Sûreté de Fonctionnement

Simulation d'Evénements Discrets par Méthode de Monte-Carlo

Jérôme BRAURE
TAS ASTRONAUTICS

1 Système "simple"

Le Système "simple" est constitué d'un seul élément, obéissant à une loi de fiabilité de type Weibull de paramètres $\lambda = 50'000 \cdot 10^{-9}/h$, et $\alpha = 2$. La fiabilité est $R(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha}$ et la durée de la mission est de 10 000 h.

1.1 MTBF - Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement

1.1.1 Calcul théorique

$$\text{MTBF} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda t)^\alpha} dt$$

En effectuant le changement de variable $u = (\lambda t)^\alpha$ on obtient :

$$\frac{du}{dt} = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha - 1}$$

$$dt = \frac{1}{\alpha\lambda} u^{\frac{1}{\alpha} - 1} du$$

En injectant dans l'intégrale, on trouve :

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\alpha\lambda} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha} - 1} e^{-u} du$$

Rappelons la définition de la fonction $\Gamma(\cdot)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

On obtient donc :

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\right] = \frac{1}{\lambda}\Gamma\Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)$$

Car $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

1.1.2 Principe de la simulation

La MTBF est égale à la moyenne des temps de bon fonctionnement, son calcul expérimental revient à calculer la moyenne des temps t_i obtenus par inversion de la fonction de répartition de la loi de Weibull :

$$F_T(t_i) = 1 - R(t_i) = 1 - e^{-(\lambda t_i)^\alpha} = z_i$$

Donc :

$$t_i = \frac{1}{\lambda}[-ln(1 - z_i)^{1/\alpha}]$$

Où les z_i sont distribués uniformément entre 0 et 1. Sous Excel, la MTBF se calcule de la façon suivante :

```
z_i = ALEA()
T_i =((-LN(1 - z_i))^(1/alpha))/lambda
MTBF = MOYENNE(T_1: T_t);
```

1.1.3 Résultats

MTBF théorique:	17724.539 h
MTBF simulé:	17313.254 h
Ecart:	411.285 h
Proportion:	2.320 %

1.2 Fiabilité

1.2.1 Calcul théorique

$$R(t) = 1 - P(t) = 1 - F_T(t) = 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}) = e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

1.2.2 Principe de la simulation

Les temps de bon fonctionnement t_i précédemment simulés sont chacun comparés à la durée t de la mission. Si t_i est supérieur à t, l'équipement n'est pas tombé en panne durant la mission et le succès est noté sous forme de "1". Dans le cas contraire, un "0" est noté dans la colonne du *status*. La fiabilité est égale au nombre de succès divisé par le nombre de tentatives, ce qui revient à prendre la moyenne des résultats. Sous Excel, la fiabilité se calcule de la façon suivante :

```
status_i = SI(T_i > t; 1; 0)
R(t) = MOYENNE(status_1: status_t);
```

1.2.3 Résultats

Fiabilité théorique:	0.779
Fiabilité simulée:	0.771
Ecart:	0.008
Proportion:	1.002 %

2 Modèle "redondance active 1/2"

Deux éléments sont montés en parallèle et fonctionnent simultanément.

2.1 Fiabilité

2.1.1 Calcul théorique

$$R_a(t) = 1 - (1 - P(t))^2 = 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\alpha})^2$$

En effectuant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$R_a(t) = 1 - (1 - (1 - (\lambda t)^\alpha))^2 = 1 - (\lambda t)^{2\alpha}$$

2.1.2 Principe de la simulation

Les temps de bon fonctionnement de deux éléments indépendants sont générés. Le système est fiable si au moins un des deux éléments est encore en état de fonctionnement à la fin de la mission. Sous Excel, la fiabilité se calcule de la façon suivante :

```
status_i = SI(MAX(T1_i; T2_i) > t; 1; 0)
R(t) = MOYENNE(status_1: status_t)
```

2.1.3 Résultats

Fiabilité théorique:	0.938
Fiabilité simulée:	0.960
Ecart:	0.023
Proportion:	2.400 %

3 Modèle "redondance passive 1/2"

Deux éléments sont montés en parallèle. L'élément redondant se met en marche lorsque le nominal tombe en panne.

3.1 Fiabilité

3.1.1 Calcul théorique

$$R_p(t) = R(t) + \int_0^t f(u)du \cdot R(t-u) = e^{-(\lambda t)^\alpha} + \int_0^t \lambda\alpha(\lambda u)^{\alpha-1} e^{-(\lambda u)^\alpha} du \cdot e^{-(\lambda(t-u))^\alpha}$$

3.1.2 Principe de la simulation

Le système est fiable si la durée de bon fonctionnement des deux éléments est supérieure à la durée de la mission. Sous Excel, le succès se calcule de la façon suivante :

```
status_i = SI(T1_i + T2_i > t; 1; 0)
R(t) = MOYENNE(status_1: status_t)
```

3.1.3 Résultats

Fiabilité théorique:	0.991
Fiabilité simulée:	0.990
Ecart:	0.001
Proportion:	0.101 %

4 Modèle "vote majoritaire"

Trois éléments sont montés en parallèle. Le système est fiable lorsqu' au moins deux des trois éléments sont encore en état de marche.

