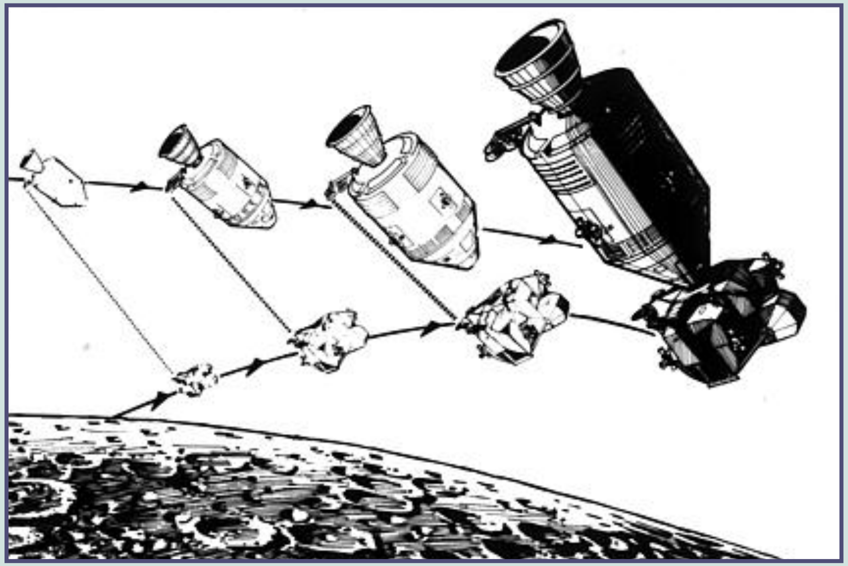
# Mouvement relatif de deux véhicules spatiaux

## Application au Rendez-Vous spatial



*Jérôme BRAURE Justin MONTHEILLET Luciano TOMASSONI*
*Mastère TAS Astronautics – Mécanique Spatiale*

# Plan

(1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

(2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

(3) Application: contraintes et stratégies de rendez-vous d'une navette avec une station orbitale

# Plan

(1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

(2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

(3) Application: contraintes et stratégies de rendez-vous d'une navette avec une station orbitale

# (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

• Problème du mouvement relatif exploré pour la 1ère fois par Hill en 1878

• Clohessy et Wiltshire formulent de manière pratique le travail de Hill au début des 60's

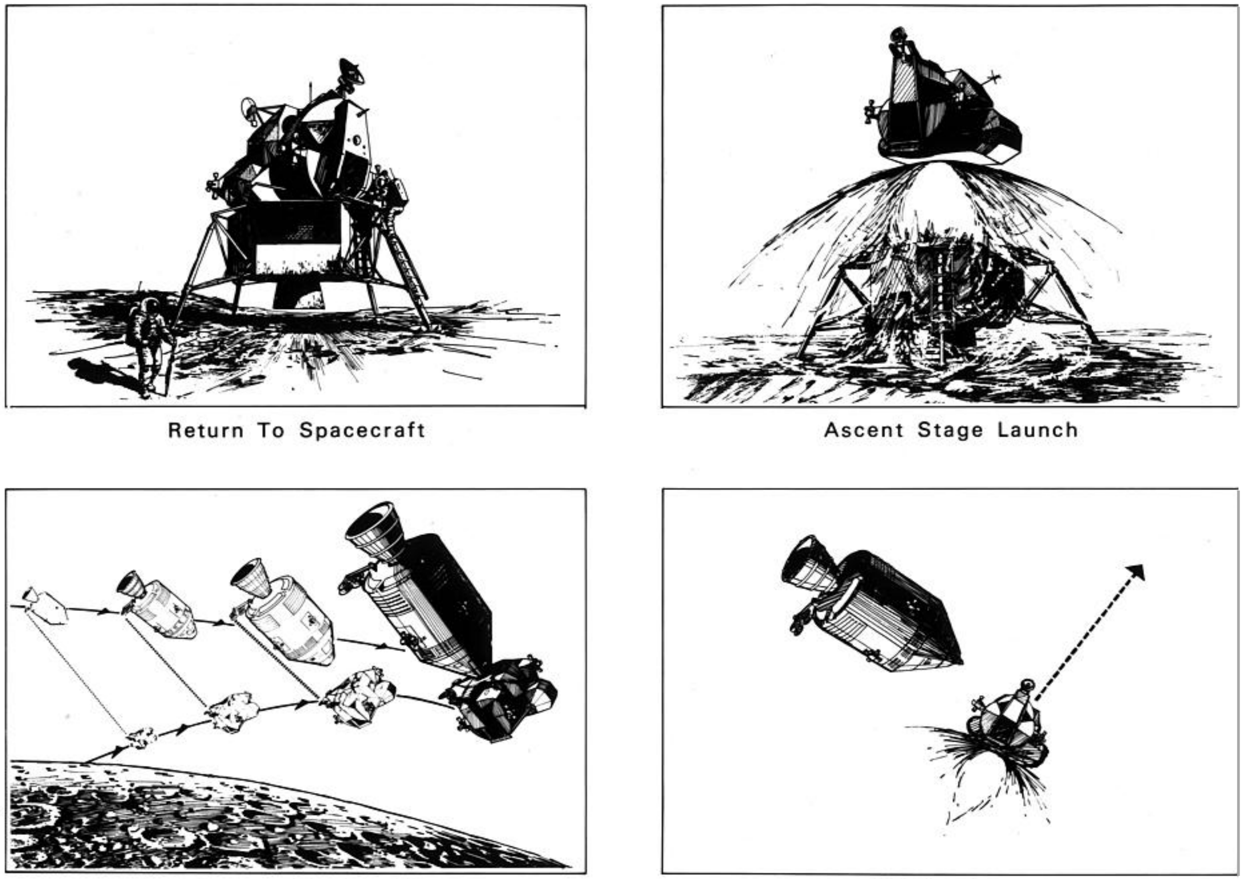
• 1965: 1er rendez-vous de 2 véhicules spatiaux habités (programme *Gemini*)

⇨ la faisabilité technique du rendez-vous spatial est démontrée

• 1969: 1ère mission Apollo

# (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

APOLLO 11 — Lunar Ascent And Rendezvous



Return To Spacecraft — Ascent Stage Launch — Rendezvous And Docking — LM Jettison

⇨ rôle essentiel de la maîtrise du mouvement relatif

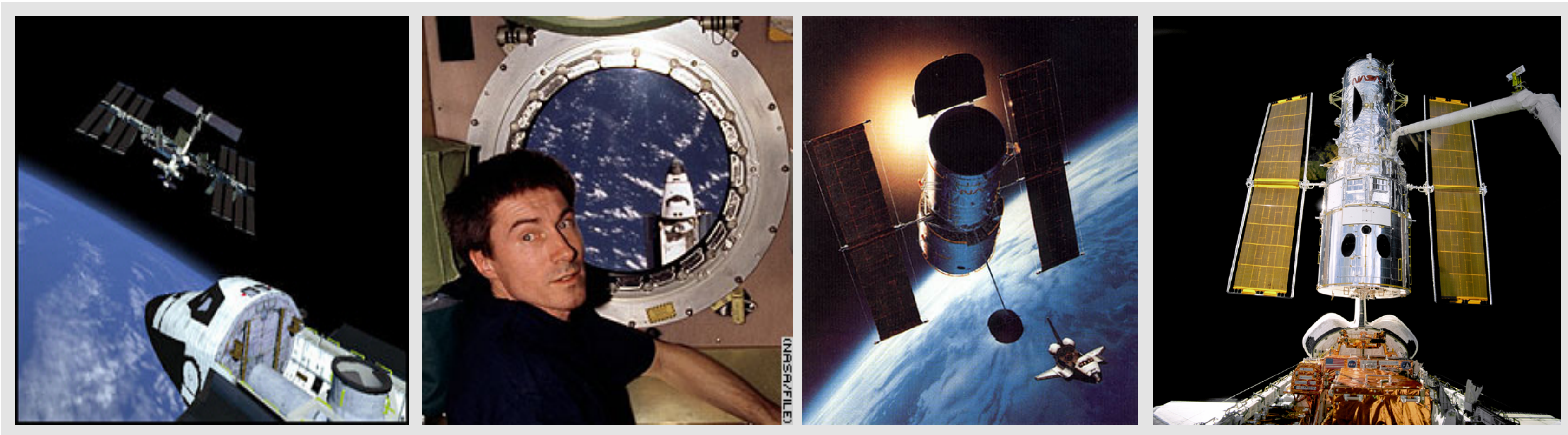
# (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

• 1975: 1er rendez-vous spatial entre une capsule américaine et une capsule russe (Apollo-Soyuz)


⇨ Enjeux pacifiques qui présagent d'une ère de coopération spatiale internationale

# (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

• De nos jours, mouvement relatif assez bien maîtrisé par les américains et les russes pour les missions courantes:

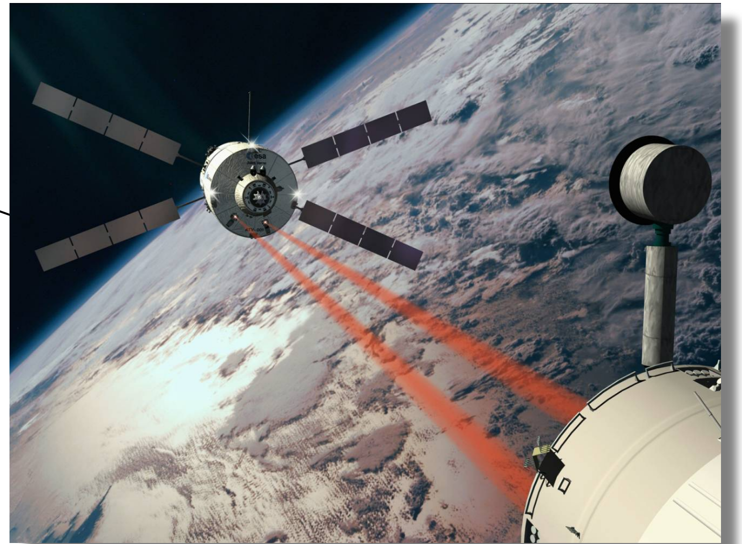


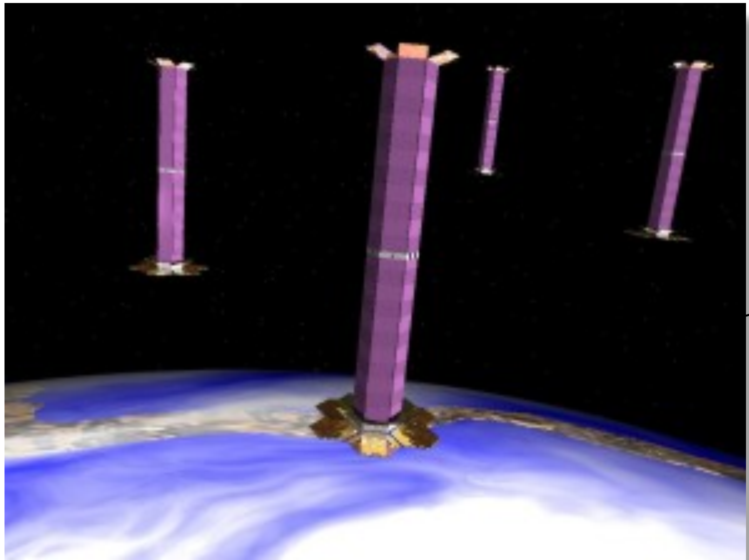

Rendez-vous du Shuttle/Soyuz avec l' ISS, réparation du Hubble Space Telescope, etc...

## (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

- Exemples des enjeux futurs:

Rendez-vous ATV-ISS: maîtrise européenne



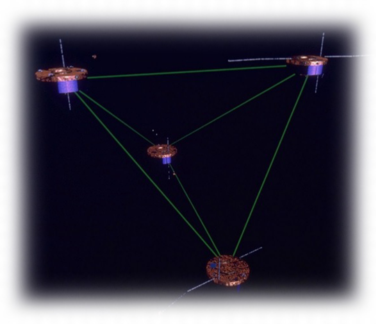


Vol en formation de satellites: contrôle de la géométrie et maintien des positions relatives

# (1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

⇨ Maîtrise du mouvement relatif orbital essentielle pour de nombreuses missions:

- desserte de stations spatiales
- réparation, ravitaillement ou récupération de systèmes orbitaux
- vol en formation de satellites



⇨ Optimisation des missions (sécurité, performances, temps, consommation d'ergols, ...) à partir de modèles de prévision du mouvement relatif.

⇨ Contrôle du vol des engins spatiaux par des algorithmes de guidage basés sur le modèle de Clohessy-Wiltshire.

