu, C_1 — pewna stała, $R = \frac{v_{\text{śr}} r_0}{\nu}$.

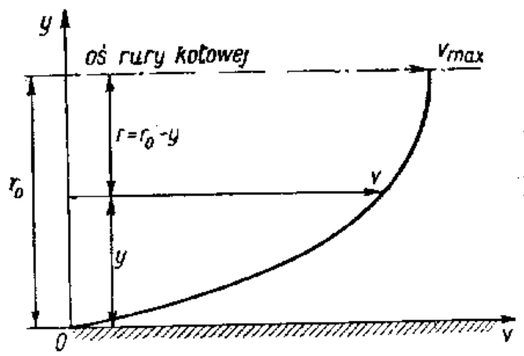
Wykorzystamy znane równanie

$$\Delta p = 2 \frac{l}{r_0} \tau_0, \tag{9.70}$$

określające związek pomiędzy wielkością spadku ciśnienia wzdłuż przewodu na długości l a naprężeniem tarcia na ściankach przewodu τ_0.

Na podstawie równań (9.69) i (9.70) otrzymamy

$$\tau_0 = C_2 \varrho \nu^{\frac{1}{4}} v_{\text{śr}}^{\frac{7}{4}} r_0^{-\frac{1}{4}} \tag{9.71}$$



9.12. Potęgowe prawo rozkładu prędkości w przekroju rury kołowej przy przepływie turbulentnym

Uczynimy dwa założenia. Po pierwsze, że rozkład prędkości w przekroju przewodu nie zależy od wydatku oraz wielkości prędkości płynu w przewodzie i wyraża się funkcją potęgową (rys. 9.12):

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r_0}\right)^n.$$

Zakładając, że maksymalna prędkość przepływu jest proporcjonalna do prędkości średniej

$$v_{\max} = C_3 v_{\text{śr}},$$

otrzymamy

$$\tau_0 = \text{const}\, \varrho \nu^{\frac{1}{4}} v^{\frac{7}{4}} \frac{r_0^{\frac{7}{4}n - \frac{1}{4}}}{y^{\frac{7}{4}n}}. \tag{9.72}$$

Określimy wielkość wykładnika n. W tym celu zrobimy drugie założenie,

że wymiary przewodu nie wpływają na wielkość naprężenia tarcia. Przyrównując do zera — zgodnie z tym założeniem — wykładnik przy r_0 w ostatnim wzorze otrzymamy

$$n = \frac{1}{7}.$$

Prawo rozkładu prędkości przybierze zatem postać

$$v = v_{\max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{9.73}$$

lub przy uwzględnieniu, że $y = r_0 - r$:

$$v = v_{\max}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}, \tag{9.74}$$

czyli w przypadku przepływu turbulentnego prędkość w przekroju poprzecznym przewodu wzrasta w kierunku od ścianki do osi przewodu proporcjonalnie do pierwiastka siódmego stopnia z odległości od ścianki.

Prawo to otrzymało nazwę *prawa jednej siódmej*; jest ono często stosowane w praktyce[1].

Zauważymy, że dla rozkładu prędkości wzdłuż przekroju przewodu istnieje bardziej dokładne równanie, w postaci

$$\frac{v}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y v_*}{\nu} + 5{,}5, \tag{9.74'}$$

gdzie

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}.$$

To równanie na rozkład prędkości nazywane jest *prawem logarytmicznym*.

Na podstawie *prawa jednej siódmej* łatwo jest otrzymać wzór na naprężenie tarcia na ściance.

Według danych doświadczalnych stosunek pomiędzy prędkością maksymalną a średnią ma postać

$$v_{\max} = 1{,}235\, v_{śr}.$$

Dlatego, przyjmując $C_3 = 1{,}235$, otrzymamy następujący wzór na poszukiwane naprężenie tarcia na ściance:

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho\, \nu^{\frac{1}{4}} v^{\frac{7}{4}} y^{-\frac{1}{4}} \tag{9.75}$$

[1] Istnieją bardziej ścisłe wyprowadzenia prawa potęgowego [1]. Należy zauważyć, że prawo jednej siódmej dobrze zgadza się z doświadczeniem jedynie do liczby $R < 50\,000$. Przy $R = 200\,000$ okazuje się lepiej zgodne z doświadczeniem prawo pierwiastka ósmego stopnia, przy liczbach zaś R rzędu $500\,000$ — prawo pierwiastka stopnia dziesiątego.

lub

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho v^2 \left(\frac{\nu}{v y}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{9.76}$$

Przy obliczaniu τ_0 według wzorów (9.75) lub (9.76) można założyć dowolną wartość $y \neq 0$ lub $y \neq r_0$ i otrzymać odpowiadającą jej wartość v z równania (9.73).

Na podstawie powyższego można wyciągnąć wniosek, że rozkład prędkości w przekroju przewodu dla przepływu turbulentnego różni się znacznie od rozkładu prędkości w przypadku przepływu laminarnego. Przy przepływie turbulentnym prędkość zmienia się znacznie tylko w pobliżu ścianki ulegając bardzo małym zmianom w granicach podstawowego rdzenia strumienia (rys. 9.11), w związku z czym gradienty prędkości w przepływie turbulentnym są w podstawowej części przepływu o wiele mniejsze niż przy przepływie laminarnym, natomiast przy ściance odwrotnie — większe.

Rozdział X

WARSTWA PRZYŚCIENNA

§ 1. Pojęcie warstwy przyściennej

Dokładne rozwiązanie zagadnienia opływu jakiegokolwiek ciała, np. skrzydła lub kadłuba, płynem lepkim sprowadza się do całkowania skomplikowanych równań różniczkowych ruchu płynu lepkiego przy określonych warunkach brzegowych i początkowych.

Obecnie istnieją metody uproszczenia równań ruchu płynu lepkiego. Jedna z nich polega na tym, że wyrazy określające siły bezwładności zostają w tych równaniach pominięte całkowicie, a składniki wyrażające wpływ lepkości pozostają przy tym nie zmienione.

Za pomocą takiej metody rozwiązał Stokes w r. 1851 zagadnienie opływu cieczą lepką kuli o promieniu r_0 (składniki wyrażające siły bezwładności pominął). Otrzymany przez Stokesa wzór na opór kuli ma postać

$$X = 6\pi\mu v_\infty r_0;$$

wynika z niego, że opór jest proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości.

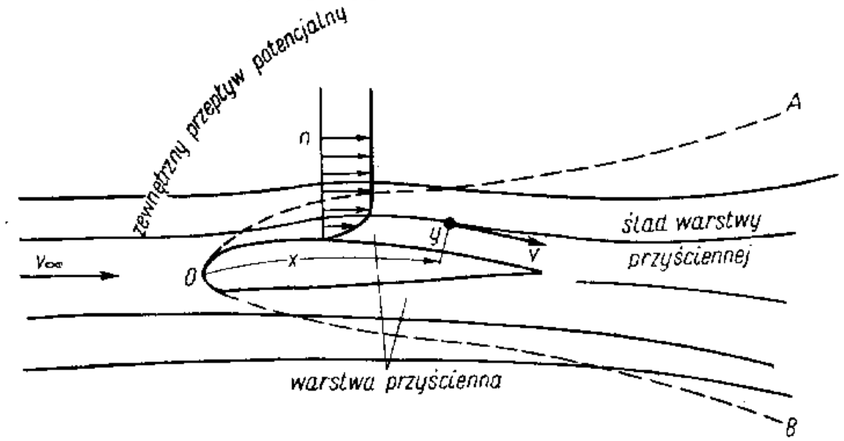
Równanie Stokesa może mieć jednak zastosowanie jedynie przy bardzo małych wartościach liczby Reynoldsa (przy $R \leqslant 1$), ponieważ całkowite zaniedbanie sił bezwładności jest dopuszczalne tylko w przypadku dostatecznie małych liczb Reynoldsa (wtedy bowiem siły bezwładności są znikomo małe w porównaniu z siłami lepkości). Równanie to może być np. stosowane w przypadku opadania w powietrzu kropelek mgły, natomiast w przypadku opadania kropel deszczu staje się już nieużyteczne.

Nieco inny sposób uproszczenia zagadnienia, stanowiący udoskonalenie metody Stokesa, podał Oseen [2]; polega on na tym, że w równaniach ruchu pozostają tylko najważniejsze człony wyrażające siły bezwładności, które poza tym można sprowadzić do postaci liniowej zamieniając nieznaną prędkość, stojącą przed pochodną, przez jej wielkość charakterystyczną. Przy tym nieliniowy układ różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego sprowadza się do równań liniowych o pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu.

Metoda Oseena prowadzi do bardzo skomplikowanych obliczeń i daje się stosować w praktyce jedynie przy małych liczbach Reynoldsa.

Znany jest również sposób upraszczania równań Naviera—Stokesa zaproponowany przez O. Reynoldsa, a polegający na tym, że w równaniach ruchu cieczy lepkiej całkowicie odrzuca się człony wyrażające siły bezwładności, a z członów wyrażających lepkość pozostawia się tylko główne. Ten sposób jest dość często wykorzystywany przy rozwiązywaniu zadań hydrodynamicznej teorii smarowania oraz badaniach opływów z małymi liczbami Reynoldsa.

Praktyczne zastosowanie wyników, otrzymanych za pomocą powyższych metod, jest zatem niezwykle ograniczone i nie jest interesujące z punktu widzenia aerodynamiki (technicznej — przyp. red.).



10.1. Schemat warstwy przyściennej

Inna metoda uproszczenia równań ruchu płynu lepkiego, różniąca się zasadniczo od metod poprzednich, daje się zastosować w przypadku badania opływu ciał przy dużych liczbach Reynoldsa, dzięki czemu ma olbrzymie znaczenie w lotnictwie.

Metoda ta oparta jest na pojęciu *warstwy przyściennej*. Wykażemy poniżej, że umożliwia ona stworzenie przybliżonej teorii opływu ciała płynem lepkim oraz określenie oporu ciała w przepływie płynu lepkiego.

Rozpatrzmy fizyczny obraz opływu. Przypuśćmy, że nieruchome ciało, na przykład profil płata, jest opływane strumieniem powietrza (rys. 10.1). Bezpośrednie obserwacje wskazują, że w cienkiej warstwie w pobliżu powierzchni ciała zachodzi gwałtowny wzrost prędkości, od wartości $v = 0$ na powierzchni ciała do wartości rzędu prędkości płynu w nieskończoności. Warstwa powietrza, przylegająca do powierzchni ciała i stanowiąca obszar o dużych gradientach prędkości w kierunku normalnym do ciała, nosi nazwę *warstwy przyściennej*.

Po przejściu wzdłuż powierzchni ciała elementy płynu znajdujące się w warstwie przyściennej są przez strumień przenoszone do obszaru znajdującego się za opływanym ciałem, przy czym zachowują one cechy charakterystyczne dla warstwy przyściennej. W szczególności prędkości tych elementów są z reguły mniejsze od prędkości ośrodka. Przyhamowane elementy tworzą za ciałem obszar nazywany *śladem aerodynamicznym*.

Badania doświadczalne i teoretyczne wykazują, że obszar ten może być również wypełniony oddzielnymi wirami, powstającymi przy opływie ciała[1].

Równanie Newtona na tarcie wewnętrzne

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n} = \varrho \nu \frac{\partial v}{\partial n}$$

wskazuje, że wewnątrz warstwy przyściennej oraz śladu, gdzie gradienty prędkości są znaczne, nie można zaniedbywać wartości τ, określającej tarcie wewnętrzne, i że płyn poruszający się wewnątrz warstwy przyściennej należy traktować jako lepki, nawet przy małej wartości współczynnika ν.

Poza warstwą przyścienną i śladem aerodynamicznym gradienty prędkości są małe, można więc tarcie wewnętrzne zaniedbać, tzn. traktować płyn jako doskonały, przepływ zaś jako niewirowy (potencjalny).

Możemy zatem traktować płyn poza warstwą przyścienną oraz śladem jako doskonały i badać jego ruch za pomocą równań Eulera. Natomiast wewnątrz warstwy przyściennej należy płyn rozpatrywać jako lepki i badać jego ruch za pomocą różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego. W paragrafie następnym wykażemy, że na skutek małej grubości warstwy przyściennej różniczkowe równania ruchu płynu lepkiego upraszczają się znacznie.

Pojęcie warstwy przyściennej zostało sprecyzowane po raz pierwszy przez N.J. Żukowskiego w r. 1890 w jego pracy pt. *O fórmie sudow* [34]. W znanym kursie wykładów *Tieorieticzeskije osnowy wozduchopławanija* [35] omawia Żukowski najważniejsze właściwości warstwy przyściennej oraz wskazuje rolę, jaką warstwa ta odgrywa w powstawaniu oporu podczas opływu ciała.

W wykładach tych Żukowski mówi: „Proponuję, aby przyjmować (nie jest to zupełnie ściśle potwierdzone przez doświadczenie, jest jednak dość zbliżone do rzeczywistości), że przy ściankach prędkość płynu równa jest zeru, dalej zaś rośnie bardzo szybko i staje się równa prędkości teoretycznej, otrzymywanej przy założeniu istnienia potencjału prędkości". W dalszym ciągu mówi Żukowski: „Warstwa płynu obok ścianek nie mająca potencjału prędkości, a więc zawirowana, jest bardzo cienka. Jej grubość h zależy od prędkości przepływu: przy małych prędkościach grubość jest dość duża, przy prędkościach zaś dużych jest mała".

Schemat opływu z warstwą przyścienną jest więc dziełem wielkiego uczonego rosyjskiego N.J. Żukowskiego.

Podstawowe równania różniczkowe ruchu płynu lepkiego w warstwie przyściennej podał w r. 1904 L. Prandtl.

Teoria warstwy przyściennej uzyskała dalszy rozwój w pracach uczonych z poza Związku Radzieckiego: Blasiusa, Hiemenza, Pohlhausena, Kármána,

[1] Obszar ten nazywa autor *śladem wirowym*.

Millikana, Howartha i innych (patrz Łojcjanski, *Aerodinamika pogranicznowo sloja*, Gostiechizdat, 1941).

Szereg ważnych badań dotyczących teorii warstwy przyściennej przeprowadzili aerodynamicy radzieccy, a przede wszystkim szkoła C.A.G.I. Prace profesorów L.G. Łojcjanskiego, A.A. Dorodnicyna, I.W. Ostosławskiego, K.K. Fiediajewskiego i innych wyprzedziły w znacznym stopniu zagraniczne badania w tej dziedzinie. Aerodynamicy radzieccy przeprowadzili również doświadczalne badania warstwy przyściennej oraz opracowali właściwe kształty płatów i kadłubów o najmniejszym oporze; stali się oni w ten sposób twórcami teorii warstwy przyściennej w zakresie dużych prędkości.

§ 2. Równania różniczkowe warstwy przyściennej

Załóżmy że płaski ruch płynu odbywa się wzdłuż ścianki sztywnej (powierzchni ciała), którą będziemy dla uproszczenia traktowali jako prostoliniową i skierowaną wzdłuż osi x (rys. 10.2). Wzdłuż tej granicy tworzy się warstwa przyścienna AB, której grubość oznaczymy przez δ[1].

Ponieważ wewnątrz warstwy przyściennej płyn jest lepki, więc w celu zbadania jego ruchu wykorzystamy równania różniczkowe ruchu płynu lepkiego mające dla przepływu płaskiego następującą postać:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right).$$

Zaniedbując siły masowe X i Y oraz dołączając do równań ruchu równanie ciągłości, otrzymamy następujący układ równań różniczkowych dla cieczy nieściśliwej i lepkiej:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

[1] Należy zauważyć, że pojęcie grubości warstwy przyściennej jest pojęciem umownym. Rozumiemy przez nie zwykle taką odległość od konturu ciała, na jakiej prędkość będzie się różniła od prędkości przepływu potencjalnego o 1%.

Wielkość wchodzącej do tego równania współrzędnej y jest w warstwie przyściennej ograniczona nierównością

$$0 \leqslant y \leqslant \delta.$$

Oznacza to, że wielkość y można traktować jako małą rzędu δ:

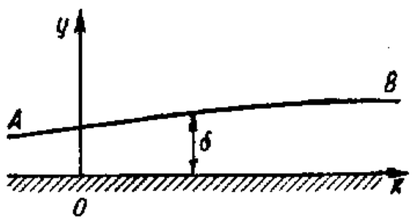
$$y \sim \delta.$$

Zauważymy, iż wielkość δ należy rozumieć w ten sposób, że mały jest stosunek $\frac{\delta}{l}$, gdzie l — charakterystyczny wymiar opływanego ciała (na przykład jego grubość).

Mając to na uwadze, oszacujemy rząd wielkości wyrazów wchodzących do równania (10.1).

Ponieważ na ściance opływanego ciała $v_x = 0$, a na zewnętrznej granicy warstwy v_x jest rzędu V, gdzie V — prędkość charakterystyczna rozważanego przepływu (na przykład prędkość w nieskończoności przed ciałem), zatem przy zmianie y od 0 do δ przyrost Δv_x jest rzędu V, tzn. $\Delta v_x \sim V$, przyrost Δy jest rzędu δ, tzn. $\Delta y \sim \delta$ i wobec tego

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta}.$$



10.2. Do wyprowadzania równań różniczkowych warstwy przyściennej

Można dowieść w sposób analogiczny, że wewnątrz warstwy przyściennej

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{V}{\delta^2}.$$

Aby oszacować rząd wielkości $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, zauważmy, że przy przesunięciu się wzdłuż opływanego obwodu o odcinek rzędu długości charakterystycznej l, prędkość v_x może się zmienić o wielkość rzędu V (na przykład od 0 do V), czyli również w tym przypadku $\Delta v_x \sim V$. Ponieważ przy tym $\Delta x \sim l$, więc

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V}{l}.$$

Łatwo jest stwierdzić, że

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V}{l^2}.$$

Wykorzystując równanie ciągłości

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

przychodzimy do wniosku, że $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ jest tego samego rzędu co $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, czyli

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V}{l}.$$

Jeżeli

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y}\, dy,$$

to

$$v_y \sim \int_0^y \frac{V}{l}\, dy \sim \frac{V\delta}{l}.$$

Mając na uwadze, że na powierzchni opływanego ciała $v_y = 0$ oraz znając rząd wielkości v_y w punktach wewnątrz warstwy, łatwo jest określić rząd wielkości pochodnych

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}.$$

Oczywiście

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{V\delta}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{V\delta}{l^3}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{V}{l\delta}.$$

Po określeniu rzędu wielkości prędkości i ich pochodnych wchodzących do równania (10.1) przepiszemy pierwsze równanie (10.1) pisząc pod każdym wyrazem rząd jego wielkości:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right).$$

$$\frac{V^2}{l} \qquad \frac{V^2}{l} \qquad\qquad \frac{V}{l^2} \qquad \frac{V}{\delta^2}$$

Jest rzeczą oczywistą, że w równaniu tym można odrzucić wyraz $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ jako mały w porównaniu z $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, gdyż stosunek $\frac{V}{l^2} : \frac{V}{\delta^2} = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ jest kwadratem wielkości małej.

Pierwsze równanie układu (10.1) przybierze wówczas postać

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

$$\frac{V^2}{l} \qquad \frac{V^2}{l} \qquad\qquad \frac{\nu V}{\delta^2}$$

Załóżmy, że wewnątrz warstwy przyściennej siły lepkości i siły bezwładności mają jednakowy rząd wielkości. Wówczas równanie

$$\frac{V^2}{l} : \nu \frac{V}{\delta^2} = \frac{V\delta^2}{\nu l} = \frac{Vl}{\nu}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 R,$$

gdzie

$$R = \frac{Vl}{\nu}$$

powinno mieć rząd wielkości równy jedności, tzn.

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 R \sim 1.$$

Wynika stąd zależność

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{R}},$$

co oznacza, iż *grubość warstwy przyściennej powstającej przy przepływach z dużymi liczbami Reynoldsa jest rzędu* $\frac{l}{\sqrt{R}}$ *lub* $\sqrt{\frac{l\nu}{V}}$.

Do pierwszego równania (10.1) wchodzą jeszcze wielkości $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ i $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$.

Będziemy zakładali, że przepływ zmienia się w czasie na tyle łagodnie, że rząd wielkości $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ nie przekracza rzędu wielkości $\frac{V^2}{l}$, tzn. nie przekracza rzędu wielkości podstawowych wyrazów określających bezwładność. Wówczas także wyraz $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$ powinien być tego samego rzędu wielkości, tzn. $\frac{V^2}{l}$.

Przejdźmy obecnie do drugiego równania (10.1):

$$\underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\underset{\frac{V\delta}{l^3}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \underset{\frac{V}{l\delta}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}\right);$$

Zaniedbując wyraz $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$, gdyż jest on w porównaniu z $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ mały, przepiszemy to równanie w postaci

$$\underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \underset{\frac{\nu V}{l\delta}}{\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}};$$

Zakładając, analogicznie jak to zrobiliśmy poprzednio, że $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ ma rząd wielkości podstawowych wyrazów określających bezwładność, dochodzimy do wniosku, że wyrazy określające bezwładność w drugim równaniu ruchu są rzędu

$\frac{V^2\delta}{l^2}$, a więc ich stosunek do wyrazów określających bezwładność w pierwszym równaniu wynosi $\frac{\delta}{l}$.

Wynika stąd, że w drugim równaniu można pominąć wyrazy określające bezwładność. Również stosunek wyrazów określających lepkość w drugim równaniu do tychże wyrazów w pierwszym równaniu wynosi $\frac{\delta}{l}$, a więc i te wyrazy można również pominąć. Dlatego można z dostateczną dokładnością zastąpić drugie równanie układu (10.1) równaniem

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{10.2}$$

Wynika stąd, że *ciśnienie wewnątrz warstwy przyściennej nie zmienia się wzdłuż normalnej do konturu ciała i jest równe ciśnieniu na zewnętrznej granicy warstwy w rozważanym miejscu.*

Wynik ten ma duże znaczenie praktyczne; potwierdzony on jest dobrą zgodnością wielkości ciśnienia obliczonej według teorii przepływu potencjalnego z wielkością ciśnienia otrzymaną z doświadczenia. Obliczając rozkład ciśnień teoretycznie przy założeniu przepływu potencjalnego, otrzymujemy jego wartości tylko na górnej granicy warstwy przyściennej, gdyż wewnątrz warstwy przepływ nie jest potencjalny. Określając ciśnienie na drodze doświadczalnej (za pomocą sondy) znajdujemy rozkład ciśnień na samej powierzchni ciała. Zgodność prawa rozkładu ciśnień określonego tymi dwoma sposobami potwierdza wzór (10.2), według którego ciśnienie w warstwie przyściennej nie zmienia się wzdłuż normalnej do ciała.

Ułatwia to określenie rozkładu ciśnień wewnątrz warstwy przyściennej. Z równania (10.2) wynika, że rozkład ciśnień wzdłuż warstwy zgodny jest z rozkładem ciśnień na jej granicy. To ostatnie znajdziemy rozwiązując zadanie potencjalnego opływu danego ciała. Można również określić rozkład ciśnień wzdłuż warstwy przyściennej doświadczalnie (za pomocą sondy).

W ten sposób z trzech równań układu (10.1) pozostają dwa równania z dwiema niewiadomymi v_x i v_y, ponieważ ciśnienie $p(x, t)$ może być określone z góry. Ten układ równań różniczkowych warstwy przyściennej dla płaskiego przepływu nieustalonego ma następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

W literaturze układ równań (10.3) nosi nazwę równań warstwy przyściennej Prandtla.

Dla płaskiego przepływu ustalonego, odrzucając w równaniu pierwszym $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ oraz zastępując pochodną cząstkową $\frac{\partial p}{\partial x}$ pochodną całkowitą $\frac{dp}{dx}$, gdyż w tym przypadku ciśnienie p będzie funkcją jedynie współrzędnej x, otrzymamy następujący układ równań różniczkowych warstwy przyściennej:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

Układ równań (10.4) całkuje się przy następujących warunkach brzegowych:

przy $y = 0$

$$v_x = v_y = 0;$$

przy $y = \delta$

$$v_x = u(x),$$

gdzie $u(x)$ oznacza rozkład prędkości na górnej granicy warstwy przyściennej.

Ponadto, w przypadku przepływu nieustalonego należy uwzględniać warunki początkowe: przy $t = 0$ v_x i v_y powinny stać się zadanymi funkcjami x i y.

Równania różniczkowe (10.3) i (10.4) warstwy przyściennej zostały otrzymane w założeniu, że powierzchnia ciała sztywnego jest płaska. Okazuje się, że równania te są z dostateczną dokładnością słuszne również dla powierzchni krzywoliniowej. W tym przypadku należy przyjmować, że oś odciętych jest zakrzywiona według konturu ciała, oraz liczyć odciętą x wzdłuż konturu ciała od jakiegokolwiek punktu, przyjętego jako początek układu współrzędnych, rzędną zaś y — wzdłuż normalnej do powierzchni ciała.

Należy zaznaczyć, że równania różniczkowe warstwy przyściennej w postaci (10.3) i (10.4) są użyteczne tylko przy badaniach przepływu laminarnego w warstwie przyściennej. Przy badaniu przepływu turbulentnego w warstwie przyściennej nie da się ich stosować z tych samych przyczyn, z jakich równania przepływu płynu lepkiego nie dadzą się stosować przy badaniu przepływu turbulentnego.

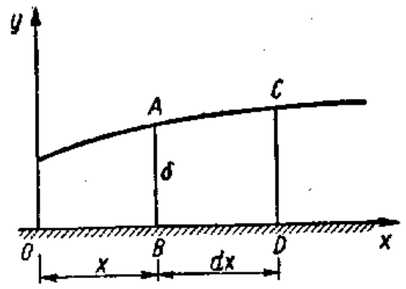
Równania różniczkowe warstwy przyściennej dla uśrednionego przepływu turbulentnego można na przykład otrzymać z równań (10.3) drogą ich uśrednienia.

Mimo iż równania różniczkowe laminarnej warstwy przyściennej (10.3) i (10.4) są prostsze od ogólnych równań ruchu płynu lepkiego, to jednak rozwiązanie ich jest dość skomplikowane nawet dla najprostszych konturów.

W związku z tym nabiera znaczenia przybliżona metoda rozwiązywania zagadnień warstwy przyściennej, oparta na badaniu tak zwanego wzoru całkowego dla warstwy przyściennej, stanowiącego matematyczny wyraz zasady ilości ruchu.

§ 3. Wzór całkowy dla warstwy przyściennej

Wyodrębnimy w warstwie przyściennej nieskończenie małą powierzchnię $ABDC$ (rys. 10.3) ograniczoną elementem BD sztywnej ścianki, którą przyjmiemy jako oś x, elementem AC górnej granicy warstwy przyściennej oraz odcinkami prostych AB i CD odległych od siebie o dx. Zastosujemy do obwodu $ABDC$ zasadę ilości ruchu. Obliczymy zmianę ilości ruchu w kierunku osi x w ciągu czasu dt. Przez odcinek AB wpływa masa cieczy



10.3. Do wyprowadzenia wzoru całkowego dla warstwy przyściennej

$$dt \int_0^\delta \varrho v_x \, dy,$$

przez odcinek zaś CD wypływa

$$dt \int_0^\delta \left(\varrho v_x + \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} dx \right) dy.$$

Przez odcinki AB i CD będzie zatem wypływała ilość płynu

$$dt\, dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \varrho v_x \, dy.$$

Zgodnie z równaniem ciągłości dla cieczy nieściśliwej, przez górną granicę AC powinna dopływać taka sama masa cieczy. Ta masa cieczy spowoduje następujący przyrost ilości ruchu (na granicy warstwy przyściennej prędkości $v_x = u$, gdzie u — składowa prędkości przepływu potencjalnego):

$$u\, dt\, dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \varrho v_x \, dy.$$

Obliczmy ilość ruchu płynu, dopływającego i wypływającego przez odcinki AB i CD. Przez odcinek AB dopływa następująca ilość ruchu:

$$dt \int_0^\delta v_x \varrho v_x \, dy = dt \int_0^\delta \varrho v_x^2 \, dy = F(x, t).$$

Ilość ruchu płynu wypływającego przez odcinek CD będzie równa

$$F(x + dx, t) = F(x, t) + F'(x, t)\, dx.$$

Zatem poprzez odcinki AB i CD przenoszone są w kierunku osi x następujące ilości ruchu:

$$F(x+dx,t)-F(x,t)=F'(x,t)\,dx=dt\,dx\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho v_x^2\,dy.$$

Jeżeli przepływ jest nieustalony, można wyrazić zmianę w czasie dt ilości ruchu płynu zawartego w objętości $ABDC$ w postaci:

$$dt\,dx\int_0^\delta \varrho\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy.$$

Uważając, że ilość ruchu dopływającej masy jest dodatnia, wypływającej zaś ujemna, otrzymamy następującą wielkość ogólnej zmiany ilości płynu w objętości $ABDC$ w ciągu czasu dt:

$$dt\,dx\left[\int_0^\delta \varrho\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho v_x^2\,dy-u\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho v_x\,dy\right]. \tag{a}$$

Obliczymy impulsy sił zewnętrznych w ciągu tego samego odcinka czasu dt w kierunku osi x. Na element $ABDC$ w kierunku osi x będą oczywiście działały siły pochodzące od ciśnień, przyłożone do lewej, górnej i prawej ścianki elementu, oraz siła tarcia, przyłożona do dolnej jego ścianki BD (siły tarcia przyłożone do lewej i prawej ścianki dają rzuty na oś x równe zeru, na górnej zaś ściance AC siły tarcia nie istnieją, z uwagi na samo określenie zewnętrznej granicy warstwy przyściennej).

Rzuty na oś x sił ciśnienia działających na ścianki AB, AC i DC będą odpowiednio równe:

$$p\delta,\quad p\,ds\frac{d\delta}{ds}=p\,d\delta,\quad -\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\left(\delta+\frac{d\delta}{dx}dx\right)=-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta),$$

gdzie $ds=AC$ oraz $\frac{d\delta}{ds}$ — sinus kąta, jaki AC tworzy z osią x.

Suma tych rzutów jest równa

$$p\delta+p\,d\delta-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta)=p\delta+p\,d\delta-p\delta-p\,d\delta-$$

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx-d\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx\approx-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx,$$

ich impulsy zaś w czasie dt określi

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dt. \tag{b}$$

Na granicy elementu BD działa siła tarcia skierowana w lewo, której wielkość odniesioną do jednostki powierzchni oznaczymy przez $-\tau_0$. Mnożąc tę siłę przez wielkość powierzchni $1\cdot dx$ oraz odcinek czasu dt, otrzymamy wyrażenie na impuls siły tarcia

$$-\tau_0\,dx\,dt. \tag{c}$$

Przyrównując wyrażenie (a) na zmianę ilości ruchu do sumy wielkości (b) i (c) wyrażających impulsy sił działających oraz skracając przez $dx\,dt$, otrzymamy szukane wyrażenie całkowe dla warstwy przyściennej (dla przypadku płaskiego przepływu nieustalonego)

$$\int_0^\delta \varrho\frac{\partial v_x}{\partial t}dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho v_x^2\,dy-u\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho v_x\,dy=-\delta\frac{\partial p}{\partial x}-\tau_0. \tag{10.5}$$

Odrzucając w tym wyrażeniu pierwszy wyraz lewej części oraz zastępując pochodne cząstkowe przez pochodne zwyczajne, otrzymamy wyrażenie całkowe dla warstwy przyściennej dla przepływu ustalonego

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x^2\,dy-u\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x\,dy=-\delta\frac{dp}{dx}-\tau_0. \tag{10.6}$$

Należy zaznaczyć, że równania (10.5) i (10.6) są bardziej ogólne niż układy (10.3) i (10.4) równań różniczkowych i że można je stosować przy badaniu nie tylko laminarnego, lecz również turbulentnego (uśrednionego) przepływu wewnątrz warstwy przyściennej, gdyż przy ich wyprowadzaniu nie poczyniono żadnych założeń o istocie naprężenia stycznego τ_0.

Wchodzące do wzoru całkowego dla warstwy przyściennej wielkości u, $\frac{dp}{dx}$ oraz gęstość ϱ można rozważać jako wielkości znane, i wówczas nie znane będą tylko v_x, δ oraz τ_0.

Prędkość u przepływu potencjalnego poza warstwą przyścienną można znaleźć drogą rozwiązania zagadnienia opływu potencjalnego lub za pomocą doświadczenia, na podstawie zaś znanego u łatwo jest określić również wartość $\frac{dp}{dx}$. Dowiedziemy tego poniżej dla przepływu ustalonego.

Ponieważ na zewnątrz warstwy przyściennej przepływ jest potencjalny, można dla górnej granicy warstwy przyściennej napisać równanie Lagrange'a—Bernoulliego

$$p+\varrho\frac{u^2}{2}=\text{const}.$$

Różniczkując względem x znajdziemy

$$\frac{dp}{dx}+\varrho u\frac{du}{dx}=0,$$

skąd

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho u \frac{du}{dx},$$

czyli $\frac{dp}{dx}$ zostało wyrażone przez znaną funkcję $u(x)$.

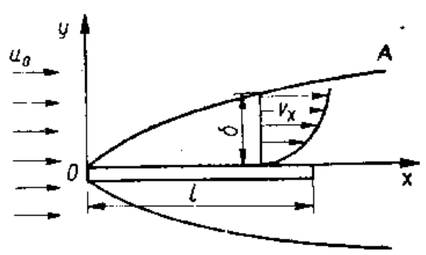
Wielkości u, $\frac{dp}{dx}$ oraz gęstość ϱ można zatem traktować jako znane. Ponieważ do równania (10.6) wchodzą trzy wielkości niewiadome v_x, δ i τ_0, konieczne są dla ich określenia jeszcze dwa dodatkowe równania, wiążące te niewiadome. Rolę tych równań spełnia zwykle prawo rozkładu prędkości wzdłuż grubości warstwy przyściennej oraz zależność naprężenia stycznego od grubości warstwy.

Jeżeli rozkład prędkości wewnątrz warstwy przyściennej został przyjęty prawidłowo, otrzymujemy dobre przybliżenie zarówno dla zależności $\delta = \delta(x)$, jak i dla współczynnika oporu tarcia.

§ 4. Obliczenie laminarnej warstwy przyściennej na płaskiej płytce

Jako przykład zastosowania wyrażenia całkowego dla warstwy przyściennej do rozwiązania zagadnień praktycznych rozważymy opływ płytki przy założeniu płaskiego przepływu ustalonego cieczy nieściśliwej[1].

Rozwiązanie zagadnienia opływu płaskiej płytki odgrywa w teorii oporu tarcia dużą rolę. Ustawiona wzdłuż przepływu płytka stanowi najprostsze opływane ciało, którego opór zależy wyłącznie do naprężeń stycznych. Znalezione dla płytki zależność $\delta = \delta(x)$ oraz wielkość współczynnika oporu tarcia mogą być wykorzystane przy przybliżonych obliczeniach opływu innych podobnych ciał, na przykład cienkich profilów.



10.4. Laminarna warstwa przyścienna na płaskiej płytce

Załóżmy, że dokoła płytki o długości l mamy płaski przepływ, którego prędkość w nieskończoności wynosi $u_0 = \text{const}$ (rys. 10.4). Po obu stronach płytki utworzy się warstwa przyścienna, której grubość będzie funkcją współrzędnej x liczonej od przedniego punktu O płytki.

Zagadnienie sformułujemy jak następuje. Znając kinematyczny współczynnik lepkości ν płynu, prędkość v_0 przepływu niezakłóconego przed płytką oraz długość płytki l należy określić:

[1] W dalszym ciągu będziemy rozważali jedynie przypadki przepływu ustalonego.

1. rozkład grubości warstwy przyściennej, czyli funkcję

$$\delta = \delta(x);$$

2. opór tarcia płytki X_t.

W celu rozwiązania zagadnienia wykorzystamy wzór całkowy (10.6) dla przepływu ustalonego w warstwie przyściennej

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x^2\, dy - u\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x\, dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Wykażemy, że w rozpatrywanym przypadku $\frac{dp}{dx} = 0$ wewnątrz warstwy przyściennej. Ustaliliśmy mianowicie powyżej, że na górnej granicy warstwy przyściennej

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho u \frac{du}{dx}.$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $u = u_0 = \text{const}$, zatem $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{dp}{dx} = 0$ oraz $p = \text{const}$ na górnej granicy warstwy. Jednak ciśnienie p w warstwie przyściennej nie zmienia się wzdłuż normalnej do powierzchni ciała, a zatem $p = \text{const}$ i $\frac{dp}{dx} = 0$ również wewnątrz warstwy przyściennej. Wzór całkowy (10.6) przybiera więc postać

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x^2\, dy - u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho v_x\, dy = -\tau_0. \tag{10.7}$$

Do obliczenia grubości warstwy przyściennej oraz oporu tarcia płytki potrzebne są jeszcze dwie dodatkowe zależności, za które można przyjąć:

1. charakter rozkładu prędkości v_x wzdłuż grubości warstwy oraz
2. równanie wiążące naprężenie styczne na powierzchni ciała z grubością warstwy δ.

Przystępując do ułożenia pierwszego równania uzupełniającego, to znaczy prawa zmiany prędkości v_x wzdłuż wysokości warstwy y, postąpimy w następujący sposób. Zamiast tego, by szukać istotnego prawa rozkładu prędkości $v_x = v_x(y)$, założymy postać funkcji $v_x = v_x(y)$. Założymy mianowicie, że v_x wyraża się następującym wielomianem trzeciego stopnia:

$$v_x = a + by + cy^2 + dy^3, \tag{a}$$

gdzie a, b, c i d — współczynniki na razie nie znane.

Ten sposób po raz pierwszy podany był przez niemieckiego uczonego Pohlhausena.

Dla ich określenia wykorzystamy warunki brzegowe. Będą one dwóch rodzajów: kinematyczne, nakładane na prędkość na granicy warstwy przyściennej, oraz dynamiczne, nakładane na siły tarcia wewnętrznego. Ułożymy te warunki brzegowe.

1. Ponieważ na dolnej granicy warstwy przyściennej prędkość równa jest zeru, więc

$$(v_x)_{y=0} = 0, \tag{I}$$

2. Na górnej granicy warstwy prędkość v_x staje się równa prędkości u_0 przepływu potencjalnego. Zatem

$$(v_x)_{y=\delta} = u_0. \tag{II}$$

3. Na górnej granicy warstwy przyściennej siła tarcia wewnętrznego $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$ staje się zerem. Stąd

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0. \tag{III}$$

4. W celu określenia czwartego warunku brzegowego wykorzystamy różniczkowe równania warstwy przyściennej.

Z pierwszego równania układu (10.4) wynika, że na dolnej granicy warstwy przyściennej

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}$$

(ponieważ przy $y = 0$ prędkości $v_x = v_y = 0$).

Ale ponieważ w danym przypadku $\frac{dp}{dx} = 0$, zatem również

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0. \tag{IV}$$

Cztery podane warunki brzegowe pozwalają na określenie wielkości czterech współczynników a, b, c, d:

$$a = 0, \quad b = \frac{3}{2}\frac{u_0}{\delta}, \quad c = 0, \quad d = -\frac{u_0}{2\delta^3}.$$

Prawo rozkładu prędkości $v_x = v_x(y)$ przybiera zatem następującą postać:

$$v_x = \frac{u_0}{2\delta}\left(3y - \frac{y^3}{\delta^2}\right). \tag{b}$$

Pierwsze niezbędne równanie dodatkowe zostało zatem znalezione. Drugie równanie dodatkowe znajdziemy, wykorzystując wzór Newtona na tarcie wewnętrzne (przy przepływie laminarnym):

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Ponieważ w danym przypadku według wzoru (b)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{u_0}{2\delta}\left(3 - \frac{3y^2}{\delta^2}\right),$$

więc

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta}. \tag{c}$$

Po podstawieniu do wzoru całkowego (10.7) znalezionych wyrażeń na prędkość v_x i naprężenie styczne τ_0 otrzymamy równanie różniczkowe, zawierające jedną niewiadomą δ; rozwiązując je znajdziemy $\delta = \delta(x)$.

Za pomocą wyrażenia (b) na prędkość v_x łatwo jest obliczyć całki, występujące we wzorze całkowym (10.7):

$$\int_0^\delta \varrho v_x\,dy = \int_0^\delta \varrho\frac{u_0}{2\delta}\left(3y - \frac{y^3}{\delta^2}\right)dy = \frac{3}{2}\varrho\frac{u_0}{\delta}\int_0^\delta y\,dy - \varrho\frac{u_0}{2\delta^3}\int_0^\delta y^3\,dy =$$

$$= \frac{3}{2}\varrho\frac{u_0}{\delta}\frac{\delta^2}{2} - \varrho\frac{u_0}{2\delta^3}\frac{\delta^4}{4} = \frac{5}{8}\varrho u_0\delta,$$

$$\int_0^\delta \varrho v_x^2\,dy = \varrho\frac{u_0^2}{4\delta^2}\int_0^\delta\left(9y^2 - 6\frac{y^4}{\delta^2} + \frac{y^6}{\delta^4}\right)dy =$$

$$= \varrho\frac{u_0^2}{4\delta^2}\left(3\delta^3 - \frac{6}{5}\delta^3 + \frac{1}{7}\delta^3\right) = \frac{17}{35}\varrho u_0^2\delta.$$

Podstawiając wartości tych całek do (10.7), otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{17}{35}\varrho u_0^2\frac{d\delta}{dx} - \frac{5}{8}\varrho u_0^2\frac{d\delta}{dx} = -\frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta},$$

które po uproszczeniu będzie miało następującą postać:

$$\frac{13}{140}\varrho u_0\delta\,d\delta = \mu\,dx.$$

Całkując, znajdziemy

$$\frac{13}{280}\varrho u_0 \delta^2 = \mu x + C.$$

Ponieważ przy $x = 0$ grubość $\delta = 0$, więc oczywiście $C = 0$. Zatem

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}\frac{\mu x}{\varrho u_0}}$$

lub

$$\delta = 4{,}64\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \tag{10.8}$$

Z równania (10.8) wynika, że zewnętrzna granica warstwy przyściennej jest parabolą drugiego stopnia; przy czym grubość δ warstwy przyściennej wzrasta ze zwiększeniem x i zmniejsza się ze wzrostem prędkości u_0 przepływu niezakłóconego.

Metody dokładniejsze dają następującą zależność dla prawa zmiany δ:

$$\delta = 5{,}8\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \tag{10.8'}$$

Widzimy, że założenie rozkładu prędkosci w postaci paraboli trzeciego stopnia prowadzi do niewielkiego stosunkowo błędu.

Określimy opór tarcia X_t, działający na jedną stronę płytki o szerokości b. Na jednostkę powierzchni płytki działa siła

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta}.$$

Przy przepływie laminarnym w warstwie przyściennej naprężenia będą zatem proporcjonalne do $u_0^{1,5}$, o czym można się łatwo przekonać podstawiając do wzoru na τ_0 wartość δ z równania (10.8).

Na elementarną powierzchnię $dS = b\,dx$ będzie działała siła

$$\tau_0\,dS = \tau_0 b\,dx,$$

skąd całkowita siła tarcia działająca na jedną stronę płytki

$$X_t = \int_0^l \tau_0 b\,dx$$

lub

$$X_t = \int_0^l \mu\frac{3}{2}\frac{u_0}{\delta} b\,dx.$$

Podstawiając wartość δ ze wzoru (10.8), znajdziemy

$$X_t = \frac{3b}{4{,}64\cdot 2}\sqrt{\mu\varrho u_0^3}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

lub

$$X_t = \frac{1{,}3\,b}{2}\sqrt{\mu\varrho u_0^3 l}. \tag{10.9}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\varrho l u_0^2$ otrzymamy

$$X_t = 1{,}3\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}}\frac{\varrho u_0^2 b l}{2}$$

lub

$$X_t = \frac{1{,}3}{\sqrt{R}}\frac{\varrho u_0^2}{2}S, \tag{10.9'}$$

gdzie liczba Reynoldsa $R = \frac{u_0 l}{\nu}$; powierzchnia $S = b\,l$.

Współczynnik oporu płaskiej płytki

$$c_{x_t} = \frac{X_t}{\frac{\varrho u_0^2}{2}S},$$

a zatem w przypadku laminarnej warstwy przyściennej

$$c_{x_t} = \frac{1{,}3}{\sqrt{R}}. \tag{10.10}$$

Współczynnik oporu płytki zależy więc od liczby Reynoldsa i zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z tej liczby.

W paragrafie niniejszym podaliśmy praktyczne wykorzystanie równania (10.6) do obliczania laminarnej warstwy przyściennej. Przejdziemy obecnie do omówienia turbulentnej warstwy przyściennej.

§ 5. Obliczenie turbulentnej warstwy przyściennej na płaskiej płytce

W przypadku przepływu turbulentnego w warstwie przyściennej nie da się zastosować podanego w paragrafie poprzednim sposobu znalezienia dwóch dodatkowych równań do podstawowego wyrażenia całkowego, gdyż jest on oparty na równaniu (10.4) nie dającym się zastosować, jak już wspomnieliśmy, do turbulentnej warstwy przyściennej. Z tego względu w przypadku przepływu

turbulentnego w warstwie przyściennej dwa dodatkowe równania muszą być znalezione w inny sposób.

Ponieważ prawa przepływu turbulentnego są zbadane najbardziej wyczerpująco w przypadku przepływów przez rury, można więc w charakterze niezbędnych dwóch równań dodatkowych wykorzystać wyniki teorii przepływu przez przewód rurowy.

Wprowadzając hipotezę o analogicznym rozkładzie prędkości wzdłuż grubości warstwy przyściennej płaskiej płytki oraz wzdłuż promienia walcowego przewodu kołowego, można przyjąć, że zmianę prędkości w warstwie przyściennej na płytce określa zależność

$$v_x = u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \tag{10.11}$$

zwana prawem jednej siódmej (równanie 9.73).

Będzie to pierwsze równanie dodatkowe do wyrażenia całkowego.

Drugim równaniem dodatkowym będzie zależność pomiędzy wielkością naprężenia stycznego τ_0, grubością warstwy przyściennej δ i prędkością u_0 przepływu niezakłóconego. Zachowując w dalszym ciągu analogię między turbulentnym przepływem płynu przez przewód oraz wzdłuż płaskiej płytki, możemy tę zależność napisać w postaci (równanie 9.76):

$$\tau_0 = 0{,}0225\,\varrho\, u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\,\delta}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{10.12}$$

Po ustaleniu dwóch niezbędnych równań dodatkowych przejdziemy do wzoru całkowego (10.7)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho\, v_x^2\, dy - u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho\, v_x\, dy = -\tau_0.$$

Obliczymy wchodzące do tego wzoru całki

$$\int_0^\delta \varrho\, v_x\, dy = \int_0^\delta \varrho\, u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} dy = \varrho\frac{u_0}{\delta^{\frac{1}{7}}}\int_0^\delta y^{\frac{1}{7}}\, dy = \frac{7}{8}\,\varrho\, u_0\,\delta,$$

$$\int_0^\delta \varrho\, v_x^2\, dy = \int_0^\delta \varrho\, u_0^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} dy = \varrho\frac{u_0^2}{\delta^{\frac{2}{7}}}\int_0^\delta y^{\frac{2}{7}}\, dy = \frac{7}{9}\,\varrho\, u_0^2\,\delta.$$

Podstawiając znalezione wartości do równania (10.7) będziemy mieli

$$\frac{7}{72}\,\varrho\, u_0^2\frac{d\delta}{dx} = \tau_0. \tag{10.13}$$

Podstawiając wartość τ_0 z równania (10.12), otrzymamy

$$\frac{7}{72}\,\varrho\, u_0^2\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0225\,\varrho\, u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\,\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

lub

$$\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{u_0\,\delta}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Rozdzielając zmienne, doprowadzimy równanie to do postaci

$$\delta^{\frac{1}{4}}\, d\delta = 0{,}0225\,\frac{72}{7}\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$$

Całkując i określając stałą dowolną C na podstawie warunku: $x = 0$, $\delta = 0$ otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$\delta = 0{,}37\left(\frac{\nu}{u_0\, x}\right)^{\frac{1}{5}} x. \tag{10.14}$$

Z otrzymanego wyrażenia wynika, że grubość turbulentnej warstwy przyściennej narasta bardziej intensywnie niż grubość warstwy laminarnej, gdyż w tym przypadku wielkość δ jest proporcjonalna do $x^{\frac{4}{5}}$ (w warstwie laminarnej δ była ona proporcjonalna do $x^{\frac{1}{2}}$).

Wniosek ten ma następującą interpretację fizykalną: dzieje się tak dlatego, że zachodzące w warstwie turbulentnej mieszanie się elementów płynu sprzyja bardziej intensywnemu wzrostowi warstwy.

Określimy z kolei opór tarcia X_t. Wykorzystując równanie (10.13), otrzymamy

$$X_t = \int_0^l \tau_0\, b\, dx = \int_0^l b\,\frac{7}{72}\,\varrho\, u_0^2\frac{d\delta}{dx}\, dx = \frac{7}{72}\,\varrho\, u_0^2\, b\int_0^{\delta(l)} d\delta = \frac{7}{72}\,\varrho\, u_0^2\, b\,\delta(l).$$

Ponieważ ze wzoru (10.14) wynika, że

$$\delta(l) = 0{,}37\left(\frac{\nu}{u_0\, l}\right)^{\frac{1}{5}} l,$$

zatem dla współczynnika

$$c_{x_t} = \frac{X_t}{\frac{\varrho\, u_0^2}{2}\, S},$$

gdzie

$$S = b\,l,$$

otrzymamy

$$c_{x_t} = 0{,}072\left(\frac{\nu}{u_0 l}\right)^{\frac{1}{5}}$$

lub

$$c_{x_t} = \frac{0{,}072}{R^{0,2}}. \tag{10.15}$$

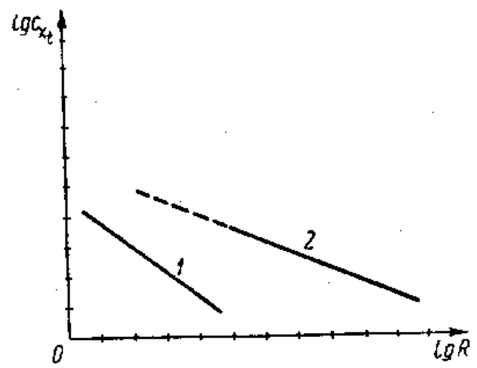
Zależność współczynników oporu od liczby Reynoldsa jest wygodnie wyrażać w tak zwanych współrzędnych logarytmicznych, w charakterze których przyjmowane są $\lg R$ i $\lg c_{x_t}$ (rys. 10.5). Zależność c_{x_t} w przypadku laminarnej warstwy przyściennej wyrazi się przy tym prostą *1*:

$$\lg c_{x_t} = \lg 1{,}3 - \frac{1}{2}\lg R$$

o współczynniku kątowym $-\frac{1}{2}$, a zależność c_{x_t} w przypadku turbulentnej warstwy przyściennej — prostą *2*:

$$\lg c_{x_t} = \lg 0{,}072 - \frac{1}{5}\lg R$$

o współczynniku kątowym $-\frac{1}{5}$.



10.5. Zależność współczynnika c_{x_t} płaskiej płytki od liczby Reynoldsa
1 — laminarna warstwa przyścienna;
2 — turbulentna warstwa przyścienna

Widzimy, że w obydwu przypadkach współczynnik oporu maleje wraz ze zwiększeniem liczby Reynoldsa, lecz dla warstwy turbulentnej zachodzi to znacznie wolniej niż w przypadku warstwy laminarnej.

Jak wykazują doświadczenia, współczynnik oporu płytki w przypadku turbulentnej warstwy przyściennej określa dokładniej wzór

$$c_{x_t} = \frac{0{,}074}{R^{0,2}}. \tag{10.16}$$

W granicach $10^6 \leqslant R \leqslant 10^9$ korzysta się często z następującego równania:

$$c_{x_t} = \frac{0{,}455}{(\lg R)^{2,58}}. \tag{10.17}$$

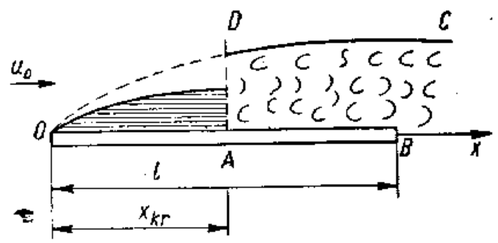
Widzimy, że teorię dostatecznie dobrze potwierdza doświadczenie, a tym samym sprawdza się wprowadzona powyżej analogia między turbulentnymi

przepływami przez przewody a przepływami w warstwie przyściennej wzdłuż płaskiej płytki.

W większości przypadków wykorzystuje się do obliczania warstwy przyściennej wzór całkowy (10.6), a nie równanie (10.4), ponieważ te ostatnie są — jako równania różniczkowe w pochodnych cząstkowych—bardziej skomplikowane od wzoru całkowego, dającego się, jak wykazaliśmy, łatwo sprowadzić do postaci równania różniczkowego zwyczajnego. Należy jednak zaznaczyć, że korzystając z wyrażenia całkowego trzeba w tej lub innej postaci zakładać rozkład ciśnień w warstwie przyściennej.

§ 6. Obliczenie warstwy przyściennej na płaskiej płytce w przypadku przepływu laminarnego i turbulentnego

Charakter warstwy przyściennej powstającej przy opływie płaskiej płytki zależy w dużym stopniu od warunków opływu, określanych liczbą Reynoldsa. Przy stosunkowo niewielkich liczbach Reynoldsa tworzy się wzdłuż płytki laminarna warstwa przyścienna, której obliczenie podane zostało w § 4.



10.6. Schemat obliczeniowy mieszanej warstwy przyściennej na płaskiej płytce

Przy bardzo dużych wartościach liczby Reynoldsa tworzy się w rzeczywistości wzdłuż całej płytki turbulentna warstwa przyścienna. Przypadek ten rozważyliśmy w § 5. Natomiast w zakresie liczb Reynoldsa od $R = 10^5$ do $R = 5 \cdot 10^6$ tworzy się na początku płytki laminarna warstwa przyścienna ulegająca w pewnym miejscu zakłóceniu i przechodząca następnie w warstwę całkowicie turbulentną.

W paragrafie niniejszym omówimy właśnie taki przypadek, gdy na przedniej części płytki OA tworzy się laminarna warstwa przyścienna, a za nią, na odcinku AB — warstwa turbulentna (rys. 10.6); przypadek taki po raz pierwszy rozpatrzył Prandtl.

Zróbmy dwa założenia upraszczające:

a. przejście od laminarnej warstwy przyściennej do turbulentnej zachodzi raptownie w punkcie A; odległość OA oznaczymy przez X_{kr},

b. zmiana grubości warstwy przyściennej turbulentnej oraz rozkład prędkości i naprężeń stycznych w warstwie jest analogiczny do tego, jaki byłby w przypadku powstawania turbulentnej warstwy przyściennej nie od punktu A, lecz od krawędzi natarcia O (rys. 10.6).

Wychodząc z tych założeń można przeprowadzić obliczenie oporu tarcia w następujący sposób. Oznaczmy przez X_t'' siłę tarcia działającą na całą płytkę

o długości l zakładając, że warstwa przyścienna jest na całej długości turbulentna. Aby otrzymać siłę tarcia X_t dla warstwy mieszanej, trzeba od X_t'' odjąć siłę tarcia przedniej części warstwy OA traktując ją jako turbulentną i dodać do otrzymanej różnicy siłę tarcia działającą na odcinek OA, traktując go jako laminarny, tzn.

$$X_t = X_t'' - X_{t\,OA}'' + X_{t\,OA}',$$

gdzie $X_{t\,OA}'$ — siła tarcia działająca na laminarny odcinek OA.

Siłę tarcia działającą na przedni odcinek płytki o szerokości b (przy założeniu laminarnej warstwy przyściennej) można napisać w postaci

$$c_{x_t}' \varrho \frac{u_0^2}{2} x_{kr} b,$$

a dla warstwy turbulentnej w postaci

$$c_{x_t}'' \varrho \frac{u_0^2}{2} x_{kr} b.$$

Różnica

$$\Delta X_t = -X_{t\,OA}'' + X_{t\,OA}' = -c_{x_t}'' \varrho \frac{u_0^2}{2} x_{kr} b + c_{x_t}' \varrho \frac{u_0^2}{2} x_{kr} b =$$

$$= -\frac{\varrho u_0^2}{2} (c_{x_t}'' - c_{x_t}') x_{kr} b.$$

Podzielimy obie strony tego równania przez $\frac{\varrho \mu_0^2}{2} l b$. Wówczas jako zmianę c_{x_t} płytki, wywołaną istnieniem odcinka laminarnego, otrzymamy

$$\Delta c_{x_t} = -\frac{(c_{x_t}'' - c_{x_t}')}{l} x_{kr} = -\frac{(c_{x_t}'' - c_{x_t}') \frac{x_{kr} u_0}{\nu}}{\frac{u_0 l}{\nu}} = -\frac{A}{R},$$

gdzie litera A oznacza następującą wielkość:

$$A = (c_{x_t}'' - c_{x_t}') \frac{x_{kr} u_0}{\nu} = (c_{x_t}'' - c_{x_t}') R_{kr},$$

gdzie liczbę $R_{kr} = \frac{x_{kr} u_0}{\nu}$ nazywa się *krytyczną liczbą Reynoldsa*.

Ustalono na drodze doświadczalnej, że dla płytek gładkich wielkość $A = 1700$. Przy zwiększeniu chropowatości płytki lub stopnia turbulencji przepływu niezakłóconego zmniejsza się krytyczna liczba Reynoldsa oraz wielkość A. Dla płytek chropowatych $A = 300$. Zatem

$$300 \leqslant A \leqslant 1700.$$

Dla wielkości współczynnika tarcia płaskiej płytki w przypadku mieszanej warstwy przyściennej otrzymamy zatem następujące równanie

$$c_{x_t} = \frac{0{,}074}{R^{0{,}2}} - \frac{A}{R} \tag{10.18}$$

lub

$$c_{x_t} = \frac{0{,}455}{(\lg R)^{2{,}58}} - \frac{A}{R}. \tag{10.19}$$

Z powyższego wynika, że opór tarcia płytki będzie tym mniejszy, im większa jest długość laminarnego odcinka warstwy przyściennej, tzn. im dalej od krawędzi natarcia płytki jest położony punkt A przejścia warstwy laminarnej w turbulentną.

Rozważając opływ płaskiej płytki jako pierwsze przybliżenie opływu profilu lotniczego, dochodzimy do wniosku, że po to, aby opór tarcia był jak najmniejszy, odcinek laminarnej warstwy przyściennej powinien być jak najdłuższy. Innymi słowy punkt A przejścia warstwy laminarnej w turbulentną powinien być przesunięty ku tyłowi profilu możliwie jak najdalej.

Zgodnie z tą zasadą skonstruowano specjalne profile lotnicze o powiększonym obszarze laminarnej warstwy przyściennej i małym oporze (tzw. profile laminarne).

§ 7. Warstwa przyścienna na powierzchni krzywoliniowej

W paragrafach poprzednich omawialiśmy warstwę przyścienną na płaszczyźnie. W przypadku tym prędkość przepływu na zewnątrz warstwy przyściennej była wzdłuż całej osi x stała.

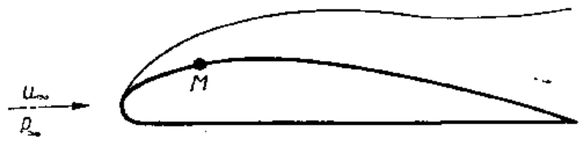
Przy opływie powierzchni krzywoliniowej prędkość u na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej będzie wielkością zmienną, zależną od współrzędnej x. Ciśnienie w warstwie przyściennej na powierzchni krzywoliniowej będzie również funkcją x, co wynika z równania Lagrange'a—Bernoulliego, zastosowanego do zewnętrznej granicy warstwy.

Ustaliliśmy poprzednio, że w warstwie przyściennej rozkład ciśnień wzdłuż ciała niewiele różni się od rozkładu ciśnień w potencjalnym przepływie płynu doskonałego, ponieważ można pochodną $\frac{\partial p}{\partial y}$ w warstwie przyściennej traktować jako równą zeru.

Omówimy teraz opływ powierzchni krzywoliniowej, na przykład profilu płata (rys. 10.7).

Oznaczmy odpowiednio przez v_∞ i p_∞ prędkość oraz ciśnienie przepływu w nieskończoności (przed profilem). Wyjaśnimy, jak będzie w tym przypadku zmieniało się ciśnienie na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej. Ponieważ

na grzbiecie profilu prędkość początkowo wzrasta (do pewnego punktu M), a następnie maleje, zatem ciśnienie będzie zgodnie z równaniem Lagrange'a — — Bernoulliego początkowo malało, potem zaś rosło. W punkcie M prędkość



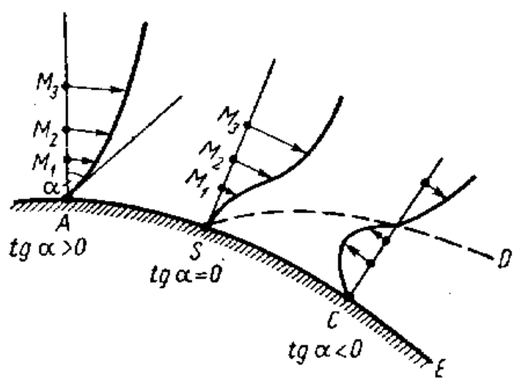
10.7. Warstwa przyścienna na profilu płata nośnego

będzie maksymalna, a ciśnienie minimalne. Elementy płynu w warstwie przyściennej w pobliżu rozważanej powierzchni krzywoliniowej będą zatem poruszały się przy gradiencie ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x}$ zarówno dodatnim, jak i ujemnym.

Fakt ten stanowi istotną różnicę między warstwą przyścienną na powierzchni krzywoliniowej a warstwą na płaskiej płytce, gdzie $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Uwzględniając tę właściwość warstwy przyściennej na powierzchni krzywoliniowej, można wytłumaczyć przyczynę oderwania strug z opływanego ciała oraz powstawanie wirów, odrywających się od opływanej powierzchni.

W przypadku płynu lepkiego styczna i normalna składowa prędkości powinny w punktach powierzchni stawać się zerem. Poza tym, w pewnej niewielkiej odległości od powierzchni opływanego ciała, przepływ mało się różni od przepływu płynu doskonałego, przy którym normalna składowa prędkości na powierzchni ciała staje się zerem, styczna zaś jest różna od zera. Mając to na uwadze, dochodzimy do wniosku, że zmiana składowej stycznej wzdłuż normalnej do powierzchni ciała powinna odpowiadać krzywej wychodzącej z punktu A na rys. 10.8. Jak widać, prędkość styczna, równa zeru w punkcie A, stopniowo wzrasta wzdłuż normalnej do powierzchni krzywoliniowej i w pewnej odległości od powierzchni niewiele się różni od wartości odpowiadającej potencjalnemu przepływowi płynu doskonałego.



10.8. Wykresy rozkładu prędkości stycznych w pobliżu powierzchni krzywoliniowej

Następnie wiadomo, że przy opływie płynem lepkim jakiejkolwiek powierzchni elementy płynu są w warstwie przyściennej przyhamowywane przez siły lepkości, przy czym hamowanie to jest tym większe, im bliżej powierzchni ciała tor elementu przechodzi. Poza tym, jak ustaliliśmy powyżej, gradient

ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x}$ jest różny od zera dla przypadku powierzchni krzywoliniowej oraz, co jest rzeczą ważną, w tylnej części ciała spadek ciśnienia skierowany jest w stronę przeciwną do zasadniczego kierunku przepływu $\left(\frac{\partial p}{\partial x} > 0\right)$, ponieważ w tej części ciśnienie wzrasta w kierunku przepływu. Dlatego też, trafiając do obszaru tylnej części ciała, gdzie ciśnienie wzrasta, elementy płynu doznają przyspieszenia w kierunku przeciwnym do ich prędkości. Owo dodatkowe hamowanie wpłynie oczywiście w sposób szczególnie istotny na ruch elementów poruszających się bezpośrednio przy powierzchni ciała, ponieważ ich energia kinetyczna jest i bez tego, w porównaniu z energią innych elementów, zmniejszana przez siły lepkości.

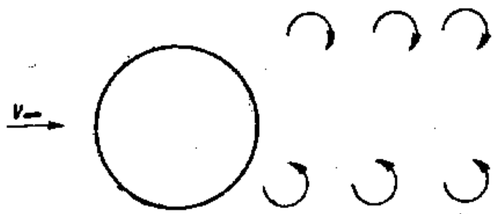
W związku z tym prędkość styczna szeregu elementów stanie się zerem na pewnej linii SD (rys. 10.8), w obszarze zaś DSE prędkość ta zmieni znak, tzn. powstanie w warstwie przyściennej przepływ w odwrotnym kierunku. Powstanie takiego przepływu zwrotnego doprowadza do odrywania się elementów płynu od powierzchni ciała i do tworzenia się wirów — dwie zderzające się ze sobą warstwy płynu odrywając się od ciała zwijają się i tworzą wiry.

Punkt na powierzchni ciała, od którego poczynając następuje oderwanie strug, nazywany jest *punktem oderwania warstwy przyściennej*. Na lewo od punktu oderwania S (rys. 10.8) oczywiście $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \operatorname{tg} \alpha > 0$, na prawo od punktu S natomiast $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \operatorname{tg} \alpha < 0$, w samym zaś punkcie S pochodna $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \operatorname{tg} \alpha = 0$. Punkt S oderwania warstwy przyściennej określa zatem pochodna $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$.

Innymi słowy, profil prędkości w punkcie S jest styczny do normalnej w tym punkcie ($\alpha = 0$). Stąd między innymi wynika, że również naprężenie styczne

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}$$

jest w punkcie oderwania równe zeru.

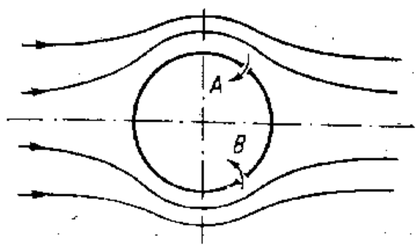


10.9. Schemat opływu walca kołowego z oderwaniem i tworzeniem się wirów

Powyższy wniosek, że właśnie istnienie warstwy przyściennej warunkuje tworzenie się wirów, potwierdza następujące doświadczenie. Jeżeli umieścimy w przepływie na przykład walec kołowy, wówczas, jak dowodzi tego bezpośrednia obserwacja, z walca będą się okresowo odrywały wiry, tworzące za nim tak zwaną drogę wirową (rys. 10.9).

Jeżeli przylegająca bezpośrednio do walca warstwa, tzn. warstwa przyścien-

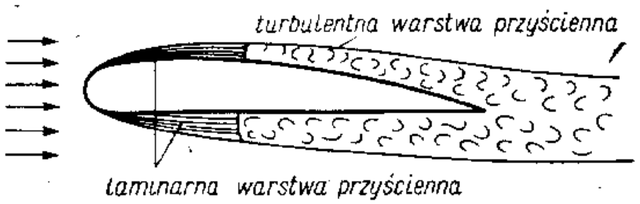
na, jest odsysana do wewnątrz walca przez szczeliny (rys. 10.10), wówczas można opływ walca znacznie polepszyć. Warstwa przyścienna będzie się przy tym „przyklejała" do powierzchni walca, opływ stanie się regularniejszy i oderwanie może być całkowicie zlikwidowane. Przestaną tworzyć się wiry i obraz opływu walca będzie taki, jak pokazano na rys. 10.10, tzn. będzie się upodabniał do opływu potencjalnego. Jak widzimy, teoria warstwy przyściennej odegrała w rozpatrywanym przypadku ważną rolę, umożliwiła bowiem wniknięcie w istotę opływu ciała płynem lepkim oraz wyjaśnienie mechanizmu tworzenia się wirów przy opływie.



10.10. Opływ walca kołowego bez oderwania uzykany wskutek odsysania warstwy przyściennej przez szczeliny A i B

Duże znaczenie teorii warstwy przyściennej w zagadnieniach aerodynamicznych polega także na tym, że znajomość praw rządzących ruchem płynu wewnątrz warstwy przyściennej pozwoliła na bardzo istotne polepszenie opływu płata nośnego drogą oddziaływania na ruch płynu w warstwie przyściennej. Opływ płata nośnego można w szczególności udoskonalić za pomocą tak zwanej mechanizacji płata, która pozwala oddziaływać na warstwę przyścienną we właściwy sposób [9].

Dla ciał o małej krzywiźnie powierzchni oraz opływanych przy małych kątach natarcia można praktycznie przyjmować, że odrywanie wirów nie występuje. W tym przypadku działanie sił lepkości przejawia się tylko w warstwie



10.11. Schemat mieszanej warstwy przyściennej na powierzchni płata

przyściennej przy samej powierzchni ciała i w pewnym wąskim obszarze tworzącym za ciałem rodzaj śladu, a w całym pozostałym obszarze przepływ może być traktowany jako potencjalny.

Wewnątrz warstwy przyściennej przepływ może być laminarny, turbulentny lub mieszany (rys. 10.11). Zależy to od liczby Reynoldsa oraz od warunków opływu (na przykład od stopnia chropowatości opływanego ciała itp.).

Na zakończenie niniejszego paragrafu podamy wzór całkowy (10.6) w postaci wygodniejszej do praktycznego stosowania przy rozwiązywaniu zagadnień związanych z obliczeniem warstwy przyściennej w pobliżu powierzchni krzywoliniowej.

Wzór całkowy (10.6) ma postać

$$\varrho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2\,dy - \varrho u \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\,dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Ponieważ

$$\varrho u \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\,dy = \varrho \frac{d}{dx}\int_0^\delta u v_x\,dy - \varrho\int_0^\delta v_x \frac{du}{dx}\,dy,$$

a z równania Lagrange'a—Bernoulliego wynika, że

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho u \frac{du}{dx} = -\varrho u u',$$

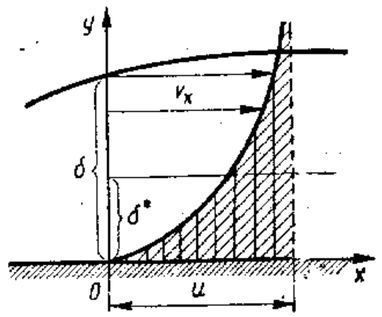
zatem można wzór całkowy podać w postaci następującej

$$\varrho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2\,dy - \varrho\frac{d}{dx}\int_0^\delta u v_x\,dy + \varrho u'\int_0^\delta v_x\,dy - \varrho u u'\delta = -\tau_0$$

lub

$$\varrho u'\int_0^\delta (u - v_x)\,dy + \varrho\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x(u - v_x)\,dy = \tau_0. \tag{10.20}$$

Zwróćmy uwagę na fizykalny sens całek w powyższym wyrażeniu. Całka pierwsza wyraża wywołane wpływem lepkości zmniejszenie się wydatku przez przekrój warstwy przyściennej o wysokości δ. Istotnie, całka ta wyraża różnicę pomiędzy wydatkiem przez przekrój o wysokości δ dla przepływu z prędkością u (tzn. dla przepływu płynu doskonałego) a wydatkiem przepływu z prędkością rzeczywistą v_x, tzn. przy istnieniu lepkości.



10.12. Grubość odpowiadająca stracie wydatku w warstwie przyściennej $\delta^* = \frac{1}{u}\int_0^\delta (u - v_x)\,dy$

Uwzględniając fakt, że w całkach wchodzących do równania (10.20) górna granica δ — jest wielkością umowną (patrz uwagę na str. 257) oraz biorąc pod uwagę, że wartości tych całek mało się zmieniają przy nieograniczonym powiększeniu granicy górnej, można całki w równaniu (10.20) obliczać od 0 do ∞. Rozważana całka przedstawia przy tym pole pewnej powierzchni (rys. 10.12— część zakreskowana).

Polu temu odpowiada pole $\delta^* u$ prostokąta o jednym z boków równym u (rys. 10.12).

Wówczas

$$\delta^* = \frac{1}{u}\int_0^\infty (u - v_x)\,dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy. \tag{10.21}$$

Wielkość δ^* przedstawia oczywiście umowną grubość pewnej warstwy, przez której przekrój w jednostce czasu, przy stałej we wszystkich punktach przekroju prędkości u, przepływa masa płynu równa wymienionemu wyżej zmniejszeniu wydatku.

Wielkość δ^* nazwana została *grubością odpowiadającą stracie wydatku* (nazwa proponowana, przyp. tłum).

Omówimy teraz drugą całkę, wchodzącą do równania (10.20). Określa ona zmniejszenie ilości ruchu płynu zachodzące pod wpływem lepkości. Gdyby lepkość nie istniała — ilość ruchu płynu przepływającego przez pewien przekrój warstwy o wysokości δ^{**} można byłoby napisać w postaci

$$\varrho\,\delta^{**}u^2.$$

Dobierzmy taką grubość δ^{**}, aby było spełnione równanie

$$\varrho\,\delta^{**}u^2 = \int_0^\infty \varrho\, v_x(u - v_x)\,dy.$$

Wówczas

$$\delta^{**} = \frac{1}{\varrho u^2}\int_0^\infty \varrho v_x(u - v_x)\,dy = \int_0^\infty \frac{v_x}{u}\left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy. \tag{10.22}$$

Wielkość δ^{**} nazywana jest *grubością odpowiadającą stracie impulsu* (nazwa proponowana, przyp. tłum.); przedstawia ona sobą umowną grubość pewnej warstwy, przez którą w jednostkę czasu przenoszona jest ze stałą prędkością ilość ruchu płynu równa podanemu powyżej zmniejszeniu ilości ruchu.

Podstawiając wielkości δ^* i δ^{**} do równania (10.20) sprowadzimy je do następującej postaci:

$$\varrho\frac{d}{dx}(\delta^{**}u^2) + \varrho\, u'\delta^* u = \tau_0.$$

Różniczkując otrzymamy

$$\varrho\, u^2\frac{d\delta^{**}}{dx} + \varrho\,\delta^{**}2\,u\,u' + \varrho\, u\, u'\delta^* = \tau_0.$$

W celu sprowadzenia równania do postaci bezwymiarowej podzielimy je przez $\varrho\, u^2$. Wówczas otrzymamy

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'}{u}(2\,\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_0}{\varrho\, u^2} \tag{10.23}$$

lub

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'\delta^{**}}{u}(2 + H) = \frac{\tau_0}{\varrho\, u^2}, \tag{10.23'}$$

gdzie

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}.$$

Taka postać wzoru całkowego jest wygodniejsza przy obliczaniu warstwy przyściennej wzdłuż konturów krzywoliniowych.

§ 8. Obliczanie warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej (metoda L.G. Łojcjanskiego)

Dawniejsze metody obliczania laminarnej warstwy przyściennej na konturze krzywoliniowym były skomplikowane w praktycznym ich stosowaniu; najprostsza z nich to metoda Kármána—Polhausena [37]. Okazała się ona jednak nie dość ścisła, szczególnie w obszarze położonym w tylnej części ciała, w którym wyniki obliczeń wykonanych na podstawie tej metody nie odpowiadały nieraz zupełnie istotnemu obrazowi przepływu.

Aerodynamicy radzieccy opracowali znacznie prostsze, a jednocześnie dogodne w praktyce metody obliczeń.

Podamy poniżej metodę prof. L.G. Łojcjanskiego, która znalazła w ostatnich latach największe zastosowanie [1]. Metoda Łojcjanskiego opiera się na wykorzystaniu przekształconego wzoru całkowego dla warstwy przyściennej (10.23).

Załóżmy, że profile prędkości w warstwie przyściennej mogą być podane jako jednoparametrowa rodzina w postaci

$$\frac{v_x}{u} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, f\right), \tag{10.24}$$

gdzie f — pewien nieokreślony na razie parametr, nazywany *parametrem kształtu*, ponieważ charakteryzuje on wpływ kształtu ciała na rozkład prędkości w warstwie przyściennej (patrz poniżej).

Przy spełnieniu warunku (10.24) stosunek umownych grubości warstwy $\frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ będzie stanowił funkcję tylko jednego parametru f. Istotnie, ponieważ

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy = \delta^{**}\int_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, f\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right),$$

więc

$$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \int_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, f\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right) = H(f). \tag{10.25}$$

Naprężenie styczne na ściance τ_0 będzie również funkcją parametru f. Rzeczywiście

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu\frac{u}{\delta^{**}}\left[\frac{\partial\left(\frac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)}\right]_{y=0},$$

to znaczy

$$\tau_0 = \mu\frac{u}{\delta^{**}}\zeta(f), \tag{10.26}$$

ponieważ nawias kwadratowy jest funkcją f. Na współczynnik tarcia otrzymamy zatem wyrażenie

$$\frac{\tau_0}{\varrho u^2} = \frac{\nu}{u\,\delta^{**}}\zeta(f). \tag{10.27}$$

Znalezione wyrażenia (10.25) i (10.27) zawierające funkcje $H(f)$ i $\zeta(f)$ wprowadzimy do podstawowego równania warstwy przyściennej (10.23'). W wyniku otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'}{u}\delta^{**}[2 + H(f)] = \frac{\nu}{u\,\delta^{**}}\zeta(f) \tag{10.28}$$

lub, mnożąc obydwie części równania przez $2\,\frac{u\,\delta^{**}}{\nu}$,

$$u\frac{d}{dx}\left(\frac{u'\,\delta^{**2}}{\nu}\frac{1}{u'}\right) = 2\,\zeta(f) - 2\frac{u'\,\delta^{**2}}{\nu}[2 + H(f)]. \tag{10.29}$$

Jeżeli jako parametr f warstwy przyściennej przyjmiemy[1]

$$f = \frac{u'\,\delta^{**2}}{\nu}, \tag{10.30}$$

wówczas równaniu (10.29) można nadać postać równania różniczkowego zwyczajnego pozwalającego w sposób dostatecznie prosty znaleźć wielkość f:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{u'}\right) = \frac{1}{u}F(f), \tag{10.31}$$

[1] Jak widać z całego przebiegu wyprowadzenia otrzymanego równania, jest ono słuszne dla warstwy przyściennej zarówno laminarnej, jak i turbulentnej.

gdzie

$$F(f) = 2\left\{\zeta(f) - f[2 + H(f)]\right\} \tag{10.31'}$$

lub ostatecznie

$$\frac{df}{dx} = \frac{u'}{u}F(f) + \frac{u''}{u'}f. \tag{10.32}$$

Równanie to nie da się scałkować w postaci ogólnej. Można je jednak scałkować numerycznie dla każdego konkretnego przypadku rozkładu prędkości w przepływie potencjalnym na zewnątrz warstwy przyściennej, tzn. dla każdej postaci funkcji $u = u(x)$.

Obliczenie warstwy przyściennej sprowadza się w ten sposób do znalezienia funkcji $F(f)$, $\zeta(f)$ i $H(f)$, ponieważ znając te funkcje można dość łatwo obliczyć $f(x)$ z równania (10.32), a następnie $\delta^{**}(x)$ z równania (10.30) i szukane naprężenie styczne na ściance τ_0 z równania (10.26) lub (10.27).

Z warunku $\tau_0 = 0$, co odpowiada wartości funkcji $\zeta(f) = 0$, można znaleźć punkt oderwania warstwy przyściennej.

Przystąpimy obecnie do określenia funkcji $F(f)$, $\zeta(f)$ i $H(f)$. Przyjmiemy w tym celu rodzinę profilów prędkości, wyrażającą przybliżony rozkład prędkości w przekrojach warstwy przyściennej, w postaci następującego wielomianu:

$$v_x = u(a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \ldots + a_N\eta^N), \tag{10.33}$$

gdzie

$$\eta = 1 - \frac{y}{\delta}.$$

Współczynniki tego wielomianu są oczywiście funkcjami x.

Aby określić współczynniki a_n, wykorzystamy warunki brzegowe oraz równania różniczkowe warstwy przyściennej (10.4). Taka metoda określania współczynników w zależności określającej prędkość v_x jako funkcję y była już stosowana wyżej przy rozwiązywaniu zagadnienia opływu płaskiej płytki (§ 4). Obecnie powyższa metoda określania współczynników będzie użyta w postaci bardziej ogólnej.