4.1 Fiabilité

4.1.1 Calcul théorique

$$R_v(t) = R(t)^3 + 3R(t)^2(1 - R(t))$$
$$= e^{-3(\lambda t)^\alpha} + 3e^{-2(\lambda t)^\alpha}(1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}) = e^{-2(\lambda t)^\alpha}(3 - 2e^{-(\lambda t)^\alpha})$$

4.1.2 Principe de la simulation

Les temps de bon fonctionnement de trois éléments indépendants (`e_1`, `e_2`, `e_3`) sont générés. Le système est fiable si au moins deux des trois éléments sont encore en état de fonctionnement à la fin de la mission (c'est-à-dire que la somme de leurs *status* est strictement supérieure à 1). Sous Excel, la fiabilité se calcule de la façon suivante :

```
status_e_1 = SI(T_e_1 > t; 1; 0)
status_e_2 = SI(T_e_2 > t; 1; 0)
status_e_3 = SI(T_e_3 > t; 1; 0)
status_i = SI(status_e_1 + status_e_2 + status_e_3 > 1; 1; 0)
R(t) = MOYENNE(status_1: status_t)
```

4.1.3 Résultats

Fiabilité théorique:	0.875
Fiabilité simulée:	0.886
Ecart:	0.011
Proportion:	1.273 %

5 Modèle "simple" avec maintenance préventive

Le système est composé d'un seul élément qui est systématiquement remplacé au temps t/2.

5.1 Fiabilité

Le système subit une panne si au moins un des deux éléments tombe en panne durant son utilisation opérationnelle.

5.1.1 Calcul théorique

Soit $P(e_i)$ la probabilité de panne de l'élément i sur une durée t/2.

$$R_{mp}(t) = 1 - \big(P(e_1) \cup P(e_2)\big) = 1 - \big(P(e_1) + P(e_2) - P(e_1) \cdot P(e_2)\big)$$
$$= 1 - 2(\lambda t/2)^\alpha + (\lambda t/2)^{2\alpha}$$

5.1.2 Principe de la simulation

Le système est fiable si la durée de bon fonctionnement de chacun des deux éléments est supérieure à la demi durée de la mission. Sous Excel, le succès se calcule de la façon suivante :

```
status_i = SI(ET(T1_i > t/2; T2_i > t/2); 1; 0)
R(t) = MOYENNE(status_1: status_t)
```

5.1.3 Résultats

Fiabilité théorique:	0.879
Fiabilité simulée:	0.904
Ecart:	0.025
Proportion:	2.855 %

6 Modèle "simple" avec maintenance corrective

L'élément du système simple est réparé lorsqu'il tombe en panne. La durée de la réparation est une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle de paramètre $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ h^{-1}.

6.1 MTTR - Temps moyen de réparation

6.1.1 Calcul théorique

Le temps moyen de réparation est égal à l'espérance de la variable aléatoire.

$$\mathrm{MTTR} = E[\mu e^{-\mu t}] = 1/\mu$$

6.1.2 Principe de la simulation

Le temps moyen de réparation est d'une certaine façon comparable à la MTBF ; il est lui aussi obtenu par inversion de la fonction de répartition :

$$F_T(t_i) = 1 - e^{-\mu t} = z_i$$

Donc

$$t_i = -\ln(1 - z_i)/\mu$$

Sous Excel, le MTTR se calcule de la façon suivante :

```
z_i = ALEA()
T_i = -LN(1 - z_i)/mu
MTTR = MOYENNE(T_1: T_t);
```

6.1.3 Résultats

MTTR théorique:	2000 h
MTTR simulé:	2050.087 h
Ecart:	50.087
Proportion:	2.504 %

7 Intérêts de la simulation de Monte-Carlo

Cette technique de simulation permet de générer des nombres pseudo-aléatoires distribués selon des lois très diverses, il y a d'ailleurs peu de limitations dans le choix de ces lois. Ce type de simulation permet de facilement calculer les caractéristiques (espérance mathématique, variance, écart type, etc.) de distributions de probabilités sans recourir au calcul analytique, qui peut s'avérer trop compliqué. De plus, la simulation de Monte-Carlo de nécessite pas d'outils particuliers, elle peut facilement être mise en place sur des logiciels simples d'utilisation tel Excel.

Par ailleurs, dans le cas de l'analyse de fiabilité, cette méthode permet d'évaluer des redondances complexes.

8 Inconvénients

Le principal inconvénient de cette méthode est le temps de calcul que peut demander une simulation, si le nombre de tirages devient important (nécessaire pour obtenir des estimations suffisamment exactes de la grandeur recherchée) et si les calculs statistique sont nombreux pour chaque tirage.

D'autre part, cette méthode repose essentiellement sur la génération de nombre aléatoires par un calculateur. Or, ces nombre sont, à juste titre, qualifiés de *pseudo*-aléatoires car un ordinateur est incapable de générer une suite de nombre *parfaitement* aléatoire, de distribution uniforme. Ces suites de nombres sont en principe périodiques et donc un biais peut être induit sur la précision des résultats simulés par méthode de Monte-Carlo si le nombre de tirages dépasse la période du générateur.