# ملخص في دراسة الدالة


ذ : لشقر عبد الرحيم

06-42-92-24-74


## ♦ الدالة اللوغاريتمية :

| | |
|---|---|
| $\ln(1)=0$ | $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$ |
| $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ | $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$ |
| $\ln\left(a^n\right)=n\ln a \ {}_{(r\in\mathbb{Q})}$ | $\ln\left(a^n\right)=n\ln\lvert a\rvert \ {}_{(n\in\mathbb{R}^*)}$ |
| $\begin{cases}\ln(a)=\ln(b)\\ a=b\end{cases}$ | $\begin{cases}\ln(a)=b\\ a=e^b\end{cases}$ |

## ♦ النهايات الاعتيادية :

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \ {}_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ |
| $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0 \ {}_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ |
| $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ | $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ |

## ♦ الدالة المشتقة :

| | |
|---|---|
| $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | $\left(\ln\left(U(x)\right)\right)'=\frac{U'(x)}{U(x)}$ |

## ♦ الدوال الأسية :

| | |
|---|---|
| $(\forall x\in\mathbb{R})\ : e^x>0$ | $e^0=1$ |
| $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ | $\frac{1}{e^b}=e^{-b}$ |
| $\left(e^a\right)^n=e^{na}$ | $e^a\times e^b=e^{a+b}$ |
| $\begin{cases}e^a=e^b\\ a=b\end{cases}$ | $\begin{cases}e^a=b\\ a=\ln b\end{cases}$ |
| $\ln\left(e^x\right)=x$ | $e^{\ln(x)}=x$ |

## ♦ النهايات الاعتيادية :

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \ {}_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0 \ {}_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ |
| $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ | |

## ♦ الدالة المشتقة :

| | |
|---|---|
| $\left(e^x\right)'=e^x$ | $\left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)e^{U(x)}$ |

## ♦ مجموعة تعريف $D_f$ :

| الدالة | مجموعة تعريفها |
|---|---|
| $f(x)=P(x)$ | $D_f=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=e^x$ | $D_f=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\sqrt{P(x)}$ | $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)\geq0\}$ |
| $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ | $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)\neq0\}$ |
| $f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ | $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)>0\}$ |
| $f(x)=\ln\left(P(x)\right)$ | $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)>0\}$ |
| $f(x)=\ln\lvert P(x)\rvert$ | $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)\neq0\}$ |

## ♦ معادلة المماس :

معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ عند النقطة $a$.

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

## ♦ مبرهنة القيم الوسطية :

- $f$ متصلة على مجال $I$ و على $[a;b]$.
- $f$ رتيبة قطعا على مجال $I$ و على $[a;b]$.
- $0\in f(I)$.
- $f(a)\times f(b)\leq0$.

$\Leftarrow$ اذن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $I$ وأن $[a;b]$.

## ♦ دالة عكسية $f^{-1}$ :

- $f$ متصلة على مجال $I$.
- $f$ رتيبة قطعا على مجال $I$.

$\Leftarrow$ اذن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على المجال $J$.

بحيث : $\boxed{J=f(I)}$

## ♦ نقطة تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محور الأراتيب :

نقطة تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محور الأراتيب هي : $\left(0;f(0)\right)$

## ♦ نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محور الأفاصيل :

نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محور الأفاصيل هي حلول المعادلة $f(x)=0$

## ♦ الإتصال :

نقول إن الدالة $f$ متصلة في النقطة $x_0=a$ اذا كانت :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)}$$

## ♦ رتابة الدالة $f$

لدراسة رتابة الدالة $f$ على $I$ نقوم بحساب الدالة المشتقة $f'(x)$

إذا كانت : $f'(x)\geq 0$ $\Leftrightarrow$ الدالة $f$ تزايدية على $I$.

إذا كانت : $f'(x)\leq 0$ $\Leftrightarrow$ الدالة $f$ تناقصية على $I$ .