Na powierzchni opływanego ciała, tzn. przy $y = 0$, jest

$$v_x = 0, \quad v_y = 0. \tag{10.34}$$

Na górnej granicy warstwy przyściennej, tzn. przy $y = \delta$

$$v_x = u, \; v_y \approx 0. \tag{10.35}$$

Poza tym, ponieważ na górnej granicy warstwy $\tau = 0$, więc przy $y = \delta$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{10.36}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób trzy warunki brzegowe (10.34), (10.35) i (10.36). Tymczasem liczba współczynników podlegających określeniu równa jest $N+1$. Konieczne jest zatem znalezienie warunku dodatkowego dla określenia współczynników a_n. Takie warunki dodatkowe można otrzymać na podstawie pierwszego równania warstwy przyściennej (10.4):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Zakładając w tym równaniu $y = 0$ oraz odpowiednio $v_x = v_y = 0$, znajdziemy pierwszy warunek dodatkowy dla $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

przy $y = 0$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\varrho \nu}\frac{dp}{dx}.$$

Biorąc pod uwagę, że na zewnętrznej granicy warstwy, gdzie przepływ jest potencjalny, mamy na podstawie równania Lagrange'a—Bernoulliego

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}$$

oraz uwzględniając fakt, że rozkład ciśnień nie zależy od y, możemy warunek dodatkowy przepisać w takiej postaci:

przy $y = 0$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{u u'}{\nu}. \tag{10.37}$$

W celu znalezienia drugiego warunku dodatkowego dla $\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$ zróżniczkujemy równanie (10.4) względem y. Biorąc pod uwagę, że ciśnienie p w warstwie przyściennej nie zależy od y, otrzymamy wówczas

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$$

lub

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Ponieważ na podstawie równania ciągłości $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, zatem

$$v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Stąd, zakładając $y = 0$, $v_x = v_y = 0$, znajdziemy drugi warunek dodatkowy dla $\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$:

przy $y = 0$

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0. \tag{10.38}$$

Jednakże należy zwrócić uwagę, że wykorzystanie warunków (10.34), (10.37) i (10.38) stwarza możliwość aproksymacji prawa rozkładu prędkości dla małych wartości y, tzn. w pobliżu powierzchni ciała, natomiast na górnej granicy warstwy przyściennej znalezione prawo może się w dużym stopniu różnić od rzeczywistości. W związku z tym konieczne jest uwzględnianie również warunków brzegowych na górnej granicy warstwy przyściennej, tzn. przy $y = \delta$.

Powróćmy do równania warstwy przyściennej (10.4). Ponieważ na podstawie równania Lagrange'a—Bernoulliego, napisanego dla górnej granicy warstwy przyściennej

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}, \tag{10.39}$$

zatem wykorzystując (10.35) i (10.36) otrzymamy z pierwszego równania (10.4) następujący warunek brzegowy:

przy $y = \delta$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \tag{10.40}$$

Otrzymane warunki brzegowe pozwalają na określenie wartości współczynników a_n we wzorze (10.33). Z warunku (10.35) wynika, że $a_0 = 1$. Wykorzystując warunki (10.36) i (10.40), dochodzimy do wniosku, że

$$a_1 = 0 \text{ i } a_2 = 0.$$

Możemy się łatwo przekonać, że w przypadku ciągłości pochodnych v_x względem y do rzędu $(n-1)$ włącznie będziemy mieli przy $y = \delta$

$$\frac{\partial^i v_x}{\partial y^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.40'}$$

Geometrycznie oznacza to, że krzywa $v_x = f(y)$ jest styczna na górnej granicy warstwy przyściennej do prostej $v_x = u$, liczbę zaś n określa rząd styczności.

Wyrażenie na v_x można zatem napisać w następujący sposób:

$$v_x = u(1 + a_n \eta^n + a_{n+1}\eta^{n+1} + a_{n+2}\eta^{n+2}). \tag{10.41}$$

We wzorze (10.41) należy współczynniki a_n określać na podstawie warun-

ków brzegowych jedynie na powierzchni ciała, tzn. przy $y = 0$, gdyż warunki (10.41′) na wewnętrznej granicy warstwy są uwzględnione przez założenie, że współczynniki od a_1 do a_{n-1} są równe zeru.

Określmy współczynniki a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, wykorzystując warunki brzegowe na powierzchni ciała:

przy $y = 0$ $(\eta = 1)$ $\quad v_x = 0, \quad \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\dfrac{u u'}{\nu}$ oraz $\dfrac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0.$

Przy uwzględnieniu wzoru (10.41′) można te warunki podać w postaci następujących równań[1]:

$$1 + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0,$$

$$n(n-1)\,a_n + (n+1)\,n\,a_{n+1} + (n+2)(n+1)\,a_{n+2} = -\frac{u'\delta^2}{\nu},$$

$$n(n-1)(n-2)\,a_n + (n+1)\,n(n-1)\,a_{n+1} + (n+2)(n+1)\,n\,a_{n+2} = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ trzech równań do określenia trzech współczynników a_n, a_{n+1}, a_{n+2}. Oznaczając wielkość bezwymiarową

$$\frac{u'\delta^2}{\nu} = \lambda \tag{10.42}$$

oraz rozwiązując układ tych równań, znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{6}(n+1)(n+2), \\ a_{n+1} &= -\frac{n}{n+1}\lambda + \frac{1}{3}(n-1)(n+2), \\ a_{n+2} &= \frac{n-1}{2(n+1)}\lambda - \frac{1}{6}(n-1)\,n. \end{aligned}\right\} \tag{10.43}$$

[1] W celu otrzymania tych równań wykorzystane zostały następujące zależności:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\delta^3}\frac{\partial^3 v_x}{\partial \eta^3}.$$

Obecnie, gdy współczynniki a_n, a_{n+1}, a_{n+2} zostały znalezione, można v_x wyrazić przez λ (oraz n), a zatem

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy = -\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_{n+2}}{n+3} = H^*(\lambda), \tag{10.44}$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \frac{v_x}{u}\left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy = H^* - \frac{a_n^2}{2n+1} - \frac{a_{n+1}^2}{2n+3} - \frac{a_{n+2}^2}{2n+5} - \frac{a_n a_{n+1}}{n+1} -$$

$$- \frac{2\,a_n a_{n+2}}{2n+3} - \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{n+2} = H^{**}(\lambda). \tag{10.45}$$

Wielkość ζ może być również wyrażona przez λ:

$$\zeta = \left[\frac{\partial\left(\dfrac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\dfrac{y}{\delta^{**}}\right)}\right]_{y=0} = \frac{\delta^{**}}{\delta}\left[\frac{\partial\left(\dfrac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\dfrac{y}{\delta}\right)}\right]_{y=0} = H^{**}(\lambda)\,b(\lambda), \tag{10.46}$$

gdzie

$$b(\lambda) = \frac{1}{n+1}\lambda + \frac{1}{3}(n+2). \tag{10.46′}$$

Naprężenie styczne na ściance

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \sqrt{\mu\,\varrho\,u' u^2}\,\frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}. \tag{10.47}$$

Zaznaczymy, że wielkość f może być również wyrażona w prosty sposób za pomocą parametru λ

$$f = \frac{u'\delta^{**2}}{\nu} = \frac{u'\delta^2}{\nu}\left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^2 = \lambda H^{**2}. \tag{10.48}$$

Ściśle biorąc, wszystkie napisane dotychczas wielkości były funkcjami nie jednego parametru λ, lecz dwóch: λ i n.

Biorąc pod uwagę, że rodzina (10.41) powinna być jednoparametrowa, ponieważ dla określenia parametru f lub związanego z nim parametru λ dysponujemy tylko jednym równaniem (10.32), wyrazimy wykładnik potęgi n również za pomocą parametru λ.

Zakładając, że $n = n(\lambda)$, oraz wykorzystując ścisłe rozwiązania równań różniczkowych warstwy przyściennej dla przypadków szczególnych, gdy $u(x)$

jest funkcją potęgową $u(x) = \text{const}\, x^m$, prof. Łojcjanski zaproponował przyjęcie następującego liniowego związku pomiędzy n i λ

$$n = 0{,}15\,\lambda + 4. \tag{10.49}$$

W tym przypadku, wykorzystując wszystkie otrzymane powyżej równania, można otrzymać szukane zależności w funkcji tylko jednego parametru f, tzn. znaleźć $H(f)$, $\zeta(f)$, $F(f)$, których wartości liczbowe podane są dla udogodnienia w tablicy 10.1.

Jest rzeczą bardzo ważną, że w przypadku zależności jednoparametrowej postać funkcji $F(f)$, $\zeta(f)$ i $H(f)$ nie zależy od charakteru przepływu $u(x)$, tzn. od kształtu profilu płata i jego kąta natarcia. Z tego względu funkcje $H(f)$, $\zeta(f)$ i $F(f)$ otrzymały nazwę *funkcji uniwersalnych*.

Scałkujemy równanie (10.32). Z tablicy 10.1 wynika, że F i f są związane zależnością, bardzo zbliżoną do zależności liniowej

$$F(f) = a - bf + \varepsilon(f),$$

gdzie $a = 0{,}44$ i $b = 5{,}75$, $\varepsilon(f)$ zaś — pewna mała poprawka do tej liniowej zależności.

Tablica 10.1

f	$F(f)$	$\zeta(f)$	$H(f)$	f	$F(f)$	$\zeta(f)$	$H(f)$
−0,089	1,04	0,000	3,85	0,01	0,38	0,236	2,55
−0,085	1,00	0,019	3,66	0,02	0,33	0,253	2,50
−0,08	0,96	0,039	3,50	0,03	0,275	0,270	2,46
−0,07	0,88	0,071	3,28	0,04	0,22	0,286	2,41
−0,06	0,81	0,097	3,12	0,05	0,17	0,302	2,36
−0,05	0,74	0,120	3,00	0,06	0,12	0,318	2,32
−0,04	0,68	0,142	2,90	0,07	0,07	0,335	2,28
−0,03	0,615	0,162	2,82	0,08	0,02	0,350	2,24
−0,02	0,55	0,181	2,74	0,084	0,007	0,357	2,22
−0,01	0,495	0,200	2,67	0,085	−0,002	0,357	2,22
0,00	0,44	0,219	2,61				

Jeżeli ostatnie wyrażenie na $F(f)$ podstawimy do równania (10.32), otrzymamy

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{u''}{u'} - b\,\frac{u'}{u}\right) f + \frac{u'}{u}\,[a + \varepsilon(f)].$$

Całkując te równania różniczkowe oraz określając stałą dowolną z warunku skończoności f przy $x = 0$, otrzymamy

$$f(x) = a\,\frac{u'(x)}{[u(x)]^b}\int_0^x [u(\xi)]^{b-1}\,d\xi + \frac{u'(x)}{[u(x)]^b}\int_0^x [u(\xi)]^{b-1}\,\varepsilon(f)\,d\xi,$$

gdzie ξ — zmienna całkowania[1].

Zaniedbując w pierwszym przybliżeniu drugi składnik w prawej części równania, tzn. zastępując funkcję $F(f)$ funkcją liniową, oraz podstawiając wartości współczynników a i b, otrzymamy następujący przybliżony wzór na określenie parametru $f(x)$:

$$f(x) = 0{,}44\,\frac{u'(x)}{[u(x)]^{5{,}75}}\int_0^x [u(\xi)]^{4{,}75}\,d\xi.$$

Równanie ostatnie można przepisać w postaci wygodniejszej do obliczeń, z całkowitymi wykładnikami potęg:

$$f(x) = 0{,}46\,\frac{u'(x)}{[u(x)]^6}\int_0^x [u(\xi)]^5\,d\xi. \tag{10.50}$$

W tym przypadku błąd wielkości δ^{**} nie przekracza 3%.

Otrzymane równanie (10.50) stosowane jest do obliczeń charakterystyk laminarnej warstwy przyściennej na powierzchni płata nośnego.

Obliczenia warstwy przyściennej według omówionej metody Łojcjanskiego można dokonywać zgodnie z następującym schematem.

Mając założony rozkład prędkości u (a zatem również u') określamy według wzoru (10.50) wartość parametru $f(x)$.

Wykorzystując (10.30) obliczamy grubość odpowiadającą stracie impulsu według wzoru

$$\delta^{**}(x) = \sqrt{\frac{f(x)\,\nu}{u'(x)}}.$$

Za pomocą podanej powyżej tablicy znajdujemy odpowiednią wartość $\zeta(x)$.

Następnie łatwo jest już znaleźć pozostałe interesujące nas wielkości (δ^*, τ_0).

W szczególności naprężenie styczne $\tau_0(x)$ na powierzchni płata można obliczyć z równania (10.26)

$$\tau_0(x) = \mu\,\frac{u(x)}{\delta^{**}(x)}\,\zeta[f(x)].$$

Znając $\tau_0(x)$ można obliczyć opór tarcia profilu lotniczego.

W celu uproszczenia obliczeń praktycznych wprowadza się często wielkości bezwymiarowe

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \qquad \bar{x} = \frac{x}{b},$$

[1] Otrzymane równanie jest liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym o współczynnikach zależących od x; można je scałkować w sposób ogólnie znany. Wartość $x = 0$ odpowiada punktowi spiętrzenia.

gdzie:

u_∞ — prędkość przepływu niezakłóconego,

b — cięciwa profilu płata.

W tym przypadku wyrażenie na $f(x)$ przybierze postać

$$f(\bar{x}) = 0{,}46\,\frac{\bar{u}'(\bar{x})}{[\bar{u}(\bar{x})]^6}\int_0^{\bar{x}}[\bar{u}(\bar{\xi})]^5\,d\bar{\xi}. \tag{10.50'}$$

W ten sposób metoda Łojcjanskiego pozwala całkowicie rozwiązać skomplikowane zagadnienie obliczenia laminarnej warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej, przy czym wszystko sprowadza się właściwie do znalezienia funkcji $f(x)$.

Na zakończenie niniejszego paragrafu zaznaczymy, że na podstawie równań (10.30) i (10.50) można otrzymać równanie

$$\frac{\delta^{**2}}{\nu} = \frac{0{,}46}{u^6}\int_0^x u^5(\xi)\,d\xi. \tag{10.51}$$

Otrzymane powyżej wyniki pozwalają znaleźć punkt oderwania laminarnej warstwy przyściennej z ścianki krzywoliniowej.

W rzeczywistości, w punkcie oderwania $\tau_0 = 0$, tzn. $\zeta = 0$, co odpowiada wartości $f = -0{,}089$ (tabl. 10.1). Dla punktu oderwania można zatem na podstawie równania (10.30) napisać

$$\frac{u'\delta^{**2}}{\nu} = -0{,}089. \tag{10.52}$$

L.G. Łojcjanski rozszerzył podany wyżej sposób obliczania laminarnej warstwy przyściennej również na przypadek, gdy cała warstwa jest turbulentna. Oprócz tego sposób Łojcjanskiego można stosować nie tylko dla płaskiego opływu płata, lecz również do obliczania opływu ciał obrotowych (kadłuba itp.) strumieniem osiowo symetrycznym [1].

§ 9. Określenie punktu przejścia laminarnej warstwy przyściennej w turbulentną na ściance krzywoliniowej (metoda A.A. Dorodnicyna—L.G. Łojcjanskiego)

(paragraf pozostawiony z wyd. I)

Do obliczenia oporu płata przy założonych warunkach lotu potrzebna jest znajomość długości odcinka warstwy przyściennej, w której panuje przepływ laminarny, oraz odcinka o przepływie turbulentnym. W tym celu konieczne jest określenie tzw. punktu przejścia na profilu płata, tzn. miejsca na profilu, od którego poczynając laminarna warstwa przyścienna (przy określonych warun-

kach) zmienia się w warstwę turbulentną występującą na pozostałej tylnej części profilu.

Załóżmy najpierw, że doskonale gładki płat porusza się jednostajnie w nieruchomym płynie niezaburzonym. Na płacie takim ustali się laminarna warstwa przyścienna, która będzie albo całkowicie pokrywała płat, albo też oderwie się od jego „dyfuzorowej" części w pewnym punkcie x_s, którego położenie określa teoria laminarnej warstwy przyściennej omówiona w paragrafie poprzednim. Jak dowiedziono powyżej, w punkcie oderwania warstwy laminarnej

$$\frac{u'\delta^{**2}}{\nu} = -0{,}089.$$

Wprowadzając liczbę $R^{**} = \dfrac{u\,\delta^{**}}{\nu}$, można warunek oderwania warstwy laminarnej napisać w postaci

$$\frac{\nu u'}{u^2}\left(\frac{u\,\delta^{**}}{\nu}\right)^2 = \frac{\nu u'}{u^2}R^{**2} = -0{,}089. \tag{10.53}$$

Widzimy, że warunek ten nie zależy od liczby Reynoldsa przepływu, równej $R = \dfrac{u_\infty b}{\nu}$, gdzie u_∞ — prędkość opływu płata, b — cięciwa profilu[1].

W pewnej odległości od punktu oderwania laminarna warstwa traci stateczność, staje się turbulentna i rozpada się na oddzielne, unoszone przez przepływ wiry.

W warunkach rzeczywistych laminarna warstwa przyścienna traci stateczność już przed punktem oderwania x_s na skutek istniejących zaburzeń w przepływie przed płatem lub zakłóceń powstających na samej powierzchni płata, na przykład wskutek chropowatości.

Zaburzenia zewnętrzne, trafiając do warstwy przyściennej, powodują powstawanie w niej pulsacji zarówno samej prędkości, jak i jej pochodnej w kierunku normalnym. Przy takiej pulsacji pochodna prędkości może osiągnąć również wartości ujemne, co odpowiada lokalnym przepływom zwrotnym, a zatem także tworzeniu się wirów. Zakłócenia zewnętrzne nie wywołują przy tym pulsacji prędkości w laminarnej warstwie przyściennej bezpośrednio; powodują one jedynie tworzenie się chwilowych oderwań wywołujących powstanie drobnych wirów wypełniających warstwę przyścienną i powodujące przejście przepływu laminarnego w warstwie w przepływ turbulentny.

W zależności od intensywności zakłóceń oraz innych przyczyn początek obszaru niestacjonarnego tworzenia się wirów może w przepływie leżeć znacznie

[1] Równanie (10.53) wyraża w szczególności znany z doświadczenia fakt, że im grubsza jest warstwa przyścienna, tym mniejsze są gradienty prędkości u' przepływu zewnętrznego, przy których następuje oderwanie laminarnej warstwy przyściennej.

bliżej niż punkt oderwania x_s w przypadku ustalonej warstwy przyściennej, a nawet bliżej niż punkt minimalnego ciśnienia.

Przyjmiemy początek powyższego obszaru jako początek obszaru przejścia warstwy laminarnej w turbulentną[1].

Traktując powyższe zjawisko nagłego odrywania się strug wskutek istnienia zakłóceń zewnętrznych jako pewne zjawisko uśrednione, quasi-stacjonarne, napiszemy dla punktu przejścia warunek analogiczny do (10.53), lecz nieco zmieniony

$$\left(\frac{\nu u'}{u^2}+\gamma\right)R^{**2}=0{,}089, \tag{10.54}$$

gdzie γ jest pewną wielkością określającą w sensie średnim wpływ lokalnego oderwania powstającego wskutek istnienia zakłóceń zewnętrznych.

Wielkość γ można w pierwszym przybliżeniu przyjąć jako stałą, zależną jedynie od charakteru przepływu (oraz niezależną od wielkości prędkości, kształtu profilu płata itp.)[2].

Przy powyższych założeniach obliczenie położenia punktu przejścia będzie przebiegać następująco.

Za pomocą równania (10.51)

$$\frac{\delta^{**2}}{\nu}=\frac{0{,}46}{u^6}\int_0^x u^5(\xi)\,d\xi,$$

a po przejściu do wielkości bezwymiarowych

$$\bar{u}=\frac{u}{u_\infty},\quad \bar{x}=\frac{x}{b}$$

znajdziemy

$$R^{**2}=R\,\varphi(\bar{x}),$$

gdzie

$$\varphi(\bar{x})=\frac{0{,}46}{\bar{u}^4}\int_0^{\bar{x}}\bar{u}^5\,d\bar{\xi}\quad\text{i}\quad R=\frac{u_\infty b}{\nu}.$$

[1] Przy dużych liczbach Reynoldsa, w szczególności podczas lotu, pomiędzy laminarnym i turbulentnym odcinkiem warstwy przyściennej istnieje wąski obszar przejścia, tzn. można bez popełnienia większego błędu mówić o punkcie przejścia warstwy laminarnej w turbulentną, a nie o obszarze przejścia. Przy badaniach w tunelu aerodynamicznym granica pomiędzy warstwą laminarną i turbulentną zaciera się i powstaje pewien obszar przejścia, którego wymiary zależą od szeregu czynników.

[2] W normalnych tunelach aerodynamicznych γ waha się w granicach od $-0{,}5\cdot 10^{-7}$ do $-2{,}5\cdot 10^{-7}$. W tunelach o stosunkowo małej turbulencji można γ przyjąć jako równe $-0{,}2\cdot 10^{-7}$. Liczby te należy traktować jedynie jako określające rząd wielkości γ.

W wielkościach bezwymiarowych

$$\frac{\nu u'}{u^2}=\frac{1}{R}\frac{\bar{u}'}{\bar{u}^2},$$

gdzie przecinek po prawej stronie równania oznacza pochodną względem współrzędnej bezwymiarowej $\bar{x}$, a po lewej — względem współrzędnej wymiarowej x.

Podstawiając ostatnie wyrażenia R^{**} i $\frac{\nu u'}{u^2}$ do równania (10.54), otrzymamy równanie

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\bar{u}'}{\bar{u}^2}+\gamma\right)R\,\varphi(\bar{x})=-0{,}089 \tag{10.55}$$

lub ostatecznie

$$\theta(\bar{x};\gamma,R)=-0{,}089, \tag{10.56}$$

gdzie

$$\theta(\bar{x};\gamma,R)=\left(\frac{\bar{u}'}{\bar{u}^2}+\gamma R\right)\varphi(\bar{x}).$$

Układając tabelę funkcji $\theta(x)$ znajdującej się po lewej stronie tego równania, można dla danego profilu płata i przy określonej wartości c_y, γ, R znaleźć wartość $\bar{x}=\bar{x}_t$, przy której funkcja θ stanie się równa $-0{,}089$. Znajdziemy w ten sposób poszukiwaną odciętą punktu przejścia.

§ 10. Obliczenie turbulentnej warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej (metoda Łojcjanskiego)

(paragraf pozostawiony z wyd. I)

Istnieje szereg półempirycznych, przybliżonych metod obliczania turbulentnej warstwy przyściennej na ściance krzywoliniowej.

Omówimy poniżej metodę obliczenia turbulentnej warstwy przyściennej podaną przez L.G. Łojcjanskiego (1).

Wykorzystamy wyrażenie całkowe dla warstwy przyściennej w postaci (10.23'):

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{u'\delta^{**}}{u}(2+H)=\frac{\tau_0}{\varrho u^2}, \tag{10.57}$$

słuszne zarówno dla laminarnej, jak i turbulentnej warstwy przyściennej i rozważymy wchodzące do tego wyrażenia dwie wielkości charakteryzujące warstwę przyścienną:

$$\frac{u'\delta^{**}}{u}=-\frac{dp}{dx}\frac{\delta^{**}}{\varrho u^2}\quad\text{i}\quad\frac{\tau_0}{\varrho u^2}. \tag{10.58}$$

Pierwsza z nich stanowi bezwymiarowy gradient ciśnienia w kierunku przepływu, a druga — bezwymiarowy współczynnik tarcia lokalnego na powierzchni płata. Zmieniając się od punktu do punktu wielkości te są jednocześnie funkcjami liczby Reynoldsa.

W przypadku laminarnej warstwy przyściennej pomnożenie tych wielkości przez

$$R^{**} = \frac{u\,\delta^{**}}{\nu}$$

uniezależniało je od liczby Reynoldsa, przy czym pierwsza przekształcała się wtedy w parametr podstawowy f charakteryzujący kształt profilów prędkości w przekrojach warstwy (tak zwany parametr kształtu), wielkość zaś druga — w funkcję $\zeta(f)$ tego parametru (równania 10.30 i 10.27).

Załóżmy, że również w przypadku turbulentnej warstwy przyściennej istnieje jakaś nieznana funkcja $G(R^{**})$ mająca analogiczne właściwości, tzn. takie, że wielkość f określona za pomocą równania

$$f = \frac{u'\delta^{**}}{u} G(R^{**}) \tag{10.59}$$

lub

$$f = \frac{\nu u'}{u^2} R^{**} G(R^{**}) \tag{10.59'}$$

będzie parametrem kształtu, a wielkość ζ, określona za pomocą równania

$$\zeta = \frac{\tau_0}{\varrho u^2} G(R^{**}), \tag{10.60}$$

— funkcją parametru kształtu. Wielkość $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ będziemy tak samo traktowali jako funkcję parametru kształtu f.

W celu określenia funkcji $G(R^{**})$ założymy, że przy wszystkich wartościach f postać funkcji $G(R^{**})$ zgodna jest z postacią dla podłużnie opływanej płytki, przy istnieniu turbulentnej warstwy przyściennej. Wykorzystając znany logarytmiczny profil prędkości (wzór 9.74')

$$\frac{v_x}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y\,v_*}{\nu} + 5{,}5,$$

można otrzymać następujące wyrażenie na bezwymiarowy współczynnik tarcia lokalnego na płytce:

$$\frac{\tau_0}{\varrho u^2} = \frac{1}{(5{,}75 \lg R^{**} + 3{,}8)^2}.$$

Ponieważ na płytce $u' = 0$, zatem dla płytki $f = 0$, a więc również $\zeta(f) = \zeta(0) = \text{const}$. Zakładając dla uproszczenia $\zeta = 1$, tzn. włączając stałą do funkcji $G(R^{**})$, otrzymamy następujące wyrażenie przybliżone $G(R^{**})$ dla płytki (wzór 10.60):

$$G(R^{**}) = (5{,}75 \lg R^{**} + 3{,}8)^2 = 33\,(\lg R^{**} + 0{,}66)^2. \tag{10.61}$$

Funkcja $G(R^{**})$ w postaci (10.61) może być wykorzystana przy obliczeniach turbulentnej warstwy przyściennej na profilu lotniczym i dlatego jej argument R^{**} przyjmowany jest dla odpowiedniego przekroju warstwy przyściennej na rozważanym profilu lotniczym.

Przy obliczeniach praktycznych wygodniej jest korzystać z następującego wyrażenia na funkcję $G(R^{**})$, otrzymanego na podstawie danych doświadczalnych:

$$G(R^{**}) = 153{,}2(R^{**})^{\frac{1}{6}}. \tag{10.61'}$$

Wyprowadzimy podstawowe równanie różniczkowe dla parametru kształtu f w przypadku turbulentnej warstwy przyściennej. Pomnożymy w tym celu obydwie strony równania (10.57) przez $G(R^{**})$. Wówczas otrzymamy

$$G(R^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} + (2 + H) f = \zeta. \tag{10.62}$$

Przekształcimy pierwszy człon:

$$G(R^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx}\left[G(R^{**}) \frac{u'\delta^{**}}{u} \frac{u}{u'}\right] - \delta^{**} G'(R^{**}) \frac{dR^{**}}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f \frac{u}{u'}\right) - \delta^{**} G'(R^{**}) \left(\frac{u}{\nu} \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'\,\delta^{**}}{\nu}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f \frac{u}{u'}\right) - R^{**} G'(R^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - R^{**} \frac{G'(R^{**})}{G(R^{**})} f =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f \frac{u}{u'}\right) - \frac{R^{**} G'(R^{**})}{G(R^{**})} G(R^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{R^{**} G'(R^{**})}{G(R^{**})} f.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$m(R^{**}) = \frac{R^{**} G'(R^{**})}{G(R^{**})} = \frac{d \lg G(R^{**})}{d \lg R^{**}}, \tag{10.63}$$

znajdziemy z wyrażenia poprzedniego

$$[1 + m(R^{**})]\, G(R^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f \frac{u}{u'}\right) - m(R^{**}) f$$

lub, wykorzystując równanie (10.62),

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{u}{u'}\right) = (1+m)\zeta - [2+m+(1+m)H]f.$$

Po rozwinięciu pochodnej w lewej części otrzymamy poszukiwane równanie na f:

$$\frac{df}{dx} = \frac{u'}{u}F(f; R^{**}) + \frac{u''}{u'}f, \tag{10.64}$$

gdzie

$$F(f; R^{**}) = (1+m)\zeta - [3+m+(1+m)H]f. \tag{10.65}$$

Równanie różniczkowe (10.64) dla parametru kształtu f jest analogiczne do odpowiedniego równania (10.32) dla laminarnej warstwy przyściennej, przyjętego jako podstawa przybliżonej metody obliczania warstwy laminarnej.

Jeżeli przyjmiemy funkcję $G(R^{**})$ równą

$$G(R^{**}) = R^{**},$$

wówczas, zgodnie z (10.63), wielkość m przybierze wartość $m = 1$ i równanie (10.64) przekształci się w znane równanie (10.32) dla laminarnej warstwy przyściennej, wielkości zaś f, $\zeta(f)$ i $F(f)$ będą równe odpowiednim wielkościom dla warstwy laminarnej (wzory 10.30, 10.27 i 10.31').

W celu dalszego wykorzystania wielkości podstawowych, charakteryzujących warstwę laminarną, dla obliczenia warstwy turbulentnej wprowadzimy następujące wielkości unormowane. Parametr kształtu normujemy w ten sposób, aby w punkcie oderwania wartość jego była równa jedności, tzn. wprowadzimy

$$\bar{f} = \frac{f}{f_s},$$

gdzie f_s — wartość nieunormowanego parametru f w punkcie oderwania ($x = x_s$) różna dla turbulentnej i laminarnej warstwy przyściennej (dla warstwy laminarnej $f_s = -0{,}089$).

Funkcje $\zeta(f)$ i $H(f)$ unormujemy w ten sposób, aby przy $f = 0$ ($u' = 0$), tzn. w punkcie ciśnienia minimalnego, wartości $\zeta(f)$ i $H(f)$ były równe jedności, czyli

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{(\zeta)_{f=0}} = \frac{\zeta}{\zeta_0} \quad \text{i} \quad \bar{H} = \frac{H}{(H)_{f=0}} = \frac{H}{H_0},$$

gdzie ζ_0 i H_0 — wartości parametrów nieunormowanych ζ i H w punkcie minimalnego ciśnienia (przy $f = 0$), tak samo różne dla laminarnej i turbulentnej warstwy przyściennej.

Wartości liczbowe unormowanych wielkości obliczonych na podstawie charakterystyk laminarnej warstwy przyściennej (§ 8) podane są w tablicy 10.2.

Tablica 10.2

$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$	$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$
−0,95	1,63	0,85	0	1,00	1,00
−0,90	1,60	0,86	0,1	0,93	1,02
−0,80	1,53	0,87	0,2	0,85	1,04
−0,70	1,47	0,88	0,3	0,77	1,07
−0,60	1,41	0,90	0,4	0,69	1,10
−0,50	1,34	0,915	0,5	0,60	1,125
−0,40	1,28	0,93	0,6	0,515	1,16
−0,30	1,21	0,95	0,7	0,42	1,20
−0,20	1,14	0,97	0,8	0,31	1,26
−0,10	1,08	0,985	0,9	0,175	1,35
0,00	1,00	1,000	1,0	0,0	1,48

Równanie różniczkowe (10.64) z wielkościami unormowanymi (po podzieleniu prawej i lewej części przez f_s) można napisać w następującej postaci:

$$\frac{d\bar{f}}{dx} = \frac{u'}{u}\bar{F}(\bar{f}; R^{**}) + \frac{u''}{u'}\bar{f}, \tag{10.66}$$

gdzie

$$\bar{F}(\bar{f}; R^{**}) = \frac{1+m}{f_s}\zeta_0\bar{\zeta}(\bar{f}) - [3+m+(1+m)H_0\bar{H}(\bar{f})]\bar{f}. \tag{10.67}$$

Funkcje $\bar{F}(\bar{f}; R^{**})$ dla laminarnej i turbulentnej warstwy przyściennej będą zupełnie różne. W przypadku warstwy laminarnej ($m = 1$) mamy

$$\bar{F}(\bar{f}) \approx -\bar{a} - b\bar{f},$$

gdzie

$$\bar{a} = \frac{-a}{f_s} = -\frac{0{,}44}{-0{,}089} = 4{,}95 \quad \text{i} \quad b = 5{,}75.$$

W celu określenia funkcji $\bar{F}(\bar{f})$ dla turbulentnej warstwy przyściennej konieczna jest znajomość prócz $m(R^{**})$, f_s, H_0 i ζ_0 również $\bar{\zeta}(\bar{f})$ i $\bar{H}(\bar{f})$.

Łojcjanski założył, że związek pomiędzy tymi wielkościami jest taki sam, jak w przypadku warstwy laminarnej, czyli, innymi słowy, przyjął, że funkcje $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{f})$ i $\bar{H} = \bar{H}(\bar{f})$ są dla laminarnej i turbulentnej warstwy przyściennej jednakowe. Założenie takie dobrze potwierdza doświadczenie.

Korzystając z powyższego założenia oraz określając na podstawie danych doświadczalnych wartości m, f_s, H_0 i ζ_0 dla warstwy turbulentnej[1], można pod-

[1] Można założyć, że wartości te są równe $m = 0{,}167$, $f_s = -2$, $H_0 = 1{,}4$ oraz $\zeta_1 = 1$.

stawić wyrażenia $\overline{\zeta}(\overline{f})$ i $\overline{H}(\overline{f})$, wzięte z tabl. 10.2, do równania (10.67) i określić w ten sposób funkcję $F(f)$ dla warstwy turbulentnej. Okazuje się, że z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością można funkcję $\overline{F}(\overline{f})$ dla warstwy turbulentnej traktować również jako funkcję liniową

$$\overline{F}(\overline{f}) = -\overline{a} - b\overline{f}, \tag{10.68}$$

gdzie na podstawie danych doświadczalnych $\overline{a} = 0{,}6$ i $b = 4{,}8$.

Podstawiając (10.68) do równania (10.66) oraz całkując je, otrzymamy wzór na parametr f w następującej postaci:

$$\overline{f}(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^b}\left[C - \overline{a}\int_0^x [u(\xi)]^{b-1}\,d\xi\right].$$

Z warunku skończonej wartości $\overline{f}$ przy $x = 0$ i $u = 0$ wynika, że przy warstwie wyłącznie turbulentnej $C = 0$, czyli

$$\overline{f}(x) = -\frac{\overline{a}\,u'(x)}{[u(x)]^b}\int_0^x [u(\xi)]^{b-1}\,d\xi. \tag{10.69}$$

Podstawiając wartości $\overline{a}$ i b dla warstwy turbulentnej otrzymamy

$$\overline{f}(x) = -0{,}6\frac{u'}{u^{4,8}}\int_0^x u^{3,8}(\xi)\,d\xi. \tag{10.70}$$

Przy istnieniu początkowego odcinka laminarnego o długości x_t otrzymamy z warunku jednakowych grubości odpowiadających stracie impulsu δ^{**} na granicy między laminarnym i turbulentnym odcinkiem warstwy przyściennej

$$\overline{f}(x) = \frac{u'}{u^{4,8}}\left[\overline{f}_t\frac{u_t^{4,8}}{u_t'} - 0{,}6\int_{x_t}^x u^{3,8}(\xi)\,d\xi\right]. \tag{10.71}$$

Na podstawie powyższego obliczenie turbulentnej warstwy przyściennej można wykonywać w następującej kolejności:

1. Ze wzoru (10.69) lub (10.71) znajdujemy $\overline{f}(x)$.

2. Określamy $R^{**}(x)$ na podstawie wzoru (10.59'), który można przepisać w następującej postaci:

$$R^{**}G(R^{**}) = \overline{f}(x)\,f_s\frac{u^2}{u'\nu}. \tag{10.72}$$

3. Obliczamy $\tau_0(x)$ za pomocą równania (10.60):

$$\tau_0 = \frac{\overline{\zeta}[\overline{f}(x)]}{G[R^{**}(x)]}\,\varrho\,u^2 \tag{10.73}$$

(dla turbulentnej warstwy przyściennej $\zeta = \overline{\zeta}$, ponieważ $\zeta_0 = 1$).

Na zakończenie zaznaczymy, że podaną najogólniejszą metodę można stosować również do obliczeń laminarnej warstwy przyściennej, jako dla przypadku szczególnego.

W tym przypadku trzeba do równania (10.69) podstawić wartości $\overline{a} = 4{,}95$ i $b = 5{,}75$ odpowiadające warstwie laminarnej i w równaniach (10.72) oraz (10.73) założyć $G(R^{**}) = R^{**}$.

Rozdział XI

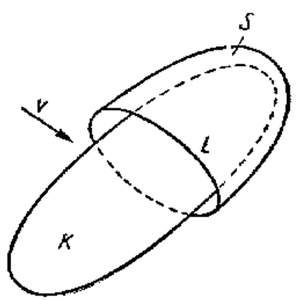
TEORIA PŁATA NOŚNEGO O SKOŃCZONEJ ROZPIĘTOŚCI

§ 1. Modele hydrodynamiczne płata o skończonej rozpiętości

W rozdziale VII omówiona została teoria płata o nieskończenie wielkiej rozpiętości, czyli teoria płata w przepływie płaskim. Teoria ta oparta była na założeniu, że przy opływie płata nie tworzą się ani wiry, ani powierzchnie nieciągłości prędkości.

Przechodząc do omówienia płata nośnego o rozpiętości skończonej, można dowieść, że przy istnieniu cyrkulacji wzdłuż konturu L, otaczającego płat, powinny z płata spływać wiry.

Niech płat K o skończonej rozpiętości opływa płyn doskonały wytwarzając pewną siłę nośną (rys. 11.1). Poprowadźmy obwód L obejmujący płat. Ponieważ na płat działa siła nośna, zatem, zgodnie z twierdzeniem Żukowskiego, cyrkulacja Γ wzdłuż obwodu L jest różna od zera.



11.1. Schemat wyjaśniający istnienie wirów spływających z powierzchni płata

Zbudujmy na obwodzie L pewną powierzchnię S, nie przecinającą płata (rys. 11.1). Stosując twierdzenie Stokesa do obwodu L i powierzchni S, możemy napisać (str. 110)

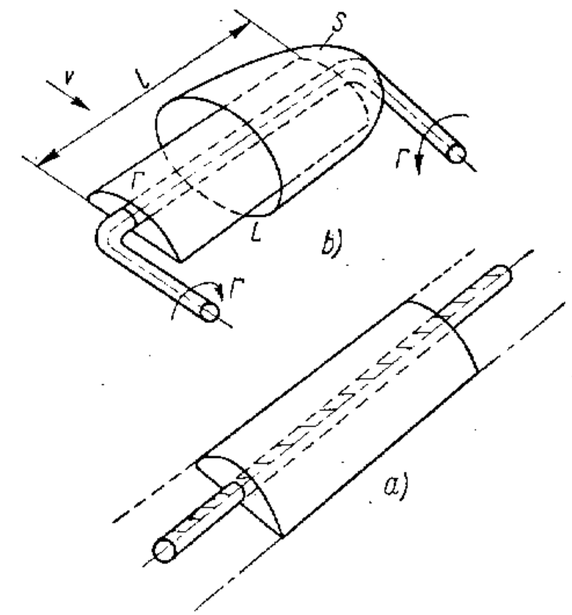
$$\Gamma = \int_L v_L \, dL = 2 \iint_S \omega_n \, dS.$$

Ponieważ cyrkulacja Γ wzdłuż obwodu L jest różna od zera, zatem na dowolnej powierzchni S, zbudowanej w powyższy sposób, powinny istnieć punkty, w których $\omega_n \neq 0$. Innymi słowy, jeżeli cyrkulacja dookoła płata jest różna od zera, to na zewnątrz płata powinny istnieć wiry przecinające powierzchnię S.

Rzeczywisty obraz opływu płata o skończonej rozpiętości jest bardzo skomplikowany, jednak uzasadnione przed chwilą założenie odnośnie do istnienia na zewnątrz płata wirów pozwala na zbudowanie pewnych schematów (modeli) opływu przedstawiających w przybliżeniu rzeczywisty obraz opływu płata.

W teorii płata nośnego o nieskończonej rozpiętości można w pierwszym przybliżeniu zastąpić płat nieskończenie długą linią wirową, nazwaną krótko

wirem związanym płata (rys. 11.2a). W przypadku płata o skończonej rozpiętości nie można wprowadzić tylko wiru związanego (o skończonej długości), gdyż byłoby to sprzeczne z pierwszym twierdzeniem Helmholtza o wirach, zgodnie z którym wir nie może w płynie się urywać (w danym razie w krańcowych punktach płata o skończonej rozpiętości l). Jednocześnie ustaliliśmy, że jeżeli cyrkulacja wzdłuż obwodu L otaczającego płat nie jest równa zeru, wówczas zbudowana na tym obwodzie powierzchnia S jest przecinana przez wiry. Biorąc powyższe pod uwagę, dochodzimy do wniosku, że w przypadku płata



11.2. Wir związany i wir swobodny

o skończonej rozpiętości wir związany powinien wyjść poza granicę płata i, porwany przez strumień powietrza, powinien rozciągać się w nieskończoność w kierunku przepływu zasadniczego, tworząc tak zwane linie wirowe (rys. 11.2b). W odróżnieniu od wiru związanego jego przedłużenia (wiry spływające z końców płata) nazywane są zwykle *wirami swobodnymi*.

W pierwszym przybliżeniu można zatem płat o skończonej rozpiętości zastąpić jedną nieskończoną linią wirową w kształcie podkowy. Zgodnie z twierdzeniem Helmholtza o wirach cyrkulacja prędkości wzdłuż takiego wiru podkowiastego będzie stała ($\Gamma = \text{const}$).

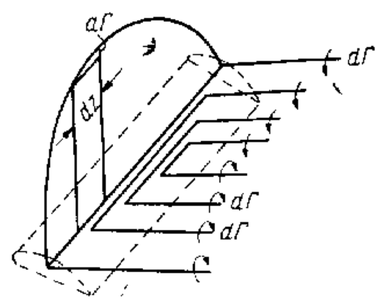
O istnieniu wirów swobodnych łatwo jest się przekonać, jeżeli umieścimy płat w tunelu aerodynamicznym. Wprowadźmy do przepływu pręcik z przymocowaną do niego na nitce kulką z waty w miejscu, w którym powinien tworzyć się wir swobodny. Z chwilą gdy kulka trafi w obszar wiru, zacznie ona obracać się opisując wraz z nitką pewien stożek; przesuwając kulkę wzdłuż tunelu, można w ten sposób zbadać cały wir wzdłuż jego długości. Jeżeli wpro-

wadzimy kulkę w obszar wiru drugiego, spływającego na przeciwnym końcu powierzchni płata, kulka również zacznie się obracać, lecz w przeciwnym kierunku. Na zewnątrz obszaru tych wirów nitka z kulką ustawi się wzdłuż przepływu i kulka będzie nieco drgała, ale obracać się nie będzie.

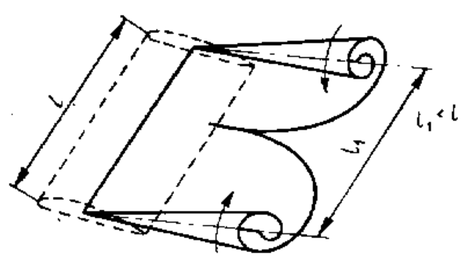
Opracowanie teorii płata o skończonej rozpiętości rozpoczęto w Rosji prawie jednocześnie ze stworzeniem teorii płata o rozpiętości nieskończenie wielkiej.

W Rosji teorię płata o skończonej rozpiętości stworzył akad. S. A. Czapłygin. W Anglii wirowemu układowi płata wiele pracy poświęcił prof. Lanchester, jednakże nie dał on całkowicie opracowanej teorii płata o skończonej rozpiętości.

27 października 1910 r. na zebraniu Komitetu Naukowo-Technicznego Moskiewskiego Towarzystwa Żeglugi Powietrznej S.A. Czapłygin wygłosił swoje „Riezultaty tieorieticzieskich issliedowanij o dwiżenii aeropłanow", poświęcone zagadnieniu oddziaływania powietrza na płat nośny, wykazując istnienie w powietrzu wirów spływających z płata o skończonej rozpiętości.



11.3. Płaszczyzna wirowa za płatem



11.4. Zwijająca się za płatem powierzchnia wirowa

W trzy lata później (22 października 1913 r.) Czapłygin przedstawił w Moskiewskim Towarzystwie Matematycznym teorię płata o skończonej rozpiętości. W pracy tej uzyskał on jako pierwszy na świecie wyrażenie na siłę nośną i opór płata o skończonej rozpiętości.

Za granicą do opracowania teorii płata nośnego o skończonej rozpiętości przystąpiono później i dopiero w r. 1918 opublikował Prandtl jej podstawowe wyniki.

W omówionym najprostszym schemacie wirowym płata o skończonej rozpiętości zakładało się stałą cyrkulację wzdłuż płata. Jednak, jak wykazują doświadczenia, w rzeczywistości cyrkulacja zmienia się wzdłuż rozpiętości płata. Schemat wirowego opływu płata, uwzględniający zmienność cyrkulacji wzdłuż jego rozpiętości, można otrzymać zastępując płat nie jednym wirem podkowiastym, a całym układem wirów podkowiastych. Wzdłuż każdego takiego wiru cyrkulacja będzie stała, lecz przy przejściu od jednego wiru do drugiego będzie się zmieniała (skokami).

W schemacie tym można założyć liczbę wirów równą nieskończoności i wówczas cyrkulacja wzdłuż płata będzie się zmieniała w sposób ciągły malejąc od jego środka ku końcom. Za płatem wiry swobodne łączą się tworząc tak zwaną powierzchnię wirową (rys. 11.3) składającą się z nieskończenie wielkiej liczby spływających z płata linij wirowych.

Podobny schemat wirowy płata o ciągłym rozkładzie cyrkulacji oraz z powierzchnią wirową za płatem o skończonej rozpiętości wprowadził po raz pierwszy w r. 1913 N.J. Żukowski w swej pracy dotyczącej teorii śmigieł [4]. Schemat ten był później wykorzystany przez wielu uczonych, m.in. przez L. Prandtla, i stanowił w tej lub innej postaci podstawę do dalszych prac nad teorią płata nośnego i śmigła.

Badania powierzchni wirowej za płatem wykazały, że jest ona niestateczna i wkrótce po spłynięciu z niego zwija się w dwie linie wirowe (rys. 11.4). Z tego względu słuszniej byłoby rozważać w teorii płata nośnego ostatni schemat wirowy; z matematycznego punktu widzenia jednak jego wykorzystanie prowadzi do dużych trudności. W związku z tym stosuje się zwykle schematy bardziej uproszczone, zastępując płat bądź jednym wirem podkowiastym (rys. 11.2), bądź też jednolitą płaską powierzchnią wirową (rys. 11.3).

§ 2. Pojęcie odchylenia strug i oporu indukowanego w przypadku płata o skończonej rozpiętości

Rozważmy płat prostokątny o skończonej rozpiętości; jego dwa rzuty podano na rys. 11.5. Oznaczmy rozpiętość tego płata przez l, wielkość zaś $\frac{l}{b} = \lambda$ (gdzie b — cięciwa) będziemy nazywali *rozpiętością względną* lub *wydłużeniem płata*. Umieścimy wzdłuż rozpiętości wir związany, przechodzący następnie w dwa wiry swobodne, odległość między którymi oznaczymy przez l_1, a odległość między osią wiru swobodnego i końcem płata — przez e. Początek układu współrzędnych umieścimy w srodku lewego wiru swobodnego i skierujemy oś z w prawo.

Obierzemy jakikolwiek punkt A o współrzędnej z i określimy prędkość v indukowaną w tym punkcie przez lewy wir swobodny. Ponieważ lewy wir swobodny przedstawia sobą nieskończoną linię wirową (półprostą), wykorzystując więc równanie (5.21), otrzymamy:

$$v_y = -\frac{\Gamma}{4\pi z}.$$

Znak minus postawiono dlatego, że prędkość v_y jest skierowana w dół, a oś y — do góry.

Z podanego wzoru wynika, że prędkość indukowana przez wir swobodny zmienia się wzdłuż rozpiętości płata hiperbolicznie.

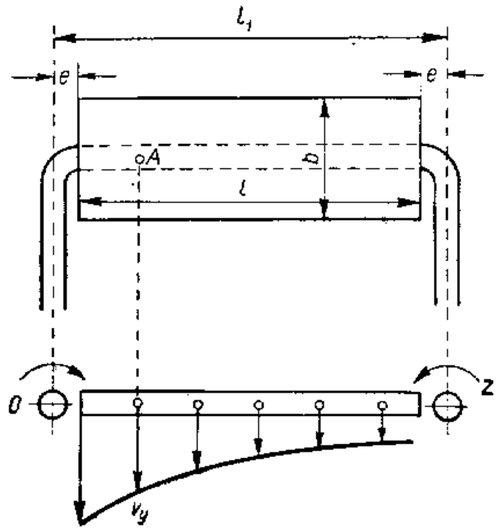
Aby ustalić wpływ obydwu wirów, wprowadzimy średnią wzdłuż rozpiętości prędkość indukowaną w.

Średnia prędkość wzdłuż rozpiętości pochodzącą od lewego wiru swobodnego jest oczywiście równa

$$\frac{1}{l}\int_{e}^{l+e} v_y\,dz.$$

Na mocy symetrii wielkość średniej prędkości pochodzącej od wiru prawego będzie taka sama, a zatem średnia prędkość indukowana

$$w = \frac{2}{l}\int_{e}^{l+e} v_y\,dz. \qquad (11.1)$$



11.5. Uproszczony schemat wirów nośnych na płacie prostokątnym

Wyjaśnimy, jakie zmiany w fizykalnym obrazie opływu płata wprowadza prędkość w, indukowana przez spływające z płata wiry swobodne. W tym celu rozważymy płat opływany pod pewnym kątem natarcia α (rys. 11.6) z prędkością, którą oznaczymy przez v_∞. W dowolnym punkcie M przepływu dookoła płata prędkość elementów płynu będzie się składała oczywiście z dwóch składowych: prędkości v_∞ przepływu niezakłóconego oraz prędkości w indukowanej przez wiry. W rezultacie w punkcie M płat będzie opływany z pewną prędkością v, której kierunek utworzy z cięciwą płata kąt $\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha$, nazywany *rzeczywistym kątem natarcia*.

W pobliżu płata zachodzi więc zmiana kąta natarcia lub tak zwane odchylenie strug. Wielkość odchylenia strug określana jest przez kąt $\Delta\alpha$ nazywany *kątem odchylenia strug*. Kąt ten jest niewielki — wynosi on zaledwie kilka stopni. Z rysunku 11.6 wynika, że

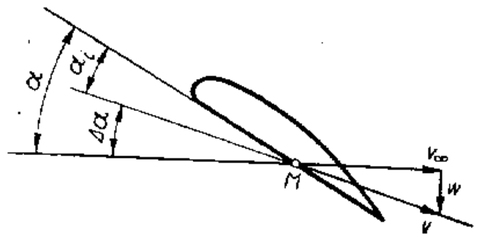
$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = -\frac{w}{v_\infty}.$$

Znak minus przyjmujemy dlatego, że kąt odchylenia strug traktowany jest jako dodatni, gdy prędkość indukowana skierowana jest w dół, tzn. gdy w jest ujemne. Ponieważ kąt $\Delta\alpha$ jest niewielki, zatem

$$\Delta\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = -\frac{w}{v_\infty}. \qquad (11.2)$$

Jeżeli odchylenie strug nie zachodzi, wektor siły wypadkowej oddziaływania

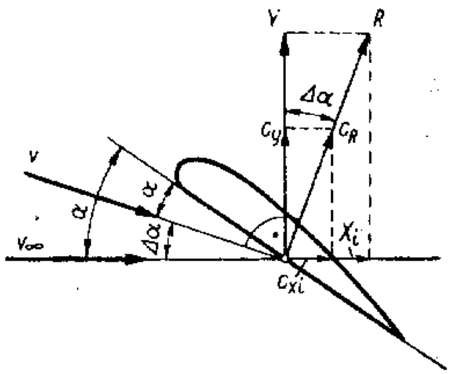
przepływu na płat jest, zgodnie z twierdzeniem Żukowskiego, prostopadły do kierunku przepływu n i e z a k ł ó c o n e g o, czyli do wektora prędkości v_∞. Jeżeli odchylenie strug istnieje, wektor siły wypadkowej powinien być normalny do kierunku prędkości r z e c z y w i s t e j v. Odchylenie strug prowadzi zatem do odchylenia siły wypadkowej od kierunku, prostopadłego do prędkości przepływu niezakłóconego, o kąt $\Delta\alpha$ (rys. 11.7). W związku z tym wypadkowa mieć będzie składową X_i w kierunku przepływu niezakłóconego. Ta dodatkowa siła X_i powstała w wyniku odchylenia strug nosi nazwę *oporu indukowanego*.



11.6. Odchylenie strug w otoczeniu płata o skończonej rozpiętości

Jeżeli podzielimy go przez $\frac{\varrho v_\infty^2}{2}S$, otrzymamy wielkość współczynnika oporu indukowanego

$$c_{xi} = \frac{X_i}{\frac{\varrho v_\infty^2}{2}S}. \qquad (11.3)$$



11.7. Opór indukowany

Opór płata o skończonej rozpiętości będzie się zatem składał z oporu profilowego, będącego sumą oporu tarcia i oporu wynikającego z istnienia różnicy ciśnień w przedniej i tylnej części płata (tzw. opór ciśnieniowy—przyp. red.), oraz oporu indukowanego, uwarunkowanego odchyleniem strug; tzn. że dla płata o skończonej rozpiętości

$$c_x = c_{xp} + c_{xi}. \qquad (11.4)$$

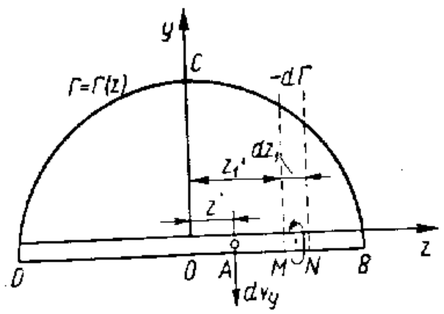
W przypadku płata o nieskończonej rozpiętości, gdy odchylenie strug nie zachodzi, opór indukowany jest równy zeru i opór płata jest równy wprost oporowi profilowemu.

§ 3. Prędkość indukowana i odchylenie strug [$\Gamma = \Gamma(z)$]

Jeżeli będziemy rozpatrywali płat o dowolnym obrysie, wówczas cyrkulacja Γ wzdłuż rozpiętości płata będzie, ogólnie biorąc, ulegała zmianie, tzn. $\Gamma = \Gamma(z)$, przy czym maksymalna wartość cyrkulacji będzie, jak wykazuje doświadczenie, występowała w środku płata.

Dowiedliśmy wyżej, że w tym przypadku z płata będzie spływała tak zwana powierzchnia wirowa (rys. 11.3).

Wychodząc z tego najbardziej ogólnego schematu płata o skończonej rozpiętości, otrzymamy podstawowe równania, określające odchylenie strug na płacie, prędkość indukowaną v_y, siłę nośną Y oraz opór indukowany X_i.



11.8. Do obliczenia prędkości indukowanej dla płata o dowolnym obrysie

Rozważmy rzut płata na płaszczyznę yz (rys. 11.8). Wzdłuż rozpiętości płata cyrkulacja Γ będzie się zmieniała według pewnego prawa $\Gamma = \Gamma(z)$, które można przedstawić wykreślnie w postaci krzywej DCB (jeżeli wzdłuż osi y będziemy odkładali wartości Γ). Rozważmy działanie układu wirów (powierzchni wirowej), spływającego z płata, na dowolny punkt A (rys. 11.8). Z każdego elementu płata dz będzie oczywiście spływał elementarny wir o cyrkulacji $d\Gamma$, skierowany normalnie do płaszczyzny rysunku. Jeżeli położenie punktu A określone jest przez współrzędną z, a położenie wiru elementarnego spływającego z odcinka płata $MN = dz_1$ — przez współrzędną z_1, wówczas prędkość indukowaną przez ten wir w punkcie A możemy oczywiście napisać w postaci

$$dv_y = \frac{d\Gamma}{4\pi(z_1 - z)}.$$

Prędkość w punkcie A indukowana przez całą powierzchnię wirową będzie równa

$$v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z}, \tag{11.5}$$

gdzie $\Gamma = \Gamma(z_1)$, a współrzędna z dla danego punktu A jest wielkością stałą. W związku z tym prędkość v_y będzie się również zmieniała wzdłuż rozpiętości płata, tzn. $v_y = v_y(z)$.

Wchodząca do równania (11.5) całka jest całką niewłaściwą. Aby ją obliczyć, trzeba z przedziału całkowania wyłączyć punkt osobliwy $z_1 = z$. Można to zrobić rozbijając przedział całkowania na następujące dwa przedziały:

$$\left(-\frac{l}{2},\ z - \varepsilon\right) \quad \text{i} \quad \left(z + \varepsilon,\ +\frac{l}{2}\right),$$

gdzie ε jest wielkością małą [42].

Wartość całki (11.5) można wówczas określić jako granicę następującego wyrażenia:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{z-\varepsilon} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} + \int_{z+\varepsilon}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} \right),$$

zwanego główną częścią całki (11.5).

W sensie fizykalnym oznacza to, że wyłączyliśmy z rozważań elementarny wir przechodzący przez punkt A, w którym trzeba określić prędkość v_y.

W celu znalezienia kąta odchylenia strug $\Delta\alpha$, który w ogólnym przypadku będzie się również zmieniał wzdłuż rozpiętości płata, należy skorzystać z równania

$$\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty}. \tag{11.6}$$

Rzeczywisty kąt natarcia dowolnego przekroju płata będzie określony wzorem

$$\alpha_r = \alpha - \Delta\alpha, \tag{11.7}$$

gdzie α — kąt natarcia, jest określony względem kierunku prędkości nieskończoności. Kąt natarcia α może na ogół również zmieniać się wzdłuż rozpiętości płata, jeżeli płat jest zwichrzony. Dlatego też dla dowolnego przekroju płata lokalny kąt natarcia α można określać jako sumę

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_z,$$

gdzie α_s — kąt natarcia środkowej części płata, α_z — kąt zwichrzenia płata w rozpatrywanym przekroju.

§ 4. Siły działające na płat nośny. Opór indukowany [$\Gamma = \Gamma(z)$]

W celu znalezienia siły nośnej działającej na płat wyodrębnimy elementarny odcinek płata dz i będziemy uważali, że na tym odcinku przepływ jest płaski. Przy takim założeniu można stosować do tego odcinka twierdzenie Żukowskiego wyprowadzone dla przepływu płaskiego:

$$dY = \varrho\, \Gamma(z) v_\infty\, dz,$$

skąd dla całego płata

$$Y = \varrho v_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\, dz. \tag{11.8}$$

Wartość liczbowa całki (11.8) jest oczywiście równa powierzchni Ω, ograniczonej prostą DB oraz krzywą DCB (rys. 11.8). Zatem

$$Y = \varrho v_\infty \Omega. \tag{11.9}$$

Znajdziemy z kolei wielkość oporu indukowanego. W tym celu wydzielimy na płacie elementarny odcinek dz, na który działa siła nośna dY. Ponieważ w rozpatrywanym punkcie przepływu będzie zachodziło odchylenie strug równe $\Delta\alpha$, zatem wektor dR będzie pochylony względem kierunku prędkości w nieskończoności, w związku z czym powstanie składowa w kierunku osi x, nazywana oporem indukowanym, który oznaczymy przez dX_i. Oczywiście (rys. 11.7)

$$dX_i \approx dY\,\Delta\alpha.$$

Podstawiając do tego wyrażenia $dY = \varrho\,\Gamma(z) v_\infty\,dz$ i $\Delta\alpha = -\dfrac{v_y}{v_\infty}$, otrzymamy

$$dX_i = -\varrho\,\Gamma(z)\,v_y\,dz.$$

Całkowity opór indukowany X_i określi równanie

$$X_i = -\varrho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\,v_y\,dz. \tag{11.10}$$

Podstawiając do tego wyrażenia wielkość v_y ze wzoru (11.5), otrzymamy

$$X_i = -\frac{\varrho}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\,dz \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}\,\frac{dz_1}{z_1 - z}. \tag{11.11}$$

Widzimy, że charakterystyki aerodynamiczne płata ($\Delta\alpha$, v_y, Y, X_i) można określić na podstawie znanego rozkładu cyrkulacji, czyli funkcji $\Gamma = \Gamma(z)$, ponieważ wszystkie te charakterystyki zależą od powyższej funkcji.

Znajdziemy wielkość oporu profilowego X_p płata. Oznaczmy przez c'_{xp} lokalny współczynnik oporu profilowego, odpowiadający rzeczywistemu lokalnemu kątowi natarcia.

Wówczas

$$dX_p = c'_{xp}\,\frac{\varrho}{2}\,b\,dz\,v_\infty^2,$$

gdzie b jest to cięciwa płata zmieniająca się w ogólnym przypadku wzdłuż rozpiętości, tzn. $b = b(z)$. Wobec tego całkowity opór profilowy będzie się wyrażał w sposób następujący:

$$X_p = \frac{\varrho v_\infty^2}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} c'_{xp}\,b\,dz = q \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} c'_{xp}\,b\,dz, \tag{11.12}$$

gdzie $q = \dfrac{\varrho v_\infty^2}{2}$ — wielkość cisnienia dynamicznego.

§ 5. Podstawowe równania całkowo-różniczkowe dla płata o skończonej rozpiętości

Wyprowadzimy równanie umożliwiające znalezienie funkcji $\Gamma(z)$.

Siłę nośną dY działającą na element płata dz można wyrazić w dwojaki sposób:

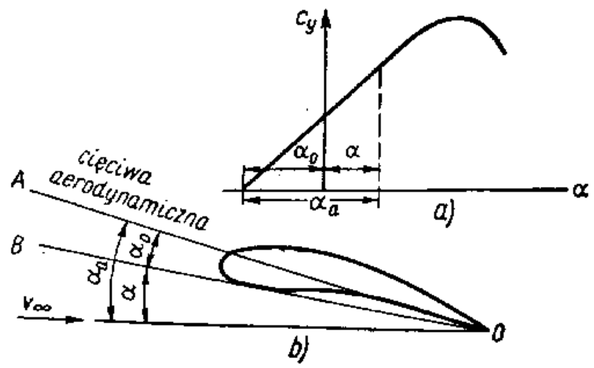
$$dY = \varrho\,\Gamma(z)\,v_\infty\,dz,$$

$$dY = c_y(z)\,\frac{\varrho}{2}\,b(z)\,v_\infty^2\,dz.$$

Przyrównując prawe strony powyższych wyrażeń, otrzymujemy równanie

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2}\,c_y(z)\,b(z)\,v_\infty. \tag{11.13}$$

Załóżmy, że kąt natarcia w rozpatrywanym przekroju liczony jest od tak zwanej cięciwy aerodynamicznej, tzn. od takiego kierunku, dla którego lokalny współczynnik $c_y = 0$.



11.9. Cięciwa aerodynamiczna

Oznaczając kąt natarcia, liczony od cięciwy aerodynamicznej, przez α_a, kąt natarcia, przy którym $c_y = 0$, przez α_0, możemy napisać następujące znane równanie (rys. 11.9a):

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_0.$$

Widzimy, że cięciwa aerodynamiczna obrócona jest w stosunku do cięciwy geometrycznej o kąt α_0 do góry (ponieważ zwykle $\alpha_0 < 0$; rys. 11.9b).

Na prostoliniowym odcinku krzywej $c_y(\alpha)$ obowiązuje równanie

$$c_y = a_0\,\alpha_a, \tag{11.14}$$

gdzie a_0 — tangens kąta nachylenia względem osi α prostoliniowego odcinka krzywej $c_y(\alpha)$ dla rozważanego profilu (przekroju), tzn. dla płata o nieskończenie wielkiej rozpiętości i takim samym profilu (jak rozpatrywany płat o skończonej rozpiętości; przyp. tłum.).

W przypadku płata o skończonej rozpiętości dowolny przekrój płata jest opływany pod rzeczywistym kątem natarcia α_r lub pod rzeczywistym kątem natarcia liczonym od cięciwy aerodynamicznej α_{ra}. Na podstawie równania (11.14) możemy napisać

$$c_y = a_0 \alpha_{ra} = a_0 (\alpha_a - \Delta\alpha) = a_0 \left(\alpha_a + \frac{v_y}{v_\infty}\right).$$

Zatem

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 b(z) v_\infty \left[\alpha_a(z) + \frac{v_y}{v_\infty}\right].$$

Podstawiając tutaj wartość v_y z równania (11.5) i pomijając indeks a, można napisać otrzymane równanie w postaci ostatecznej

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 b(z) v_\infty \left[\alpha(z) + \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z}\right]. \tag{11.15}$$

Równanie to nazywa się *podstawowym całkowo-różniczkowym równaniem płata* (nazywa się ono całkowo-różniczkowym dlatego, że nieznana funkcja $\Gamma(z)$ wchodzi do niego zarówno pod znakiem pochodnej, jak i całki).

Równanie (11.15) daje możność obliczenia cyrkulacji płata $\Gamma(z)$ na podstawie znanych funkcji $b(z)$ i $\alpha(z)$, określonych konstrukcją płata.

Ustalenie rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata pozwala na określenie całej charakterystyki aerodynamicznej płata.

§ 6. Przybliżona metoda obliczania rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata

Jak ustaliliśmy wyżej, obliczenie charakterystyki aerodynamicznej płata sprowadza się do rozwiązania równania całkowo-różniczkowego (11.15).

Ogólnych metod rozwiązywania tego rodzaju równania całkowo-różniczkowego nie ma. W związku z tym trzeba stosować metody przybliżone.

W chwili obecnej istnieje szereg metod rozwiązywania równania (11.15), na przykład metody Glauerta—Trefftza, B.N. Jurjewa, W.W. Gołubiewa [3], G.F. Burago, A.B. Risberga [43], S.G. Nużina, Multhoppa.

W paragrafie niniejszym omówimy jedną z pierwszych stosowanych metod, mianowicie metodę Glauerta—Trefftza. Jest ona oparta na wykorzystaniu szeregów trygonometrycznych.

Przystępując do omówienia metody Glauerta—Trefftza dokonamy zamiany zmiennej niezależnej z kładąc

$$z = -\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Cyrkulację Γ przedstawimy w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego

$$\Gamma = 2 l v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \tag{11.16}$$

gdzie $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ — współczynniki stałe, które należy określić.

Wzór na cyrkulację (11.16) trzeba wprowadzić do podstawowego równania całkowo-różniczkowego (11.15). Przedtem obliczymy wartość całki wchodzącej do równania (11.15).

Uwzględniając, że

$$\Gamma(z_1) = 2 l v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_1,$$

$$z_1 = -\frac{l}{2}\cos\theta_1, \quad dz_1 = \frac{l}{2}\sin\theta_1 d\theta_1,$$

$$\frac{d\theta_1}{dz_1} = \frac{2}{l\sin\theta_1},$$

otrzymamy

$$z_1 - z = -\frac{l}{2}\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta = -\frac{l}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta).$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} = \frac{d\Gamma(z_1)}{d\theta_1}\frac{d\theta_1}{dz_1},$$

gdzie

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{d\theta_1} = \frac{2 l v_\infty d\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_1\right)}{d\theta_1} = 2 l v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta_1,$$

otrzymamy

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} = 2 l v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta_1 \frac{2}{l\sin\theta_1}.$$

Poszukiwana całka przybierze zatem postać

$$\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}dz_1}{z_1-z}=$$

$$=\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_0^\pi\frac{2lv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\cos n\theta_1\frac{2}{l\sin\theta_1}\frac{l}{2}\sin\theta_1}{-\frac{l}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta)}d\theta_1=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\cos n\theta_1}{\cos\theta_1-\cos\theta}d\theta_1=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\int_0^\pi\frac{\cos n\theta_1}{\cos\theta_1-\cos\theta}d\theta_1.$$

Główną wartość całki stojącą pod znakiem sumy oblicza się łatwo (str. 195)

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\theta_1\,d\theta_1}{\cos\theta_1-\cos\theta}=\pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

otrzymujemy więc ostatecznie

$$\frac{v_y}{v_\infty}=\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}dz_1}{z_1-z}=-\frac{\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{11.17}$$

Wprowadzając do równania podstawowego (11.15) wartość całki (11.17) oraz cyrkulację ze wzoru (11.16), otrzymamy

$$2lv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta=\frac{1}{2}a_0\left[a(\theta)-\frac{\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin n\theta}{\sin\theta}\right]b(\theta)v_\infty$$

lub

$$a_0b(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin n\theta+4l\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta=a_0a(\theta)b(\theta)\sin\theta.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\frac{a_0b(\theta)}{4l}=\mu$$

będziemy mieli

$$\mu\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin n\theta+\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta=\mu a\sin\theta$$

lub ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mu+\sin\theta)A_n\sin n\theta=\mu a\sin\theta. \tag{11.18}$$

Równanie ostatnie, które jest spełnione we wszystkich przekrojach płata, umożliwia określenie współczynników A_n.

W celu uzyskania jego przybliżonego rozwiązania postępujemy w sposób następujący. Obieramy tyle przekrojów płata, ile wyrazów szeregu trygonometrycznego (11.16) chcielibyśmy zachować i układamy dla każdego przekroju równanie (11.18) (parametr μ proporcjonalny do cięciwy b oraz kąt natarcia a są w ogólnym przypadku funkcjami θ). W wyniku otrzymamy układ równań algebraicznych pierwszego stopnia dla określenia współczynników A_n.

Można łatwo przekonać się, że dla płata symetrycznego oraz przy jego symetrycznym opływie współczynniki szeregu (11.16) A_n z parzystymi n powinny równać się zeru.

Napiszmy równanie (11.16) dla dwóch punktów płata, jednakowo odległych od jego płaszczyzny symetrii

$$\Gamma(\theta)=2lv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta$$

oraz

$$\Gamma(\pi-\theta)=2lv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sin n(\pi-\theta).$$

Oczywiście, przy parzystych n

$$\sin n(\pi-\theta)=-\sin n\theta,$$

przy nieparzystych zaś n

$$\sin n(\pi-\theta)=+\sin n\theta.$$

Ponieważ zgodnie z warunkiem symetrii powinno być spełnione równanie

$$\Gamma(\theta)=\Gamma(\pi-\theta),$$

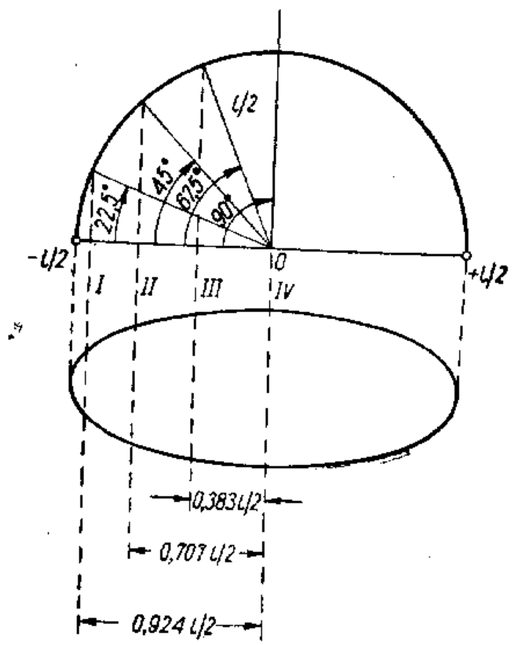
wynika stąd, że współczynniki A_n z numerami parzystymi powinny równać się zeru.

Współczynniki A_n z parzystymi n będą zatem różne od zera jedynie dla płatów niesymetrycznych (np. dla płata z wychylonymi lotkami) lub przy niesymetrycznym opływie płata.

W wielu przypadkach przy obliczaniu płatów trzeba korzystać ze współczynników A_n jedynie z nieparzystymi n.

Zatem jeżeli zachodzi symetria względem środkowego przekroju płata ($\theta = 90°$), wówczas wartości θ będą zawarte w granicach pomiędzy 0 a 90°, w rozwinięciu zaś (11.16) zachowane zostaną jedynie wyrazy z nieparzystymi współczynnikami A_1, A_3, A_5, A_7, ...

Przekroje płata należy obierać w najbardziej charakterystycznych punktach rozpiętości płata: w miejscach nagłej zmiany profilu, znacznej zmiany cięciwy (np. w miejscu przejścia płata prostokątnego w trapez) itd. Praktyka wykazała, że wsytarczy zachować pierwsze cztery wyrazy szeregu w rozwinięciu na cyrkulację, aby otrzymać dobre przybliżenie dla charakterystyk aerodynamicznych płata.



11.10. Obliczeniowe przekroje płata

Jako punkty obliczeniowe można zwykle przyjmować (z wyjątkiem przypadków szczególnych) punkty (rys. 11.10) odpowiadające wartościom

$$\theta = 22{,}5°,\ 45°,\ 67{,}5°,\ 90°.$$

W danym przypadku układ równań będzie się składał z czterech równań w postaci (11.18) odpowiednio do czterech obranych punktów połowy rozpiętości. Każdej wartości θ będzie odpowiadało jedno równanie.

Po określeniu liczbowych wartości sinusów oraz po wprowadzeniu ich do równania (11.18) otrzymamy następujący liniowy układ algebraiczny czterech równań dla określenia czterech niewiadomych współczynników A_1, A_3, A_5, A_7 szeregu trygonometrycznego (11.16):

$$0{,}383\,(\mu_1 + 0{,}383)\,A_1 + 0{,}924\,(3\mu_1 + 0{,}383)\,A_3 + 0{,}924\,(5\mu_1 + 0{,}383)\,A_5 + $$
$$+ 0{,}383\,(7\mu_1 + 0{,}383)\,A_8 = 0{,}383\mu_1\alpha_1,$$

$$(\mu_2 + 0{,}707)\,A_1 + (3\mu_2 + 0{,}707)\,A_3 - (5\mu_2 + 0{,}707)\,A_5 - (7\mu_2 + 0{,}707)A_7 =$$
$$= \mu_2\alpha_2,$$

$$0{,}924\,(\mu_3 + 0{,}924)\,A_1 - 0{,}383\,(3\mu_3 + 0{,}924)\,A_3 - 0{,}383\,(5\mu_3 + 0{,}924)\,A_5 + $$
$$+ 0{,}924\,(7\mu_3 + 0{,}924)\,A_7 = 0{,}924\,\mu_3\alpha_3,$$

$$(\mu_4 + 1)\,A_1 - (3\mu_4 + 1)\,A_3 + (5\mu_4 + 1)\,A_5 - (7\mu_4 + 1)\,A_7 = \mu_4\alpha_4,$$

gdzie μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, α_1, α_2, α_3, α_4 — wielkości znane.

Rozwiązując ten układ znajdujemy poszukiwane współczynniki.

Należy zaznaczyć, że kąty natarcia α w odpowiednich przekrojach liczone są od cięciwy a e r o d y n a m i c z n e j. W ogólnym przypadku kąt natarcia w dowolnym przekroju może być podany w postaci sumy:

kąta natarcia pewnego określonego, charakterystycznego przekroju płata; przekrojem takim jest zwykle przekrój leżący w płaszczyźnie symetrii, tzn. $\alpha = \alpha(90°)$;

obranego z odwrotnym znakiem kąta natarcia, przy którym siła nośna jest równa zeru w płaszczyźnie obranego przekroju charakterystycznego; jest on zwykle oznaczany przez $\alpha_0(90°)$;

kąta zwichrzenia danego przekroju płata $\varphi_z(\theta)$. Zatem

$$\alpha(\theta) = \alpha(90°) + \alpha_0(90°) + \varphi_z(\theta)$$

lub

$$\alpha(\theta) = \alpha_1(90°) + \varphi_z(\theta),$$

gdzie

$$\alpha_1(90°) = \alpha(90°) + \alpha_0(90°).$$

Zwichrzenie $\varphi_z(\theta)$ może być uzyskane bezpośrednio przez obrót przekrojów w stosunku do cięciwy przekroju odniesienia ($\theta = 90°$) — jest to tzw. *zwichrzenie geometryczne*. Natomiast jeżeli szereg profilów (ich cięciwy geometryczne — przyp. tłum.) leży w jednej płaszczyźnie, a ich kąty $\alpha_0(\theta)$ są różne, wówczas mówimy o *zwichrzeniu aerodynamicznym*. Płat może mieć wreszcie obydwa rodzaje zwichrzenia jednoczesnie: mówimy wtedy o *zwichrzeniu mieszanym*. Jako zwichrzenie dodatnie traktujemy zwiększenie kątów natarcia od środkowego do końcowego przekroju płata.

W wyniku zwichrzenia płata różne jest c_y, w różnych jego przekrojach. W szczególności przy $c_{y\,\text{płata}} = 0$ nie są równe zeru c_y w różnych przekrojach. Jeżeli natomiast wszystkie przekroje mają jednakowe c_y, płat taki nazywany jest *niezwichrzonym* lub *płaskim*; cięciwy aerodynamiczne płata płaskiego leżą w jednej płaszczyźnie.

Metoda Glauerta—Trefftza umożliwia znalezienie rozkładu cyrkulacji Γ wzdłuż płatów o różnych obrysach. Należy jednak zaznaczyć, że metoda ta jest efektywna tylko dla płatów o najprostszych obrysach. W przypadkach obrysów bardziej złożonych (istnienie na płacie wycięć, występów itp.) metoda Glauerta—Trefftza wymaga długich i pracochłonnych obliczeń.

§ 7. Określenie siły nośnej i oporu indukowanego. Wzory na przeliczanie płatów niezwichrzonych z jednego wydłużenia na inne

Załóżmy, że współczynniki A_n szeregu (11.16) zostały wyznaczone. Łatwo jest wówczas określić charakterystykę aerodynamiczną płata.

Znajdziemy najpierw siłę nośną płata oraz jego opór indukowany. Wzór na siłę nośną będzie miał postać

$$Y = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \varrho v_\infty \Gamma(z)\, dz = \varrho v_\infty^2 l^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right) \sin\theta\, d\theta.$$

Ponieważ

$$\int_0^\pi A_1 \sin\theta \sin\theta\, d\theta = A_1 \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = A_1 \frac{\pi}{2},$$

a przy $n > 1$

$$\int_0^\pi A_n \sin n\theta \sin\theta\, d\theta = A_n \left[\frac{-\sin(n+1)\theta}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}\right]_0^\pi = 0,$$

zatem

$$Y = \pi l^2 \varrho \frac{v_\infty^2}{2} A_1. \tag{11.19}$$

Siłę nośną płata o skończonej rozpiętości wyraża więc jedynie pierwszy współczynnik w rozwinięciu cyrkulacji na szereg trygonometryczny. Pozostałe współczynniki, nie zmieniając ogólnej wielkości siły nośnej, wpływają jedynie na charakter rozkładu cyrkulacji wzdłuż płata, a zatem — na rozkład obciążeń aerodynamicznych wzdłuż rozpiętości płata.

Współczynnik siły nośnej płata

$$c_y = \frac{Y}{\frac{\varrho S v_\infty^2}{2}} = \frac{\pi l^2}{S} A_1,$$

to znaczy

$$c_y = \pi \lambda A_1. \tag{11.20}$$

Znajdźmy teraz wzór na przeliczenie płata z jednego wydłużenia na inne.

Założymy, że płat jest niezwichrzony. Licząc kąty natarcia od cięciwy aerodynamicznej, można dla całego płata napisać (rys. 11.11)

$$c_y = a\alpha = \pi \lambda A_1.$$

Stąd dla płata o określonym obrysie mamy następujące równanie:

$$a = \frac{\pi \lambda A_1}{\alpha}, \tag{11.21}$$

gdzie a — tangens kąta nachylenia prostej $c_y(\alpha)$ względem osi α.

Dla danego płata oraz dla płata o nieskończonej rozpiętości, lecz o tej samej wartości c_y, można napisać — odpowiednio — następujące dwa równania:

$$c_y = a\alpha,$$

$$c_y = a_0 \alpha_\infty,$$

gdzie α_∞ — kąt natarcia płata o nieskończonej rozpiętości, na którym osiągane jest to samo c_y (rys. 11.11), co na płacie o skończonej rozpiętości przy kącie natarcia α.