# Plan

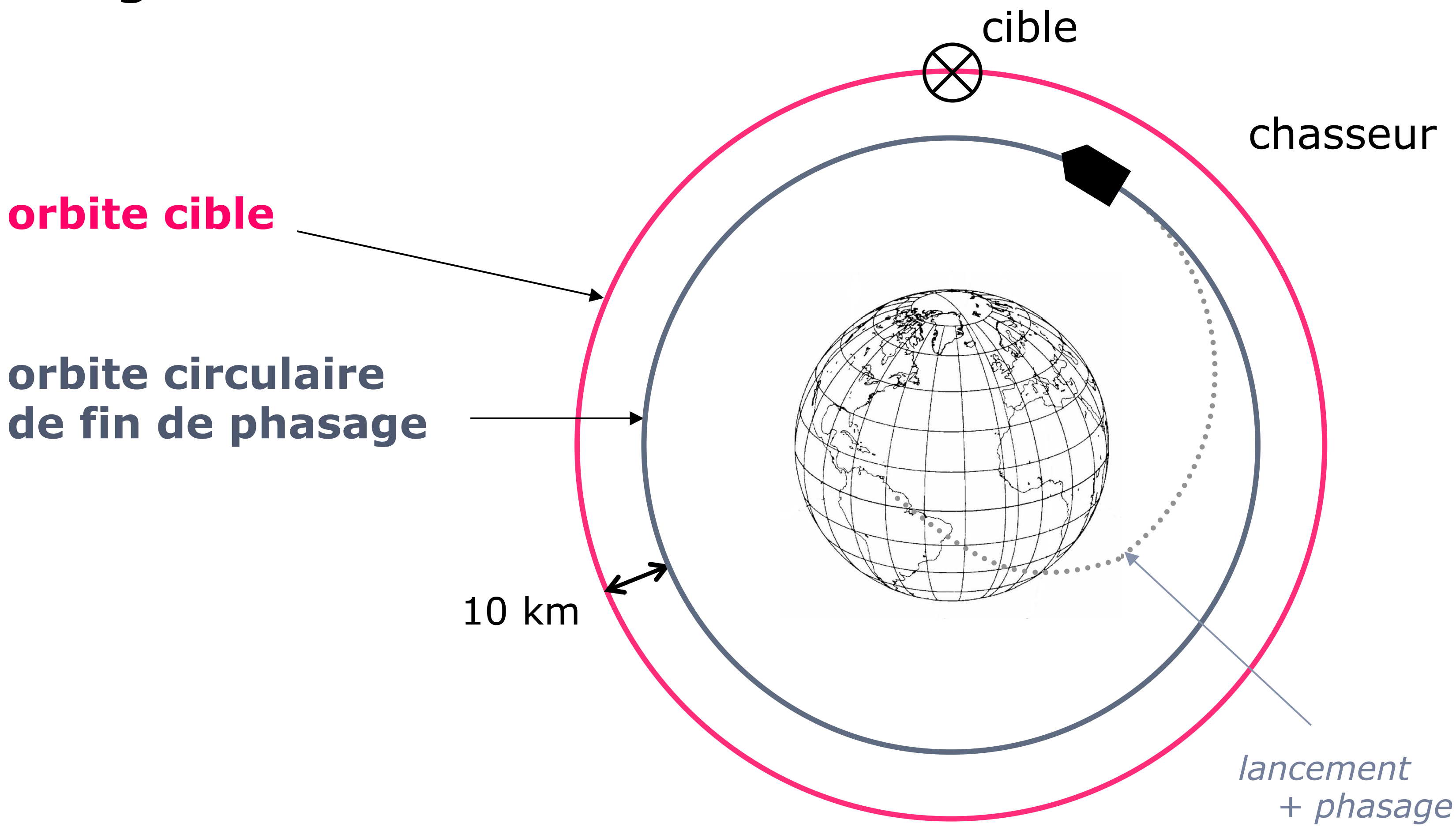
(1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

(2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

(3) Application: contraintes et stratégies de rendez-vous d'une navette avec une station orbitale

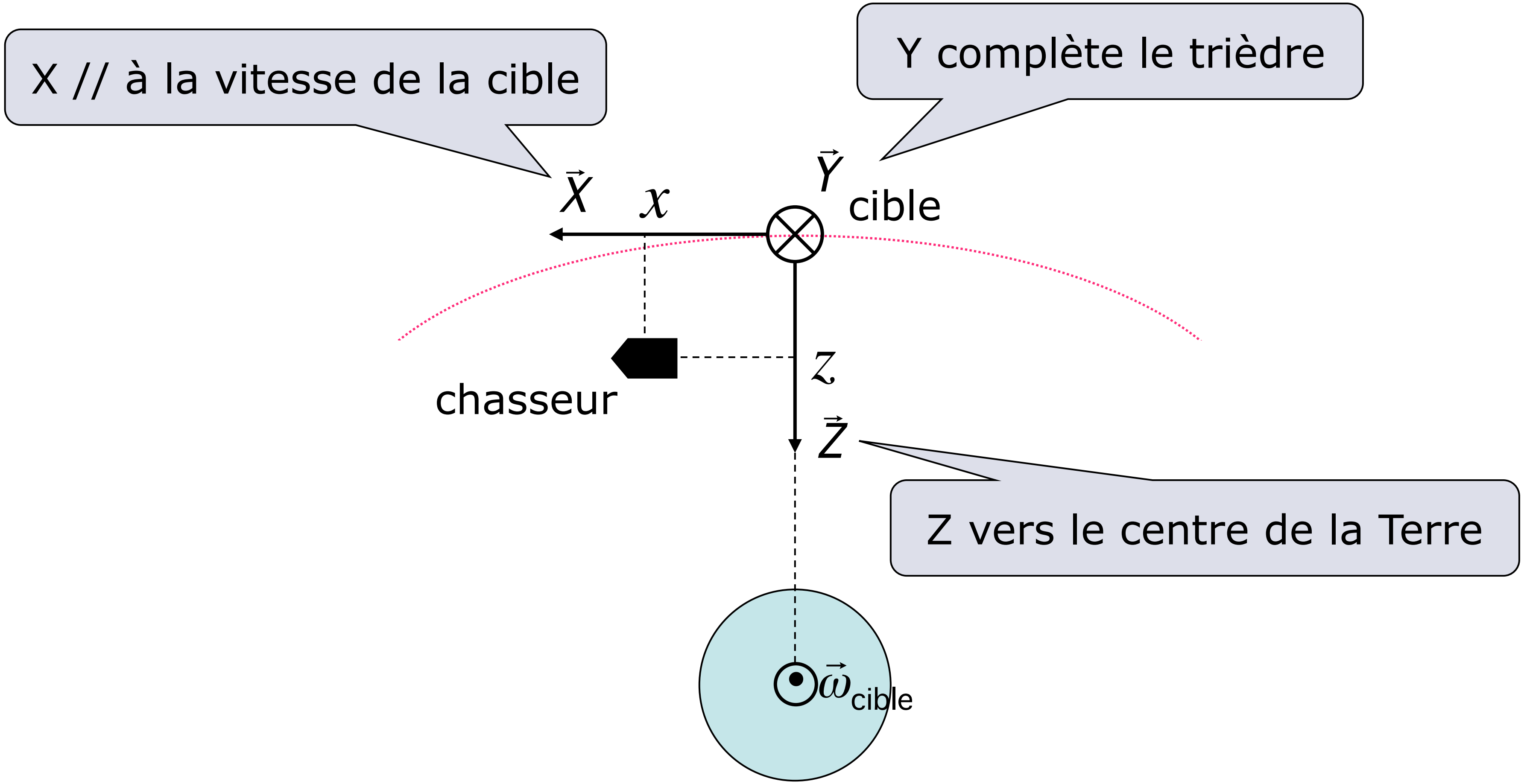
## (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Configuration étudiée:**



# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Le repère cible:**



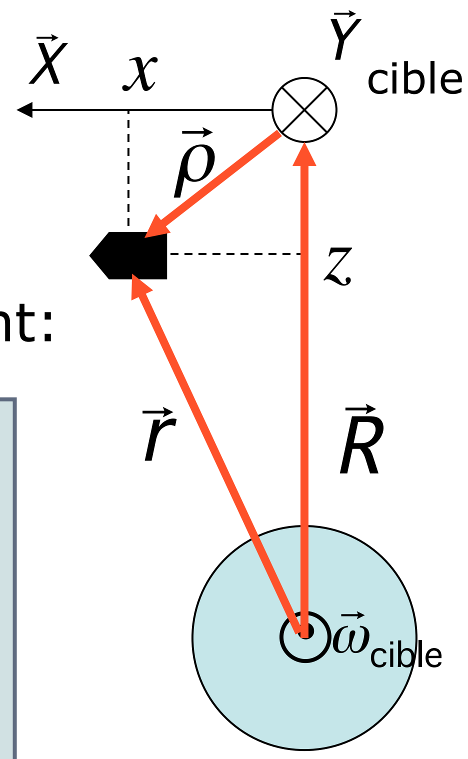
# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Système des équations de Clohessy-Wiltshire (CW):**

- PFD: $\vec{F} = m\vec{\gamma}$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad \text{avec } \vec{\rho} << \vec{r}, \vec{R}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\frac{-\mu}{r^3}\vec{r}}_{\text{force centrale}} + \underbrace{\Delta\vec{\gamma}}_{\text{perturbations}}$$




- Après développement au 1er ordre on obtient:

$$(CW) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \Delta\gamma_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = \Delta\gamma_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \Delta\gamma_z \end{cases}$$

# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Etude du système de CW:**

$$(CW)\quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \Delta\gamma_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = \Delta\gamma_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \Delta\gamma_z \end{cases}$$

$\omega$ = pulsation orbite cible

$\Delta\vec{\gamma}$ = accélérations différentielles perturbatrices

- commandes de poussée
- termes zonaux et tesseraux du potentiel terrestre
- traînée atmosphérique
- pression de radiation solaire
- attraction luni-solaire
- etc...

# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Etude du système de CW:**

$$(CW)\quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \Delta\gamma_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = \Delta\gamma_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \Delta\gamma_z \end{cases}$$

- Décrit le mouvement du chasseur dans le repère cible
- Système d'équations différentielles couplées non-linéaires
- Décorrélation des mouvements plan *(X,Z)* et hors plan *(Y)*
- Validité: orbites quasi-circulaires, chasseur et cible proches

## (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Résolution des équations de CW dans le plan orbital:**

- Hypothèse: $\Delta\gamma = cte$

$$\begin{cases} x = x_0 + 6(\theta - s)z_0 + \dfrac{4s - 3\theta}{\omega}\dot{x}_0 + \dfrac{2}{\omega}(1 - c)\dot{z}_0 + \dfrac{1}{\omega^2}\left[4(1 - c) - \dfrac{3}{2}\theta^2\right]\Delta\gamma_x + \dfrac{2}{\omega}(\theta - s)\Delta\gamma_z \\ z = (4 - 3c)z_0 + \dfrac{2}{\omega}(c - 1)\dot{x}_0 + \dfrac{s}{\omega}\dot{z}_0 + \dfrac{2}{\omega^2}(\theta - s)\Delta\gamma_x + \dfrac{1 - c}{\omega^2}\Delta\gamma_z \end{cases}$$