إذا كانت : $f'(x)=0$ $\Leftrightarrow$ الدالة $f$ ثابتة على $I$ .

## ♦ تحديد إشارة الدالة انطلاقا من جدول التغيرات

### - قيمة دنيا :

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | عكس إشارة $a$ $-$ | 0 | $+$ إشارة $a$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ |

$\Leftarrow$ الدالة $f$ تقبل قيمة دنيا مطلقة على $I$ في النقطة $x_0$ .

إذن :

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\geq f(x_0)}$$

### - قيمة قصوى :

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | عكس إشارة $a$ $+$ | 0 | $-$ إشارة $a$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\searrow$ |

$\Leftarrow$ الدالة $f$ تقبل قيمة قصوى مطلقة على $I$ في النقطة $x_0$ .

إذن :

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\leq f(x_0)}$$

## ♦ زوجية الدالة :

**الدالة زوجية :**

$$\boxed{\begin{cases}-x\in D_f\\ f(-x)=f(x)\end{cases}}$$

ملاحظة : دالة زوجية تعكس رتابتها .

**الدالة فردية :**

$$\boxed{\begin{cases}-x\in D_f\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}}$$

ملاحظة : - دالة فردية تحافظ على رتابتها

- اذاكانت $f$ دالة فردية فإن النقطة $O(0;0)$ هي مركز تماثل للمنحنى $(C_f)$ .

## ♦ مقارب مائل

لكي نبين أن $(C_f)$ يقبل مقارب مائل $(\Delta)$ معادلته : $y=ax+b$ بجوار $\pm\infty$ .

يجب أن نبين : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y=0}$

## ♦ لدراسة الوضع النسبي :

لدراسة الوضع النسبي ل $(C_f)$ منحنى الدالة والمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=ax+b$ .

$\Leftarrow$ ندرس إشارة فرق : $f(x)-y$ .

- إذا كانت : $f(x)-y\geq 0$ نقول إن $(C_f)$ فوق المستقيم $(\Delta)$ .

- إذا كانت : $f(x)-y\leq 0$ نقول إن $(C_f)$ تحت المستقيم $(\Delta)$.

- إذا كانت : $f(x)-y$ تنعدم في $x_0$ فإن :

النقطة $I(x_0;f(x_0))$ هي نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$

**جدول الوضع النسبي**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | عكس إشارة $a$ $-$ | 0 | $+$ إشارة $a$ |
| الوضع النسبي ل $(C_f)$ | $(C_f)$ تحت المستقيم $(\Delta)$ | $(x_0;f(x_0))$ نقطة التقاطع | $(C_f)$ فوق المستقيم $(\Delta)$ |

## ♦ دراسة تقعر

لدراسة تقعر $(C_f)$ . ندرس إشارة المشتقة الثانية $f''(x)$ :

- إذا كانت : $f''(x)\geq 0$ فإن $(C_f)$ محدب على $I$.

- إذا كانت : $f''(x)\leq 0$ فإن $(C_f)$ مقعر على $I$ .

- إذا كانت $f''$ تنعدم في $x_0$ و تغير إشارة فإن :

النقطة $I(x_0;f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف المنحنى $(C_f)$.

**جدول التقعر $(C_f)$**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | عكس إشارة $a$ $-$ | 0 | $+$ إشارة $a$ |
| تقعر $(C_f)$ | $\frown$ | $(x_0;f(x_0))$ نقطة الإنعطاف | $\smile$ |

**ملاحظة :**

إذا كانت $f'$ تنعدم في $x_0$ دون تغير إشارة فإن النقطة $I(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف المنحنى $(C_f)$.