Stąd otrzymamy

$$\alpha - \alpha_\infty = c_y\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{c_y}{\pi\lambda}\pi\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right). \tag{11.22}$$

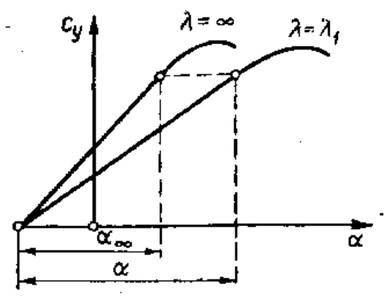
Wprowadzając oznaczenie

$$\pi\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right) = 1 + \tau, \tag{11.23}$$

otrzymamy ostatecznie

$$\alpha - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda}(1 + \tau). \tag{11.24}$$

Powyższe równanie daje możność obliczenia zależności c_y w funkcji α znanej na przykład z doświadczenia dla płata o skończonej rozpiętości — na płat o rozpiętości nieskończonej (rys. 11.11).



11.11. Przeliczenie zależności $c_y(\alpha)$ z wydłużenia skończonego $\lambda = \lambda_1$ na wydłużenie nieskończone $\lambda = \infty$

Jeżeli mamy dwa płaty o jednakowych profilach, lecz różnych wydłużeniach λ_1 i λ_2, wówczas dla każdego z nich można napisać równania:

$$\alpha_1 - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda_1}(1 + \tau_1),$$

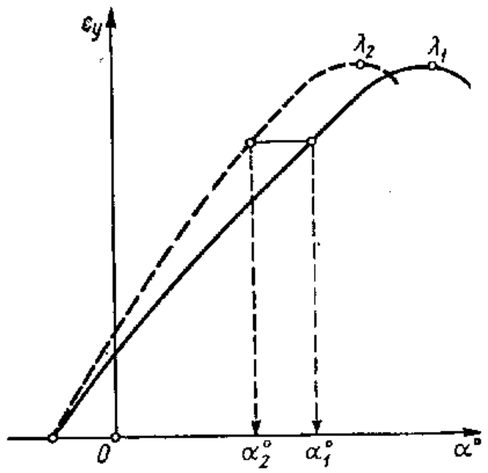
$$\alpha_2 - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda_2}(1 + \tau_2),$$

przy czym, tak samo jak powyżej, rozważane są warunki przy jednakowych c_y. Odejmując od równania pierwszego równanie drugie, otrzymamy

$$\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ = 57{,}3\,\frac{c_y}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{\lambda_1} - \frac{1+\tau_2}{\lambda_2}\right). \tag{11.25}$$

Wzór (11.25) umożliwia przeliczenie krzywej c_y w funkcji α, uzyskanej dla płata o wydłużeniu λ_1 na wydłużenie λ_2 (rys. 11.12). Ze wzoru tego wynika, że w przypadku płata drugiego te same wartości c_y będą odpowiadały punktom $\mathring{\alpha}_2$ określanym równaniem

$$\mathring{\alpha}_2 = \mathring{\alpha}_1 - 57{,}3\,\frac{c_y}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{\lambda_1} - \frac{1+\tau_2}{\lambda_2}\right).$$



11.12. Przeliczenie zależności $c_y(\alpha)$ z jednego wydłużenia λ_1 na inne λ_2

Wartości τ dla rozmaitych płatów podane są w paragrafie następnym. Znajdziemy obecnie opór indukowany, biorąc pod uwagę, że $\Delta\alpha = -\dfrac{v_y}{v_\infty}$,

$$X_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \varrho\, v_\infty\, \Gamma(z)\, \Delta\alpha(z)\, dz = \int_0^\pi \varrho\, v_\infty\, 2\, l\, v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta = \varrho\, v_\infty^2\, l^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m\, A_m \sin m\theta\right) d\theta.$$

Ponieważ przy $m = n$

$$\int_0^\pi A_n^2\, n \sin^2 n\theta\, d\theta = A_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta\, d(n\theta) = n\, A_n^2\, \frac{\pi}{2},$$

a przy $n \neq m$

$$\int_0^\pi n\, A_n \sin n\theta A_m \sin m\theta\, d\theta = n\, A_n\, A_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta = 0,$$

więc

$$X_i = \pi l^2 \frac{\varrho\, v_\infty^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n^2. \tag{11.26}$$

Okazuje się zatem, że *opór indukowany płata o skończonej rozpiętości jest wprost proporcjonalny do sumy kwadratów współczynników rozkładu cyrkulacji na szereg trygonometryczny pomnożonych przez ich numery porządkowe.* Suma ta jest zawsze dodatnia, a zatem przy żadnym rozkładzie cyrkulacji na płacie oraz $c_y \neq 0$ opór indukowany nie może zniknąć.

Wzór na współczynniki oporu indukowanego całego płata będzie miał następującą postać (tutaj $\lambda = l^2/S$):

$$c_{xi} = \frac{X_i}{\dfrac{\varrho\, S\, v_\infty^2}{2}} = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n^2. \tag{11.27}$$

Mnożąc i dzieląc prawą część w ostatnim wyrażeniu przez A_1^2 oraz biorąc pod uwagę, że $A_1 = \dfrac{c_y}{\pi\lambda}$, otrzymamy

$$c_{xi} = \pi\lambda\left(\frac{c_y}{\pi\lambda}\right)^2 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, A_n^2}{A_1^2} = \frac{c_y^2}{\pi\lambda}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, A_n^2}{A_1^2}$$

lub ostatecznie

$$c_{xi} = \frac{c_y^2}{\pi\lambda}(1+\delta), \tag{11.28}$$

gdzie

$$1 + \delta = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, A_n^2}{A_1^2}. \tag{11.29}$$

Widzimy, że dla znalezienia wielkości δ potrzebna jest znajomość wielkości współczynników A_n dla płata o określonym obrysie. Wartości δ dla rozmaitych płatów podane są w paragrafie następnym.

Z równania (11.28) wynika, że przy przejściu od płata o wydłużeniu λ_1 do płata o wydłużeniu λ_2 przy jednakowym c_y spełnione jest następujące równanie:

$$c_{xi_1} - c_{xi_2} = \frac{c_y^2}{\pi}\left(\frac{1+\delta_1}{\lambda_1} - \frac{1+\delta_2}{\lambda_2}\right). \tag{11.30}$$

Równanie to daje możność przeliczenia oporu indukowanego płata o wydłużeniu λ_1 na płat o wydłużeniu λ_2.

§ 8. Kształt obrysu płata o skończonej rozpiętości i najmniejszym oporze indukowanym

Przy założonej wartości c_y płata c_{xi} będzie oczywiście minimalne, w przypadku gdy $\delta = 0$, czyli gdy $A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$. Cyrkulację $\Gamma(z)$ będzie wówczas wyrażał tylko pierwszy wyraz szeregu

$$\Gamma = 2\,l\,v_\infty A_1 \sin\theta.$$

Stąd przy $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Gamma_0 = 2\,l\,v_\infty A_1,$$

czyli

$$A_1 = \frac{\Gamma_0}{2\,l\,v_\infty},$$

gdzie Γ_0 — cyrkulacja w środkowym przekroju płata.

Ponieważ

$$z = -\frac{l}{2}\cos\theta,$$

więc

$$\Gamma = 2\,l\,v_\infty A_1 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

Biorąc pod uwagę, że A_1 jest w tym przypadku równe $\frac{\Gamma_0}{2\,l\,v_\infty}$, otrzymamy

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}. \tag{11.31}$$

Jak widzimy, cyrkulacja $\Gamma(z)$ zmienia się wzdłuż rozpiętości eliptycznie, innymi słowy: *płat ma najmniejszy opór indukowany przy eliptycznym rozkładzie cyrkulacji wzdłuż rozpiętości.*

Prędkość indukowana w tym przypadku (wzór 11.17)

$$v_y = -A_1 v_\infty = -\frac{\Gamma_0}{2\,l}, \tag{11.32}$$

czyli s t a ł a wzdłuż rozpiętości płata, tak samo jak kąt odchylenia strug,

$$\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty} = A_1 = \frac{\Gamma_0}{2\,l\,v_\infty} = \frac{c_{y\,\text{płata}}}{\pi\lambda}. \tag{11.33}$$

Współczynnik oporu indukowanego

$$c_{xi} = \frac{c_{y\,\text{płata}}^2}{\pi\lambda}. \tag{11.34}$$

Biorąc pod uwagę, że dla dowolnego przekroju płata

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_y\, b\, v_\infty$$

równanie (11.31) można przepisać w postaci

$$\frac{1}{2} c_y\, b\, v_\infty = 2\,l\,v_\infty A_1 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}},$$

skąd

$$b = \frac{4\,A_1\,l}{c_y} \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}} = b_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}, \tag{11.35}$$

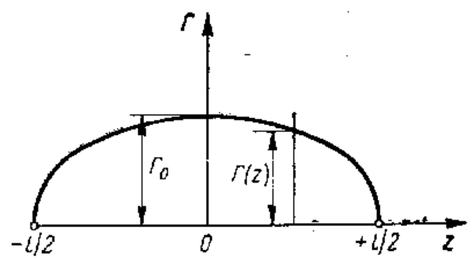
gdzie

$$b_0 = \frac{4\,A_1\,l}{c_y}.$$

Ostatnie równanie wykazuje, że przy eliptycznym rozkładzie cyrkulacji wzdłuż rozpiętości cięciwa płata zmienia się również eliptycznie. Innymi słowy, płatem o najmniejszym oporze indukowanym jest płat mający eliptyczny obrys[1].

Obliczymy siłę nośną płata eliptycznego. Siłę tę wyraża powierzchnia Ω_e ograniczona krzywą $\Gamma(z)$ (rys. 11.13):

$$Y = \varrho\, v_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\,dz = \varrho\, v_\infty\, \Omega_e.$$



11.13. Rozkład cyrkulacji na płacie eliptycznym

Powierzchnia półelipsy Ω_e będzie w danym przypadku równa

$$\Omega_e = \frac{1}{2}\pi\Gamma_0\frac{l}{2} = \frac{\pi}{4} l\,\Gamma_0.$$

Zatem

$$Y = \frac{\pi}{4}\varrho\, v_\infty l\,\Gamma_0. \tag{11.36}$$

[1] W założeniu, że płat nie jest zwichrzony i ma stały profil (przyp. red.).

Opór indukowany określi wzór

$$X_i = Y \Delta\alpha,$$

gdzie

$$\Delta\alpha = \frac{\Gamma_0}{2\, l\, v_\infty}.$$

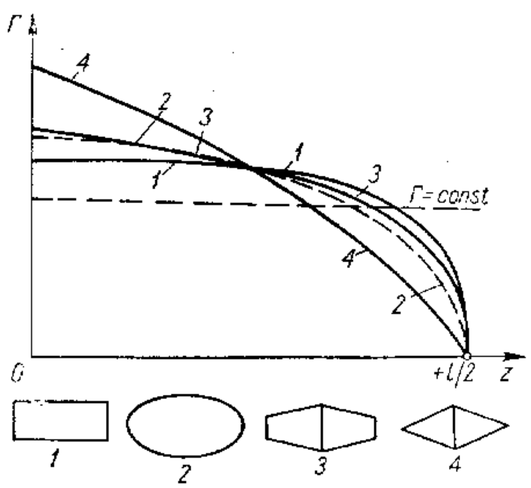
Zatem

$$X_i = \frac{\pi}{8} \varrho \Gamma_0^2. \tag{11.37}$$

Podstawiając do ostatniego równania wielkość Γ_0 z równania (11.36), otrzymamy:

$$X_i = \frac{2}{\pi \varrho v_\infty^2} \frac{Y^2}{l^2}.$$

Zauważymy, że X_i nie zależy ani od λ, ani od l. Na pierwszy rzut oka jest to sprzeczne z ostatnim wzorem. W rzeczywistości jednak, przy zmianie rozpiętości w danym przypadku wzrasta odpowiednio siła nośna Y (11.36).



11.14. Rozkład cyrkulacji na płatach o rozmaitych obrysach

Należy zwrócić uwagę, że eliptyczny rozkład cyrkulacji wzdłuż rozpiętości można otrzymać przy pewnym α dla płata o d o w o l n y m obrysie, na przykład dla płata prostokątnego. W tym celu trzeba jedynie zwiększyć kąty natarcia w środkowej części płata według równania $\Gamma = \frac{1}{2} c_y b v_\infty$ oraz zmniejszyć nieco kąty natarcia przy końcach płata, zgodnie z tym samym równaniem. Zmiana kątów natarcia spowoduje zmianę c_y i jeśli uda się to osiągnąć, aby iloczyn $\frac{1}{2} c_y b v_\infty$ zmieniał się eliptycznie wzdłuż rozpiętości, wówczas płat taki

odpowiada takiemu samemu schematowi wirowemu co płat eliptyczny dla danego α.

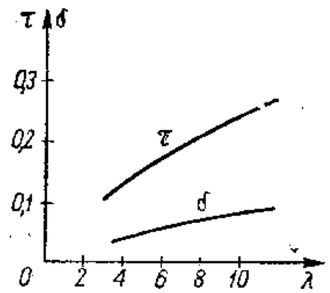
Nasuwa się naturalne pytanie: w jakim stopniu inne płaty różnią się od płata eliptycznego pod względem rozkładu cyrkulacji.

Obliczenie cyrkulacji płata eliptycznego oraz płatów o innych obrysach (przy jednakowej sile nośnej) daje wyniki podane na rys. 11.14. Rozważając otrzymane wykresy rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości, można dojść do dwóch zasadniczych wniosków.

1. Zastąpienie płata jednym wirem podkowiastym o $\Gamma = \text{const}$ wzdłuż rozpiętości może w teorii płata o skończonej rozpiętości służyć jedynie jako pierwsze przybliżenie.

2. Pewnym prawem „średnim" rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości dla różnych płatów jest prawo eliptyczne, odpowiadające płatowi najkorzystniejszemu pod względem aerodynamicznym.

Wielkości τ i δ zwane zwykle poprawkami dla płatów o obrysach nieeliptycznych zależą głównie od obrysu płata oraz od wydłużenia.



11.15. Przykład zależności poprawek τ i δ od wydłużenia λ

Jako przykład podano na rys. 11.15 zależność poprawek τ i δ od λ dla płata prostokątnego.

Należy zaznaczyć, że poprawka τ na kąt natarcia jest dość znaczna, a zatem przy dokładnych obliczeniach trzeba ją bezwzględnie stosować. Natomiast poprawka δ na c_{xi} jest bardzo mała i w większości przypadków nie jest w praktyce uwzględniana.

W tablicy 11.1 podane są pewne średnie wartości poprawek τ i δ dla płatów o różnych obrysach [9].

Tablica 11.1

Obrys płata	$\frac{1}{\pi}(1+\tau)$	$\frac{1}{\pi}(1+\delta)$	Uwagi
elipsa	0,318	0,318	$\tau = \delta = 0$
trapez	0,318	0,318	zwężenie $\eta = 2 \div 3$
prostokąt	0,375	0,335	$\lambda = 5 \div 8$
końce płata odchylone ku tyłowi	0,338	0,318	$\lambda = 5 \div 8$
końce płata zaokrąglone	0,365	0,318	$\lambda = 5 \div 8$
romb	0,363	0,363	

Wobec nieznacznych odchyleń charakterystyk aerodynamicznych płatów o różnych obrysach od charakterystyk płatów eliptycznych, w praktyce są najczęściej stosowane prostsze obrysy płatów, zbliżone jednak do eliptycznych, na przykład trapezowe.

§ 9. Rozwiązanie równania całkowo-różniczkowego płata metodą S.G. Nużina

Przy końcu paragrafu 6 zaznaczyliśmy, że w przypadku płatów o skomplikowanym obrysie (istnienie wycięć i występów) oraz płatów z wychylonymi lotkami, klapami itp. metoda Glauerta—Trefftza dla określenia cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata nie znajduje praktycznego zastosowania.

Oprócz tej metody istnieje jeszcze szereg innych metod obliczania rozkładu cyrkulacji. Najbardziej rozpowszechniona jest w ostatnich latach metoda Riesberga [43] oraz metoda Multhoppa.

Podana w paragrafie niniejszym metoda prof. S.G. Nużina zawiera podstawowe dodatnie właściwości ostatnich metod, a prócz tego ma zalety zarówno pod względem prostoty samej teorii, jak i jej praktycznego zastosowania.

Prawo rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata napiszemy w postaci następującej:

$$\Gamma = 2\,l\,v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

lub

$$\overline{\Gamma} = \frac{\Gamma}{2\,l\,v_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta,$$

gdzie kąt θ związany jest ze współrzędną z równaniem

$$z = -\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Równanie podstawowe (11.18), które mamy rozwiązać, napiszemy w następującej postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \left(1 + \frac{n\,\mu}{\sin\theta}\right) = \mu\,[\alpha_0(90°) + \alpha(90°) + \varphi_z(\theta)], \tag{11.38}$$

gdzie jak poprzednio

$$\mu = \frac{a_0\,t}{8\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{a_0\,\overline{t}}{8}. \tag{11.39}$$

W paragrafie niniejszym będziemy przez t oznaczali cięciwę płata; $\varphi_z(\theta)$ — kąt zwichrzenia, który może się na ogół składać ze zwichrzenia aerodynamicznego i geometrycznego, tzn.

$$\varphi_z(\theta) = \varphi_{a,z} + \varphi_{g,z}.$$

Podając współczynniki A_n w postaci

$$A_n = A_n'\alpha_1(90°) + A_n'', \tag{11.40}$$

gdzie

$$\alpha_1(90°) = \alpha_0(90°) + \alpha(90°),$$

dobierzemy A_n' i A_n'' w ten sposób, aby spełniały się następujące równania wynikające z podstawowego równania (11.38):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin n\theta \left(1 + \frac{n\,\mu}{\sin\theta}\right) = \mu, \tag{11.41}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n'' \sin n\theta \left(1 + \frac{n\,\mu}{\sin\theta}\right) = \mu\,\varphi_z. \tag{11.42}$$

Określenie cyrkulacji dookoła płata o danym obrysie sprowadza się więc do rozwiązania następujących dwóch oddzielnych zadań: 1) określenia głównej wartości cyrkulacji dookoła płaskiego płata o danym obrysie (określenie współczynników A_n') oraz 2) określenia cyrkulacji dodatkowej pochodzącej od zwichrzenia (określenie współczynników A_n'').

Wobec tego, że określenie współczynników A_n' i A_n'' odpowiednio z równań (11.41) i (11.42) zasadniczo niczym się nie różni, rozważymy szczegółowo równanie (11.41) dla współczynników A_n'.

W celu ich określenia zgodnie z metodą Nużina podamy funkcję $\mu(\theta)$ w postaci szeregu Fouriera:

$$\mu(\theta) = \sum_n b_n' \sin n\theta, \tag{11.43}$$

gdzie na podstawie równania $\mu(\theta) = \mu(\pi - \theta)$ liczby n będą miały wartości tylko nieparzyste.

Ze wzoru (11.43) znajdziemy

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta} = \sum_n b_n' \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{11.44}$$

Przekształcimy to wyrażenie w następujący sposób. Ze znanego równania

$$\sin n\theta = \sin n\theta - \sin(n-2)\theta + \sin(n-2)\theta = 2\sin\theta\cos(n-1)\theta + \sin(n-2)\theta$$

będziemy mieli

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n-2)\theta}{\sin\theta} + 2\cos(n-1)\theta. \tag{11.45}$$

Zatem przy skończonym n

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2\cos(n-1)\theta + 2\cos(n-3)\theta + 2\cos(n-5)\theta + \ldots + 2\cos 2\theta + 1.$$

Równanie (11.44) można więc przepisać w następujący sposób:

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta} = \sum_n b_n' \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \sum_n b_n' \,[2\cos(n-1)\theta + 2\cos(n-3)\theta + \ldots + 1]$$

lub

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta} = b_1' + b_3'(1 + 2\cos 2\theta) + b_5'(1 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta) + \ldots =$$

$$= b_1' + b_3' + b_5' + \ldots + 2\sum_n b_{2n-1+2k}' \cos 2k\theta = \sum_n b_{2n-1}' + 2\sum_n b_{2n-1+2k}' \cos 2k\theta,$$

gdzie k oznacza parametr, przy czym $k = 1, 2, 3, \ldots$ Zatem

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta} = m_0 + 2\sum_k m_{2k}\cos 2k\theta, \tag{11.46}$$

gdzie

$$m_0 = \sum_n b'_{2n-1}, \tag{11.47}$$

$$m_{2k} = \sum_n b'_{2n-1+2k}. \tag{11.48}$$

Przy wykorzystaniu równań (11.46) i (11.43) równanie (11.41) przybiera postać

$$\sum_n A'_n \sin n\theta \left[1 + n\left(m_0 + 2\sum_n m_{2k}\cos 2k\theta\right)\right] = \sum_n b'_n \sin n\theta$$

lub

$$\sum_n (1 + m_0 n) A'_n \sin n\theta + \sum_{k,n} n\, m_{2k}\, A'_n [\sin(n+2k)\theta + \sin(n-2k)\theta] =$$

$$= \sum_n b'_n \sin n\theta. \tag{11.49}$$

Porównując współczynniki przy sinusach łuków o jednakowej wielokrotności po lewej i prawej stronie ostatniego równania otrzymamy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} &A'_1(1 + m_0 - m_2) + 3A'_3(m_2 - m_4) + 5A'_5(m_4 - m_6) + \ldots = b'_1,\\ &A'_1(m_2 - m_4) + A'_3[(1 + 3(m_0 - m_6)] + 5A'_5(m_2 - m_8) + \ldots = b'_3,\\ &A'_1(m_4 - m_6) + 3A'_3(m_2 - m_8) + A'_5[(1 + 5(m_0 - m_{10})] + \ldots = b'_5. \end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

Zanim przystąpimy do rozwiązania układu (11.50) wskażemy metodę określania współczynników b'_n (współczynniki m_{2k} dają się łatwo określić z równań (11.47) i (11.48), jeżeli znane są współczynniki b'_n).

Wykorzystując do określenia współczynników b'_n znane wzory z teorii szeregów Fouriera otrzymamy na podstawie wzoru (11.43):

$$b'_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mu(\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{a_0}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{t}(\theta)\sin n\theta\, d\theta \tag{11.51}$$

lub inaczej

$$b'_n = \frac{a_0}{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{t}\, I_n\, d\bar{z}, \tag{11.52}$$

gdzie

$$I_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \qquad \bar{z} = \frac{2z}{l}.$$

Za pomocą równań (11.52) i (11.45) znajdziemy wyrażenie na współczynniki b'_n w postaci ogólnej dla płatów o dowolnym obrysie:

$$\left.\begin{aligned} b'_1 &= \frac{a_0}{2\pi}\int_0^1 \bar{t}\, d\bar{z} = \frac{a_0 S}{\pi l^2} = \frac{a_0}{\pi\lambda},\\ b'_3 &= -b'_1 + \frac{2a_0}{\pi}\int_0^1 \bar{t}\,\bar{z}^2\, d\bar{z},\\ b'_5 &= -2b'_1 - 3b'_5 + \frac{8a_0}{\pi}\int_0^1 \bar{t}\,\bar{z}^2\, d\bar{z} \end{aligned}\right\} \tag{11.53}$$

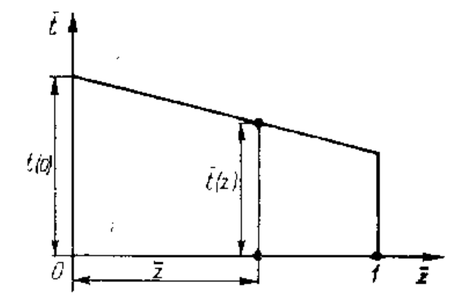
i tak dalej[1].

Ustalmy postać równań (11.53) dla szeregu płatów o zwykłym obrysie.

W przypadku płatów trapezowych (rys. 11.16) całki wchodzące do równania (11.53) mogą być obliczone dokładnie. Ponieważ dla dowolnego przekroju θ płata trapezowego bez prostokątnej części środkowej stosuje się równanie

$$\bar{t} = \bar{t}(90°) - \nu\bar{z}, \tag{11.54}$$

gdzie $\nu = \dfrac{t(90°) - t(0°)}{\dfrac{l}{2}} = \bar{t}(90°) - \bar{t}(0°)$ — zmniejszenie cięciwy w stosunku do cięciwy w środku płata, przy przesunięciu wzdłużrozpiętości o jednostkę długości, zatem równania (11.53) na współczynniki b'_n przybierają postać:



11.16. Do obliczenia współczynników b płata trapezowego

$$\left.\begin{aligned} b'_1 &= \frac{a_0}{2\pi}\left(\frac{\bar{t}(90°)}{1} - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{a_0}{\pi\lambda},\\ b'_3 &= \frac{a_0}{2\pi}\left(\frac{\bar{t}(90°)}{3} - \frac{\nu}{2}\right),\\ b'_5 &= \frac{a_0}{2\pi}\left(\frac{\bar{t}(90°)}{5} - \frac{\nu}{6}\right), \quad b'_7 = \frac{a_0}{2\pi}\left(\frac{\bar{t}(90°)}{7} - \frac{\nu}{6}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.55}$$

[1] Z równania (11.53) wynika, że dla środkowego przekroju płata, określonego kątem $\theta = 90°$, spełnione zostanie następujące równanie:

$$\mu(90°) = \frac{a_0\bar{t}(90°)}{8} = b'_1 - b'_3 + b'_5 + \ldots,$$

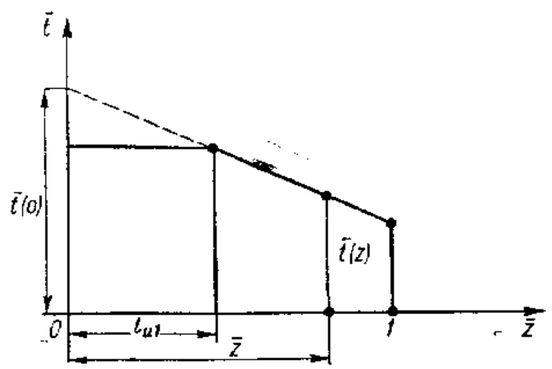
które może być wykorzystane bądź jako równanie sprawdzające przy obliczaniu współczynników b'_n ze wzorów (11.53), bądź też jako równanie dla określenia współczynnika b'_7, jeżeli znane są współczynniki b'_1, b'_3 i b'_5.

W przypadku płatów trapezowych z prostokątną częścią środkową (rys. 11.17) będziemy mieli

$$\int_0^1 \bar{t}\,\bar{z}^{2k}\,d\bar{z} = \frac{\bar{t}(90°)}{2k+1} - \frac{\nu}{2k+2}\left(1 + \frac{\bar{l}_{s1}^{2k+2}}{2k+1}\right), \tag{11.56}$$

gdzie $\bar{l}_{s1} = \frac{l_{s1}}{\frac{l}{2}}$ — długość połowy części środkowej odniesiona do połowy rozpiętości płata i $\bar{t}(90°) = \bar{t}(\bar{l}_{s1}) + \nu\bar{l}_{s1}$. Wyrażenia na współczynniki b_n' w równaniu (11.53) przybierają przy tym następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} b_1' &= \frac{a_0}{2\pi}\left[\frac{\bar{t}(90°)}{1} - \frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{\bar{l}_{s1}^2}{1}\right)\right] = \frac{a_0}{\pi\lambda}, \\ b_3' &= -b_1' + \frac{2a_0}{\pi}\left[\frac{\bar{t}(90°)}{3} - \frac{\nu}{4}\left(1 + \frac{\bar{l}_{s1}^4}{3}\right)\right], \\ b_5' &= -2b_1' - 3b_3' + \frac{8a_0}{\pi}\left[\frac{\bar{t}(90°)}{5} - \frac{\nu}{6}\left(1 + \frac{\bar{l}_{s1}^6}{5}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11.57}$$



11.17. Do obliczenia współczynników b' płata trapezowego z prostokątną częścią środkową

W przypadku płatów o zaokrąglonych obrysach bez wycięć zaleca się następujący, bardzo prosty, przybliżony sposób obliczania współczynników b_n'. Wyrażając $\mu(\theta)$ za pomocą szeregu (11.43)

$$\mu(\theta) = b_1' \sin\theta + b_3' \sin 3\theta + b_5' \sin 5\theta \tag{11.58}$$

oraz podstawiając do niego wartości θ równe 60° i 90°, znajdziemy współczynniki b_n' w postaci następującej:

$$\left.\begin{aligned} b_5' &= b_1'\frac{2\mu(60°)}{\sqrt{3}}, \\ b_3' &= b_1' + b_5' - \mu(90°), \end{aligned}\right\} \tag{11.59}$$

gdzie $b_1' = \frac{a_0}{\pi\lambda}$ założone jest jako wiadome.

Po znalezieniu współczynników b_n' można łatwo określić również wartości współczynników m_0 i m_{2k}, wchodzących w układ równań (11.50), wykorzystując w tym celu równania (11.47) i (11.48).

Powracając do układu równań (11.50), w którym współczynniki m_0, m_{2k} i b_n' będziemy traktowali jako wiadome, podamy jedną z możliwych metod określenia współczynników A_n', mianowicie metodę kolejnych przybliżeń (metoda iteracji).

Powyższa metoda polega na tym, że układ równań liniowych rozwiązuje się względem każdego niewiadomego A_n' oddzielnie odrzucając w równaniach wyrazy małe. W ten sposób, na drodze uzyskania szeregu przybliżeń znajduje się ostateczne wartości niewiadomych współczynników A_n'.

W zastosowaniu do układu (11.50) metoda iteracji będzie wyglądała w sposób następujący.

Ponieważ w pierwszym równaniu (11.50) wszystkie składniki, poczynając od drugiego, są w porównaniu z pierwszym niewielkie i charakteryzują odchylenia zarówno cięciw, jak i cyrkulacji od rozkładu eliptycznego, zatem zaniedbując je znajdziemy pierwsze przybliżenie dla współczynnika A_1':

$$A_1'^{(1)} = \frac{b_1'}{1 + m_0 - m^2}.$$

Podstawiając tę wartość $A_1'^{(1)}$ do drugiego równania (11.50) i odrzucając człon trzeci, znajdziemy pierwsze przybliżenie dla współczynnika A_3':

$$A_3'^{(1)} = \frac{b_3' - A_1'^{(1)}(m_2 - m_4)}{1 + 3(m_0 - m_6)}.$$

Podstawiając wartość współczynników $A_1'^{(1)}$ i $A_3'^{(1)}$ do trzeciego równania (11.50), znajdziemy

$$A_5'^{(1)} = \frac{b_5' - A_1'^{(1)}(m_4 - m_6) - 3A_3'^{(1)}(m_2 - m_8)}{1 + 5(m_0 - m_{10})}.$$

Następnie, podstawiając wartości $A_3'^{(1)}$ i $A_5'^{(1)}$ do równania pierwszego (11.50), znajdziemy drugie przybliżenie dla współczynnika A_1':

$$A_1'^{(2)} = \frac{b_1' - 3A_3'^{(1)}(m_2 - m_4) - 5A_5'^{(1)}(m_4 - m_6)}{1 + m_0 - m_2}$$

W sposób analogiczny znajdziemy

$$A_3'^{(2)} = \frac{b_3' - A_1'^{(2)}(m_2 - m_4) - 5\,A_5'^{(1)}(m_2 - m_8)}{1 + 3\,(m_0 - m_6)};$$

$$A_5'^{(2)} = \frac{b_5' - A_1'^{(2)}(m_4 - m_6) - 3\,A_3'^{(2)}(m_2 - m_8)}{1 + 5\,(m_0 - m_{10})}.$$

Otrzymane wartości współczynników A_n' można traktować jako ostateczne.

Należy zaznaczyć, że współczynniki szeregu (11.43) bardzo szybko się zmniejszają. Na przykład w przypadku rozkładu eliptycznego cięciw wzdłuż rozpiętości płata wszystkie współczynniki, poczynając od b_3', są równe zeru. Jeżeli idzie o współczynniki m_{2k}, to wszystkie one są także równe zeru, z wyjątkiem współczynnika $m_0 = b_1'$. Zatem, w przypadku eliptycznej zmiany cięciwy wzdłuż rozpiętości

$$A_1' = \frac{b_1'}{1 + b_1'}, \quad A_n' = 0 \quad \text{przy} \quad n \geqslant 3.$$

W przypadku płatów trapezowych z częścią środkową oraz płatów o zaokrąglonych obrysach bez wycięć można z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością ograniczyć się do trzech współczynników b_1', b_3', b_5' oraz odpowiednio do trzech współczynników A_1', A_3' i A_5'.

Określenie cyrkulacji dodatkowej od zwichrzenia płata (określenie współczynników A_n'').

Dla ogólności założymy, że zwichrzenie płata składa się ze zwichrzenia aerodynamicznego i geometrycznego, tzn.

$$\varphi_z = \varphi_{a,z} + \varphi_{g,z}.$$

Równaniem podstawowym do określenia cyrkulacji dodatkowej pochodzącej od zwichrzenia płata jest równanie (11.42) z niewiadomymi współczynnikami A_n''.

Rozważymy najpierw zwichrzenie rozłożone symetrycznie względem przekroju $\theta = 90°$.

Przy symetrycznym rozkładzie zwichrzenia określenie współczynników A_n'', tzn. określenie cyrkulacji dodatkowej z równania (11.42), nie będzie się zasadniczo różniło od określenia współczynników A_n' (określenia podstawowej cyrkulacji płata płaskiego) z równania (11.41). Różnica będzie polegała jedynie na tym, że do lewej części układu równań (11.50) trzeba podstawić zamiast współczynników A_n' współczynniki A_n'', do prawej zaś części tego samego układu zamiast współczynników b_n' podstawić współczynniki b_n'' wchodzące w rozwinięcie

$$\mu\,\varphi_z = f(\theta) = \sum b_n'' \sin n\theta \tag{11.60}$$

[funkcja $f(\theta)$ staje się zerem przy $\theta = 0$ i $\theta = 90°$].

Współczynniki b_n'' można określić dość łatwo, jeżeli ograniczymy ten szereg do trzech wyrazów:

$$f(\theta) = b_1'' \sin\theta + b_3'' \sin 3\theta + b_5'' \sin 5\theta$$

i założymy kolejno $\theta = 30°$, $60°$ i $90°$.

W tym przypadku otrzymamy trzy równania z trzema niewiadomymi; rozwiązując je, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} b_1'' &= \frac{f(30°)}{3} + \frac{f(60°)}{\sqrt{3}}, \\ b_3'' &= \frac{2}{3} f(30°), \\ b_5'' &= \frac{f(30°)}{3} - \frac{f(60°)}{\sqrt{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.61}$$

Omówimy obecnie zwichrzenie rozłożone antysymetrycznie, gdy w przekrojach odległych jednakowo od osi x kąty zwichrzenia φ_z są równe pod względem wielkości bezwzględnej, lecz różne co do znaku.

Takie zwichrzenie zachodzi na przykład przy wychyleniu lotek o jednakowe przeciwne kąty przy $c_{y\,\text{płata}} = 0$.

Przedstawmy kąt zwichrzenia jako sumę:

$$\varphi_z = \varphi_{s,z} + \varphi_{as,z},$$

gdzie:

$$\varphi_{s,z} = \frac{\varphi_z(\theta) + \varphi_z(\pi - \theta)}{2} \text{ — kąt zwichrzenia symetrycznego,}$$

$$\varphi_{as,z} = \frac{\varphi_z(\theta) - \varphi_z(\pi - \theta)}{2} \text{ — kąt zwichrzenia antysymetrycznego.}$$

Wychodząc z równania (11.42), otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}'' \sin 2n\theta \left(1 + \frac{2\,n\,\mu}{\sin\theta}\right) = \mu\,\varphi_{as,z}. \tag{11.62}$$

Podstawiając (11.46) do (11.62) oraz rozkładając $\varphi_{as,z}$ na szereg

$$\mu\,\varphi_{as,z} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}'' \sin 2n\theta, \tag{11.63}$$

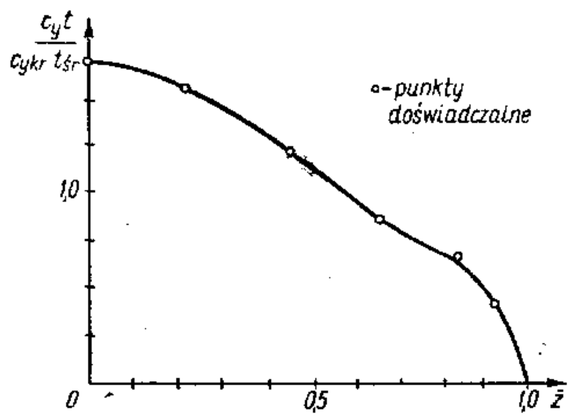
otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2\,m_0\,n)\,A_{2n}'' \sin 2n\theta + \sum_{k,n} 2\,n\,m_{2k}\,A_{2n}'' [\sin 2\,(n+k)\,\theta + \sin 2\,(n-k)\,\theta] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}'' \sin 2n\theta. \tag{11.64}$$

Porównując współczynniki przy sinusach łuków o jednakowej wielokrotności na stronie lewej i prawej (11.64), otrzymamy układ równań

$$\left.\begin{aligned} A_2''[1+2(m_0-m_4)]+4A_4''(m_2-m_6)+6A_6''(m_4-m_8)+\ldots&=b_2'',\\ 2A_2''(m_2-m_6)+A_4''[1+4(m_0-m_8)]+6A_6''(m_2-m_0)+\ldots&=b_4'',\\ 2A_2''(m_4-m_8)+4A_4''(m_2-m_{10})+A_6''[1+6(m_0-m_{12})]+\ldots&=b_6''. \end{aligned}\right\} \quad (11.65)$$



11.18. Porównanie obliczenia rozkładu cyrkulacji na płacie o skończonej rozpiętości metodą Nużina z danymi doświadczalnymi. Płat trapezowy; $\alpha_1 = 9{,}75$, $\eta = 3$, $\lambda = 6$, $\varphi_{s,z} = -6°$.

W układzie (11.65) niewiadomymi są współczynniki A_{2n}''. Współczynniki b_{2n}'' można określić ze wzorów Fouriera

$$b_{2n}'' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mu\, \varphi_{as,z} \sin 2n\theta\, d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu\, \varphi_{as,z} \sin 2n\theta\, d\theta \quad (11.66)$$

lub, prościej, w następujący sposób.

Ograniczając szereg (11.63) do trzech wyrazów oraz podstawiając kolejno do prawej i lewej strony wartości $\theta = 30°$, $60°$ i $75°$, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} b_2'' &= \frac{F(30°)+F(60°)}{\sqrt{3}},\\ b_4'' &= \frac{F(30°)-F(60°)}{\sqrt{3}},\\ b_6'' &= F(75°) - \frac{b_2''}{2} = b_4''\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}\right\} \quad (11.67)$$

gdzie

$$F(\theta) = \mu(\theta)\, \varphi_{as,z}(\theta).$$

Należy mieć na uwadze, że jeżeli przy niesymetrycznym opływie płata trzeba w celu określenia cyrkulacji wzdłuż płata rozwiązać układ (11.64), tzn. określić współczynniki A_n z parzystymi n, a w celu określenia cyrkulacji w przypadku opływu symetrycznego (płat płaski lub symetrycznie zwichrzony) trzeba rozwiązać układ (11.50), tzn. określić współczynniki A_n z nieparzystymi n — wówczas, w ogólnym przypadku niesymetrycznego opływu płata, do wyrażenia na cyrkulację $\Gamma = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$ będą jako wartości szukane wchodziły zarówno parzyste, jak i nieparzyste współczynniki A_n. Będzie to wymagało rozwiązania obydwu układów (11.50) i (11.65). (Podobny rozkład cyrkulacji może zachodzić na przykład na płacie z wychylonymi lotkami przy $c_{y\,\text{płata}} \neq 0$).

Na zakończenie nadmienimy, że przytoczona w tym paragrafie metoda obliczeń daje wyniki zupełnie zadowalająco zgodne z doświadczeniem (rys. 11.18).

Rozdział XII

PODSTAWOWE POJĘCIA Z DYNAMIKI GAZÓW

W rozdziałach poprzednich zakładaliśmy, że prędkości przepływu, a zatem także różnice ciśnień w różnych punktach pola przepływu, są stosunkowo niewielkie. Umożliwiało to traktowanie gęstości powietrza jako wielkości stałej. Innymi słowy, nie uwzględnialiśmy ściśliwości powietrza.

Przy przepływach powietrza z dużymi prędkościami, zbliżonymi do prędkości dźwięku, niezbędne jest uwzględnianie ściśliwości powietrza. W przeciwnym przypadku otrzymywane wyniki mogą nie tylko ilościowo znacznie się różnić od rzeczywistego obrazu przepływu, ale nawet wręcz mu nie odpowiadać pod względem jakościowym.

Biorąc pod uwagę, że przepływ powietrza (gazu) z dużymi prędkościami związany jest z dużymi zmianami ciśnień, co wywołuje z kolei znaczne zmiany gęstości ϱ i temperatury T, omówimy najpierw podstawowe wiadomości o cieple oraz przypomnimy podstawowe określenia i prawa termodynamiki.

§ 1. Równanie stanu gazu (doskonałego)

Pomiędzy podstawowymi parametrami charakteryzującymi stan gazu: objętością V [m³], ciężarem G [kG], zawartym w tej objętości, ciśnieniem p [kG/m²], temperaturą bezwzględną T [stopnie] istnieje określona zależność. W przypadku gazu doskonałego zależność ta wyraża się znanym wzorem

$$pV = GRT \tag{12.1}$$

(gdzie R — stała gazowa R [kGm/kG°K]), zwanym *równaniem stanu gazu doskonałego*.

Liczne doświadczenia potwierdzają słuszność tej zależności w dużym zakresie zmiany ciśnień i temperatur. Doświadczenia wykazują, że powietrze odpowiada temu prawu w stopniu dostatecznie ścisłym przy ciśnieniu do 100 ata oraz niezbyt niskich temperaturach. Nawet przy ciśnieniu 200 ata i temperaturze od −20° do +50°C odchylenia od równania (12.1) nie przekraczają dla powietrza 4%.

Jeżeli obie strony równania (12.1) podzielimy przez G, otrzymamy równanie stanu dla 1 kG gazu

$$pv = RT \tag{12.2}$$

lub

$$\frac{p}{\gamma} = RT,$$

lub[1]

$$p = \varrho g R T, \tag{12.3}$$

gdzie

$$v = \frac{V}{G}, \quad \gamma = \frac{G}{V} = \frac{1}{v} = \varrho g.$$

Równanie (12.3) umożliwia określenie dowolnego spośród parametrów charakteryzujących stan gazów, przy znanych dwu pozostałych.

§ 2. Pierwsze prawo termodynamiki

Niech pewna ilość gazu G[kG] znajduje się w stanie równowagi. Oznaczmy przez dQ ilość ciepła doprowadzonego z zewnątrz do gazu. W wyniku doprowadzenia ciepła gaz przejdzie z początkowego stanu równowagi w inny. Doprowadzenie ciepła dQ może spowodować zmianę wewnętrznej energii gazu dU; poza tym, przy przejściu z jednego stanu równowagi w inny, gaz może wykonać zewnętrzną pracę mechaniczną dL.

Następnie, w warunkach rzeczywistych, przy przejściu z jednego stanu równowagi w inny, gaz zużywa (traci) pracę mechaniczną dL_r na pokonanie tarcia. W układzie zamkniętym ta utracona przez gaz energia powraca do niego w postaci ciepła dQ_r, równoważnego pracy dL_r, tzn. $dQ_r = A\,dL_r$, gdzie A — cieplny równoważnik pracy, równy 1/427 kcal/kGm.

W ten sposób ogólna ilość doprowadzonego do gazu ciepła dQ' składa się z ciepła doprowadzonego do gazu z zewnątrz dQ oraz z ciepła równoważnego stratom energii mechanicznej dQ_r, tzn.

$$dQ' = dQ + dQ_r.$$

Na podstawie prawa zachowania energii można napisać następujące równanie:

$$dQ' = dU + A\,dL + A\,dL_r;$$

oznaczając

$$A\,dL + A\,dL_r = A\,dL',$$

otrzymamy

$$dQ' = dU + A\,dL', \tag{12.4}$$

[1] Stała gazowa powietrza wynosi 29,27 kGm/kG °K. Jako stała gazowa przyjmowana jest nieraz wielkość gR, czyli 287,14 m²/sek² °K.

gdzie dL' jest to cała wykonana przez gaz praca składająca się z pracy zewnętrznej dL oraz pracy związanej ze stratami dL_r.

Pracę wewnętrzną dL' gazu, przy jego rozprężaniu się w trakcie procesu doprowadzania ciepła, łatwo jest wyrazić przez zmianę jego objętości:

$$dL' = dL + dL_r = p\,dV.$$

Równanie poprzednie można wówczas napisać w postaci

$$dQ' = dU + A\,p\,dV \tag{12.5}$$

lub, odnosząc wszystkie wielkości do 1 kG gazu,

$$dq' = du + A\,p\,dv. \tag{12.6}$$

Otrzymane równania (12.4) ÷ (12.6) stanowią najogólniejsze wyrażenia matematyczne pierwszego prawa termodynamiki. *Pierwsze prawo termodynamiki stanowi* oczywiście *przypadek szczególny ogólnego prawa zachowania energii i wyraża równoważność energii cieplnej i mechanicznej.*

Jeżeli założymy, że przejście gazu z jednego stanu równowagi w inny odbywa się bez strat (tak zwany proces odwracalny), wówczas dla tego szczególnego przypadku pierwsze prawo termodynamiki przybierze postać

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dU + A\,dL \\ \text{lub}\quad dQ &= dU + Ap\,dV, \\ \text{lub}\quad dq &= du + Ap\,dv, \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

ponieważ

$$A\,dL_r = dQ_r = 0, \quad dL' = dL \quad \text{i} \quad dQ' = dQ.$$

Zanim przejdziemy do rozważenia drugiego prawa termodynamiki przypomnimy kilka ważnych termodynamicznych pojęć i wzorów, które można otrzymać na podstawie równania stanu oraz pierwszego prawa termodynamiki.

§ 3. Ciepło właściwe

Omówimy pewien dowolny proces termodynamiczny, w którym bierze udział 1 kG gazu (rys. 12.1). Oznaczmy temperaturę gazu w stanie odpowiadającym punktowi A przez T, jego temperaturę w stanie odpowiadającym punktowi sąsiedniemu a przez $T + \Delta T$, ilość zaś ciepła doprowadzonego do gazu z zewnątrz na odcinku Aa przez Δq.

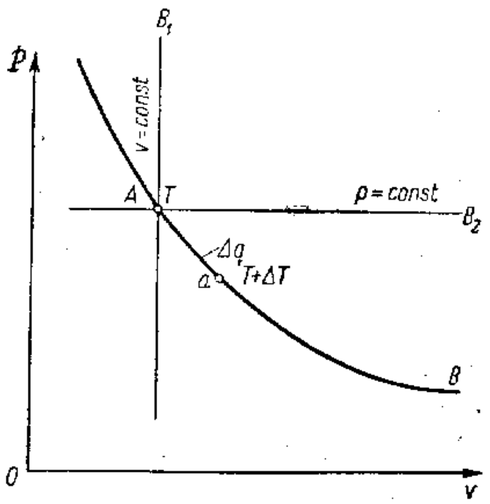
Stosunek $\frac{\Delta q}{\Delta T}$ nazywany jest średnim ciepłem właściwym w danym procesie,

granica zaś, do której średnie ciepło właściwe zmierza przy dążeniu długości odcinka Aa do zera, nazywana jest ciepłem właściwym i jest oznaczana przez

$$c = \frac{\partial q}{\partial T}. \tag{12.8}$$

Widzimy, że *ciepłem właściwym nazywana jest ilość ciepła konieczna do podgrzania* 1 kG *gazu o jeden stopień.*

Ciepło właściwe c zależy w sposób istotny od charakteru procesu (dla procesów AB, AB_1 oraz AB_2 na rys. 12.1 ciepła właściwe c mają różne wartości w jednym i tym samym punkcie). Rozważymy ciepło właściwe odpowiadające procesom $v = \text{const}$ i $p = \text{const}$ (proste AB_1 i AB_2 na rys. 12.1). Powyższe ciepła właściwe oznaczane są przez c_v i c_p.



12.1. Do określenia ciepła właściwego c, c_p i c_v

Ciepła właściwe c_v i c_p są wielkościami zmiennymi, zależnymi od temperatury T. Na podstawie licznych doświadczeń ustalono, że ciepła właściwe c_v i c_p rosną wraz ze wzrostem temperatury i odwrotnie.

Dla procesu $v = \text{const}$ różniczka $dv = 0$, a zatem, na podstawie równania (12.7) $dq = du$, tzn. całe ciepło doprowadzane do gazu z zewnątrz w trakcie takiego procesu zostaje całkowicie zużyte na zwiększenie jego energii wewnętrznej. Dlatego dla procesu $v = \text{const}$ można napisać

$$c_v = \frac{du}{dT}$$

(pochodną cząstkową zastąpiono przez pochodną zwyczajną, ponieważ energia wewnętrzna gazu doskonałego jest funkcją tylko temperatury bezwzględnej). W ten sposób

$$du = c_v\,dT. \tag{12.9}$$

Zaniedbując zależność c_v od temperatury oraz uwzględniając, że przy $T = 0$ wielkość $u = 0$, możemy (12.9) napisać w postaci:

$$u = c_v\,T. \tag{12.9'}$$

Wykorzystując równanie (12.9), można równanie (12.6) przekształcić do postaci następującej:

$$dq' = c_v\,dT + Ap\,dv.$$

Dla procesu $p = \text{const}$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} \tag{12.10}$$

lub wykorzystując równanie (12.7):

$$c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} + Ap\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}.$$

Ponieważ energia wewnętrzna zależy tylko od temperatury, zatem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{v=\text{const}} = \frac{du}{dT} = c_v.$$

Z równania (12.2) znajdujemy, że

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} = \frac{R}{p}.$$

Zatem

$$c_p = c_v + AR$$

lub

$$c_p - c_v = AR. \tag{12.11}$$

Równanie (12.11) dowodzi, że $c_p > c_v$; jest to fakt dobrze znany z fizyki. Oznaczając

$$\frac{c_p}{c_v} = k, \tag{12.12}$$

otrzymamy

$$c_v = \frac{AR}{k-1}. \tag{12.13}$$

Doświadczenia wykazały, że wielkość k zależy od cząsteczkowej struktury gazu. Dla gazów jednoatomowych $k = 1{,}66$, dla gazów dwuatomowych (w tym także dla powietrza) $k = 1{,}4$, dla gazów wieloatomowych $k = 1{,}33$.

Wobec tego że ciepła właściwe c_v i c_p zależą od temperatury w sposób niejednakowy, wielkość k również zmienia się wraz z temperaturą, przy czym przy wzroście temperatury k maleje, ponieważ ze wzrostem T ciepło właściwe c_p

Tablica 12.1

t°C	0	14	100	2000
k	1,406	1,405	1,396	1,283

wzrasta wolniej niż c_v. Tablica 12.1 zawiera zależność k od temperatury dla powietrza.

Z tablicy widać, że wielkość k zmienia się znacznie jedynie przy większych zmianach temperatury. Dlatego też będziemy w dalszym ciągu traktowali wartość k jako stałą, wynoszącą dla powietrza 1,4.

§ 4. Entalpia

W dynamice gazów posługujemy się często pewną funkcją stanu gazu, określoną wzorem:

$$di = c_p\, dT \tag{12.14}$$

lub

$$i = c_p\, T. \tag{12.14'}$$

Funkcja ta nazywana jest *entalpią*.

Z określenia entalpii (12.14) wynika, że przyrost entalpii di jest równy przyrostowi ciepła dq w procesie $p = \text{const}$. Mając to na uwadze i całkując równanie (12.7) z założenia $p = \text{const}$, otrzymamy

$$i = u + Apv, \tag{12.15}$$

skąd

$$i = \frac{A}{g}\frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho}. \tag{12.15'}$$

Z (12.15') można otrzymać wyrażenie na entalpię nie w jednostkach cieplnych, lecz w mechanicznych oraz nie dla 1 kG gazu, a dla gazu, którego masa równa jest jedności (zatem ciężar jej będzie g[kG]:

$$i = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho}$$

lub uwzględniając równanie stanu (12.2):

$$i = \frac{k}{k-1} gRT.$$

§ 5. Drugie prawo termodynamiki. Entropia

Przy badaniu przepływów gazów korzystamy często z pewnej funkcji s stanu odgrywającej w termodynamice dużą rolę i nazywanej *entropią*. Funkcję tę określa następujące równanie różniczkowe:

$$ds = \frac{dq'}{T}. \tag{12.16}$$

Znajdźmy dla entropii wyrażenie w postaci skończonej. Ustalimy uprzednio związek pomiędzy entalpią a entropią.

Ponieważ

$$T\,ds = dq'$$

oraz

$$dq' = du + A\,p\,dv = du + Ad(pv) - A\,v\,dp = d(u + A\,pv) - \\ - A\,v\,dp = di - A\,v\,dp,$$

zatem

$$T\,ds = di - A\,v\,dp. \tag{12.17}$$

Przy okazji zaznaczymy, że jeżeli wyrażenie (12.17) napisać nie w jednostkach cieplnych, a w mechanicznych oraz nie dla 1 kG gazu, lecz dla gazu, którego masa równa jest jedności, wówczas równanie powyższe będzie miało następującą postać:

$$T\,ds = J\,di - \frac{dp}{\varrho}, \tag{12.17'}$$

gdzie

$$J = \frac{1}{A} = 427 \text{ kGm/Kcal}.$$

Dzieląc równanie (12.17) przez T, zastępując di przez $di = c_p\,dT$ oraz uwzględniając, że $v\,dp = R\,dT - p\,dv$ na mocy równania stanu (12.2), otrzymamy

$$ds = c_p\frac{dT}{T} - \frac{A}{T}(R\,dT - p\,dv),$$

skąd po prostych przekształceniach i wykorzystaniu równań (12.11), (12.13) oraz (12.2) wypadnie:

$$ds = (c_p - AR)\frac{dT}{T} + A\left(\frac{p}{T}\right)dv = \frac{AR}{k-1}\frac{dT}{T} + A\frac{R}{v}dv$$

lub inaczej

$$ds = AR\left(\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T} + \frac{dv}{v}\right). \tag{12.18}$$

Całkując równanie różniczkowe (12.18) znajdziemy wyrażenie na entropię s

$$s = AR\ln\left(T^{\frac{1}{k-1}}v\right) + \text{const}. \tag{12.19}$$

Ze wzoru (12.19) wynika, że entropia s stanowi funkcję stanu gazu, zależną od dwóch niezależnych parametrów stanu (w danym przypadku od T i v).

Korzystając z równania stanu (12.2) łatwo jest wyrazić wartość entropii za pomocą innych parametrów, na przykład p i ϱ.

Wykorzystując równanie (12.13) możemy istotnie równanie (12.18) napisać w następującej postaci:

$$ds = c_v\left[\frac{dT}{T} + (k-1)\frac{dv}{v}\right],$$

skąd

$$s = c_v\ln(Tv^{k-1}) + \text{const}$$

lub wykorzystując równanie stanu (12.2):

$$s = c_v\ln\left(\frac{p}{\varrho^k}\right) + \text{const}. \tag{12.20}$$

Z określenia entropii (12.16) wynika, że entropia układu pozostaje stała, jeżeli nie zachodzi doprowadzanie ciepła $dq = 0$ i proces termodynamiczny odbywa się bez strat: $dq_r = 0$, tzn. jeżeli $dq' = 0$ (ponieważ wówczas $ds = 0$ i $s = \text{const}$).

Z wyrażenia na entropię w postaci skończonej (12.19) lub (12.20) wynika, że entropia $s = \text{const}$, gdy

$$T^{\frac{1}{k-1}}v = \text{const} \quad \text{lub} \quad \frac{p}{\varrho^k} = \text{const}. \tag{12.21}$$

Procesy zachodzące bez wymiany ciepła i bez strat, tzn. ze stałą entropią, będziemy nazywali nadal *izentropowymi*. Widzimy, że parametry stanu gazu dla procesów izentropowych związane są określonymi stosunkami (12.21). Stosunki te można przepisać w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^k, \\ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{12.22}$$

gdzie indeksy 1 i 2 odnoszą się do jakichś dwóch stanów gazu odpowiadających temu samemu procesowi izentropowemu. Wielkość k jest nazywana ***wykładnikiem izentropy***.

Procesy zachodzące bez doprowadzenia lub odprowadzenia ciepła na zewnątrz nazywane są ***procesami adiabatycznymi***. Przy procesach adiabatycznych mogą zachodzić nieodwracalne straty.

Należy zaznaczyć, że we wszystkich obserwowanych procesach rzeczywistych występuje tarcie $dq_r \neq 0$ oraz wymiana ciepła $dq \neq 0$, czyli wszystkim im towarzyszą nieodwracalne straty i wymiana ciepła. W wielu jednak przypadkach wymiana ciepła oraz nieodwracalne straty są niewielkie, można więc je zaniedbać, a zatem traktować proces jako izentropowy. Ułatwia to bardzo badanie przepływów gazów.

Należy również mieć na uwadze, że tarcie jest tylko jedną z postaci nieodwracalnej przemiany energii mechanicznej w ciepło. Istnieją również inne przyczyny nieodwracalnej przemiany energii mechanicznej w ciepło — tak zwane fale uderzeniowe (rozdz. XV).

Drugie prawo termodynamiki orzeka, że *w izolowanym układzie, w którym nie zachodzi wymiana ciepła* ($dq = 0$), *entropia układu nie zmniejsza się przy dowolnym procesie.*

Ponieważ dowiedliśmy wyżej, że przy procesach izentropowych ($dq' = 0$) entropia układu izolowanego pozostaje stała, zatem przy wszystkich pozostałych, nieizentropowych procesach entropia układu izolowanego będzie wzrastała, co właśnie określa kierunek przebiegu wszystkich procesów rzeczywistych, zachodzących w przepływach gazów.

§ 6. Prędkość dźwięku

W płynie nieściśliwym każda zmiana ciśnienia w danym punkcie rozchodzi się natychmiast, tzn. teoretycznie z prędkością nieskończenie wielką $v = \infty$. Inaczej jest w płynie ściśliwym. Jeżeli w dowolnym punkcie przestrzeni, zapełnionej płynem ściśliwym w stanie spoczynku, ciśnienie p zmieni się lokalnie o wielkość Δp, wówczas gdy Δp będzie dostatecznie małe, wywołane przez nie zaburzenia będą rozchodzić się we wszystkich kierunkach z prędkością dźwięku.

Jak wiadomo, zależność prędkości rozchodzenia się dźwięku w ośrodku sprężystym od modułu sprężystości wyraża się wzorem

$$a = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

Możemy przyjąć, że w płynie ściśliwym zmiana ciśnienia Δp jest analogiczna do naprężenia ściskającego σ. Ściskanie jednostkowe równa się jednostkowemu wzrostowi gęstości, tzn. $e = \frac{\Delta\varrho}{\varrho}$. A więc moduł sprężystości E można wyrazić następującym wzorem:

$$E = \frac{\sigma}{e} = \frac{\varrho\,\Delta p}{\Delta\varrho}.$$

W takim razie wyrażenie dla prędkości dźwięku przyjmie postać

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\varrho}},$$

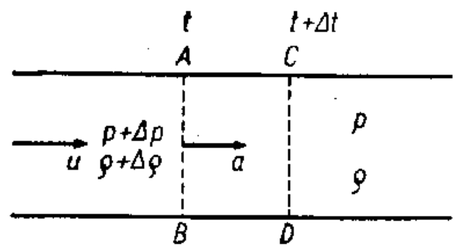
lub

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}. \tag{12.23}$$

Oznacza to, że prędkość rozchodzenia się dźwięku w płynie ściśliwym jest prędkością rozchodzenia się małych zaburzeń.

Pokażemy to na przykładzie. Rozpatrzmy walcową rurę (rys. 12.2) napełnioną płynem ściśliwym. Załóżmy, że przez ruch tłoka wywołany został mały przyrost ciśnienia Δp.

W takim przypadku zwiększenie ciśnienia Δp będzie się rozchodzić z prędkością a w prawo do obszaru niezaburzonego, gdzie panuje ciśnienie p i gęstość ϱ. W obszarze zaburzonym, w którym panuje ciśnienie $p + \Delta p$ i gęstość $\varrho + \Delta\varrho$, na skutek zmiany gęstości o $\Delta\varrho$ płyn będzie się poruszał z małą prędkością u. Niech w chwili t granicą zaburzenia będzie płaszczyzna AB, a w chwili $t + \Delta t$ — płaszczyzna CD. W czasie dt zaburzenie przesunęło się o długość $AC = a\Delta t$ i ogarnęło objętość $Fa\Delta t$. A więc przyrost masy w czasie Δt wynosi $Fa\Delta t\Delta\varrho$. Ten wzrost masy będzie równy masie, która przybyła z lewej strony z prędkością u i która wynosi $u(\varrho + \Delta\varrho)\,\Delta t F$. Przyrównując do siebie te dwa wyrażenia na przyrost masy będziemy mogli napisać po skróceniach



12.2. Rozchodzenie się małego zaburzenia w płynie ściśliwym

$$a\,\Delta\varrho = u(\varrho + \Delta\varrho). \tag{a}$$

Zgodnie z zasadą ilości ruchu możemy uważać, że przyrost ilości ruchu równa się ilości ruchu, jaka powstała w objętości $F\,a\,\Delta t$, objętej zaburzeniem, tzn. równa się ona

$$F\,a\,\Delta t\,(\varrho + \Delta\varrho)u.$$

Ten przyrost ilości ruchu musi równać się sumie impulsów sił ciśnieniowych $\Delta p\,F\,\Delta t$. W ten sposób otrzymamy, że

$$F\,a\,\Delta t\,(\varrho + \Delta\varrho)u = \Delta p\,F\,\Delta t$$

lub

$$\Delta p = a\,u(\varrho + \Delta\varrho). \tag{b}$$

Z zależności (a) i (b) otrzymamy

$$\frac{a\,\Delta\varrho}{\Delta p} = \frac{u(\varrho + \Delta\varrho)}{a\,u(\varrho + \Delta\varrho)}$$

lub

$$a^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\varrho},$$

skąd

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}},$$

tzn. rzeczywiście mały wzrost ciśnienia Δp rozchodzi się z prędkością dźwięku a.

Jeżeli założymy, że w płynie ściśliwym zachodzi proces izentropowy, dla którego

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k,$$

gdzie $k = \frac{c_p}{c_v}$, a p_0 i ϱ_0 są ciśnieniem i gęstością w pewnym ustalonym punkcie, to wyrażenie (12.23) na prędkość dźwięku przybierze nieco inną postać. Rzeczywiście

$$\frac{dp}{d\varrho} = p_0 \frac{1}{\varrho_0^k} k\,\varrho^{k-1} = k \frac{1}{\varrho} p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k = k\frac{p}{\varrho},$$

a więc

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\varrho}}. \tag{12.24}$$

Ponieważ według równania stanu gazu doskonałego $p = \varrho\, g\, R\, T$, więc wyrażenie na prędkość dźwięku a można napisać w postaci

$$a = \sqrt{k\, g\, R\, T}. \tag{12.25}$$

A więc w płynie ściśliwym (gazie) małe sprężyste zaburzenia rozchodzą się ze skończoną prędkością a, zależną od stosunku ciśnienia i gęstości w danym punkcie (12.24) lub od temperatury bezwzględnej w tym punkcie (12.25). Wielkość a, będąca prędkością dźwięku, odgrywa wyjątkowo doniosłą rolę w badaniach przepływu gazów, gdyż stosunek prędkości przepływu do prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń pozwala wnioskować o wpływie ściśliwości gazów. Wiele własności przepływu, a w ich liczbie również charakter zmian jego karametrów w różnych warunkach wzajemnego oddziaływania otaczającego

środowiska, zależą w znacznym stopniu od tego, w jakich granicach leży ten stosunek oznaczany literą M (tzw. liczba Macha — przyp. tłum.)

$$M = \frac{v}{a}.$$

W dalszym ciągu wykażemy, że prawa rządzące ruchem płynu ściśliwego różnią się między sobą zasadniczo, zależnie od tego, czy prędkość przepływu jest większa ($M > 1$), czy mniejsza ($M < 1$) od prędkości a rozchodzenia się dźwięku.

Rozdział XIII

UKŁAD PODSTAWOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DYNAMIKI GAZÓW

§ 1. Przedmiot i podstawowe równania dynamiki gazów

Rozważymy dowolny ustalony przepływ gazu, traktowanego jako płyn nielepki, lecz ściśliwy. Przy znanych siłach masowych możemy uważać, że przepływ gazu jest nam znany, jeżeli w dowolnym punkcie przestrzeni znane są wartości trzech składowych prędkości v_x, v_y, v_z, ciśnienia p, gęstości ϱ oraz temperatury T. Wyznaczenie poniższych sześciu funkcji współrzędnych przestrzennych

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z), \\ v_y &= f_2(x, y, z), \\ v_z &= f_3(x, y, z), \\ p &= f_4(x, y, z), \\ \varrho &= f_5(x, y, z), \\ T &= f_6(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

stanowi podstawowe zadanie dynamiki gazów. Do określenia tych funkcji niezbędne jest zestawienie układu odpowiednich sześciu równań. Przejdźmy do ułożenia takiego układu.

Pierwsze trzy równania układu są to równania różniczkowe wynikające z zasady zachowania ilości ruchu, które w przypadku ustalonego przepływu gazu można napisać w znanej postaci Eulera:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Zaniedbując siły masowe, tzn. zakładając $X = Y = Z = 0$, co w przypadku

przepływu gazów (z dużymi prędkościami — przyp. red.) jest całkowicie dopuszczalne, gdyż przeważnie siły te nie wywierają istotnego wpływu na przepływ gazów, przepiszemy równania Eulera w postaci następującej:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.2'}$$

Łatwo jest stwierdzić, że jeżeli pomnożymy równania (13.2') przez odpowiedni rzut elementarnego przesunięcia wzdłuż linii prądu du, tzn. pierwsze równanie pomnożymy przez $dx = v_x\,dt$, drugie — przez $dy = v_y\,dt$ oraz trzecie — przez $dz = v_z\,dt$, wówczas, dodając te równania, otrzymamy

$$v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

lub

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\varrho}dp,$$

całkując

$$\int\frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C. \tag{13.3}$$

Otrzymane równanie jest równaniem Bernoulliego dla gazów, ustalającym w postaci różniczkowej związek pomiędzy ciśnieniem p i prędkością v gazu.

Czwartym podstawowym równaniem dynamiki gazów jest równanie ciągłości; można je napisać w postaci:

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{13.4}$$

lub też

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{13.4'}$$

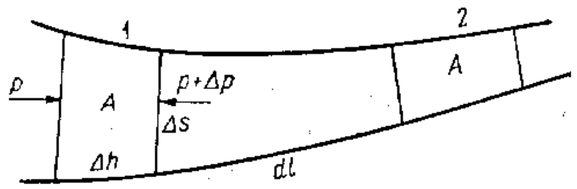
Piątym równaniem podstawowym jest równanie stanu gazu, które w przypadku gazów doskonałych ma postać

$$p = \varrho g R T. \tag{13.5}$$

W ten sposób mamy pięć równań do określenia sześciu nieznanych funkcji (13.1).

§ 2. Równanie energii

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia szóstego równania dynamiki gazów, zwanego równaniem energii. Aby je otrzymać, rozważymy w ustalonym przepływie gazu elementarną rurkę prądu (rys. 13.1). Wyodrębnimy myślowo w chwili t w dowolnym punkcie *1* wewnątrz rurki element A płynu, który to element znajdzie się w chwili $t + dt$ w nowym punkcie *2*. W przypadku gdy nie zachodzi wymiana ciepła, czyli w przypadku procesów adiabatycznych, prawo zachowania energii głosi, że zmiana kinetycznej i wewnętrznej energii elementów gazu jest równa pracy sił zewnętrznych działających na te elementy.



13.1. Ruch elementu gazu

Obliczymy pracę sił ciśnieniowych zużywaną na przesunięcie elementu A z położenia *1* do położenia *2*. Praca ta (dL_p) równa się (rys. 13.1)

$$dL_p = -\Delta p\, \Delta s\, dl = -\frac{\Delta p}{\Delta h}\Delta s\, \Delta h\, dl,$$

gdzie Δs jest powierzchnią przekroju rurki prądu. Ponieważ

$$\Delta s\, \Delta h = V,$$

gdzie V oznacza objętość elementu A, zatem

$$dL_p = -\frac{\Delta p}{\Delta h} V\, dl.$$

Ułamek $\frac{\Delta p}{\Delta h}$ wyraża spadek ciśnienia przypadający na długość Δh, a zatem

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{dp}{dl}.$$

Wobec tego

$$dL_p = -\frac{dp}{dl} V\, dl = -V\, dp.$$

Praca sił ciśnieniowych, zużywana na rozprężenie elementu, równa się

$$dL_r = -p\, dV.$$

Oznaczając przez dU zmianę wewnętrznej energii elementu podczas jego przesuwania z punktu *1* w punkt *2*, a zmianę energii kinetycznej przez dK otrzymamy po przyrównaniu pracy sił zewnętrznych do zmiany energii kinetycznej i wewnętrznej gazu

$$-AV\, dp - Ap\, dV = dU + A\, dK \tag{a}$$

lub

$$dU + A\, dK + Ad(pV) = 0.$$

Ponieważ

$$dU = G c_v\, dt$$

oraz

$$d(pV) = G R\, dT,$$

zatem

$$G c_v\, dT + A G R\, dT + A\, dK = 0,$$

skąd

$$G c_p\, dT + A\, dK = 0$$

lub

$$G\, di + A\, dK = 0.$$

Zmianę energii kinetycznej rozważanego elementu można napisać w postaci

$$dK = G\, d\frac{v^2}{2g},$$

gdzie v — prędkość ruchu elementu gazu. Zatem z obu ostatnich wzorów wynika

$$d\left(i + A\frac{v^2}{2g}\right) = 0,$$

skąd

$$i + A\frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{13.6}$$

Równanie (13.6) wyraża *prawo zachowania energii dla przepływu gazu.* Wynika z niego, że *suma entalpii i energii kinetycznej pewnej wydzielonej stałej ilości gazu* (na przykład 1 kG) *jest wzdłuż linii prądu wielkością stałą.*

Z tego względu równanie (13.6) nazywane jest *równaniem energii.*

W przypadku ogólnym, przy przepływie gazu również siły styczne (siły tarcia) wykonują pracę dL_r, w wyniku czego wydzielone zostanie ciepło dQ_r. Dlatego też przy układaniu bilansu energii należałoby do lewej strony równania (a) dodać wyrazy $-A\, dL_r + dQ_r$. Wiadomo jednak, że powstałe wskutek

tarcia ciepło jest równoważne pracy tarcia, tzn. $dQ_r = A\,dL_r$, w związku z czym wyrazy te znoszą się wzajemnie. Widzimy, że równanie energii jest słuszne również przy uwzględnieniu strat, których istnienie prowadzi jedynie do zmiany rozkładu energii wewnątrz elementów gazu, a energia mechaniczna przechodzi w energię cieplną (przypomnimy, że równanie energii zostało otrzymane przy założeniu, iż nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem).

Równanie energii można oczywiście napisać również w takiej postaci:

$$i_1 + \frac{Av_1^2}{2g} = i_2 + \frac{Av_2^2}{2g}. \tag{13.7}$$

Podkreślimy raz jeszcze, że równanie to jest słuszne dla dwóch przekrojów jednej i tej samej strugi gazu lub, ściślej, dla jednej i tej samej linii prądu. Przy przejściu od jednej linii prądu do drugiej energia całkowita, określona sumą (13.7), może się zmieniać.

Jeżeli w przypadku szczególnym prędkość $v = 0$, wówczas $i = i_0$, gdzie i_0 — entalpia 1 kG gazu w stanie spoczynku. Dla danej linii prądu

$$i_0 = i + \frac{Av^2}{2g}. \tag{13.8}$$

Zauważymy, że równania (13.6) ÷ (13.8) napisane są w jednostkach cieplnych (w kaloriach).

W jednostkach mechanicznych, czyli w kGm równanie (13.6) dla 1 kG gazu przybierze postać

$$i + \frac{v^2}{2g} = \text{const}, \tag{13.9}$$

gdzie entalpia i jednego kG gazu będzie się obecnie również wyrażała w jednostkach mechanicznych, tzn.

$$i = \mathcal{J} c_p T,$$

gdzie $\mathcal{J} = \frac{1}{A} = 427$ kGm/Kcal.

Równanie energii (13.6)

$$i + A\frac{v^2}{2g} = \text{const}$$

jest często wykorzystywane także w innej postaci, którą można otrzymać wyrażając entalpię i przez temperaturę T oraz wykładnik izentropy k. Istotnie, ponieważ

$$i = c_p T \quad \text{oraz} \quad c_p = \frac{k}{k-1} A R,$$

więc

$$i = \frac{k}{k-1} A R T.$$

Podstawiając to wyrażenie na i do równania (13.6), otrzymamy

$$\frac{k}{k-1} R T + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{13.10}$$

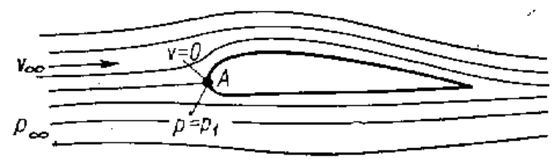
Wykorzystując równanie stanu $p = g\varrho R T$, można z ostatniego równania otrzymać również następującą postać równania energii:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \tag{13.11}$$

§ 3. Zakres stosowalności dla powietrza równania Bernoulliego dla płynu nieściśliwego

Omówimy tu błąd, jaki popełniamy wyznaczając ciśnienie powietrza na podstawie równania Bernoulliego (4.17), wyprowadzonego przy założeniu, że powietrze jest płynem nieściśliwym. Porównamy w tym celu wartości ciśnień otrzymanych na podstawie równań (4.17) i (4.18).

Załóżmy, że powietrze opływa jakieś ciało (rys. 13.2).



13.2. Opływ dowolnego ciała strumieniem powietrza

Niech w dostatecznie dużej odległości od ciała prędkość przepływu wynosi v_∞, ciśnienie zaś p_∞. W punkcie spiętrzenia A prędkość v będzie równa zeru, a ciśnienie będzie miało wartość maksymalną, równą p_1. Wykorzystajmy równanie Bernoulliego w postaci (4.17):

$$p = C - \frac{\varrho v^2}{2}.$$

Stałą C określimy na podstawie warunku w nieskończoności:

$$p_\infty = C - \frac{\varrho v_\infty^2}{2},$$

skąd

$$C = p_\infty + \frac{\varrho v_\infty^2}{2}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość C do wzoru (4.17), znajdziemy

$$p = p_\infty + \frac{\varrho v_\infty^2}{2} - \frac{\varrho v^2}{2}.$$

W celu znalezienia ciśnienia p_1 w punkcie spiętrzenia, załóżmy $p = p_1$ oraz $v = 0$. Będziemy wówczas mieli

$$p_1 = p_\infty + \frac{\varrho v_\infty^2}{2}.$$

Oznaczając ciśnienie prędkości literą q_∞:

$$q_\infty = \frac{\varrho v_\infty^2}{2},$$

otrzymamy

$$p_1 = p_\infty + q_\infty. \tag{a}$$

Określmy teraz ciśnienie w punkcie spiętrzenia A za pomocą równania Bernoulliego wyprowadzonego przy założeniu, że powietrze jest ściśliwe.

Napiszmy równanie Bernoulliego w postaci (13.3):

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = C.$$

Załóżmy, że przepływ powietrza jest przepływem izentropowym, dla którego zachodzi następująca zależność między ciśnieniem p i gęstością ϱ:

$$\frac{p}{\varrho^k} = C, \quad \text{tzn.} \quad \varrho = \varrho_\infty \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{k}},$$

gdzie

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4.$$

Obliczmy całkę $\int \frac{dp}{\varrho}$. Podstawiając wartość ϱ i całkując znajdziemy

$$\int \frac{dp}{\varrho} = \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Równanie (13.3) przybierze postać

$$\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{v^2}{2} = C.$$

Określimy stałą C na podstawie warunku w nieskończoności:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2} = C.$$

Podstawiając znalezioną wartość C do równania poprzedniego, otrzymamy

$$\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2}.$$

Podstawiając do tego równania $p = p_1$ oraz $v = 0$, co odpowiada punktowi spiętrzenia, otrzymamy

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \left(\frac{p_1}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2}$$

lub po prostych przekształceniach

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{k} \frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2 p_\infty}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{13.12}$$

Założymy, że

$$\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{k p_\infty} < 1.$$

Jak wiadomo z fizyki, prędkość dźwięku określa następujący wzór:

$$a^2 = k \frac{p}{\varrho}.$$

Wobec tego można warunek $\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{k p_\infty} < 1$ napisać w postaci

$$\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} < 1.$$

Stosunek prędkości przepływu do prędkości dźwięku, jak wiemy, oznacza się literą M, tzn. $\frac{v}{a} = M$. Rozważmy zatem takie prędkości przepływu powietrza, dla których $M < 1$, tzn. — *przepływy poddźwiękowe.*

Przy tym warunku rozłożymy prawą stronę równania (13.12) na szereg według dwumianu Newtona, zachowując jedynie człony z pierwszą i drugą potęgą $\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{k p_\infty}$:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2 p_\infty} + \frac{\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)}{2!} \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2 p_\infty}\right)^2 + \ldots$$

Po przekształceniu i wprowadzeniu liczby M otrzymamy

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty} + \frac{1}{2!}\frac{M_\infty^2}{2}\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty} + \ldots$$

lub, ograniczając się w pierwszym przybliżeniu do pierwszych trzech wyrazów:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}\left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right); \tag{13.13}$$

$$p_1 = p_\infty + \frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2}\left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right). \tag{13.14}$$

Wprowadzając q_∞, określające ciśnienie prędkości, będziemy mieli

$$p_1 = p_\infty + q_\infty\left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right) = p_\infty + q_\infty + q_\infty\frac{M_\infty^2}{4}. \tag{13.15}$$

Porównując to równanie dla ciśnienia p_1 ze wzorem (a) na str. 354 wyciągamy wniosek, że wartość

$$q_\infty\frac{M_\infty^2}{4} = \Delta p$$

stanowi błąd przy określaniu ciśnienia, jeżeli korzystamy z równania $p_1 = p_\infty + q_\infty$. Jeżeli Δp odniesiemy do ciśnienia prędkości $\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2}$, otrzymamy tak zwany błąd względny

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta p}{\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2}}.$$

Z równania (13.15) wynika, że

$$\varepsilon_p = \frac{M_\infty^2}{4}. \tag{13.16}$$

P r z y k ł a d. Prędkość przepływu $v = 34$ m/sek. W normalnych warunkach

T a b l i c a 13.1

Zależność poprawki na ściśliwość powietrza od liczby Macha

v m/sek	34	68	102	136	170	203	238	272	306	340
M_∞	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ε_p %	0,25	1,0	2,25	4,0	6,2	9,0	12,8	17,3	21,9	27,5

atmosferycznych liczba Macha będzie w tym przypadku $M_\infty = 0{,}1$. Błąd bezwzględny $\varepsilon_p = \frac{(0{,}1)^2}{4} = \frac{0{,}01}{4}$ lub w procentach $\varepsilon_p = 0{,}25\,\%$.

W tablicy 13.1 podano wzrost błędu ε_p przy wzroście prędkości powietrza.

Z powyższej tablicy widać, że przy prędkościach lotu nie przekraczających $v = 102$ m/sek, błąd wynikający ze stosowania równania Bernoulliego w postaci (4.17) jest niewielki i można go zaniedbać. Przy prędkościach lotu nie przekraczających 360 ÷ 400 km/godz, można zatem w aerodynamicznych obliczeniach płatowca nie uwzględniać ściśliwości powietrza. Natomiast w zagadnieniach współczesnego lotnictwa, gdy prędkości samolotów są zbliżone do prędkości dźwięku, nie można już traktować powietrza jako płynu nieściśliwego.

Rozdział XIV

JEDNOWYMIAROWY IZENTROPOWY PRZEPŁYW GAZU

W rozdziale niniejszym omówione zostaną jednowymiarowe ustalone przepływy gazu, czyli takie przepływy, w których wszystkie parametry gazu stanowią funkcje jednej zmiennej, na przykład x. W szczególności przepływy w przewodach można w większości przypadków traktować—praktycznie—jako przepływy jednowymiarowe.

§ 1. Podstawowe zależności dla jednowymiarowych przepływów izentropowych

Omówimy izentropowy przepływ gazu w przewodzie o zmiennym przekroju. Ustalimy związek pomiędzy podstawowymi parametrami, charakteryzującymi przepływ gazu: prędkością, ciśnieniem, gęstością, temperaturą oraz prędkością rozchodzenia się w gazie fal dźwiękowych.

