最大流网络之Push-Relabel算法

2016年12月11日 17:23:40 Rosun_ 阅读数：5408

上一篇文章介绍了网络最大流中的Ford-Forkerson算法和它的改进版本。对于解决网络最大流、最小割相关问题，今天我们来[illegible]效率更快的算法P算法。

1.Push-Relabel算法思想

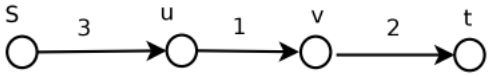
对于一个网络流图: 该算法直观可以这样理解，先在源节点处加入充足的流(跟源节点s相连的所有边的容量之和)，然后开始按一[illegible]则进行流渗透，一向汇点渗透，直到没法再渗透（类似于Ford-Fulkerson算法中找不到增广路径了），那么这时再把一些剩余的流回收到源节点s[illegible]主要分为两个步骤：push和relabel。push表示从所有节点找出一个存水量大于0的节点u，将它所存的水尽可能推向与它相邻的[illegible]v。要实现该push满足下面条件：该点存水量$e(u) > 0$，节点u的高度大于节v的高度。本次推送的流值$(u,v).f = mine(u),(u,v).capacity(u,v).capacity$为$edge(u,v)$的当前容量，这个值在推进过程中会一直变换。relabel表示某一个节点存水量大于0但水流不出去时，我们对该节点高度增加1，这就是所作，使得该节点的存水量流入比它低的节点。一开始的时候我们设置源节点高度为N, 此处N为节点数，其他所有节点高度为0，并且汇节点的高度固定点高度在算法执行过程中高度h会改变。

算法步骤：
1.初始化前置流：将与源点s相连的管道流量f(0,i)设为该管道的容量，即 f(0,i)=c(0,i)；将源点s的高度h(0)=V，(V表示图的顶点个数)，其余顶点高度h(点余量e(0)设为源容量减去源的流出量，即e(0)=-∑f(0,i)=-∑c(0,i)，与源s相连的点余量设为该点的流入量e(i)=c(0,i)，其余点都为0。

2.搜索是否有节点的点余量$e(u) > 0$，如果存在，表示要对该点进行操作——重标记或者压入流：检查与该点u全部的相邻点v，若该点比它相邻点的h(u)>h(v),该管道的当前容量为$c(u,v)$，将该点u的余量以最大方式压入该管道$delta = min(e(u), c(u,v))$, 然后对节点u,v的余量e、边(u,v)的容量进行减加操作；如果找不到高度比自己低的相邻节点v,则对节点u的高度增加1，即$h(u) = h(u) + 1$。如此继续进行Push操作。以上的重标记或压入行，直至该点的余量e(u)为0。
3.重复第2步，直找不到余量大于0的节点，停止算法，最后输出汇点t的余量e(t), 该值就是最后所求的最大流。最小割。