Abderrahim Lachqar 06-42-92-24-74

## ♦ قواعد الدالة المشتقة :

| | |
|---|---|
| $(U^n)' = nU' \times U^{n-1}$<br>$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$<br>$(\sqrt{U})' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$<br>$(\sqrt[n]{U})' = \dfrac{U'}{n\left(\sqrt[n]{U}\right)^{n-1}}$ | $(a)' = 0$<br>$(x)' = 1$<br>$(ax)' = a$<br>$(x^n)' = nx^{n-1}$<br>$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$<br>$\left(\dfrac{1}{V}\right)' = -\dfrac{V'}{V^2}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$<br>$(\cos x)' = -\sin x$<br>$(\sin U)' = U'\cos U$<br>$(\cos U)' = -U'\sin U$<br>$(\tan U)' = U'(1+\tan^2 U)$ | $(U+V)' = U' + V'$<br>$(U-V)' = U' - V'$<br>$(U \times V)' = U' \times V + V' \times U$<br>$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$ |

## ♦ قابلية الإشتقاق :

نقول إن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في $x_0$ إذا كانت :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}}$$

نقول إن الدالة $f$ غير قابلة للإشتقاق في $x_0$ إذا كانت :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty}$$

## ♦ أشكال غير محددة $F.I$ :

$$\boxed{\frac{0}{0} \ ; \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \ ; \ +\infty - \infty \ ; \ 0 \times \infty}$$

## ♦ أشكال محددة :

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{a}{0} = \infty$<br>$\dfrac{a}{\infty} = 0$<br>$\dfrac{0}{\infty} = 0$<br>$\dfrac{\infty}{0} = \infty$ | $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$<br>$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$<br>$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$<br>$(+a) \times (+\infty) = +\infty$<br>$(+a) \times (-\infty) = -\infty$<br>$(-a) \times (+\infty) = -\infty$ | $+\infty + \infty = +\infty$<br>$-\infty - \infty = -\infty$<br>$\pm a + \infty = +\infty$<br>$\pm a - \infty = -\infty$ |

## ♦ تحديد إشارة الدالة انطلاقا من جدول التغيرات

### حالة 1 :

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |

الدالة $g$ تزايدية على $]-\infty; x_0]$ .

$\forall x \in ]-\infty; x_0] \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x_0$

$\Leftrightarrow \ g(x) \leq g(x_0)$

الدالة $g$ تزايدية على $[x_0; +\infty[$ .

$\forall x \in [x_0; +\infty[ \quad \Leftrightarrow \quad x \geq x_0$

$\Leftrightarrow \ g(x) \geq g(x_0)$

### حالة 2 :

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | ↘ | $0$ | ↘ |

الدالة $g$ تناقصية على $]-\infty; x_0]$ .

$\forall x \in ]-\infty; x_0] \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x_0$

$\Leftrightarrow \ g(x) \geq g(x_0)$

الدالة $g$ تناقصية على $[x_0; +\infty[$ .

$\forall x \in [x_0; +\infty[ \quad \Leftrightarrow \quad x \geq x_0$

$\Leftrightarrow \ g(x) \leq g(x_0)$

## ♦ محور التماثل :

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$ إذا كان :

$$\boxed{\begin{array}{l} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{array}}$$

## ♦ مركز التماثل :

تكون النقطة $I(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى $(C_f)$ إذا كان :