$\theta = \omega(t - t_0)$

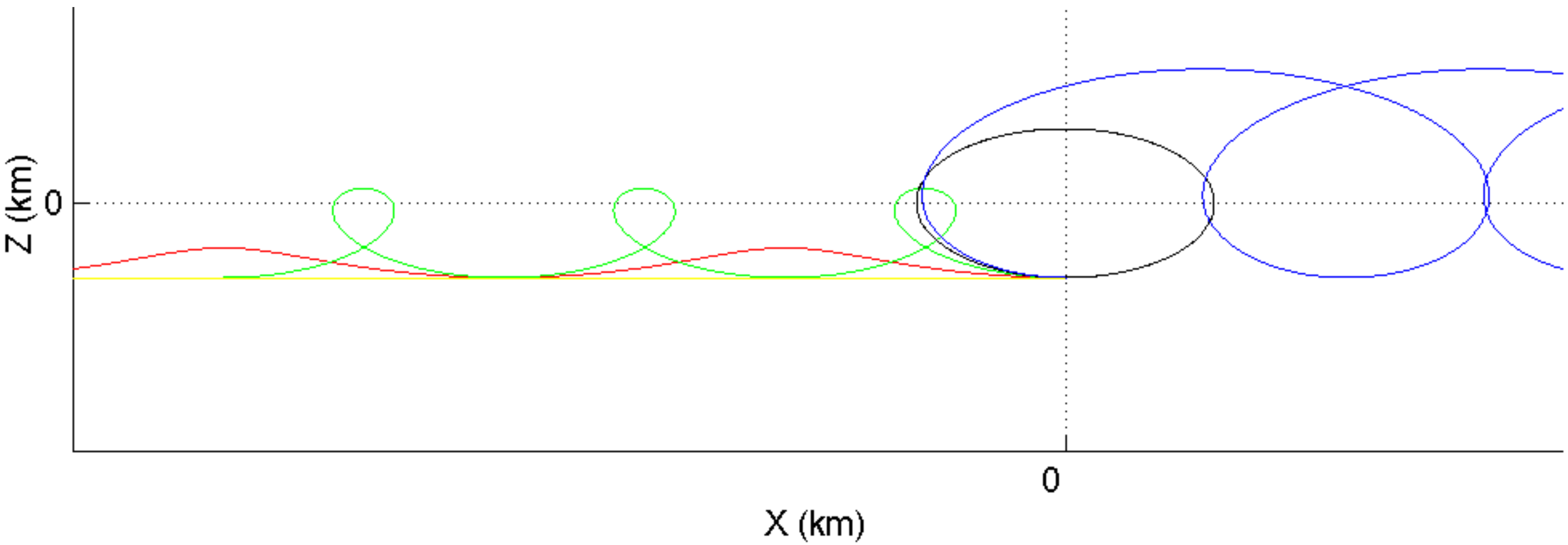
$s = \sin\theta, c = \cos\theta$

$x_0, z_0 / \dot{x}_0, \dot{z}_0 =$ positions / vitesses à la date $t_0$

# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

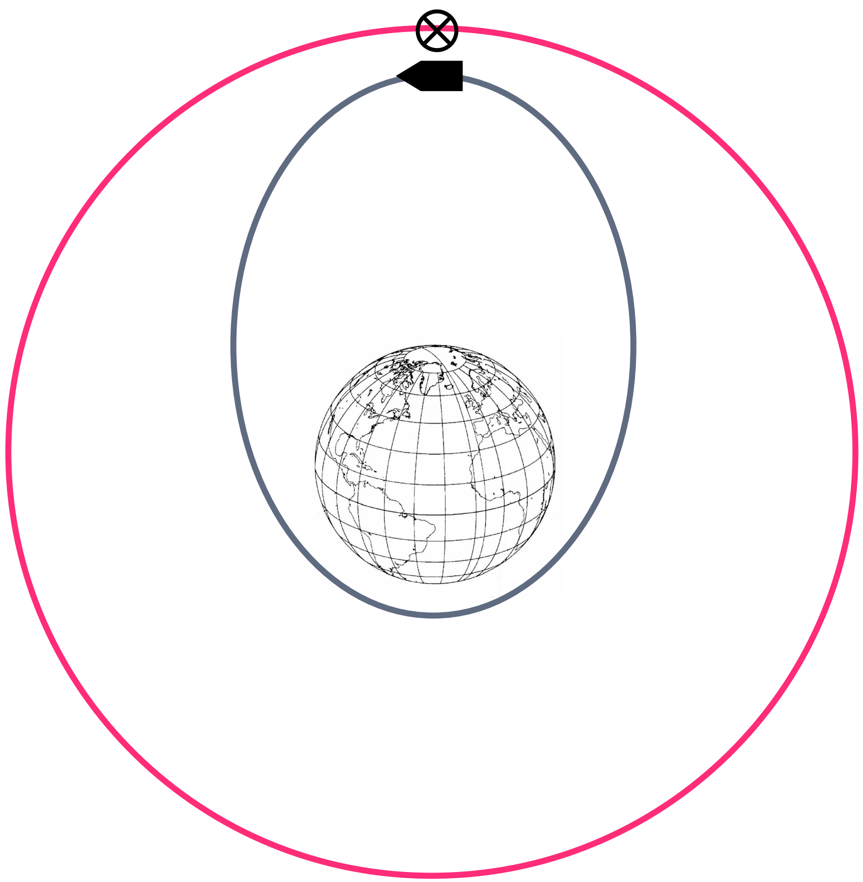
**Exemples de mouvement relatif...**

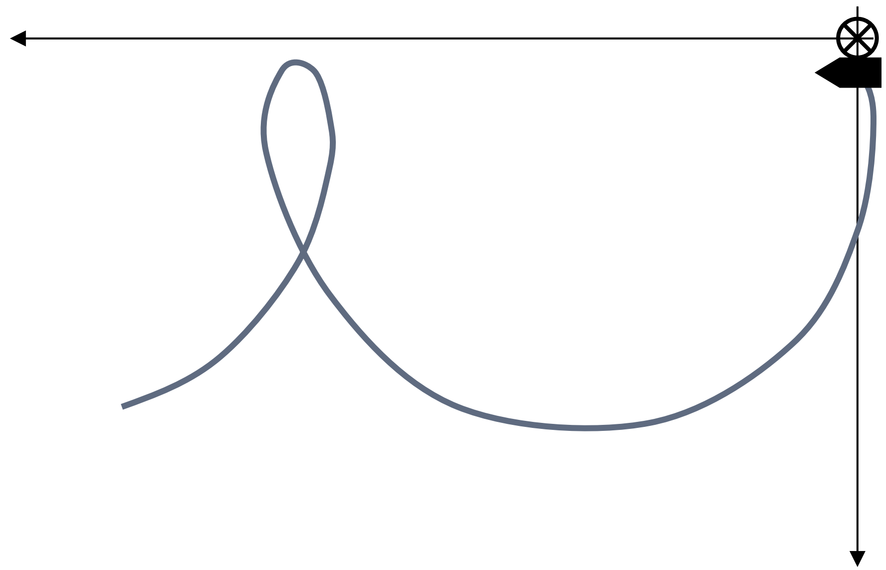
- Position relative du chasseur en orbite elliptique
- Résultat: une cycloïde
- Illustration:



# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

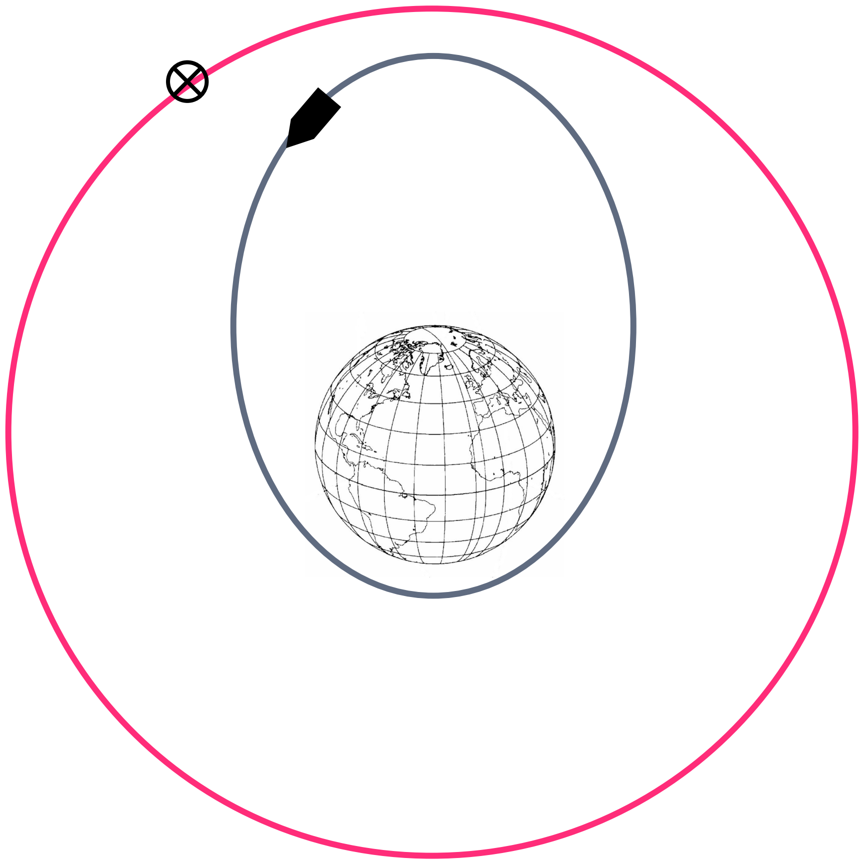
**Exemple intuitif:**

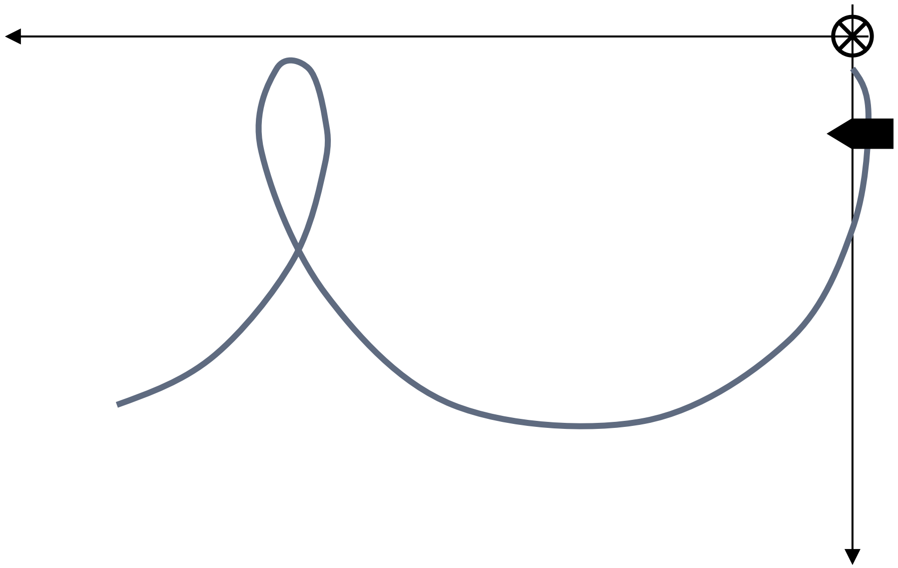




# (2)    Les équations de Clohessy-Wiltshire

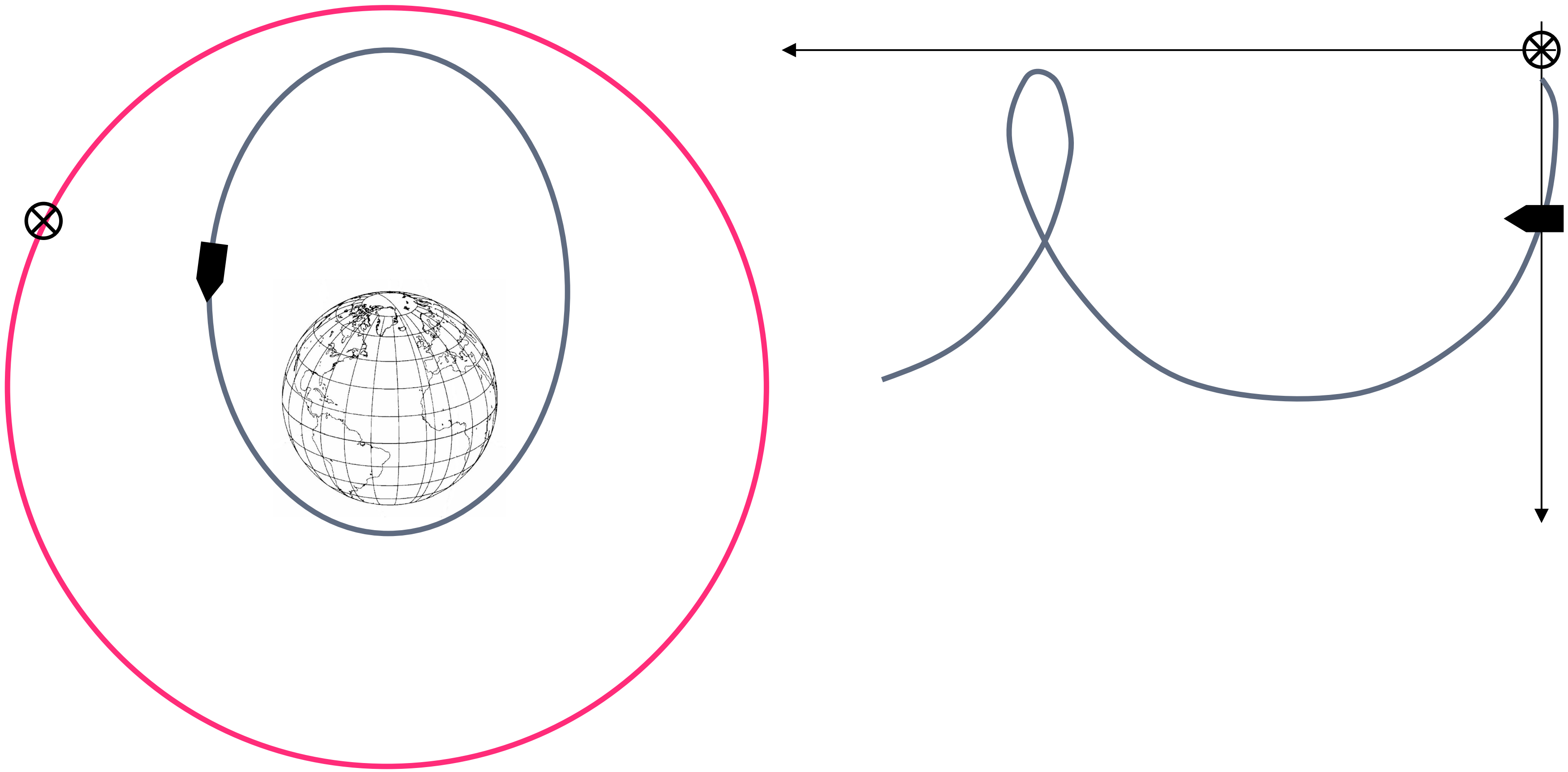
**Exemple intuitif:**





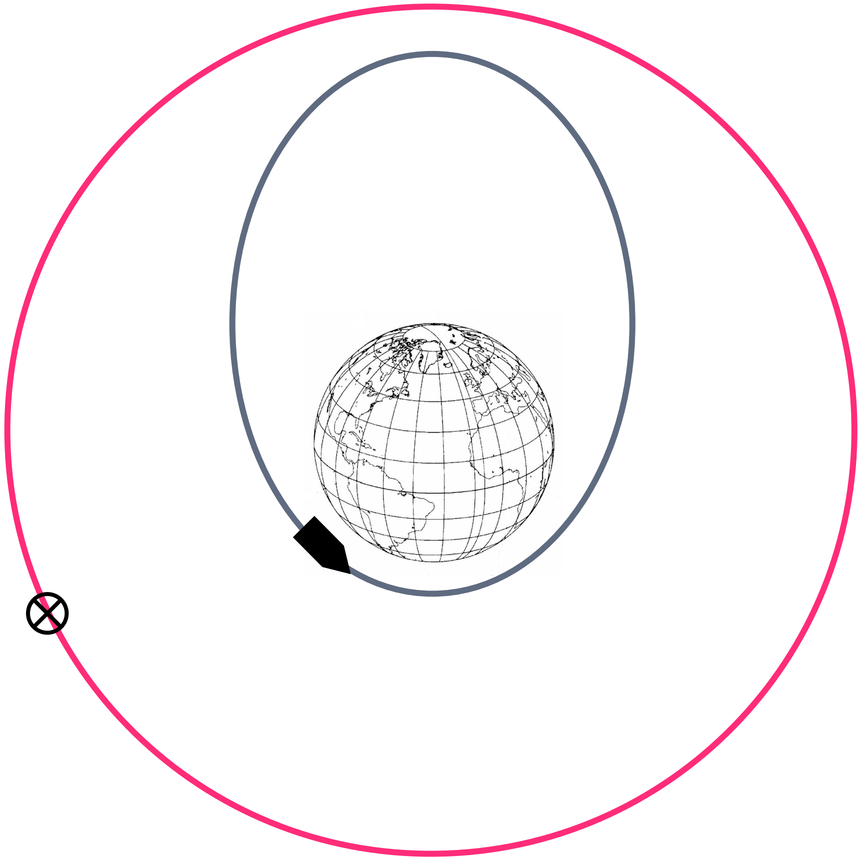
## (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