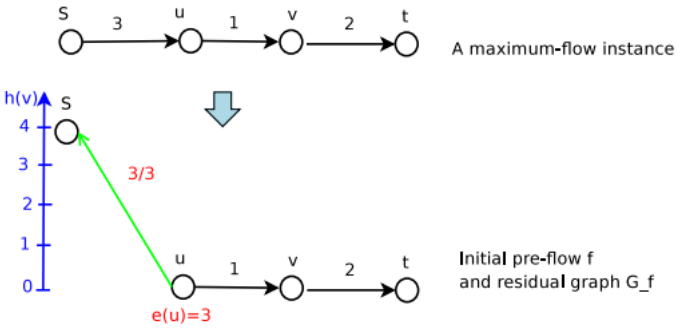
2.Push-Relabel算法原理示意图

给定的网络流图如下：

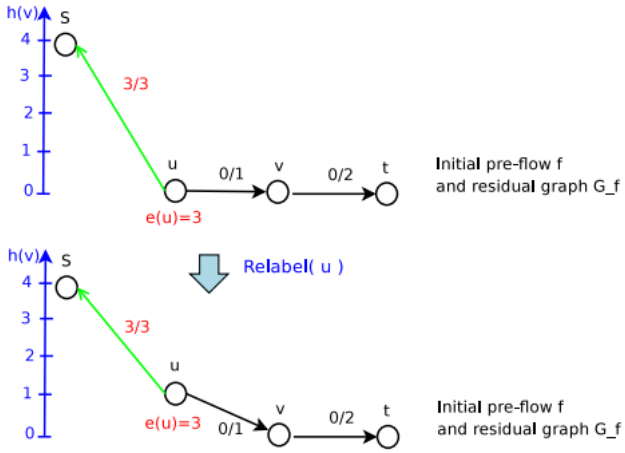


A maximum-flow instance

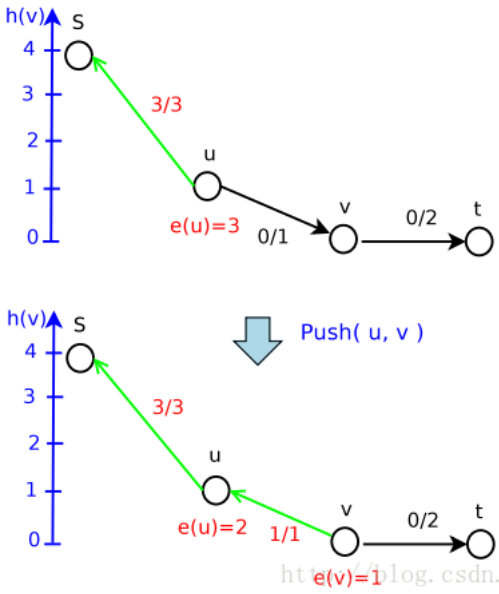
第一步：初始化操作：



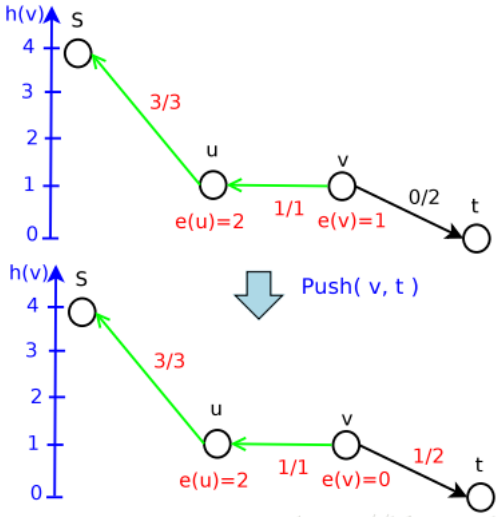
第一次Push不成功，进行Relabel



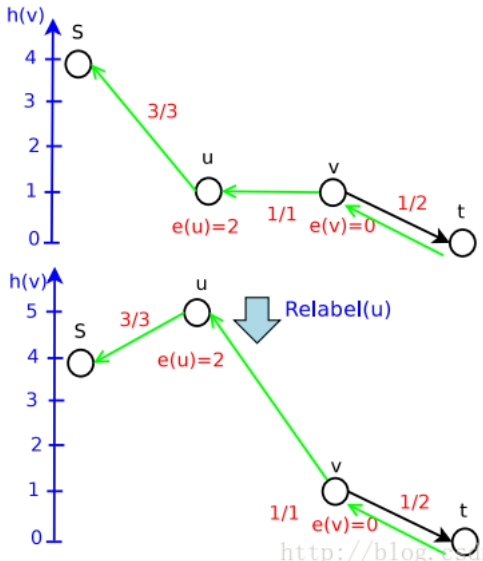
第二次Push，成功



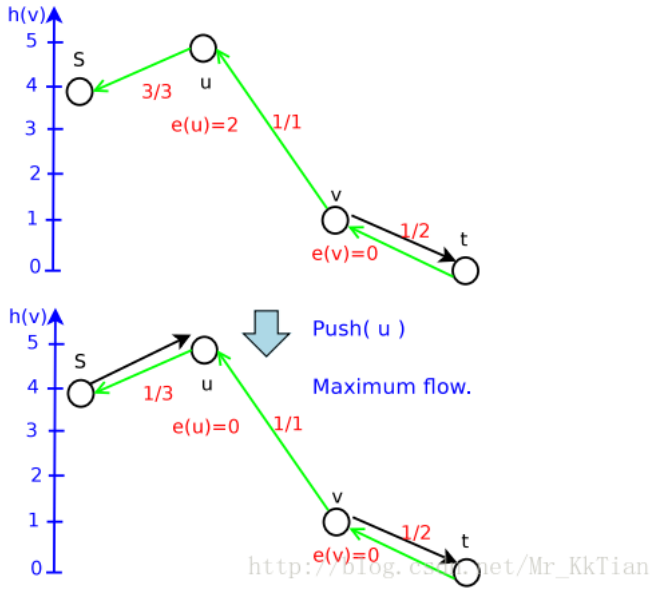
继续Push



继续Push



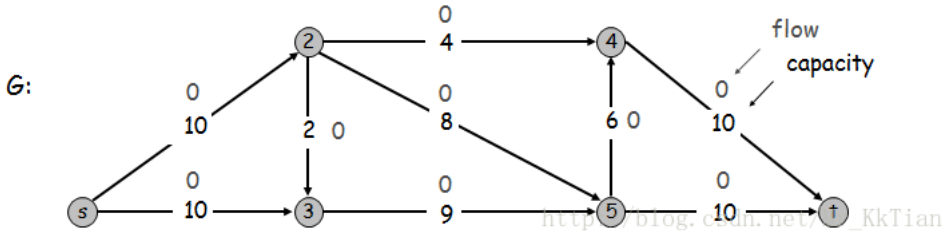
继续Push



至此结束。

3.Push-Relabel算法具体实例

求解下面网络流图的最大流：



源节点为s,汇节点为t
具体程序实现如下：

```
/*****************************************************
Description:Push-Relabel算法求解网络最大流
Author:Robert.TY
Date:2016.12.10
*****************************************************/
#include<iostream>
#include<limits>
#include<iomanip>
using namespace std;
struct Point{
    char ch;//节点标识
    int e;//存货量
    int h;//高度
};
Point point[6];
int graph[6][6]={{0,10,10,0,0,0},
                 {0,0,2,8,4,0},
                 {0,0,0,9,0,0},
                 {0,0,0,0,9,10},
                 {0,0,0,0,0,10},
                 {0,0,0,0,0,0}} ;
int Push_Relabel(int s, int t,int n); //参数为 起点 端点 节点数

int main(){
    int  n=6;
```

```
    point[0].ch='s';  point[0].e=0; point[0].h=0;
    point[1].ch='u';  point[1].e=0; point[1].h=0;
    point[2].ch='v';  point[2].e=0; point[2].h=0;
    point[3].ch='a';  point[3].e=0; point[3].h=0;
    point[4].ch='b';  point[4].e=0; point[4].h=0;
    point[5].ch='t';  point[5].e=0; point[5].h=0;
    cout<<"原始网络图邻接矩阵："<<endl;
    for(int i=0;i<=5;i++){
        for(int j=0;j<=5;j++){
            cout<<setw(6)<<graph[i][j]<<" ";

        }cout<<endl;
    }
    cout<<"max_flow="<<Push_Relabel(0, n-1,n)<<endl;
    cout<<"graph流图矩阵："<<endl;
    for(int i=0;i<=5;i++){
        for(int j=0;j<=5;j++){
            cout<<setw(6)<<graph[i][j]<<" ";

        }cout<<endl;
    }
    return 0;
}

int Push_Relabel(int s, int t,int n)
{
    int  max_flow;
    point[s].h = n;  //起始点高度置为n 最高
    //初始化 将start点的库存 流出去 update剩余图
    for (int u = 1; u <= t; u++) {
        if (graph[s][u] > 0) {
            point[u].e = graph[s][u];
            point[s].e -= graph[s][u];