Oznaczmy parametry przepływu gazu w przekroju A_1B_1 (rys. 14.1) przez v_1, i_1, T_1, p_1, ϱ_1. Te same parametry w przekroju AB oznaczymy przez v, i, T, p, ϱ.

Na podstawie równania energii można napisać dla przekrojów A_1B_1 i AB (w jednostkach mechanicznych)

$$i_1 + \frac{v_1^2}{2g} = i + \frac{v^2}{2g}.$$

Jeżeli założymy, że $v_1 = 0$ i oznaczymy entalpię nieruchomego gazu przez i_0 (tzw. *entalpia spiętrzenia*), wówczas

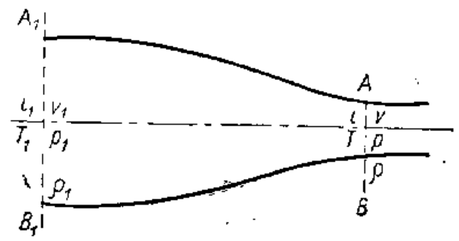
$$i_0 = i + \frac{v^2}{2g} \tag{14.1}$$

lub

$$\frac{k}{k-1} R T_0 = \frac{k}{k-1} R T + \frac{v^2}{2g}. \tag{14.1'}$$

Z powyższych równań widać, że przy $i_0 = \text{const}$ będzie się zmieniała wraz ze zmianą prędkości przepływu gazu v również wartość entalpii i, czyli temperatura gazu T.

Na tym polega jedna z charakterystycznych różnic pomiędzy przepływem gazu a przepływem cieczy nieściśliwej. W cieczy nieściśliwej temperatura zmienia się jedynie przy doprowadzeniu ciepła z zewnątrz lub przy odprowadzeniu ciepła na zewnątrz; warunki przepływu natomiast, na przykład zwężenie lub poszerzenie strugi, nie mogą wywołać zmiany jej temperatury (jeżeli zaniedbamy tarcie). Natomiast w przepływie gazu temperatura zmienia się w zależności od warunków przepływu. Równanie (14.1') wykazuje, że wraz ze zmniejszeniem prędkości przepływu temperatura gazu będzie wzrastała. Największą temperaturę osiąga się przy $v = 0$; oznaczymy tę temperaturę T_0 (tzw. temperatura spiętrzenia).



14.1. Jednowymiarowy przepływ gazu

Z drugiej strony, z równania (14.1) widać, że prędkość gazu, który miał w stanie spoczynku określoną entalpię i_0, nie może przekraczać pewnej maksymalnej wartości v_{max}, przy zbliżaniu się do której wielkości i, T, a oraz p dążą do zera.

Wynika stąd, że przy prędkości przepływu gazu równej v_{max} ustają w gazie ruchy cząsteczkowe. Prędkość v będzie zatem osiągała wartość maksymalną $v = v_{max}$ przy $i = 0$, czyli wtedy, gdy cała entalpia i zmieni się w kinetyczną energię gazu:

$$i_0 = \frac{v_{max}^2}{2g}.$$

Stąd

$$v_{max} = \sqrt{2 g i_0}. \tag{14.2}$$

Z równania (14.2) można wysnuć wniosek, że prędkość maksymalna v_{max} jest funkcją jedynie entalpii spiętrzenia i_0. Wykorzystując wyrażenie $i_0 = \frac{k}{k-1} R T_0$ oraz równanie stanu $p_0 = \varrho_0 g R T_0$, można przepisać równanie (14.2) na v_{max} w następującej postaci:

$$v_{max} = \sqrt{2 g i_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\varrho_0}}. \tag{14.3}$$

Parametry odpowiadające stanowi gazu nieruchomego ($v = 0$) nazywane są *parametrami spiętrzenia*. W szczególności temperatura i ciśnienie, odpowiadające temu stanowi, nazywane są *temperaturą spiętrzenia* oraz *ciśnieniem spiętrzenia* i odpowiednio oznaczane przez T_0 oraz p_0.

Widzimy, że wzór (14.3) wiąże maksymalną prędkość przepływu gazu z wartościami jego parametrów spiętrzenia. Jeżeli przyjmiemy, że temperatura

spiętrzenia jest równa $T_0 = 288°K$ (bezwzgl.), co odpowiada temperaturze $t_0 = 15°C$, i jeżeli przyjmiemy dla powietrza $k = 1{,}4$ oraz $R = 29{,}27$ kGm/kG °K, wówczas otrzymamy $v_{max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_0} = 756$ m/sek (taka na przykład będzie maksymalna prędkość wypływu powietrza w próżnię z kotła przy temperaturze gazu w kotle 15°C). Jest rzeczą ciekawą, że ciśnienie p_0 nie wpływa na wielkość v_{max}. Od ciśnienia zależy tylko wielkość wydatku przy wypływie gazu.

Obliczymy, w jakim stopniu zwiększa się temperatura gazu przy jego zahamowaniu od pewnej prędkości v do zera. Z równania (14.1') otrzymamy

$$\Delta T = T_0 - T = \frac{k-1}{2k} \frac{v^2}{gR}.$$

Przy $k = 1{,}4$, $R = 29{,}27$ kGm/kG °K, $g = 9{,}81$ m/sek² będziemy mieli

$$\Delta T \approx \frac{v^2}{2000}.$$

Znajdźmy teraz związek pomiędzy prędkością v przepływu gazu i prędkością a dźwięku. W tym celu przepiszemy najpierw równanie (14.1) w następującej postaci:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{2 g i_0}. \tag{14.4}$$

Zakładając, że przepływ jest izentropowy, otrzymamy

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

lub, wykorzystując (14.4),

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{v^2}{2 g i_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{14.5}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 - \frac{v^2}{2 g i_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.6}$$

Zastępując we wzorach (14.5) i (14.6) wartość i_0 przez v_{max} według wzoru (14.2), otrzymamy:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{14.7}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{14.8}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}. \tag{14.9}$$

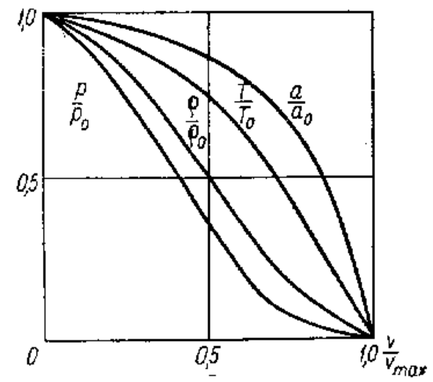
Ponieważ prędkość dźwięku w gazie jest związana z jego temperaturą zależnością

$$a^2 = k g R T,$$

więc

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}, \tag{14.10}$$

gdzie a — prędkość dźwięku odpowiadająca prędkości przepływu v oraz temperaturze T; a_0 — prędkość dźwięku w punkcie spiętrzenia (przy $v = 0$). Prędkość dźwięku w określonym punkcie przepływu gazu będziemy dalej nazywali *lokalną* prędkością dźwięku — analogicznie do lokalnej prędkości przepływu.



14.2. Zależność ciśnienia, gęstości, temperatury oraz prędkości dźwięku strumienia gazu od jego prędkości

Zależność ciśnienia, gęstości, temperatury i lokalnej prędkości dźwięku od prędkości przepływu gazu (w wielkościach bezwymiarowych) podana jest na rys. 14.2, wykonanym na podstawie równań (14.7) i (14.10).

Podamy interpretację fizykalną otrzymanych wyników.

Przy izentropowym przepływie gazu wzrost jego energii kinetycznej może zachodzić jedynie w przypadku zmniejszania się entalpii gazu. W związku z tym zwiększenie prędkości gazu przy przepływie izentropowym związane jest ze spadkiem jego temperatury. Ponieważ jednak ciśnienie spada wtedy bardziej intensywnie niż temperatura — gęstość gazu zmniejsza się ze wzrostem prędkości (jak wiadomo, gęstość gazu jest wprost proporcjonalna do ciśnienia i odwrotnie proporcjonalna do temperatury). Powyższe jest słuszne również dla adiabatycznych przepływów gazu.

W ten sposób, przy izentropowym lub adiabatycznym przepływie gazu, wzrostowi prędkości towarzyszy rozprężanie się gazu.

Powracając do równania (14.10) oraz wykorzystując równanie

$$a_0^2 = k g R T_0 \quad \text{i} \quad v_{max}^2 = 2 g i_0 = \frac{2k}{k-1} g R T_0,$$

otrzymamy

$$a^2 = \frac{k-1}{2}(v_{max}^2 - v^2). \tag{14.11}$$

Ze wzoru (14.11) wynika, że ze wzrostem prędkości przepływu gazu v prędkość dźwięku a maleje i przy pewnej prędkości przepływu staje się jej równa.

Ta lokalna prędkość przepływu, równa lokalnej prędkości dźwięku, nazywa się *prędkością krytyczną* i jest oznaczana przez a_{kr}, tzn.

$$v = a = a_{kr}.$$

Przekrój strugi gazu, w którym prędkość lokalna jest równa lokalnej prędkości dźwięku, nazywany jest *przekrojem krytycznym*.

Wszystkie pozostałe parametry przepływu gazu: ciśnienie, gęstość, temperatura odpowiadająca przekrojowi, w którym $v = a = a_{kr}$, nazywane są również parametrami krytycznymi i są oznaczane — odpowiednio — przez p_{kr}, ϱ_{kr} oraz T_{kr}.

Jeżeli założymy w równaniu (14.11), że prędkości v i a są równe a_{kr}, otrzymamy

$$a_{kr}^2 = \frac{k-1}{2}(v_{max}^2 - a_{kr}^2),$$

skąd

$$a_{kr}^2 = \frac{k-1}{k+1} v_{max}^2; \tag{14.12}$$

dla powietrza prędkość krytyczna a_{kr} wynosi w przybliżeniu 0,44 v_{max}.

Wykorzystując otrzymane równanie oraz równanie (14.11), łatwo jest otrzymać zależność niezbędną do dalszych wywodów, mianowicie:

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2} v^2. \tag{14.12'}$$

Z wyrażenia (14.12) wynika, że prędkość krytyczna a_{kr} zależy jedynie od temperatury spiętrzenia T_0.

Istotnie, podstawiając do wzoru (14.12) wartość v_{max} ze wzoru (14.3) otrzymamy

$$a_{kr}^2 = \frac{k-1}{k+1} 2 g i_0 = \frac{2k}{k+1} g R T_0 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\varrho_0}. \tag{14.13}$$

Biorąc pod uwagę, że $k g R T_0 = a_0^2$, znajdujemy

$$a_{kr}^2 = \frac{2}{k+1} a_0^2. \tag{14.14}$$

W szczególności, dla powietrza ($k = 1{,}4$, $R = 29{,}27$ kGm/kG °K), otrzymamy (przy $g = 9{,}81$ m/sek²) wykorzystując wzór (14.13):

$$a_{kr} \approx 18{,}3 \sqrt{T_0}. \tag{14.15}$$

Jeżeli prędkość a_{kr} wyrazimy nie za pomocą temperatury spiętrzenia T_0, lecz za pomocą temperatury gazu w przekroju, w którym lokalna prędkość przepływu gazu oraz lokalna prędkość dźwięku są sobie równe, czyli za pomocą temperatury krytycznej T_{kr}, wówczas na podstawie wzoru

$$a_{kr} = \sqrt{k g R T_{kr}}$$

otrzymamy

$$a_{kr} \approx 20 \sqrt{T_{kr}}.$$

Dla temperatury gazu T_{kr}, odpowiadającej prędkości krytycznej, mamy zależność (wzór 14.9):

$$\frac{T_{kr}}{T_0} = 1 - \frac{a_{kr}^2}{v_{max}^2},$$

skąd, po wykorzystaniu równania (14.12), otrzymujemy

$$T_{kr} = \frac{2}{k+1} T_0. \tag{14.16}$$

Ponieważ dla procesu izentropowego

$$\frac{\varrho_{kr}}{\varrho_0} = \left(\frac{T_{kr}}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{oraz} \quad \frac{p_{kr}}{p_0} = \left(\frac{T_{kr}}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

zatem, wykorzystując (14.16), otrzymamy

$$\varrho_{kr} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \varrho_0 \tag{14.17}$$

oraz

$$p_{kr} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0. \tag{14.18}$$

W ten sposób wszystkie parametry gazu w przekroju, w którym prędkość przepływu osiąga prędkość dźwięku, stanowią funkcje samych tylko parametrów spiętrzenia.

Równania (14.16), (14.17), (14.18) przybierają przy $k = 1{,}4$ postać:

$$T_{kr} = 0{,}831 T_0, \quad \varrho_{kr} = 0{,}636\, \varrho_0, \quad p_{kr} = 0{,}528\, p_0. \tag{14.19}$$

Jak wiadomo, stosunek prędkości przepływu v w pewnym punkcie do prędkości dźwięku w tym samym punkcie, tzn. $\frac{v}{a}$, oznaczany jest przez M.

Wprowadzimy wielkość bezwymiarową

$$\lambda = \frac{v}{a_{kr}}, \tag{14.20}$$

którą będziemy nazywali *współczynnikiem prędkości*. Wielkość λ wskazuje stopień zbliżenia się prędkości przepływu gazu w danym punkcie przepływu do prędkości krytycznej. Jest rzeczą oczywistą, że przy $M < 1$ i $\lambda < 1$ prędkość przepływu gazu będzie poddźwiękowa, przy $M > 1$ i $\lambda > 1$ — naddźwiękowa, przy $M = 1$ i $\lambda = 1$ zaś będzie równa prędkości dźwięku.

W szeregu przypadków wygodnie będzie korzystać ze wzorów dla parametrów gazu wyrażonych nie za pomocą prędkości przepływu — jak w równaniach (14.7) ÷ (14.9) — lecz za pomocą liczby Macha M lub współczynnika λ. Wyprowadzimy te wzory.

Na mocy równań (14.10), (14.12) i (14.14) mamy

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{a^2}{a_0^2}\frac{a_0^2}{v_{max}^2}\frac{v^2}{a^2} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)\frac{k-1}{2}M^2,$$

skąd

$$1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}.$$

Z drugiej strony, uwzględniając równania (14.12) i (14.20), otrzymujemy:

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{a_{kr}^2}{v_{max}^2}\frac{v^2}{a_{kr}^2} = \frac{k-1}{k+1}\lambda^2.$$

Zatem

$$1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2, \tag{14.21}$$

skąd można otrzymać

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}M^2}}. \tag{14.21'}$$

Wykorzystując równania (14.21), można sprowadzić równania (14.7), (14.8) i (14.10) do postaci

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \frac{\varrho_0}{\varrho} &= \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{T_0}{T} &= \frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \end{aligned}\right\} \tag{14.22}$$

lub

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{T}{T_0} &= \frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.23}$$

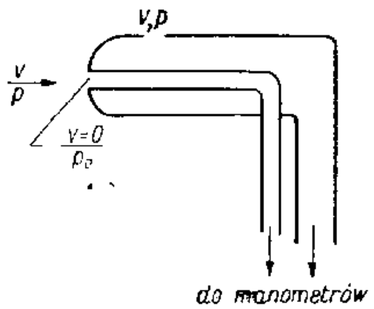
Ze wzorów (14.22) i (14.23) wynika, że ze wzrostem liczb Macha i λ maleje temperatura, prędkość dźwięku, ciśnienie i gęstość gazu.

Wzór

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{14.24}$$

ma duże znaczenie praktyczne.

W szczególności można z niego korzystać przy pomiarze liczby Macha w przepływach poddźwiękowych. W tym celu wprowadza się do strumienia rurkę pomiarową o dwóch kanałach wlotowych — środkowym i bocznym (rys. 14.3) (tak zwana rurka Prandtla — przyp. red.).



14.3. Rurka do pomiaru liczby Macha w przepływie gazu

Manometr podłączony do przewodu wewnętrznego (środkowego) rurki pomiarowej mierzy ciśnienie spiętrzenia p_0, manometr zaś podłączony do przewodu zewnętrznego (bocznego) — ciśnienie p przepływu, zwane ciśnieniem statycznym.

§ 2. Związek pomiędzy prędkością przepływu a przekrojem strugi

Paragraf niniejszy poświęcony jest ustaleniu związku zachodzącego pomiędzy zmianą parametrów podstawowych przepływu gazu a zmianą kształtu strugi, tzn. zmianą pola powierzchni jej przekrojów poprzecznych. Wyjaśnienie tego

zagadnienia umożliwia określenie, w jakim kierunku należy zmieniać powierzchnie przekrojów strugi, aby podstawowe parametry przepływu gazu, w szczególności jego prędkość, zmieniały się w pożądany sposób.

Do analizy zjawisk zachodzących w strudze gazu o zmiennym przekroju wykorzystamy dwa równania.

Jako równanie pierwsze weźmiemy równanie Eulera, które dla rozważanego przepływu jednowymiarowego będzie miało postać

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}. \tag{14.25}$$

Jako równanie drugie przyjmiemy równanie zachowania masy dla przepływów jednowymiarowych

$$\varrho v F = \text{const}. \tag{14.26}$$

Traktując oś strugi (przewodu) o zmiennym przekroju jako oś x, zróżniczkujemy równanie (14.26) względem x, otrzymując:

$$\frac{d\varrho}{dx} v F + \varrho\frac{dv}{dx}F + \varrho v\frac{dF}{dx} = 0.$$

Mnożąc wszystkie człony otrzymanego równania przez $\frac{v}{\varrho F}$, otrzymamy

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dx}v^2 + v\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx} = 0$$

lub

$$v\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{v^2}{\varrho}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}\right). \tag{14.27}$$

Zastępując w równaniu (14.27) wartość $\frac{d\varrho}{dx}$ przez

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d\varrho}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a^2}\frac{dp}{dx}$$

oraz wykorzystując równanie (14.25), otrzymamy

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\varrho}\frac{v^2}{a^2}\frac{dp}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}$$

lub ostatecznie

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dp}{dx} = \varrho\frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}. \tag{14.28}$$

Równanie (14.25) ustala zależność między pochodnymi $\frac{dv}{dx}$ i $\frac{dp}{dx}$, równanie zaś (14.28) — między pochodnymi $\frac{dp}{dx}$ i $\frac{dF}{dx}$. Równania (14.25) i (14.28) wiążą zatem ze sobą trzy wielkości: F, v i p.

Rozważymy następujące możliwe przypadki.

1. Prędkość przepływu gazu v jest mniejsza od prędkości dźwięku a, czyli $v < a$.

Wtedy:

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) > 0,$$

skąd na mocy równania (14.28) wynika, że znak pochodnej $\frac{dp}{dx}$ jest zgodny ze znakiem pochodnej $\frac{dF}{dx}$. Jeżeli zatem przekrój strugi F zmniejsza się $\left(\frac{dF}{dx} < 0\right)$, to i ciśnienie maleje $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$. Prędkość v będzie się przy tym powiększała, co wynika z równania (14.25), ponieważ w tym przypadku $\frac{dv}{dx} > 0$. Analogicznie można wykazać, że przy powiększaniu F ciśnienie p rośnie, a prędkość v maleje.

2. Prędkość przepływu gazu v jest większa od prędkości dźwięku a, tzn. $v > a$.

W tym przypadku

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) < 0,$$

a zatem znaki $\frac{dp}{dx}$ i $\frac{dF}{dx}$ nie będą zgodne. Jeżeli zatem na przykład przekrój strugi zmniejsza się, wówczas ciśnienie — przeciwnie — rośnie. Z równania (14.25) widać, że prędkość będzie przy tym malała. Zatem, jeżeli prędkość gazu v jest większa od prędkości dźwięku, wtedy charakter przepływu jest całkowicie odmienny niż charakter przepływu z prędkościami poddźwiękowymi.

Zaznaczymy, że w obydwu omówionych przypadkach charakter związku pomiędzy prędkością i ciśnieniem nie ulega zmianie — na przykład, jeżeli prędkość v wzrasta, ciśnienie p spada i odwrotnie (wzór 14.25). Jednak charakter związku pomiędzy prędkością v (lub ciśnieniem p) a przekrojem strugi F zależy w sposób istotny od stosunku prędkości przepływu do prędkości dźwięku (wzór 14.28), czyli od liczby Macha $M = \frac{v}{a}$. W szczególności, przy $M > 1$,

tzn. przy $v > a$, powiększeniu powierzchni przekroju F strugi gazu towarzyszy nie zmniejszenie prędkości v, jak to ma miejsce przy $M < 1$, lecz odwrotnie, jej zwiększenie (rys. 14.4).

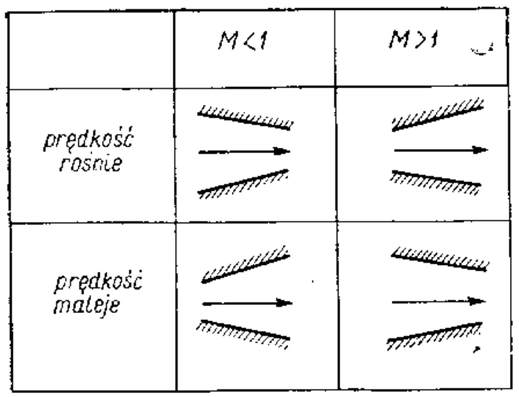
3. Prędkość przepływu gazu v równa jest prędkości dźwięku, tzn. $v = a$. W tym przypadku

$$1 - \frac{v^2}{a^2} = 0$$

i z równania (14.28) wynika, że

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

Ponieważ przy zwiększeniu prędkości poddźwiękowego przepływu gazu powierzchnie przekrojów strugi maleją, a przy zwiększeniu prędkości przepływu naddźwiękowego powierzchnie te powiększają się — wynika z tego, że przy ciągłym przejściu prędkości przepływu od wartości poddźwiękowych do wartości naddźwiękowych przekroje strugi będą początkowo malały, a następnie zwiększały się. Jak wykazuje ostatnie równanie,



14.4. Zależność prędkości przepływu od kształtu strumienia

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{przy} \quad \frac{v}{a} = 1,$$

tzn. prędkość przepływu osiąga prędkość dźwięku, czyli $v = a = a_{kr}$ w najmniejszym przekroju strugi.

Widzimy, że *krytycznym przekrojem strugi gazu jest przekrój minimalny.*

Z powyższego wynika, że samo zwężenie poddźwiękowej strugi gazu nie pozwala otrzymać naddźwiękowych prędkości przepływu. W tym celu konieczne jest początkowe zwężenie strugi do chwili uzyskania w jej najwęższym przekroju prędkości równej lokalnej prędkości dźwięku ($v = a_{kr}$), a następnie jej rozszerzenie w celu otrzymania prędkości naddźwiękowych. W ten właśnie sposób skonstruowane są dysze, za pomocą których uzyskuje się prędkości naddźwiękowe (dysze Lavala). Na rysunku 14.5 podano charakter zmiany prędkości i ciśnień wzdłuż takiej dyszy.

Aby wyjaśnić przyczyny warunkujące ustalony powyżej charakter związku istniejącego pomiędzy prędkością strugi gazu i powierzchnią jej przekrojów, omówimy zależność jednostkowego wydatku gazu, tzn. wielkości ϱv, od prędkości gazu v.

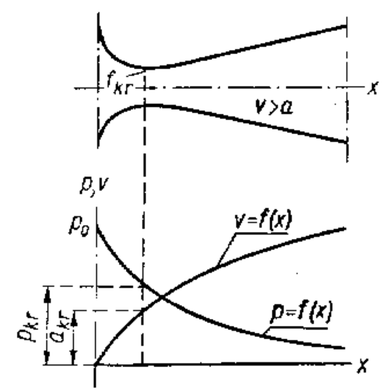
Wydatek jednostkowy ϱv można zapisać w następującej postaci:

$$\varrho v = \varrho_0 v \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

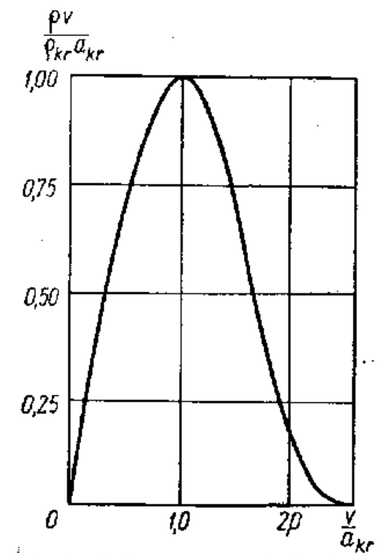
gdzie ϱ_0 — gęstość przy prędkości gazu równej zeru. Wykorzystując równanie (14.8), otrzymamy

$$\varrho v = \varrho_0 v \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.29}$$

Widzimy stąd, że wydatek ϱv równa się zeru w dwóch przypadkach: po pierwsze przy $v = 0$ oraz po drugie przy $v = v_{max}$, ponieważ w przypadku



14.5. Dysza naddźwiękowa (dysza Lavala)



14.6. Zależność wydatku jednostkowego od prędkości gazu

ostatnim gęstość gazu ϱ staje się zerem. A zatem przy jakiejś pośredniej wartości prędkości $0 < v < v_{max}$ wydatek właściwy ϱv powinien osiągać wartość maksymalną $(\varrho v)_{max}$. Znajdźmy tę wartość v; przyrównamy w tym celu pochodną ϱv względem v do zera:

$$\frac{d(\varrho v)}{dv} = 0.$$

Po zróżniczkowaniu wyrażenia (14.29) na wydatek jednostkowy względem v oraz po przyrównaniu go do zera, otrzymamy

$$\frac{d(\varrho v)}{dv} = \varrho_0 \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{\varrho_0 v}{k-1}\left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}-1} \frac{2v}{v_{max}^2} = 0.$$

Ponieważ poszukiwana wartość $v \neq v_{max}$, więc skracając przez

$$\left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

otrzymujemy

$$1 = \frac{2}{k-1}\frac{v^2}{v_{max}^2}\left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{-1}$$

lub

$$1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{2}{k-1}\frac{v^2}{v_{max}^2}.$$

Rozwiązując ostatnie równanie względem v oraz uwzględniając równanie (14.12), znajdujemy poszukiwaną wartość prędkości, przy której $\varrho v = (\varrho v)_{max}$:

$$v^2 = \frac{k-1}{k+1} v_{max}^2 = a_{kr}^2. \tag{14.30}$$

Zatem wydatek jednostkowy osiąga maksimum przy

$$v = a_{kr}. \tag{14.31}$$

Zależność wydatku właściwego ϱv od prędkości v, obliczona z równania (14.29), została podana na rys. 14.6. Widzimy, że ze wzrostem prędkości v wydatek właściwy ϱv początkowo rośnie (przy $v < a_{kr}$), osiąga swe maksimum przy $v = a_{kr}$, a następnie (przy $v > a_{kr}$) maleje.

Uwzględnimy obecnie równanie wydatku wyrażające warunek zachowania masy gazu, przechodzącej przez rozmaite przekroje F strugi w ciągu sekundy:

$$\varrho v F = \text{const}. \tag{14.32}$$

Z równania tego wynika, że w obszarze prędkości poddźwiękowych, gdzie wydatek właściwy ϱv rośnie, powierzchnie F przekrojów strugi maleją, osiągają minimum przy $\varrho v = (\varrho v)_{max}$ i następnie (w obszarze prędkości naddźwiękowych) zaczynają rosnąć odpowiednio do zmniejszania się ϱv. Minimalny przekrój strugi, w którym $\varrho v = (\varrho v)_{max}$, jest oczywiście przekrojem krytycznym, ponieważ w nim $v = a_{kr}$. Doszliśmy zatem do tych samych wniosków co poprzednio odnośnie związku istniejącego pomiędzy prędkością strugi gazu a powierzchnią jej przekrojów.

Ustalony powyżej charakter zmiany wydatku jednostkowego ϱv pozwala wyjaśnić przyczyny, wskutek których struga gazu zwęża się przy zwiększaniu prędkości gazu w obszarze poddźwiękowym, a rozszerza się w obszarze naddźwiękowym. Jak widać, dzieje się tak dlatego, że wydatek jednostkowy rośnie w obszarze poddźwiękowym, a maleje w obszarze naddźwiękowym.

Równanie (14.8) wskazuje, że gęstość gazu ϱ przy ciągłym zwiększaniu się jego prędkości równomiernie maleje (patrz również rys. 14.2). Stąd wniosek, że w obszarze poddźwiękowym, gdzie wydatek jednostkowy rośnie, gęstość maleje wolniej niż rośnie prędkość, a w obszarze naddźwiękowym, gdzie wydatek jednostkowy maleje — gęstość maleje prędzej niż wzrasta prędkość.

Zmiana powierzchni przekroju strugi gazu wraz ze zmianą prędkości przepływu określa zatem charakter zmiany jego gęstości.

W przepływach poddźwiękowych, w których gęstość zmienia się wolniej niż prędkość przepływu gazu, wydatek jednostkowy wzrasta przy zwiększeniu prędkości i powierzchnie przekrojów strugi maleją. W przepływach naddźwiękowych, w których gęstość zmienia się prędzej niż prędkość przepływu gazu, maleje ze wzrostem prędkości wydatek jednostkowy i powierzchnie przekrojów strugi powiększają się.

Rozważymy możliwe przypadki przepływu gazu przez dyszę Lavala (rys. 14.7) zakładając dla uproszczenia, że gaz wpływa do dyszy ze zbiornika, w którym prędkość równa jest zeru. Zmiana prędkości i ciśnienia wzdłuż takiej dyszy może zachodzić w sposób dwojaki.

Przede wszystkim jasne jest, że przy dowolnym ciśnieniu zewnętrznym p_z panującym w ośrodku, do którego wypływa gaz (mniejszym od ciśnienia p_0 w zbiorniku) przepływ gazu wzdłuż zwężającej się części dyszy Lavala będzie przyspieszony, tzn. prędkość gazu będzie wzrastać, a ciśnienie — odpowiednio maleć.

Natomiast charakter przepływu wzdłuż rozszerzającego się odcinka dyszy będzie w sposób istotny zależał od tego, czy prędkość w minimalnym przekroju dyszy osiągnie wartość krytyczną a_{kr}, czy też nie.

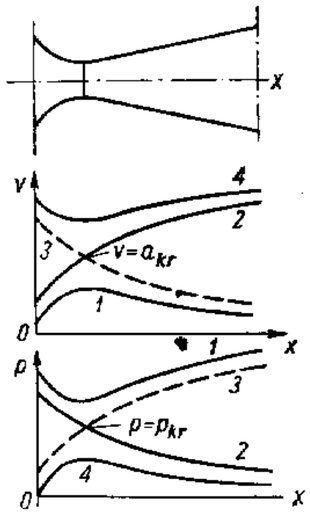
Jeżeli ciśnienie zewnętrzne p_z jest większe od ciśnienia krytycznego p_{kr} i mało różni się od ciśnienia w zbiorniku p_0, wówczas prędkość gazu w minimalnym przekroju dyszy nie osiągnie wartości krytycznej ($v < a_{kr}$), przepływ pozostanie poddźwiękowy i prędkość gazu w rozszerzającej się części dyszy będzie równomiernie malała, a ciśnienie — rosło do wielkości p_z na wylocie dyszy (krzywe *1* na rys. 14.7). W tym przypadku rozszerzająca się część dyszy Lavala będzie pracowała jak zwyczajny dyfuzor i przepływ w całej dyszy będzie poddźwiękowy. Natomiast jeżeli ciśnienie zewnętrzne p_z jest mniejsze od ciśnienia krytycznego ($p_z < p_{kr}$), wówczas prędkość gazu w minimalnym przekroju dyszy osiąga wartość lokalnej prędkości dźwięku ($v = a_{kr}$) i w rozszerzającej się części dyszy gaz będzie w dalszym ciągu podlegał przyśpieszeniu, tzn. przepływ w tej części dyszy będzie naddźwiękowy (krzywe *2* na rys. 14.7).

W ten sposób można na wylocie z dyszy Lavala uzyskać przepływ naddźwiękowy tylko w tym przypadku, jeżeli ciśnienie zewnętrzne p_z będzie mniejsze od ciśnienia krytycznego p_{kr}, którego wielkość określona jest przez ciśnienie w zbiorniku p_0.

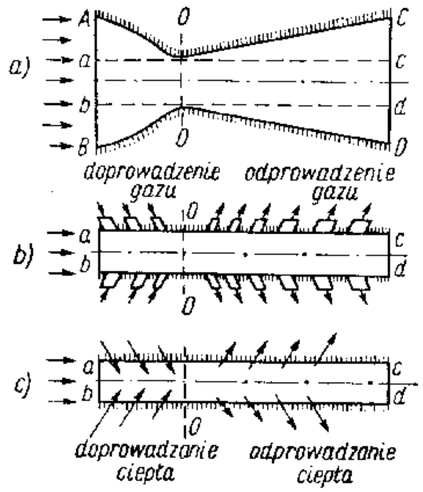
Jeżeli ruch odwrócić, tzn. założyć, że na wlocie do dyszy Lavala prędkość przepływu jest większa od prędkości dźwięku, wówczas teoretycznie możliwy jest również następujący przebieg: naddźwiękowa prędkość przepływu w zwężającej się części dyszy maleje, osiąga w minimalnym przekroju wartość krytyczną i w rozszerzającej się części dyszy w dalszym ciągu równomiernie maleje (ciśnienie powinno przy tym równomiernie wzrastać). W tym przypadku —

podanym na rys. 14.7 krzywymi przerywanymi *3* — dysza pracowałaby jak dyfuzor naddźwiękowy.

Doświadczenie wykazuje jednak, że w praktyce nie zachodzą ciągłe równomierne przejścia od prędkości naddźwiękowej do poddźwiękowej w przewodach o zmiennym przekroju.



14.7. Charakterystyczne przypadki przepływu gazu przez dyszę Lavala



14.8. Dysza „mechaniczna", dysza o zmiennym wydatku oraz dysza „cieplna", za pomocą których uzyskuje się naddźwiękowy przepływ gazu

W rzeczywistości przejściu od prędkości naddźwiękowej do poddźwiękowej towarzyszy raptowne (skokiem) zmniejszenie prędkości od wartości naddźwiękowych do poddźwiękowych oraz odpowiedni — również skokiem — wzrost ciśnienia (rozdz. XV).

Możliwy jest wreszcie taki przypadek, że prędkość przepływu naddźwiękowego na wlocie do dyszy, malejąc w części zwężającej się, nie osiągnie jednak wartości krytycznej. W związku z tym w rozszerzającej się części dyszy prędkość przepływu będzie wzrastała, tzn. przepływ pozostanie w całej dyszy naddźwiękowy. Temu przypadkowi odpowiadają krzywe *4* na rys. 14.7.

Badania doświadczalne dysz Lavala potwierdzają poczynione powyżej wnioski o możliwości istnienia przypadków rozkładu prędkości i ciśnień wzdłuż dyszy (krzywe *1*, *2* i *4*).

Należy zaznaczyć, że naddźwiękowy przepływ gazu można otrzymać nie tylko za pomocą dyszy Lavala.

W dyszy Lavala przy określonym spadku ciśnienia przepływ gazu ulega ciągłemu przyspieszeniu dzięki temu, że przekroje dyszy początkowo zmniejszają się, a następnie powiększają. W związku z tym w najmniejszym przekroju dyszy osiągnięta zostaje prędkość dźwięku, a w części rozszerzającej się oraz na wylocie z dyszy — prędkość naddźwiękowa.

Uczony radziecki L.A. Wulis [51] podał inne sposoby uzyskania prędkości naddźwiękowej. W celu uświadomienia sobie istoty metody Wulisa rozważymy niektóre właściwości przepływu gazu wzdłuż dyszy geometrycznej, tzw. dyszy Lavala (rys. 14.8a).

Przede wszystkim łatwo jest zauważyć, że przy ustalonym przepływie gazu wzdłuż dyszy, przez przekrój *AB* powinna przechodzić w jednostce czasu na mocy równania zachowania masy taka sama ilość gazu, jak przez najmniejszy przekrój *OO*.

Następnie, traktując proces przepływu gazu jako adiabatyczny (tzn. zakładając, że ciepło z zewnątrz nie jest ani doprowadzane, ani odprowadzane), zauważymy, że energia całkowita, przenoszona przez gaz w jednostce czasu przez przekrój *AB*, powinna być także równa energii, przenoszonej przez przekrój *OO* (zgodnie z prawem zachowania energii).

Wyodrębnimy myślowo wewnątrz dyszy Lavala cylindryczny odcinek *abdc*, którego powierzchnia przekroju poprzecznego równa jest powierzchni minimalnego przekroju dyszy *OO*.

Rozpatrując wydzielony odcinek dyszy przed przekrojem *OO*, ograniczony konturem *abOO*, spostrzegamy, że masa gazu przechodząca w ciągu sekundy przez przekrój *OO*, będzie większa od masy gazu przechodzącej w tym samym czasie przez przekrój *ab*, ponieważ przekrój *ab* stanowi jedynie część całego przekroju *AB*. Tak samo energia całkowita, przenoszona w jednostce czasu przez przekrój *OO*, będzie większa niż energia całkowita, przenoszona przez gaz przez przekrój *ab*.

Zatem w wydzielonej części przepływu zachodzi zwiększenie masy i energii gazu na sekundę w kierunku od przekroju *ab* do przekroju *OO*.

Wynika stąd, iż po to, aby w przewodzie cylindrycznym zapewnić zmianę parametrów gazu, analogiczną do zmian zachodzących w dyszy Lavala (w szczególności po to, by w dalszym ciągu mieć w przekroju *OO* prędkość, równą prędkości dźwięku), konieczne jest zapewnienie na odcinku *aO* odpowiedniego wzrostu wydatku i energii gazu na sekundę.

Analogicznie, rozpatrując przepływ gazu na cylindrycznym odcinku *cdOO* oraz w dyszy Lavala *OOCD* na prawo od przekroju *OO*, można wywnioskować, że w celu otrzymania na wylocie z przewodu cylindrycznego takiej samej prędkości naddźwiękowej, jak w przekroju wylotowym dyszy, trzeba na odcinku przewodu między przekrojami *OO* i *cd* zapewnić ciągłe zmniejszanie się wydatku gazu i jego energii na sekundę.

A zatem, aby otrzymać w przewodzie cylindrycznym naddźwiękowe prędkości przepływu, trzeba najpierw doprowadzać do przewodu określone ilości gazu i energii (na przykład ciepła), a następnie odprowadzać je.

Doprowadzanie (odprowadzanie) masy lub energii do przewodu cylindrycznego oddziaływa, jak to wykazał L.A. Wulis, na wielkość prędkości gazu w jednym i tym samym kierunku i jest analogiczne do zwężenia (poszerzenia) prze-

kroju strugi. Dlatego można w przewodzie cylindrycznym otrzymać prędkość naddźwiękową doprowadzając i odprowadzając następnie masy lub energie gazu (rys. 14.8b i c). Dyszę cylindryczną pracującą na zasadzie doprowadzania i odprowadzania masy gazu nazwał Wulis *dyszą o zmiennym wydatku*, dyszę zaś pracującą na zasadzie doprowadzania i odprowadzania ciepła — *dyszą cieplną*.

Prócz tych dwóch dysz omówił Wulis także *dyszę mechaniczną*, opartą na tym, że wykonanie przez gaz pracy i związane z tym rozprężenie (na przykład na łopatkach turbiny) jest, w sensie oddziaływania na jego prędkość, równoważne odprowadzeniu ciepła, doprowadzenie zaś do gazu energii mechanicznej (na przykład za pomocą sprężarki) równoważne doprowadzeniu ciepła.

W ten sposób dysza geometryczna nie stanowi jedynego urządzenia do uzyskiwania przepływów naddźwiękowych. Widzimy, że prędkości naddźwiękowe można otrzymać również za pomocą dyszy o zmiennym wydatku, dyszy cieplnej i dyszy mechanicznej.

Rozdział XV

TEORIA PROSTOPADŁEJ FALI UDERZENIOWEJ

§ 1. Podstawowe zależności dla prostopadłej fali uderzeniowej

Jak wykazują doświadczenia, zarówno naddźwiękowy opływ ciał, jak i naddźwiękowy przepływ w rozmaitych dyszach i przystawkach odznacza się pewnymi szczególnymi własciwościami w porównaniu z analogicznymi poddźwiękowymi przepływami gazu.

Jedna z tych szczególnych właściwości polega na tym, że w szeregu przypadków podstawowe parametry przepływu i stanu gazu: ciśnienie, gęstość, temperatura oraz prędkość — stają się nieciągłymi funkcjami punktów przestrzeni, w której odbywa się przepływ gazu. Doświadczenia wykazują, że przy zmniejszeniu prędkości zmiany parametrów przepływu naddźwiękowego mogą wzdłuż pewnych powierzchni zachodzić w sposób nieciągły (skokami).

Miejsca (ściślej, powierzchnie — przyp. tłum.) raptownej, nieciągłej zmiany podstawowych parametrów przepływu gazu, której towarzyszy wzrost ciśnienia, gęstości, temperatury oraz zmniejszenie prędkości, nazywane są *falami uderzeniowymi*.

Na rysunku 15.1 przedstawiono fale uderzeniowe powstające przy opływie naddźwiękowym ciała o zaostrzonej części czołowej. Widzimy, że w tym przypadku fale zaczynają się na ostrej krawędzi ciała i mają mniej więcej prostoliniowy kształt (jest to tzw. *fala związana* — przyp. tłum.).

W wielu przypadkach fala uderzeniowa tworzy się w pewnej odległości od przedniej części opływanego ciała i ma kształt krzywoliniowy (rys. 15.2a) (jest to tzw. *fala wysunięta* — przyp. tłum.).

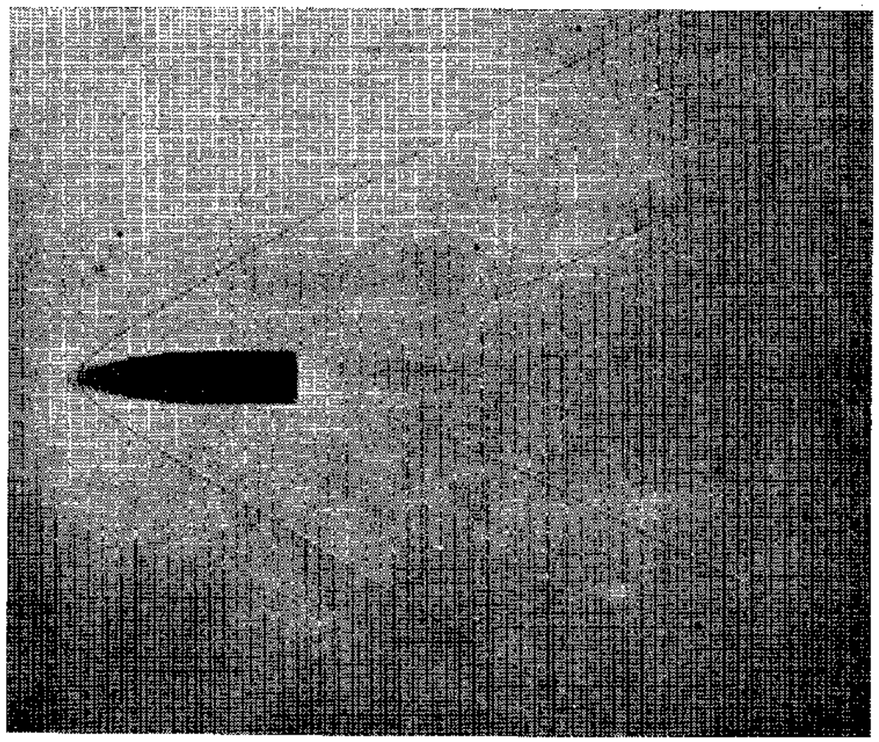
Doświadczenia wykazują, że powierzchnie fal uderzeniowych mogą być zarówno prostopadłe do kierunku prędkości przepływu niezakłóconego (rys. 15.2b), jak i skośne do niej (rys. 15.2c). W pierwszym przypadku przepływ nie zmienia swego kierunku po przejściu przez falę uderzeniową i fala nazywa się *prostopadłą*; w przypadku drugim — zmienia kierunek i fala jest nazywana *skośną*.

Krzywoliniowa powierzchnia fali uderzeniowej, przedstawionej na rys. 15.2a, może być traktowana jako składająca się z fali prostopadłej (w części środkowej) oraz z układu fal skośnych.

Należy podkreślić (dowiedziemy tego niżej), że powstawanie przy opływie ciała fal uderzeniowych powoduje zwiększenie jego oporu.

Przejdźmy do omówienia podstawowych właściwości fal uderzeniowych. W rozdziale niniejszym rozważona zostanie teoria fali prostopadłej.

Załóżmy, że w pewnym przekroju AB naddźwiękowego przepływu gazu powstała prostopadła fala uderzeniowa. Parametry stanu gazu przed falą oznaczymy przez p_1, ϱ_1, T_1 i v_1, a za falą — przez p_2, ϱ_2, T_2 i v_2.



15.1. Fotografia naddźwiękowego opływu ciała z ostrą krawędzią natarcia (pocisku)[1]

Na rysunku 15.3 podano charakter zmian prędkości i ciśnień w prostopadłej fali uderzeniowej. Postawmy sobie za zadanie znalezienie parametrów gazu za falą uderzeniową w funkcji znanych parametrów gazu przed falą. W celu znalezienia zależności pomiędzy parametrami gazu za i przed falą wykorzystamy równanie ilości ruchu, równanie ciągłości, równanie energii oraz równanie stanu. Równanie ciągłości, wyrażające równość mas gazu przed i za falą, napiszemy w postaci

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2. \tag{15.1}$$

[1] Wobec trudności reprodukcji rys. 15.1 i 15.2 zamieszczonych w oryginale książki, rysunki zostały zaczerpnięte z książki: Howardh L., *Modern developments in fluid. High speed flow*, Oxford 1952.

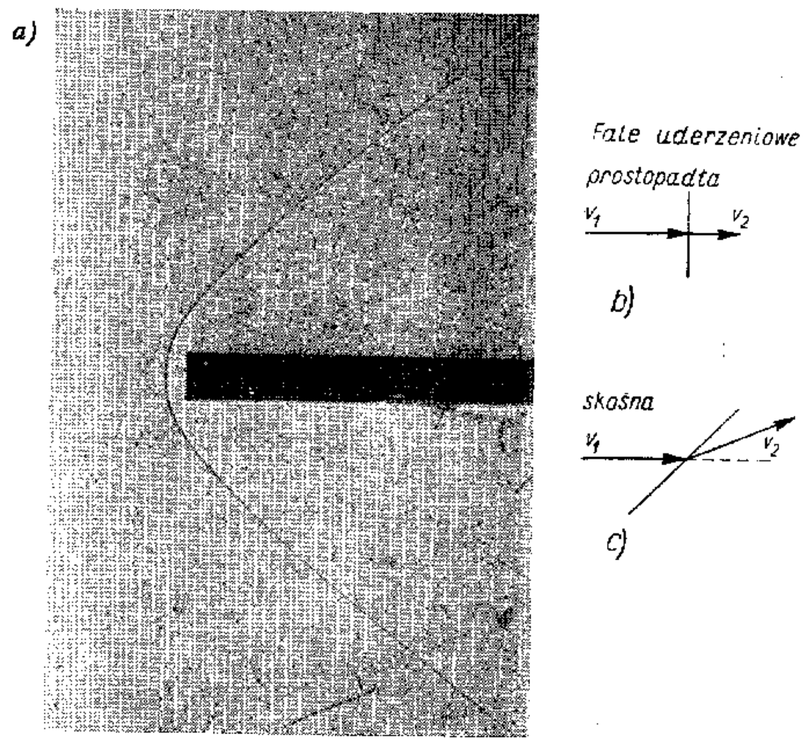
Ponieważ zmiana ilości ruchu gazu przy przejściu przez płaszczyznę fali zachodzi na skutek różnicy ciśnień $(p_2 - p_1)$, więc

$$p_2 - p_1 = \varrho_1 v_1 (v_1 - v_2). \tag{15.2}$$

Równanie energii całkowitej, jaką ma gaz przed i za falą, zapiszemy w jednostkach mechanicznych dla 1 kG gazu w następującej postaci:

$$\frac{v_1^2}{2g} + i_1 = \frac{v_2^2}{2g} + i_2. \tag{15.3}$$

Możliwość zastosowania tego równania do przekrojów strugi rozmieszczonych po dwóch różnych stronach fali, jest uwarunkowana tym, że proces sprężania gazu w fali uderzeniowej można traktować jako adiabatyczny (tzn. izolowany od otoczenia).



15.2. Zakrzywiona fala uderzeniowa oraz schematy fali uderzeniowej prostopadłej i skośnej

Przy przechodzeniu gazu przez falę jego energia całkowita nie ulega zmianie; zachodzi jedynie przemiana poszczególnych rodzajów energii — m. in. entalpia wzrasta w wyniku zmalenia energii kinetycznej.

Stosując do fali uderzeniowej równanie stanu gazu $p = \varrho g R T$, otrzymamy

$$p_2 - p_1 = g R(\varrho_2 T_2 - \varrho_1 T_1). \tag{15.4}$$

Układ czterech równań (15.1) ÷ (15.4) pozwala na określenie wartości parametrów gazu za falą uderzeniową w funkcji ich wartości przed falą.

Oznaczmy różnicę prędkości przed i za falą przez Δv, tzn. załóżmy

$$v_1 - v_2 = \Delta v.$$

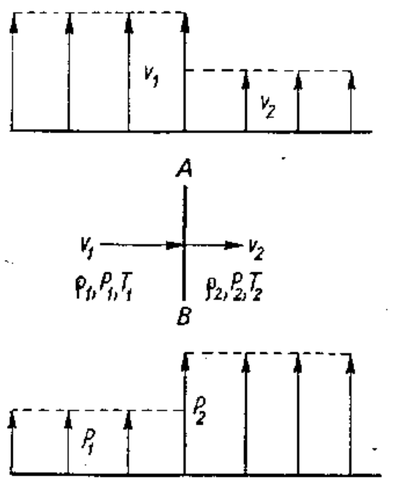
Równania (15.1) i (15.2) można wówczas przepisać w następującej postaci:

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2(v_1 - \Delta v), \tag{15.1'}$$

$$p_2 - p_1 = \varrho_1 v_1 \Delta v. \tag{15.2'}$$

Przekształcimy równanie (15.3). Ponieważ $i = J c_p T$, zatem można równaniu (15.3) nadać postać

$$\frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) = J c_p(T_2 - T_1).$$



15.3. Charakter zmiany prędkości i ciśnień w przypadku prostopadłej fali uderzeniowej

Wprowadzając różnicę $\Delta v = v_1 - v_2$, otrzymamy

$$\frac{\Delta v}{2g}(v_1 + v_2) = J c_p(T_2 - T_1)$$

lub

$$\frac{\Delta v}{2g}(2 v_1 - \Delta v) = J c_p(T_2 - T_1),$$

skąd otrzymamy dalej

$$T_2 - T_1 = \frac{\Delta v}{J g c_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right). \tag{15.3'}$$

W ten sposób zadanie znalezienia czterech parametrów gazu za falą: v_2, p_2, ϱ_2, T_2 sprowadza się do rozwiązania następującego układu czterech równań z różnicami tych parametrów jako niewiadomymi:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \varrho_1 v_1 \Delta v, \tag{15.5}$$

$$\Delta \varrho = \varrho_2 - \varrho_1 = \varrho_1\left(\frac{v_1}{v_1 - \Delta v} - 1\right), \tag{15.6}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\Delta v}{J g c_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right), \tag{15.7}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = g R(\varrho_2 T_2 - \varrho_1 T_1), \tag{15.8}$$

przy czym w (15.8) wielkość T_2 określona jest za pomocą wyrażenia (15.7).

Określimy przede wszystkim Δv. Podstawimy w tym celu do równania (15.8) wartość $p_2 - p_1$ z równania (15.5) oraz wartość ϱ_2 z równania (15.6).

Otrzymamy

$$\varrho_1 v_1 \Delta v = g R\left(\varrho_1 \frac{v_1}{v_1 - \Delta v} T_2 - \varrho_1 T_1\right),$$

skąd

$$v_1 \Delta v(v_1 - \Delta v) = g R[v_1(T_2 - T_1) + \Delta v\, T_1].$$

Podstawiając do otrzymanego równania wartość różnicy $T_2 - T_1$ z równania (15.7), znajdziemy

$$v_1 \Delta v(v_1 - \Delta v) = g R\left[v_1 \frac{\Delta v}{J g c_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right) + \Delta v\, T_1\right]$$

lub, skracając przez Δv,

$$v_1(v_1 - \Delta v) = g R\left[\frac{v_1}{J g c_r}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right) + T_1\right].$$

Należy zaznaczyć, że przy skracaniu przez Δv straciliśmy rozwiązanie $\Delta v = 0$. Ponieważ rozwiązanie to odpowiada $v_1 = v_2$, tzn. przypadkowi, w którym nie zachodzi fala uderzeniowa, nie będziemy się nim interesowali.

Zaznaczając, że $J c_p = \frac{k}{k-1} R$, możemy otrzymane równanie przepisać w postaci

$$k v_1^2 - k v_1 \Delta v = (k-1) v_1^2 - (k-1) v_1 \frac{\Delta v}{2} + k g R T_1.$$

Oznaczając przez a_1 prędkość dźwięku w przepływie przed falą oraz zaznaczając, że $a_1^2 = k g R T_1$, otrzymamy po prostych przekształceniach następujące wyrażenie:

$$\Delta v = \frac{2 v_1}{k+1}\left(1 - \frac{a_1^2}{v_1^2}\right) \tag{15.9}$$

lub

$$\Delta v = \frac{2 v_1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right), \tag{15.10}$$

gdzie

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1}.$$

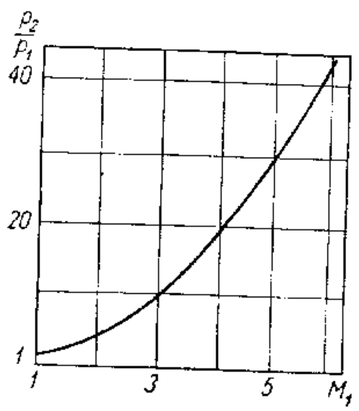
Podstawiając znalezioną wartość Δv ze wzoru (15.10) do wzorów (15.5), (15.6) i (15.7), znajdziemy[1]

[1] Równania na Δp, $\Delta \varrho$ i ΔT można otrzymać w postaci prostszej, jeżeli wyrazić je za pomocą prędkości krytycznej.

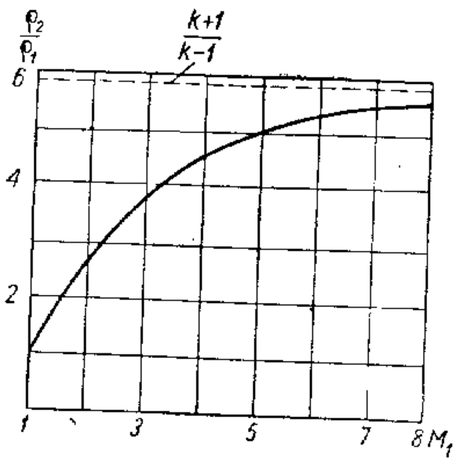
$$\Delta p = \frac{2\varrho_1 v_1^2}{k+1}\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right), \tag{15.11}$$

$$\Delta\varrho = \varrho_1 \frac{1-\frac{1}{M_1^2}}{\frac{k-1}{2}+\frac{1}{M_1^2}}, \tag{15.12}$$

$$\Delta T = \frac{2k}{Jg c_p (k+1)^2} v_1^2\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{kM_1^2}\right). \tag{15.13}$$



15.4. Zależność $\frac{p_2}{p_1}$ od liczby Macha M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej



15.5. Zależność $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ od liczby Macha M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej

Rugując z równania (15.11) ϱ_1 za pomocą znanej zależności $a^2 = k\frac{p}{\varrho}$, otrzymamy

$$p_2 - p_1 = \frac{2k}{k+1}(M_1^2-1)p_1 \tag{15.14}$$

lub

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \tag{15.15}$$

Zależność stosunku $\frac{p_2}{p_1}$ od liczby Macha M_1 przedstawiono na rys. 15.4.

Przekształcimy równanie (15.12) w następujący sposób:

$$\varrho_2 - \varrho_1 = \frac{M_1^2-1}{\frac{k-1}{2}M_1^2+1}\varrho_1, \tag{15.16}$$

skąd

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}M_1^2}{\frac{2}{k-1}+M_1^2}. \tag{15.17}$$

Widzimy stąd, że

$$\lim_{M_1\to\infty}\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Zależność stosunku $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ od liczby Macha M_1 podano na rys. 15.5.

Przekształćmy obecnie równanie (15.13). Biorąc pod uwagę, że

$$Jc_p = \frac{k}{k-1}R \quad \text{i} \quad a_1^2 = kgRT,$$

można równanie (15.13) napisać w następujący sposób:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{g}\frac{k-1}{kR}\frac{2k}{(k+1)^2}\frac{v_1^2}{a_1^2}kgRT_1\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{kM_1^2}\right)$$

lub

$$T_2 - T_1 = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}kM_1^2\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{kM_1^2}\right)T_1,$$

skąd

$$T_2 - T_1 = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\left[kM_1^2 - \frac{1}{M_1^2} - k + 1\right]T_1. \tag{15.18}$$

Dzieląc obydwie części równania przez T_1, otrzymamy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2}M_1^2 - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2M_1^2} + \frac{4k-(k-1)^2}{(k+1)^2}. \tag{15.19}$$

Zależność stosunku $\frac{T_2}{T_1}$ od liczby Macha M_1 podano na rys. 15.6.

Ustalimy teraz związek pomiędzy M_1 i M_2. Ponieważ

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{2}{k+1}\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right)v_1,$$

więc

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)M_1^2}. \tag{15.20}$$

Korzystając z równania $a_1^2 = kgRT_1$ i $a_2^2 = kgRT_2$ oraz wykorzystując wzór (15.19) na $\frac{T_2}{T_1}$, znajdziemy po nieskomplikowanych przekształceniach równania (15.20):

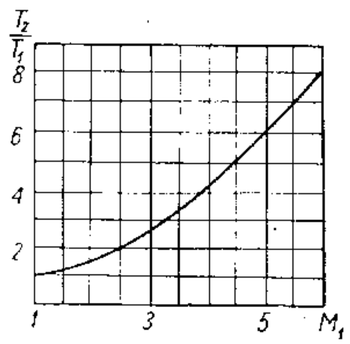
$$M_2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}},$$

skąd

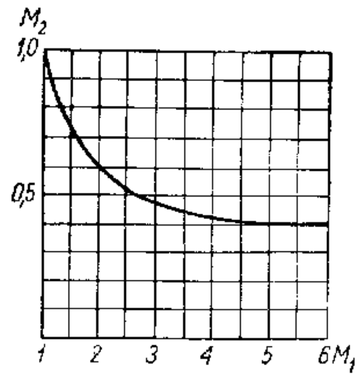
$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{M_1^{-2} + \frac{k-1}{2}}{k M_1^2 + \frac{k-1}{2}}. \tag{15.21}$$

Zależność liczby Macha M_2 od liczby M_1 podano na rys. 15.7.

Wyprowadzone równania wskazują, że skoki wartości parametrów gazu są funkcjami jedynie parametrów początkowych: p_1, ϱ_1, T_1 i $v_1(M_1)$.



15.6. Zależność $\frac{T_2}{T_1}$ od liczby Macha M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej



15.7. Zależność liczby M_2 od liczby M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej

Warto również zaznaczyć, że fale uderzeniowe, przy których $p_2 - p_1 > 0$, $\varrho_2 - \varrho_1 > 0$ i $T_2 - T_1 > 0$, mogą powstawać tylko przy prędkościach naddźwiękowych, tzn. przy $M_1 > 1$ (wzory 15.11, 15.12 oraz 15.13).

Na zakończenie niniejszego paragrafu znajdziemy zależność pomiędzy prędkościami przed i za prostopadłą falą uderzeniową oraz prędkością krytyczną.

Wykorzystamy w tym celu równania (15.1), (15.2), (15.3) oraz równanie stanu gazu w postaci

$$ig = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho} = Jgc_pT.$$

Dzieląc obydwie strony równania wynikającego z zasady ilości ruchu przez ϱ_1 otrzymujemy:

$$\frac{p_2}{\varrho_1} - \frac{p_1}{\varrho_1} = v_1(v_1 - v_2).$$

Zastępując w pierwszym wyrazie ϱ_1 przez $\varrho_1 = \frac{\varrho_2 v_2}{v_1}$ (z równania zachowania masy), otrzymamy

$$\frac{p_2}{\varrho_2} v_1 - \frac{p_1}{\varrho_1} v_2 = v_1 v_2 (v_1 - v_2).$$

Korzystając z równania stanu, można przepisać równanie ostatnie w następującej postaci:

$$g\frac{k-1}{k}(i_2 v_1 - i_1 v_2) = v_1 v_2 (v_1 - v_2).$$

Z równania energii (15.3) znajdziemy wyrażenie na i_1 oraz i_2:

$$i_1 = \frac{1}{2g}(v_{max}^2 - v_1^2),$$

$$i_2 = \frac{1}{2g}(v_{max}^2 - v_2^2).$$

Podstawiając wyrażenia na i_1 i i_2 do otrzymanego wyżej równania, otrzymamy

$$\frac{k-1}{2k}[(v_{max}^2 - v_2^2)v_1 - (v_{max}^2 - v_1^2)v_2] = v_1 v_2 (v_1 - v_2)$$

lub

$$\frac{k-1}{2k}(v_1 - v_2)(v_{max}^2 + v_1 v_2) = v_1 v_2 (v_1 - v_2),$$

skąd po podzieleniu przez wspólny czynnik:

$$\frac{k-1}{2k}(v_{max}^2 + v_1 v_2) = v_1 v_2,$$

tzn.

$$v_1 v_2 = \frac{k-1}{k+1} v_{max}^2. \tag{15.22}$$

Zatem na podstawie równania (14.12)

$$v_1 v_2 = a_{kr}^2. \tag{15.23}$$

Równanie (15.23) ustala zależność pomiędzy prędkościami przepływu gazu przed i za prostopadłą falą uderzeniową a prędkością krytyczną. Z równania

tego wynika, że krytyczna prędkość gazu a_{kr} stanowi średnią geometryczną między prędkościami v_1 i v_2 przed prostopadłą falą uderzeniową oraz za nią.

Z równania (15.23) wynika również, że prostopadła fala uderzeniowa może istnieć tylko w tym przypadku, gdy jedna z prędkości v_1 lub v_2 jest większa od prędkości krytycznej, a druga mniejsza od niej. Równanie (15.23) wskazuje zatem, że prostopadłe fale uderzeniowe nie mogą występować w przepływach całkowicie poddźwiękowych lub całkowicie naddźwiękowych, lecz mogą powstawać jedynie przy przejściu prędkości przepływu od wartości naddźwiękowych do poddźwiękowych (przejście odwrotne — od prędkości poddźwiękowych do naddźwiękowych — jest w układach izolowanych niemożliwe, co udowodnione zostanie niżej).

Korzystając z równania (15.23), można z (15.1) ÷ (15.3) otrzymać równania dla parametrów gazu za falami prostopadłymi, wyrażone za pomocą jego parametrów początkowych oraz prędkości krytycznej:

$$p_2 - p_1 = \varrho_1(v_1^2 - a_{kr}^2), \tag{15.24}$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 \frac{v_1^2}{a_{kr}^2}, \tag{15.25}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{v_1^2}{2\gamma g c_p}\left(1 - \frac{a_{kr}^4}{v_1^4}\right). \tag{15.26}$$

§ 2. Porównanie sprężenia w prostopadłej fali uderzeniowej ze sprężaniem izentropowym

Analizując $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, $\frac{p_2}{p_1}$ oraz $\frac{T_2}{T_1}$ w funkcji liczby M_1, widzimy, że $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ dąży przy $M_1 \to \infty$ do wartości granicznej równej:

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{k+1}{k-1} = 6 \quad (\text{przy } k = 1{,}4)^1.$$

[1] Jeżeli $k = 1{,}4$, to przy $p_2 \to \infty$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 6,$$

tzn. przy wzroście ciśnienia gęstość nie może wzrosnąć więcej niż sześciokrotnie. Ten wynik jest słuszny tylko dla stosunkowo niedużych ciśnień $\left(\text{gdy } \frac{p_2}{p_1} \text{ nie przekracza setek}\right)$.

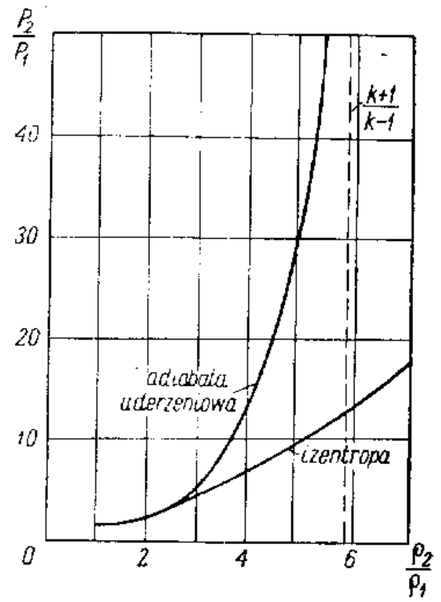
Przy większych ciśnieniach temperatura gazu znacznie wzrasta. Załóżmy, że przy dużych ciśnieniach słuszne jest równanie stanu $pv = RT$. W takim razie przy $p \to \infty$ gęstość miałaby wartość skończoną, więc temperatura $T \to \infty$. Jednakże przy dużych $T°$ wielkość k zmniejsza się. Ustalono, że przy bardzo dużych ciśnieniach prawo sześciokrotnego zwiększania się gęstości nie sprawdza się.

Jednocześnie wielkość $\frac{p_2}{p_1}$ dąży do nieskończoności przy nieskończonym powiększaniu M_1. Sprężenie powietrza w prostopadłej fali uderzeniowej różni się zatem w sposób istotny od sprężenia zachodzącego przy procesie izentropowym. Istotnie, przy procesie izentropowym zmianę parametrów stanu gazu wiąże prosta zależność

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^k, \tag{15.27}$$

z której wynika, że nieskończonemu zwiększeniu ciśnienia przy sprężeniu izentropowym odpowiada nieskończone powiększenie gęstości gazu.

Widzimy stąd, że nieciągła (skokiem) zmiana parametrów gazu w prostopadłej fali uderzeniowej nie jest procesem izentropowym i może być rozpatrywana jedynie jako proces adiabatyczny, jeżeli zaniedbamy rozpraszanie ciepła.



15.8. Izentropa oraz adiabata uderzeniowa

Dla prostopadłej fali uderzeniowej można otrzymać związek analogiczny do równania izentropy (15.27), wiążący bezpośrednio ciśnienie i gęstość gazu. Skorzystamy w tym celu z równań (15.17) i (15.15). Z równania (15.17) wynika, że

$$M_1^2 = \frac{2\varrho_2}{(k-1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}. \tag{15.28}$$

Podstawiając wartość M_1 z równania (15.28) do równania (15.15), otrzymamy

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho_1}{(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2} \tag{15.29}$$

lub

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}. \tag{15.29'}$$

Równanie (15.29) przedstawia tzw. *adiabatę uderzeniową Hugoniota*. Na rysunku 15.8 przedstawiono wykresy obu równań: izentropy oraz adiabaty uderzeniowej we współrzędnych $\frac{p_2}{p_1}$ i $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$.

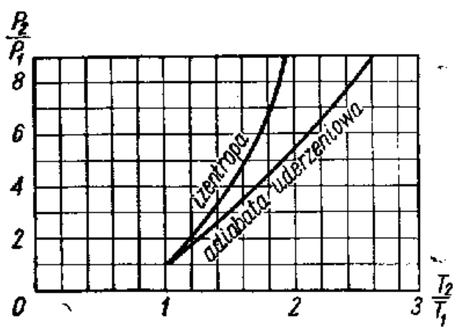
Korzystając z równania stanu gazu odniesionego do warunku przed falą uderzeniową: $p_1 = g\varrho_1 R T_1$ oraz za falą: $p_2 = g\varrho_2 R T_2$, można wyprowadzić dla prostopadłej fali zależność pomiędzy stosunkami ciśnień $\frac{p_2}{p_1}$ i stosunkiem temperatur $\frac{T_2}{T_1}$.

W tym celu wyrazimy w równaniu (15.29') wartości gęstości przez odpowiednie temperatury i ciśnienia:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}}.$$

Rozwiązując to równanie względem $\frac{T_2}{T_1}$, otrzymamy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1} + 1}. \tag{15.30}$$



15.9. Izentropa oraz adiabata uderzeniowa

Na rysunku 15.9, podobnie jak na rysunku 15.8, przedstawiono wykresy: izentropy oraz adiabaty uderzeniowej, ale tym razem we współrzędnych $\frac{p_2}{p_1}$ i $\frac{T_2}{T_1}$.

Z rysunku 15.9 widać, że przy jednakowych stosunkach ciśnień $\frac{p_2}{p_1}$ temperatura przy nieciągłym (uderzeniowym) sprężeniu jest większa niż przy izentropowym. Silne rozgrzanie się gazu w fali uderzeniowej jest właśnie przyczyną tego, że gęstość gazu za falą, nawet przy nieskończenie wielkim wzroście ciśnienia p_2, pozostaje wielkością skończoną.

Zwykłe porównanie sprężenia izentropowego ze sprężeniem uderzeniowym wykazuje, że to ostatnie nie jest izentropowe. Ponieważ sprężenie uderzeniowe można rozpatrywać jako proces adiabatyczny, wynika stąd, że entropia powinna przy sprężeniu uderzeniowym wzrastać. Dowiedźmy tego.

Załóżmy, że w procesie przepływu izentropowego gaz przeszedł ze stanu określonego przez p_1, ϱ_1 w stan $p_{2\,\mathrm{iz}}$, ϱ_2. Załóżmy również, że z tego samego stanu p_1, ϱ_1 gaz przeszedł skokiem w stan określony tą samą gęstością ϱ_2 i odpowiadającym jej na adiabacie uderzeniowej ciśnieniem p_2. Z tego, co powiedzieliśmy powyżej wynika (rys. 15.8), że

$$p_2 > p_{2\,\mathrm{iz}}$$

Przejdźmy obecnie do wyrażenia na entropię

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{\varrho^k}\right).$$

Dla izentropowego procesu zmian parametrów gazu

$$s_{2\,\mathrm{iz}} = s_1 = c_v \ln\left(\frac{p_1}{\varrho_1^k}\right) = c_v \ln\left(\frac{p_{2\,\mathrm{iz}}}{\varrho_2^k}\right).$$

Dla nieciągłej zmiany parametrów gazu

$$s_2 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{\varrho_2^k}\right).$$

Zatem

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{\varrho_2^k}\right) - c_v \ln\left(\frac{p_{2\,\mathrm{iz}}}{\varrho_2^k}\right) = c_v \ln\left(\frac{p_2}{p_{2\,\mathrm{iz}}}\right).$$

Ponieważ

$$p_2 > p_{2\,\mathrm{iz}},$$

więc

$$s_2 > s_1,$$

czyli przy sprężeniu uderzeniowym entropia rzeczywiście wzrasta.

Załóżmy teraz, że gaz przeszedł skokiem ze stanu p_1, ϱ_1 w stan p_2, ϱ_2 przy wystąpieniu fali rozrzedzeniowej, tzn. $p_2 < p_1$ oraz $\varrho_2 < \varrho_1$. Łatwo przekonać się, że dla fal rozrzedzeniowych adiabata uderzeniowa będzie leżała poniżej izentropy, a zatem przy jednej i tej samej gęstości ϱ_2 ciśnienie $p_2 < p_{2\,\mathrm{iz}}$. Wówczas jednak, obliczając analogicznie jak poprzednio, otrzymamy $s_2 < s_1$, czyli entropia układu izolowanego powinna przy wystąpieniu uderzeniowej fali rozrzedzeniowej maleć. Ponieważ takie zmniejszanie się entropii przeczy drugiemu prawu termodynamiki, wynika stąd wniosek o niemożliwości istnienia fal uderzeniowych rozrzedzeniowych[1] w procesach adiabatycznych.

Ponieważ przy sprężeniu uderzeniowym entropia wzrasta, wynika stąd, że sprężenie uderzeniowe jest procesem nieodwracalnym. To ostatnie oznacza, że przy procesach odbywających się według adiabaty uderzeniowej, część energii mechanicznej przechodzi w ciepło, które nie może już być z powrotem całkowicie zamienione w energię kinetyczną bez dodatkowych strat pracy mechanicznej. Zjawisko to zostanie zilustrowane przy końcu § 4 niniejszego rozdziału.

[1] Należy mieć na uwadze, że warunek adiabatyczności procesu, na którym opiera się przytoczony powyżej wniosek o niemożliwości istnienia uderzeniowej fali rozrzedzeniowej, jest bardzo istotny. W procesach nieadiabatycznych uderzeniowe fale rozrzedzeniowe są możliwe i są obserwowane w praktyce (tak zwane *fale kondensacyjne*).

Porównajmy parametry gazu po sprężeniu uderzeniowym z parametrami odpowiadającymi sprężeniu izentropowemu. Załóżmy, że gaz ze stanu początkowego v_1, p_1, ϱ_1, T_1 przechodzi w stan inny dwiema różnymi drogami: w sposób izentropowy oraz według adiabaty uderzeniowej.

Końcowe parametry gazu w pierwszym przypadku oznaczymy przez v_2, p_2, ϱ_2, T_2; w przypadku drugim — przez v_{2u}, p_{2u}, ϱ_{2u}, T_{2u}. Niech proces izentropowy przebiega w ten sposób, że jego ciśnienie końcowe oraz ciśnienie za falą uderzeniową pozostaną równe sobie, tzn. $p_2 = p_{2u}$. Z rysunku 15.9 wynika wówczas, że $T_2 < T_{2u}$.

Wykorzystamy równanie energii. Ponieważ warunki początkowe są w obydwu przypadkach jednakowe, więc oczywiście

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{k}{k-1} R T_2 = \frac{v_{2u}^2}{2g} + \frac{k}{k-1} R T_{2u}.$$

Mając na uwadze poprzednią nierówność $T_2 < T_{2u}$, wnioskujemy, że

$$v_{2u} < v_2.$$

A zatem przy jednakowych ciśnieniach końcowych prędkość gazu za falą uderzeniową (proces nieodwracalny) będzie mniejsza od prędkości przy sprężeniu izentropowym, tzn. część energii kinetycznej gazu przeszła w przypadku fali uderzeniowej nieodwracalnie w ciepło (temperatura gazu wzrosła).

Porównajmy te same procesy, lecz przy jednakowych prędkościach końcowych, tzn. przy $v_2 = v_{2u}$. W tym przypadku z równania energii znajdujemy, że $T_2 = T_{2u}$, skąd (rys. 15.9)

$$p_{2u} < p_2.$$

Przy jednakowych prędkościach końcowych ciśnienie za falą uderzeniową (proces nieodwracalny) będzie zatem mniejsze niż ciśnienie w odwracalnym procesie izentropowym.

Zatem przy nieciągłych (nieodwracalnych) procesach zachodzi zmniejszenie prędkości lub zmniejszenie ciśnienia w porównaniu z procesami, przebiegającymi izentropowo.

Jak zobaczymy dalej, nieodwracalna przemiana energii mechanicznej w energię cieplną przy wystąpieniu fali uderzeniowej stanowi źródło tak zwanego oporu falowego przy opływie ciał.

§ 3. Prędkość rozchodzenia się fal zgęszczeniowych. Fala dźwiękowa

Odwróćmy teraz obraz przepływu gazu, tzn. załóżmy, że powierzchnia fali uderzeniowej nie jest nieruchoma, lecz porusza się z prędkością v_1. W tym przypadku v_1 będzie prędkością rozchodzenia się fali ciśnienia p_2 w ośrodku nieruchomego gazu, w którym ciśnienie jest p_1. Znajdźmy prędkość v_1 rozchodzenia się fali zgęszczeniowej i wykażmy, że przy zmniejszeniu różnicy ciśnień $p_2 - p_1$ prędkość ta będzie się zbliżała do prędkości dźwięku.

Z równań (15.5) i (15.6) oraz z wyrażenia $\frac{v_1}{v_1 - \Delta v} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ znajdziemy

$$\frac{p_2 - p_1}{\varrho_2 - \varrho_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} v_1^2,$$

skąd prędkość v_1 rozchodzenia się fali zgęszczeniowej w gazie o ciśnieniu p_1 będzie miała postać

$$v_1 = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{p_2 - p_1}{\varrho_2 - \varrho_1}}. \tag{15.31}$$

Jest rzeczą oczywistą, że w granicy przy $p_2 \to p_1$, a co za tym idzie: $\varrho_2 \to \varrho_1$ wyrażenie na v_1 przybiera postać

$$v_1 = \lim_{\Delta\varrho \to 0} \sqrt{\frac{\varrho_1 + \Delta\varrho}{\varrho_1} \frac{\Delta p}{\Delta\varrho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}. \tag{15.32}$$

Ponieważ prawa strona równania przedstawia znane wyrażenie na prędkość dźwięku, zatem

$$v_1 = a_1.$$

Zatem istotnie *fala dźwiękowa jest falą uderzeniową o nieskończenie małej intensywności.*

§ 4. Ciśnienie spiętrzenia za czołem prostopadłej fali uderzeniowej

Oznaczmy odpowiednio przez p_1 i v_1 ciśnienie i prędkość przepływu naddźwiękowego przed czołem prostopadłej fali uderzeniowej (rys. 15.10), przez p_2 i v_2 — ciśnienie i prędkość bezpośrednio za falą uderzeniową, przez p_{20} — ciśnienie w punkcie spiętrzenia (w którym prędkość przepływu gazu $v_{20} = 0$). Przepływ przed i za falą uderzeniową będziemy traktowali jako izentropowy.

Znajdźmy ciśnienie p_{20} w punkcie spiętrzenia. Stosunek ciśnień $\frac{p_{20}}{p_1}$ można zapisać w postaci następującego iloczynu:

$$\frac{p_{20}}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_{20}}{p_2}. \tag{15.33}$$

Stosunek $\frac{p_2}{p_1}$ znajdziemy ze wzoru (15.15):

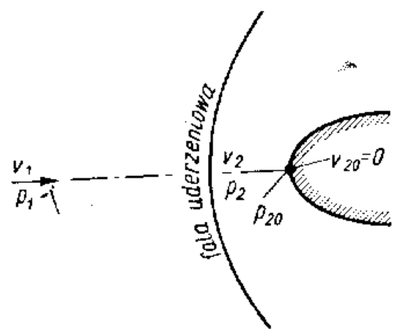
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{k-1}{k+1} M_1^2 \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2}\right]. \tag{15.34}$$

Natomiast ze wzoru (14.7) dla procesu izentropowego otrzymamy

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(1 - \frac{v_2^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

lub, wykorzystując równanie (15.22),

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$



15.10. Do określenia ciśnienia w punkcie spiętrzenia przy istnieniu prostopadłej (w części środkowej) fali uderzeniowej przed ciałem

Jeżeli w równaniu tym wyrazić stosunek prędkości $\frac{v_2}{v_1}$ według wzoru (15.20), wówczas otrzymamy ostatecznie

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left[\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.35)$$

Podstawiając do równania (15.33) wartości $\frac{p_2}{p_1}$ i $\frac{p_{20}}{p_2}$ według (15.34) i (15.35), otrzymamy poszukiwany wzór na ciśnienie w punkcie spiętrzenia za prostopadłą falą uderzeniową:

$$\frac{p_{20}}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{\frac{k}{k-1}} \frac{M_1^2}{\left[\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (15.36)$$

który przy $k = 1{,}4$ przybiera postać

$$\frac{p_{20}}{p_1} = \frac{166{,}7\, M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2}\right)^{2.5}}. \quad (15.37)$$

Określona tym wzorem funkcja $\frac{p_{20}}{p_1} = f(M_1)$ jest przedstawiona na rys. 15.11. Na tym samym wykresie została podana dla porównania krzywa określająca ciśnienie spiętrzenia, w przypadku gdy fala uderzeniowa nie występuje; krzywa ta została obliczona na podstawie wzoru (14.22), który przy $k = 1{,}4$ przybiera postać

$$\frac{p_{20}}{p_1} = (1 + 0{,}2\, M_1^2)^{3.5}. \quad (15.38)$$

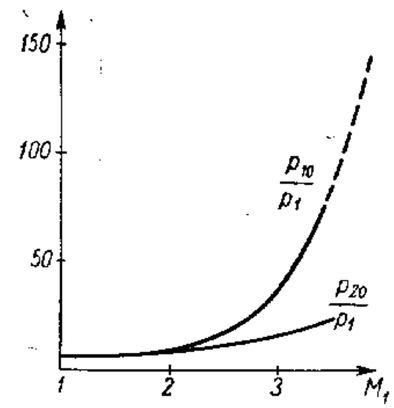
Rugując z równań (15.37) i (15.38) ciśnienie p_1 oraz wprowadzając oznaczenie $\frac{p_{20}}{p_{10}} = \sigma$, otrzymamy następujący wzór:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \sigma = \frac{166{,}7\, M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2}\right)^{2.5} (1 + 0{,}2\, M_1^2)^{3.5}}. \quad (15.39)$$

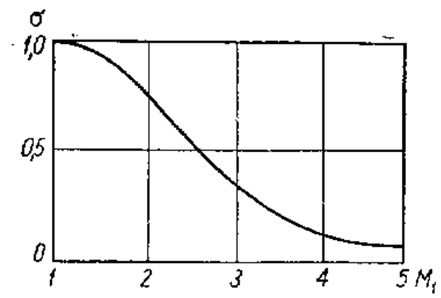
Wielkość σ nazywana jest współczynnikiem strat ciśnienia całkowitego. Zależność σ od liczby M_1, określana wzorem (15.39), została podana na rys. 15.12. Widzimy, że przy $M_1 > 1$ współczynnik $\sigma < 1$ i zmniejsza się ze wzrostem liczby M_1.