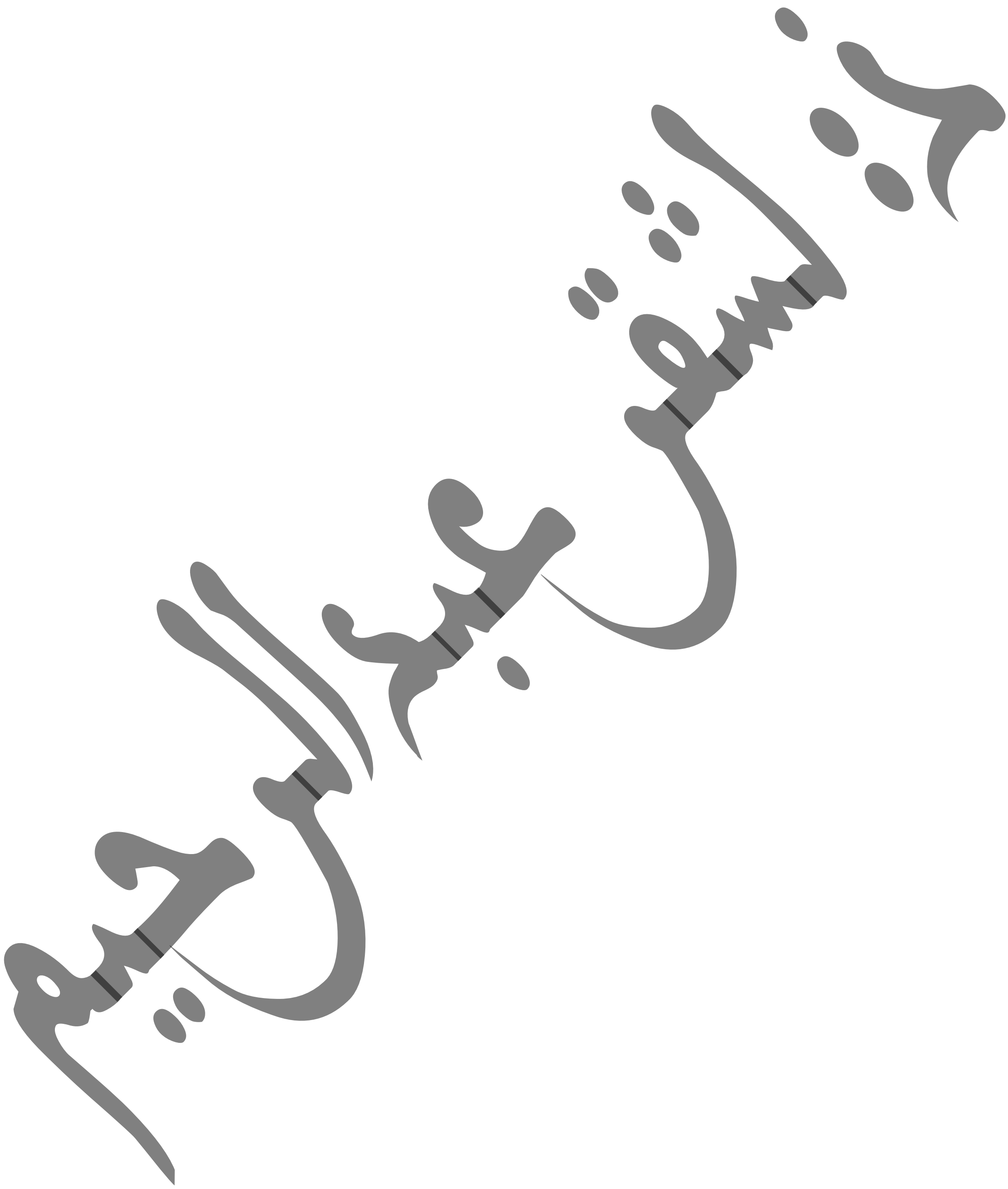
$$\boxed{\begin{array}{l} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{array}}$$

Abderrahim Lachqar 06-42-92-24-74

# الفروع اللانهائية

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$
  - $(C_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y = a$ بجوار $\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  - $(C_f)$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
    - $\pm\infty$
      - **$(C_f)$ يقبل فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب بجوار $\pm\infty$**
    - $0$
      - **$(C_f)$ يقبل فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $\pm\infty$**
    - $a \neq 0$
      - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
        - $\pm\infty$
          - **$(C_f)$ يقبل فرع شلجمي اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = ax$ بجوار $\pm\infty$**
        - $b$
          - **$(C_f)$ يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار $\pm\infty$**

Abderrahim Lachqar | Abderrahim.lachqar | 06-42-92-24-74


عبد الرحيم