            graph[u][s] = graph[s][u];
            graph[s][u] = 0;
        }
    }
    while(1) {
        int finishflag = 1;
        for (int u = s+1; u < t; u++) {  //搜索除 节点s 节点t以外的节点
            if (point[u].e > 0) {  //发现库存量大于0的节点 u 进行push
                finishflag = 0;
                int relabel = 1;   //先假设顶点u需要relabel 提高高度h
                for (int v = s; v <= t && point[u].e > 0; v++) {   //搜索能push的顶点
                    if (graph[u][v] > 0 && point[u].h >point[v].h) {  //发现节点v
                        relabel = 0;  //顶点u不需要relabel
                        int bottleneck = min(graph[u][v], point[u].e);
                        point[u].e -= bottleneck; //u节点库存量减少
                        point[v].e += bottleneck; //v节点库存量减少
                        graph[u][v] -= bottleneck;
                        graph[v][u] += bottleneck;

                    }
                }
                if (relabel==1) {  //没有可以push的顶点,u节点需要relabel 提高高度
                    point[u].h += 1;
                }
            }
        }
        if (finishflag==1) { // 除源点和汇点外,每个顶点的e[i]都为0
            max_flow = 0;
            for (int u = s; u <= t; u++) {
                if (graph[t][u] > 0) {
                    max_flow += graph[t][u];
                }
            }
            //cout<<"max_flow="<<max_flow<<endl;
            break;
        }
```

```
    }
    return max_flow;
}
```

结果如下：

```
原始网络图邻接矩阵：
     0     10     10      0      0      0
     0      0      2      8      4      0
     0      0      0      9      0      0
     0      0      0      0      9     10
     0      0      0      0      0     10
     0      0      0      0      0      0
max_flow=19
graph流图矩阵：
     0      0      1      0      0      0
    10      0      2      2      0      0
     9      0      0      0      0      0
     0      6      9      0      4      0
     0      4      0      5      0      1
     0      0      0     10      9      0

--------------------------------
Process exited after 0.403 seconds with return value 0
请按任意键继续. . .
                                        http://blog.csdn.net/Mr_KkTian
```