Zależność (15.37) ma znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala określić liczbę M_1 przepływu (przy $M_1 > 1$) na podstawie zmierzonych wartości ciśnienia p_{20} i p_1.

Z rysunku 15.11 i 15.12 widać, że ciśnienie spiętrzenia za prostopadłą falą uderzeniową jest mniejsze od ciśnienia spiętrzenia przed czołem fali uderzeniowej. Obliczenia i doświadczenia wykazują, że ciśnienie spiętrzenia za



15.11. Zależność ciśnienia w punkcie spiętrzenia od liczby Macha M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej



15.12. Zależność współczynnika strat σ ciśnienia całkowitego od liczby Macha M_1 dla prostopadłej fali uderzeniowej

dowolną falą uderzeniową (skośną, krzywoliniową) jest mniejsze od ciśnienia spiętrzenia przed falą. Okoliczność ta dobrze ilustruje wyprowadzony powyżej wniosek, że przy sprężeniu uderzeniowym ciepło, uzyskane w wyniku zmiany części energii mechanicznej, nie może już być całkowicie zamienione na energię kinetyczną bez dodatkowych strat pracy mechanicznej.

Rozdział XVI

PŁASKIE PRZEPŁYWY NADDŹWIĘKOWE

W rozdziale niniejszym omówione zostaną jedynie izentropowe płaskie naddźwiękowe przepływy gazu (zatem, w szczególności, nie zostaną uwzględnione przepływy gazu lepkiego oraz przepływy z falami uderzeniowymi).

§ 1. Kryteria istnienia potencjału prędkości w płaskim izentropowym przepływie gazu

W paragrafie tym wykażemy, że płaskie izentropowe przepływy gazu nie muszą być koniecznie przepływami potencjalnymi, tzn. takimi przepływami, w których nie występują wiry.

W izentropowym przepływie gazu, wzdłuż każdej strugi pozostaje stała wielkość entalpii spiętrzenia (energii całkowitej) $i_0 = i + \frac{v^2}{2g}$ oraz wielkość entropii. Załóżmy, że w nieskończoności przy przejściu od strugi do strugi nie ulega zmianie wielkość entalpii spiętrzenia i entropii. W przepływie mogą jednak istnieć takie obszary, w których przepływ przestaje być izentropowy. Wówczas za tymi obszarami przepływ zwiększy swą entropię, stanie się ponownie izentropowy[1], ale nie będzie już odznaczał się stałością entropii oraz entalpii spiętrzenia, przy przejściu od strugi do strugi.

Jako przykład może posłużyć przepływ w tunelu aerodynamicznym. Przepływ przed wentylatorem można uważać za izentropowy. Przechodząc przez płaszczyznę wentylatora strugi powietrza będą trafiały na rozmaite części wentylatora, wskutek czego będą doznawały różnych strat, a oprócz tego, do różnych strug doprowadzane będą różne ilości energii. W związku z tym, chociaż za płaszczyzną wentylatora przepływ pozostanie izentropowy, jednak entropia i energia całkowita będą w różnych strugach różne.

Wyjaśnijmy, jaki warunek musi być spełniony na to, by w przepływie izentropowym nie powstawały wiry.

Rozpatrzmy (rys. 16.1) dowolną linię prądu aA. Poprowadźmy w punkcie

[1] Entropia będzie stała wzdłuż każdej linii prądu (przyp. tłum.).

a linii prądu styczną skierowaną wzdłuż wektora prędkości v oraz wewnętrzną normalną n. Napiszmy równanie ruchu dla składowych wzdłuż normalnej n:

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dn}, \tag{16.1}$$

przy czym $Oa = r$ — promień krzywizny, $\frac{v^2}{r}$ — dośrodkowe przyspieszenie elementów gazu.

Załóżmy, że przy przejściu od jednej linii prądu do drugiej entalpia spiętrzenia oraz entropia zmieniają się. W tym przypadku mamy

$$di_0 = di + v\,dv \neq 0, \tag{16.2}$$

$$ds = \frac{1}{T}\left(di - \frac{dp}{\varrho}\right) \neq 0, \tag{16.3}$$

gdzie i_0 — entalpia spiętrzenia, s — entropia (wzdłuż linii prądu, z uwagi na izentropowość przepływu, oczywiście $di_0 = 0$, $ds = 0$).

Rugując z równań (16.2) i (16.3) wielkość di, znajdziemy

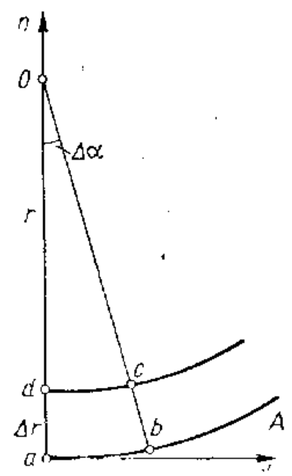
$$\frac{dp}{\varrho} = di_0 - v\,dv - T\,ds.$$

Podstawiając wartość $\frac{dp}{\varrho}$ do równania ruchu (16.1), otrzymamy

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{di_0}{dn} + v\frac{dv}{dn} + T\frac{ds}{dn}$$

lub inaczej

$$v\left(\frac{dv}{dn} - \frac{v}{r}\right) = \frac{di_0}{dn} - T\frac{ds}{dn}. \tag{16.4}$$



16.1. Do wyprowadzenia warunku potencjalności izentropowych płaskich przepływów gazu

Rozważmy wyrażenie w nawiasach biorąc przy tym pod uwagę rys. 16.1.

Obierzmy linię prądu dc nieskończenie bliską (linii ab — przyp. red.) i rozważmy elementarną powierzchnię $abcda$, ograniczoną dwiema liniami prądu oraz nieskończenie bliskimi promieniami biegunowymi Oa i Ob. Zastosujemy do tej powierzchni twierdzenie Stokesa. Otrzymamy

$$\Gamma_{abcda} = 2\,\omega_z\,\Delta\sigma_z = 2\,\omega_z\,r\Delta r\,\Delta\alpha. \tag{a}$$

Ale

$$\Gamma_{abcda} = v\,r\,\Delta\alpha - \left(v + \frac{dv}{dn}\Delta r\right)(r - \Delta r)\,\Delta\alpha,$$

skąd otwierając nawiasy

$$\Gamma_{abcda} = v\,r\,\Delta\alpha - v\,r\,\Delta\alpha - \frac{dv}{dn}\,r\,\Delta r\,\Delta\alpha + v\,\Delta r\,\Delta\alpha + \frac{dv}{dn}\,\Delta r^2\,\Delta\alpha.$$

Odrzucając nieskończenie małe trzeciego rzędu oraz porównując z (a), znajdziemy

$$\left(v - \frac{dv}{dn}\,r\right)\Delta r\,\Delta\alpha = 2\,\omega_z\,r\,\Delta r\,\Delta\alpha$$

lub

$$2\,\omega_z = \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dn}\right). \tag{16.5}$$

Przechodząc obecnie do równania (16.4), wnioskujemy, że na to, by nie istniały w przepływie wiry, konieczne jest spełnienie warunku

$$\frac{di_0}{dn} - T\frac{ds}{dn} = 0,$$

które będzie spełnione, jeżeli

$$\frac{di_0}{dn} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{ds}{dn} = 0.$$

Otrzymany wynik można ostatecznie sformułować w następujący sposób: *jeżeli entalpia spiętrzenia i entropia przy przejściu od jednej strugi gazu do drugiej nie ulegają zmianie, wówczas izentropowy przepływ gazu jest przepływem potencjalnym.*

Zatem jeżeli w naddźwiękowym przepływie gazu powstają fale uderzeniowe, którym w różnych miejscach towarzyszą różne straty, wówczas przy przejściu od jednej strugi do drugiej entropia będzie się zmieniała, a za powierzchnią fali uderzeniowej powstaną w przepływie wiry.

§ 2. Podstawowe równanie różniczkowe płaskiego przepływu potencjalnego

Rozważmy płaski potencjalny przepływ gazu.

Jak wiadomo, równanie potencjału prędkości płaskiego przepływu potencjalnego cieczy nieściśliwej jest równaniem Laplace'a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Wykażemy, że w przypadku płaskiego potencjalnego ustalonego przepływu gazu odpowiednie równanie przybiera postać bardziej złożoną.

Przejdźmy w tym celu do równania ciągłości, które dla płaskiego ustalonego przepływu gazu ma postać:

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymamy

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}v_x + \frac{\partial\varrho}{\partial y}v_y + \varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0. \tag{16.6}$$

Wyrazimy wartości pochodnych $\frac{\partial\varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial\varrho}{\partial y}$ za pomocą składowych prędkości v_x, v_y. W tym celu wyrazimy te pochodne w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial x} &= \frac{d\varrho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial y} &= \frac{d\varrho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Za pomocą równań Eulera zastąpimy w wyrażeniach (a) pochodne ciśnienia p przez wartości pochodnych składowych prędkości:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\varrho\frac{dv_x}{dt} = -\varrho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\varrho\frac{dv_y}{dt} = -\varrho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Wykorzystując równania (a) i (b), otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial x} &= -\frac{\varrho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial\varrho}{\partial y} &= -\frac{\varrho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Podstawiając wyrażenia (c) do równania (16.6) oraz biorąc pod uwagę, że

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

otrzymamy następujące równanie na potencjał prędkości $\varphi(x, y)$:

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\,v_x v_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{16.7}$$

Równanie to jest *podstawowym równaniem różniczkowym dynamiki gazów dla płaskiego potencjalnego przepływu ustalonego*; jest to nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych z niewiadomą funkcją φ[1].

Wykażemy, że w przypadku szczególnym, tzn. dla niewielkich prędkości gazu, równanie (16.7) przekształca się w równanie Laplace'a.

Dzieląc obustronnie równanie (16.7) przez wielkość a^2 oraz zakładając, że prędkości przepływu gazu są na tyle małe, iż można zaniedbać wielkości $\frac{v_x^2}{a_2}$, $\frac{v_y^2}{a^2}$ i $\frac{v_x v_y}{a^2}$, sprowadzimy równanie (16.7) do postaci

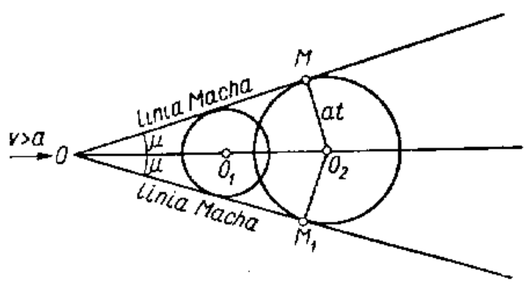
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

tzn. do równania Laplace'a, ścisłego w przypadku $\varrho = \text{const}$.

Równanie (16.7) nazywa się *quasi-liniowym równaniem o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu*. Nazywane ono jest quasi-liniowym dlatego, że same pochodne cząstkowe drugiego rzędu występują w nim liniowo.

§ 3. Charakterystyki w płaszczyźnie przepływu gazu

Załóżmy, że strumień gazu porusza się od lewej strony ku prawej z prędkością naddźwiękową $v > a$. Niech w pewnym punkcie O przepływu znajduje się jakieś źródło zakłóceń, wywołujące małe zaburzenia, które rozchodzą się we wszystkich kierunkach z prędkością dźwięku a (rys. 16.2). Gdyby gaz był nie-



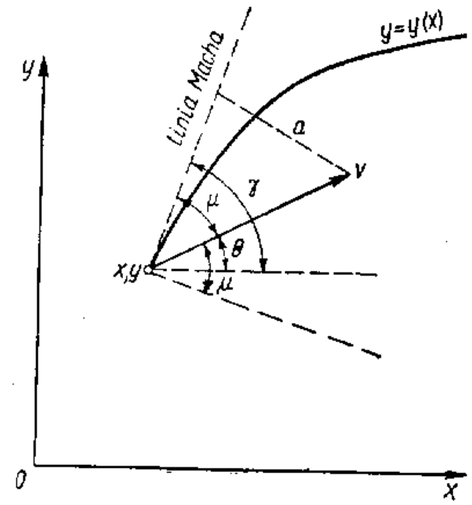
16.2. Rozchodzenie się małych zaburzeń w naddźwiękowym przepływie gazu

ruchomy — zaburzenia wychodzące z punktu O miałyby postać koncentrycznych okręgów (w przestrzeni — kul) ze środkiem w punkcie O. Przy ruchu gazu fala dźwiękowa, wychodząca z punktu O, rozchodzi się z prędkością a, ale jej środek porusza się z prędkością przepływu $v > a$. W ten sposób, w czasie t fala dźwiękowa przemieści się na odległość (liczoną od jej poruszającego się środka) $O_2M = a\,t$, a jej środek przebędzie odcinek $OO_2 = v\,t$.

[1] W równaniu tym a jest związane z wypadkową prędkością równaniem Bernoulliego, nie stanowi zatem osobnej niewiadomej (przyp. tłum.).

Obwiednia tych fal dźwiękowych składa się z dwóch półprostych OM i OM_1 zwanych liniami zaburzeń lub liniami Macha. Linie te tworzą w przestrzeni tak zwany stożek zaburzeń lub stożek Macha o kącie μ. Linie Macha odgraniczają zaburzony obszar (wewnątrz stożka) przepływu od przepływu niezaburzonego. Z rysunku 16.2 widać, że kąt stożka Macha określa następująca zależność:

$$\sin\mu = \pm\frac{a\,t}{v\,t} = \pm\frac{a}{v} = \pm\frac{1}{M}. \quad (16.8)$$



16.3. Do wyprowadzenia równania różniczkowego charakterystyk w płaszczyźnie x, y przepływu gazu

A zatem, w każdym punkcie płaszczyzny x, y, gdzie gaz porusza się z prędkościami naddźwiękowymi, można poprowadzić dwa kierunki linij Macha. Przy przejściu od jednego punktu płaszczyzny x, y do drugiego kierunek linij Macha może ulec zmianie, ponieważ wartości v i a są na ogół w różnych punktach płaszczyzny x, y różne. Mając to na uwadze, znajdziemy w płaszczyźnie x, y (rys. 16.3) taką linię $y = y(x)$, że w każdym jej punkcie kierunek stycznej jest zgodny z kierunkiem jednej z linii Macha w tym punkcie. Linie te będziemy nazywali charakterystykami[1].

Z prostych zależności geometrycznych (rys. 16.3) wynika, że

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\gamma-\theta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\theta}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x},$$

otrzymamy

$$\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{v_y}{v_x}\right) = 1+\frac{v_y}{v_x}\frac{dy}{dx}.$$

[1] Jak wykażemy dalej, charakterystyki mają duże znaczenie przy badaniu naddźwiękowych przepływów gazu. W szczególności pozwalają one rozwiązać równanie (16.7) dla dowolnych warunków brzegowych.

(Autor wprowadził tu rozróżnienie między liniami Macha, które utożsamia ze stycznymi do charakterystyk, oraz krzywoliniowymi charakterystykami. Zazwyczaj *charakterystyka* i *linia Macha* są traktowane jako różne nazwy tego samego pojęcia, tzn. krzywoliniowej charakterystyki w płaszczyźnie przepływu — przyp. red.).

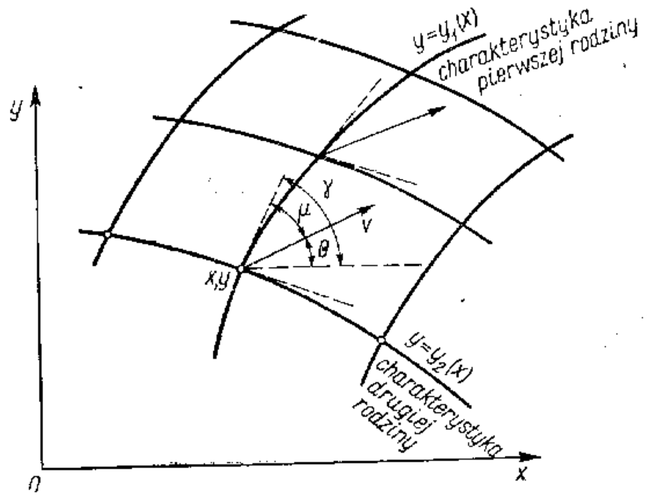
Podnosząc do kwadratu oraz grupując odpowiednie wyrazy otrzymamy

$$\left[\frac{v^2}{a^2}-1-\frac{v_y^2}{v_x^2}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{v^2}{a^2}\frac{v_y}{v_x}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{v^2}{a^2}\frac{v_y^2}{v_x^2}-\frac{v_y^2}{v_x^2}-1=0.$$

Mnożąc przez $a^2 v_x^2$, a następnie skracając przez $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, otrzymujemy następujące równanie:

$$(v_x^2 - a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,v_x v_y \frac{dy}{dx} + v_y^2 - a^2 = 0. \tag{16.9}$$

Otrzymane równanie kwadratowe względem $\frac{dy}{dx}$ jest poszukiwanym równaniem różniczkowym charakterystyki, przechodzącej przez punkt x, y. Łatwo stwierdzić, że współczynniki tego równania są identyczne ze współczynnikami równania (16.7).



16.4. Rodziny charakterystyk w płaszczyźnie x, y przepływu gazu

Rozwiązując równanie (16.9), znajdziemy wzór na tangens kąta charakterystyki z osią x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}. \tag{16.10}$$

Z równania (16.10) wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli $v > a$, wówczas równanie (16.10) ma dwa różne rzeczywiste pierwiastki. Zgodnie z tym przez każdy punkt płaszczyzny x, y, gdzie $v > a$, można przeprowadzić elementy dwu różnych charakterystyk, a cała płaszczyzna jest pokryta dwiema rodzinami charakterystyk.

Dla ścisłości będziemy w dalszym ciągu nazywali krzywe całkowe równania (16.10) $y_1(x)$ ze znakiem plus przed pierwiastkiem, charakterystykami pierwszej

rodziny, krzywe zaś całkowe $y_2(x)$ odpowiadające znakowi minus przed pierwiastkiem — charakterystykami drugiej rodziny.

Zatem, w naddźwiękowym przepływie gazu istnieją dwie rodziny charakterystyk (rys. 16.4). Równanie (16.7) nazywane jest w tym przypadku *równaniem typu hiperbolicznego*.

2. Jeżeli $v = a$, wówczas równanie (16.10) ma dwa jednakowe pierwiastki rzeczywiste, tzn. część płaszczyzny x, y, gdzie $v = a$, może być pokryta tylko jedną rodziną charakterystyk.

Równanie (16.7) nazywane jest w tym przypadku *równaniem typu parabolicznego*.

3. Jeżeli $v < a$, tzn. jeżeli przepływ gazu jest poddźwiękowy, wówczas równanie (16.10) nie ma pierwiastków rzeczywistych. W tym przypadku równanie (16.7) nazywa się *równaniem typu eliptycznego*.

W rozdziale tym będziemy w dalszym ciągu omawiali tylko naddźwiękowe przepływy gazu, czyli tylko takie przypadki, gdy cała płaszczyzna x, y przepływu może być pokryta dwiema rodzinami charakterystyk: $y = y_1(x)$ oraz $y = y_2(x)$.

Na zakończenie podkreślimy, że wyznaczenie charakterystyk w płaszczyźnie przepływu x, y, bez znajomości pola prędkości v_x, v_y, jest niemożliwe, ponieważ współczynniki w równaniu (16.9) zależą od składowych prędkości v_x, v_y.

Sprawa przedstawia się inaczej, jeżeli od płaszczyzny x, y przepływu przejdziemy do płaszczyzny hodografu prędkości v_x, v_y. Wykażemy niżej, że w tej płaszczyźnie charakterystyki dają się łatwo wyznaczyć (i są niezależne od badanego przepływu — przyp. red.), co umożliwia rozwiązywanie dowolnych na ogół zagadnień na warunki brzegowe dla przepływów naddźwiękowych.

§ 4. Charakterystyki w płaszczyźnie hodografu prędkości

Zbadajmy, jakie linie będą w płaszczyźnie v_x, v_y hodografu prędkości odpowiadały charakterystykom w płaszczyźnie x, y.

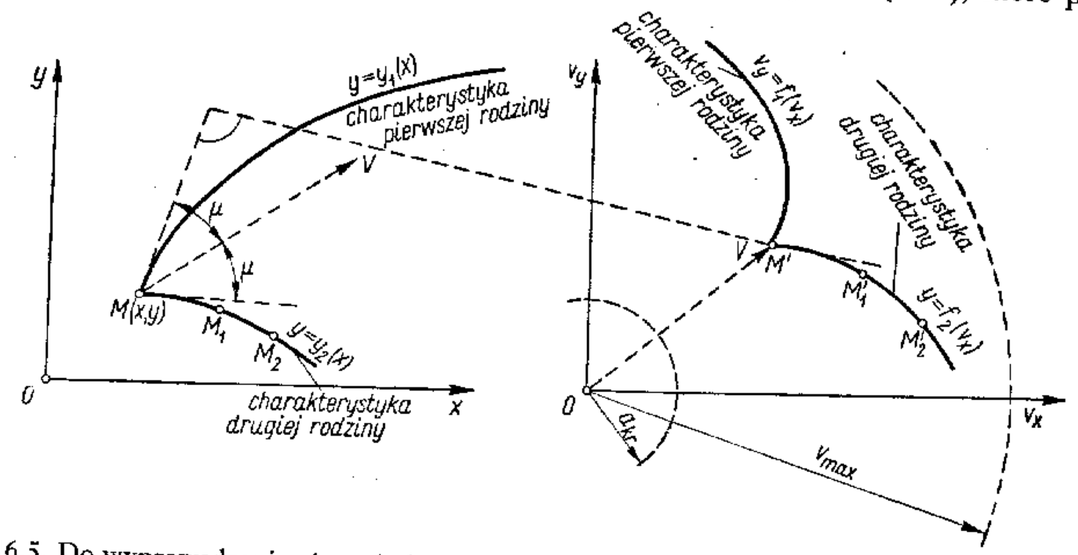
Załóżmy, że w każdym punkcie charakterystyki na płaszczyźnie x, y znana jest wielkość i kierunek prędkości v. Odkładając ten wektor w płaszczyźnie v_x, v_y z początku układu współrzędnych, otrzymamy krzywą opisywaną przez koniec wektora v, której punkty będą odpowiadały punktom charakterystyk w płaszczyźnie x, y (rys. 16.5). Ponieważ przez każdy punkt płaszczyzny x, y przechodzą dwie charakterystyki, więc otrzymamy na płaszczyźnie v_x, v_y również dwie krzywe. Krzywe te będziemy nazywali *charakterystykami w płaszczyźnie hodografu prędkości*.

Fizykalny sens charakterystyk w płaszczyźnie v_x, v_y polega więc na tym, że są one hodografem prędkości dla punktów leżących na charakterystykach w płaszczyźnie x, y.

Ponieważ rozważamy naddźwiękowe przepływy gazu, charakterystyki w płaszczyźnie v_x, v_y będą oczywiście leżały wewnątrz obszaru, ograniczonego dwoma okręgami o środkach w początku układu współrzędnych, przy czym promień okręgu mniejszego będzie się równał a_{kr}, promień zaś większego

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\, a_{kr}.$$

W celu znalezienia równania charakterystyk w płaszczyźnie hodografu, trzeba skorzystać z podstawowego równania dynamiki gazów (16.7), które po-



16.5. Do wyprowadzenia równań charakterystyk w płaszczyźnie v_x, v_y hodografu prędkości

winny spełniać składowe prędkości v_x i v_y naddźwiękowego przepływu gazu. Równanie to za pomocą zależności:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

można napisać w postaci

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad (16.11)$$

Poza tym, ponieważ przepływ jest potencjalny, składowe prędkości związane są zależnością

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \qquad (16.12)$$

Równanie (16.11) można więc przepisać w postaci

$$(a^2 - v_x^2)\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{v_x v_y}{(a^2 - v_x^2)}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right] - v_x v_y\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{a^2 - v_y^2}{v_x v_y}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] = 0. \qquad (16.13)$$

Rozpatrując zmianę prędkości wzdłuż charakterystyk $y = y(z)$, można napisać dwa równania

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + m\frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \text{i}\qquad \frac{dv_y}{dx} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + m\frac{\partial v_y}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (16.14)$$

gdzie $m = \dfrac{dy}{dx}$ określa nachylenie charakterystyk w płaszczyźnie x, y.

Podstawiając pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ z równania (16.14) do równania (16.13) oraz wykorzystując warunek potencjalności (16.12), doprowadzimy równanie (16.13) do postaci

$$(a^2 - v_x^2)\frac{dv_x}{dx} - v_x v_y \frac{dv_y}{dx} = (a^2 - v_x^2)\left(m + \frac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}\right) \times$$

$$\times\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{v_x v_y\left(m + \dfrac{a^2 - v_y^2}{v_x v_y}\right)}{(a^2 - v_x^2)\left(m + \dfrac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}\right)}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] = 0. \qquad (16.15)$$

Równanie (16.15) spełnione jest wzdłuż charakterystyk płaszczyzny x, y i dlatego wchodzące do niego składowe prędkości v_x i v_y są składowymi prędkości wzdłuż tych charakterystyk. Wynika stąd, że równanie (16.15) jest różniczkowym równaniem charakterystyk w płaszczyźnie hodografu prędkości. Można je znacznie uprościć, a nawet scałkować w postaci skończonej.

Rozpatrzmy w tym celu ułamek w nawiasie kwadratowym równania (16.15):

$$A = \frac{v_x v_y\left(m + \dfrac{a^2 - v_y^2}{v_x v_y}\right)}{(a^2 - v_x^2)\left(m + \dfrac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}\right)} = \frac{m\dfrac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2} + \dfrac{a^2 - v_y^2}{a^2 - v_x^2}}{m + \dfrac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}}. \qquad (16.16)$$

Wykorzystując znaną właściwość równania kwadratowego (16.9), które spełnia wielkość $m = \dfrac{dy}{dx}$, możemy napisać

$$m_1 + m_2 = \frac{2 v_x v_y}{v_x^2 - a^2} \quad \text{oraz} \quad m_1 m_2 = \frac{v_y^2 - a^2}{v_x^2 - a^2}, \qquad (16.17)$$

gdzie m_1 i m_2 — tangensy kątów nachylenia odpowiednio pierwszej i drugiej rodziny charakterystyk w płaszczyźnie x, y.

Wyrażenie (16.16) można wówczas przekształcić do postaci

$$A = \frac{-m\frac{m_1+m_2}{2} + m_1 m_2}{m - \frac{m_1+m_2}{2}} = -\frac{m(m_1+m_2) - 2m_1 m_2}{2m - m_1 - m_2}.$$

Wzdłuż pierwszej rodziny charakterystyk, dla której $m = m_1$, wielkość $A = -m_1$; wzdłuż drugiej rodziny charakterystyk, dla której $m = m_2$, wielkość $A = -m_2$. A zatem w ogóle

$$A = -m = -\frac{dy}{dx}.$$

W takim przypadku wyrażenie w nawiasach kwadratowych równania (16.15) będzie pochodną całkowitą $\frac{dv_y}{dx}$ wzdłuż charakterystyki w płaszczyźnie x, y i można równanie (16.15) przepisać w postaci

$$(a^2 - v_x^2)\frac{dv_x}{dx} - \left[v_x v_y + (a^2 - v_x^2)\left(m + \frac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}\right)\right]\frac{dv_y}{dx} = 0, \qquad (16.18)$$

skąd

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{a^2 - v_x^2}{v_x v_y + (a^2 - v_x^2)\left(m + \frac{v_x v_y}{a^2 - v_x^2}\right)}$$

lub

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{1}{\frac{2v_x v_y}{a^2 - v_x^2} + m},$$

albo wreszcie wykorzystując (16.17) —

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{1}{m - m_1 - m_2}. \qquad (16.19)$$

Wynika stąd, że dla pierwszej rodziny charakterystyk, gdzie $m = m_1$,

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2}, \qquad (16.20)$$

a dla rodziny drugiej, gdzie $m = m_2$,

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}, \qquad (16.21)$$

wobec czego $\frac{dv_y}{dv_x}$ można zapisać w postaci

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{1,2} = -\frac{1}{m_{2,1}} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,1}} \qquad (16.22)$$

lub w postaci

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{m}{m_1 m_2}. \qquad (16.23)$$

Wykorzystując równanie (16.10) dla $m = \frac{dy}{dx}$ — oraz wyrażenie (16.17) na iloczyn $m_1 m_2$, doprowadzimy równanie charakterystyk w płaszczyźnie hodografu (16.23) do postaci ostatecznej

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2}. \qquad (16.24)$$

Zanim przejdziemy do całkowania równania (16.24), poczynimy następujące uwagi.

Z równań różniczkowych (16.20)÷(16.22) wynika, że rodziny charakterystyk w płaszczyznach x, y oraz v_x, v_y są w odpowiadających sobie punktach wzajemnie prostopadłe. Na podstawie równań (16.20)÷(16.22) można istotnie napisać następujące równania:

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1$$

i

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -1.$$

Równania te wskazują, że przy takim doborze osi x i y, by były one równoległe do osi v_x i v_y, charakterystyki pierwszej rodziny są w dowolnym punkcie płaszczyzny x, y prostopadłe do charakterystyk rodziny drugiej w odpowiednim punkcie płaszczyzny v_x, v_y i odwrotnie charakterystyki rodziny drugiej w płaszczyźnie x, y są prostopadłe do charakterystyk rodziny pierwszej w płaszczyźnie v_x, v_y (rys. 16.5).

Powyższa właściwość charakterystyk ułatwia w dużym stopniu znalezienie rozwiązania podstawowego równania (16.7) i jest szeroko wykorzystywana przy jego wykreślnym całkowaniu.

Ponadto z równania (16.24) wynika, że wzdłuż charakterystyk w płaszczyźnie x, y całki równania różniczkowego (16.7) v_x i v_y spełniają równanie różniczkowe z w y c z a j n e. Istotnie, ponieważ wielkość a^2 wyrażana jest tylko przez

$v_x^2 + v_y^2 = v^2$, zatem prawa część równania (16.24) zależy tylko od v_x, v_y i nie zależy wyraźnie od x, y; dlatego też równanie (16.24) stanowi równanie różniczkowe zwyczajne o zmiennych v_x, v_y.

Wynika stąd następujący ważny wniosek: *dla dowolnych zagadnień przepływów niewirowych charakterystyki w płaszczyźnie hodografu prędkości mają zawsze jednakową postać, określoną równaniem* (16.24) *i można je obliczyć raz na zawsze*. Należy przy tym zaznaczyć, że w płaszczyźnie przepływu x, y charakterystyki, określane równaniem (16.10), będą miały dla różnych zagadnień dynamiki gazów różną postać.

Przejdźmy obecnie do całkowania równania charakterystyk (16.24) w płaszczyźnie v_x, v_y. W tym celu dokonamy zmiany zmiennych v_x, v_y na zmienne v i θ, gdzie $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ jest to wielkość prędkości, a θ — kąt nachylenia prędkości względem osi x.

Prawą część równania (16.24) łatwo jest sprowadzić do zmiennych v i θ, wychodząc z następujących zależności. Odpowiednio do równania (16.22) oraz rys. 16.4

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2} = -\operatorname{ctg}(\theta - \mu),$$

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1} = -\operatorname{ctg}(\theta + \mu),$$

czyli można równanie charakterystyk w płaszczyźnie hodografu prędkości napisać w postaci

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu). \tag{16.25}$$

Przechodząc w lewej części tego równania do nowych zmiennych v i θ,

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta,$$

$$dv_x = \cos\theta\, dv - v\sin\theta\, d\theta,$$

$$dv_y = \sin\theta\, dv + v\cos\theta\, d\theta,$$

sprowadzając otrzymane wyrażenie do wspólnego mianownika, grupując wspólne czynniki przy dv i $d\theta$, a następnie przyrównując licznik do zera otrzymamy

$$[\sin\theta + \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)\cos\theta]\, dv + [\cos\theta - \sin\theta \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)]\, v\, d\theta = 0,$$

skąd

$$d\theta = \frac{\sin\theta + \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)\cos\theta}{\sin\theta \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu) - \cos\theta}\,\frac{dv}{v}.$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej części otrzymanego równania przez $\cos\theta$ oraz zastępując $\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)$ przez $\operatorname{tg}^{-1}(\theta \mp \mu)$, otrzymamy

$$d\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}(\theta \mp \mu) + 1}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)}\,\frac{dv}{v},$$

skąd

$$d\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta - \theta \pm \mu)}\,\frac{dv}{v},$$

tzn.

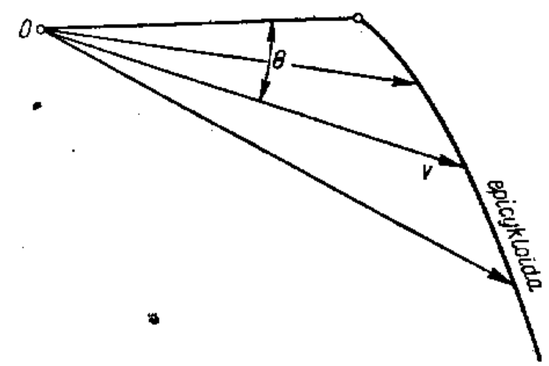
$$d\theta = \pm\frac{1}{\operatorname{tg}\mu}\,\frac{dv}{v}.$$

Jednakże

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}}.$$

i dlatego

$$d\theta = \pm\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\,\frac{dv}{v}. \tag{16.26}$$



16.6. Charakterystyka (epicykloida) w płaszczyźnie hodografu prędkości

Po wykorzystaniu zależności pomiędzy prędkością dźwięku a i prędkością przepływu v

$$a^2 = \frac{1}{2}[(k+1)a_{kr}^2 - (k-1)v^2]$$

sprowadzimy równanie (16.26) do postaci

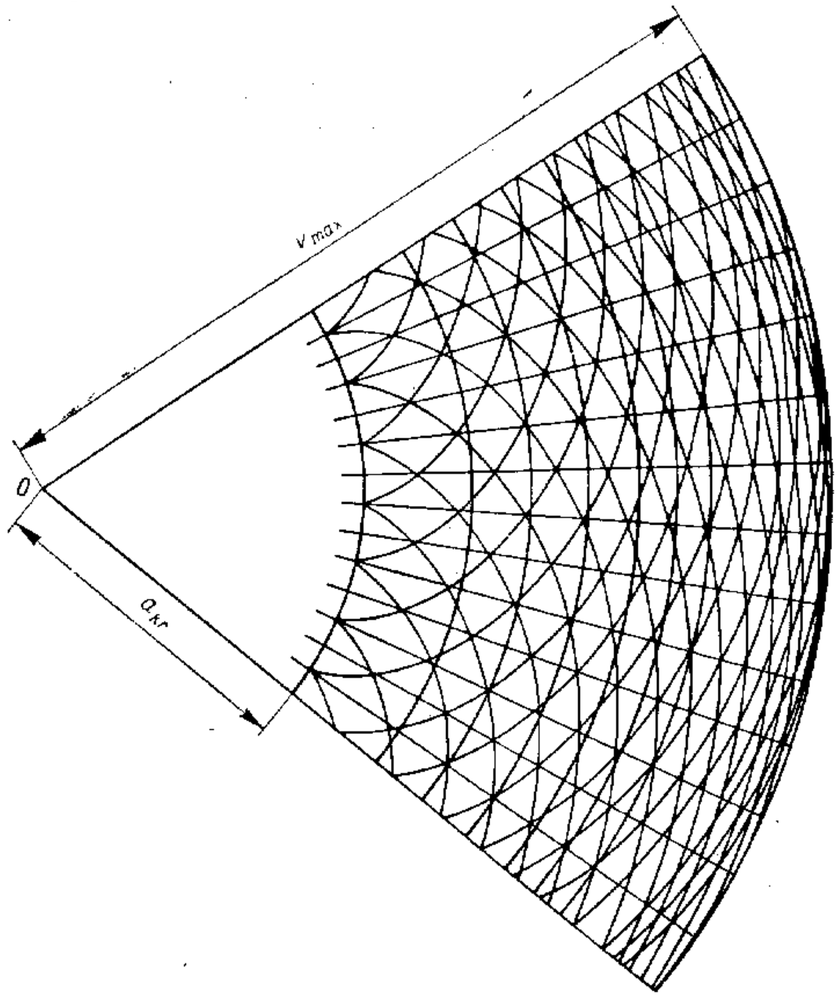
$$\theta = \pm\int\sqrt{\frac{(k+1)(v^2 - a_{kr}^2)}{(k+1)a_{kr}^2 - (k-1)v^2}}\,\frac{dv}{v} + C,$$

gdzie C jest to stała dowolna.

Całkując i wprowadzając liczbę Macha $M = \frac{v}{a}$, otrzymamy równanie charakterystyk w płaszczyźnie hodografu prędkości w postaci ostatecznej:

$$\theta = \pm\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M^2-1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{M^2-1}\right] + C. \quad (16.27)$$

Krzywe, określane równaniem (16.27), są epicykloidami (rys. 16.6). Przez każdy punkt płaszczyzny v, θ (w pierścieniu $a_{kr} \leqslant v \leqslant v_{max}$) przechodzi



16.7. Siatka charakterystyk (epicykloid) w płaszczyźnie hodografu prędkości

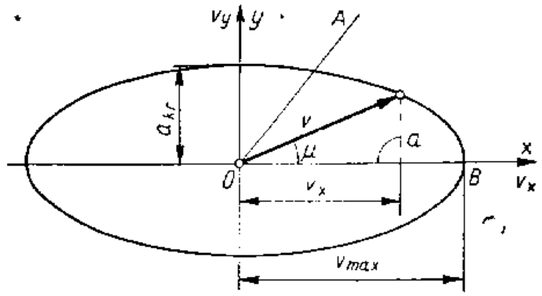
jedna epicykloida pierwszej rodziny oraz jedna epicykloida rodziny drugiej. Nadając stałej C różne wartości, można raz na zawsze wykreślić siatkę charakterystyk w płaszczyźnie hodografu (rys. 16.7), gdzie przyjęto $k = 1{,}405$ (— dla powietrza).

Z powyższego wynika, że za pomocą charakterystyk można rozwiązywać dowolne zagadnienia na warunki brzegowe dla naddźwiękowych potencjalnych przepływów gazu, jeżeli tylko znalezione zostaną charakterystyki w płaszczyźnie

x, y przepływu oraz jeżeli wykażemy, iż odpowiadają one charakterystykom w płaszczyźnie hodografu v_x, v_y. Istota rozwiązania zagadnień dynamiki gazów metodą charakterystyk polega więc na znalezieniu charakterystyk w płaszczyźnie przepływu.

§ 5. Określenie kierunku charakterystyk w płaszczyźnie przepływu gazu i w płaszczyźnie hodografu dla zadanego wektora prędkości za pomocą elipsy

Postawmy sobie za zadanie znalezienie kierunku charakterystyk w pewnym punkcie O naddźwiękowego przepływu gazu dla założonej prędkości v. Załóżmy, że styczne określające kierunek charakterystyk w płaszczyźnie przepływu w punkcie O są skierowane wzdłuż prostych OB i OA (rys. 16.8, gdzie płaszczyzny



16.8. Do określenia kierunku charakterystyk przy pomocy elipsy prędkości

przepływu x, y oraz hodografu v_x, v_y są na siebie nałożone). Obierzmy punkt O jako początek układu współrzędnych i skierujemy oś x wzdłuż linii OB. Wiadomo, że sinus kąta Macha określony jest równaniem $\sin\mu = \frac{a}{v}$. Odległość końca wektora v od prostej OB (linii Macha) jest więc równa a, czyli w tym przypadku $v_y = a$.

W rozdziale XIV wykazaliśmy, że

$$a^2 = \frac{k+1}{2}a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2}v^2.$$

Podstawiając do tego wzoru wartość $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ otrzymamy

$$a^2 = \frac{k+1}{2}a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2}(v_x^2 + v_y^2).$$

Ponieważ w rozważanym przypadku $v_y = a$, zatem

$$v_y^2 = \frac{k+1}{2}a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2}(v_x^2 + v_y^2).$$

Otwierając nawiasy otrzymamy

$$v_y^2 = \frac{k+1}{2} a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2} v_x^2 - \frac{k-1}{2} v_y^2$$

lub

$$v_y^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) = \frac{k+1}{2} a_{kr}^2 - \frac{k-1}{2} v_x^2.$$

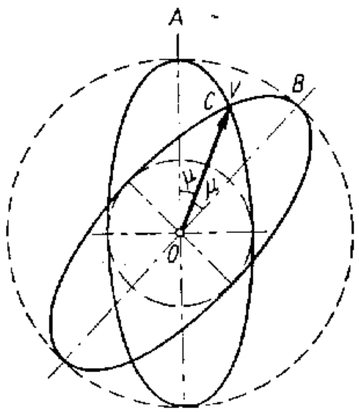
Stąd znajdujemy

$$\frac{v_x^2}{\frac{k+1}{k-1} a_{kr}^2} + \frac{v_y^2}{a_{kr}^2} = 1$$

lub

$$\frac{v_x^2}{v_{max}^2} + \frac{v_y^2}{v_{kr}^2} = 1. \qquad (16.28)$$

Otrzymanemu równaniu w płaszczyźnie v_x, v_y odpowiada elipsa, której półoś duża równa się v_{max} i jest skierowana wzdłuż linii Macha, mała zaś półoś równa się prędkości krytycznej a_{kr}. Na elipsie tej, zwanej *elipsą prędkości*, leży oczywiście koniec wektora prędkości $\bar{v}[v_x, v_y]$.



16.9. Do określania kierunku charakterystyk przy pomocy elipsy prędkości

Za pomocą elipsy prędkości można znaleźć dla założonego wektora prędkości w danym punkcie przepływu gazu kierunek linii Macha w tym punkcie. Niech v będzie prędkością w pewnym punkcie przepływu (rys. 16.9). Połączmy w płaszczyźnie v_x, v_y środek elipsy prędkości z początkiem układu współrzędnych O i obracajmy go tak długo, aż koniec wektora v trafi na elipsę. Kierunek dużej półosi elipsy będzie wówczas określał kierunek jednej z linij Macha OA lub OB. (Możliwe są oczywiście dwa położenia elipsy, przy których punkt C będzie leżał na niej, rys. 16.9).

Jak już wiemy, kierunki charakterystyk w płaszczyźnie v_x, v_y są normalne do kierunków charakterystyk w płaszczyźnie x, y.

Ponieważ kierunki linij Macha w płaszczyźnie x, y są równoległe do dużych osi rozważanej elipsy, zatem kierunki charakterystyk w płaszczyźnie v_x, v_y będą równoległe do małych osi elipsy.

§ 6. Określenie pola prędkości w płaskim potencjalnym przepływie naddźwiękowym za pomocą metody charakterystyk

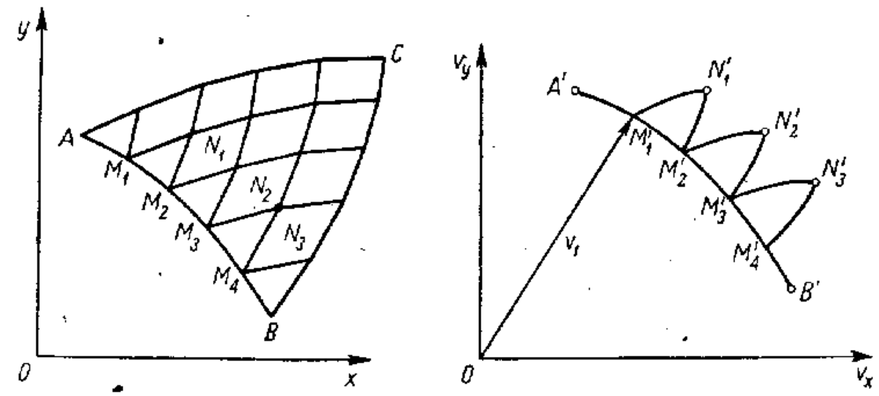
Rozważmy kilka najważniejszych zadań dotyczących określenia pola prędkości w naddźwiękowym przepływie gazu za pomocą metody charakterystyk. Umiejętność rozwiązywania tych zadań umożliwi obliczenie dowolnego pła-

kiego potencjalnego przepływu gazu z prędkością naddźwiękową (jeżeli nie istnieją powierzchnie nieciągłości).

Zadanie I

W płaszczyźnie przepływu dany jest łuk AB (nie będący charakterystyką), w którego każdym punkcie zadana jest prędkość. Należy określić prędkość w każdym punkcie obszaru ograniczonego łukiem AB oraz dwiema charakterystykami AC i BC wychodzącymi z punktu A i B i stanowiącymi charakterystyki dwóch różnych rodzin.

Równocześnie z płaszczyzną x, y rozważmy płaszczyznę v_x, v_y — płaszczyznę hodografu prędkości (rys. 16.10). Obierzmy na łuku AB szereg punktów M_1, M_2, M_3, M_4, w których prędkości v_1, v_2, v_3, v_4 są znane. Rozpatrzmy punkt



16.10. Do rozwiązania zadania I metodą charakterystyk

M_1. Ponieważ wartość prędkości $v_1[v_{1x}, v_{1y}]$ w tym punkcie jest znana, możemy w płaszczyźnie hodografu znaleźć punkt M_1' o współrzędnych (v_{1x}, v_{1y}) odpowiadający punktowi M_1. Zbiór punktów M_1, M_2, M_3, M_4 leżących na krzywej AB w płaszczyźnie hodografu będzie odpowiadał zbiorowi punktów M_1', M_2', M_3', M_4' leżących na krzywej $A'B'$. Oznacza to, że przy przesuwaniu się wzdłuż łuku AB koniec wektora v w płaszczyźnie hodografu będzie opisywał krzywą $A'B'$.

Dowiedliśmy wyżej, że jeżeli w dowolnym punkcie przepływu gazu znana jest prędkość v, wówczas za pomocą elipsy prędkości znaleźć można kierunek linij Macha. Oznacza to, że przez każdy punkt M_1, M_2, M_3, M_4 można poprowadzić elementy charakterystyk dwóch rodzin. Niech AC będzie charakterystyką rodziny drugiej, zaś BC — charakterystyką rodziny pierwszej (rys. 16.10).

Biorąc to pod uwagę, poprowadzimy z punktu M_1 element charakterystyki drugiej rodziny, a z punktu M_2 — element charakterystyki rodziny pierwszej. Elementy te przetną się w punkcie N_1. Znajdźmy prędkość w punkcie N_1 korzystając z płaszczyzny hodografu. Przesuwaniu się wzdłuż charakterystyki rodziny drugiej z punktu M_1 do punktu N_1 w płaszczyźnie hodografu będzie

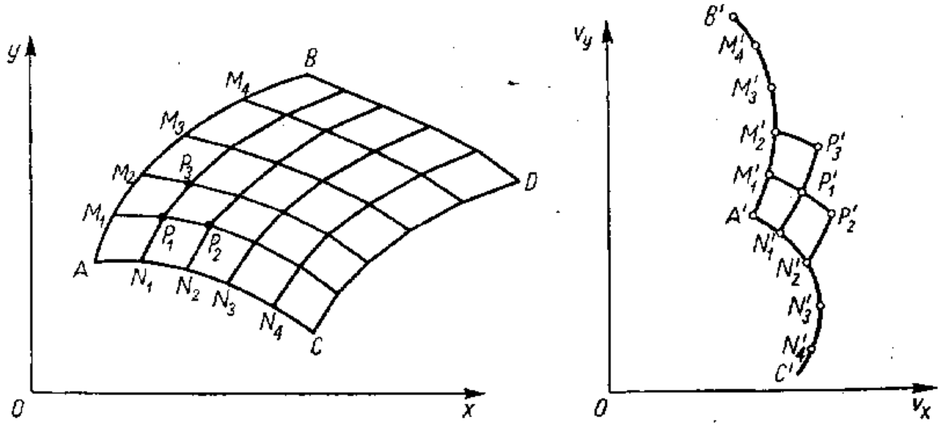
oczywiście odpowiadało przesuwanie się od punktu M_1' wzdłuż epicykloidy rodziny drugiej. Przesuwaniu się wzdłuż charakterystyki M_2N_1 rodziny pierwszej będzie odpowiadało w płaszczyźnie hodografu przesuwanie się wzdłuż epicykloidy rodziny pierwszej. Punktem ich przecięcia się będzie punkt N_1'. Współrzędne punktu N_1' określają składowe prędkości (v_{1x}', v_{1y}'), odległość zaś jego od początku układu współrzędnych — wektor v_1', tzn. prędkość w punkcie N_1.

W ten sposób można znaleźć prędkość w szeregu punktów N_1, N_2, N_3, N_4. Przyjmując punkty N_1, N_2, N_3, N_4 jako punkty początkowe oraz wykonując dla nich taką samą konstrukcję jak dla punktów M_1, M_2, M_3, M_4, można określić prędkość w kolejnych punktach płaszczyzny x, y. Kontynuując tę konstrukcję, określimy pole prędkości w całym trójkącie krzywoliniowym ograniczonym dwiema charakterystykami AC i BC.

Jeżeli zastosujemy siatki gęstsze, tzn. powiększymy liczbę punktów na początkowej krzywej AB — będziemy bliżsi ścisłego rozwiązania równania (16.7).

Zadanie II

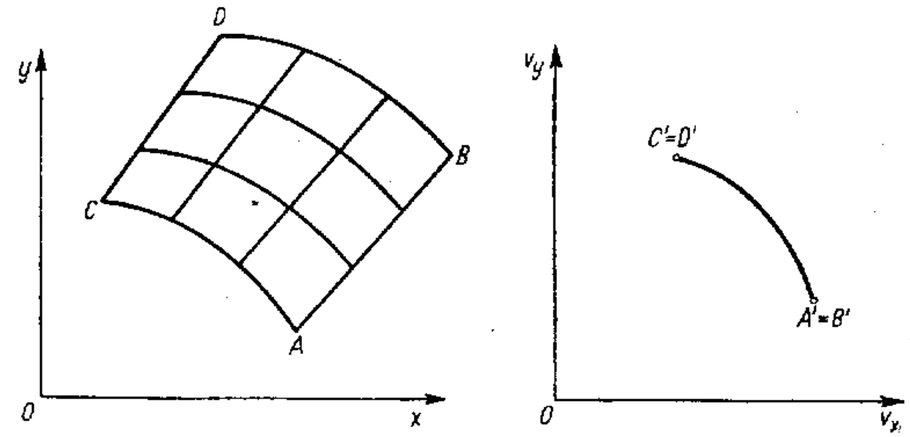
Zadane są prędkości na dwóch przecinających się charakterystykach AB i AC, należących do różnych rodzin. Należy określić pole prędkości w czworokącie krzywoliniowym, ograniczonym danymi charakterystykami oraz dwiema charakterystykami BD i CD, wychodzącymi z punktów B i C (rys. 16.11).



16.11. Do rozwiązania zadania II metodą charakterystyk

W celu wyznaczenia pola prędkości postąpimy w następujący sposób. Obierzemy szereg punktów M_1, M_2, M_3, M_4 na charakterystyce rodziny pierwszej AB, na charakterystyce zaś rodziny drugiej AC obierzemy punkty N_1, N_2, N_3, N_4. poprowadzimy z każdego punktu N_1, N_2, N_3, N_4 charakterystyki pierwszej rodziny, a z każdego punktu M_1, M_2, M_3, M_4 — charakterystyki rodziny drugiej. Charakterystyki wychodzące z punktów N_1 i M_1 dadzą w przecięciu punkt P_1. Określmy prędkość w punkcie P_1. Przesuwaniu się z punktu N_1 do punktu P_1

wzdłuż charakterystyki rodziny pierwszej odpowiada w płaszczyźnie hodografu przesuwanie się wzdłuż epicykloidy pierwszej rodziny wychodzącej z punktu N_1' (współrzędne punktu N_1' są składowymi prędkości w punkcie N_1). Przesuwaniu się z punktu M_1 do punktu P_1 wzdłuż charakterystyk rodziny drugiej odpowiada w płaszczyźnie hodografu przesuwanie się wzdłuż epicykloidy rodziny drugiej wychodzącej z punktu M_1'. Punktem ich przecięcia się będzie P_1'. Wektor, poprowadzony z początku układu współrzędnych do punktu P_1' daje prędkość v_{p1}.



16.12. Do rozwiązania szczególnego przypadku zadania II metodą charakterystyk

Poprowadzimy z punktu P_1 charakterystykę drugiej rodziny do przecięcia się z charakterystyką rodziny pierwszej, wychodzącej z punktu N_2. W przecięciu otrzymamy punkt P_2. W celu znalezienia prędkości w punkcie P_2 posłużymy się płaszczyzną hodografu. Poruszaniu się wzdłuż elementu charakterystyki P_1, P_2 rodziny drugiej odpowiada poruszanie się wzdłuż epicykloidy rodziny drugiej, wychodzącej z punktu P_1'; przesuwaniu się wzdłuż charakterystyki rodziny pierwszej, wychodzącej z punktu N_2 odpowiada przesuwanie się wzdłuż epicykloidy rodziny pierwszej, wychodzącej z punktu N_1'. Przecięcie się tych epicykloid określi punkt P_2', a zatem prędkość w punkcie P_2. W sposób analogiczny znajdziemy prędkość w punkcie P_3 itd., to znaczy pole prędkości wewnątrz czworokąta krzywoliniowego. Im gęstsza będzie siatka charakterystyk, czyli im więcej obrano punktów M_1, M_2, M_3, ..., N_1, N_2, N_3, ..., tym dokładniej określone zostanie pole prędkości.

Przypadek szczególny. Dane są dwie przecinające się charakterystyki pierwszej i drugiej rodziny AC oraz AB. Na charakterystyce rodziny drugiej AB wielkość i kierunek prędkości są stałe (rys. 16.12). Należy dowieść, że wszystkie charakterystyki rodziny drugiej są w tym przypadku prostymi.

Ponieważ na charakterystyce AB wielkość i kierunek prędkości są stałe — linia AB jest prostą. Aby dowieść, że wszystkie pozostałe charakterystyki tej samej rodziny, do której należy prosta AB, są również stałe, przejdziemy do

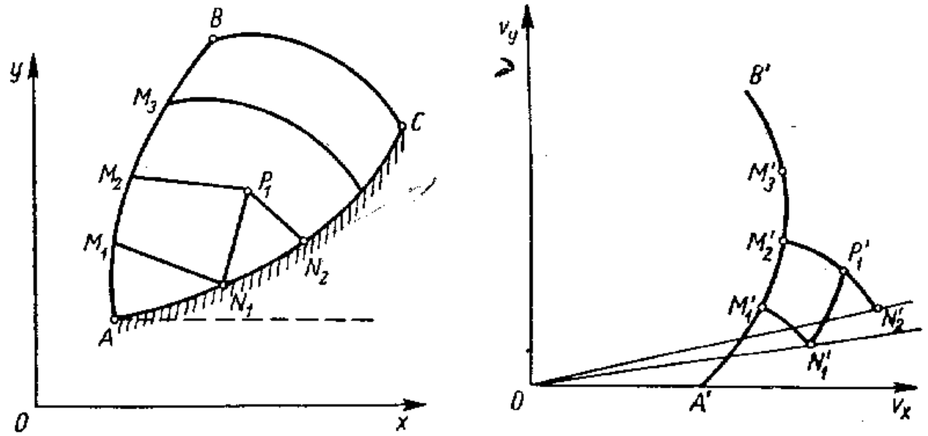
płaszczyzny hodografu v_x, v_y. Punktom prostej AB będzie oczywiście odpowiadał w płaszczyźnie hodografu jeden punkt $A' = B'$.

Charakterystykom rodziny pierwszej, w tej liczbie łukom AC i BD, będzie zatem odpowiadał jeden i ten sam łuk epicykloidy. Natomiast liniom CD (oraz każdej innej charakterystyce rodziny drugiej) odpowiada w płaszczyźnie hodografu jeden punkt — punkt przecięcia się epicykloidy odpowiadającej charakterystyce rodziny pierwszej, z epicykloidą odpowiadającą CD (tzw. zdegenerowany hodograf—przyp. tłum.). Wyciągamy stąd wniosek, że wszystkie charakterystyki rodziny drugiej są liniami prostymi.

Zadanie III

Prędkości są dane wzdłuż łuku AB charakterystyki, punkt zaś A leży na sztywnej ściance AC. Należy określić pole prędkości w obszarze, ograniczonym łukiem AB, sztywną ścianką AC oraz łukiem BC charakterystyki rodziny drugiej (rys. 16.13).

Będziemy uważali, że w punkcie A, leżącym na sztywnej ściance, prędkość[1] jest równoległa do osi x. W tym przypadku w płaszczyźnie hodografu punkt A' będzie leżał na osi v_x.



16.13. Do rozwiązania zadania III metodą charakterystyk

Obierzmy na charakterystyce AB szereg punktów M_1, M_2, M_3, w których prędkości są znane. W płaszczyźnie hodografu będą im odpowiadały punkty M_1', M_2', M_3', rozmieszczone na epicykloidzie $A'B'$. Poprowadzimy przez punkt M_1 charakterystykę drugiej rodziny do przecięcia się ze ścianką w punkcie N_1. Elementowi M_1N_1 będzie odpowiadał łuk epicykloidy $M_1'N_1'$, przy czym położenie punktu N_1' nie jest na razie znane. W celu jego znalezienia poprowadzimy z punktu O w płaszczyźnie hodografu prostą, tworzącą z osią v_x taki sam kąt, jaki tworzy z osią x wektor prędkości w punkcie N_1 ścianki. Punkt przecięcia się tej prostej z łukiem epicykloidy określi wówczas punkt N_1'. Współrzędne tego punktu są składowymi prędkości w punkcie N_1 ścianki. Poprowadzimy

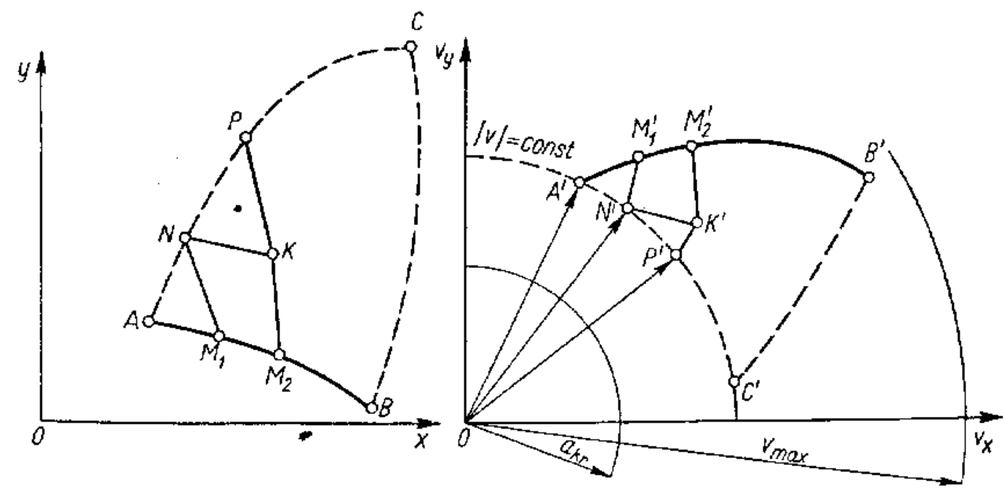
[1] Styczna do ścianki A.

z punktu M_2 charakterystykę drugiej rodziny, a z punktu N_1 — charakterystykę rodziny pierwszej. W przecięciu otrzymamy punkt P_1. Prędkość w punkcie P_1 będzie określona przez punkt przecięcia łuków epicykloid poprowadzonych z punktów M_2' i N_1'. Poprowadzimy następnie charakterystykę z punktu P_1 do przecięcia się ze ścianką w punkcie N_2. Odpowiednio przedłużymy w płaszczyźnie hodografu epicykloidę $M_2'P_1'$. Na tej epicykloidzie powinien znajdować się punkt N_2'. W celu znalezienia go poprowadzimy prostą z początku układu współrzędnych, równoległą do wektora prędkość w punkcie N_2 sztywnej ścianki, do przecięcia się z epicykloidą. Znajdziemy w ten sposób punkt N_2', tzn. określimy wielkość prędkości w punkcie N_2 itd.

Powtarzając opisane postępowanie można określić pole prędkości wewnątrz trójkąta krzywoliniowego ABC.

Zadanie IV

Dane są prędkości wzdłuż charakterystyki AB (która należy na przykład do rodziny drugiej) oraz wiadomo, że punkt A leży na swobodnej granicy przepływu[1]. Należy znaleźć kształt swobodnej granicy AC oraz rozkład prędkości w obszarze leżącym między zadaną charakterystyką AB, swobodną granicą AC i charakterystyką pierwszej rodziny BC przechodzącą przez punkt B (rys. 16.14).



16.14. Do rozwiązania zadania IV metodą charakterystyk

W celu rozwiązania powyższego zadania obierzemy na charakterystyce AB szereg punktów M_1, M_2 itd. Następnie wykorzystamy okoliczność, że na poszukiwanej swobodnej granicy AC wielkość ciśnienia p jest wszędzie jednakowa. Wynika stąd, że również wielkość prędkości v dla wszystkich punktów granicy swobodnej będzie — zgodnie z równaniem Bernoulliego — jednakowa.

[1] Na przykład na granicy strumienia swobodnego wypływającego z dyszy (przyp. tłum.).

Poprowadzimy przez punkt A element prostej skierowanej wzdłuż znanej w punkcie A prędkości; element ten będziemy traktowali jako element poszukiwanej swobodnej granicy przechodzącej przez punkt A.

Z punktu M_1 poprowadzimy charakterystykę pierwszej rodziny do przecięcia się z tym elementem swobodnej granicy w punkcie N. Aby otrzymać w płaszczyźnie hodografu prędkości odpowiedni punkt N', który będzie określał kierunek prędkości w punkcie N, poprowadzimy z punktu M_1', leżącego na epicykloidzie $A'M'$ charakterystykę do przecięcia się z okręgiem $v = \text{const} = v_A$.

Punkt przecięcia się charakterystyki wychodzącej z punktu M_1' z tym okręgiem, tzn. punkt N_1', będzie właśnie określał kierunek prędkości w punkcie N, leżącym na swobodnej granicy przepływu.

Po określeniu prędkości w punkcie N przedłużamy swobodną granicę odcinkiem prostej, skierowanej wzdłuż prędkości w punkcie N, tzn. równolegle do ON'.

Następnie znajdujemy kierunek prędkości w punkcie P, znajdując uprzednio prędkość w punkcie K stanowiącym przecięcie się dwóch charakterystyk NK i M_2K (zadanie II).

Powtarzając opisane postępowanie znajdziemy kształt poszukiwanej granicy swobodnej $ANP...C$ oraz pole prędkości w obszarze $AN...CBA$.

§ 7. Naddźwiękowy opływ wypukłego naroża (opływ Prandtla—Meyera)[1]

Załóżmy, że naddźwiękowy strumień gazu o prędkości v_1 płynie wzdłuż prostoliniowej ścianki AO (rys. 16.15a). W punkcie O ścianka zmienia kierunek i tworzy z kierunkiem początkowym kąt θ_2.

Za punktem O następuje odchylenie strumienia, który porusza się następnie równolegle do ścianki OC z prędkością v_2. Ponieważ przy opływie wypukłego naroża strumień naddźwiękowy rozpręża się — prędkość v_2 będzie większa od prędkości v_1.

Wierzchołek kąta, tzn. punkt O, stanowi źródło powstawania w przepływie gazu małych zaburzeń rozchodzących się z prędkością dźwięku. Poprowadzimy z tego punktu linię Macha OB odpowiadającą prędkości v_1 niezakłóconego przepływu jednostajnego, tzn. pod kątem

$$\sin \mu_1 = \frac{1}{M_1}.$$

Z tego samego punktu poprowadzimy w myśli charakterystykę styczną w punkcie O do linii OB. Ponieważ charakterystyka ta oddziela obszar przepływu niezakłóconego od obszaru zakłóconego, zatem wielkość i kierunek prędkości są na niej stałe i równe v_1. Wynika stąd, że w płaszczyźnie hodografu charakterystyce tej odpowiada jeden punkt epicykloidy, a zatem w płaszczyźnie przepływu charakterystyka ta jest prostą. Ponieważ jednak, zgodnie z warunkiem, owa prosta jest styczna do linii Macha OB w punkcie O — wynika stąd, że prosta OB jest właśnie charakterystyką. Biorąc pod uwagę wynik zadania II (str. 411) wyciągamy wniosek, że wszystkie charakterystyki, wychodzące z punktu O oraz należące do tej samej rodziny, są prostymi.

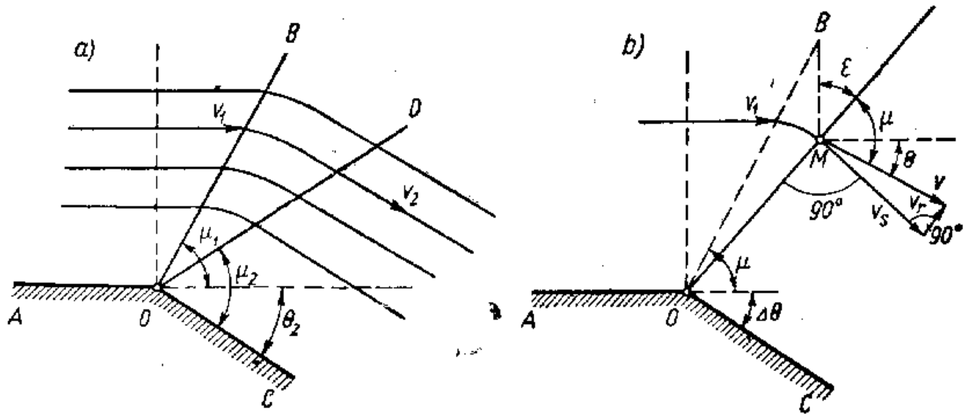
[1] Tak zwany przepływ Prandtla—Meyera, będący przykładem fali prostej — falą o prostoliniowych charakterystykach jednej rodziny i zdegenerowanym hodografie. Fale proste występują zawsze w obszarze sąsiadującym z przepływem jednostajnym (przyp. tłum.).

Prostoliniowa charakterystyka OD, nachylona do kierunku prędkości v_2 pod kątem

$$\sin \mu_2 = \frac{1}{M_2},$$

ogranicza obszar zakłóceń od jednostajnego przepływu z prędkością v_2 wzdłuż ścianki OC.

Wewnątrz obszaru zakłóceń, utworzonego przez dwie krańcowe charakterystyki OB i OD, przepływ gazu nie będzie jednostajny. W obszarze tym będzie zachodziło odchylenie strumienia oraz zakrzywienie linij prądu.



16.15. Naddźwiękowy opływ wypukłego naroża

Wykażemy, że dla rozważanego przypadku łatwo jest znaleźć wszystkie parametry przepływu naddźwiękowego wewnątrz obszaru BOD.

W tym celu wprowadzimy współrzędne biegunowe r, ε, obierając początek układu współrzędnych w punkcie 0. Kąt ε będziemy liczyli od linii pionowej w prawo (rys. 16.15). Wprowadzimy odpowiednio składowe prędkości w kierunku promienia wodzącego v_r oraz w kierunku prostopadłym do promienia: v_s.

Obydwie te składowe będą oczywiście zależały jedynie od kąta biegunowego ε, tzn.

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_r(\varepsilon), \\ v_s &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = v_s(\varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

gdzie φ oznacza potencjał prędkości.

W celu znalezienia składowych prędkości v_r i v_s wykorzystamy równanie energii w postaci

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{v_r^2 + v_s^2}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{16.30}$$

Wyrażenie na v_s można w rozpatrywanym przypadku zapisać w następującej postaci:

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = a = \sqrt{k\frac{p}{\varrho}}, \tag{16.31}$$

ponieważ składowa prędkości w kierunku prostopadłym do linii Macha jest zawsze równa prędkości dźwięku. Wynika stąd, że

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{k}v_s^2. \tag{16.32}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right),$$

więc wykorzystując równanie (16.29)

$$\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial r}(rv_s) = v_s + r\frac{\partial v_s}{\partial r}$$

oraz uwzględniając fakt, że składowa prędkości v_s nie zależy od promienia r, można napisać następujące równanie:

$$v_s = \frac{dv_r}{d\varepsilon}. \tag{16.33}$$

Uwzględniając równania (16.32) i (16.33), można zatem napisać stosunek ciśnienia do gęstości, wchodzący do równania (16.30), w postaci:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{k}\left(\frac{dv_r}{d\varepsilon}\right)^2. \tag{16.34}$$

Podstawiając wyrażenie na $\frac{p}{\varrho}$ oraz na prędkość v_s odpowiednio z równań (16.34) i (16.33), doprowadzimy równanie (16.30) do postaci

$$\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{dv_r}{d\varepsilon}\right)^2 + v_r^2 = v_{\max}^2$$

lub

$$\frac{dv_r}{\sqrt{v_{\max}^2 - v_r^2}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,d\varepsilon.$$

Całkując to równanie, otrzymamy

$$v_r = v_{\max}\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varepsilon + \varepsilon_0)\right], \tag{16.35}$$

gdzie ε_1 jest to stała całkowania. Wprowadzając oznaczenie

$$\varepsilon + \varepsilon_0 = \varepsilon_*, \tag{16.36}$$

można równanie (16.35) napisać tak:

$$v_r = v_{\max}\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right]. \tag{16.37}$$

Uwzględniając równanie (16.33), łatwo jest znaleźć drugą składową prędkości:

$$v_s = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,v_{\max}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right]. \tag{16.38}$$

Po określeniu składowych v_r i v_s można znaleźć również potencjał prędkości φ dla rozważanego przepływu:

$$\varphi = \int_0^r v_r\,dr = v_{\max}r\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right]. \tag{16.39}$$

Znajdźmy teraz wyrażenie na ciśnienie.

Z równań (16.31) i (16.38) wynika, że

$$p = \frac{\varrho}{k}v_s^2 = \frac{\varrho}{k}\frac{k-1}{k+1}v_{\max}^2\cos^2\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right]. \tag{16.40}$$

Ponieważ przepływ jest izentropowy, więc

$$\varrho = \varrho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{oraz} \quad v_{\max}^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\varrho_0},$$

gdzie p_0 i ϱ_0 oznaczają wartości ciśnienia i gęstości gazu przy prędkości $v = 0$, i można równanie (16.40) przepisać w następującej ostatecznej postaci:

$$p = p_0\left[\frac{2}{k+1}\cos^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{16.41}$$

Otrzymane wyrażenie na ciśnienie w rozpatrywanym naddźwiękowym przepływie gazu wskazuje, że w celu liczbowego określenia ciśnienia p wystarczy znać ciśnienie spiętrzenia oraz wartość kąta ε_*.

Podamy obecnie równanie linij prądu na odcinku, na którym przepływ zmienia kierunek.

Równanie linij prądu można otrzymać wychodząc z warunku, że masowy wydatek gazu m między dowolną linią prądu i ścianką jest wielkością stałą (rys. 16.15a). Dla dowolnej linii prądu napiszemy

$$m = \varrho v_s r = \text{const}$$

lub

$$r = \frac{m}{\varrho v_s},$$

gdzie r oznacza promień biegunowy punktów tej linii prądu. Biorąc pod uwagę, że przepływ jest izentropowy, otrzymamy

$$r = \frac{m}{v_s}\frac{1}{\varrho_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wprowadzając do tego równania prędkość v_s ze wzoru (16.38) oraz ciśnienie p ze wzoru (16.41), otrzymamy poszukiwane równanie linii prądu w następującej postaci:

$$r = \frac{C}{\left[\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varepsilon_*\right]^{\frac{k+1}{k-1}}}, \tag{16.42}$$

gdzie C — stała, różna dla różnych linij prądu.

Ustalimy zależność między kątami θ i ε (rys. 16.15b), gdzie θ — kąt między kierunkiem przepływu niezakłóconego a kierunkiem przepływu na obranej linii prądu w punkcie M; ε — kąt między linią pionową i linią Macha OM. Przez μ oznaczymy bieżący kąt między kierunkiem linii Macha OM a kierunkiem przepływu w punkcie M.

Możemy łatwo stwierdzić, że w danym przypadku słuszne jest równanie

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{v_s}{v_r}. \tag{16.43}$$

Z rysunku 16.15b wynika, że

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon$$

lub uwzględniając równanie (16.36)

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \theta_* - \varepsilon_*, \tag{16.44}$$

przy czym

$$\theta_* = \theta + \varepsilon_0. \tag{16.45}$$

Wracając do równania (16.43) oraz podstawiając do niego zamiast μ jego wartość z równania (16.44), zamiast prędkości v_s — jej wartość z równania (16.38) oraz zamiast prędkości v_r — jej wartość z równania (16.37), otrzymamy następujące równanie:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_* - \varepsilon_*\right) = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varepsilon_*\right), \tag{16.46}$$

które określa zależność między kątami θ_* i ε_*.

Zakładając we wzorach (16.37) i (16.38) kąt $\varepsilon_* = 0$, otrzymamy

$$v_r = 0 \quad \text{oraz} \quad v_s = v_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = v_{\text{kr}},$$

skąd wynika, że w przypadku, gdy wzdłuż ścianki AO naroża prędkość przepływu niezakłóconego jest ściśle równa prędkości dźwięku, czyli przy $M_1 = 1$, kąt $\varepsilon_* = 0$.

Z zależności (16.46) wynika, że przy $\varepsilon_* = 0$ również $\theta_* = 0$. Stąd wniosek że wszystkie otrzymane powyżej równania, zawierające wielkość ε_* lub θ_*, odpowiadają przypadkowi, gdy przepływ niezakłócony wzdłuż ścianki AO wypukłego naroża ma prędkość dźwięku.

Tablica 16.1

θ°_*	ε°_*	μ°	M	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$
0	0	90	1	0,527	0,832
1	23,72	67,28	1,084	0,477	0,808
5	42,34	52,66	1,258	0,381	0,757
10	55,84	44,16	1,435	0,298	0,706
15	66,53	38,47	1,608	0,233	0,657
20	75,74	34,26	1,779	0,179	0,609
25	84,20	30,80	1,954	0,137	0,564
30	92,12	27,88	2,135	0,104	0,520
35	99,67	25,33	2,339	0,075	0,474
40	106,88	23,12	2,550	0,054	0,432
45	113,89	21,11	2,778	0,038	0,390
50	120,71	19,29	3,021	0,027	0,351
54	126,04	17,97	3,250	0,019	0,319
129,32	219,32	0,00	∞	0,000	0,000

W tablicy 16.1 podano zależność między kątami θ_* i ε_* oraz wartości kątów μ (określane wzorem 16.44), liczby Macha, stosunki ciśnień $\frac{p}{p_0}$ (określane wzorem 16.41) i stosunki temperatur $\frac{T}{T_0}$ (określone na podstawie ogólnych zależności dla przepływów izentropowych).

Jak już wskazywaliśmy i jak to widać z tablicy 16.1, parametrom początkowym $\theta_* = 0$ oraz $\varepsilon_* = 0$ odpowiada przepływ czysto dźwiękowy ($M_1 = 1$). Za pomocą tej tablicy można jednak obliczyć także naddźwiękowy opływ wypukłego naroża, gdy $M_1 > 1$.

W tym celu należy postąpić w następujący sposób:

1. Znając liczbę Macha M_1 dla przepływu wzdłuż ścianki AO, znajdujemy według tabl. 16.1 fikcyjny kąt odchylenia θ_{*f}, o jaki powinien odchylić się przepływ dźwiękowy, aby osiągnąć założoną wartość M_1.

2. Dodając do znalezionej wartości θ_{*f} kąt θ_2 odchylenia przepływu (rys. 16.15a), znajdujemy kąt

$$\theta_* = \theta_{*f} + \theta_2,$$

odpowiadający sumarycznemu odchyleniu przepływu dźwiękowego.

3. Według znalezionej wartości θ_* określimy z tej samej tablicy poszukiwane parametry przepływu wzdłuż ścianki OC naroża:

$$M_2, \quad \frac{p_2}{p_0}, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_0}, \quad \frac{T_2}{T_0}.$$

Można również określić linie prądu ze wzoru (16.42), zakładając wielkość C oraz szereg wartości $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

Rozdział XVII

TEORIA SKOŚNEJ FALI UDERZENIOWEJ

§ 1. Pojęcie skośnej fali uderzeniowej

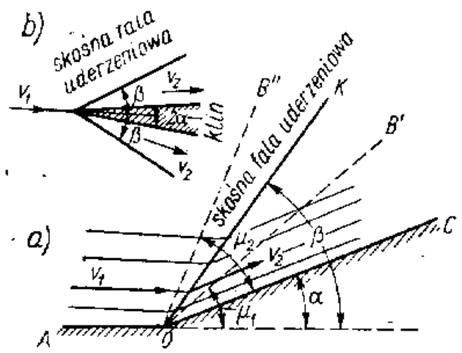
W rozdziale XV zaznaczaliśmy wielokrotnie, że we wszystkich przypadkach, gdy zachodzi większy lub mniejszy spadek prędkości naddźwiękowego przepływu gazu, w przepływie tym powstają powierzchnie, na których parametry gazu zmieniają się w sposób nieciągły (skokami).

Powierzchnia nieciągłości, która tworzy z kierunkiem przepływu kąt prosty, nazywa się falą prostopadłą. Jeżeli natomiast powierzchnia fali uderzeniowej jest do przepływu niezakłóconego nachylona pod kątem różnym od kąta prostego, wówczas fala uderzeniowa nazywa się *skośną*.

W rozdziale niniejszym omówimy teorię płaskiej skośnej fali uderzeniowej.

W celu zaznajomienia się z płaską skośną falą uderzeniową rozważymy naddźwiękowy opływ naroża AOC (rys. 17.1a), którego kąt jest mniejszy od 180°.

Załóżmy, że ścianka AO, wzdłuż której przepływa gaz z naddźwiękową prędkością v_1, tworzy ze ścianką OC pewien kąt α. Gaz opływający ściankę AO powinien oczywiście odchylić się o kąt α, ponieważ nowy kierunek przepływu v_2 powinien być równoległy do ścianki OC.



17.1. Przepływ naddźwiękowy wewnątrz wklęsłego naroża

Wykażemy, że takiej zmianie kierunku przepływu naddźwiękowego towarzyszy zawsze zakłócenie ciągłości przepływu, czyli powstanie skośnej fali uderzeniowej.

Pragnąc określić kierunek linii Macha w punkcie O, zwracamy uwagę, że przez punkt O można poprowadzić dwie takie linie: linię OB' pod kątem μ_1 względem początkowego kierunku przepływu v_1 oraz linię OB'' pod kątem μ_2 względem kierunku przepływu v_2, przy czym $\mu_2 > \mu_1$. W tym przypadku jednak zmiana parametrów gazu powinna zakończyć się na linii Macha OB'' leżącej w obszarze, w którym zmiany parametrów gazu faktycznego jeszcze nie nastąpiły. Wynika stąd, że w rozważanym przypadku ciągła zmiana parametrów gazu jest niemożliwa, wobec czego musi wystąpić fala uderzeniowa. Doświadczenie wy-

kazuje, że przy niewielkich wartościach kąta odchylenia przepływu α fala uderzeniowa jest pewną prostą OK leżącą pomiędzy omówionymi wyżej liniami Macha OB' i OB''.

Kierunek skośnej fali uderzeniowej OK będziemy określali kątem β liczonym od początkowego kierunku przepływu z prędkością v_1.