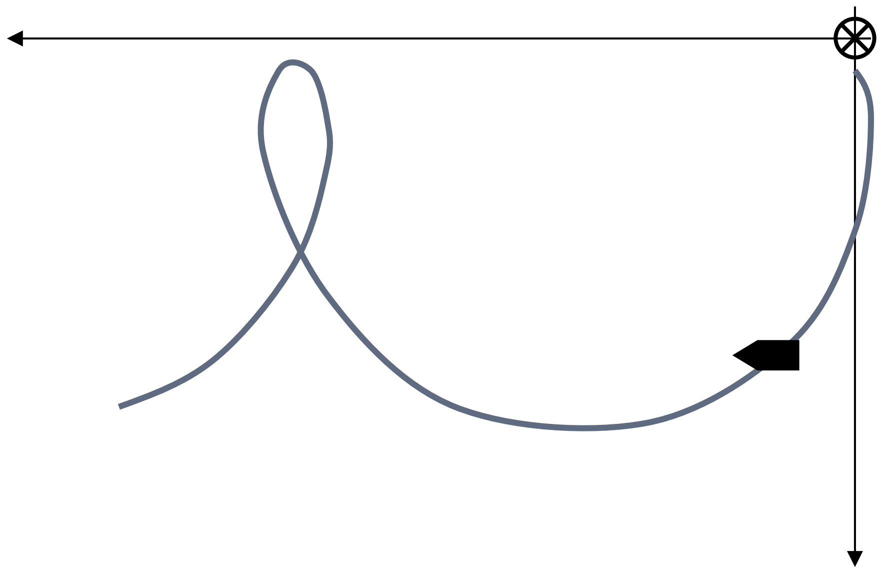
**Exemple intuitif:**



# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

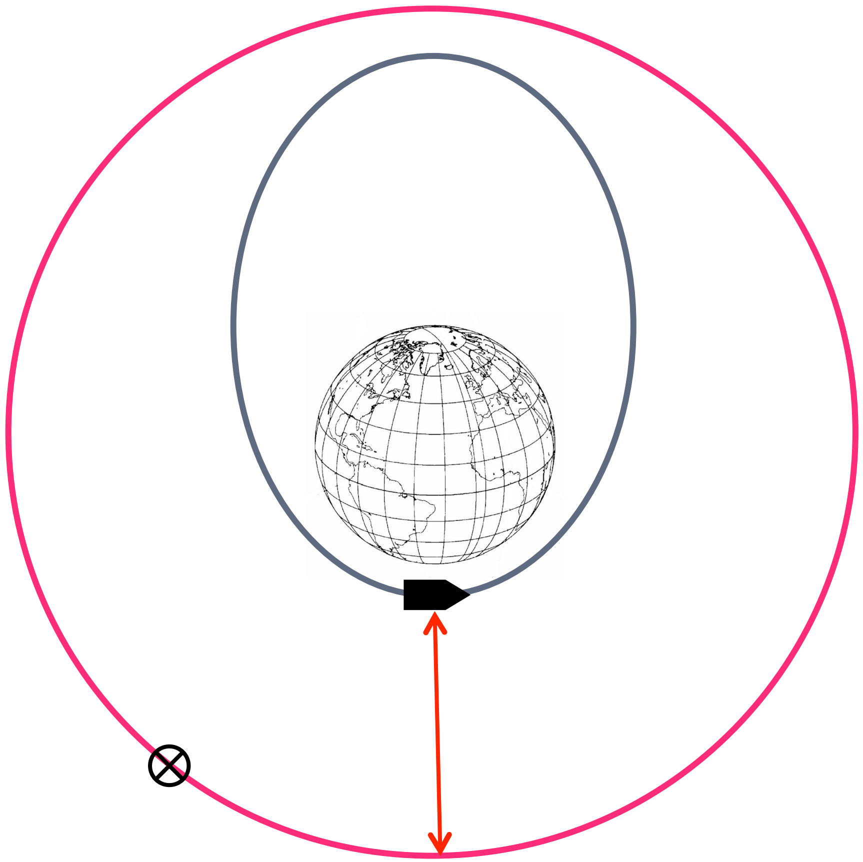
**Exemple intuitif:**

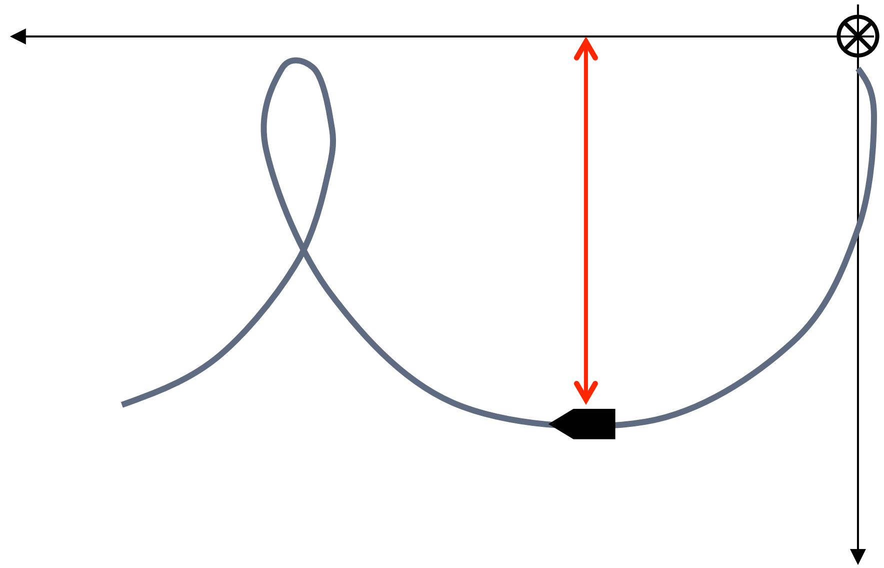




# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

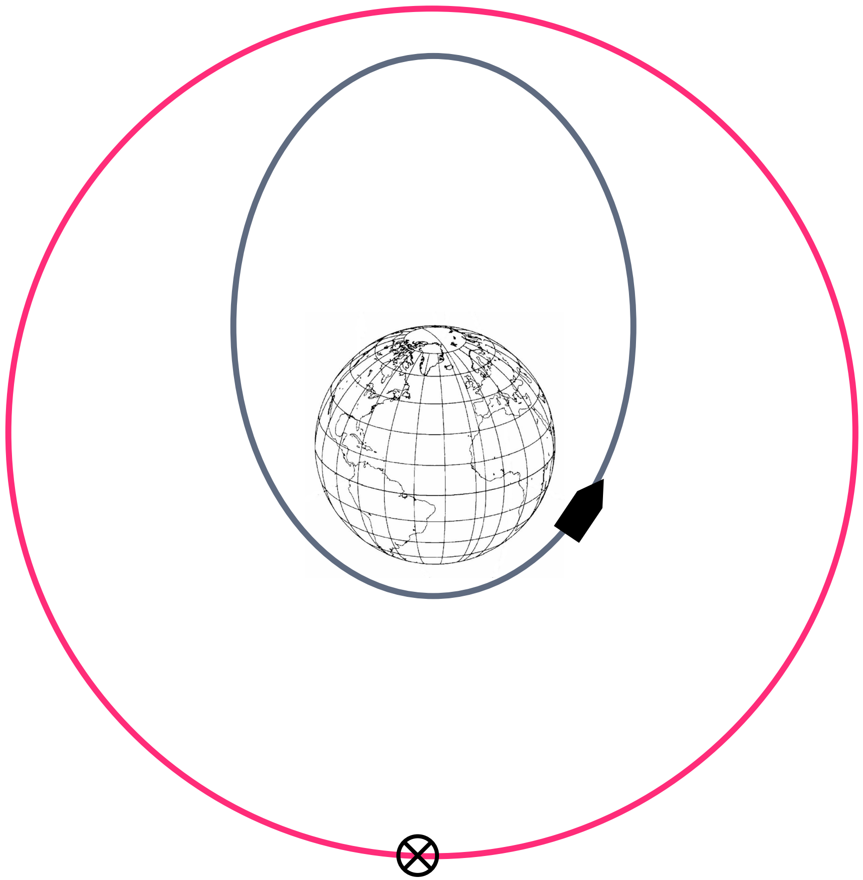
**Exemple intuitif:**

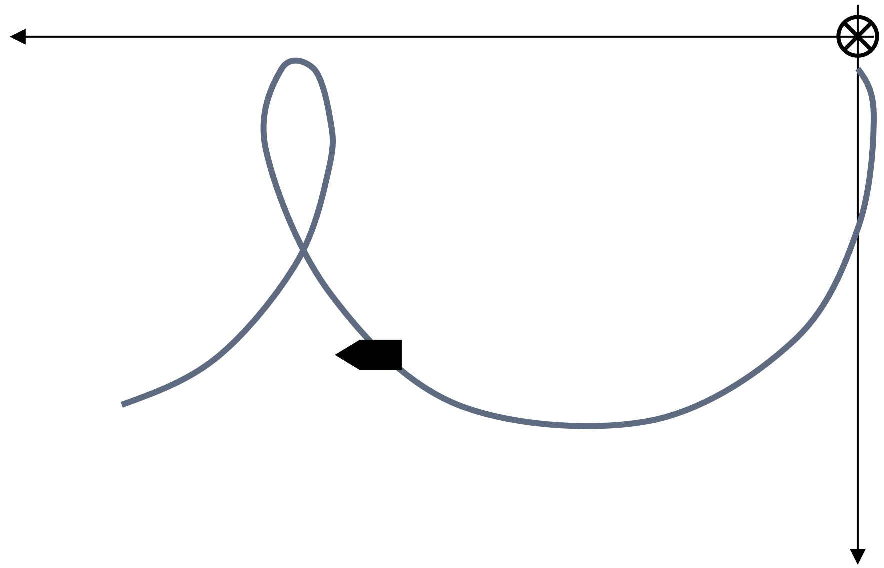




# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

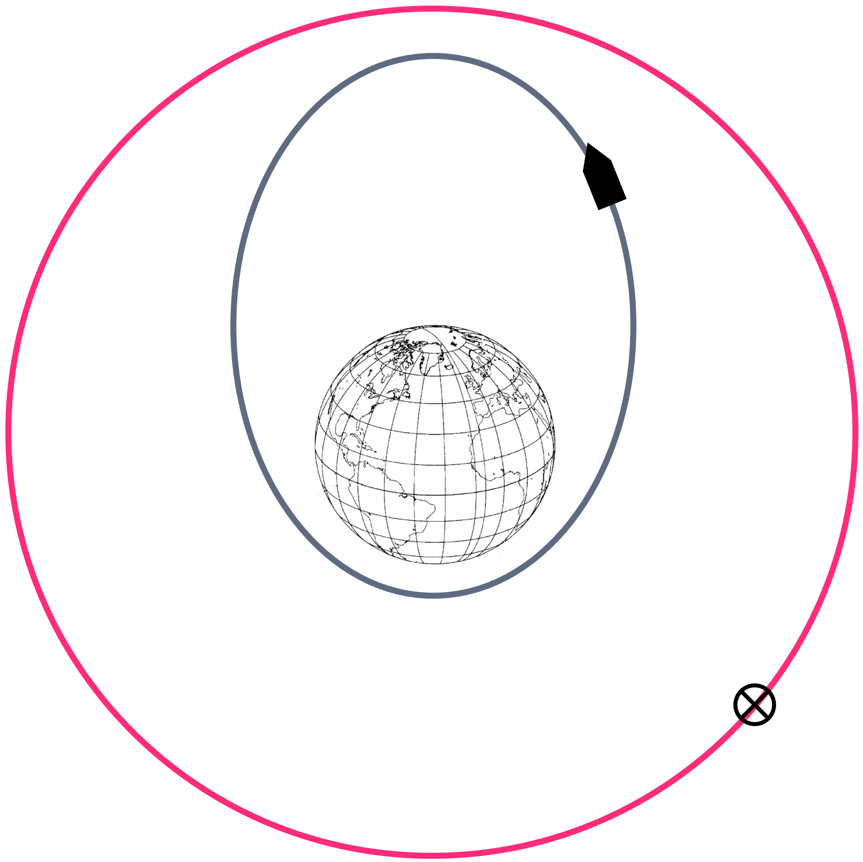
**Exemple intuitif:**

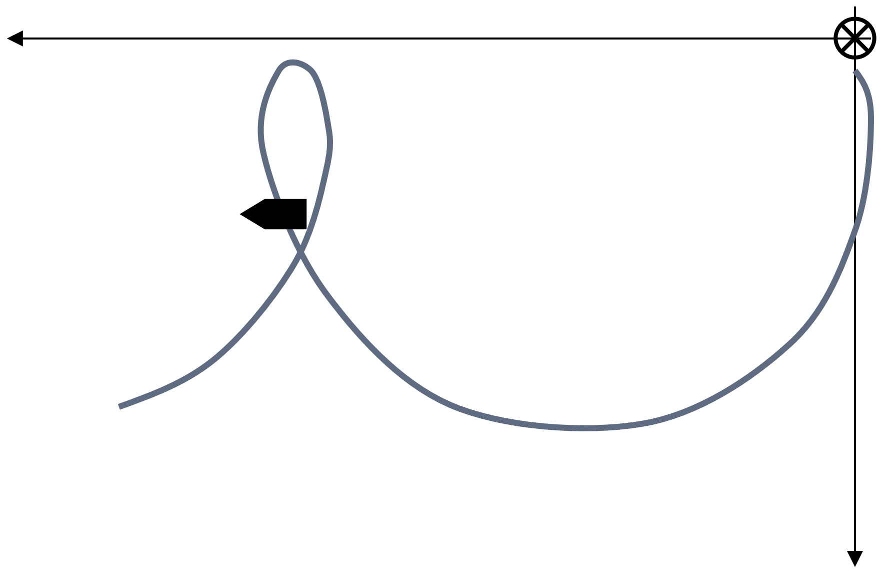




# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

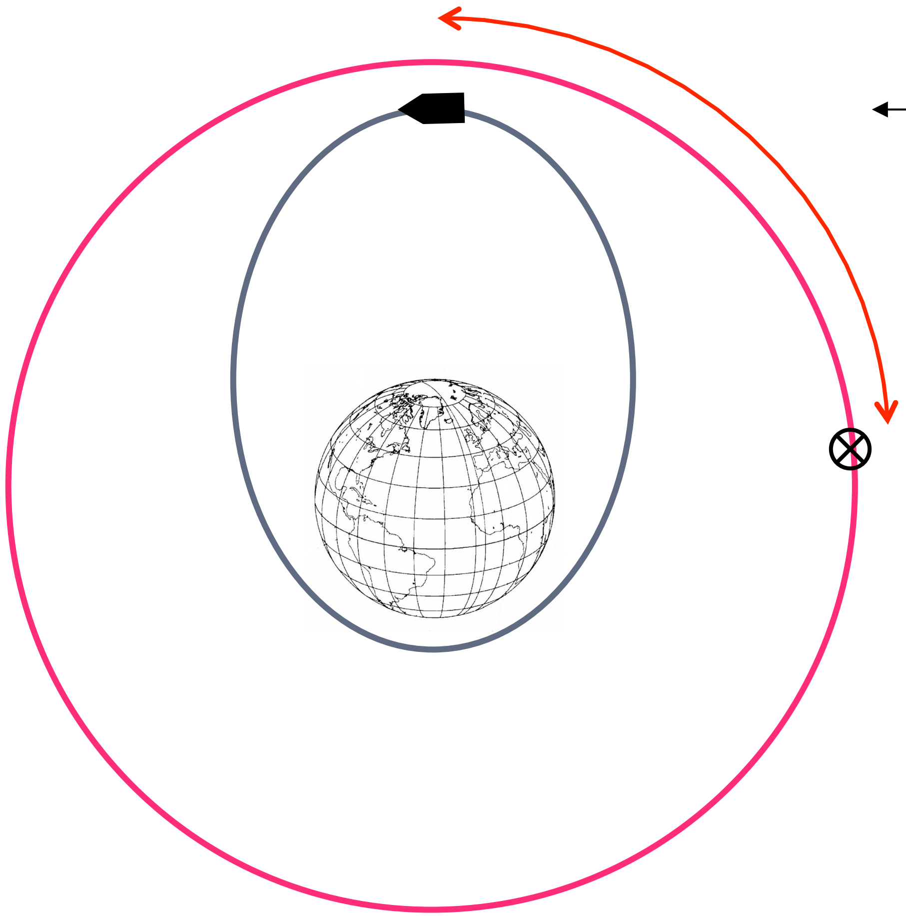
**Exemple intuitif:**

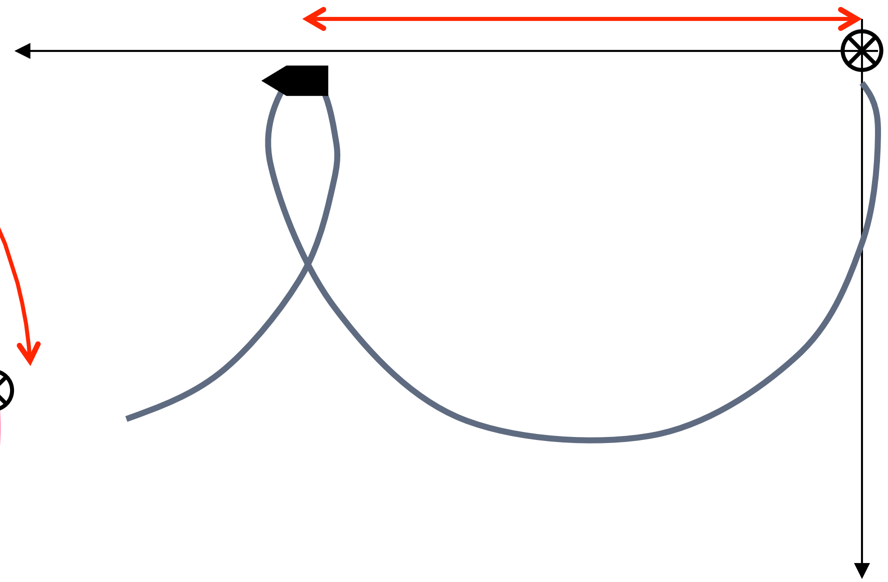




# (2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

**Exemple intuitif:**





# Plan

(1) Introduction au mouvement relatif orbital: enjeux historiques et avenir

(2) Les équations de Clohessy-Wiltshire

(3) Application: contraintes et stratégies de rendez-vous d'une navette avec une station orbitale

# (3) Théorie des manœuvres d'approche

## 1) Approche initiale

En partant d'une orbite circulaire inférieure à l'orbite cible (orbite de fin de phasage), on cherche à atteindre l'orbite de la cible.

**Options**

- Transfert de Hohmann: deux poussées impulsionnelles selon X.
- Transfert à poussée continue selon X.

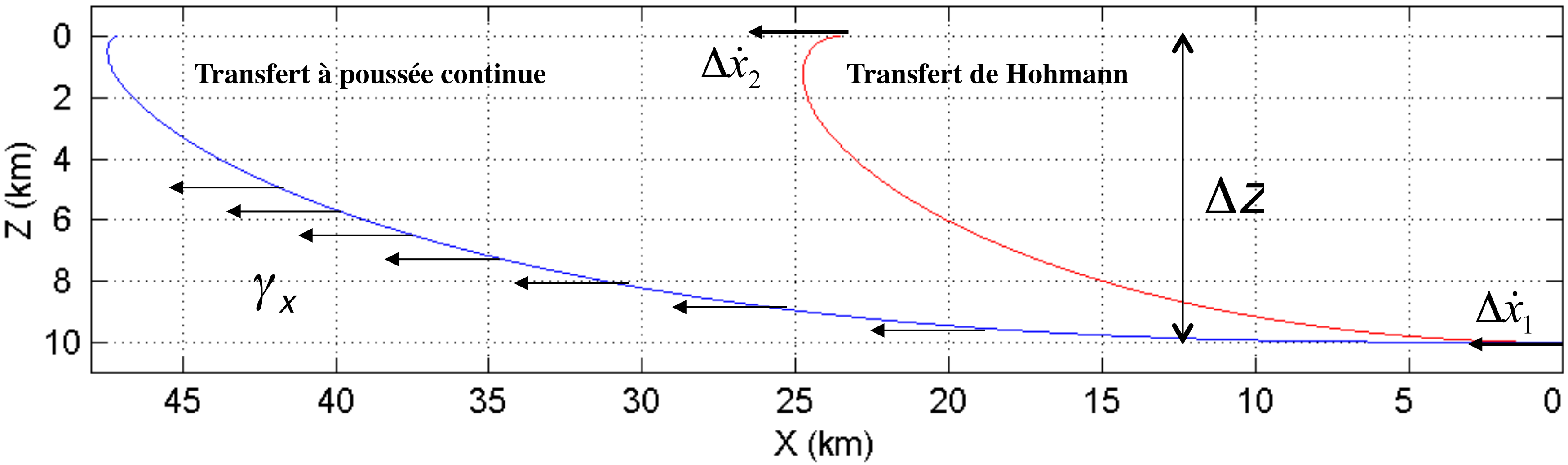
# (3) Théorie des manœuvres d'approche

**Transfert à poussée continue**
Paramètres:

$$\begin{cases} \gamma_x = \dfrac{\omega^2}{4\pi}\Delta z \\ \Delta t = T \\ \Delta V_{\text{tot}} = \gamma_x T = \dfrac{\omega}{2}\Delta z \end{cases}$$

**Transfert de Hohmann**
Paramètres:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta \dot{x}_2 = \dfrac{\omega}{4}\Delta z \\ \Delta t = T/2 \\ \Delta V_{\text{tot}} = \dfrac{\omega}{2}\Delta z \end{cases}$$



# (3) Théorie des manœuvres d'approche

## 2) Attente à l'altitude cible

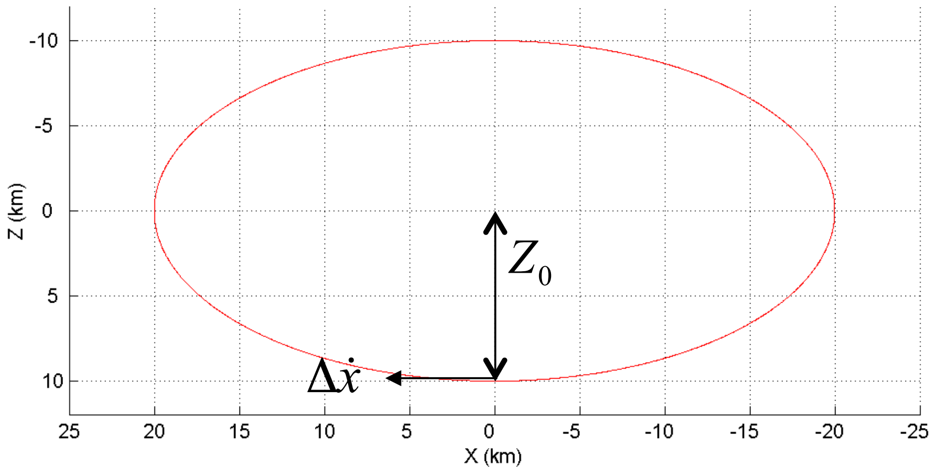
On cherche à rester à une distance/altitude stable par rapport à la cible.