Przy naddźwiękowym opływie ciał o ostrych krawędziach (klinów) powstają również skośne fale uderzeniowe, tzn. fale, których powierzchnia tworzy z kierunkiem przepływu niezakłóconego kąt ostry β (rys. 17.1b).

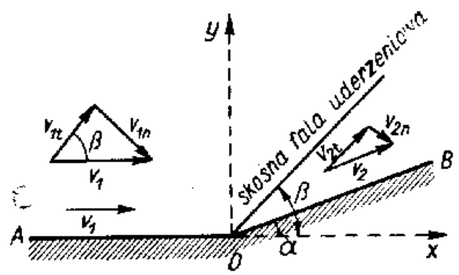
Wykażemy, że największe zmniejszenie prędkości i zwiększenie ciśnienia wystąpi przy prostopadłej fali uderzeniowej ($\beta = 90°$). Jak wiadomo, w tym przypadku prędkość przepływu za falą uderzeniową jest zawsze poddźwiękowa. Natomiast w przypadku fali skośnej prędkość za nią może być zarówno poddźwiękowa, jak i naddźwiękowa — zależnie od wielkości kąta β.

Przejdziemy teraz do określenia parametrów przepływu za skośną falą uderzeniową.

§ 2. Określenie parametrów gazu za skośną falą uderzeniową

Zaczniemy od określenia prędkości za skośną falą uderzeniową.

Rozłożymy wektor prędkości v_1 przed czołem fali na dwie składowe (rys. 17.2): v_{1n} — w kierunku prostopadłym do płaszczyzny fali oraz v_{1t} — w kierunku równoległym do niej. Analogicznie rozłożymy prędkość v_2 za czołem fali uderzeniowej na składowe v_{2n}, v_{2t}. Do znalezienia prędkości za czołem fali wykorzystamy równania ciągłości (wydatku), ilości ruchu, energii oraz stanu gazu.



17.2. Do obliczania skośnej fali uderzeniowej

Równanie ciągłości zapiszemy w tym przypadku w następującej postaci:

$$\varrho_1 v_{1n} = \varrho_2 v_{2n}. \tag{17.1}$$

Zasadę ilości ruchu, zastosowaną do składowych w kierunku prostopadłym do powierzchni fali uderzeniowej, można napisać w takiej samej postaci jak dla prostopadłej fali uderzeniowej, z tą różnicą jedynie, że zamiast prędkości v_1 i v_2 będą w równaniu figurowały ich składowe normalne, tzn.

$$p_2 - p_1 = \varrho_1 v_{1n}(v_{1n} - v_{2n}). \tag{17.2}$$

Zastosujemy z kolei zasadę ilości ruchu do składowych w kierunku równoległym do powierzchni fali uderzeniowej. Ponieważ wzdłuż powierzchni fali ciśnienie nie ulega zmianie, zatem

$$\varrho_1 v_{1n}(v_{1t} - v_{2t}) = 0,$$

skąd

$$v_{1t} = v_{2t} = v_t, \tag{17.3}$$

czyli składowa styczna prędkości nie ulega zmianie przy przejściu gazu przez powierzchnię skośnej fali uderzeniowej. Na powierzchni skośnej fali uderzeniowej jest zatem nieciągła tylko składowa normalna prędkości przepływu. Pozwala to traktować skośną falę uderzeniową jako falę prostopadłą w odniesieniu do normalnej składowej prędkości (rys. 17.2).

Traktując skośną falę uderzeniową jako falę prostopadłą w odniesieniu do prędkości v_{1n} i v_{2n}, napiszemy wyrażenie na całkowitą energię gazu w kierunku prostopadłym do powierzchni fali uderzeniowej:

$$\frac{k}{k-1} R T_0' = \frac{k}{k-1} R T_0 - \frac{v_t^2}{2g} = \frac{1}{2g}(v_{\max}^2 - v_t^2).$$

Wówczas prędkość krytyczna dla tego samego kierunku

$$a_{\mathrm{kr}}'^2 = \frac{2kgR}{k+1} T_0' = \frac{2kgR}{k+1}\left(T_0 - \frac{k-1}{2kgR} v_t^2\right) = a_{\mathrm{kr}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_t^2 = \frac{k-1}{k+1}(v_{\max}^2 - v_t^2).$$

Stosując wzór (15.23) dla prostopadłej fali uderzeniowej do prędkości v_{1n} i v_{2n}, otrzymamy

$$v_{1n} v_{2n} = a_{\mathrm{kr}}'^2 = a_{\mathrm{kr}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_t^2 \tag{17.4}$$

lub

$$v_{1n} v_{2n} = \frac{k-1}{k+1}(v_{\max}^2 - v_t^2). \tag{17.5}$$

Równania (17.4) i (17.5) umożliwiają określenie prędkości za czołem skośnej fali uderzeniowej.

Po określeniu prędkości za czołem skośnej fali uderzeniowej znajdziemy wszystkie pozostałe parametry gazu: p_2, ϱ_2, T_2 za czołem fali. W tym celu należy po prostu we wzorach (15.15) i (15.17) dla prostopadłej fali uderzeniowej, wyprowadzonych w rozdziale XV, zastąpić liczbę Macha $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$ liczbą

$$M_1' = M_1 \sin\beta = \frac{v_1}{a_1}\sin\beta = \frac{v_{1n}}{a_1}.$$

W wyniku otrzymamy

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1'^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{k+1}, \tag{17.6}$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta}{\frac{2}{k-1} + M_1^2 \sin^2 \beta}, \tag{17.7}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{4k-(k-1)^2}{(k+1)^2}. \tag{17.8}$$

Równanie adiabaty uderzeniowej dla skośnej fali pozostanie oczywiście takie samo jak dla fali prostopadłej, ponieważ nie wchodzą do niego ani prędkości, ani wielkość entalpii spiętrzenia:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho_1}{(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}. \tag{17.9}$$

§ 3. Związek pomiędzy kątem odchylenia przepływu naddźwiękowego a położeniem skośnej fali uderzeniowej

Wzory paragrafu poprzedniego wykazują, że wszystkie parametry gazu za czołem skośnej fali uderzeniowej zależą od kąta β nachylenia czoła fali względem kierunku przepływu niezakłóconego. W paragrafie niniejszym ustalona zostanie zależność kąta β pochylenia czoła fali uderzeniowej od kąta α odchylenia przepływu naddźwiękowego.

Na podstawie rys. 17.2 napiszemy

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{v_{2n}}{v_t}$$

lub wykorzystując równanie (17.4):

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{a_{kr}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_t^2}{v_{1n} v_t}.$$

Ponieważ (rys. 17.2)

$$v_{1n} = v_1 \sin \beta,$$
$$v_t = v_1 \cos \beta,$$

więc

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{a_{kr}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2 \beta}{v_1^2 \sin \beta \cos \beta}. \tag{17.10}$$

Podzielimy licznik i mianownik równania (17.10) przez kwadrat prędkości dźwięku a_1^2 oraz wprowadzimy liczbę Macha $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$. Wówczas otrzymamy

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\frac{a_{kr}^2}{a_1^2} - \frac{k-1}{k+1} M_1^2 \cos^2 \beta}{M_1^2 \sin \beta \cos \beta}. \tag{17.11}$$

Ponieważ

$$\frac{a_{kr}^2}{a_1^2} = \frac{T_{kr}}{T_1} = \frac{T_{kr}}{T_0}\frac{T_0}{T_1} = \frac{2}{k+1}\frac{T_0}{T_1}$$

oraz

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2,$$

zatem

$$\frac{a_{kr}^2}{a_1^2} = \frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right).$$

Podstawiając wyrażenie na $\frac{a_{kr}^2}{a_1^2}$ do wzoru (17.11), otrzymamy

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) - \frac{k-1}{k+1} M_1^2 \cos^2 \beta}{M_1^2 \sin \beta \cos \beta}$$

lub po przekształceniu

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{2 + (k-1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(k+1) M_1^2 \sin \beta \cos \beta}. \tag{17.12}$$

Wykorzystując równanie

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

otrzymujemy

$$\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{2 + (k-1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(k+1) M_1^2 \sin \beta \cos \beta},$$

skąd

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{1 + M_1^2\left(\frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta\right)}. \tag{17.13}$$

Na rysunku 17.3 podane są krzywe przedstawiające zależność kąta pochylenia fali uderzeniowej β pod kątem odchylenia przepływu α, obliczane na podstawie równania (17.13).

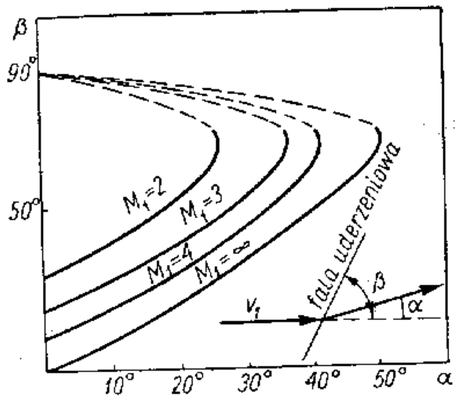
Z równania (17.13) wynika, że kąt odchylenia przepływu równa się zeru w dwóch przypadkach:

a. gdy $M_1^2 \sin^2\beta - 1 = 0$, czyli gdy

$$\sin\beta = \frac{a_1}{v_1} = \frac{1}{M_1} = \sin\mu.$$

Jak wiadomo, w tym przypadku natężenie fali uderzeniowej jest nieskończenie małe, tzn. fala uderzeniowa przekształca się w linię Macha (słabej nieciągłości);

b. gdy $\operatorname{ctg}\beta = 0$ lub $\beta = \frac{\pi}{2}$, tzn. przy fali prostopadłej.



17.3. Zależność pomiędzy kątami α pochylenia fali uderzeniowej a kątami β odchylenia przepływu przy różnych liczbach Macha M_1

Z rysunku 17.3 wynika również, że dla każdej liczby Macha M_1 istnieje maksymalna wartość kąta odchylenia przepływu α, o jaki przepływ naddźwiękowy może się odchylić po przejściu przez czoło skośnej fali uderzeniowej.

Wreszcie — z rys. 17.3 wynika, że przy danej liczbie Macha M_1 oraz przy jednakowym kącie odchylenia przepływu możliwe są dwa położenia czoła fali uderzeniowej, scharakteryzowane przez kąt β. Doświadczenia wykazują jednak, że większe wartości kątów β nie występują w praktyce.

§ 4. Biegunowa fali uderzeniowej

Znajdźmy miejsce geometryczne końców wektorów prędkości v_2 za czołem skośnej fali uderzeniowej, tzn. znajdźmy równanie hodografu prędkości $\mathbf{v}_2$ dla założonej prędkości v_1. Oznaczając rzuty prędkości v_2 na o ie współrzędnych przez v_{2x}, v_{2y}, otrzymamy (rys. 17.2):

$$v_{2x} = v_t \cos\beta + v_{2n} \sin\beta, \tag{17.14}$$

$$v_{2y} = v_t \sin\beta - v_{2n} \cos\beta. \tag{17.15}$$

Poza tym

$$\left.\begin{aligned} v_t &= v_1 \cos\beta, \\ v_{1n} &= v_1 \sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{17.16}$$

Wykorzystując równania (17.16) oraz określając v_{2n} ze wzoru (17.4), można przekształcić wyrażenie na v_{2x} do postaci

$$v_{2x} = v_1 \cos^2\beta + \frac{a_{kr}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2\beta}{v_1} = \frac{2}{k+1} v_1 \cos^2\beta + \frac{a_{kr}^2}{v_1}, \tag{17.17}$$

skąd

$$\cos^2\beta = \frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}\right) \tag{17.18}$$

lub

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}\right). \tag{17.18'}$$

Przekształcając w sposób analogiczny wyrażenie (17.15) otrzymamy

$$v_{2y} = v_1 \cos\beta \sin\beta - \frac{a_{kr}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2\beta}{v_1 \sin\beta} \cos\beta. \tag{17.19}$$

Z równania (17.17) znajdujemy

$$v_1 (v_{2x} - v_1 \cos^2\beta) = a_{kr}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2\beta.$$

Uwzględniając powyższe równanie, można równanie (17.19) napisać tak:

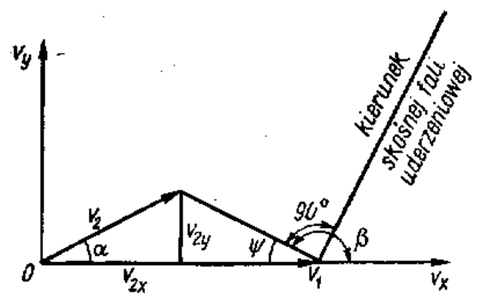
$$v_{2y} = v_1 \cos\beta \sin\beta - \frac{v_{2x} - v_1 \cos^2\beta}{\sin\beta} \cos\beta$$

lub

$$v_{2y} \sin\beta = \cos\beta\,(v_1 - v_{2x}),$$

skąd

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \tag{17.20}$$



17.4. Określenie kierunku skośnej fali uderzeniowej

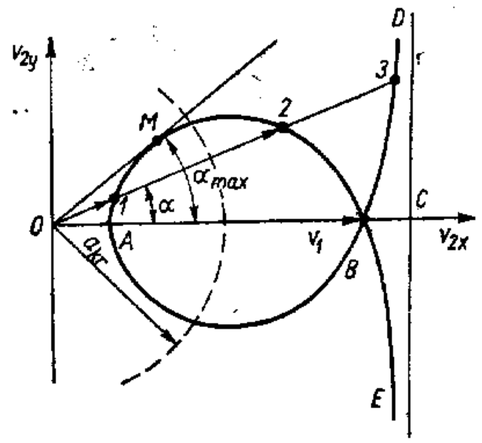
Przejdziemy do płaszczyzny hodografu prędkości v_x, v_y (rys. 17.4). Po odłożeniu wektora prędkości v_1 wzdłuż osi v_x oraz po wykreśleniu wektora prędkości v_2 połączymy końce tych wektorów prostą. Oznaczając wówczas przez ψ kąt, jaki prosta ta tworzy z osią v_x, otrzymamy

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}},$$

to znaczy

$$\operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\beta.$$

Równanie powyższe oznacza, że kąty ψ i β są kątami dopełniającymi. Wynika stąd wniosek: kierunek powierzchni skośnej fali uderzeniowej jest zawsze prostopadły do prostej, łączącej końce wektorów v_1 i v_2. Znając miejsce geometryczne końców wektora v_2, łatwo jest określić kierunek powierzchni skośnej fali uderzeniowej jako prostej, prostopadłej do linii łączącej punkty $(v_1,0)$ i (v_{2x}, v_{2y}).



17.5. Biegunowa fali uderzeniowej (strofoida)

Określimy równanie hodografu prędkości v_2. Ze wzorów (17.18) i (17.18') znajdujemy

$$\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}\right)}{1 - \frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}\right)}. \tag{17.21}$$

Z drugiej strony, ze wzoru (17.20) wynika, że

$$\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2}. \tag{17.22}$$

Porównując (17.21) i (17.22) otrzymamy

$$\frac{v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2} = \frac{\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}\right)}{\frac{2}{k+1} - \frac{v_{2x}}{v_1} + \frac{a_{kr}^2}{v_1^2}}$$

lub

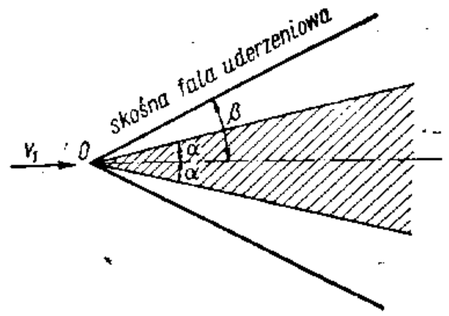
$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_{2x} - \frac{a_{kr}^2}{v_1}}{\frac{2}{k+1}v_1 - v_{2x} + \frac{a_{kr}^2}{v_1}}. \tag{17.23}$$

Krzywa, będąca wykresem funkcji (17.23), nazywa się strofoidą lub hypocycloidą (rys. 17.5); ma ona dwie gałęzie: BD i BE dążące do nieskończoności. Węzeł tej krzywej nazywany jest zwykle biegunową fali uderzeniowej[1]. Odcinek OB przedstawia prędkość v_1 przepływu przed falą uderzeniową.

[1] Lub biegunową Busemanna (przyp. tłum.).

Jeżeli zadamy kąt α odchylenia przepływu przez falę uderzeniową, wówczas prędkość za czołem fali będzie odcinkiem prostej, poprowadzonej z początku układu współrzędnych pod kątem α do wektora v_1 do przecięcia się ze strofoidą. Każdemu kątowi α odchylenia przepływu odpowiadają trzy punkty przecięcia się tej prostej ze strofoidą, czyli trzy matematycznie możliwe wartości prędkości v_2 (punkty *1*, *2* i *3* na rys. 17.5).

Można się łatwo przekonać, że punkt *3* leżący na dążącej do nieskończoności gałęzi strofoidy odpowiada rozrzedzeniowej fali uderzeniowej (ponieważ $v_2 > v_1$), a zatem te dwie gałęzie strofoidy muszą być odrzucone jako nie mające sensu fizykalnego.

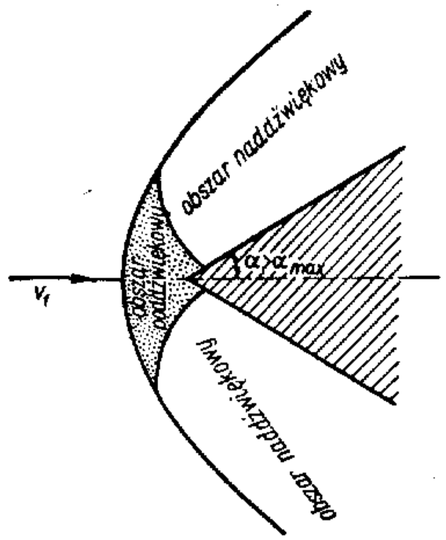


17.6. Opływ klina przy $\alpha < \alpha_{max}$

Dla danego kąta α odchylenia przepływu możliwe więc są jedynie dwie wartości prędkości v_2 za czołem skośnej fali uderzeniowej.

Aby stwierdzić, która z tych prędkości realizuje się, przytoczymy dane doświadczalne dotyczące opływu klina przy różnych kątach jego rozwarcia α.

Gdy kąt α jest dostatecznie mały, fala uderzeniowa „osiada" na ciele i wychodzi z jego ostrza (rys. 17.6) (tzw. fala związana — przyp. tłum.). Prędkość za falą uderzeniową pozostaje wówczas naddźwiękowa, następnie zaś (rys. 17.5) przy wzroście kąta α staje się poddźwiękowa (ze wzrostem kąta α koniec wektora v_2 opisuje biegunową uderzenia od punktu *2* do punktu *M*).



17.7. Opływ klina przy $\alpha > \alpha_{max}$

Spośród dwóch możliwych wartości prędkości v_2 za falą uderzeniową realizuje się przy tym zawsze tylko większa prędkość (punkt *2*), a zatem odpowiadający jej mniejszy kąt β pochylenia powierzchni fali uderzeniowej (rys. 17.6).

Natomiast jeżeli kąt klina przekracza pewną graniczną wartość kąta α_{max}, fala uderzeniowa oddala się od klina i umiejscawia się przed czołem fali (rys. 17.7), tworząc krzywoliniową falę uderzeniową (tzw. falę wysuniętą — przyp. tłum.).

Środkowa część powierzchni fali uderzeniowej jest prostopadła do wektora prędkości v_1, tzn. fala jest tu — lokalnie — falą prostopadłą.

W miarę oddalania się od klina wzdłuż fali kąty pochylenia fali uderzeniowej maleją i zbliżają się do kąta Macha.

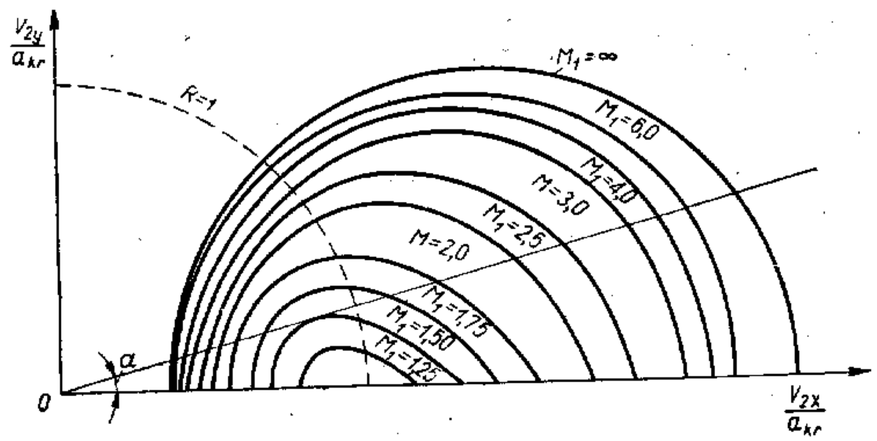
Na rozmaitych odcinkach takiej fali uderzeniowej stopień spadku prędkości przepływu (wraz z odpowiednią zmianą wszystkich pozostałych parametrów gazu) jest różny.

Wyjaśnimy obecnie, w jakich przypadkach składowa v_{2y} jest równa zeru.

Z równania (17.23) wynika, że v_{2y} równa się zeru przy dwóch wartościach v_{2x}:

1. Przy $v_1 - v_{2x} = 0$, czyli przy $v_{2x} = v_2 = v_1$. Fala uderzeniowa przechodzi przy tym w falę dźwiękową ($\beta = \mu$), tzn. w istocie swej fala uderzeniowa nie istnieje (punkt B na rys. 17.5).

2. Przy $v_{2x} - \frac{a_{kr}^2}{v_1} = 0$, czyli przy $v_{2x} = v_2 = \frac{a_{kr}^2}{v_1}$. Ta minimalna wartość v_2 odpowiada prostopadłej fali uderzeniowej (punkt A na rys. 17.5).



17.8. Biegunowe fali uderzeniowej

Na rysunku 17.8 podano rodzinę fal uderzeniowych, zbudowanych dla rozmaitych liczb Macha M_1. Dla wygody wszystkie odłożone na wykresie prędkości odniesione zostały do prędkości krytycznej a_{kr}. Okrąg o środku leżącym w początku układu współrzędnych i o promieniu $R = 1$ ($v = a_{kr}$) odgranicza oczywiście obszar prędkości poddźwiękowej za falą uderzeniową (wewnątrz okręgu) od obszaru prędkości naddźwiękowych (zewnątrz okręgu).

Wykorzystując powyższy wykres, można określić prędkość v_2 przepływu za falą uderzeniową dla rozmaitych wartości prędkości v_1 przed czołem fali oraz rozmaitych wartości kąta odchylenia przepływu α na ściance[1].

[1] Na wykres fal uderzeniowych nanoszona jest nieraz dodatkowa siatka krzywych stałej entropii, za pomocą której można wyznaczyć stratę ciśnienia $p_{2,0}/p_{1,0}$ przy odchyleniu przepływu naddźwiękowego o pewien określony kąt.

Rozdział XVIII

PODSTAWY TEORII PROFILU I TEORII PŁATA W PRZEPŁYWIE PODDŹWIĘKOWYM

§ 1. Pojęcie krytycznej liczby Macha

Jak wiemy, na płat poruszający się w strumieniu powietrza działa siła aerodynamiczna, której składowe: siła nośna Y i opór X są odpowiednio równe:

$$Y = c_y \frac{\varrho v^2}{2} S,$$

$$X = c_x \frac{\varrho v^2}{2} S.$$

Siłę nośną określa twierdzenie Żukowskiego, przy czym dla profilu płata (nieskończenie wielka rozpiętość płata — przyp. red.):

$$Y = \varrho \Gamma v,$$

a dla płata o skończonej rozpiętości:

$$Y = \varrho v \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z)\, dz.$$

Doświadczenia wykazały, że współczynniki aerodynamiczne c_y i c_x zmieniają się wraz ze wzrostem liczby Macha, czyli ze wzrostem prędkości. W przepływie cieczy nieściśliwej współczynnik oporu c_x składa się tylko z tak zwanego oporu profilowego c_{xp} oraz oporu indukowanego c_{xi}, natomiast przy ruchu ciała w gazie powstają na nim po odpowiednim wzroście prędkości przepływu fale uderzeniowe wytwarzające nowy dodatkowy opór zwany oporem falowym. W związku z tym współczynnik oporu staje się równy:

$$c_x = c_{xp} + c_{xi} + c_{xf},$$

gdzie

c_{xf} — współczynnik oporu falowego,
c_{xi} — współczynnik oporu indukowanego,
c_{xp} — współczynnik oporu profilowego.

Liczba Macha przepływu niezakłóconego, przy której w jakimkolwiek punkcie na płacie powstaje lokalna prędkość dźwięku, nazywana jest krytyczną liczbą Macha i jest oznaczana przez M_{kr}. Przy zwiększeniu prędkości lotu, czyli przy zwiększeniu liczby Macha ($M > M_{kr}$), powstaje na płacie obszar lokalnych prędkości naddźwiękowych ograniczony falami uderzeniowymi powodującymi wystąpienie oporu falowego. Krytyczna liczba Macha M_{kr} dzieli zatem wyraźnie opływ płata (w obszarze $M < 1$) na dwa przypadki.

Przypadek I. Na płacie nie występują lokalne prędkości dźwięku. W tym przypadku

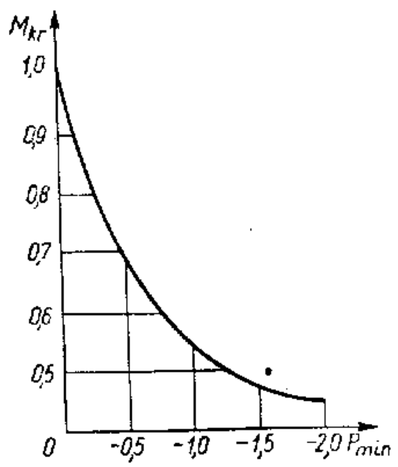
$$M < M_{kr}.$$

Przypadek II. Prędkość niezakłóconego przepływu poddźwiękowego wynosi $M < 1$. Na płacie występują jednak lokalne obszary (punkty) o prędkościach naddźwiękowych. Oznacza to, że

$$M_{kr} \leqslant M < 1.$$

W paragrafie 2 niniejszego rozdziału podana jest przybliżona teoria profilu płata dla przypadku $M < M_{kr}$, znana w literaturze pod nazwą teorii Prandtla—Glauerta. Teoria ta jest jednak słuszna tylko dla profilów bardzo cienkich, opływanych przy małych kątach natarcia.

W roku 1940 akademik S.A. Christjanowicz w pracy pt. *Obtiekanije tiel gazom pri bolszich dozwukowych skorostiach* [53] stworzył nową teorię uwzględniania wpływu ściśliwości na rozkład ciśnień, a co za tym idzie — na charakterystykę aerodynamiczną płata. Jako podstawę swej pracy przyjął Christjanowicz metodę badań przepływów gazu, podaną przez akademika S.A. Czapłygina w r. 1896 oraz opublikowaną w r. 1902 w jego pracy doktorskiej *O gazowych strujach* stanowiącej obecnie podstawę wielu badań w zakresie dynamiki gazów.



18.1. Krzywa Christjanowicza. Zależność M_{kr} od $\bar{p}_{min}$

Praca Christjanowicza ma nie tylko duże znaczenie teoretyczne, ale również szerokie zastosowanie praktyczne, umożliwia bowiem określenie c_y i c_m dla profilu o dowolnym kształcie, opływanego przy dowolnym kącie natarcia, na prostoliniowym odcinku zależności $c_y = f(\alpha)$. Akademik Christjanowicz podał metodę określenia krytycznej liczby Macha, ustalając teoretyczną zależność pomiędzy minimalnym ciśnieniem zredukowanym $\bar{p}_{min}$ płata opływanego cieczą nieściśliwą a krytyczną liczbą Macha M_{kr}.

Jak wiadomo, ciśnienie zredukowane $\bar{p}$ jest ilorazem przyrostu ciśnienia i ciśnienia dynamicznego, czyli

$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\varrho v^2}{2}},$$

przy czym — oczywiście — dla badań w otwartej przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego lub dla warunków lotu obowiązuje wzór:

$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\varrho v^2}{2}} = \frac{p_{lok} - p_{atm}}{\frac{\varrho v^2}{2}}.$$

Lokalna prędkość dźwięku na profilu pojawia się zawsze najpierw w punkcie odpowiadającym $\bar{p}_{min}$. Otóż Christjanowicz wykazał, że znając minimalne ciśnienie zredukowane $\bar{p}_{min}$ profilu (wyznaczone przy badaniu profilu w tunelu na małe prędkości[1]) można określić krytyczną liczbę Macha. Zależność między liczbą M_{kr} a minimalnym ciśnieniem zredukowanym $\bar{p}_{min}$ podana jest na rys. 18.1.

§ 2. Przybliżona teoria profilu lotniczego w przepływach poddźwiękowych (metoda linearyzacji)

W paragrafie niniejszym podana jest przybliżona metoda uwzględniania ściśliwości powietrza (metoda Prandtla—Glauerta) dla liczb $M < M_{kr}$, oparta na linearyzacji ścisłego równania dynamiki gazów

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2v_x v_y \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Przekonamy się w dalszym ciągu, że linearyzacja umożliwia znaczne uproszczenie tego równania.

Załóżmy, że w równoległym do osi x płaskim przepływie gazu, którego prędkość w nieskończoności równa jest $\bar{u}$, znajduje się cienki profil pod małym kątem natarcia. W tym przypadku można uważać, że opływ w pobliżu profilu mało się różni od niezakłóconego przepływu płaskiego w nieskończoności, można więc składowe prędkości v w pobliżu profilu wyrazić w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{u} + v_x', \\ v_y &= v_y', \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

gdzie v_x', v_y' — wielkości małe (w porównaniu z u — przyp. red.), stanowiące funkcje x, y dążące do zera przy oddalaniu się od profilu. W dalszych rozważa-

[1] Lub w cieczy (przyp. red.).

niach będziemy wychodzili z założenia, że drugie i wyższe potęgi wielkości małych v_x', v_y' można zaniedbać. Wyrażenie na wielkości podstawowe, charakteryzujące przepływ gazu, ulegną wówczas znacznemu uproszczeniu.

Rozważymy przede wszystkim kwadrat prędkości:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (\bar{u} + v_x')^2 + v_y'^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}v_x' + v_x'^2 + v_y'^2.$$

Odrzucając $v_x'^2$, $v_y'^2$, będziemy mieli

$$v^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}v_x' \qquad \text{lub} \qquad v = \bar{u} + v_x'. \tag{18.1'}$$

Rozważymy prędkość dźwięku. Jak wiadomo,

$$a^2 = \frac{k-1}{2}v_{\max}^2 - \frac{k-1}{2}v^2.$$

To samo wyrażenie dla niezakłóconego przepływu w nieskończoności można napisać w postaci

$$\bar{a}^2 = \frac{k-1}{2}v_{\max}^2 - \frac{k-1}{2}\bar{u}^2. \tag{18.2}$$

Stąd

$$a^2 = \bar{a}^2 - \frac{k-1}{2}(v^2 - \bar{u}^2)$$

lub wykorzystując (18.1')

$$a^2 = \bar{a}^2 - (k-1)\bar{u}v_x', \tag{18.3}$$

czyli

$$a = \bar{a}\left[1 - \frac{k-1}{\bar{a}^2}\bar{u}v_x'\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Rozkładając powyższe na szereg według wzoru na dwumian Newtona oraz odrzucając małe wyższych rzędów, otrzymamy

$$a = \bar{a} - \frac{k-1}{2}\frac{\bar{u}}{\bar{a}}v_x'. \tag{18.4}$$

Ze wzorów (18.1') i (18.4) łatwo wyznaczyć związek między liczbami Macha $M = \frac{v}{a}$ i $\bar{M} = \frac{\bar{u}}{\bar{a}}$.

Istotnie

$$M = va^{-1} = (\bar{u} + v_x')\left(\bar{a} - \frac{k-1}{2}\frac{\bar{u}}{\bar{a}}v_x'\right)^{-1}$$

lub

$$\bar{M} = \frac{\bar{u}}{\bar{a}}\left(1 + \frac{v_x'}{\bar{u}}\right)\left(1 - \frac{k-1}{2}\frac{\bar{u}}{\bar{a}^2}v_x'\right)^{-1}.$$

Wykorzystując ponownie wzór na dwumian Newtona otrzymamy

$$M = \bar{M}\left(1 + \frac{v_x'}{\bar{u}}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{\bar{u}}{\bar{a}^2}v_x'\right),$$

skąd z przyjętą dokładnością

$$M = \bar{M}\left[1 + \frac{v_x'}{\bar{u}}\left(1 + \frac{k-1}{2}\bar{M}^2\right)\right]. \tag{18.5}$$

Znajdziemy teraz ciśnienie p w przepływie zakłóconym. Z równania Bernoulliego (13.3)

$$dp = -\varrho v\,dv$$

otrzymujemy

$$\Delta p = p - \bar{p} = -\int_{\bar{u}}^{v} \varrho v\,dv,$$

gdzie $\bar{p}$ oznacza ciśnienie w przepływie niezakłóconym o prędkości $\bar{u}$.

Stosując twierdzenie o średniej wartości całki, otrzymamy

$$p - \bar{p} = -(\varrho v)_{śr}(v - \bar{u}),$$

gdzie $(\varrho v)_{śr}$ jest to średnia wartość wydatku na jednostkę powierzchni w rozważanym przedziale.

Ponieważ

$$(\varrho v)_{śr} = \frac{\bar{\varrho}\bar{u} + (\bar{\varrho}\bar{u} + \varrho' v')}{2},$$

więc, zaniedbując iloczyn wielkości małych $\varrho' v'$, znajdziemy

$$(\varrho v)_{śr} = \bar{\varrho}\bar{u}.$$

W ten sposób

$$p - \bar{p} = -\bar{\varrho}\bar{u}(v - \bar{u}) = -\bar{\varrho}\bar{u}(\bar{u} + v_x' - \bar{u}),$$

to znaczy

$$p - \bar{p} = -\bar{\varrho}\bar{u}v_x'. \tag{18.6}$$

Wyrażenie (18.6) nosi nazwę *zlinearyzowanego równania Bernoulliego*

W celu zlinearyzowania podstawowego równania dynamiki gazów (16.7) będącego nieliniowym równaniem różniczkowym wprowadzimy do niego wielkości a^2, v_x^2, v_y^2 oraz v_x, v_y ze wzorów (18.3) i (18.1). Wówczas z przyjętą dokładnością otrzymamy

$$[\bar{a}^2 - \bar{u}^2 - (k+1)\bar{u}v_x']\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\bar{u}v_y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+[\bar{a}^2 - (k-1)\bar{u}v_x']\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{18.7}$$

Zauważymy teraz, że drugie pochodne potencjału względem współrzędnych są wielkościami małymi pierwszego rzędu. Na przykład

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + v_x') = \frac{\partial v_x'}{\partial x}.$$

Stąd, odrzucając w równaniu (18.7) wielkości małe drugiego rzędu oraz dzieląc przez $\bar{a}^2$, otrzymamy ostatecznie

$$(1 - \bar{M}^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{18.8}$$

W przeciwieństwie do równania (16.7) równanie (18.8) jest *liniowym* równaniem różniczkowym. Dlatego też omówiona metoda nazywa się *metodą linearyzacji*, a sam przepływ określony równaniem (18.8) — *przepływem zlinearyzowanym*. (Przy $\bar{M} < 1$ równanie (18.8) jest typu eliptycznego, przy $\bar{M} > 1$ — typu hiperbolicznego).

Przekształcimy równanie (18.8), sprowadzając je do równania Laplace'a. W tym celu, dokonując następującej zamiany zmiennych:

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y\sqrt{1 - \bar{M}^2}, \tag{18.9}$$

obliczymy pochodne potencjału φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1 - \bar{M}^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy_1}{dy} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1 - \bar{M}^2}\right)\sqrt{1 - \bar{M}^2}.$$

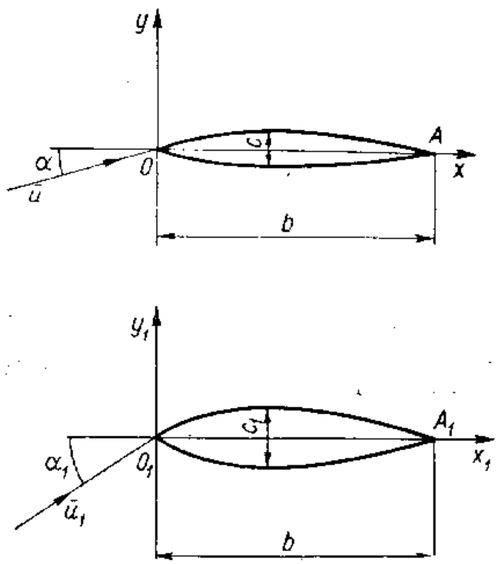
Zatem

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}(1 - \bar{M}^2).$$

Podstawiając wartości pochodnych do równania (18.8), doprowadzimy je do postaci równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0. \tag{18.10}$$

Wiadomo, że równanie Laplace'a spełnia potencjał prędkości nieściśliwego przepływu płynu. Przejście od równania (18.8) do równania (18.10) za pomocą zmiany zmiennych (18.9) pozwala, korzystając z równania Laplace'a (18.10), znaleźć potencjał prędkości cieczy nieściśliwej $\varphi(x_1, y_1)$ opływającej pewien nowy kontur. Jeżeli w tym potencjale prędkości zastąpimy x_1 przez x, y_1 zaś przez $y\sqrt{1 - \bar{M}^2}$, otrzymamy wówczas potencjał prędkości opływu zadanego cienkiego profilu płynem ściśliwym. Przy przejściu od zmiennych x, y do zmiennych x_1, y_1 kształt profilu będzie ulegał zmianie. Rozważmy charakter zmiany kształtu profilu przy takim przejściu (rys. 18.2). Załóżmy, że w płaszczyźnie xy znajduje się cienki profil o cięciwie b, skierowany wzdłuż osi x, oraz że płyn ściśliwy opływa ten profil pod małym kątem natarcia z prędkością $\bar{u}$. W tym przypadku będziemy mieli w płaszczyźnie x_1y_1 jakiś inny profil o takiej samej cięciwie b, opływany płynem nieściśliwym z prędkością u_1 pod innym kątem natarcia α_1. Wykażemy, że profil w płynie nieściśliwym zostanie pogrubiony w kierunku osi y w stosunku $\frac{1}{\sqrt{1 - \bar{M}^2}}$. W tym celu rozważymy zmiany prędkości w kierunku osi współrzędnych.



18.2. Deformacja profilu według teorii Prandtla—Glauerta

Ponieważ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1 - \bar{M}^2},$$

zatem

$$v_{x1} = v_x, \quad v_{y1} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \bar{M}^2}}. \tag{18.11}$$

Ze wzorów (18.11) wyciągamy wniosek, że przy takim przekształceniu składowe prędkości wzdłuż osi x nie ulegają zmianie i w odpowiednich punktach profilu są równe, a składowe prędkości wzdłuż osi y zwiększają się w sto-

sunku $\frac{1}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}$. Oznacza to, że tangensy kątów stycznej do linii prądu z osią x, równe $\frac{v_y}{v_x}$, także ulegają zwiększeniu w takim samym stosunku, a zatem w takim samym stosunku powiększy się kąt natarcia α_1, tzn. $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}$.

Zmiana kątów pochylenia stycznych wskazuje, że kontur profilu O_1A_1, stanowiący linię prądu, będzie we wszystkich swych punktach miał pochylenie stycznych powiększone w porównaniu z pochyleniem stycznych do obrysu OA w płynie ściśliwym $\frac{1}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}$ razy. Wyciągamy stąd wniosek, że maksymalna grubość c_1 profilu O_1A_1 będzie również związana z maksymalną grubością profilu OA równaniem

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1-\overline{M}^2}},$$

czyli *cienkiemu profilowi w płynie ściśliwym odpowiada pogrubiony profil w płynie nieściśliwym opływany pod większym kątem natarcia.*

W celu określenia opływu cienkiego profilu płata płynem ściśliwym trzeba więc rozważyć opływ płynem nieściśliwym profilu pogrubionego w kierunku osi y $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ razy przy kącie natarcia powiększonym tyleżkrotnie. Po określeniu dla tego fikcyjnego profilu potencjału $\varphi(x_1, y_1)$ za pomocą równania Laplace'a (18.10) trzeba, korzystając z przekształcenia (18.9), przejść ponownie do płynu ściśliwego. Wówczas w odpowiednich punktach tych przepływów, określanych równaniem (18.9), wartości potencjałów prędkości i poziomych składowych prędkości (wzór 18.11) będą jednakowe. Na zasadzie zlinearyzowanego równania Bernoulliego (18.6) w punktach tych będą jednakowe również ciśnienia. Prowadzi to do wniosku, że siła nośna dla profilu w gazie ściśliwym oraz siła nośna dla pogrubionego profilu fikcyjnego w płynie nieściśliwym — są jednakowe.

Jeżeli w przepływie cieczy niesciśliwej profil, którego cięciwa leży wzdłuż osi x, poszerza się w kierunku osi y n razy i jednocześnie n razy powiększa się kąt natarcia α, wówczas współczynnik siły nośnej powiększa się również n razy. Z drugiej strony jednak, rozważany profil w gazie ściśliwym zachowuje się tak, jak pogrubiony $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ razy fikcyjny profil w przepływie cieczy nieściśliwej.

Stąd wniosek, że siła nośna profilu w gazie ściśliwym jest $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ razy większa niż w cieczy nieściśliwej. Zatem — wpływ ściśliwości powoduje w zakresie $M < M_{kr}$ zwiększenie współczynnika siły nośnej. W celu znalezienia

współczynnika siły nośnej profilu w gazie ściśliwym trzeba odczytać wartość c_y dla danego kąta natarcia [z wykresu $c_y = f(\alpha)$] odpowiadającego małym prędkościom przepływu i współczynnik ten pomnożyć przez $\frac{1}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}$. Otrzymamy[1]:

$$c_{y\text{ńśc}} = \frac{c_{y\text{nśc}}}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}. \tag{18.12}$$

Analogiczne wyrażenie obowiązuje dla współczynnika momentu profilu:

$$c_{m\text{ńśc}} = \frac{c_{m\text{nśc}}}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}. \tag{18.13}$$

§ 3. Równania Czapłygina dla przypadku przepływów poddźwiękowych o dużej prędkości

W pracy *O gazowych strujach* (r. 1909) akademik S.A. Czapłygin podał metodę badania potencjalnych przepływów gazu, która po upływie połowy wieku uzyskała wyjątkowo rozległe zastosowanie do rozwiązywania zagadnień dynamiki gazów, m. in. również współczesnej teorii płata nośnego. Koncepcja tej metody polega na tym, że za pomocą wprowadzenia nowych zmiennych niezależnych nieliniowe równania dynamiki gazów dla funkcji φ i ψ przekształcają się w sposób ścisły w równania liniowe, które się następnie całkuje metodą przybliżoną aproksymując izentropę odpowiednio dobraną prostą (§ 4).

Przejdziemy do płaskiego potencjalnego przepływu gazu. W tym przypadku z określenia potencjalności przepływu mamy:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{18.14}$$

Z równania ciągłości

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} = 0 \tag{18.15}$$

(oraz równania linii prądu — przyp. red.) można wysnuć wniosek o istnieniu funkcji prądu ψ spełniającej warunki:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{18.16}$$

gdzie ϱ_0 — gęstość w pewnym punkcie charakterystycznym odpowiadającym prędkości v_0.

[1] Wzór (18.12) nosi nazwę wzoru Prandtla—Glauerta (przyp. tłum.).

Z równań (18.14) i (18.16) znajdujemy

$$\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{18.17}$$

Wprowadźmy w charakterze zmiennych niezależnych zamiast x i y moduł prędkości v oraz kąt θ, jaki tworzy wektor prędkości z osią x. Wówczas, ponieważ

$$v_x=v\cos\theta,\qquad v_y=v\sin\theta, \tag{18.18}$$

więc wykorzystując (18.14) i (18.16) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} d\varphi&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=v(\cos\theta\,dx+\sin\theta\,dy),\\ d\psi&=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=\frac{\varrho}{\varrho_0}v(-\sin\theta\,dx+\cos\theta\,dy).\end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

Z równań (18.19) znajdujemy

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{1}{v}\cos\theta\,d\varphi-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\sin\theta\,d\psi,\\ dy&=\frac{1}{v}\sin\theta\,d\varphi+\frac{\varrho_0}{\varrho v}\cos\theta\,d\psi.\end{aligned}\right\} \tag{18.20}$$

Ponieważ z równań (18.20) wynika, że

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\varphi}&=\frac{\cos\theta}{v},\qquad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\sin\theta,\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}&=\frac{\sin\theta}{v},\qquad \frac{\partial y}{\partial\psi}=+\frac{\varrho_0}{\varrho v}\cos\theta,\end{aligned}\right\}$$

zatem

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{18.21}$$

W sposób analogiczny można otrzymać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\theta}&=\frac{1}{v}\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\\ \frac{\partial y}{\partial v}&=\frac{1}{v}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\varrho_0}{\varrho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial v},\\ \frac{\partial y}{\partial\theta}&=\frac{1}{v}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\varrho_0}{\varrho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

W celu wyrugowania dawnych zmiennych x i y obliczymy pochodne

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right).$$

Uwzględniając znaną właściwość niezależności pochodnych mieszanych od kolejności różniczkowania, otrzymamy

$$-\frac{\sin\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{\cos\theta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho v}\right),$$

$$\frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\varrho_0}{\varrho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{\sin\theta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho v}\right).$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $(-\sin\theta)$, drugie zaś przez $\cos\theta$ oraz dodając, otrzymamy

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{18.23}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\cos\theta$, a drugie przez $\sin\theta$ i dodając, znajdziemy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=v\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{18.24}$$

W celu przekształcenia równania (18.23) musimy ponadto wziąć pod uwagę, że

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho v}\right)=\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}\frac{\varrho_0}{\varrho}. \tag{18.25}$$

Z drugiej strony

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)=-\frac{\varrho_0}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dv}=-\frac{\varrho_0}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dp}\frac{dp}{dv}=-\frac{\varrho_0}{\varrho^2}\frac{1}{a^2}\frac{dp}{dv} \tag{18.26}$$

lub wykorzystując wzór (13.3)

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)=\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{v}{a^2}. \tag{18.27}$$

Podstawiając (18.27) do (18.25) otrzymamy

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho v}\right)=\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{1}{a^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\varrho_0}{\varrho}=\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{1}{v^2}(M^2-1). \tag{18.28}$$

W tym przypadku układ równań (18.23) i (18.24) przybierze postać

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial v}&=-\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{1}{v}(1-M^2)\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=v\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{18.29}$$

Otrzymane równania są równaniami ruchu w płaszczyźnie hodografu prędkości (we współrzędnych biegunowych v i θ). Równania te są liniowe, ponieważ współczynniki przy pochodnych są funkcjami tylko zmiennych niezależnych. Wyjątkowa doniosłość metody Czapłygina polega właśnie na tym, że sprowadzenie nieliniowych równań ruchu do płaszczyzny hodografu prędkości transformuje je w sposób ścisły na równania liniowe.

Przekształćmy otrzymane równania wprowadzając tzw. zmienne Czapłygina τ i θ, gdzie

$$\tau = \frac{v^2}{\frac{k+1}{k-1} a_{kr}^2}. \tag{18.30}$$

Z równania (14.12′) oraz wzoru (18.30) znajdziemy

$$M^2 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{2}{k-1}\frac{\tau}{1-\tau} \tag{18.31}$$

lub

$$1 - M^2 = \frac{1 - \frac{k+1}{k-1}\tau}{1-\tau}. \tag{18.32}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v} = 2\frac{k-1}{k+1}\frac{v}{a_{kr}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \tag{18.33}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = 2\frac{k-1}{k+1}\frac{v}{a_{kr}^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{18.34}$$

oraz wykorzystując równanie (14.22), które można napisać w postaci

$$\varrho = \varrho_0 (1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{18.35}$$

otrzymamy ostatecznie

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= -\frac{1}{2\tau}\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{18.36}$$

Układ (18.36) nazywa się *układem równań Czapłygina*.

W pracy *O gazowych strujach* zastosował Czapłygin powyższe równania do

obliczania różnych przepływów gazów. Powyższa praca Czapłygina zapoczątkowała rozwój aerodynamiki dużych prędkości i stała się podstawą szeregu wybitnych prac uczonych radzieckich, poświęconych opracowaniu problemów przepływów gazu i współczesnej teorii płata nośnego.

W roku 1936 prof. N. A. Slezkin [54] zastosował równania Czapłygina do zagadnień związanych z bezcyrkulacyjnym opływem ciał przy poddźwiękowych prędkościach gazu. Jak już o tym wspomnieliśmy, rozwinięcie metody Czapłygina pozwoliło akademikowi Christjanowiczowi opracować teorię opływu ciał przy dużych prędkościach.

Na zakończenie niniejszego paragrafu należy wymienić pracę akademika A. I. Niekrasowa *O płoskoparalielnom dwiżenji gaza pri dozwukowych skorostiach* [56], w której autor rozwiązuje zagadnienie ruchu gazu, sprowadzając równanie różniczkowe potencjału prędkości za pomocą przekształcenia Legendre'a do postaci liniowej.

§ 4. Metoda S.A. Christjanowicza

Przybliżona teoria Prandtla—Glauerta, oparta na metodzie linearyzacji równań dynamiki gazów, jest słuszna jedynie w przypadku bardzo cienkich profilów opływanych przy małym kącie natarcia. W celu zbadania opływu poddźwiękowego profilów lotniczych należy zastosować ścisłe równania ruchu gazu doskonałego[1].

Christjanowicz nadał ścisłym równaniom Czapłygina nieco inną postać oraz zbudował teorię umożliwiającą uwzględnianie wpływu ściśliwości na rozkład ciśnień i charakterystyki aerodynamiczne dowolnych profilów przy prędkościach podkrytycznych. Omówimy zasadę metody Christjanowicza [1].

Wprowadzimy do równań Czapłygina

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= -\frac{1}{2\tau}\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \tag{18.37}$$

zamiast zmiennej niezależnej τ nową zmienną

$$\lambda = \frac{v}{a_{kr}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\sqrt{\tau}. \tag{18.38}$$

[1] Konieczność ta jest spowodowana głównie zaokrągleniem krawędzi natarcia, w pobliżu której przyrosty prędkości nie mogą być traktowane jako małe w porównaniu z prędkością przepływu niezakłóconego (przyp. red.).

W tym przypadku, uwzględniając, że

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{k+1}{k-1}\,\frac{1}{2\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}, \tag{18.39}$$

można przepisać równania Czapłygina w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\frac{\lambda}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}&=-\frac{1-\lambda^2}{\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{18.40}$$

W celu otrzymania równań Czapłygina w postaci bardziej symetrycznej, wprowadzimy zamiast λ zmienną niezależną s związaną z λ następującą zależnością:

$$ds=\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad s=\int\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{18.41}$$

W tym przypadku układ równań (18.40) przybierze postać

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial s},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s}&=-\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\end{aligned}\right\} \tag{18.42}$$

gdzie wielkość K stanowi następującą funkcję λ:

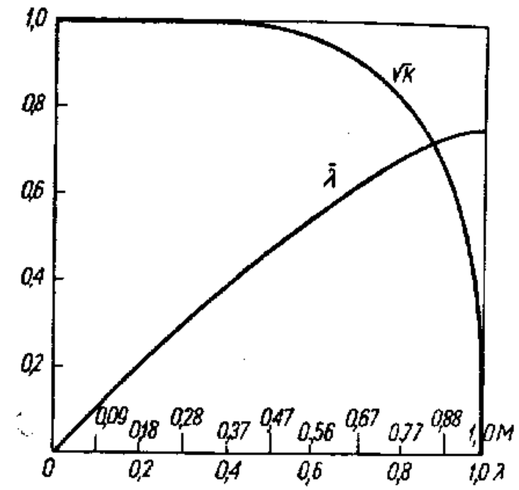
$$K=\frac{1-\lambda^2}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}. \tag{18.43}$$

S.A. Christjanowicz zbadał ogólny przypadek cyrkulacyjnego opływu profilu lotniczego oraz podał metodę całkowania układu równań (18.42) drogą kolejnych przybliżeń. Christjanowicz dowiódł, że całkowanie otrzymanych przez niego równań gazu ściśliwego w przypadku opływu profilu lotniczego może być sprowadzone do rozwiązania zagadnienia opływu profilu zniekształconego (zbliżonego do założonego) w cieczy nieściśliwej.

Aby to udowodnić, wyrazimy wielkość K za pomocą liczby Macha, wykorzystując wzór (14.21'):

$$K=(1-M^2)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

Zależność funkcji K od liczb λ i M zobrazowano na rys. 18.3. Jak widać, dla liczby $M<0{,}6$ wielkość K mało się różni od jedności. Biorąc to pod uwagę, przejdziemy do równań (18.42). Równania te różnią się od równań Cauchy'ego—Riemanna, obowiązujących dla cieczy nieściśliwej, istnieniem mnożnika $\sqrt{K}$.



18.3. Zależność funkcji K od liczby Macha oraz współczynnika prędkości

Założymy, że wielkość $\sqrt{K}$ jest stałą i włączymy ją do funkcji ψ. W szczególności można założyć $K=1$ (co odpowiada dokładnie cieczy nieściśliwej i zostało wykorzystane przez Czapłygina) lub zgodnie z pierwszym przybliżeniem Christjanowicza $K=K_\infty$, gdzie K_∞ — wartość funkcji K odpowiadająca parametrom niezakłóconego przepływu gazu ($M=M_\infty$). W tym przypadku zamiast ścisłego układu równań (18.42) otrzymamy przybliżony układ w płaszczyźnie s, θ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial s},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{18.44}$$

nie różniący się niczym od równań Cauchy'ego—Riemanna dla cieczy nieściśliwej. Równania przybliżone (18.44) porównamy ze ścisłymi równaniami Cauchy'ego—Riemanna

$$\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\tilde\theta}=\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde s},\qquad \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\tilde s}=-\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde\theta}, \tag{18.44'}$$

w płaszczyźnie pseudohodografu prędkości cieczy nieściśliwej ($\tilde s$, $\tilde\theta$).

Falisty znaczek nad literą oznacza, że rozważane wielkości odnoszą się do przepływu cieczy nieściśliwej. $\tilde\theta$ stanowi oczywiście kąt nachylenia prędkości nieściśliwego strumienia cieczy względem osi x, $\tilde s$ zaś — wielkość określoną równaniem

$$d\tilde s=\frac{d\tilde v}{\tilde v}=\frac{d\tilde\lambda}{\tilde\lambda}\qquad\left(\tilde\lambda=\frac{\tilde v}{a_{kr}}\right), \tag{18.45}$$

otrzymanym z (18.41) przy $\lambda=0$ (w wyrażeniu podpierwiastkowym—przyp. red.).

Załóżmy, że w płaszczyźnie zmiennej $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ stanowiącej płaszczyznę przepływu cieczy nieściśliwej, określony został cyrkulacyjny opływ profilu lotniczego spełniający hipotezę Żukowskiego—Czapłygina dotyczącą opływu ostrza profilu. Wykorzystując istniejące metody obliczenia nieściśliwego przepływu potencjalnego (na przykład metodę Nużina), można wówczas obliczyć wielkości $\tilde{v}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{s}$, $\tilde{\varphi}$ oraz $\tilde{\psi}$ w funkcji $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, a zatem — znaleźć warunki brzegowe w płaszczyźnie $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$.

Aby przejść do przybliżonego rozwiązania zagadnienia opływu profilu lotniczego ściśliwym strumieniem gazu, musi być spełniona zależność

$$\theta = \tilde{\theta}, \quad s = \tilde{s}. \tag{18.46}$$

Ostatni warunek oznacza oczywiście tożsamość przepływów w płaszczyźnie pseudohodografu prędkości s, θ gazu oraz w płaszczyźnie pseudohodografu prędkości $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$ cieczy nieściśliwej. Wykorzystując (18.41) i (18.45) otrzymujemy z tego warunku zależność pomiędzy prędkościami przepływu cieczy nieściśliwej i gazu:

$$\int \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} + C. \tag{18.46'}$$

Stałą C można określić z warunku, aby stosunek $\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \to 0$, gdy $\lambda \to 0$.

Tablica 18.1

$\lambda = \frac{v}{a_{kr}}$	M	$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{v}}{a_{kr}}$	$\lambda = \frac{v}{a_{kr}}$	M	$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{v}}{a_{kr}}$	$\lambda = \frac{v}{v_{kr}}$	M	$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{v}}{a_{kr}}$
0	0	0	0,35	0,3229	0,3410	0,70	0,6668	0,6251
0,05	0,0457	0,0500	0,40	0,3701	0,3862	0,75	0,7192	0,6568
0,10	0,0913	0,0998	0,45	0,4179	0,4307	0,80	0,7727	0,6857
0,15	0,1372	0,1493	0,50	0,4663	0,4734	0,85	0,8274	0,7110
0,20	0,1832	0,1983	0,55	0,5152	0,5144	0,90	0,8834	0,7324
0,25	0,2294	0,2467	0,60	0,5635	0,5535	0,95	0,9409	0,7483
0,30	0,2759	0,2943	0,65	0,6154	0,5904	1,00	1,0000	0,7577

W tablicy 18.1 oraz na rys. 18.3 podano związek pomiędzy λ, M i $\tilde{\lambda}$. Widzimy, że w płaszczyznach hodografu moduły prędkości nie są ze sobą zgodne; zgodne są jedynie kąty θ i $\tilde{\theta}$.

Przy speinieniu równań (18.46) układ równań (18.44) określa w płaszczyźnie s, θ przepływ ściśliwego gazu, odpowiadający tym samym warunkom brzegowym, co przepływ cieczy nieściśliwej w płaszczyźnie $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$. Jednak w płaszczyźnie

przepływu gazu x, y obrys profilu L nie będzie identyczny z obrysem profilu $\tilde{L}$ w płaszczyźnie $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ płynu nieściśliwego. W odpowiadających sobie punktach profilów, czyli w punktach, w których identyczne są wartości s i $\tilde{s}$, θ i $\tilde{\theta}$, a zatem identyczne są również φ i $\tilde{\varphi}$, elementy łuków profilów L i $\tilde{L}$ spełniają równania (wzór 3.36)

$$\Delta L = \frac{\Delta\varphi}{v} \quad \text{oraz} \quad \Delta\tilde{L} = \frac{\Delta\varphi}{\tilde{v}}.$$

Mając jednak na uwadze, że w odpowiadających sobie punktach prędkości są na ogół różne (tabl. 18.1), dochodzimy do wniosku, że elementy łuków profilów, a zatem również same profile L i $\tilde{L}$ nie są jednakowe.

W pierwszym przybliżeniu będziemy zaniedbywali wskazaną różnicę kształtu profilów dla gazu i cieczy nieściśliwej w płaszczyznach z i $\tilde{z}$. (Należy zaznaczyć, że Christjanowicz dokładnie zbadał zagadnienia związane z istniejącą pomiędzy profilami różnicą oraz podał teorię przejścia od płaszczyzny z do płaszczyzny $\tilde{z}$). Na podstawie tego najprostszego przybliżenia ustalimy związek pomiędzy rozkładem ciśnień na profilu w cieczy nieściśliwej oraz rozkładem cisnień w gazie (ściśliwym). W tym celu rozpatrzymy wzory na $\bar{p}_{\text{nśc}}$ i $\bar{p}_{\text{śc}}$:

$$\bar{p}_{\text{nśc}} = \frac{p_{\text{nśc}} - p_{\text{nśc}\infty}}{\frac{\varrho_{\text{nśc}\infty}\, v^2_{\text{nśc}\infty}}{2}} = 1 - \left(\frac{v_{\text{nśc}}}{v_{\text{nśc}\infty}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_\infty}\right)^2; \tag{18.47}$$

$$\bar{p}_{\text{śc}} = \frac{p_{\text{śc}} - p_{\text{śc}\infty}}{\frac{\varrho_{\text{śc}\infty}\, v^2_{\text{śc}\infty}}{2}} = \frac{2p}{\varrho v^2}\,\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 - \frac{2p_\infty}{\varrho_\infty v^2_\infty} =$$

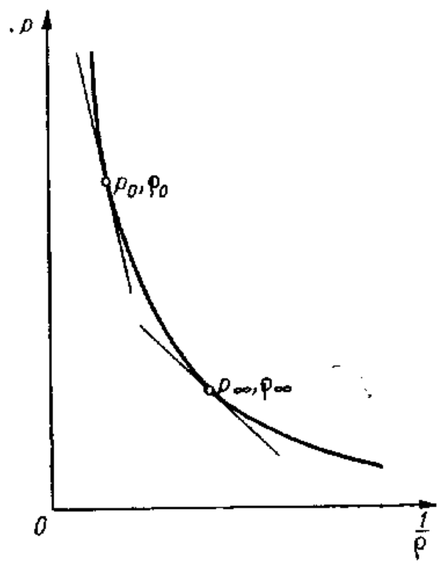
$$= \frac{2}{kM^2}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2_\infty}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^2 - \frac{2}{kM^2_\infty}.$$

Wykorzystując równanie $M^2 = \frac{2\lambda^2}{k+1-(k-1)\lambda^2}$, można dla $\bar{p}_{\text{śc}}$ otrzymać następujące wyrażenie:

$$\bar{p}_{\text{śc}} = \frac{k+1}{k}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2_\infty}{\lambda^2_\infty}\left[\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2_\infty}\right)^{\frac{k}{k-1}} - 1\right]. \tag{18.48}$$

Zakładając prędkość gazu ściśliwego w nieskończoności, czyli λ_∞ znajdziemy z tabl. 18.1 odpowiednią wartość $\tilde{\lambda}$. Następnie, nadając λ różne wartości i określając z tej samej tablicy $\tilde{\lambda}$, można za pomocą równań (18.47) i (18.48) ustalić poszukiwany związek pomiędzy $\bar{p}_{\acute{s}c}$ i $\bar{p}_{n\acute{s}c}$.

Nie wchodząc w szczegóły teorii Christjanowicza wobec jej skomplikowanej formy matematycznej oraz ograniczonych ram niniejszej książki, wskazujemy czytelnikowi odpowiednią literaturę [2, 9].



18.4. Aproksymacja izentropy prostą

Wykażemy, że między $\bar{p}_{\acute{s}c}$ i $\bar{p}_{n\acute{s}c}$ można ustalić prostą zależność, jeżeli skorzystamy ze stosowanej przez Czapłygina zamiany izentropy rzeczywistej „izentropą prostoliniową", którą jest styczna do izentropy w punkcie p_0, ϱ_0 (rys. 18.4). W tym przypadku równanie „izentropy prostoliniowej" [tzn. równanie stycznej do izentropy $p\varrho_0^k = p_0\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{-k}$ w punkcie (p_0, ϱ_0) przybierze postać

$$p - p_0 = \varrho_0^2 a_0^2\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right). \tag{a}$$

Wprowadzając zamiast λ nową zmienną μ

$$\mu = \frac{v}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\lambda \tag{b}$$

oraz wykorzystując przybliżoną izentropę (a) sprowadzimy równania ruchu w płaszczyźnie hodografu (18.29) do postaci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \mu\sqrt{1+\mu^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

Można łatwo przekonać się, że wprowadzając raz jeszcze nową zmienną s za pomocą równania

$$\frac{d\mu}{\mu\sqrt{1+\mu^2}} = ds$$

otrzymamy układ równań (18.44). Oznacza to, że równanie (18.46') zostanie zastąpione przez następujące prostsze równanie:

$$\int\frac{d\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} = \int\frac{d\mu}{\mu\sqrt{1+\mu^2}},$$

tzn.

$$\ln\tilde{\mu} = \ln\frac{\mu}{1+\sqrt{1+\mu^2}} + \ln C.$$

Zakładając, że przy $\mu \to 0$ stosunek $\frac{\tilde{\mu}}{\mu} \to 1$, znajdziemy, że $C = 2$. Otrzymamy więc następującą przybliżoną zależność między prędkościami gazu ściśliwego i cieczy nieściśliwej:

$$\tilde{\mu} = \frac{2\mu}{1+\sqrt{1+\mu^2}} \qquad \text{lub} \qquad \mu = \frac{4\tilde{\mu}}{4-\tilde{\mu}^2}. \tag{18.49}$$

(Zauważmy, że równania przybliżone można otrzymać z równań ścisłych drogą podstawienia do nich $k = -1$ i zastąpienia λ przez μ). Wyrazimy teraz $\bar{p}_{n\acute{s}c}$ oraz $\bar{p}_{\acute{s}c}$ w nowych zmiennych. Wykorzystując (18.47) i (b), znajdziemy

$$\bar{p}_{n\acute{s}c} = 1 - \left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_\infty}\right)^2. \tag{c}$$

Wykorzystując wzór (b) oraz podstawiając $k = -1$ do wyrażenia (18.48), otrzymamy

$$\bar{p}_{\acute{s}c} = -2\frac{\sqrt{1+\mu_\infty^2}}{\mu_\infty^2}\left[\sqrt{1+\mu^2} - \sqrt{1+\mu_\infty^2}\right]. \tag{d}$$

Przekształcając (d) za pomocą (18.49) otrzymamy

$$\bar{p}_{\acute{s}c} = -2\frac{\sqrt{1+\mu_\infty^2}}{\mu_\infty^2}\,\frac{8(\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu}_\infty^2)}{(4-\tilde{\mu}^2)(4-\tilde{\mu}_\infty^2)}.$$

Ponieważ przy $k = -1$

$$\mu_\infty^2 = \left(\frac{v_\infty}{a_0}\right)^2 = \frac{v_\infty^2}{a_\infty^2\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)} = \frac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2}$$

oraz biorąc pod uwagę, że $\tilde{\mu}^2 = \tilde{\mu}_\infty^2\,(1-\bar{p}_{n\acute{s}c})$, otrzymamy dla $\bar{p}_{\acute{s}c}$ następujące wyrażenie:

$$\bar{p}_{\acute{s}c} = \frac{16}{M_\infty^2}\sqrt{1-M_\infty^2}\,\frac{\tilde{\mu}_\infty^2\,\bar{p}_{\acute{s}c}}{[4-(1-\bar{p}_{n\acute{s}c})\tilde{\mu}_\infty^2](4-\tilde{\mu}_\infty^2)}.$$

Zastępując za pomocą (18.49)

$$\tilde{\mu}_\infty = \frac{2\mu_\infty}{1+\sqrt{1+\mu_\infty^2}} = \frac{2M_\infty}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

znajdujemy ostatecznie poszukiwaną zależność między $\bar{p}_{śo}$ i $\bar{p}_{nśo}$ (wzory Kármána—Tsiena)

$$\bar{p}_{śo} = \frac{\bar{p}_{nśo}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{1}{2}\frac{M_\infty^2}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}}\bar{p}_{nśo}}. \tag{18.50}$$

Zauważymy, że jako punkt styczności z izentropą (rys. 18.4) można przyjąć punkt (p_∞, ϱ_∞) odpowiadający parametrom przepływu niezakłóconego ($M = M_\infty$) i rozszerzyć w ten sposób zakres zastosowania omówionej metody przybliżonej.

Na zakończenie należy dodać, że S.A. Christjanowicz zamiast zastępowania izentropy prostą, założył w równaniach (18.42) w charakterze pierwszego przybliżenia:

$$\sqrt{K} = \sqrt{K_\infty} = \frac{\varrho_0}{\varrho_\infty}\sqrt{1-M_\infty^2}.$$

Przypadek ten został przez niego dokładnie zbadany w r. 1940. Przybliżenie to jest w literaturze zagranicznej przypisywane Kármánowi, który zbadał to przybliżenie później.

§ 5. Przybliżona teoria G.F. Burago poddźwiękowego opływu profilu o dowolnym kształcie

Istnieją obecnie metody przybliżonego uwzględnienia wpływu ściśliwości na opływ ciał przez poddźwiękowy strumień gazu, różniące się od metody Christjanowicza i oparte na hipotezie niezmienności kształtu linij prądu ze zmianą prędkości przepływu niezakłóconego. Metoda ta była po raz pierwszy podana w r. 1946 przez prof. S.G. Nużina w pracy *K tieorji obtiekanja tieł gazom pri bolszich dozwukowych skorostiach* [58]. W pracy tej podał Nużin przybliżoną metodę pozwalającą sprowadzić zagadnienie opływu potencjalnego cieczą ściśliwą ciał o opływowych kształtach przy poddźwiękowych prędkościach przepływu do zagadnienia opływu cieczą nieściśliwą ciał o tym samym kształcie. W roku 1949 podał Nużin pewną odmianę równań Christjanowicza oraz przybliżoną metodę budowy zdeformowanego profilu [59].

W roku 1951, w pracy pt. *Aerodinamika tonkich tieł pri dokriticzieskich skorostiach* [60] udoskonalił Nużin swą metodę z r. 1946.

Podany sposób w wielu przypadkach zupełnie zadowalająco zgadza się z danymi doświadczalnymi. Jednakże w związku z pewną dowolnością dobierania warunków uzupełniających nie zawsze prowadzi on do pełnowartościowych wyników.

W roku 1949 prof. G. F. Burago [10] podał prostą przybliżoną metodę uwzględnienia wpływu ściśliwości, opartą na hipotezie stabilizacji linii prądu,

bardziej racjonalnym doborze warunków uzupełniających, a przy tym dającą prawie taki sam dokładny wynik, co pierwsze przybliżenie w teorii Christjanowicza.

W paragrafie niniejszym omówimy metodę G.F. Burago [10].

Napiszmy równanie ciągłości dla płynu ściśliwego i warunek potencjalności przepływu (str. 50 i 60)

$$\operatorname{div}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\bar{v}\right) = 0, \tag{18.51}$$

$$\operatorname{rot}(\bar{v}) = 0, \tag{18.52}$$

gdzie:

$\bar{v}$ — prędkość;

ϱ — gęstość w dowolnym punkcie przepływu;

ϱ_∞ — gęstość przepływu niezakłóconego.

Wprowadzając do tych równań pomocniczą funkcję u będziemy mieli

$$\operatorname{div}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\bar{v}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty u}u\bar{v}\right) = \frac{\varrho}{\varrho_\infty u}\operatorname{div}(u\bar{v}) + u\bar{v}\operatorname{grad}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty u}\right) = 0,$$

$$\operatorname{rot}(\bar{v}) = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{u}u\bar{v}\right) = \frac{1}{u}\operatorname{rot}(u\bar{v}) - u\bar{v}\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{u}\right) = 0.$$

Stąd znajdujemy

$$\frac{1}{uv}\operatorname{div}(u\bar{v}) = i\operatorname{grad}\ln\left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho}u\right), \tag{18.53}$$

$$\frac{1}{uv}\operatorname{rot}(u\bar{v}) = -i\times\operatorname{grad}\ln(u), \tag{18.54}$$

gdzie i oznacza wektor jednostkowy prędkości $\bar{v}$[1].

Załóżmy teraz, że funkcja u wybrana została w ten sposób, aby prawe strony równań (18.53) i (18.54) były bardzo małe i aby można było przyjąć je za równe zeru.

Wówczas zamiast ścisłych równań (18.51) i (18.52) otrzymamy równania przybliżone

$$\operatorname{div}(u\bar{v}) = 0, \tag{18.55}$$

$$\operatorname{rot}(u\bar{v}) = 0. \tag{18.56}$$

Przez podstawienie

$$u\bar{v} = u_\infty\bar{v}^0 \tag{18.57}$$

[1] Wzory (18.53) i (18.54) otrzymane zostały na podstawie znanej własności gradientu funkcji złożonej:

$$\operatorname{grad} F(f) = \frac{\partial F}{\partial f}\operatorname{grad} f.$$

równanie to sprowadza się w prosty sposób do znanych równań określających przepływ potencjalny cieczy doskonałej (nieściśliwej) przepływającej z lokalną prędkością $\overline{v}^0$ (u_∞ — jest to wartość u dla punktów niezakłóconego przepływu; $u_\infty = \text{const}$).

Wzór (18.57) daje zależność między prędkościami $\overline{v}$ i $\overline{v}^0$ w tych samych punktach ściśliwego i nieściśliwego przepływu przy jednakowych warunkach brzegowych, ponieważ w nieskończoności $\overline{v} = \overline{v}^0$, a poza tym pochylenia wektorów $\overline{v}$ i $\overline{v}^0$ są jednakowe, a więc kształt linii prądu w obydwóch przepływach również jest jednakowy (hipoteza stabilizacji linii prądu), z powierzchnią brzegową opływanego ciała włącznie.

Zwróćmy teraz uwagę na dobieranie pomocniczej funkcji u. Kryterium, jakim należy się przy tym kierować, jest takie, aby otrzymać możliwie małe wartości prawych stron równań (18.53) i (18.54), które chce się pominąć. Przybliżone rozwiązanie będzie ścisłe, jeżeli właściwym doborem funkcji u uda nam się sprowadzić do zera prawe strony równań (18.53) i (18.54).

Przeprowadźmy dobór funkcji u.

Niechaj u_1 będzie wartością funkcji u nierówną zeru, lecz sprowadzającą do zera prawą stronę równania (18.53).

Wówczas, jak to wynika z równania (18.53), grad $\ln\left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho}u_1\right)$ powinien być prostopadły do kierunku prędkości $\overline{v}$, tzn. skierowany wzdłuż stycznej do powierzchni $\varphi = \text{const}$. Ponieważ powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do gradientu, więc w rozpatrywanym przypadku powierzchniami ekwipotencjalnymi będą powierzchnie utworzone z linii prądu, a ich równanie będzie miało następującą postać:

$$\frac{\varrho_\infty}{\varrho}u_1 = c_\psi,$$

gdzie c_ψ oznacza wielkość stałą wzdłuż każdej linii prądu (ale nie jest to stała dla całej przestrzeni — zapełnionej przepływającym płynem). Stąd

$$u_1 = c_\psi \frac{\varrho}{\varrho_\infty}. \tag{18.58}$$

Niech następnie u_2 będzie wartością funkcji u sprowadzającą do zera prawą stronę równania (18.54); wówczas, biorąc pod uwagę, że grad ($\ln u_2$) powinien być równoległy do wektora $\overline{v}$, tzn. skierowany wzdłuż linii prądu, dochodzimy do wniosku, że odpowiadające mu powierzchnie ekwipotencjalne powinny pokrywać się z powierzchniami $\varphi = \text{const}$, a więc

$$u_2 = c_\varphi, \tag{18.59}$$

gdzie c_φ oznacza wielkość w kierunkach normalnych do linii prądu, tzn. wzdłuż powierzchni $\varphi = \text{const}$ (φ — potencjał prędkości).

Każda wartość u, nierówna u_1 lub u_2, będzie powodowała błędy zarówno w równaniu (18.53), jak również w równaniu (18.54).

Suma kwadratów błędów w równaniach (18.53) i (18.54) w pierwszym przybliżeniu wyrazi się sumą

$$(u - u_1)^2 + (u - u_2)^2.$$

Najmniejszej wartości sumy kwadratów błędów (jeżeli uważać wielkości u_1 i u_2 za niezależne od u) w równoznacznych równaniach (18.53) i (18.54), jak łatwo spostrzec, będzie odpowiadała wartość:

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}\left(c_\psi \frac{\varrho}{\varrho_\infty} + c_\varphi\right). \tag{18.60}$$

Tę wartość funkcji u stosuje się zatem w rozpatrywanej przybliżonej teorii Burago. W każdym rozpatrywanym przypadku wielkości c_ψ i c_φ należy dobierać wychodząc z warunków brzegowych zadania, a jeżeli brak tych warunków, należy wychodzić z największego zbliżenia wartości u_1 i u_2, określanych wzorami (18.58) i (18.59).

Rozpatrzmy obecnie przepływ gazu dokoła profilu lotniczego.

Zakładamy, że w nieskończoności, w niezakłóconej części strumienia prędkości przepływu płynu ściśliwego i nieściśliwego są jednakowe, tzn. $\overline{v}_\infty = \overline{v}^0_\infty$. Za jednakowe uważamy również gęstości i ciśnienia, tzn. $\varrho_\infty = \overset{0}{\varrho}_\infty$, $p_\infty = \overset{0}{p}_\infty$. Wówczas z równania (18.57) przy zachowaniu warunku (18.60) na nieskończenie oddalonej linii prądu $\psi = \text{const}$ i na nieskończenie oddalonej powierzchni $\varphi = \text{const}$ będziemy mieli

$$c_{\psi\infty} + c_\varphi = 2u_\infty,$$

$$c_\psi + c_{\varphi\infty} = 2u_\infty,$$

skąd wynika

$$\left.\begin{aligned} c_\varphi &= 2u_\infty - c_{\psi\infty} = c_0, \\ c_\psi &= 2u_\infty - c_{\varphi\infty} = c_1, \end{aligned}\right\} \tag{18.61}$$

gdzie c_0 i c_1 są na razie dowolnymi wielkościami stałymi.

Można ustalić zależność między nimi, zażądawszy, aby przeciętnie dla przepływu spełnione było równanie

$$u_{1p\infty} = u_{2p\infty}.$$

Wówczas

$$\frac{1}{\tau}\iiint c_\psi \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\,d\tau = \frac{1}{\tau}\iiint c_\varphi\,d\tau,$$

skąd, korzystając nadto z zależności (18.61), otrzymamy

$$c_0 = c_1 \frac{1}{\tau} \iiint_\tau \frac{\varrho}{\varrho_\infty} d\tau. \tag{18.62}$$

Jednakże dla nieograniczonego przepływu, dla którego gęstość ϱ wyraźnie różni się od ϱ_∞, jedynie w pobliżu opływanego ciała mamy:

$$\frac{1}{\tau} \iiint_\tau \frac{\varrho}{\varrho_\infty} d\tau \approx 1,$$

a więc (18.62 i 18.61)

$$c_0 = c_1 = c_\psi = c_\varphi = u_\infty. \tag{18.63}$$

Jak to wynika z równań (18.57), (18.60) i (18.63), zależność między prędkościami w przepływie ściśliwym i nieściśliwym będzie miała postać:

$$\bar{v} = \frac{2\bar{v}^0}{1 + \frac{\varrho}{\varrho_\infty}}. \tag{18.64}$$

Jeżeli uwzględni się, że

$$1 + \frac{\varrho}{\varrho_\infty} = 2 + \frac{\varrho - \varrho_\infty}{\varrho_\infty},$$

$$2\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_\infty}} = 2\left(1 + \frac{\varrho - \varrho_\infty}{\varrho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\varrho - \varrho_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{1}{4}\left(\frac{\varrho - \varrho_\infty}{\varrho_\infty}\right)^2 + \dots,$$

to bez widocznego błędu można dla przepływu powietrza przyjąć, że

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\varrho_\infty}{\varrho}}\, \bar{v}^0. \tag{18.65}$$

Przystąpmy do ustalenia przybliżonej zależności między ciśnieniem w ściśliwym i nieściśliwym przepływie.

Ciśnienie zredukowane w przepływie nieściśliwym wynosi

$$\bar{p}^0 = 2\frac{p^0 - p_\infty}{\varrho_\infty v_\infty^2} = 1 - \frac{v^{02}}{v_\infty^2}. \tag{18.66}$$

Przechodząc od prędkości v^0 nieściśliwego przepływu do prędkości v przepływu gazu według wzoru (18.65) otrzymamy

$$\bar{p}^0 = 1 - \frac{\varrho v^2}{\varrho_\infty v_\infty^2}. \tag{18.67}$$

Według wzoru (18.67) ciśnienie zredukowane $\bar{p}^0$ w dowolnym punkcie nieściśliwego przepływu wyraża się przez wielkości ϱ i v przepływu gazu w tym samym punkcie.

Ciśnienie zredukowane w przepływie gazu

$$\bar{p} = 2\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty v_\infty^2} = 2\frac{p_\infty}{\varrho_\infty v_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right),$$

$$\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} = \frac{1}{k} a_\infty^2,$$

gdzie:

a_∞ — prędkość dźwięku w niezakłóconym przepływie gazu;

k — stosunek c_p do c_v,

a więc

$$\bar{p} = \frac{2}{k M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right), \tag{18.68}$$

gdzie M_∞ jest to liczba Macha niezakłóconego przepływu.

Jeżeli skorzysta się z zależności dynamiki gazów dla izentropowego przepływu

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2}{v_\infty^2} &= \frac{M^2}{M_\infty^2}\,\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}, \\ \frac{\varrho}{\varrho_\infty} &= \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{p}{p_\infty} &= \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{18.69}$$

oraz z zależności (14.22), to wzory (18.67) i (18.68) odpowiednio przyjmą taką postać ostateczną

$$\bar{p}^0 = 1 - \frac{\Phi(M)}{\Phi(M_\infty)}, \tag{18.70}$$

$$\bar{p} = \frac{2}{k M_\infty^2}\left[\frac{F(M_\infty)}{F(M)} - 1\right], \tag{18.71}$$

gdzie

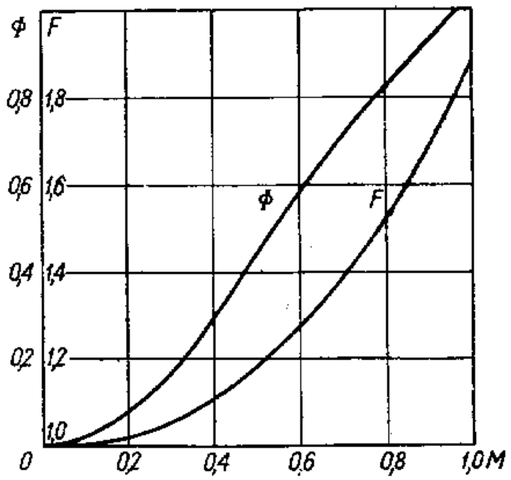
$$\Phi(M) = \frac{M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}, \tag{18.72}$$

$$F(M) = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{18.73}$$

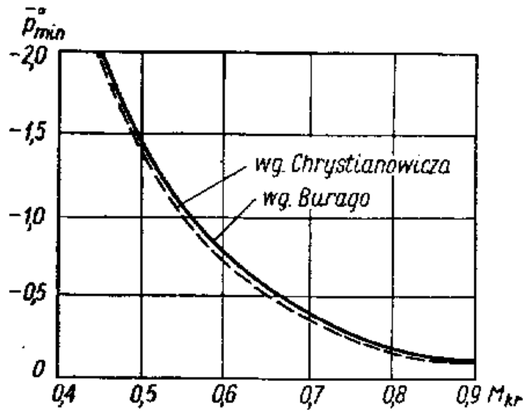
Wartości funkcji $\Phi(M)$ i $F(M)$ dla powietrza podane są na wykresie (rys. 18.5).

Mając dane wartości M_∞ i $\bar{p}^0$ w określonym punkcie w pobliżu profilu lotniczego można za pomocą wzorów (18.70) ÷ (18.73) wyznaczyć odpowiadające im wartości $\bar{p}$ (i lokalne liczby Macha).

Ponieważ zależności tych praktycznie nie można otrzymać w postaci wyraźnej, więc dla obliczania ciśnienia zredukowanego $\bar{p}$ (i liczby Macha) z zadanych wartości $\bar{p}^0$ i M_∞, G. F. Burago zaleca postępować w sposób następujący.



18.5. Wykresy funkcji $\Phi(M)$ i $F(M)$



18.6. Porównanie metod Christjanowicza i Burago

Mając dane M_∞ odczytujemy z wykresu (rys. 18.5) wartości funkcji $\Phi(M_\infty)$ i $F(M_\infty)$. Następnie mając dane $\bar{p}^0$ z wzoru (18.70) wyznaczamy $\Phi(M)$, a z wykresu podanego na rysunku 18.5 wyznaczamy wartości M i funkcję $F(M)$.

Następnie mając już wyznaczone: $F(M)$, $F(M_\infty)$ i M_∞ z wzoru (18.71) wyznaczamy ciśnienie zredukowane $\bar{p}$.

Rozpatrywana metoda daje możność wyznaczenia zależności $\bar{p}^0_{\min} = f(M_{kr})$.

Krytyczną liczbą Macha, jak wiadomo, nazywa się liczbę M_∞ niezakłóconego przepływu, przy której na opływanym ciele osiąga się lokalną liczbę $M = 1$ w punkcie, w którym $\bar{p}^0 = \bar{p}^0_{\min}$. Podstawiając zatem do wzoru (18.70) $\bar{p}^0 = \bar{p}^0_{\min}$, $M_\infty = M_{kr}$ i $M = 1$ otrzymamy następującą zależność między $\bar{p}^0_{\min}$ i M_{kr}:

$$\bar{p}^0_{\min} = 1 - \frac{1}{M_{kr}^2}\left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M_{kr}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{18.74}$$

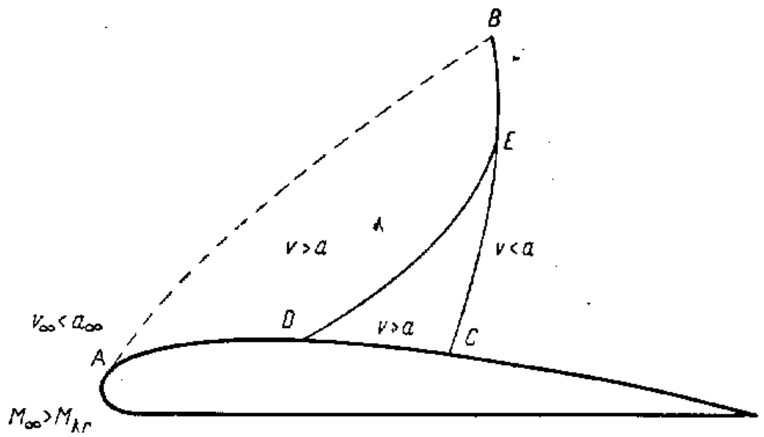
Zależność ta jest dość bliska krzywej S. A. Christjanowicza (rys. 18.6).

Prędkość w danym punkcie przepływu gazu wokół profilu można wyznaczyć z wzoru (18.65); wartość $\frac{\varrho}{\varrho_\infty}$ wylicza się z wzoru (18.69) mając znaną wartość liczby Macha przepływu niezakłóconego M_∞ oraz wyliczoną liczbę Macha M.

§ 6. Przydźwiękowy opływ profilu w zakresie nadkrytycznym. Obliczenie oporu falowego metodą G.F. Burago

W przypadku gdy $1 > M_\infty > M_{kr}$, prędkość przepływu w nieskończoności jest poddźwiękowa, jednak na powierzchni płata powstają obszary prędkości naddźwiękowych, ograniczone („zakończone") falami uderzeniowymi.

Występujące w obszarze naddźwiękowym fale uderzeniowe mogą mieć najrozmaitszą postać. Większość doświadczeń wykazuje jednak, że przy dostatecznie rozwiniętym obszarze naddźwiękowym sięga od powierzchni płata w głąb strumienia silna fala uderzeniowa CB zbliżona do fali prostopadłej (rys. 18.7). Niekiedy przed czołem tej fali tworzy się na płacie skośna fala uderzeniowa DE, wskutek czego fala tego typu nazywana jest falą lambda (ze względu na kształt przypominający literę lambda — przyp. tłum.). Istnienie skośnej fali uderzeniowej zmniejsza natężenie fali prostopadłej, ponieważ gaz po przejściu przez falę skośną zbliża się do fali prostopadłej ze zmniejszoną prędkością. Jednocześnie jednak istnienie skośnej fali uderzeniowej może pogorszyć warunki opływu płata, ponieważ zmiana kierunku prędkości za czołem skośnej fali uderzeniowej może spowodować oderwanie strug.



18.7. Opływ płata przy $1 > M > M_{kr}$

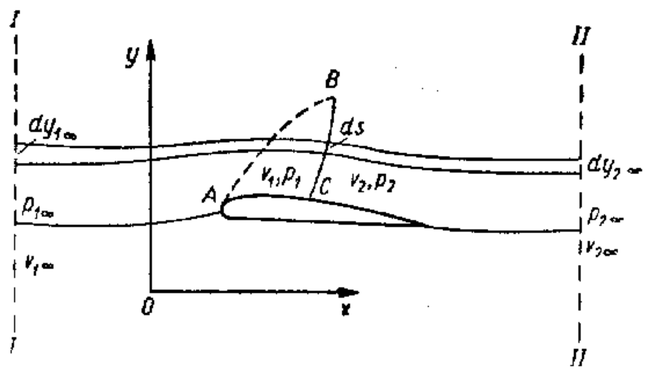
Należy zaznaczyć, że lokalne obszary naddźwiękowe oraz fale uderzeniowe mogą tworzyć się zarówno na grzbiecie, jak i na spodzie płata.

Powstała na powierzchni płata fala uderzeniowa wywołuje tzw. opór falowy X_f. Natomiast opór spowodowany pogorszeniem warunków opływu na skutek istnienia fal uderzeniowych będziemy nazywali oporem dodatkowym — za Christjanowiczem i Sieriebrijskim. Jak wykazały doświadczenia, wielkość oporu dodatkowego jest dla ciał opływowych mała, co wynika z całkowicie zadowalającej zgodności obliczonych dla tych ciał teoretycznych wartości oporu falowego z wartościami otrzymanymi na drodze doświadczalnej.

Metoda obliczenia oporu falowego była po raz pierwszy podana w r. 1944 przez S.A. Christjanowicza i J.M. Sieriebrijskiego.

W paragrafie niniejszym omówimy obliczenie oporu falowego według metody prof. G.F. Burago.

Załóżmy, że na grzbiecie płata (rys. 18.8) powstał lokalny naddźwiękowy obszar ABC, kończący się prostopadłą falą uderzeniową. Wyodrębnijmy w prze-



18.8. Obliczeniowy schemat opływu profilu przy istnieniu prostopadłej fali uderzeniowej

pływie elementarną strugę przechodzącą przez falę uderzeniową. Parametry gazu przed czołem fali oznaczymy w następujący sposób: prędkość — v_1, ciśnienie — p_1, gęstość — ϱ_1; za czołem fali — odpowiednio v_2, p_2, ϱ_2. W dostatecznie dużej odległości od profilu poprowadzimy dwie powierzchnie kontrolne $I-I$ oraz $II-II$. Oznaczymy odpowiednio przez $\varrho_{1\infty}$, $p_{1\infty}$, $v_{1\infty}$, $dy_{1\infty}$ gęstość, ciśnienie, prędkość oraz element długości wzdłuż pierwszej powierzchni, przez $\varrho_{2\infty}$, $p_{2\infty}$, $v_{2\infty}$ i $dy_{2\infty}$ zaś — te same wielkości wzdłuż powierzchni drugiej. Z warunku stałości wydatku znajdziemy dla każdej strugi

$$\varrho_{1\infty} v_{1\infty} dy_{1\infty} = \varrho_{2\infty} v_{2\infty} dy_{2\infty}. \tag{18.75}$$

Stosując zasadę ilości ruchu do masy płynu zawartej pomiędzy powierzchniami kontrolnymi, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{2\infty} v_{2\infty}^2 dy_{2\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{1\infty} v_{1\infty}^2 dy_{1\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy - X_f \tag{18.7}$$

lub biorąc pod uwagę równanie (18.75)

$$X_f = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy + \varrho_{1\infty} v_{1\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy. \tag{18.77}$$

W przypadku gdy fala uderzeniowa nie występuje, tzn. w przypadku ciągłego izentropowego opływu profilu strumieniem gazu, otrzymamy $X_f = 0$, w granicy przy oddalaniu się powierzchni kontrolnych w nieskończoność.

Przy istnieniu fali uderzeniowej na powierzchni profilu analiza równania (18.77) upraszcza się, jeżeli założymy, że bądź ciśnienie p, bądź prędkość v przepływu ustalają się całkowicie w przekroju $II-II$ i przybierają takie same wartości, jak na powierzchni kontrolnej $I-I$.

Christjanowicz i Sieriebrijskij założyli w swej pracy, że ciśnienie p przed oraz za ciałem dąży do ogólnej wartości p_∞, natomiast wartość prędkości $v_{2\infty}$ dąży do $v_{1\infty}$ jedynie w tych strugach, które nie przecinają fali uderzeniowej. Oznacza to, że

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy = 0$$

i poza śladem fali

$$\lim \int \varrho_{1\infty} v_{1\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy = 0.$$

Zatem

$$X_f = \int_0^s \varrho_{1\infty} v_{1\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy, \tag{18.78}$$

gdzie s oznacza długość fali uderzeniowej.

Zgodnie z Burago założymy, że za płatem zachodzi wyrównanie prędkości, tzn. $v_{1\infty} = v_{2\infty}$. W tym przypadku otrzymamy na X_f wyrażenie prostsze

$$X_f = p_{1\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{p_{2\infty}}{p_{1\infty}}\right) dy. \tag{18.79}$$

Biorąc pod uwagę, że przy jednakowych prędkościach ciśnienie na powierzchni kontrolnej $II-II$ powinno być mniejsze niż na powierzchni $I-I$ (ponieważ między nimi znajduje się fala uderzeniowa) otrzymamy

$$\left(\frac{p_{20}}{p_{10}}\right)_\infty = \frac{p_{2\infty}}{p_{1\infty}} = \sigma < 1. \tag{18.80}$$

Jak ustaliliśmy powyżej (str. 391), wielkość σ można przyjąć jako równą

$$\sigma = \frac{166{,}7\, M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2}\right)^{2,5} (1 + 0{,}2\, M_1^2)^{3,5}} < 1, \tag{18.81}$$

gdzie liczba M_1 odpowiada prędkości przepływu bezpośrednio przed czołe fali uderzeniowej.

Dla wszystkich strug nie przecinających fali uderzeniowej $\sigma = 1$.

Wprowadzając σ do wyrażenia (18.79) oraz biorąc pod uwagę, że

$$\varrho_{1\infty} v_{1\infty} dy_{1\infty} = \varrho_1 v_1 ds \qquad \text{lub} \qquad dy_{1\infty} = dy = \frac{\varrho_1 v_1}{\varrho_{1\infty} v_{1\infty}} ds,$$

otrzymamy

$$X_f = p_{1\infty} \int_0^s \frac{\varrho_1 v_1}{\varrho_{1\infty} v_{1\infty}} (1 - \sigma) ds, \qquad (18.8$$

przy czym całkowanie rozciąga się na długość fali uderzeniowej (na zewną fali $\sigma = 1$).

Ponieważ na fali uderzeniowej $\sigma < 1$, zatem $X_f > 0$ i wraz ze zmniejszani się σ wielkość X_f będzie rosła.

Na rysunku 15.12 podano zmianę wielkości σ ze wzrostem liczby Mac M_1. Za pomocą wyrażenia (18.81) można wykazać, że przy $M_1 = 1$ pochod $\frac{d\sigma}{dM_1} = 0$ i $\frac{d^2\sigma}{dM_1^2} = 0$, zaś $\frac{d^3\sigma}{dM_1^3} \neq 0$. W tym przypadku rozkładając wyraże $(1 - \sigma)$ na szereg potęgowy w pobliżu punktu $M_1 = 1$ można otrzymać

$$1 - \sigma = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3\sigma}{dM_1^3} (M_1 - 1)^3 + \ldots \qquad (18.$$

Oznacza to, że opór falowy X_f będzie proporcjonalny do $(M_1 - 1)^3$. Różn $(M_1 - 1)$ można jednak w pierwszym przybliżeniu traktować jako proporcjon ną do różnicy $(M_\infty - M_{kr})$, ponieważ przy $M_\infty = M_{kr}$ obydwie różn stają się zerem (przy $M_\infty = M_{kr}$ liczba M_1 przed czołem fali uderzenio jest według określenia równa jedności). W tym przypadku na współczyn oporu falowego otrzymujemy wzór:

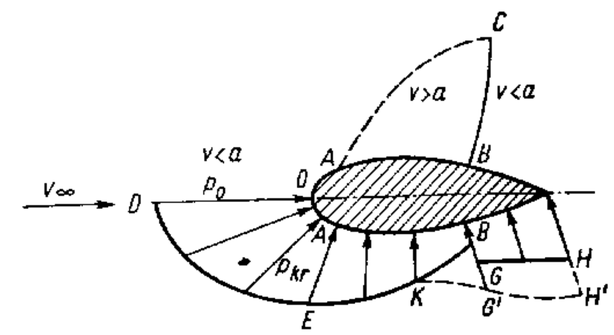
$$c_{xf} = \frac{X_f}{\frac{\varrho_{1\infty} v_{1\infty}^2}{2} b};$$

można przyjąć

$$c_{xf} = A(M_\infty - M_{kr})^3. \qquad (18.$$

Zakładając wyrównanie się ciśnienia za płatem, Christjanowicz i Sieri rijski doszli również do wyrażenia (18.84), które zgodnie z ich wnioskiem j słuszne dla liczb Macha M nie przekraczających $M_{kr} + 0{,}15$. Wielkość wsp czynnika A zależy od typu profilu oraz od rozkładu ciśnień. Jako wielk średnią przyjmuje się $A = 11$. Rysunek 18.9 przedstawia charakter rozkł

ciśnień na profilu symetrycznym opływanym przy zerowym kącie natarcia w przypadku istnienia fali uderzeniowej na grzbiecie profilu. Wykres ciśnienia na spodzie profilu podano odpowiednio do obrazu opływu na grzbiecie. W punkcie spiętrzenia O występuje największe ciśnienie p_0. Następnie ciśnienie na profilu maleje i w punkcie A, gdzie $v = a_{kr}$, osiąga wartość krytyczną $p = p_{kr}$. W obszarze naddźwiękowym AB ciśnienie maleje jeszcze bardziej i tylko na fali BC wzrasta w sposób nieciągły (skokiem). Dalej ciśnienie nadal wzrasta, a prędkość płynu ściśliwego maleje w miarę przesuwania się ku kra-



18.9. Rozkład ciśnień na profilu w przypadku $1 > M_\infty > M_{kr}$

wędzi spływu profilu. Gdyby zmniejszanie się prędkości przepływu naddźwiękowego zachodziło w sposób ciągły, tzn. bez występowania fali uderzeniowej, wówczas przy tych samych prędkościach mielibyśmy w tylnej części profilu ciśnienia większe, zmieniające się wzdłuż linii $KG'H'$ (zamiast GH). Przy istnieniu fali uderzeniowej ciśnienie w tylnej części profilu jest więc mniejsze od ciśnienia, jakie występowałoby w opływie bezuderzeniowym, co jest właśnie przyczyną oporu falowego.

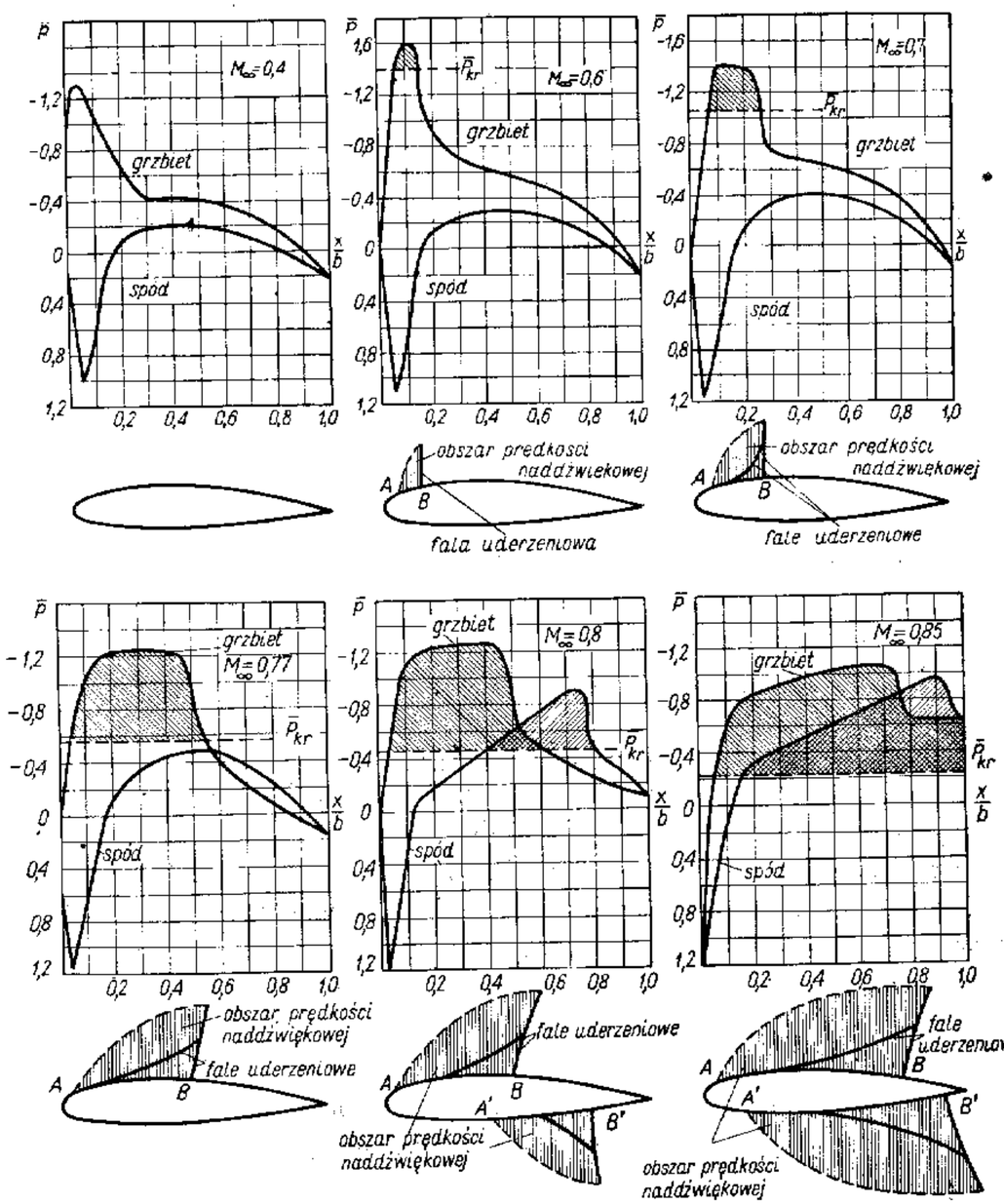
§ 7. Charakterystyki aerodynamiczne profilów w przepływie poddźwiękowym

Na rysunku 18.10 podano przykład zmiany rozkładu ciśnień na powierzchni profilu w miarę wzrostu liczby Macha M_∞, przy stałym kącie natarcia [9].

Przy $M_\infty = 0{,}4$ prędkość lokalna na profilu nie osiąga w żadnym punkcie wartości równej lokalnej prędkości dźwięku. W tym przypadku fala uderzeniowa oczywiście nie występuje.

Przy $M_\infty = 0{,}6$ w pewnym punkcie A na grzbiecie profilu prędkość lokalna osiąga wielkość lokalnej prędkości dźwięku i ciśnienie osiąga wartość krytyczną. Punkt A leży zwykle w pobliżu krawędzi natarcia profilu.

W pewnej odległości za punktem A prędkość rośnie nadal. Między punktami A i B tworzy się niewielki obszar naddźwiękowy. Ciśnienie w tym obszarze odpowiednio maleje. W punkcie B prędkość naddźwiękowa przechodzi w sposób



18.10. Rozkład ciśnień na profilu przy rozmaitych liczbach Macha i stałym kącie natarcia

nieciągły) w prędkość poddźwiękową, ciśnienie zaś wzrasta również w sposób nieciągły — na końcu obszaru naddźwiękowego powstaje fala uderzeniowa.

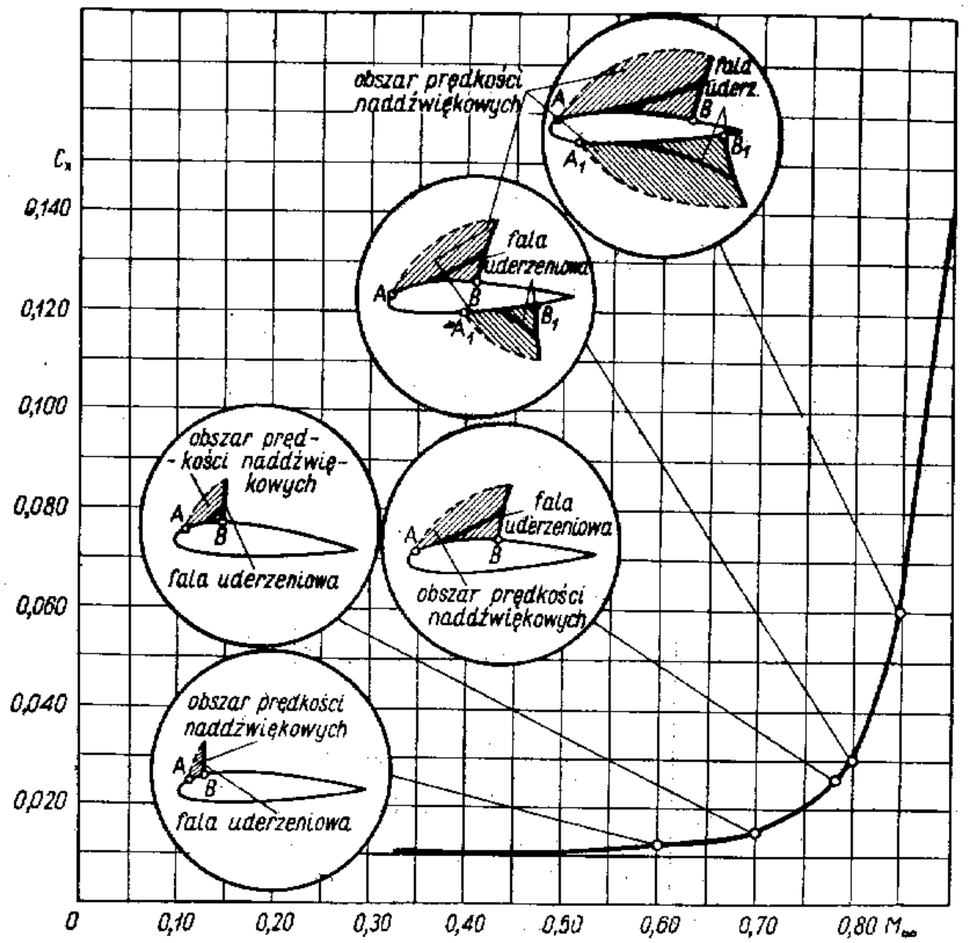
Przy $M_\infty = 0,7$ i $0,77$ mamy obraz analogiczny do poprzedniego, tylko z bardziej rozszerzonym obszarem prędkości naddźwiękowych na grzbiecie profilu, zbliżającym się coraz bliżej do krawędzi spływu profilu.

Przy $M_\infty = 0,8$ obszar naddźwiękowy $A'B'$ tworzy się również na spodzie profilu, gdzie ciśnienie staje się także mniejsze od ciśnienia krytycznego.

Przy $M_\infty = 0,85$ obszary naddźwiękowe istniejące na obydwu stronach profilu rozszerzają się, obejmując prawie całą powierzchnię.

Podane wykresy rozkładu ciśnień wykazują w sposób poglądowy, że ze wzrostem liczby Macha M_∞ obszary podciśnień w tylnej części profilu powiększają się, co wywołuje znaczny wzrost oporu.

Na rysunku 18.11 podano zależność współczynnika oporu profilu c_x od liczby Macha M_∞, przy czym wzrost współczynnika oporu zestawiono z obrazami opływu profilu odpowiadającymi różnym liczbom M_∞.



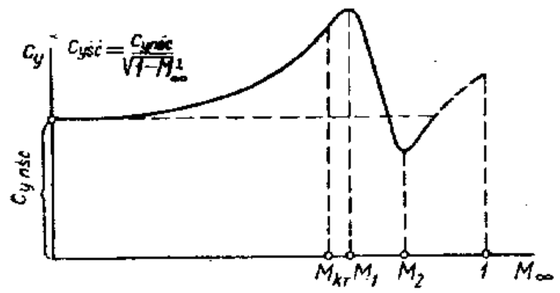
18.11. Ilustracja wpływu lokalnych fal uderzeniowych na współczynnik oporu profilu

Rysunek 18.11 dobitnie ilustruje związek między narastaniem fal uderzeniowych na profilu płata a wzrostem współczynnika oporu profilu. Ze wzrostem liczby Macha M_∞ fale uderzeniowe przesuwają się w kierunku ostrza i stają się jednocześnie coraz dłuższe oraz coraz silniejsze; c_x profilu gwałtownie rośnie.

Tworzenie się obszarów naddźwiękowych oraz zamykających je fal uderzeniowych wraz ze wzrostem liczby Macha M_∞ powoduje znaczną zmianę nie tylko współczynnika oporu c_x profilu, ale również jego współczynnika siły nośnej c_y.

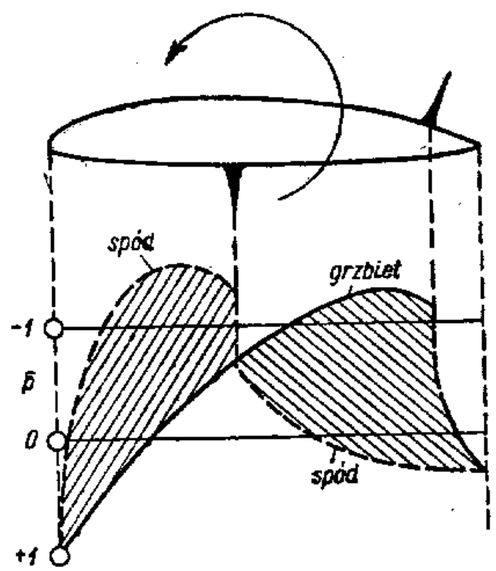
Na rysunku 18.12 podano przykład zależności współczynnika c_y od liczby Macha M_∞.

Początkowo c_y wzrasta ściśle według zależności (18.12), a następnie w miarę zbliżania się do krytycznej wartości liczby Macha M_∞ szybkość wzrastania c_y maleje, a po przekroczeniu pewnego maksimum zaczyna maleć.



18.12. Charakter zależności współczynnika siły nośnej profilu od liczby Macha M_∞ przy stałym kącie natarcia

Można to wytłumaczyć tym (rys. 18.10), że wzrost liczby Macha M_∞ prowadzi do szybkiego rozwoju strefy naddźwiękowej, o znacznym rozrzedzeniu gazu, również na spodzie profilu, i to w zasadzie powoduje gwałtowny spadek współczynnika siły nośnej c_y profilu w warunkach $M_1 < M_\infty < M_2$.



18.13 Charakter rozkładu ciśnień na profilu odpowiadający momentowi pochylającemu ($M_{kr} < M_\infty < 1$)

Jednakże ten spadek nie jest w dalszym ciągu równie gwałtowny, natomiast jak pokazuje praktyka, przy pewnej liczbie Macha $M_2 > M_1$ następuje ponowny wzrost, którego przyczyna nie jest jeszcze dostatecznie wyjaśniona.

Znaczne zmiany rozkładu ciśnień na powierzchni profilu wraz ze wzrostem liczby Macha przy $M_\infty > M_{kr}$ wpływają oczywiście również na zmianę współczynnika momentu.

Na rysunku 18.13 podano jeden z wykresów rozkładu ciśnień przy $M_{kr} < M_\infty < 1$. Należy zaznaczyć, że przy takim rozkładzie fal uderzeniowych jak na powyższym rysunku będzie powstawał moment pochylający, który może osiągać duże wartości, w związku z czym zachodzi konieczność stosowania na samolocie specjalnych urządzeń kompensacyjnych.

§ 8. Wpływ ściśliwości na wielkość prędkości indukowanej płata

Przy zmianie prędkości niezakłóconego przepływu powietrza pole prędkości wokół umieszczonego w nim ciała zmienia się z liczbą Macha, a zatem zmieniają się również prędkości indukowane płata. Wpływ ściśliwości na wielkość prędkości indukowanej zbadany został przez L.A. Simonowa i S.A. Christjanowicza [61]. Ustalili oni, że ściśliwość wprowadza istotną zmianę do prawa Biota — Savarta.

Rozważmy, jak zmienia się pod wpływem ściśliwości płynu pole prędkości, wywołane linią wirową. Skorzystamy z podstawowego równania dynamiki gazów, które dla przypadku przestrzennego ma postać:

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} + (a^2 - v_z^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} - v_x v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) -$$

$$- v_x v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) - v_y v_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 0. \qquad (18.85)$$

Składowe wirowości traktowane jako wielkości znane są określane równaniami:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \qquad (15.86)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \qquad (18.87)$$

Prędkość dźwięku a jest związana z prędkością v w danym punkcie przepływu równaniem

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_{kr}^2(k+1)}{2(k-1)}. \qquad (18.88)$$

Równania (18.85) i (18.86) stanowią nieliniowy układ równań.

Simonow i Christjanowicz wykazali, że zagadnienie określenie pola prędkości dla zadanego rozkładu wirowości z uwzględnieniem ściśliwości powietrza można uprościć dla płata (lub śmigła) z następujących względów. Mianowicie — w tym przypadku pole prędkości jest określone niezakłóconym strumieniem o prędkości V (prędkość przepływu w nieskończoności) oraz prędkościami dodatkowymi, wywołanymi obecnością płata, i stanowiącymi wielkości małe w porównaniu z V (z wyjątkiem niewielkich obszarów sąsiadujących bezpośrednio z powierzchnią płata). Załóżmy, że powierzchnia wirowa jest nieograniczona, będziemy więc zaniedbywali wpływ lokalnych obszarów na powierzchni płata, gdzie występują nieznaczne zakłócenia.

Załóżmy $v_x = V + v_x'$ oraz że v_x', v_y, v_z są wielkościami małymi. W tym przypadku układ równań (18.85) i (18.86) można przekształcić w następujący układ:

$$(1-M^2)\frac{\partial v_x'}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{18.89}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\,\omega_x,\quad \frac{\partial v_x'}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=2\,\omega_y\quad \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x'}{\partial y}=2\,\omega_z, \tag{18.90}$$

gdzie $M=\dfrac{V}{a_\infty}$, a_∞ — prędkość dźwięku odpowiadająca prędkości V przepływu.

Jak wiadomo, układ równań (18.89) i (18.90) można za pomocą przekształcenia

$$v_x'=\frac{\bar{v}_x}{\sqrt{1-M^2}},\quad x'=\frac{x}{\sqrt{1-M^2}} \tag{18.91}$$

sprowadzić do układu równań odpowiadających cieczy nieściśliwej, a mianowicie do układu

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x'}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \tag{18.92}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\,\omega_x,\quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x'}=2\,\omega_y\sqrt{1-M^2},\quad \frac{\partial v_y}{\partial x'}-\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}=2\,\omega_z\sqrt{1-M^2}. \tag{18.93}$$

W ten sposób zagadnienie sprowadzone zostało do wyznaczenia pola prędkości dla zadanego układu wirów w cieczy nieściśliwej, ten zaś przypadek został omówiony w rozdziale V, § 7. Należy nadmienić, że zamiast rozważonego przekształcenia moglibyśmy wykorzystać przekształcenie inne — całkowicie mu równoważne

$$x'=x,\quad y'=y\sqrt{1-M^2},\quad z'=z\sqrt{1-M^2}. \tag{18.94}$$

W rozdziale V, § 7 dowiedliśmy, że rozwiązanie układu równań (18.92) i (18.93) ma postać

$$\bar{v}_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right),\quad v_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x'}\right),\quad v_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x'}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \tag{18.95}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned}
a_x&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\tau'}\frac{\omega_x(\xi'\sqrt{1-M^2},\,\eta,\,\zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta,\\
a_y&=\frac{\sqrt{1-M^2}}{\pi}\int\limits_{\tau'}\frac{\omega_y(\xi'\sqrt{1-M^2},\,\eta,\,\zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta,\\
a_z&=\frac{\sqrt{1-M^2}}{\pi}\int\limits_{\tau'}\frac{\omega_z(\xi'\sqrt{1-M^2},\,\eta,\,\zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{18.96}$$

Całkowanie rozciąga się na obszar τ' odpowiadający w przestrzeni x, y, z obszarowi τ wypełnionemu wirami.

Przejdziemy obecnie do rozważenia linii wirowej o natężeniu $\Gamma=2\,\omega\,\sigma$. W tym przypadku

$$\omega_x=\omega\cos(\omega,x)=\omega\frac{d\xi}{ds},\quad \omega_y=\omega\frac{d\eta}{ds},\quad \omega_z=\omega\frac{d\zeta}{ds}.$$

Biorąc pod uwagę, że $d\tau=d\xi\,d\eta\,d\zeta=\sigma\,ds$, znajdujemy

$$\omega_x\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta=\omega\,d\tau\frac{d\xi'}{d\xi}\frac{d\xi}{ds}=\omega\,\sigma\,d\xi'.$$

Poza tym

$$\omega_y\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta=\omega\,d\tau\frac{d\xi'}{d\xi}\frac{d\eta}{ds}=\frac{\omega\,\sigma\,d\eta}{\sqrt{1-M^2}},$$

$$\omega_z\,d\xi'\,d\eta\,d\zeta=\frac{\omega\,\sigma\,d\zeta}{\sqrt{1-M^2}}.$$

W tym przypadku wzory (18.96) przybiorą następującą postać:

$$a_x=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\xi'}{r'},\quad a_y=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\eta}{r'},\quad a_z=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\zeta}{r'}, \tag{18.97}$$

gdzie $r'=\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Całkowanie przeprowadzamy wzdłuż osi linii wirowej w przestrzeni x', y, z.

Ze wzorów (18.96) i (18.97) wyrażających prawo Biota—Savarta wynika, że dla znalezienia prędkości indukowanej przez linię wirową w dowolnym punkcie przestrzennym (x, y, z), przy uwzględnieniu ściśliwości powietrza, należy zwiększyć długość linii wirowej, nie zmieniając jej natężenia, w kierunku przepływu w nieskończoności $\dfrac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ razy oraz, korzystając z prawa Biota—Savarta, określić prędkość wywołaną przez tę linię wirową w punkcie $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-M^2}}, y, z\right)$; następnie należy otrzymaną dodatkową składową prędkości powiększyć w kierunku przepływu niezakłóconego $\dfrac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ razy.

Przechodząc do układu wirów płata o skończonej rozpiętości przypomnimy, że spływająca z płata powierzchnia wirowa stanowi układ wirów prostoliniowych ciągnących się w jednym kierunku do nieskończoności. W celu określenia pola prędkości indukowanych wystarczy określić pole prędkości wzbudzone przez na wpół nieskończony wir prostoliniowy, a następnie scałkować względem wszystkich wirów.

W tym celu skorzystamy z uogólnionego równania Biota—Savarta.

Rozważymy prostoliniowy odcinek linii wirowej zgodnej co do kierunku z prędkością w nieskończoności. Niech punkty $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$ będą końcowymi punktami tego wirowego odcinka. Prędkość v skierowana jest równolegle do osi x. Rozważymy dowolny punkt $P(x, y, z)$. Indukowana w nim przez odcinek wirowy prędkość będzie leżała w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru.

Dodatkowe składowe prędkości równoległe do prędkości przepływu niezakłóconego będą zatem równe zeru. W tym przypadku, zgodnie z otrzymanym wynikiem, prędkość v w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru określona zostanie w następujący sposób:

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{\left[\frac{(x-x_A)}{\sqrt{1-M^2}}\right]^2+h^2}}+\sqrt{1-\frac{h^2}{\left[\frac{(x-x_B)}{\sqrt{1-M^2}}\right]^2+h^2}}\right], \tag{18.98}$$

gdzie $h = \sqrt{(y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$ — odległość punktu P od wiru. W przypadku szczególnym dla wiru „półnieskończonego" otrzymamy

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h}\left[\sqrt{1 - \frac{h^2}{\left[\frac{x - x_A}{\sqrt{1 - M^2}}\right]^2 + h^2}} + 1\right]. \tag{18.99}$$

Dla prędkości w punkcie płaszczyzny prostopadłej do osi „półwiru" oraz przechodzącej przez jego koniec, czyli przy $x = x_A$, otrzymamy

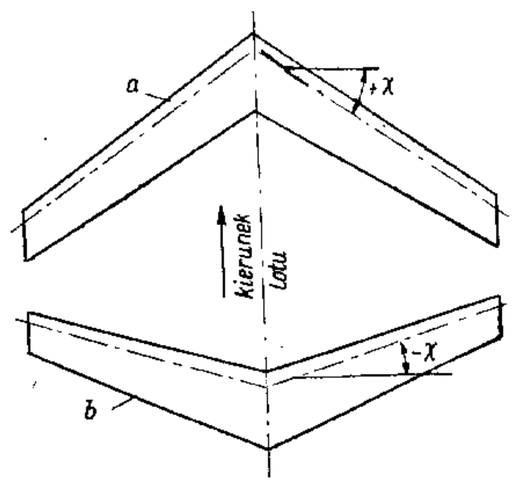
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Wyciągamy stąd wniosek, że dla płata opływanego poddźwiękowym strumieniem płynu ściśliwego prędkości indukowane na linii nośnej (oraz na całej powierzchni przechodzącej przez nią prostopadle do prędkości przepływu niezakłóconego) będą takie same, jak dla płata w cieczy nieściśliwej o takim samym rozkładzie cyrkulacji wzdłuż rozpiętości. Wpływ ściśliwości powietrza wpływa jedynie na zmianę charakterystyk profilów płata.

§ 9. Płat o skończonej rozpiętości w przepływach poddźwiękowych

Jak wynika z powyższego, wpływ ściśliwości powietrza na charakterystyki aerodynamiczne profilu płata nośnego może być w pewnym zakresie liczb Macha M_∞ bardzo istotny.

Wpływ ten można w dużym stopniu zmniejszyć przez zastosowanie płatów o specjalnym kształcie — tzw. płatów skośnych.



18.14. Płat skośny (a — skos prosty, b — skos odwrotny)

Płaty, których oś przechodząca wzdłuż rozpiętości płata ma kształt łamanej, tworzącej z poprzeczną osią z pewien kąt χ, nazywane są *płatami skośnymi* (rys. 18.14).

Kąt χ nazywa się *kątem skosu*. Wpływ skosu na charakterystyki aerodynamiczne płata można wytłumaczyć w następujący sposób.

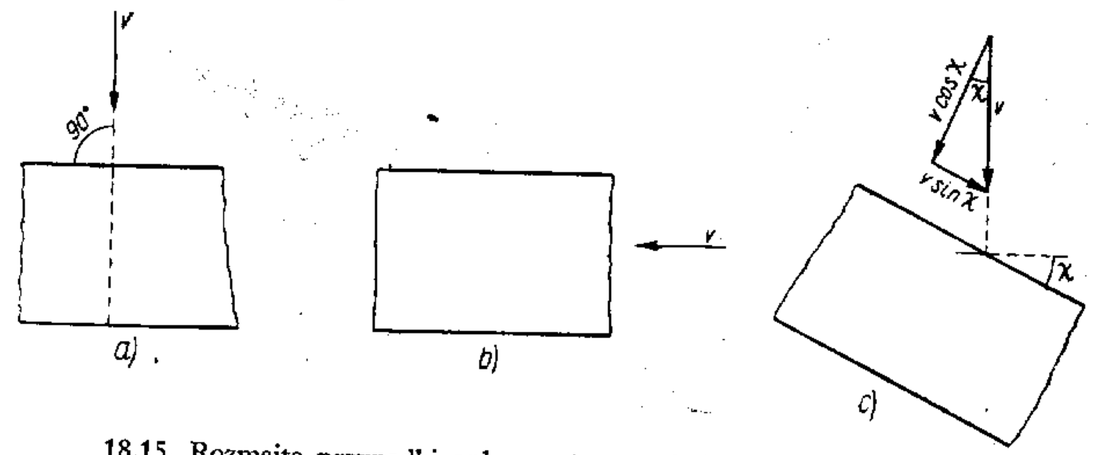
Płat skośny można w pierwszym przybliżeniu traktować jako płat złożony z dwóch części, ustawionych ukośnie do strumienia niezakłóconego, którego prędkość oznaczymy literą v.

Gdybyśmy mieli do czynienia z płatem o rozpiętości nieskończonej, a kierunek przepływu byłby prostopadły do rozpiętości (rys. 18.15a), wówczas prędkość w każdym punkcie profilu miałaby określoną wartość różniącą się od prędkości przepływu niezakłóconego ze względu na wpływ grubości pro-

W zależności od rozkładu prędkości na profilu ustali się na nim odpowiedni rozkład ciśnień, które będą się różnić od ciśnienia przepływu niezakłóconego.

Gdybyśmy mieli ten sam płat (rys. 18.15b), lecz niezakłócony przepływ byłby skierowany wzdłuż nieskończonej rozpiętości płata — w tym przypadku wartość prędkości w pobliżu wszystkich punktów profilu byłaby wielkością stałą i zgodną z wartością prędkości v, ponieważ zakładamy, że profile w każdym przekroju prostopadłym do rozpiętości są jednakowe. Jeśli idzie o rozkład ciśnień, to na mocy równości prędkości, ciśnienia we wszystkich punktach takiego nieskończonego płata byłyby również jednakowe.

Omówimy teraz przypadek (rys. 18.15c), kiedy płat o rozpiętości nieskończonej jest ustawiony pod pewnym kątem χ względem kierunku prędkości v przepływu niezakłóconego.



18.15. Rozmaite przypadki opływu płata o nieskończonej rozpiętości

Rozkładając prędkość v na dwie składowe: $v \cos\chi$ i $v \sin\chi$, można na podstawie rozważonych powyżej dwóch przypadków odrzucić wpływ składowej prędkości $v \sin\chi$ i uwzględniać jedynie wpływ składowej $v \cos\chi$[1].

Składowa prędkości $v \cos\chi$ oznaczana jest przez v_n:

$$v_n = v \cos\chi.$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku efektywna liczba Macha będzie

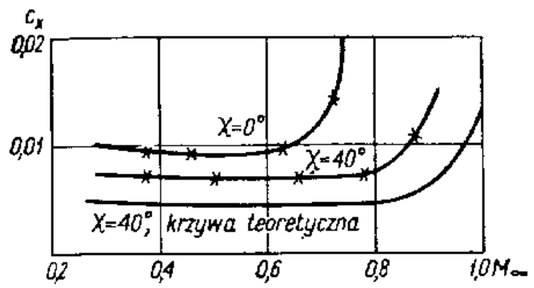
$$M_n = M \cos\chi. \tag{18.100}$$

Doszliśmy w ten sposób do ważnego wniosku. Lokalne przekroczenie prędkości dźwięku w przypadku płata opływanego ukośnie może nastąpić dopiero wtedy, gdy składowa prędkości prostopadła do rozpiętości $v \cos\chi$, a nie prędkość całkowita v, przekroczy wartość krytyczną; $M_{n\,kr}$ będzie przy tym większe od M_{kr}.

Płat skośny jest w zasadzie podobny do omówionego płata opływanego

[1] Jest to ścisłe tylko dla przepływu potencjalnego, gdyż przepływ w warstwie przyściennej w pewnym stopniu zależy od składowej prędkości równoległej do przedniej krawędzi.

skośnie. Z tego względu w przypadku płata skośnego krytyczna liczba Macha bywa zwykle większa niż w przypadku płata prostego o takich samych profilach, tzn. opór falowy powstaje na płacie skośnym przy większych liczbach Macha.



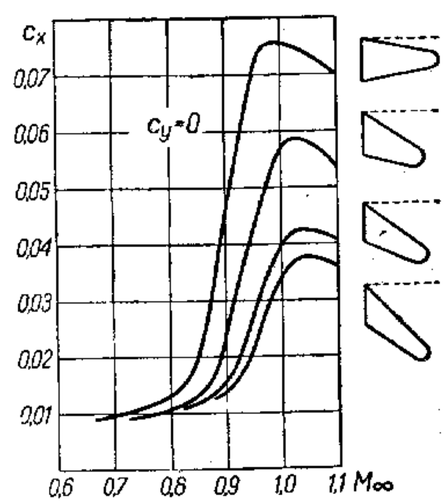
18.16. Zależności $c_x = f(M)$ dla płata skośnego i prostokątnego

Na rysunku 18.16 podano doświadczalną zależność współczynnika oporu od liczby Macha M_∞ dla pewnego płata prostokątnego bez skosu ($\chi = 0$) oraz dla tego samego płata ze skosem ($\chi = 40°$, krzywa środkowa). Jak widzimy, zysk wynikający ze stosowania płatów skośnych jest poważny i wyraźnie wpływa na zwiększenie krytycznej liczby Macha M_{kr} całego płata.

Oprócz tego w płatach skośnych obniża się gwałtownie wraz z wzrostem kąta skosu maksimum współczynnika c_x. Wyraźnie wynika to z wykresu na rysunku 18.17, na którym przytoczona jest otrzymana doświadczalnie zależność c_x od liczby Macha M_∞ dla czterech płatów skośnych o różnych kątach skosu.

Zatem płaty skośne mają istotne zalety w stosunku do płatów prostokątnych, o ile chodzi o loty przy dużych liczbach Macha M_∞.

Zagadnienia opływu skośnych płatów były omawiane w pracach J. M. Minskiego, A. A. Dorodnicyna [50], W. W. Struminskiego, H. Multhoppa, J. Weissingera i innych.



18.17. Zależność $c_x = f(M_\infty)$ dla płatów o różnych skosach

Zwróćmy uwagę na sposób obliczania charakterystyk aerodynamicznych płata skośnego w warunkach $M_\infty < M_{kr}$.

W rozdziale XI rozpatrywana była wirowa teoria płata nośnego o skończonej rozpiętości. W myśl tej teorii zastępowano płat umieszczoną na 1/4 cięciwy linią wirową o natężeniu $\Gamma(z)$ zmiennym wzdłuż rozpiętości płata i układem wirów swobodnych o natężeniu $\frac{d\Gamma(z)}{dz}dz$ tworzących za płatem płaską powierzchnię wirową. Wyniki uzyskiwane na podstawie tej teorii dobrze zgadzają się z doświadczalnymi danymi dla płatów o dostatecznie dużej rozpiętości ($\lambda > 4$) i linii ognisk (linii 1/4 cięciwy) prostopadłej do kierunku niezakłóconego przepływu.

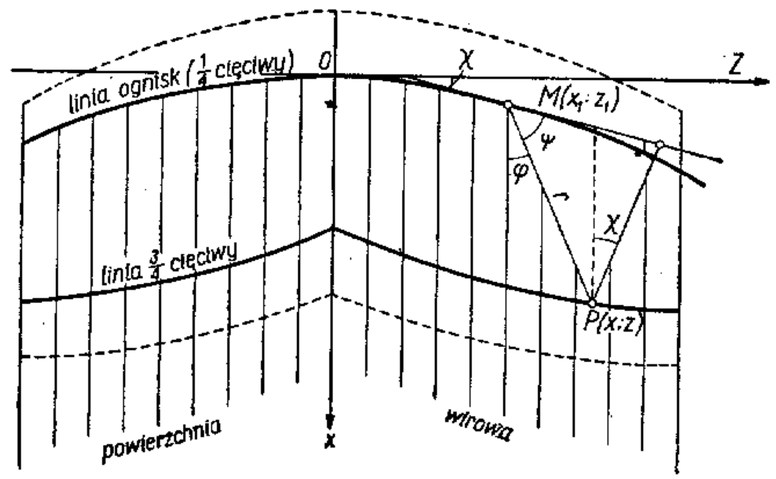
Dla skrzydeł, których linia ognisk nie jest prostopadła do kierunku niezakłóconego przepływu (a w szczególności dla płatów skośnych) teoria linii wirowej daje wyniki niezgodne z rzeczywistością.

W tych przypadkach dla wyznaczania charakterystyk aerodynamicznych płata trzeba by wprowadzić do rozważań powierzchnię wirową. Jednakże na skutek dużych trudności matematycznych, teoria ta nie została dotychczas wykorzystana do konkretnych obliczeń praktycznych.

Rozpatrzmy jeden z ostatnio podanych sposobów obliczania aerodynamicznych charakterystyk płatów, których linia ognisk jest na ogół linią zakrzywioną (rys. 18.18).

Ten sposób obliczania zezwala na wystarczająco szybkie i dostatecznie dokładne dla praktyki obliczanie płatów o dowolnym obrysie (w tej liczbie i płatów skośnych).

Wyprowadźmy podstawowe zależności zezwalające na określenie rozkładu cyrkulacji $\Gamma(z)$ wzdłuż rozpiętości płata o dowolnym obrysie (rys. 18.18).



18.18. Do wyprowadzenia zależności określającej rozkład cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata o dowolnym obrysie

Łatwo spostrzec, że przy niezbyt małym wydłużeniu płat na całej swej długości (z wyjątkiem części środkowej) pracuje w warunkach bliskich warunkom opływu płata skośnego o kącie skosu χ.

Dla każdego przekroju (z) płata równanie (11.13) można napisać w postaci

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 \cos \chi(z)\, v_\infty\, b(z)\, [\alpha(z) - \Delta\alpha_i(z)], \tag{18.101}$$

gdzie:

$\Gamma(z)$ — cyrkulacja dokoła danego przekroju (z);

a_0 — wielkość $\frac{dc_y}{d\alpha}$ dla przekroju prostopadłego do linii nośnej;

α — kąt natarcia w danym przekroju, mierzony od kierunku zerowej siły nośnej w płaszczyźnie równoległej xy;

$b(z)$ — cięciwa, mierzona wzdłuż osi x;

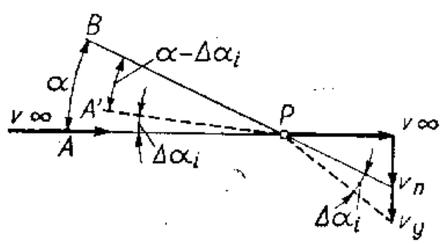
$\Delta\alpha_i(z)$ — zmiana kąta natarcia, którą wprowadza się do równania (11.13) w celu uwzględnienia wpływu skończonej rozpiętości i skończonej cięciwy płata.

W ten sposób przyjmuje się (rys. 18.19), że każdy przekrój płata o skończonej rozpiętości opływany jest tak samo jak przekrój płata skośnego o nieskończonej rozpiętości przy kącie natarcia zmienionym o wielkość $\Delta\alpha_i(z)$.

Zmianę $\Delta\alpha_i(z)$ kąta natarcia oblicza się w sposób następujący. Wprowadza się dwa podstawowe założenia: 1) płat zastępuje się nośną linią wirową o natężeniu $\Gamma(z)$, umieszczoną na 1/4 cięciw i układem wirów swobodnych o natężeniu $\frac{d\Gamma(z)}{dz}dz$ tworzących za płatem płaską powierzchnię wirową; 2) przybliżone uwzględnienie skończoności rozpiętości i skończoności cięciwy płata dokonuje się przez określenie prędkości indukowanych na linii 3/4 cięciw płata.

Rozpatrzmy nieco szczegółowiej te dwa podstawowe założenia.

Według teorii profilu cienkiego $c_y = 2\pi\alpha$, gdzie α — kąt natarcia, mierzony od kierunku zerowej siły nośnej (od tzw. „pierwszej osi profilu"). W ten sposób, współczynnik siły nośnej cienkiego profilu określa się przez lokalny kąt natarcia w punkcie styczności pierwszej osi profilu z jego szkieletową. Dla profilów Żukowskiego ten punkt leży prawie dokładnie na 3/4 cięciwy.



18.19 Do wyprowadzenia zależności określającej rozkład cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata o dowolnym obrysie

Jeżeli dla tego punktu profilu napisze się warunek znikania normalnej składowej prędkości oraz jeżeli zastąpi się układ wirów rozłożonych wzdłuż szkieletowej profilu przez jeden wir nośny umieszczony w odległości c od tego punktu, to (wykorzystując wzór Biota—Savarta i równanie (11.13) otrzyma się $c = \frac{b}{2}$. Daje to możność zastąpienia płata o cienkim profilu (oraz z wystarczającą dokładnością i innych stosowanych płatów) przez nośną linię wirową umieszczoną na linii 1/4 cięciw i przez spływającą z niego powierzchnię wirową.

Mówiliśmy już, że na skutek skończonej rozpiętości płata przepływ nieco się zniekształca. Każdy przekrój (z) płata o skończonej rozpiętości jest opływany tak samo, jak przekrój (z) płata skośnego z kątem skosu $\chi(z)$ o nieskończonej rozpiętości, lecz przy zmienionym kącie natarcia.

Przyjmuje się (rys. 18.19), że ten rzeczywisty kąt natarcia $(A'PB)$ w przekroju z różni się w obydwu przypadkach od kąta natarcia (APB) w tymże przekroju, przy płaskim przepływie, o różnicę między kątami odchylenia strug w punkcie 3/4 cięciwy

$$\Delta\alpha_i(z) = \frac{v_y - v_n}{v_\infty}, \tag{18.102}$$

gdzie:

v_y — prędkość indukowana równolegle do osi y przez cały układ wirowy płata w punkcie leżącym na 3/4 cięciwy w rozpatrywanym przekroju (z),

v_n — prędkość indukowana równolegle do osi y, w rozpatrywanym przekroju (z) i w punkcie leżącym na 3/4 cięciwy, przez płat nośny o nieskończenie wielkiej rozpiętości:

$$v_n = \frac{\Gamma(z)}{2\pi\frac{b}{2}\cos\chi(z)}. \tag{18.103}$$

Ta różnica $\Delta\alpha_i$ nazywa się kątem indukowanego odchylenia strug[1].

Jeżeli do równania (18.101) podstawi się wartość $\Delta\alpha_i$ z uwzględnieniem równań (18.102) i (18.103) oraz gdy dla ułatwienia obliczeń przejdziemy do wielkości bezwymiarowych

$$\frac{\Gamma}{l v_\infty} = G, \quad \frac{l}{b(z)} = \Lambda, \quad \frac{2z}{l} = \bar{z}, \quad \frac{2z_1}{l} = \bar{z}_1, \quad \frac{v_y}{v_\infty} = \Delta\alpha, \tag{18.104}$$

to równanie (18.101) przyjmie następującą postać:

$$\frac{\Lambda}{\pi\cos\chi}\left(\frac{2\pi}{a_0} - 1\right)G = \alpha - \Delta\alpha. \tag{18.105}$$

Równanie to jest podstawowe dla obliczania rozkładu cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata.

Wszystkie człony równania są funkcjami z, tzn. są zależne od położenia rozważanego przekroju.

Kąt $\Delta\alpha$ będący w istocie swej indukowaną prędkością bezwymiarową, indukowaną przez cały układ wirów w punkcie $P(x, z)$, określa się z równania

$$\Delta\alpha = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{v_{y1} + v_{y2}}{v_\infty},$$

gdzie:

v_{y1} — indukowana prędkość w punkcie $P(x, y)$ od całego związanego wiru płata;

v_{y2} — indukowana prędkość w punkcie $P(x, y)$ od całej powierzchni wirowej spływającej z płata.

Wyznaczamy wielkość prędkości v_{y1}.

Weźmy na wirze związanym dowolny punkt $M(x_1, z_1)$. Wyodrębnijmy w obszarze tego punktu $M(x_1, z_1)$ elementarny odcinek wiru związanego o długości dL i o natężeniu $\Gamma(z_1)$.

[1] W odróżnieniu od analogicznego kąta odchylenia strug (rozdz. XI), który obliczało się na samej linii nośnej, tu kąt indukowanego odchylenia strug oblicza się na 1/2 cięciwy za linią nośną.

W tym przypadku wzór na indukowaną prędkość v_{y1} dla punktu $P(x, z)$ przyjmie przy wykorzystaniu wzorów (5.19) postać:

$$v_{y1} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma(z_1)}{4\pi r^2} \sin\psi \, dL,$$

gdzie (rys. 18.18)

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

$$\sin\psi = \frac{x - x_1 - (z - z_1)\operatorname{tg}\chi}{r} \cos\chi,$$

w tych zaś wzorach

$x_1 = x_1(z_1)$ — równanie linii nośnej,

$x = x(z)$ — równanie linii, na której wylicza się indukowaną prędkość (v_y); linia ta łączy punkty, odpowiadające 3/4 długości każdej cięciwy.

Jeżeli uwzględni się, że $dL = \frac{dz_1}{\cos\chi}$, to otrzymamy

$$v_{y1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma(z_1)}{r^2} \frac{\sin\psi}{\cos\chi} dz_1. \tag{18.106}$$

Obliczmy następnie wielkość prędkości v_{y2}.

W tym celu trzeba skorzystać z wzoru dla określenia w punkcie $P(x, y)$ prędkości, indukowanej „półnieskończonym" wirem o natężeniu $\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} dz_1$ spływającym z płata w punkcie $M(x_1, z_1)$.

W tym przypadku wyrażenie na indukowaną prędkość v_{y2} dla punktu $P(x, y)$ (por. wzór 5.20) będzie miało postać

$$v_{y2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} dz_1 \frac{1}{z_1 - z} (1 + \cos\varphi), \tag{18.106'}$$

gdzie

$$\cos\varphi = \frac{x - x_1}{r}.$$

A więc podstawiając uzyskane wyrażenia (18.106) i (18.106') do wzoru $\Delta\alpha = \frac{v_{y1} + v_{y2}}{v_\infty}$, otrzymamy

$$\Delta\alpha(z) = \frac{1}{4\pi v_\infty} \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma(z_1)}{r^2} \frac{\sin\psi}{\cos\chi} dz_1 + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z - z_1} (1 + \cos\varphi) dz_1 \right]. \tag{18.107}$$

Napiszmy drugą całkę w formie:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z - z_1} (1 + \cos\varphi) dz_1 = 2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z - z_1} dz_1 - \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z - z_1} (1 - \cos\varphi) dz_1. \tag{18.108}$$

Całkując przez części otrzymamy

$$-\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z - z_1} (1 - \cos\varphi) dz_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z_1) \left[\frac{1 - \cos\varphi}{(z - z_1)^2} - \frac{x - x_1 - (z - z_1)\operatorname{tg}\chi}{r^3} \right] dz_1.$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie do równania (18.107) oraz przechodząc do bezwymiarowych wielkości będziemy mieli

$$\Delta\alpha(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_{-1}^{+1} \frac{G'(\bar{z}_1)}{\bar{z} - \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \int_{-1}^{+1} G(\bar{z}_1) K(\bar{z}, \bar{z}_1) dz_1 \right], \tag{18.109}$$

gdzie

$$K(\bar{z}, \bar{z}_1) = \frac{1 - \cos\varphi(\bar{z}, \bar{z}_1)}{(\bar{z} - \bar{z}_1)^2}. \tag{18.110}$$

A więc równanie (18.105) dla płatów o dowolnych obrysach przybierze ostatecznie następującą postać:

$$\frac{\Lambda(\bar{z})}{\pi \cos\chi(\bar{z})} \left[\frac{2\pi}{a_0(\bar{z})} - 1 \right] G(\bar{z}) =$$

$$= \alpha(\bar{z}) - \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_{-1}^{+1} \frac{G'(\bar{z}_1)}{\bar{z} - \bar{z}_1} dz_1 + \int_{-1}^{+1} G(\bar{z}_1) K(\bar{z}, \bar{z}_1) dz_1 \right]. \tag{18.111}$$

Całkowo-różniczkowe równanie (18.111) jest podstawowym równaniem,

pozwalającym wyznaczyć cyrkulację $G(\bar{z})$ dla dowolnego przekroju płata, a zatem również wzdłuż całej rozpiętości płata[1].

Znając rozkład cyrkulacji, można już łatwo określić charakterystyki aerodynamiczne płata.

Wykorzystując równanie

$$\Gamma(\bar{z}) = \frac{1}{2} c_y(\bar{z})\, b(\bar{z})\, v_\infty$$

oraz równanie

$$\Gamma(\bar{z}) = l\, v_\infty\, G(\bar{z}),$$

otrzymamy

$$c_y(\bar{z}) = \frac{2l}{b(\bar{z})} G(\bar{z}).$$

W celu wyznaczenia współczynnika siły nośnej całego płata skorzystajmy z teorii Żukowskiego

$$dY = \varrho\, \Gamma(\bar{z})\, v_\infty\, d\bar{z}$$

lub przechodząc do wielkości bezwymiarowych

$$dY = \varrho\, l\, v_\infty\, G(\bar{z})\, v_\infty \frac{l}{2} d\bar{z} = \frac{\varrho v_\infty^2}{2} l^2\, G(\bar{z})\, d\bar{z}.$$

A więc siła nośna Y całego płata i współczynniki siły nośnej całego płata ($c_{y\text{płata}}$) będą odpowiednio równe

$$Y = \frac{\varrho v_\infty^2}{2} \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z}, \quad c_{y\text{płata}} = \frac{l^2}{S} \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z}$$

lub

$$c_{y\text{płata}} = \lambda \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z},$$

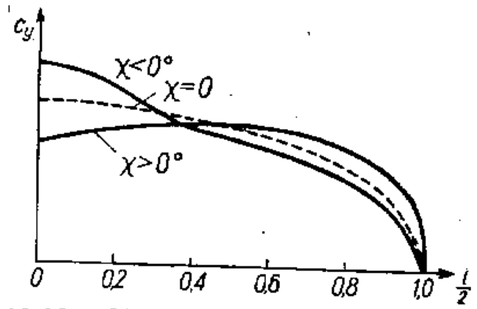
gdzie $\lambda = \dfrac{l^2}{S}$ — wydłużenie płata skośnego.

W ten sposób

$$\frac{c_y(\bar{z})}{c_{y\text{płata}}} = \frac{2l}{b(z)} \frac{G(\bar{z})}{\lambda \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z}}.$$

[1] W celu rozwiązania równania (18.111) można skorzystać na przykład ze sposobu wielomianów [49].

Na rysunku 18.20 pokazane zostały dla przykładu krzywe charakteryzujące rozkład współczynnika siły nośnej przekrojów płata wzdłuż rozpiętości skośnego płata przy różnych kątach skosu. Wykres ten wyraźnie wskazuje, że skos płatów zasadniczo wpływa na charakter rozkładu siły nośnej wzdłuż rozpiętości płata. Istnienie skosu powoduje zmianę rozkładu siły nośnej w porównaniu z płatem prostokątnym ($\chi = 0$).



18.20. Charakter rozkładu współczynnika siły nośnej w różnych przekrojach wzdłuż rozpiętości płata przy różnych kątach skosu

Zwróćmy uwagę na to, że przy poddźwiękowych prędkościach lotu niezbyt bliskich prędkości dźwięku, można uwzględnić przy obliczaniu płata również wpływ ściśliwości.

Wpływ ściśliwości uwzględnia się za pomocą teorii zlinearyzowanej według metody podanej przez L. A. Simonowa i S. A. Christjanowicza. Zgodnie z tą metodą (str. 467) należy w celu określenia prędkością indukowanych w płynie ściśliwym „rozciągnąć przestrzeń" $\dfrac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ razy wzdłuż osi x i w tej zniekształconej przestrzeni wyliczyć prędkości indukowane w taki sam sposób jak dla płynu nieściśliwego.

W ten sposób płatowi o rzeczywistym kącie skosu χ i wydłużeniu λ odpowiada przy liczbie Macha M_∞ płat o kącie skosu

$$\chi_M = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\chi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}\right)$$

i wydłużeniu

$$\lambda_M = \lambda \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Na zakończenie należy zaznaczyć, że podstawowe równanie (18.111) do obliczania charakterystyk aerodynamicznych płata wyprowadzone zostało w założeniu, że opływ przekrojów płata ($\bar{z}$) można uważać za płaski. Jednakże przy dużych kątach natarcia (oraz dla płatów o małym wydłużeniu) powstają intensywne przepływy poprzeczne, które bardzo zmieniają charakter opływu przekrojów płata.

Z tych względów podana tu metoda obliczeń zasadniczo nie może być stosowana do określenia charakterystyk aerodynamicznych płatów pracujących przy dużych (prawie krytycznych) kątach natarcia i dla płatów o małym wydłużeniu.

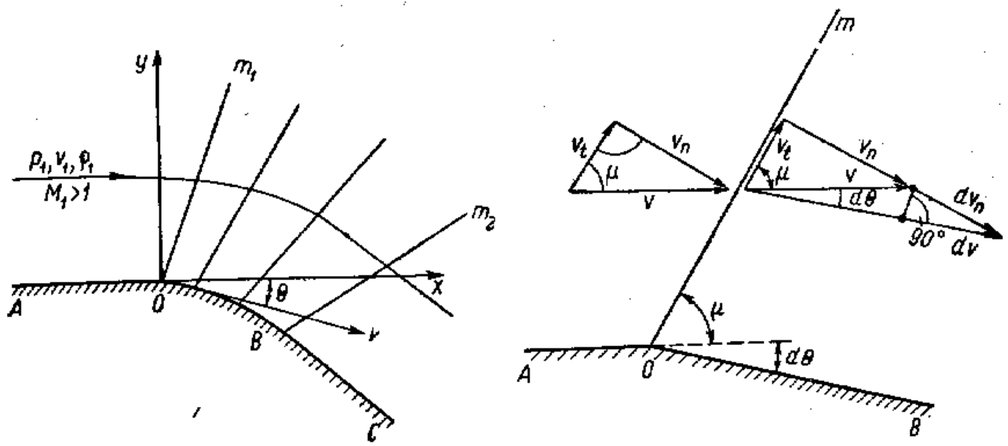
O sposobach obliczania płatów o małym wydłużeniu czytelnik może dowiedzieć się z pracy G. F. Burago [76].

Rozdział XIX

PODSTAWY TEORII PROFILU I PŁATA W NADDŹWIĘKOWYM PRZEPŁYWIE GAZU

§ 1. Pojęcie zlinearyzowanego naddźwiękowego przepływu rozrzedzeniowego i zgęszczeniowego wzdłuż sztywnej ścianki

Rozważymy płaski potencjalny ustalony przepływ naddźwiękowy wzdłuż sztywnej ścianki składającej się z dwóch prostoliniowych odcinków AO i BC oraz łączącego je odcinka krzywoliniowego OB (rys. 19.1 i 19.2). Przypadek przedstawiony na rys. 19.1 odpowiada przepływowi rozrzedzeniowemu, a na



19.1. Płaski naddźwiękowy przepływ gazu wzdłuż ścianki wypukłej

rys. 19.2 — przepływowi zgęszczeniowemu. W obydwu przypadkach półproste AO i BC są styczne w punktach — odpowiednio — O i B do krzywej OB. Strumień niezakłócony, płynący wzdłuż ścianki AO ma prędkość v_1, ciśnienie p_1 i gęstość ϱ_1.

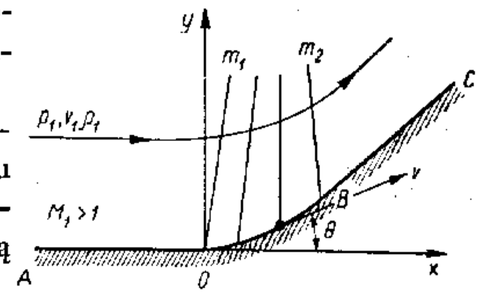
Zanim przystąpimy do zbadania tych dwóch przepływów za pomocą metody linearyzacji, rozważmy następujący przypadek.

Załóżmy, że jednostajny naddźwiękowy strumień gazu[1] płynący wzdłuż sztywnej ścianki AO z prędkością v odchyla się o pewien mały kąt $d\theta$, przy czym odchylenie strumienia wywołane jest załamaniem ścianki AO w punkcie O o kąt $d\theta$ (rys. 19.1).

[1] O równoległych liniach prądu (przyp. tłum.).

W rozważanym przepływie naddźwiękowym punkt O staje się źródłem drobnych zakłóceń. Z punktu O poprowadzimy charakterystykę Om. Na lewo od tej charakterystyki przepływ jest niezakłócony i ma we wszystkich punktach jednakową prędkość v. Charakterystyka Om (jak również pozostałe charakterystyki tej rodziny) jest więc prostą pokrywającą się z linią Macha[1].

Przecinając linię Macha Om strumień zmienia kierunek o kąt $d\theta$ w stosunku do kierunku pierwotnego i porusza się następnie równolegle do ścianki OB z nieznacznie zmienioną prędkością $v + dv$ i ciśnieniem $p + dp$.



19.2. Płaski naddźwiękowy przepływ gazu wzdłuż ścianki wklęsłej

Określimy zależność pomiędzy wielkością przyrostu prędkości dv a zmianą kierunku przepływu $d\theta$.

W tym celu posłużymy się równaniem ciągłości oraz równaniem ilości ruchu. Wykorzystując równanie ciągłości, otrzymamy

$$\varrho v_n = (\varrho + d\varrho)(v_n + dv_n) \tag{19.1}$$

lub zachowując tylko wielkości małe pierwszego rzędu

$$v_n\, d\varrho + \varrho\, dv_n = 0.$$

Stosując równanie ilości ruchu w odniesieniu do składowych równoległych do linii Macha otrzymamy

$$\varrho v_n v_{t1} = (\varrho + d\varrho)(v_n + dv_n) v_{t2},$$

skąd uwzględniając równanie (19.1) otrzymamy

$$v_{t1} = v_{t2} = v_t. \tag{19.2}$$

Znaczy to, że składowe styczne do prędkości po obu stronach linii Macha są sobie równe. Z równania ilości ruchu w kierunku prostopadłym do linii Macha otrzymujemy

$$v_n\, dv_n + \frac{dp}{\varrho} = 0. \tag{19.2'}$$

Bezwzględny przyrost prędkości v (rys. 19.1) można wyrazić w postaci

$$dv = dv_n \cos[90° - (\mu + d\theta)],$$

skąd, z dokładnością do małych pierwszego rzędu, mamy

$$dv = dv_n \sin \mu. \tag{19.3}$$

[1] Porównaj odsyłacz na str. 397 (przyp. red.).

Z rysunku 19.1 wynika także prosta zależność

$$v \sin(d\theta) = dv_n \sin[90^\circ - (\mu + d\theta)],$$

skąd z taką samą dokładnością otrzymamy

$$d\theta = \frac{dv_n \cos\mu}{v}. \tag{19.3'}$$

Wykorzystując dwa ostatnie równania, otrzymamy zależność między przyrostem prędkości dv a zmianą kierunku przepływu $d\theta$ w następującej postaci:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg}\mu\, d\theta.$$

Biorąc pod uwagę, że kąt Macha μ związany jest z liczbą M zależnością

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}},$$

doprowadzimy ostatnie równanie różniczkowe do następującej ostatecznej postaci:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}\, d\theta. \tag{19.4}$$

Porównanie wzoru (19.4) ze wzorem (16.26) wskazuje, że zależność różniczkowa między przyrostem prędkości a zmianą kierunku przepływu jest taka sama zarówno dla punktów leżących na charakterystykach, jak i wzdłuż linij prądu (w szczególności wzdłuż opływanej ścianki). Jak wykazano w rozdziale XVI, równanie (19.4) daje się scałkować, a krzywą całkową jest epicykloida. Epicykloidy (charakterystyki w płaszczyźnie v_x, v_y) można zatem rozpatrywać jako hodograf prędkości dla naddźwiękowego opływu wypukłej lub wklęsłej powierzchni krzywoliniowej (w ostatnim przypadku nie uwzględnia się powstawania fal uderzeniowych).

Stosując równanie (19.4) do strumienia odchylonego od pierwotnego kierunku względem linii Macha położonej za linią rozpatrywaną powyżej (powstanie tej linii Macha spowodowane jest drugim załamaniem opływanej ścianki), można określić prędkość oraz inne parametry gazu za tą linią Macha. Postępując w ten sposób dalej i przechodząc do granicy, dojdziemy do przypadku opływu ścianki krzywoliniowej podanej na rys. 19.1.

Przejdziemy teraz do linearyzacji równań dynamiki gazów, uważając, że wszystkie powstałe w przepływie zakłócenia są małe. Jak wiadomo, rozkładając jakąkolwiek funkcję $f(x)$ na szereg Taylora w otoczeniu pewnego punktu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots,$$

można uważać w pierwszym przybliżeniu, że przyrost funkcji jest liniowy:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{19.5}$$

czyli ograniczyć się do jednego wyrazu w rozkładzie $f(x) - f(x_0)$ na szereg.

Wykorzystamy wzór (19.5) w celu rozłożenia na szereg prędkości v gazu względem zmiennej θ (rys. 19.1 i 19.2). Wówczas otrzymamy

$$v(\theta) = v(0) + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta = v_1 + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta. \tag{19.6}$$

Na podstawie równania (19.4) mamy

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{19.7}$$

Ponieważ przy $\theta = 0$ jest $v = v_1$, zatem

$$\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Po podstawieniu znalezionego wyrażenia $\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ do wzoru (19.6) otrzymamy

$$v = v_1 + \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta. \tag{19.8}$$

Związek pomiędzy ciśnieniem a prędkością wyraża się, z dokładnością do małych pierwszego rzędu, zlinearyzowanym równaniem Bernoulliego, podobnym do równania (18.6):

$$p - p_1 = -\varrho_1 v_1 (v - v_1). \tag{19.9}$$

Zlinearyzowane równanie Bernoulliego (19.9) przybiera postać

$$p = p_1 - \frac{\varrho_1 v_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta$$

po uwzględnieniu wzoru (19.8).

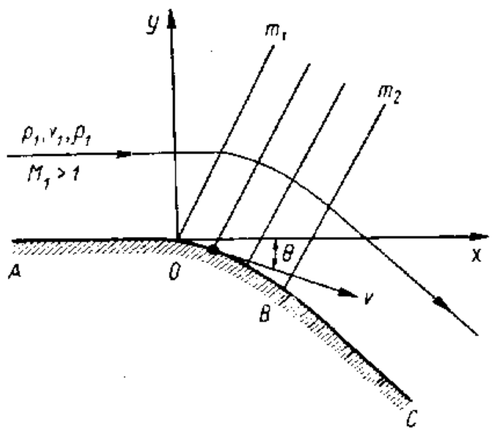
Wprowadzając do tego równania następujące oznaczenie ciśnienia prędkości odpowiadającego prędkości v_1:

$$q_1 = \frac{\varrho_1 v_1^2}{2},$$

otrzymamy

$$p = p_1 - \frac{2q_1}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta. \tag{19.10}$$

Kąt θ jest zawarty między kierunkiem wektora v a dodatnim zwrotem osi x. Jeżeli zwrot ten odpowiada obrotowi wektora prędkości v w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara, wówczas kąt θ traktowany jest jako dodatni, w przypadku odwrotnym — jako ujemny. Ze wzoru (19.10) wynika przy tym, że ciśnienie spada przy opływie ścianki wypukłej strumieniem naddźwiękowym, a przy opływie ścianki wklęsłej — rośnie.



19.3. Zlinearyzowany przepływ rozrzedzeniowy

Zauważymy, że wzór (19.10) stanowi pierwsze przybliżenie. Wykażemy dalej, że wzory stanowiące drugie przybliżenie można otrzymać łatwo, jeżeli w rozwinięciu o kształcie (19.5) nie ograniczymy się do jednego wyrazu, a uwzględnimy następny (§ 4 niniejszego rozdziału).

Przejdziemy do zbadania pochylenia linij Macha względem osi x w dwóch rozważanych przepływach (wzdłuż ścianek) — rozrzedzeniowym i zgęszczeniowym. W przepływie rozrzedzeniowym pochylenie linij Macha zmniejsza się i staje się w punkcie B najmniejsze (rys. 19.1); w przepływie zgęszczeniowym, odwrotnie, pochylenie linij Macha zwiększa się i w punkcie B staje się największe (rys. 19.2).

Oznaczymy kąt, jaki tworzy wektor prędkości z kierunkiem charakterystyki, przez μ (kąt Macha). Wiadomo, że

$$\sin\mu = \frac{a}{v} = \frac{1}{M} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}},$$

a poza tym kąt pochylenia charakterystyk odpowiada zależności

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta+\mu). \tag{19.11}$$

Przy stosunkowo niewielkich liczbach Macha można przyjąć

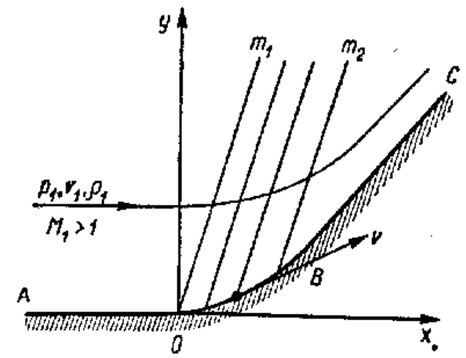
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\mu_1, \tag{19.12}$$

czyli kąt pochylenia linij Macha traktować w całym przepływie jako niezmienny i równy pochyleniu tych linij w przepływie niezakłóconym (obliczenia wskazują, że w przypadkach, w których liczba Macha $M_1 \leqslant 3$, siatkę linij Macha można traktować jako składającą się z prostych równoległych).