**Options**

- Point d'attente: même orbite que la cible, mais déphasée.
- Ellipse d'attente: orbite de même période

ex:

$$\Delta\dot{x} = \frac{1}{2}\omega Z_0$$



# (3) Théorie des manœuvres d'approche

## 3) Approche finale

On cherche à se rapprocher de la cible, en partant d'une position sur l'orbite cible

**Options**

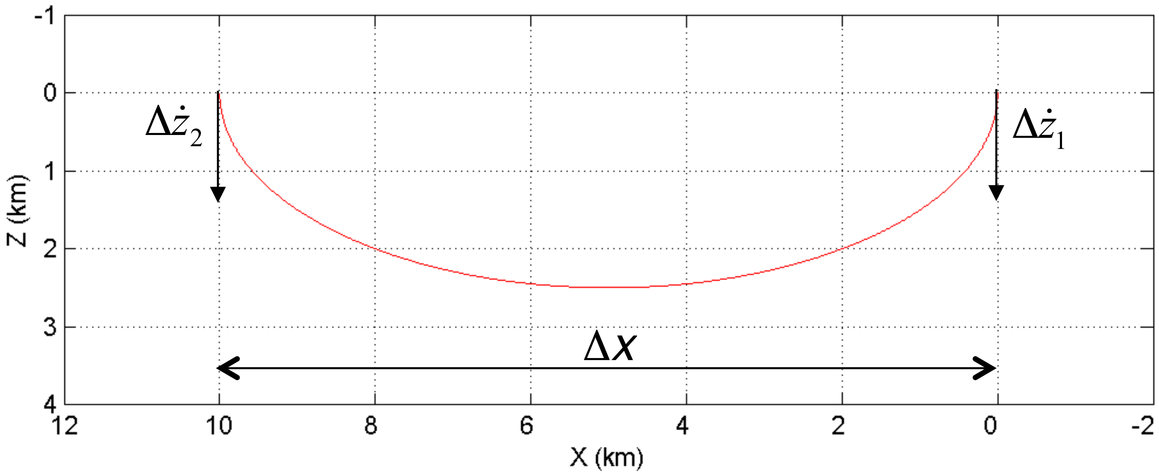
- Transfert en deux poussées selon Z
- Transfert en deux poussées selon X
- Transfert à poussée continue selon Z

# (3) Théorie des manœuvres d'approche

**Transfert en deux poussées selon Z**

Paramètres:

$$\begin{cases} \Delta\dot{z}_1 = \Delta\dot{z}_2 = \dfrac{\omega}{4}\Delta x \\ \Delta t = T/2 \\ \Delta V_{tot} = \dfrac{\omega}{2}\Delta x \end{cases}$$




**Intérêt**

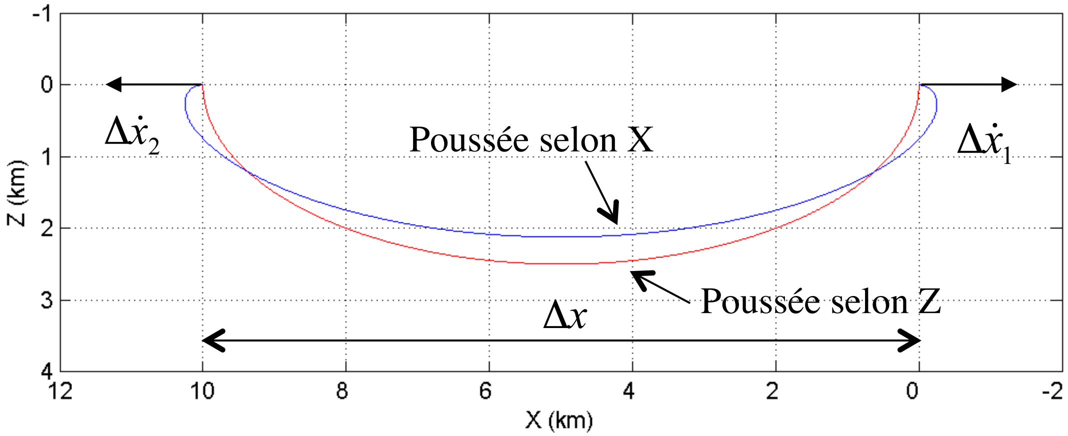
- Le chasseur reste sur une orbite stable, car la poussée selon Z ne modifie pas la période.

# (3) Théorie des manœuvres d'approche

**Transfert en deux poussées selon X**

Paramètres:

$$
\begin{cases}
\Delta \dot{x}_2 = -\Delta \dot{x}_1 = \dfrac{\omega}{4} \Delta x \\
\Delta t = T \\
\Delta V_{tot} = \dfrac{\omega}{3\pi} \Delta x
\end{cases}
$$




**Intérêt**

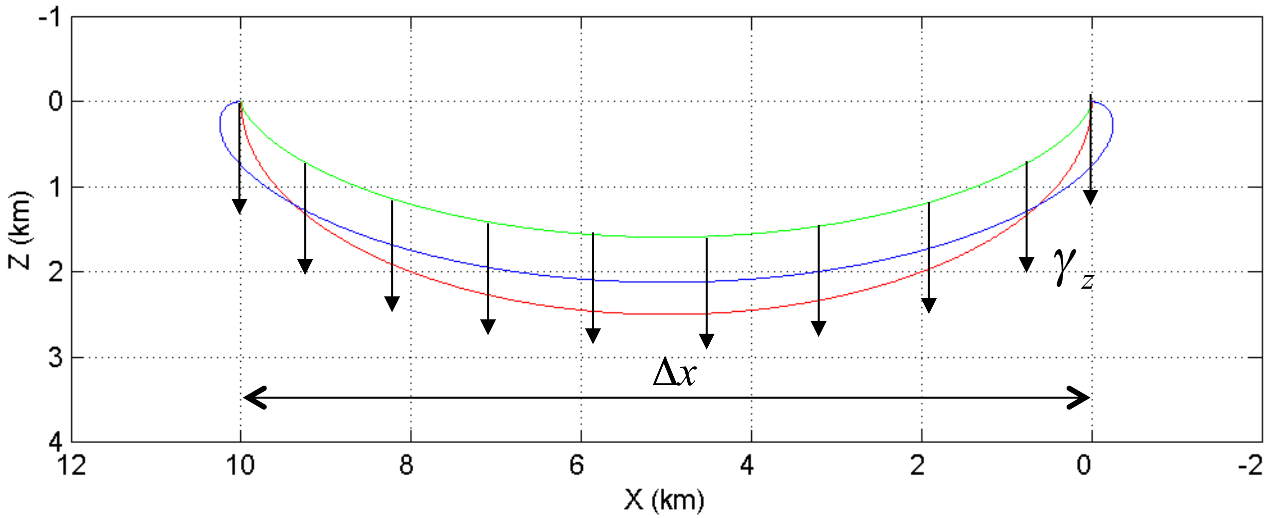
- Coût moindre

## (3) Théorie des manœuvres d'approche

**Transfert à poussée continue selon Z**

Paramètres:

$$\begin{cases} \gamma_z = \dfrac{\omega^2}{4\pi}\Delta x \\ \Delta t = T \\ \Delta V_{tot} = \dfrac{\omega}{2}\Delta x \end{cases}$$




**Intérêt**

- On reste sur une orbite stable, car la poussée selon Z ne modifie pas la période.
- Possibilité de contrôle et guidage pendant la manœuvre.

# (3) Théorie des manœuvres d'approche

## 4) Translation finale

On cherche à se rapprocher de la cible sur une trajectoire rectiligne, éventuellement jusqu'au contact entre les deux véhicules.

**Option**

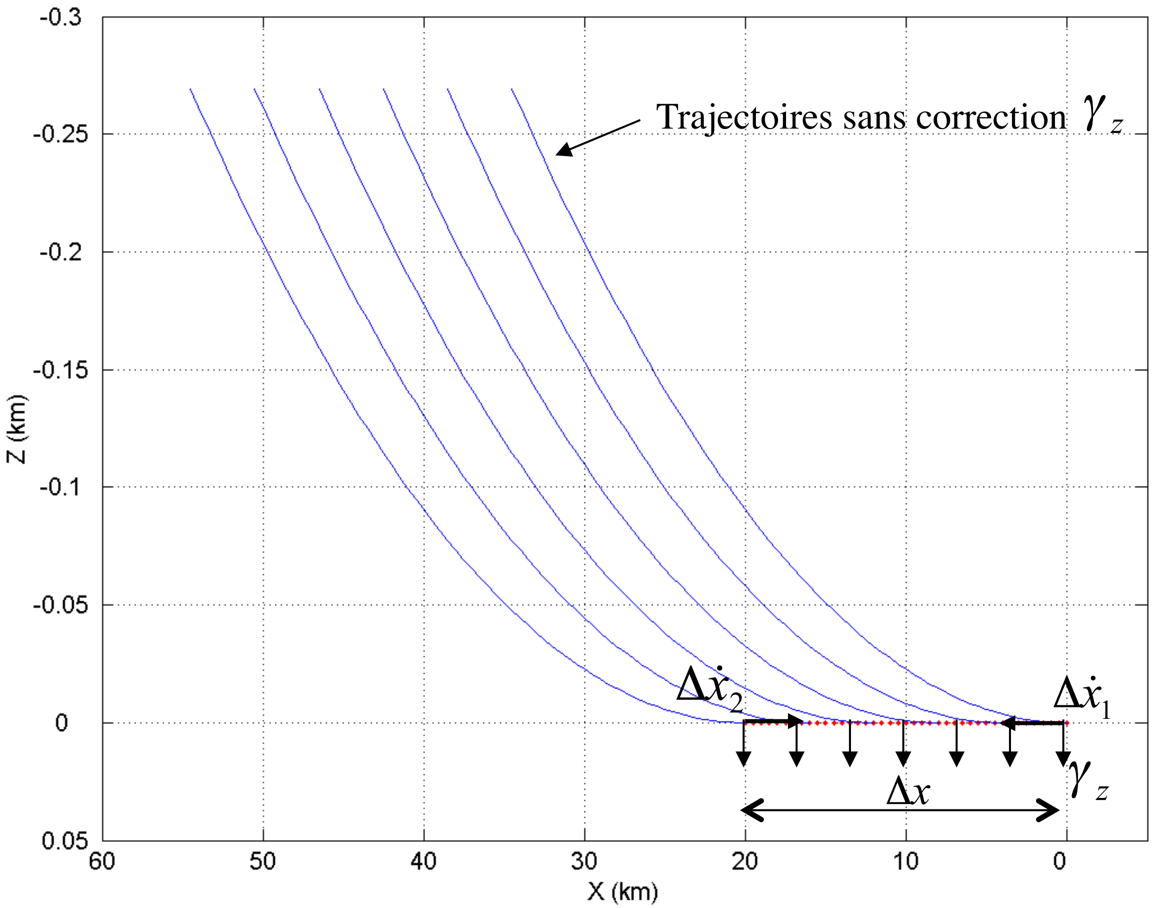
- Transfert en deux poussées selon X, avec poussée continue selon Z pour contrer l'accélération naturelle en direction de -Z.