Otrzymaliśmy więc tą drogą schemat opływu przedstawiony na rys. 19.3 i 19.4, gdzie linie prądu są krzywymi położonymi w równych odległościach

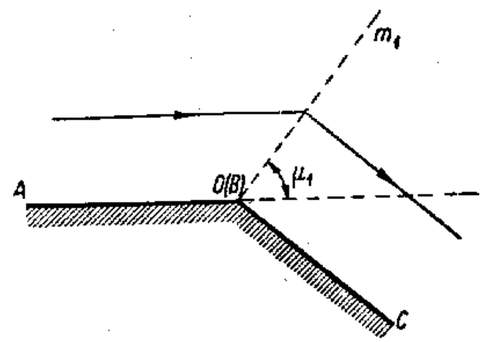
a wzdłuż każdej linii Macha prędkość oraz inne parametry przepływu pozostają stałe.

Wyjaśnimy, co stanie się z przepływem, jeżeli będziemy stopniowo zbliżali punkty B i O ścianki BC nie zmieniając pochylenia ścianki BC względem osi x. W tym celu skorzystamy najpierw z rys. 19.4. Przy przejściu przez każdą linię Macha pierwszej rodziny wychodzącej z dowolnego punktu ścianki OB, następuje nieskończenie mały wzrost ciśnienia. Jeżeli punkt B będzie zbliżał się do punktu O, wówczas wystąpi bardziej intensywny wzrost ciśnienia na jednostkę długości ścianki OB, i kiedy punkt B i O pokryją się — ciśnienie będzie wzrastało skokiem wzdłuż linii Om_1. W tym przypadku linia Macha stanie się linią zgęszczeniową (rys. 19.5). Tak więc w przypadku pokrywania się punktów O i B otrzymamy zlinearyzowany opływ naroża o kącie mniejszym niż 180°.

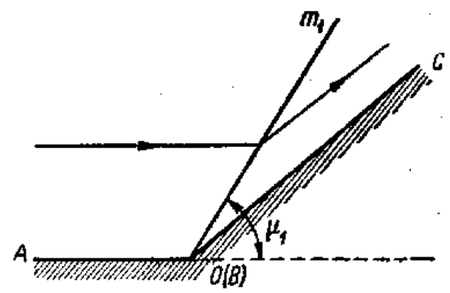


19.4. Zlinearyzowany przepływ zgęszczeniowy

W przypadku opływu ścianki wypukłej (rys. 19.3) dojdziemy za pomocą analogicznych rozważań do wniosku, że na linii Macha Om_1 ciśnienie będzie się gwałtownie zmieniało i linia ta będzie odgrywała rolę linii, wzdłuż której



19.5. Zlinearyzowana linia rozrzedzenia



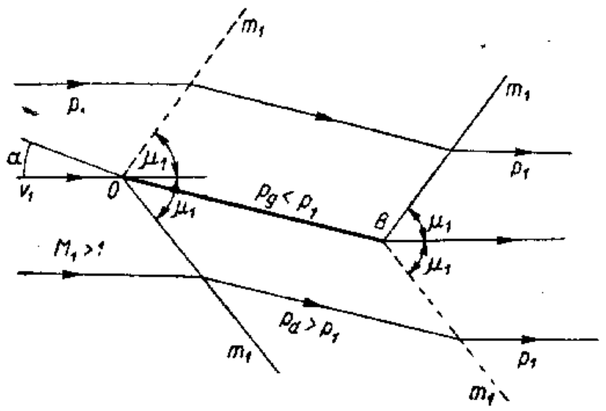
19.6. Zlinearyzowana linia zgęszczenia

rozrzedzenie wystąpi w postaci skoku (rys. 19.5). Zatem w zlinearyzowanej teorii opływu naroża o kącie większym niż 180° występuje płaska powierzchnia nieciągłości określająca „rozrzedzeniowy" skok ciśnienia. Przypominamy, że przy ścisłym rozwiązaniu zadania opływu naroża wypukłego otrzymuje się pęk elementarnych fal rozrzedzeniowych, wychodzących z punktu B załamania kątowego.

W dalszym ciągu będziemy linię zgęszczenia oznaczali linią ciągłą, linię rozrzedzenia zaś — linią przerywaną (rys. 19.6).

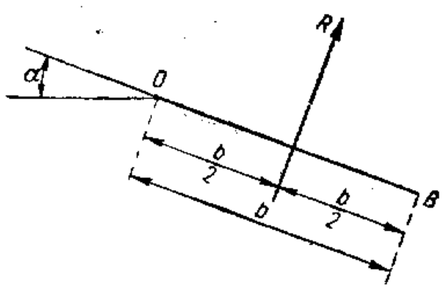
§ 2. Zlinearyzowana teoria naddźwiękowego opływu płaskiej płytki

Rozpatrzony schemat zlinearyzowanego przepływu rozrzedzeniowego i zgęszczeniowego wzdłuż ścianki pozwala na stosunkowo proste zbadanie opływu płaskiej płytki strumieniem gazu. Załóżmy, że płytka OB jest ustawiona pod kątem natarcia α względem niezakłóconego przepływu o prędkości $v_1 > a_1$.



19.7. Do zlinearyzowanej teorii naddźwiękowego opływu płaskiej płytki

W punkcie O krawędzi natarcia (rys. 19.7) płytki strumień rozdziela się na dwie części. Na grzbiecie płytki, w otoczeniu punktu O, mamy do czynienia z opływem rozwartego naroża o kącie większym niż 180°, co wywołuje powstanie linii nieciągłego rozrzedzenia. Na spodzie mamy, w otoczeniu punktu O, opływ naroża wklęsłego, z punktu O wychodzi więc ku dołowi linia zgęszczenia. W obszarze przepływu położonym za tymi liniami, na górze i na dole strumień jest równoległy do płytki OB. W punkcie B krawędzi spływu obydwa strumienie łączą się. Dzieje się tak dlatego, że ich ciśnienia i kierunki stają się jednakowe. Aby warunek ten został spełniony, obydwa strumienie muszą w punkcie B ulec odchyleniu o kąt α w kierunku przeciwnym do wskazówki zegara. Z równania Bernoulliego wynika, że strumienie te będą miały wówczas jednakowe ciśnienie, równe ciśnieniu p_1 przepływu niezakłóconego. Połączeniu się strumieni w punkcie B będzie zatem towarzyszyło powstawanie linii zgęszczenia w punkcie B w strumieniu górnym, w strumieniu dolnym zaś — linii rozrzedzenia, za którymi przepływ jest równoległy do kierunku przepływu niezakłóconego.



19.8. Kierunek i punkt przyłożenia siły aerodynamicznej R działającej na płaską płytkę w przepływie naddźwiękowym

Przejdziemy obecnie do obliczenia sił aerodynamicznych działających na płytkę. Ciśnienia p_d i p_g na dolnej i — odpowiednio — górnej powierzchni płytki

są wzdłuż płytki stałe; na płytkę będzie zatem działała całkowita siła aerodynamiczna R skierowana normalnie do powierzchni płytki oraz przyłożona w jej środku (rys. 19.8). Środek parcia na płaską płytkę określa więc zależność

$$x_p = 0{,}5\, b.$$

Całkowita siła aerodynamiczna przypadająca na jednostkę rozpiętości płytki wyrazi się wzorem:

$$R = (p_d - p_g)b.$$

Przechodząc do wzoru (19.10) otrzymamy

$$p_d = p_1 + 2\, q_1\, \alpha \operatorname{tg} \mu_1,$$

$$p_g = p_1 - 2\, q_1\, \alpha \operatorname{tg} \mu_1,$$

a zatem

$$R = 4\, q_1 \alpha \operatorname{tg} \mu_1\, b. \tag{19.13}$$

Wprowadzimy współczynnik siły aerodynamicznej

$$c_R = \frac{R}{q_1 b} = \frac{4\, q_1\, \alpha \operatorname{tg} \mu_1\, b}{q_1\, b},$$

skąd

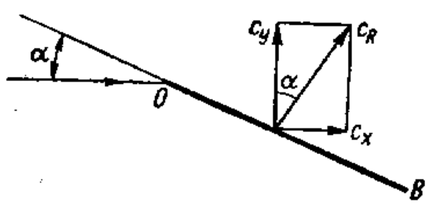
$$c_R = 4\, \alpha \operatorname{tg} \mu_1.$$

Ponieważ

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}},$$

więc — ostatecznie — wyrażenie na współczynnik siły aerodynamicznej ma postać:

$$c_R = \frac{4\, \alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \tag{19.14}$$



19.9. Składowe współczynnika c_R

W celu określenia współczynnika oporu c_x oraz współczynnika siły nośnej c_y płytki rozłożymy współczynnik c_R na dwa kierunki (rys. 19.9). Ponieważ kąt natarcia α jest niewielki, więc $\cos \alpha \approx 1$ oraz $\sin \alpha \approx \alpha$. W tym przypadku równania na współczynniki oporu i siły nośnej płytki w przepływie naddźwiękowym przybiorą postać

$$c_y = \frac{4\, \alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \tag{19.15}$$

$$c_x = \frac{4\, \alpha^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \tag{19.16}$$

Stąd doskonałość aerodynamiczna określona wzorem:

$$K = \frac{c_y}{c_x}$$

będzie miała wartość następującą dla płytki w przepływie naddźwiękowym:

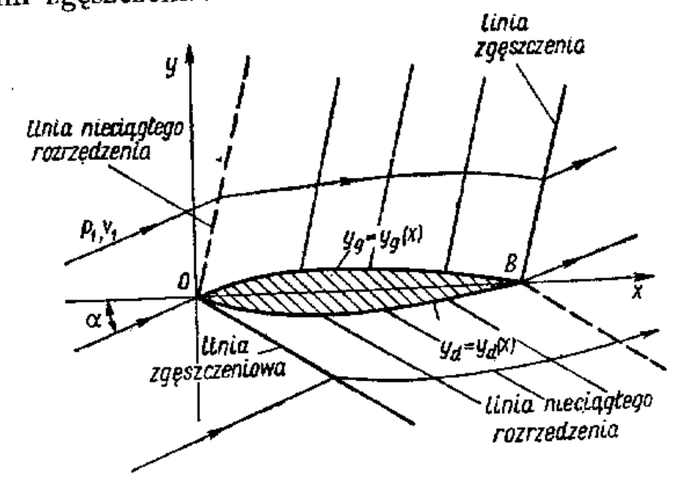
$$K = \frac{1}{\alpha}.$$

Doskonałość aerodynamiczna płytki zależy zatem jedynie od kąta natarcia α (α jest we wszystkich równaniach wyrażone w radianach).

Dla współczynnika momentu c_m płytki mamy $c_m = -\frac{c_y}{2} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M^2-1}}$; ognisko płytki przypada w środku parcia, ponieważ $c_m = 0$ względem tego punktu.

§ 3. Zlinearyzowana teoria naddźwiękowego opływu cienkiego profilu

Na podstawie paragrafów poprzednich możemy zbudować obraz zlinearyzowanego naddźwiękowego opływu cienkiego profilu. Na rysunku 19.10 przedstawiono przypadek, w którym punkt O jest początkiem zarówno linii rozrzedzenia, jak i linii zgęszczenia.



19.10. Zlinearyzowany opływ naddźwiękowy cienkiego profilu (przypadek pierwszy)

Na rysunku 19.11 natomiast punkt O jest początkiem dwóch linij zgęszczeń (skierowanych w górę i w dół). Realizowanie się pierwszego lub drugiego przypadku zależy oczywiście od kąta natarcia α. W paragrafie poprzednim pokazano, że w punkcie B następuje połączenie się dwóch strumieni, w związku z czym w górnym i dolnym strumieniu ustala się jednakowe ciśnienie p_1 oraz kierunek prędkości zgodny z kierunkiem prędkości przepływu niezakłóconego.

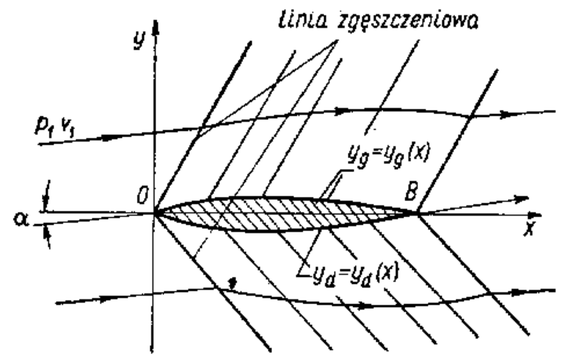
Przyjmując krawędź natarcia jako początek układu współrzędnych, poprowadźmy oś x wzdłuż cięciwy profilu, a oś y — prostopadle do cięciwy (rys. 19.12).

Niech grzbiet profilu będzie krzywą określoną równaniem

$$y_g = y_g(x). \tag{19.17}$$

Analogicznie dla spodu profilu

$$y_d = y_d(x). \tag{19.18}$$



19.11. Zlinearyzowany opływ naddźwiękowy cienkiego profilu (przypadek drugi)

Znajdźmy wielkość ciśnienia w punktach na grzbiecie i spodzie profilu. Kąty θ_g i θ_d, jakie tworzą elementy profilu z kierunkiem prędkości przepływu, podamy w następującej postaci:

$$\theta_g = \alpha + \theta_g', \quad \theta_d = \alpha + \theta_d'.$$

Znaki kątów θ_g i θ_d, θ_g' i θ_d' określone są tak samo, jak znaki kątów natarcia płata.

Ciśnienie w dowolnym punkcie grzbietu profilu określa równanie

$$p_g = p_1 - 2\, q_1(\theta_g' + \alpha)\, \mathrm{tg}\, \mu_1,$$

w którym

$$\theta_g' = -\frac{dy_g}{dx}.$$

W punktach spodu profilu

$$p_d = p_1 + 2\, q_1(\theta_d' + \alpha)\, \mathrm{tg}\, \mu_1,$$

gdzie

$$\theta_d' = \frac{dy_d}{dx}.$$

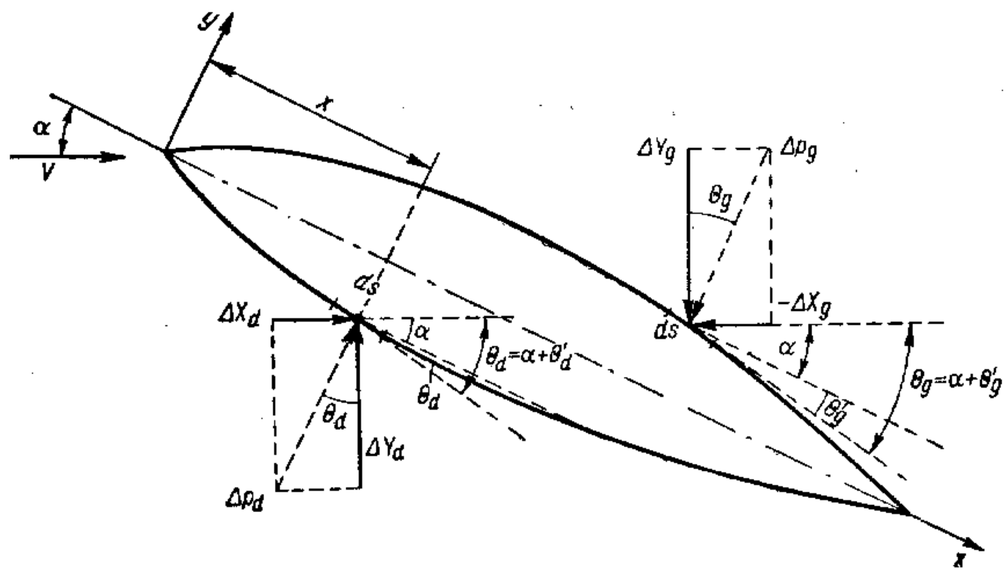
Siłę nośną Y oraz opór X (w kierunku prędkości przepływu v) wyrazimy za pomocą następujących równań:

$$Y = \int_0^{s_d} p_d \cos(\theta_d' + \alpha)\, ds_d - \int_0^{s_g} p_g \cos(\theta_g' + \alpha)\, ds_g, \tag{19.19}$$

$$X = \int_0^{s_d} p_d \sin(\theta_d' + \alpha)\, ds_d - \int_0^{s_g} p_g \sin(\theta_g' + \alpha)\, ds_g. \tag{19.20}$$

W wyrażeniach tych ds_g i ds_d są elementami łuków tworzących — odpowiednio — grzbiet i spód profilu; s_g i s_d określają długości tych łuków. Jeśli spełnione są warunki linearyzacji przepływu, to można przyjąć — w charakterze dodatkowych założeń:

$$ds_g = ds_d = dx,$$



19.12. Do obliczania sił aerodynamicznych działających na profil w przepływie naddźwiękowym

gdzie dx oznacza element cięciwy profilu;

$$\cos(\theta_d' + \alpha) = \cos(\theta_g' + \alpha) \approx 1,$$

$$\sin(\theta_g' + \alpha) = \theta_g' + \alpha, \quad \sin(\theta_d' + \alpha) = \theta_d' + \alpha,$$

$$s_g = s_d = b.$$

Dla profilu cienkiego założenia te dają duży stopień dokładności.

Przy przyjętych założeniach dodatkowych można zastąpić wyrażenia (19.19) i (19.20) następującymi wyrażeniami przybliżonymi:

$$Y = \int_0^b (p_d - p_g)\, dx, \tag{19.21}$$

$$X = \int_0^b p_d(\theta_d' + \alpha)\, dx - \int_0^b p_g(\theta_g' + \alpha)\, dx. \tag{19.22}$$

Podstawiając do równania (19.21) otrzymane poprzednio wyrażenia na p_d i p_g, znajdziemy

$$Y = 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_d' + \alpha)\, dx + 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_g' + \alpha)\, dx =$$

$$= 4\, q_1 \alpha \operatorname{tg}\mu_1 b + 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_g' + \theta_d')\, dx.$$

Ponieważ — zgodnie z poczynionymi wyżej założeniami — można przyjąć

$$\int_0^b (\theta_g' + \theta_d')\, dx = \int_0^b \left(-\frac{dy_g}{dx} + \frac{dy_d}{dx}\right) dx = \left[-y_g + y_d\right]_0^b = 0,$$

zatem

$$Y = 4\, q_1 \alpha \operatorname{tg}\mu_1 b$$

oraz

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \tag{19.23}$$

Z równania (19.23) wynika, że *w pierwszym przybliżeniu współczynnik siły nośnej c_y profilu nie zależy od jego kształtu i wyraża się w ten sam sposób, jak c_y płaskiej płytki.*

Przejdziemy teraz do obliczenia oporu:

$$X = \int_0^b p_1(\theta_d' + \alpha)\, dx + 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_d' + \alpha)^2\, dx -$$

$$- \int_0^b p_1(\theta_g' + \alpha)\, dx + 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_g' + \alpha)^2\, dx.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie oraz uwzględniając zależność $\int_0^b \theta'\, dx = 0$ otrzymamy

$$X = 4\, q_1 \alpha^2 b \operatorname{tg}\mu_1 + 2\, q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta_g'^2 + \theta_d'^2)\, dx.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$B = \frac{1}{b} \int_0^b (\theta_g'^2 + \theta_d'^2)\, dx \tag{19.24}$$

(w którym wielkość B zależy jedynie od kształtu profilu) znajdziemy dla współczynnika oporu (falowego) następujące wyrażenie:

$$c_x = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2-1}} + \frac{2B}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{19.25}$$

Analiza tego wyrażenia prowadzi do ważnego wniosku — *współczynnik oporu (falowego) cienkiego profilu w przepływie naddźwiękowym składa się z dwóch części: ze współczynnika oporu zależnego od kąta natarcia i równego współczynnikowi oporu cienkiej płytki*

$$c_{x1} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2-1}} = \frac{\sqrt{M_1^2-1}}{4}\, c_y^2 \tag{19.26}$$

oraz ze współczynnika oporu

$$c_{x2} = \frac{2B}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{19.27}$$

zależnego jedynie od kształtu profilu i jego grubości względnej. Ta część oporu stanowi minimalny opór falowy danego profilu przy $\alpha = 0$.

Widzimy, że pod względem oporu cienka płytka stanowi w przepływie naddźwiękowym najlepszy teoretycznie profil. Profile stosowane w praktyce będą oczywiście miały tym mniejszy opór, im bardziej będą zbliżone kształtem do płytki.

§ 4. Ściślejsza teoria profilu w przepływie naddźwiękowym

Powyżej omówiona została teoria pierwszego przybliżenia, w której zależność między różnicą ciśnień a kątem odchylenia przepływu od kierunku przepływu niezakłóconego była liniowa:

$$p - p_1 = \Delta p = \pm \frac{2\theta}{\sqrt{M^2-1}}\, q = \pm c_1 q\theta,$$

gdzie q i M oznacza ciśnienie prędkości oraz liczbę Macha w przepływie niezakłóconym. Powyższa zależność jest słuszna dla niewielkich wartości kąta θ, tzn. dla bardzo cienkich profilów opływanych pod małym kątem natarcia.

Rozważymy obecnie podstawowe elementy teorii drugiego przybliżenia.

Wykorzystując rozwinięcie na szereg Taylora oraz ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów, otrzymamy zależność pomiędzy różnicą ciśnień Δp a kątem θ w następującej postaci:

$$p = p_1 + (c_1\theta + c_2\theta^2)\, q$$

lub

$$\Delta p_d = (c_1\theta_d + c_2\theta_d^2)\, q, \tag{19.28}$$

$$\Delta p_g = (-c_1\theta_g + c_2\theta_g^2)\, q, \tag{19.29}$$

gdzie, jak poprzednio, wskaźniki d oraz g odnoszą się odpowiednio do grzbietu i spodu profilu.

Współczynniki c_1 i c_2 wyrażają się następującymi wzorami:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{\sqrt{M^2-1}}, \\ c_2 &= \frac{1{,}2M^4 - 2M^2 + 2}{(M^2-1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{19.30}$$

Dla siły nośnej Y, oporu X oraz momentu M_z słuszne są równania:

$$Y = \int_0^{s_d} \Delta p_d \cos\theta_d\, ds_d - \int_0^{s_g} \Delta p_g \cos\theta_g\, ds_g, \tag{19.31}$$

$$X = \int_0^{s_d} \Delta p_d \sin\theta_d\, ds_d - \int_0^{s_g} \Delta p_g \sin\theta_g\, ds_g, \tag{19.32}$$

$$M_z = \int_0^{s_d} \Delta p_d \cos\theta_d'\, x\, ds_d - \int_0^{s_g} \Delta p_g \cos\theta_g' x\, ds_g. \tag{19.33}$$

Całki (19.31) ÷ (19.33) można obliczyć, jeżeli znane są geometryczne charakterystyki profilu.

Podstawimy wartości p_d (19.28) oraz p_g (19.29) do wyrażenia na Y (19.31) i jak poprzednio założymy w przybliżeniu

$$\cos\theta \approx 1, \quad \sin\theta \approx \theta,$$

$$s_d = s_g = b.$$

Wówczas otrzymamy

$$Y = \int_0^b (c_1\theta_d + c_2\theta_d^2)\, q\, dx - \int_0^b (-c_1\theta_g + c_2\theta_g^2)\, q\, dx.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej $\bar{x} = \frac{x}{b}$, $\bar{b} = 1$ otrzymamy

$$c_y = \int_0^1 (c_1\theta_d + c_2\theta_d^2)\, d\bar{x} - \int_0^1 (-c_1\theta_g + c_2\theta_g^2)\, d\bar{x}. \tag{19.34}$$

Podstawiając zamiast θ_d i θ_g ich wartości, wyrażone przez kąty α i θ', otrzymamy

$$c_y = \int_0^1 [c_1(\alpha + \theta_d') + c_2(\alpha^2 + 2\theta_d'\alpha + \theta_d'^2)]\, d\bar{x} -$$

$$- \int_0^1 [-c_1(\alpha + \theta_g') + c_2(\alpha^2 + 2\theta_g'\alpha + \theta_g'^2)]\, d\bar{x}$$

lub inaczej

$$c_y = \alpha c_1 + c_1 \int_0^1 \theta_d'\, d\bar{x} + c_2\alpha^2 + 2c_2\alpha \int_0^1 \theta_d'\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 \theta_d'^2\, d\bar{x} +$$

$$+ c_1\alpha - c_1 \int_0^1 \theta_g'\, dx - c_2\alpha^2 - 2c_2\alpha \int_0^1 \theta_g'\, d\bar{x} - c_2 \int_0^1 \theta_g'^2\, d\bar{x}.$$

Grupując wyrazy znajdziemy

$$c_y = c_1 \int_0^1 (\theta_d' - \theta_g')\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 (\theta_d'^2 - \theta_g'^2)\, d\bar{x} + \alpha \left[2c_1 + 2c_2 \int_0^1 (\theta_d' - \theta_g')\, d\bar{x}\right]. \quad (19.35)$$

Przeprowadzając takie same obliczenia dla X otrzymamy

$$c_x = c_1 \int_0^1 (\theta_d'^2 + \theta_g'^2)\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 (\theta_d'^3 - \theta_g'^3)\, d\bar{x} +$$

$$+ \left[2c_1 \int_0^1 (\theta_d' + \theta_g')\, d\bar{x} + 3c_2 \int_0^1 (\theta_d'^2 - \theta_g'^2)\, d\bar{x}\right]\alpha + \left[2c_1 + 3c_2 \int_0^1 (\theta_d' - \theta_g')\, d\bar{x}\right]\alpha^2. \quad (19.36)$$

Wreszcie — w analogiczny sposób można otrzymać wyrażenie na współczynnik momentu [72]:

$$c_m = -\left[c_1 \int_0^1 (\theta_d' + \theta_g')\bar{x}\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 (\theta_d'^2 - \theta_g'^2)\bar{x}\, d\bar{x}\right] -$$

$$- \left[c_1 + 2c_2 \int_0^1 (\theta_d' - \theta_g')\bar{x}\, d\bar{x}\right]\alpha. \quad (19.37)$$

Dokonamy następujących uproszczeń. Przyjmiemy, że

$$\int_0^1 \theta_d'\, d\bar{x} \approx 0, \qquad \int_0^1 \theta_g'\, d\bar{x} \approx 0.$$

Jeżeli profil jest symetryczny, powyższe całki będą dokładnie równe zeru. Wyrażenia

$$\int_0^1 \theta_d'^3\, d\bar{x} \quad \text{i} \quad \int_0^1 \theta_g'^3\, d\bar{x}$$

są również wielkościami małymi, które można zaniedbać. W tym przypadku można przepisać równania (19.35), (19.36) i (19.37) w następującej postaci[1]:

$$c_y = 2c_1\alpha + Ac_2, \quad (19.38)$$

$$c_x = Bc_1 + 3Ac_2\alpha + 2c_1\alpha^2, \quad (19.39)$$

$$c_m = -(c_1 + Dc_2)\alpha - (Ec_1 + Fc_2), \quad (19.40)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\theta_d'^2 - \theta_g'^2)\, d\bar{x}, \\ B &= \int_0^1 (\theta_d'^2 + \theta_g'^2)\, d\bar{x}, \\ D &= 2\int_0^1 (\theta_d' - \theta_g')\bar{x}\, d\bar{x}, \\ E &= \int_0^1 (\theta_d' + \theta_g')\bar{x}\, d\bar{x}, \\ F &= \int_0^1 (\theta_d'^2 - \theta_g'^2)\bar{x}\, d\bar{x}. \end{aligned}\right\} \quad (19.41)$$

Jak wynika z otrzymanych równań, wpływ liczby Macha na charakterystyki aerodynamiczne profilu przejawia się jedynie poprzez współczynniki c_1 i c_2. Zależność tych współczynników od liczby Macha, określona wzorami (19.30), przedstawiona jest na rys. 19.13. Wpływ kształtu profilu określają całkowicie wartości parametrów A, B, D, E, F. Parametry te są geometrycznymi parametrami profilu i dla płytki są równe zeru.

Spośród tych pięciu parametrów trzy — A, E, F — uwzględniają asymetrię profilu (są one równe zeru dla profilów symetrycznych).

Parametry B i D zależą od grubości profilu, przy czym $B > 0$, a $D < 0$.

A.A. Lebiediew ustalił na podstawie badań przeprowadzonych w Moskiewskim Instytucie Lotniczym im. S. Ordżonikidze następującą zależność charak-

[1] Jeśli w otrzymanych wyrażeniach założymy współczynnik c_2 równy zeru, otrzymamy równania teorii zlinearyzowanej.

terystyk aerodynamicznych od parametrów konstrukcyjnych profilu w przepływie naddźwiękowym:

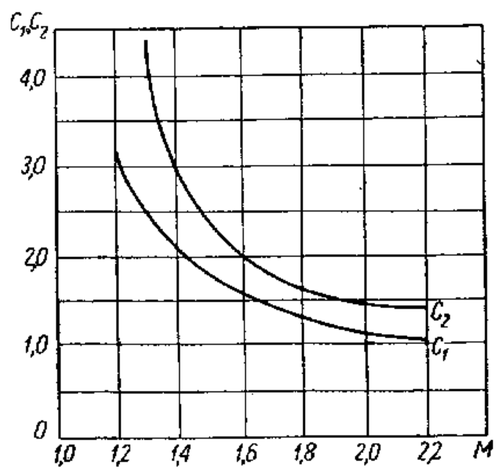
$$\left.\begin{aligned} c_y &= 2\,c_1(\alpha-\alpha_0),\\ \alpha_0 &= k_1\bar{c}\,\bar{f}\frac{c_2}{c_1},\\ c_x &= k_1\left(\frac{\bar{c}^2}{2}+2\bar{f}^2\right)c_1+\left(\alpha-\frac{3}{2}\alpha_0\right)^2 2\,c_1,\\ \bar{x}_F &= \frac{1}{2}\left(1-k_2\bar{c}\frac{c_2}{c_1}\right),\\ c_{m0} &= (-\bar{x}_F k_1 2\bar{c}\,\bar{f}+k_3\bar{c}\,\bar{f})\,c_2-k_2 c_1\bar{f}, \end{aligned}\right\} \qquad (19.42)$$

gdzie:

α_0 — kąt natarcia profilu przy $c_y = 0$,
$\bar{c}$ — grubość względna profilu,
$\bar{f}$ — względna strzałka linii szkieletowej profilu,
x_F — współrzędna ogniska profilu,
k_1, k_2, k_3 — pewne współczynniki liczbowe, zależne od kształtu profilu.

Wartości tych współczynników dla szeregu profilów zawiera tablica 19.1.

Ze wzorów (19.42) wynika w szczególności, że współczynnik oporu falowego $c_{x\,\min}$ jest proporcjonalny do kwadratu grubości i strzałki profilu.



19.13. Zależność współczynników c_1 i c_2 od liczby Macha

Z powyższej tablicy wynika, że najmniejszy opór falowy ma profil w kształcie rombu ($k_1 = 4$), dla którego

$$c_{x\,\min} = 2\,\bar{c}^2 c_1 = \frac{4\,\bar{c}^2}{\sqrt{M^2-1}}. \qquad (19.42')$$

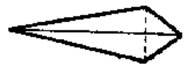
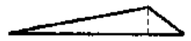
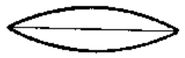
Należy zaznaczyć, że profil w kształcie klina — jako najkorzystniejszy w przypadku przepływów naddźwiękowych — podany został po raz pierwszy przez K.E. Ciołkowskiego.

Omówiona powyżej teoria naddźwiękowego opływu profilu jest teorią drugiego przybliżenia.

Do teorii ściślejszych należy teoria naddźwiękowego opływu profilu opracowana w ZSRR przez A.J. Donowa.

Donow otrzymał wzory na współczynniki aerodynamiczne (c_x i c_y) z uwzględnieniem czwartej potęgi kątów θ.

Tablica 19.1

Profil		k_1	k_2	k_3
liniowy ($\bar{x}_B = \bar{x}_d = \bar{x}_c$)		$\frac{1}{\bar{x}_c(1-\bar{x}_c)}$	1	$\frac{2}{1-\bar{x}_c}$
liniowy w kształcie rombu ($\bar{x}_c = 0{,}5$)		4	1	4
profil K. Ciołkowskiego		$\frac{9}{2}$	1	6
ukształtowany z dwóch sinusoid		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ukształtowany z dwóch łuków okręgu		$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$

Z uwagi na to, że wyniki pracy A. J. Donowa nie dają prostych zależności między aerodynamiczną charakterystyką profilu a jego parametrami geometrycznymi — praca ta nie będzie tutaj omówiona [63].

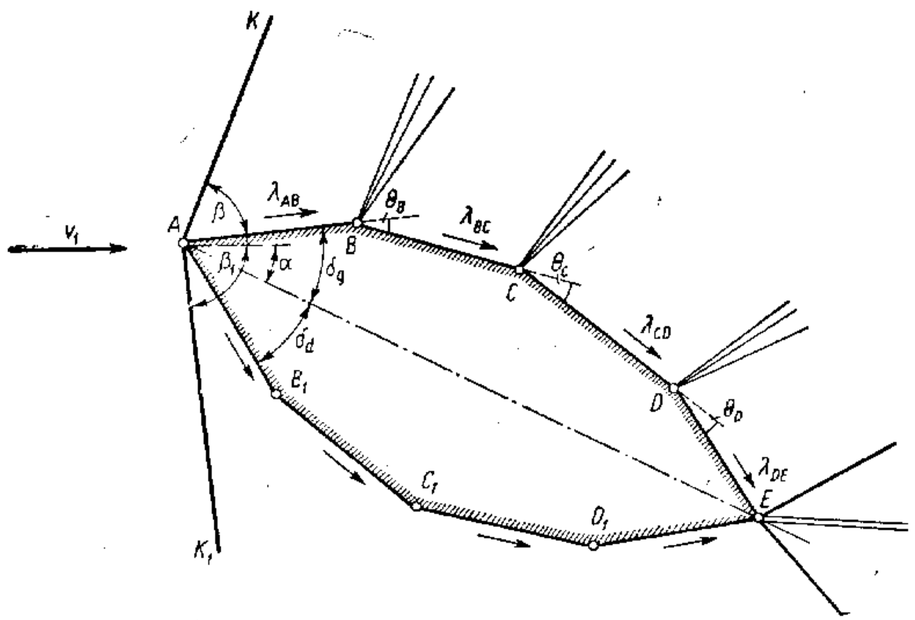
§ 5. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia naddźwiękowego opływu profilu składającego się z odcinków prostoliniowych

Rozważana w poprzednich rozdziałach teoria skośnych fal uderzeniowych oraz teoria opływu wypukłego naroża kątowego pozwalają rozwiązać zagadnienie naddźwiękowego opływu dowolnego profilu o konturze składającym się z odcinków prostoliniowych.

Załóżmy, że naddźwiękowy strumień gazu opływa pod pewnym kątem natarcia α dowolny profil składający się z odcinków prostoliniowych (rys. 19.14). Podobnie jak poprzednio wprowadzimy następujące oznaczenia: v_1 — prędkość niezakłóconego przepływu naddźwiękowego przed profilem; p_1, a_1 — odpowiednie wartości ciśnienia i prędkości dźwięku; $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$ — liczba Macha przepływu niezakłóconego. Określimy najpierw charakter opływu krawędzi natarcia profilu A.

Jeżeli rozważany profil jest ustawiony w przepływie w ten sposób, że kąt pomiędzy kierunkiem prędkości v_1 a odcinkami prostoliniowymi profilu AB oraz AB_1 jest mniejszy niż 180°, wówczas na grzbiecie profilu w pobliżu punktu A wystąpi przepływ analogiczny do opływu klina o kącie rozwarcia $\delta_g - \alpha$. Przy opływie spodu profilu przepływ w pobliżu punktu A będzie analogiczny do opływu klina o kącie rozwarcia $\delta_d - \alpha$.

Jeśli — ponadto — rozwarcia tych klinów będą mniejsze od kąta granicznego, wówczas przy opływie krawędzi natarcia profilu A tworzą się dwie skośne fale uderzeniowe AK oraz AK_1. Po przejściu przez płaszczyzny tych fal strumień gazu zmienia swój pierwotny kierunek i porusza się równolegle do ścianek AB i AB_1 profilu.



19.14. Schemat naddźwiękowego opływu profilu złożonego z odcinków prostoliniowych (przypadek pierwszy)

Na podstawie teorii skośnych fal uderzeniowych można określić wszystkie parametry gazu opływającego ścianki AB i AB_1.

Jako przykład wskażemy sposób określania parametrów gazu płynącego wzdłuż ścianki AB. Znając liczbę M_1 przepływu niezakłóconego przed profilem oraz kąt $\delta_g - \alpha$ odchylenia przepływu na czole AK fali, łatwo jest znaleźć kąt β utworzony przez płaszczyznę skośnej fali uderzeniowej AK a kierunkiem przepływu niezakłóconego v_1. Można w tym celu skorzystać z wykresu zależności kąta β od kąta rozwarcia klina (rys. 17.3).

Następnie dla określenia parametrów gazu za falą uderzeniową AK skorzystamy z wyników (17.6), (17.7) i (17.8) otrzymanych w § 2 rozdziału XVII. Na przykład dla określenia ciśnienia p_{AB} można wykorzystać wzór (17.6)

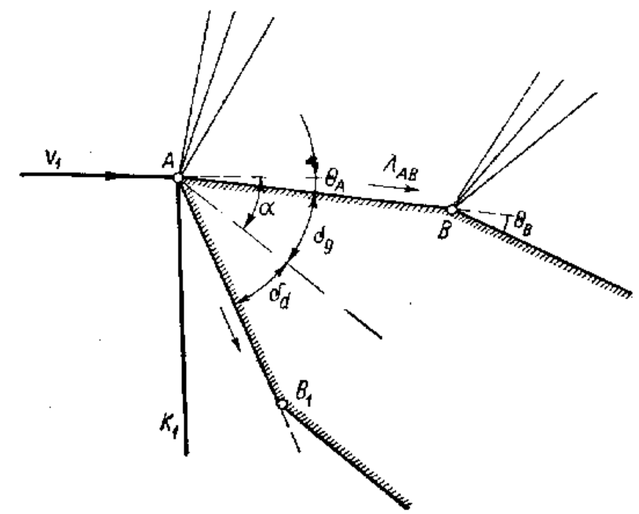
$$\frac{p_{AB}}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{k+1},$$

gdzie p_{AB} — poszukiwane ciśnienie wzdłuż ścianki AB.

Prędkość przepływu wzdłuż ścianki AB można łatwo wyznaczyć za pomocą biegunowej fali uderzeniowej (rys.17.8).

W sposób analogiczny można wyznaczyć parametry gazu za skośną falą uderzeniową AK_1, tzn. wzdłuż ścianki AB_1.

Z rysunku 19.14 widać, że w obszarze za skośną falą uderzeniową strumień gazu opływa kolejno szereg wypukłych naroży kątowych: ABC, BCD, CDE — na grzbiecie oraz AB_1C_1, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1E_1$ — na spodzie. Przy opływie tych naroży kierunek przepływu ulega zmianie odpowiednio o kąty $\theta_B, \theta_C, \theta_D$ itd.



19.15. Schemat naddźwiękowego opływu profilu złożonego z odcinków prostoliniowych (przypadek drugi)

Parametry gazu wzdłuż każdego odcinka prostoliniowego BC, CD itd. można wyznaczyć wykorzystując wzory dla opływu wypukłego naroża kątowego (rozdz. XVI, § 7). Przy obliczeniach praktycznych wygodnie jest korzystać z tablicy 16.1 (podanej na str. 419). Można przy tym zalecić następujący przebieg obliczeń.

Wyznaczywszy prędkość v_{AB} określamy wielkość liczby M_{AB} dla przepływu wzdłuż ścianki AB. Następnie znajdujemy z tablicy 16.1 fikcyjny kąt odchylenia przepływu θ_{*AB} odpowiadający wartości M_{AB} (θ_{*AB} — kąt, o jaki powinien odchylić się przepływ o prędkości równej prędkości dźwięku, aby osiągnąć daną wartość liczby Macha $M = M_{AB}$). Całkowity kąt odchylenia przepływu przy opływie naroża kątowego ABC będzie oczywiście równy

$$\theta_{*BC} = \theta_{*AB} + \theta_B.$$

Dla wartości θ_{*BC} można znaleźć z tabl. 16.1 parametry gazu płynącego wzdłuż ścianki BC, odniesione do parametrów spiętrzenia

$$M_{BC}, \quad \frac{p_{BC}}{p_0}, \quad \frac{T_{BC}}{T_0}.$$

Po określeniu parametrów spiętrzenia p_0 i T_0 znajdziemy z wyprowadzonych wyżej wzorów (14.22) poszukiwane wielkości p_{BC} oraz T_{BC}. Analogicznie można określić parametry gazu płynącego wzdłuż ścianek CD, DE itd.

Z krawędzi spływu E (rys. 19.14) wychodzą dwie skośne fale uderzeniowe. Za falami tymi strumień spływający z grzbietu i ze spodu profilu przybiera kierunek przepływu niezakłóconego oraz odpowiednią wartość p_1 (równą wartości ciśnienia niezakłóconego); natomiast prędkości bezpośrednio za tymi falami będą różne i będą się zmieniały skokiem wzdłuż wirowej powierzchni nieciągłości przedstawionej na rys. 19.14 dwiema blisko siebie położonymi liniami wychodzącymi z punktu E.

Rozważony schemat obliczenia opływu profilu składającego się z odcinków prostoliniowych pozwala na dostatecznie dokładne określenie ciśnienia wzdłuż każdego z odcinków prostoliniowych profilu, a co za tym idzie, również siły działającej na profil w przepływie naddźwiękowym. Podany schemat obliczenia nie zmienia się w zasadzie przy zastosowaniu go do profilu przedstawionego na rys. 19.15. Różnica w obliczeniu będzie polegała jedynie na tym, że przy określaniu parametrów gazu wzdłuż ścianki AB trzeba w tym przypadku posługiwać się wzorami dla opływu wypukłego naroża kątowego odchylającego strumień o kąt θ_A.

Na zakończenie należy zaznaczyć, że podany schemat obliczenia może być stosowany tylko w takim zakresie kątów natarcia α, w którym kąty rozwarcia klinów przy krawędzi natarcia są mniejsze od granicznych wartości kąta dla danej wartości liczby Macha M_1 przepływu niezakłóconego przed profilem, gdyż wówczas tworzy się przed profilem zakrzywiona fala uderzeniowa wysunięta.

Obliczenie opływu profilu o rozważanym kształcie komplikuje się znacznie również w tym przypadku, gdy prostoliniowa charakterystyka wychodząca na przykład z punktu B profilu przecina się z czołem skośnej fali uderzeniowej i po „odbiciu się" od niego trafia ponownie na profil.

§ 6. Siły aerodynamiczne działające na płytkę o nieskończenie wielkim wydłużeniu ustawioną skośnie do kierunku przepływu naddźwiękowego

Rozważmy naddźwiękowy opływ płaskiej płytki o nieskończenie wielkim wydłużeniu z uwzględnieniem skosu (rys. 19.16).

Oznaczymy przez v prędkość przepływu przed profilem. Prędkość tę możemy rozłożyć na dwie składowe: v_n — składową prostopadłą do krawędzi natarcia oraz v_t — składową wzdłuż krawędzi natarcia. Kąt, jaki tworzy wektor prędkości v z v_n, nosi nazwę *kąta skosu*.

Opływ płytki ze skosem ($\chi \neq 0$) różni się od opływu zwyczajnego istnieniem składowej skierowanej wzdłuż krawędzi natarcia v_t.

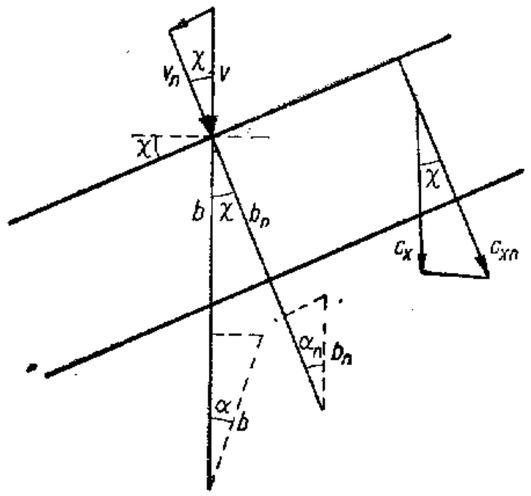
Przy określaniu sił aerodynamicznych działających na płytkę w przypadku opływu ze skosem założymy, że na rozkład ciśnień wpływa tylko składowa normalna prędkości v_n. Wynika stąd, że opływ płytki ze skosem można rozpatrywać jako płaski przepływ o prędkości

$$v_n = v \cos \chi, \tag{19.43}$$

w nieskończoności; odpowiadające składowej v_n liczba Macha oraz ciśnienie prędkości są oczywiście równe:

$$M_n = M \cos \chi, \tag{19.44}$$

$$q_n = q \cos^2 \chi. \tag{19.45}$$



19.16. Ruch skośny płaskiej płytki o nieskończenie wielkim wydłużeniu

Określmy kąt natarcia płytki przy opływie skośnym. Kąt między prędkością przepływu v a cięciwą b płata leżącą w płaszczyźnie przechodzącej przez kierunek prędkości v oznaczymy przez α. Kąt pomiędzy prędkością v_n a cięciwą b_n leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi natarcia oznaczymy przez α_n. Jak widać — w przypadku płaskiej płytki opływanej skośnie charakterystyczne są dwa kąty natarcia α i α_n.

Kąty α i α_n powiązane są zależnością

$$\sin \alpha = \sin \alpha_n \cos \chi.$$

Dla małych kątów natarcia można napisać:

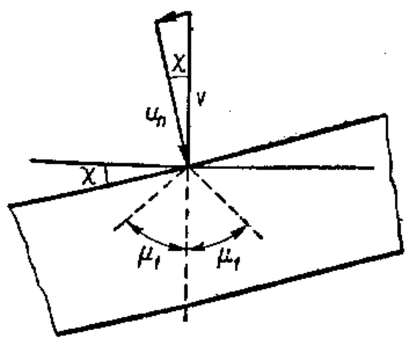
$$\alpha = \alpha_n \cos \chi. \tag{19.46}$$

Zależnie od kąta skosu χ oraz liczby Macha możliwe są dwa przypadki naddźwiękowego opływu płytki (płata) ze skosem.

W pierwszym przypadku (rys. 19.17)

$$M_n = M \cos \chi > 1$$

i krawędź natarcia porusza się względem naddźwiękowego przepływu niezakłóconego przed profilem w ten sposób, że linie Macha wychodzące z każdego punktu krawędzi natarcia leżą za tą krawędzią. (Patrząc od strony przepływu niezakłóconego — przyp. red.).



19.17. Naddźwiękowa krawędź natarcia płata

W tym przypadku kąt $\chi < 90° - \mu_1$, gdzie kąt Macha odpowiadający prędkości przepływu v określony jest równaniem

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{M}.$$

Krawędź natarcia jest w tym przypadku nazywana n a d d ź w i ę k o w ą.

W drugim przypadku (rys. 19.18)

$$M_n = M \cos \chi < 1$$

i krawędź natarcia porusza się względem naddźwiękowego przepływu niezakłóconego przed profilem w ten sposób, że linie Macha wychodzące z każdego punktu krawędzi natarcia leżą przed tą krawędzią.

W tym przypadku $\chi > 90° - \mu_1$, gdzie μ_1 — jak poprzednio, kąt Macha odpowiadający prędkości przepływu v.

Krawędź natarcia jest w tym przypadku nazywana poddźwiękową.

Rozważmy bardziej szczegółowo przypadek pierwszy ($M_n > 1$).

Biorąc pod uwagę, że skośny opływ płaskiej płytki odpowiada w sensie dynamicznym płaskiemu opływowi tej płytki, skierowanemu prostopadle do krawędzia natarcia, można napisać następujące wyrażenie na przyrost ciśnienia na powierzchni płytki (wzór 19.10):

$$\frac{\Delta p}{q_n} = \pm \frac{2}{\sqrt{M_n^2 - 1}} \alpha_n = \pm c_1 \alpha_n, \tag{19.47}$$

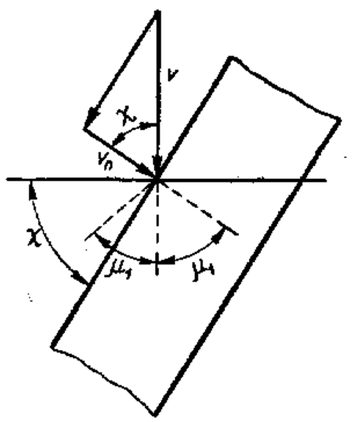
gdzie wartości M_n, q_n i α_n określane są odpowiednio przez wzory (19.44), (19.45) i (19.46).

Jeżeli w równaniu (19.47) wyrazimy wielkości q_n i M_n odpowiednio przez q i M przepływu niezakłóconego — otrzymamy:

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm \frac{2 \cos^2 \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha_n. \tag{19.48}$$

Zastępując w równaniu (19.48) kąt α_n przez α [72] z równania (19.46), otrzymamy wyrażenie na przyrost ciśnienia Δp w następującej postaci:

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm \frac{2 \cos \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha. \tag{19.49}$$



19.18. Poddźwiękowa krawędź natarcia płata

Dla uproszczenia wprowadzimy oznaczenie

$$\frac{2 \cos \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} = c_{sk}; \tag{19.50}$$

wówczas

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm c_{sk} \alpha. \tag{19.51}$$

Na rysunku 19.19 podano zależność współczynnika c_{sk} od liczby Macha dla różnych kątów skosu χ.

Widzimy, że skos krawędzi natarcia ($\chi > 0$) powoduje w przypadku płytki, przy zachowaniu tej samej wartości kąta natarcia α i przy jednakowej liczbie Macha przepływu przed profilem, zwiększenie różnicy ciśnień $\frac{\Delta p}{q}$, ponieważ — jak to wskazuje rys. 19.19 — $c_{sk} > c_1$.

Wpływ skosu krawędzi natarcia maleje wraz ze wzrostem liczby Macha.

Przejdziemy obecnie do obliczania sił aerodynamicznych działających na płytkę o nieskończenie dużym wydłużeniu, przy opływie ze skosem.

Wykorzystując równania (19.48) ÷ (19.51), można napisać wyrażenie na współczynnik siły nośnej w następującej postaci:

$$c_y = \frac{2 \Delta p}{q \cdot 1} = \frac{4 \cos^2 \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha_n \tag{19.52}$$

lub

$$c_y = \frac{4 \cos \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha = 2 c_{sk} \alpha. \tag{19.53}$$

Wyrażenie ostatnie wskazuje, że przy stałym kącie natarcia współczynnik c_y nieco wzrasta ze wzrostem kąta skosu χ (rys. 19.19).

Znajdźmy teraz współczynnik oporu falowego dla płytki w przypadku istnienia ślizgu. Należy w tym celu znaleźć rzut parcia na kierunek prędkości przepływu v.

Biorąc pod uwagę, że parcie skierowane jest prostopadle do powierzchni płytki, otrzymamy (rys. 19.16):

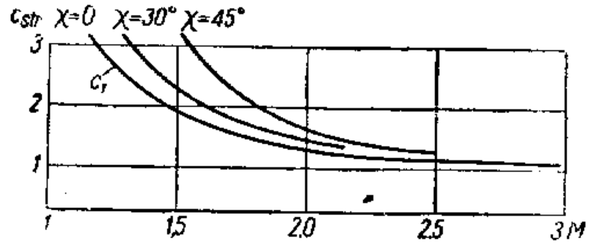
$$c_x = c_{xn} \cos \chi = c_y \sin \alpha_n \cos \chi, \tag{19.54}$$

to znaczy

$$c_x = c_y \alpha_n \cos \chi \tag{19.55}$$

lub

$$c_x = c_y \alpha. \tag{19.56}$$



19.19. Zależność współczynnika c_{sk} od liczby Macha przy rozmaitych kątach χ skosu krawędzi natarcia

Podstawiając do równania (19.56) wartości c_y odpowiednio ze wzorów (19.52) lub (19.53), otrzymamy

$$c_x = \frac{4 \cos^3 \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha_n^2, \tag{19.57}$$

to znaczy

$$c_x = \frac{4 \cos \chi}{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}} \alpha^2 \tag{19.58}$$

lub

$$c_x = 2 c_{sk} \alpha^2 \tag{19.59}$$

oraz zgodnie z (19.53)

$$c_x = \frac{\sqrt{M^2 \cos^2 \chi - 1}}{4 \cos \chi} c_y^2. \tag{19.60}$$

Na zakończenie niniejszego paragrafu nadmienimy, że przy $M_n < 1$ opór płaskiej płytki opływanej skośnie będzie równy zeru, ponieważ przypadek ten odpowiada płaskiemu poddźwiękowemu opływowi płata i jest objęty znanym paradoksem Eulera—d'Alemberta.

§ 7. Zagadnienie naddźwiękowego opływu płata o skończonej rozpiętości

Rozważmy naddźwiękowy opływ cienkiego płata o skończonej rozpiętości [74]. Założymy, że kąt natarcia, pod którym płat jest opływany — jest niewielki. Prędkość przepływu, ciśnienie oraz gęstość przed płatem oznaczymy odpowiednio przez v_1, p_1 i ϱ_1. Osie x_1, y_1, z_1 obierzemy w ten sposób, aby oś x_1 pokrywała się z kierunkiem prędkości v_1.

W celu uproszczenia postawionego zagadnienia założymy, że zakłócenia wywołane ruchem płata są małe. Założymy również, że ruch gazu jest ustalony i potencjalny. Sił masowych nie będziemy uwzględniali.

Z uwagi na małe wartości zaburzeń możemy napisać:

$$v_{x_1} = v_1 + v_x', \quad v_{y_1} = v_y', \quad v_{z_1} = v_z', \quad \varrho = \varrho', \tag{19.61}$$

gdzie v_x', v_y', v_z' i ϱ' są to wielkości małe, których kwadraty i iloczyny można zaniedbać.

Warunek istnienia potencjału napiszemy w postaci

$$v_{x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad v_{y_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \quad v_{z_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}.$$

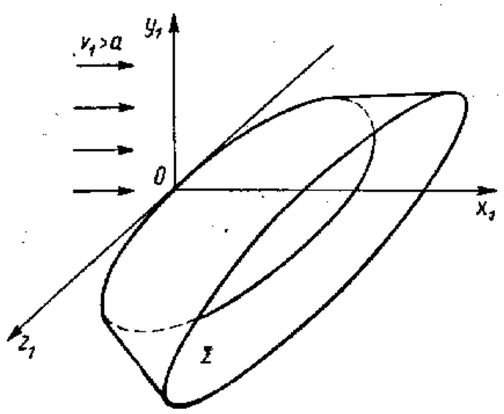
Równanie ciągłości

$$\frac{\partial(\varrho v_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varrho v_{y_1})}{\partial y_1} + \frac{\partial(\varrho v_{z_1})}{\partial z_1} = 0$$

można za pomocą omówionej wyżej metody przekształcić w podstawowe równanie dynamiki gazów, które w danym przypadku w związku z założeniem małych zaburzeń przybierze postać

$$m^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} = 0, \tag{19.62}$$

gdzie $m = \sqrt{M_1^2 - 1}$, $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$, a_1 — prędkość dźwięku w przepływie niezakłóconym przed płatem.



19.20. Powierzchnia falowa wokół płata poruszającego się z prędkością naddźwiękową

W ten sposób zadanie wyznaczenia pola prędkości w otoczeniu płata sprowadza się do znalezienia potencjału prędkości φ_1 spełniającego równanie (19.62) przy określonych warunkach brzegowych.

Jeżeli płat o skończonym wydłużeniu znajduje się w przepływie naddźwiękowym, wówczas wpływ każdego punktu powierzchni płata będzie się przejawiał tylko wewnątrz stożka Macha o wierzchołku w tym punkcie. Cały płat będzie się przy tym znajdował wewnątrz obwiedni wszystkich stożków o wierzchołkach położonych na krawędzi natarcia. Całkowity kąt rozwarcia stożków jest równy $2\mu_1$, gdzie

$$\operatorname{ctg} \mu_1 = m. \tag{19.63}$$

Obwiednię tę nazywać będziemy powierzchnią falową i oznaczymy ją przez Σ (rys. 19.20).

Potencjał zaburzeń prędkości oznaczymy przez $\overline{\varphi}(x_1, y_1, z_1)$.

W obszarze zawartym wewnątrz powierzchni falowej Σ mamy:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_1} = v_x', \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y_1} = v_y', \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z_1} = v_z',$$

gdzie potencjał $\overline{\varphi}$ spełnia także równanie (19.62), tzn.

$$m^2 \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial z_1^2} = 0. \tag{19.64}$$

Równanie to będzie stanowić podstawowe równanie na potencjał prędkości $\overline{\varphi}$ wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią Σ. W obszarze leżącym na zewnątrz powierzchni falowej potencjał $\overline{\varphi}$ będzie równy zeru, ponieważ wywołane przez płat zaburzenia nie docierają do tego obszaru.

Określimy obecnie warunki brzegowe, jakie powinien spełniać potencjał prędkości $\overline{\varphi}$. Skorzystamy w tym celu z warunku opływu płata bez oderwania.

Założymy, że krawędzie natarcia i spływu dane są przez równania

$$x_1 = \psi_1(z_1), \quad x_1 = \psi_2(z_2),$$

a grzbiet i spód płata przez równania

$$y_1 = f_1(x_1, z_1), \quad y_1 = f_2(x_1, z_1).$$

Wykorzystując więc warunek opływu bez oderwania, otrzymamy z dokładnością wynikającą z założeń teorii zlinearyzowanej[1]

$$\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y_1}\right)_{y_1=0} = (v_1 + v_x') \frac{\partial f}{\partial x_1} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \tag{19.65}$$

ponieważ dla cienkiego, słabo wygiętego płata jest $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ wielkością małą; w tym przypadku dla grzbietu płata należy jako funkcję f podstawić funkcję f_1, a dla spodu — funkcję f_2.

Zagadnienie będziemy rozwiązywali przy założeniu, że opływ krawędzi natarcia i krawędzi spływu jest naddźwiękowy (§ 6 niniejszego rozdziału), tzn. nałożymy na funkcję ψ_1 oraz ψ_2 następujące ograniczenia:

$$\left|\frac{d\psi_1}{dz_1}\right| \leqslant \operatorname{ctg} \mu_1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{d\psi_2}{dz_1}\right| \leqslant \operatorname{ctg} \mu_1. \tag{19.66}$$

W celu określenia potencjału $\overline{\varphi}(x_1, y_1, z_1)$, którego znajomość pozwoli na określenie charakterystyk aerodynamicznych (c_x i c_y) płata o skończonej rozpiętości w przepływie naddźwiękowym, wprowadzimy nowe zmienne:

$$x = \frac{x_1}{m}, \quad y = y_1, \quad z = z_1. \tag{19.67}$$

Wówczas (ponieważ $d\psi_1 = dx_1 = m\,dx$, $dz_1 = dz$) otrzymamy następujące równania na potencjał $\overline{\varphi}(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{19.68}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{v_1}{m} \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{19.69}$$

$$\left|\frac{d\psi_1}{dz}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{d\psi_2}{dz}\right| \leqslant 1 \tag{19.70}$$

[1] Przy zagadnieniach linearyzacji można warunki brzegowe z powierzchni płata przenieść równolegle do osi y_1 na rzut płata w płaszczyźnie $y_1 = 0$.

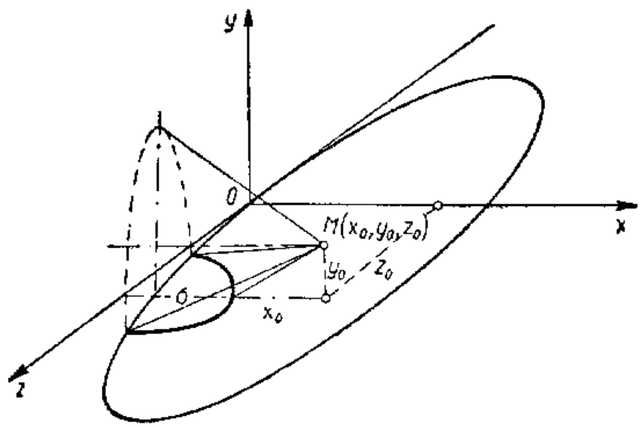
(w przekształconej płaszczyźnie kąt $\mu_1 = 45°$). Należy zaznaczyć, że jeżeli $m = 1$, tzn. $M = \sqrt{2}$, wówczas nie zachodzi różnica pomiędzy x_1, y_1, z_1 i x, y, z.

S.W. Falkowicz [66] podaje jako rozwiązanie zagadnienia na wartości brzegowe dla potencjału φ następujące wyrażenie:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{-1}{\pi} \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{d\sigma}{\sqrt{(x_0 - x)^2 - \left[(z_0 - z)^2 + y_0^2\right]}}, \tag{19.71}$$

gdzie σ — część płaszczyny x, z, odcięta przez stożek o wierzchołku w punkcie $M(x_0, y_0, z_0)$, przy czym oś stożka jest równoległa do osi x, a jego kąt rozwarcia równa się $\frac{\pi}{2}$ (rys. 19.21). Ta część płaszczyzny x, z jest z przodu ograniczona krawędzią natarcia płata; $d\sigma = dx\,dz$.

Wzór (19.71) jest słuszny tylko w tych przypadkach, gdy znane są wartości $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ na powierzchni σ i spełnione są warunki (19.70).



19.21. Do obliczenia potencjału prędkości φ

Ograniczymy się tu do omówienia jedynie tego przypadku. Jeżeli bowiem w pewnym obszarze powierzchni σ wartości $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ nie są znane, wówczas rozwiązanie zagadnienia bardzo się komplikuje; przypadek ten został dokładnie zbadany przez J.A. Krasilszczikową, która rozwiązała w sposób najbardziej ogólny zagadnienie naddźwiękowego opływu płata o skończonej rozpiętości [64].

Po określeniu potencjału φ w punktach położonych na powierzchni płata (ściślej, przy $y = 0$), można określić także różnice ciśnień odpowiadające dowolnej liczbie Macha przechodząc od $\varphi(x, y, z)$ do $\overline{\varphi}(x_1, y_1, z_1)$ i stosując zlinearyzowane równanie Bernoulliego (18.6):

$$p_a - p_g = 2\varrho_1 v_1 \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0}, \tag{19.72}$$

a następnie określić również siłę nośną.

W przypadku płaskiego płata o prostoliniowej krawędzi natarcia i spływu wszystkie obliczenia upraszczają się znacznie.

Równanie powierzchni płata (płytki) przybiera wówczas postać

$$y = -x\alpha,$$

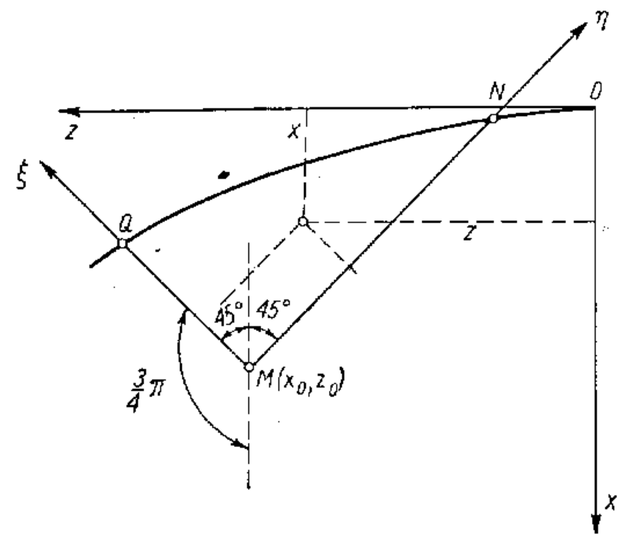
warunek zaś brzegowy

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -v_1\alpha. \tag{19.73}$$

Dla punktów leżących na powierzchni płata ($y_0 = 0$) będziemy więc mieli

$$\varphi(x_0, 0, z_0) = \frac{v_1\alpha}{\pi} \iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(x_0 - x)^2 - (z_0 - z)^2}}. \tag{19.74}$$

Aby ułatwić sobie wyznaczenie potencjału prędkości $\varphi(x_0, z_0)$, przejdziemy do nowego prostokątnego układu współrzędnych ξ, η z początkiem w punkcie $M(x_0, y_0)$; dokonamy w tym celu równoległego przeniesienia oraz obrotu osi x, z o kąt $\frac{3}{4}\pi$.



19.22. Przejście do nowych zmiennych ζ i η

Kierunki nowych osi (rys. 19.22) będą w płaszczyźnie $y = 0$ zgodne z kierunkami tworzących stożka Macha (rys. 19.22) odcinającego na powierzchni płata powierzchnię σ (MQN).

Zmianę zmiennych określają następujące zależności:

$$x = x_0 - \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad z = z_0 + \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

przy czym wzór (19.74) przybiera postać:

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1\alpha}{\pi} \iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{2\xi\eta}} = \frac{v_1\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\eta_N} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta}} \int\limits_0^{\psi_1(\eta)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{v_1\alpha\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\eta_N} \sqrt{\frac{\psi_1(\eta)}{\eta}}\, d\eta, \tag{19.75}$$

gdzie równanie krawędzi natarcia w nowych zmiennych ma postać $\xi = \psi_1(\eta)$, η_N zaś oznacza punkt przecięcia krawędzi natarcia płata z osią η.

§ 8. Płaski płat o obrysie rombowym

Omówimy obecnie opływ płaskiego płata w kształcie rombu (rys. 19.23). Rozważymy najpierw opływ płata w przestrzeni x, y, z (tzn. przy $M = \sqrt{2}$), a wzory ostateczne podamy również dla przestrzeni x_1, y_1, z_1, czyli dla dowolnych wartości liczby Macha. Wprowadzimy oznaczenia:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = k_1,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = k_2,$$

gdzie wskutek wprowadzonych w § 7 ograniczeń

$$\gamma_1 \geqslant 45°,$$

$$\gamma_2 \geqslant 45°.$$

Równania krawędzi natarcia (OB i OB') będą wówczas miały postać

$$z = k_1 x,$$

$$z = -k_1 x$$

lub w zmiennych ξ, η odpowiednio

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{k_1 x_0 - z_0}{k_1 + 1}\sqrt{2} - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\eta \\ \xi &= \frac{k_1 x_0 + z_0}{k_1 - 1}\sqrt{2} - \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}\eta \end{aligned}\right\} = \xi_1(\eta). \tag{19.76}$$

Ze względu na symetrię rozważymy opływ tylko połowy płata. Wyodrębnimy na płacie dwa obszary: $I(BOD)$ oraz $II(DOC)$, na jakie płat został podzielony stożkiem wychodzącym z punktu O.

Znajdziemy dla każdego z tych obszarów wartość potencjału φ. Należy zaznaczyć, że przy obliczaniu potencjału φ w punkcie $M(x_0, z_0)$, położonym w pierwszym obszarze, powierzchnię całkowania we wzorze (19.75) będzie stanowił trójkąt MQN; dla punktu M należącego do obszaru drugiego — czworokąt $MLON$.

Dla obszaru I mamy z (19.76):

$$\eta_A = \frac{k_1 x_0 - z_0}{k_1 - 1}\sqrt{2}.$$

Wyrażenie (19.75) na potencjał przybierze zatem postać

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 a \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\eta_N} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 - z_0}{(k_1 + 1)\eta}\sqrt{2} - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\right]}\, d\eta.$$

Całkując otrzymamy

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 a}{\sqrt{k_1^2 - 1}}(k_1 x_0 - z_0). \tag{19.77}$$

W zmiennych (x_1, y_1, z_1), czyli dla dowolnej wartości liczby Macha, otrzymamy (nie zmieniając indeksów)

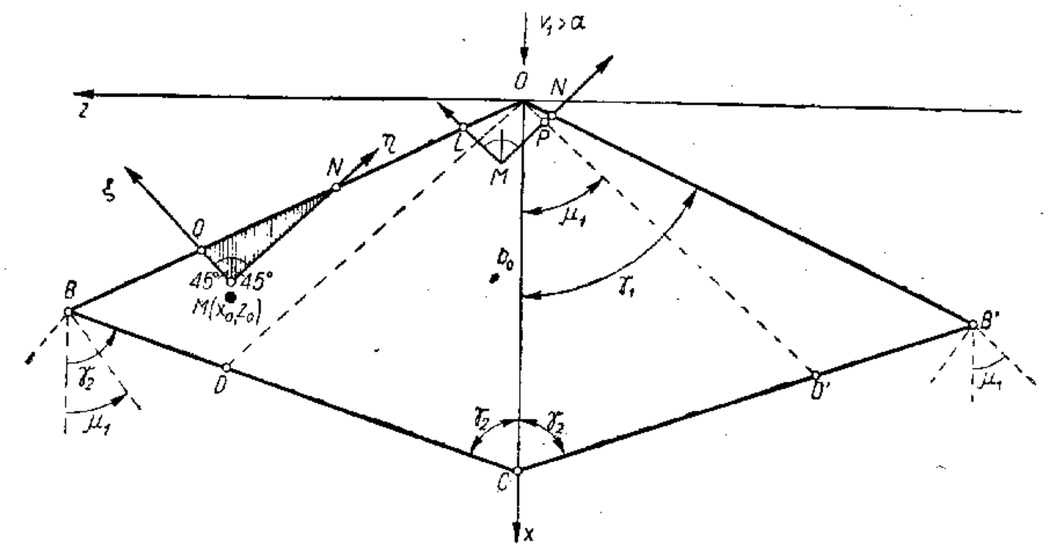
$$\bar{\varphi}(x_0, z_0) = \frac{v_1 a}{\sqrt{n^2 - 1}}(k_1 x_0 - z_0), \tag{19.78}$$

gdzie

$$n = m k_1.$$

Obliczając potencjał prędkości w obszarze II należy rozbić całkowanie względem η na dwie części: od punktu $M(x_0, z_0)$ do punktu P oraz od P do N. Biorąc pod uwagę, że

$$\eta_P = \frac{x_0 + z_0}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_N = \frac{k_1 x_0 + z_0}{k_1 + 1}\sqrt{2},$$



19.23. Naddźwiękowy opływ płaskiego płata romboidalnego

można wyrażenie dla potencjału (19.75) napisać w postaci

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 a \sqrt{2}}{\pi}\left(\int_0^{\eta_P} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 - z_0}{(k_1 + 1)\eta}\sqrt{2} - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\right]}\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta_P}^{\eta_N} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 + z_0}{(k_1 - 1)\eta}\sqrt{2} - \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}\right]}\, d\eta\right). \tag{19.79}$$

W zmiennych (x_1, y_1, z_1), czyli przy dowolnej wartości liczby Macha, otrzymamy po przekształceniach (nie zmieniając indeksów):

$$\bar{\varphi}(x_0, z_0) = \frac{2 v_1 a}{\pi\sqrt{n^2 - 1}}\left[(k_1 x_0 - z_0)\frac{\pi}{2} - k_1 x_0 \arcsin\sqrt{\frac{x_0 - m^2 z_0^2}{m^2(k_1^2 x_0^2 - z_0^2)}} + \right.$$

$$\left. + z_0 \arcsin k_1 \sqrt{\frac{x_0^2 - m^2 z_0^2}{k_1^2 x_0^2 - z_0^2}}\right]. \tag{19.80}$$

Ze wzorów (19.78) i (19.80) wynika w szczególności, że na promieniu OD potencjał prędkości jest ciągły.

Po określeniu potencjału prędkości dla obszarów płata I i II przejdziemy do określenia sił.

W obszarze I mamy z równania (19.78):

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0} = \frac{v_1 a k_1}{\sqrt{n^2-1}}. \tag{19.81}$$

Na podstawie równania (19.72) można wywnioskować, że ciśnienie zależy od współrzędnych punktu $M(x_0, z_0)$[1].

Wykorzystując równanie (19.72) oraz wprowadzając współrzędne biegunowe r, θ z biegunem w punkcie O, można napisać wyrażenie na siłę nośną w pierwszym obszarze płata w postaci:

$$Y_{\mathrm{I}} = 2\varrho_1 v_1 \int_0^{r_1}\int_\alpha^{\gamma_1} \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0} r\,dr\,d\theta,$$

gdzie

$$r_1 = \frac{k_2 b_0}{\sin\theta + k_2\cos\theta},$$

to znaczy

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{4 a k_1 q_1}{\sqrt{n^2-1}} S_I,$$

gdzie S_1 jest to powierzchnia pierwszego obszaru płata.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$n' = m k_2$$

oraz uwzględnimy, że

$$S_{\mathrm{I}} = \frac{k_2 n'(n-1) b_0^2}{2(n'+1)(n+n')},$$

wówczas będziemy mogli napisać wyrażenie na siłę nośną dla pierwszego obszaru płata w następującej, ostatecznej postaci:

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{2 a q_1 k_1 k_2 n'(n-1) b_0^2}{(n'+1)(n+n')\sqrt{n^2-1}}. \tag{19.81'}$$

[1] Zaznaczymy przy okazji, że dla rozważanej części płata łatwo jest obliczyć wartość współczynnika c_y. Istotnie

$$c_y = \frac{p_d - p_g}{\frac{\varrho_1 v_1^2}{2}\,1} = \frac{4}{v_1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0} = \frac{4 a k_1}{\sqrt{n^2-1}},$$

skąd przy $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ wypada

$$c_y = \frac{4a}{\sqrt{M^2-1}}.$$

W obszarze II mamy z równania (19.80)

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0} = \frac{2 v_1 a k_1}{\pi\sqrt{n^2-1}} \arccos\sqrt{\frac{x_0^2 - m^2 z_0^2}{m^2(k_1^2 x_0^2 - z_0^2)}} =$$

$$= \frac{2 v_1 a k_1}{\pi\sqrt{n^2-1}} \arccos\sqrt{\frac{1 - m^2\operatorname{tg}^2\theta}{n^2 - m^2\operatorname{tg}^2\theta}}. \tag{19.82}$$

Z wyrażenia tego wynika (wzór 19.72), że wzdłuż promienia $\theta = \mathrm{const}$ ciśnienie jest stałe.

Wykorzystując równanie (19.72) oraz wprowadzając ponownie współrzędne biegunowe r, θ z biegunem w punkcie O, można napisać wyrażenie na siłę nośną w drugim obszarze płata w następującej postaci:

$$Y_{\mathrm{II}} = \frac{4\varrho_1 v_1^2 k_1 a}{\pi\sqrt{n^2-1}} \int_0^{\alpha_1}\int_0^{r_1} \arccos\sqrt{\frac{1 - m^2\operatorname{tg}^2\theta}{n^2 - m^2\operatorname{tg}^2\theta}}\, r\,dr\,d\theta.$$

Po przekształceniach otrzymamy wyrażenie na siłę nośną w obszarze drugim w następującej postaci ostatecznej:

$$Y_{\mathrm{II}} = \frac{4 a q_1 k_1 k_2 n' b_0}{\pi\sqrt{n^2-1}} \left[\frac{\pi(1-n)}{2(n'+1)(n+n')} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n'(n^2-n'^2)} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n'^2-1}}{n'}\right)\right]. \tag{19.82'}$$

Współczynnik siły nośnej płata można określić ze wzoru

$$c_y = \frac{2(Y_{\mathrm{I}} + Y_{\mathrm{II}})}{q_1 S},$$

gdzie S jest to powierzchnia całego płata (jednej i drugiej połowy).

Ostatecznie otrzymamy

$$c_y = \frac{8a}{(n-n')m\pi}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n'^2-1}}{n'}\right). \tag{19.83}$$

W przypadku szczególnym, gdy krawędź spływu (lub natarcia) jest prostopadła do wektora prędkości przepływu niezakłóconego, wówczas

$$n' = \infty \qquad \left(\text{lub } \gamma_1 = \frac{\pi}{2},\quad n = \infty\right),$$

$$c_y = \frac{4a}{\sqrt{M^2-1}} = 2c_1 a, \tag{19.84}$$

czyli takie trójkątne płaty dają ten sam współczynnik siły nośnej co płytka (§ 6).

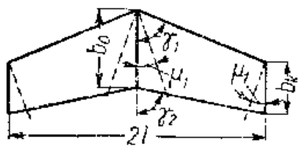
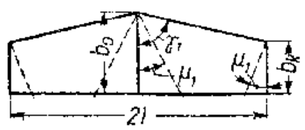
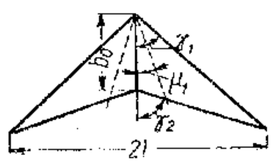
Ponieważ wypadkowa siła aerodynamiczna jest prostopadła do powierzchni płata

(płytki), więc opór trójkątnej płytki jest także równy oporowi płytki o nieskończonej rozpiętości w przepływie płaskim:

$$c_x = c_y\, a = 2\, c_1\, a^2 = \frac{c_y^2}{2\, c_1}. \tag{19.85}$$

Zwracamy uwagę, że podana metoda może być stosowana przy obliczaniu aerodynamicznych charakterystyk płatów o rozmaitych obrysach (oczywiście przy spełnieniu wymienionych wyżej ograniczeń).

Na zakończenie podajemy tablicę wzorów dla określania charakterystyki aerodynamicznej kilku płatów w przepływie naddźwiękowym.

L. p.	Obrys płata	Współczynnik siły nośnej
1		$c_y = \frac{4a}{m}\,\frac{l - 0{,}5\,b(\operatorname{tg}\mu_1 + \operatorname{tg}\theta_0)}{l - b\operatorname{tg}\theta_0}$
2		$c_y = \frac{4a}{m}\left(1 - 0{,}5\,\frac{b}{l}\operatorname{tg}\mu_1\right)$
3		$c_y = \frac{4a}{m}\,\frac{b_0^2}{(n+n')(b_0^2+b_k^2)}\left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right) + \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right) - \frac{b_k^2}{b_0^2-b_k^2}\sqrt{\frac{n'^2}{n'+1}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right.$ $n = m\operatorname{tg}\gamma_1;\quad n' = m\operatorname{tg}\gamma_2;\quad b_k = b_0 - \frac{ml(n'-n)}{n\,n'}$
4		$c_y = \frac{4a}{m}\,\frac{b_0^2}{b_0^2-b_k^2}\left(1 - \frac{b_k^2}{b_0^2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$ $n = m\operatorname{tg}\gamma_1 = m\frac{l}{b_0 - b_k}$
5		$c_y = \frac{4a}{m}\,\frac{1}{(n+n')}\left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right) + \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right)\right]$ $n = m\operatorname{tg}\gamma_1 = m\frac{l\operatorname{tg}\gamma_2}{b_0\operatorname{tg}\gamma_2 + l}$

Kierunek lotu ↑

Współczynnik oporu falowego $c_z = c_y C$

BIBLIOGRAFIA

Podstawowa

[1] Лойцянский Л. Г., *Механика жидкости и газа*, ГИТТЛ, 1950.

[2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., *Теоретическая гидромеханика*, ГИТТЛ, ч. I, II, 1948.

[3] Голубев В. В., *Лекции по теории крыла*, ГИТТЛ, 1949.

[4] Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А., *Прикладная газовая динамика*, 1948.

[5] Фабрикант Н. Я., *Аэродинамика*, ГИТТЛ, ч. I, 1949.

[6] Седов Л. И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, ГИТТЛ, 1950.

[7] Левинсон Я. И., *Аэродинамика больших скоростей*, Оборонгиз, 1950.

[8] Абрамович Г. Н., *Прикладная газовая динамика*, ГИТТЛ, 1951.

[9] Мартынов А. К., *Экспериментальная аэродинамика*, Оборонгиз, 1950.

[10] Бураго Г. Ф., *Теория крыловых профилей с учетом влияния сжимаемости воздуха*, ВВИА им. Жуковского, 1949.

Uzupełniająca

[11] Келдыш М. В. и Франкль Ф. И., *Внешняя задача Неймана для линейных эллиптических уравнений в приложениях к теории крыла в сжимаемом газе*, Известия АН СССР, серия матем., № 4, 1934.

[12] Оглоблин А. П., *Систематическое исследование крыльев*, Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933.

[13] Глауэрт, *Основы теории крыла и винта*, ГНТИ, 1931 (tłum. z ang.).

[14] Голубев В. В., *Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке*, ГОНТИ, НКТП, 1938.

[15] Мизес, *Теория полета*, Издательство иностр. литературы, 1949 (tłum. z ang.).

[16] Чаплыгин С. А. и Аржаников Н. С., *К теории открылка и закрылка*, Труды ЦАГИ, вып. 105, 1931.

[17] Чаплыгин С. А., *Подъемная сила составного крыла*, Собрание сочинений, т. III, 1935.

[18] Седов Л. И., *Теория плоских движений идеальной жидкости*, Оборонгиз, 1939.

[19] Нужин С. Г., *К теории тонкого профиля*, Труды КАИ, вып. 1937.

[20] Theodorsen, General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections, NACA Report № 452 (1933).

[21] Серебринский Я. М., *Обтекание крыловых профилей произвольной формы*, Инженерный сборник, гл. III, вып. 1, 1946.