# (3) Théorie des manœuvres d'approche

**Translation finale**

Paramètres:

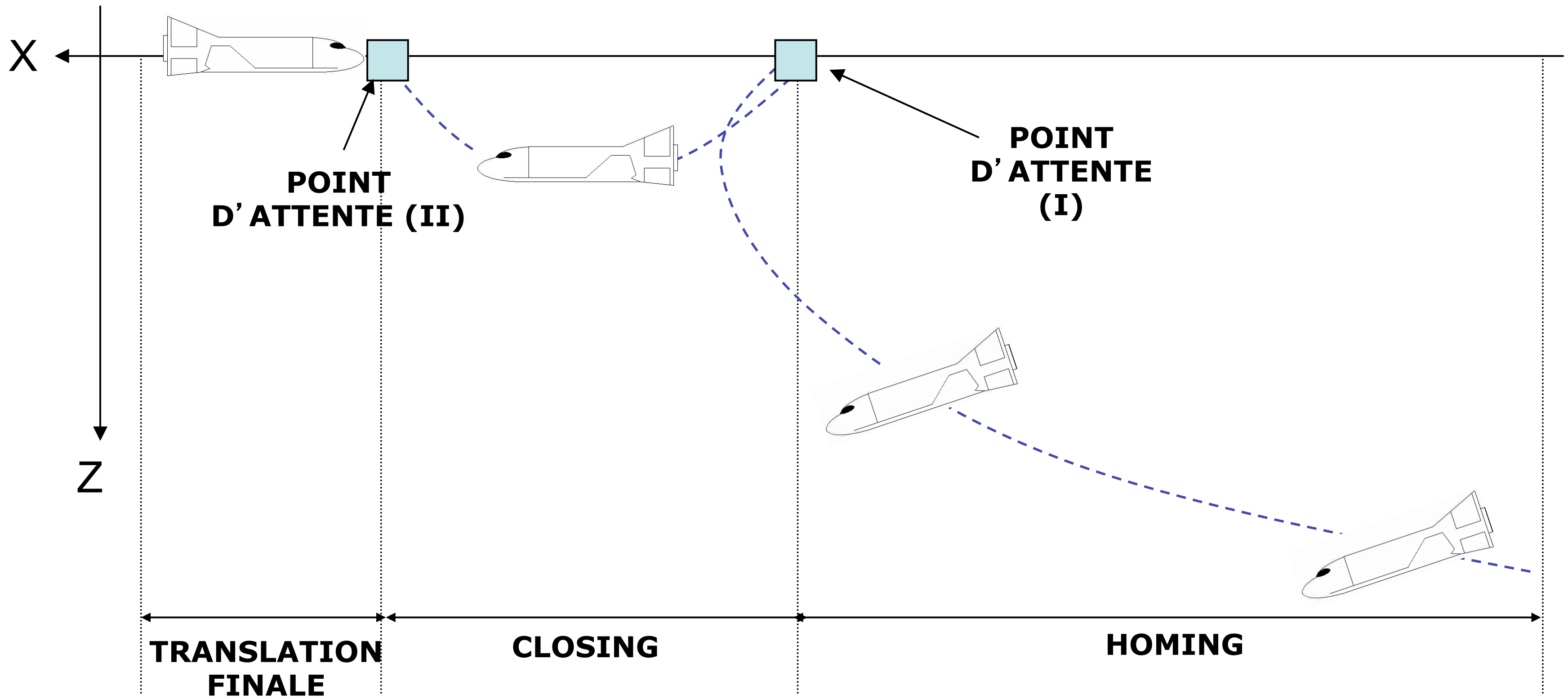
$$
\begin{cases}
\gamma_z = -2\omega\dot{x} \text{ et } \Delta\dot{x}_1 = -\Delta\dot{x}_2 \\
\Delta t = \Delta x / \dot{x} \\
\Delta V_{\text{tot}} = 2\left(\dfrac{1}{\Delta t} + \omega\right)\Delta x
\end{cases}
$$



# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

**Définition des phases finales du RDV**

- *Homing, Point d'attente (I), Closing, Point d'attente (II)*
  - ⇨ Navigation et contrôle du chasseur par GPS relatif
- *Translation finale, docking*
  - ⇨ Navigation optique par senseur de rendez-vous



# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

- **Navigation et contrôle du chasseur par GPS relatif**
  ***Homing* et *Closing***

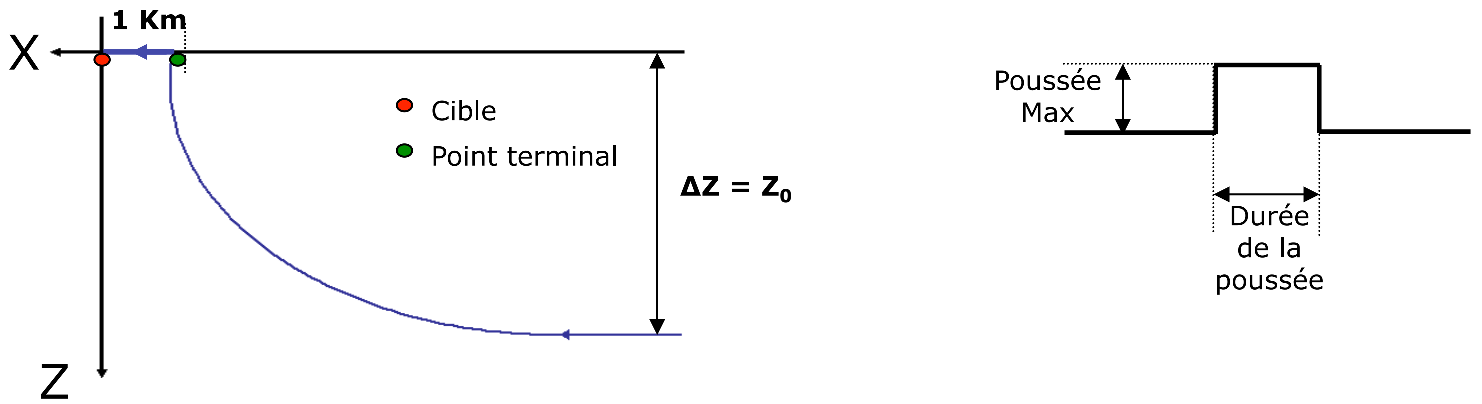
  Les critères de sélection des stratégies de guidage-contrôle pour ces phases sont, par ordre décroissant d'importance :

  - **Sécurité: risques de collisions chasseur-cible**
  - **Performance: dispersions sur l'état terminal**
  - **Consommation d'ergols**
  - **Robustesse: minimisation des cas d'abandon de la mission**
  - **Simplicité algorithmique**
  - **Durée de transfert.**

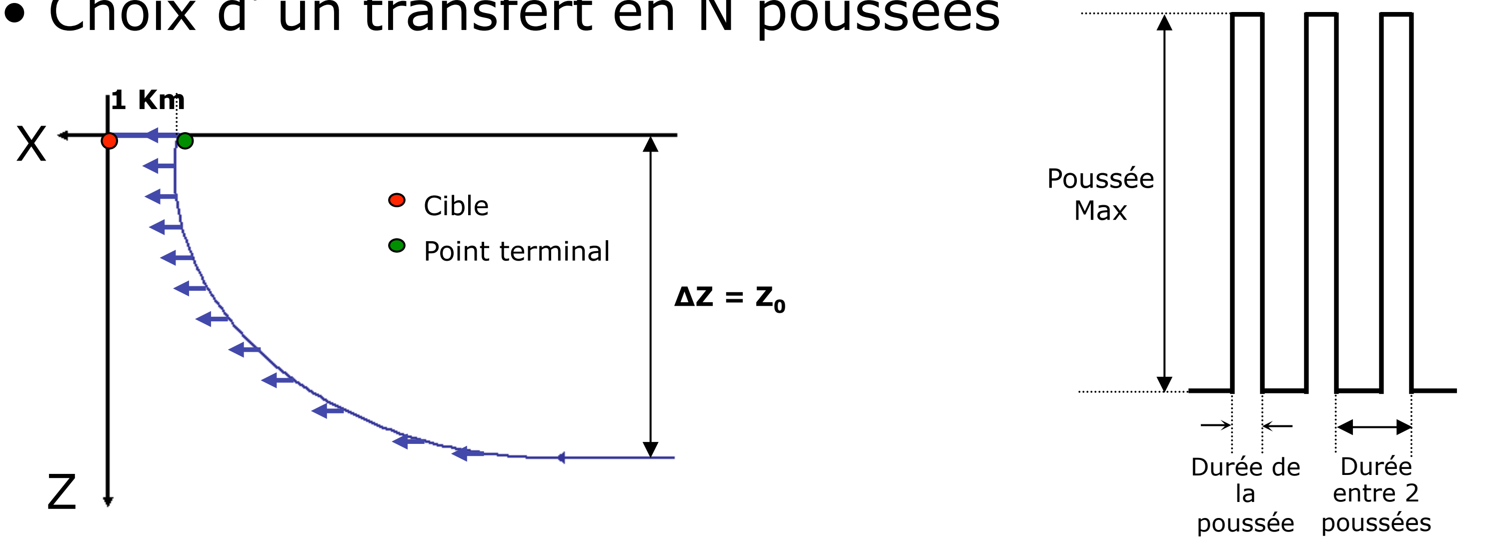
# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

***Homing***:

- Choix d'un transfert en 2 poussées



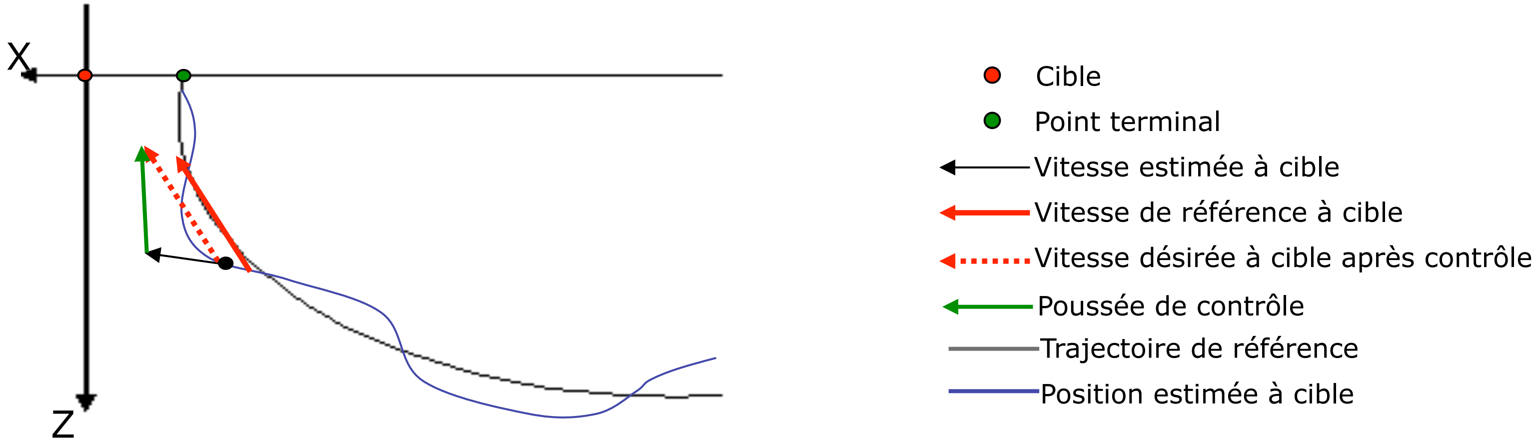

- Choix d'un transfert en N poussées



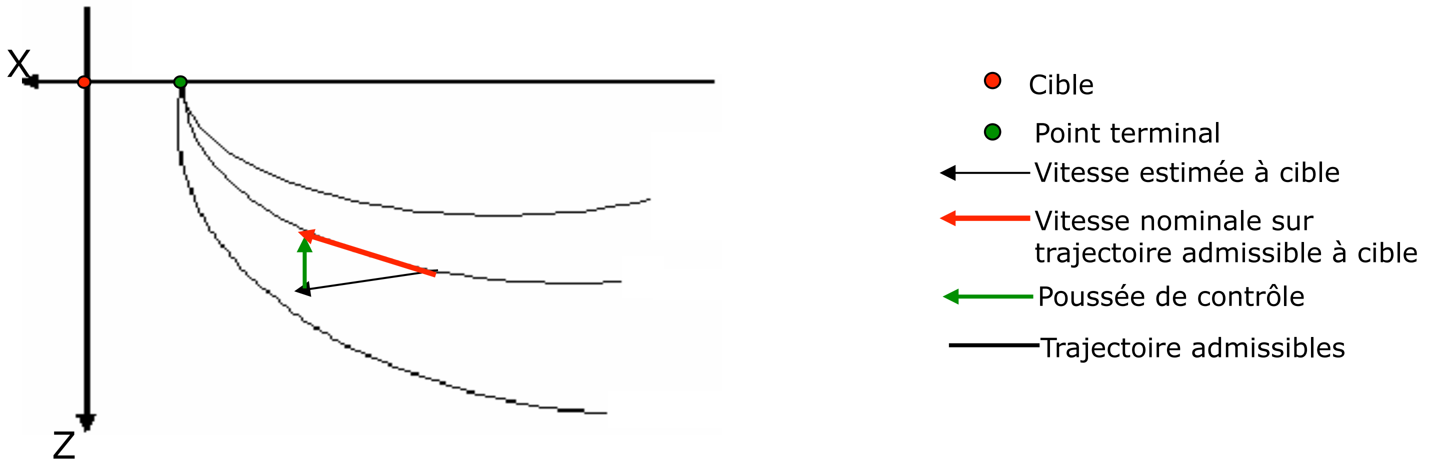
# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

***Homing***:

- Contrôle continu sur trajectoire




- Guidage-contrôle sur point terminal



# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

***Homing***:

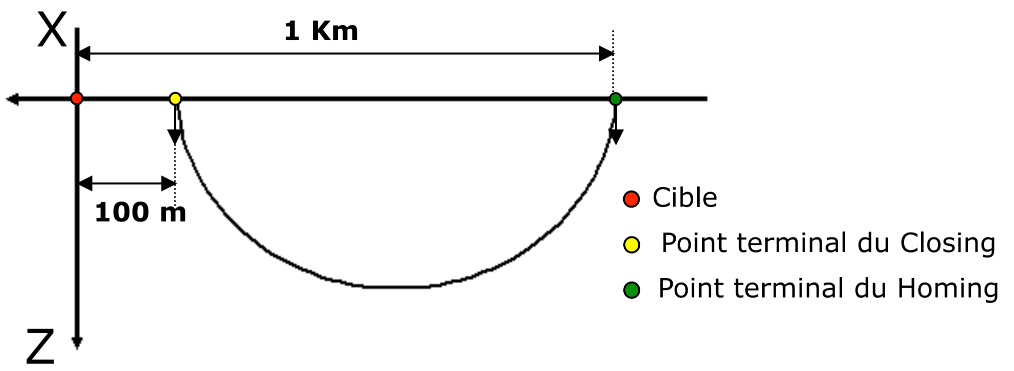
| **Stratégies** | **Performances** | **Robustesse** | **Consommation** | **Simplicité algorithmique** |
|---|---|---|---|---|
| 2 poussées avec contrôle sur le point terminal | **-** | **-** | **+** | **--** |
| N poussées avec contrôle continu sur trajectoire | **+** | **+** | **-** | **+** |
| N poussées avec contrôle sur le point terminal | **+** | **++** | **+** | **-** |

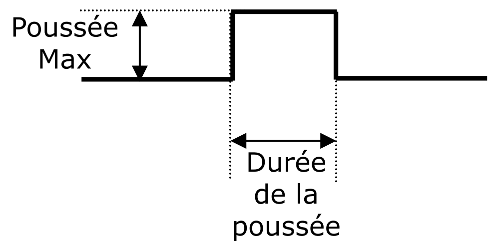
⇨ La stratégie retenue est donc un guidage-contrôle point terminal N poussées suivant X.

# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

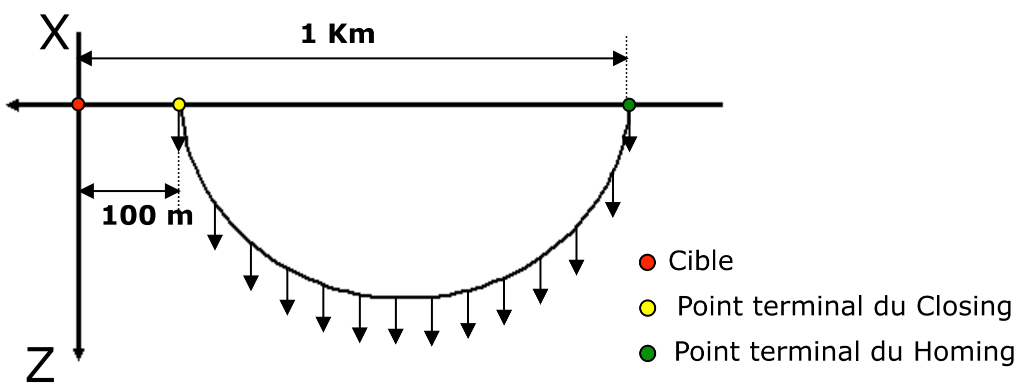
***Closing***:

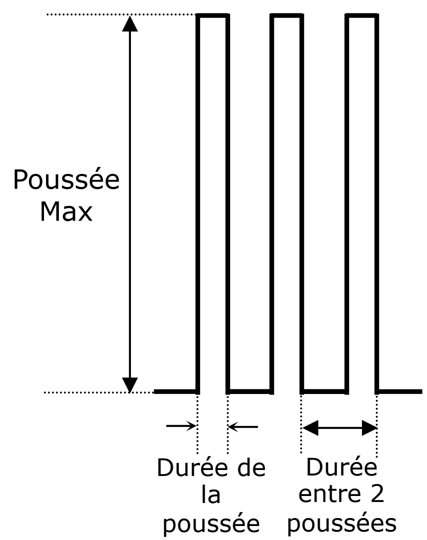
- Choix d'un transfert en 2 poussées




- Choix d'un transfert en N poussées



# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

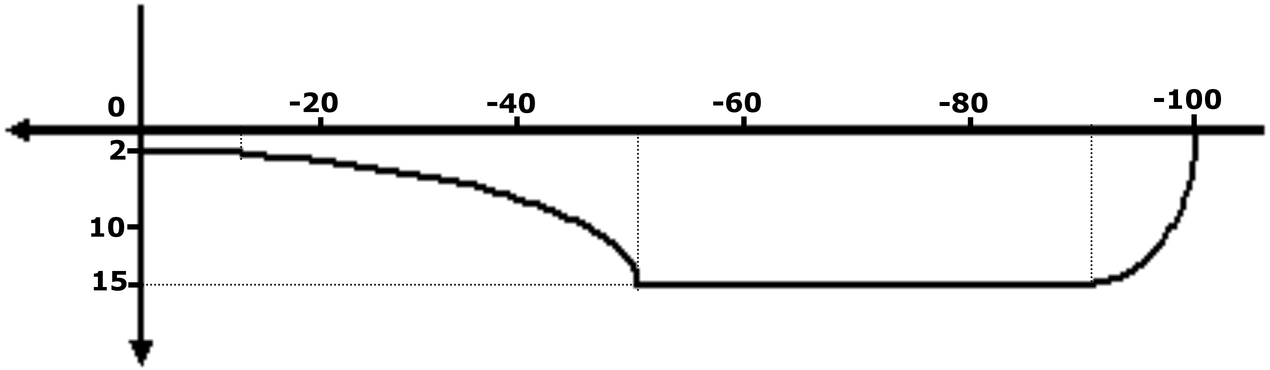
***Closing***:

| Stratégies | Performances | Robustesse | Consommation | Simplicité algorithmique |
|---|---|---|---|---|
| 3 poussées suivant Z contrôle sur le point terminal | - | - | + | + |
| N poussées suivant Z contrôle continu sur trajectoire | + | ++ | - | ++ |
| N poussées suivant Z contrôle sur le point terminal | + | + | - | - |

⇨ La stratégie retenue est donc un guidage-contrôle point terminal N poussées suivant Z.

# (3) Application: spécifications de RDV (cas Hermès)

- **Navigation et contrôle du chasseur par senseur de RDV**
  ***Translation finale, docking***



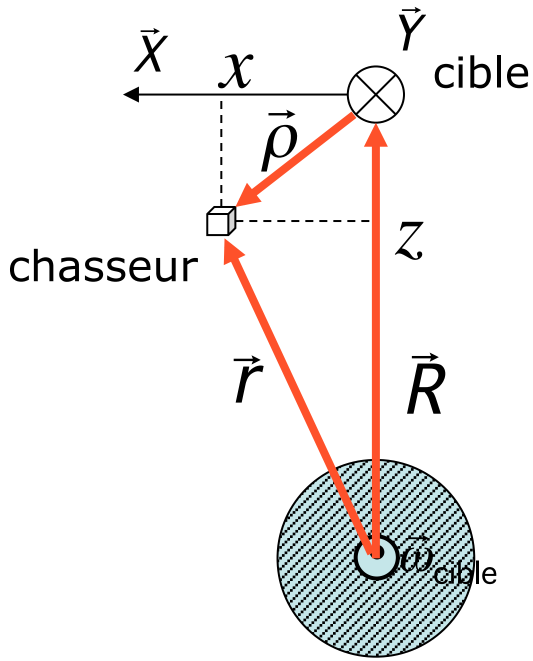

**I accélération constante**
**II vitesse constante**
**III freinage exponentiel**
**IV vitesse constante**

| **Contraintes de l'amarrage** | |
|---|---|
| **Vitesse d'amarrage** | 2cm/s < vitesse < 3,5 cm/s |
| **Écart latéral maximal** | < 7,5 cm |
| **Vitesses angulaires résiduels** | > 0,1 deg/s |
| **Écarts angulaires maxima** | < 2 deg |

Merci de votre attention ...

# Clohessy-Wiltshire

**Démonstration des équations:**




- PFD: $\vec{F} = m\vec{\gamma}$
- On pose:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu}{r^3}\vec{r} + \underbrace{\Delta\vec{\gamma}}_{\text{perturbation ou poussée moteur}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_I + \ddot{\vec{\rho}}_I = \frac{-\mu}{\left\|\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right\|^3}\left(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right) + \Delta\vec{\gamma}$$

où $\left\|\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right\|^{-3} = \left[\left(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right)\cdot\left(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right)\right]^{-3/2}$

# Clohessy-Wiltshire

$$\left\|\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right\|^{-3} = \left[R^2 + 2(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I) + \rho^2\right]^{-3/2}$$

$$= R^{-3}\left[1 + \frac{2(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I)}{R^2} + \frac{\rho^2}{R^2}\right]^{-3/2}$$

$$\cong R^{-3}\underbrace{\left[1 + \frac{2(\vec{R}_I + \vec{\rho}_I)}{R^2}\right]^{-3/2}}_{\text{de la forme } (1+x)^p} \qquad \text{avec } \rho << R$$

On effectue un développement limité :

$$\left\|\vec{R}_I + \vec{\rho}_I\right\|^{-3} = R^{-3}\left[1 - \frac{3(\vec{R}_I \cdot \vec{\rho}_I)}{R^2} + \ldots\right]$$

# Clohessy-Wiltshire

Passons dans le repère orbital (cible) $\Re$.

L©accélération dans le repère non inertiel devient :

$$\ddot{\vec{\rho}}_I = \ddot{\vec{\rho}}_{\Re} + \underbrace{2\left(\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}}_I\right)}_{\text{a. coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_I\right)}_{\text{a. "centrifuge"}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}_I}_{\text{a. tangentielle}}$$

L©orbite de la cible est Képlérienne circulaire, alors :

$$\dot{\vec{\omega}} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\vec{R}} = \frac{-\mu}{R^3}\vec{R}.$$

En réunissant les équations on obtient :

$$\ddot{\vec{\rho}}_{\Re} = -2\left(\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}}_I\right) - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_I\right) - \frac{-\mu}{R^3}\left(\vec{\rho}_I - \frac{3}{R}\frac{\vec{R}}{R}\left(\vec{R}\cdot\vec{\rho}_I\right)\right) - \Delta\vec{\gamma}$$

# Clohessy-Wiltshire

Projection des vecteurs sur les axes de $\Re$ :

$$\vec{\omega} = -\omega\vec{Y}, \vec{R} = -R\vec{Z}, \vec{\rho}_I = x\vec{X} + y\vec{Y} + z\vec{Z}$$

$$\bullet \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_I = \begin{vmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & -\omega & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = -\omega\dot{z}\vec{X} + \omega\dot{x}\vec{Z}$$

$$\bullet \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_I\right) = \begin{vmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & -\omega & 0 \\ -\omega z & 0 & \omega x \end{vmatrix} = -\omega^2 x\vec{X} - \omega^2 \dot{z}\vec{Z}$$

$$\bullet \vec{R} \cdot \vec{\rho} = -R\vec{Z} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = -\vec{Z}$$

# Clohessy-Wiltshire

Finalement :

$$\ddot{\vec{\rho}}_{\Re} = 2\omega\left(\dot{z}\vec{X} - \dot{x}\vec{Z}\right) + \omega^2\left(x\vec{X} + z\vec{Z}\right)$$

$$-\frac{\mu}{R^3}\left(x\vec{X} + y\vec{Y} + z\vec{Z} - \frac{3}{R}\vec{Z}(-Rz)\right)$$

$$+\Delta\vec{\gamma}_x\vec{X} + \Delta\vec{\gamma}_y\vec{Y} + \Delta\vec{\gamma}_z\vec{Z}$$

Et donc selon chaque coordonnée, avec $\frac{\mu}{\mathrm{R}^3} = \omega^2$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \Delta\gamma_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = \Delta\gamma_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \Delta\gamma_z \end{cases}$$