

Obsah

1	Motivační praktické problémy	3
1.1	Fyzikální motivace	3
1.1.1	Aerodynamická brzda - separace proměnných	3
1.1.2	Rozjezd auta - variace konstant	4
1.1.3	Tlumený a buzený oscilátor	5
1.1.4	Příklady systémů ODR	7
2	Teorie soustav ODR	9
2.1	Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic	9
2.1.1	Cauchyova úloha pro rovnice 1. řádu	9
2.1.2	Rovnice vyššího řádu	13
2.1.3	Existence a jednoznačnost řešení	14
2.2	Lineární soustavy ODR	17
2.2.1	Homogenní rovnice	18
2.2.2	Nehomogenní rovnice	22
2.3	Soustavy s konstantními koeficienty	24
2.3.1	Putzerova metoda	29
2.3.2	Metoda rozvoje v mocninou řadu	29

2.4	Stabilita rovnovážných bodů	31
3	Numerické metody pro ODR	33
3.1	Eulerovy metody a základní pojmy	34
3.1.1	Explicitní Eulerova metoda	34
3.1.2	Chyby numerických metod	36
3.1.3	Zaokrouhlovací chyba	40
3.1.4	Stabilita a absolutní stabilita	40
3.1.5	Implicitní Eulerova metoda	43
3.1.6	Systémy nelineárních algebraických rovnic	45
3.2	Metody vyšších řádů	47
3.2.1	Metoda Taylorova rozvoje	47
3.2.2	Metoda druhého řádu	48
3.2.3	Runge-Kuttovy metody	49
3.3	Vícekrokové metody	53
3.3.1	Výhody	55
3.3.2	Nevýhody	55

Kapitola 1

Motivační praktické problémy

For english test see [1, Lecture 1].

1.1 Fyzikální motivace

1.1.1 Aerodynamická brzda - separace proměnných

Na jednoduché fyzikální úloze si připomeneme pojmy pro jednoduché obyčejné diferenciální rovnice a dvě základní metody jejich řešení. Auto s počáteční rychlostí $v_0 = 100$ km za hodinu jede s vyřazeným motorem. Při vysokých rychlostech převažuje aerodynamický odpor a odporová síla je úměrná druhé mocnině rychlosti. Máme určit průběh rychlosti jako funkci času.

Použitím druhého Newtonova zákona dostaneme pro zpomalený pohyb rovnici:

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -kv^2(t), \quad v(0) = v_0 = 100, \quad (1.1)$$

kde m je hmotnost vozidla, t je čas a k je vhodná konstanta závisující na tvaru vozidla. Řešením rovnice je funkce $v(t)$ přičemž v se nazývá *závisle proměnná* a t *nezávisle proměnná*. V rovnici (1.1) se vyskytuje nejvýše první derivace hledané funkce $v(t)$, proto se jedná o *rovnici prvního řádu*. Na pravé straně je nelineární funkce $f(v) = cv^2$ závisle proměnné, proto se jedná o *nelineární diferenciální rovnici*. Jelikož pravá strana nezávisí přímo na nezávislé proměnné, jedná se o tzv. *autonomní rovnici*.

Pro řešení nelineárních diferenciálních rovnic neexistuje řádný univerzální postup, dokonce pro většinu rovnic nelze nalézt analytické řešení. Rovnice (1.1) umožňuje řešení po-

mocí *separace proměnných*. Derivaci napíšeme jako podíl diferenciálů a rovnici upravíme do tvaru, kde na levé straně je pouze závisle proměnná a na pravé pouze nezávisle proměnná, tedy

$$v^{-2} dv = \alpha dt, \quad \alpha = -k/m$$

Nyní obě strany integrujeme, pozor na integrační konstantu C ,

$$-v^{-1} = \int v^{-2} dv = \int \alpha dt = \alpha t + C.$$

A vyjádříme v :

$$v(t) = \frac{-1}{\alpha t + C}$$

Pro určení konstanty C použijeme *počáteční podmínku* $v(0) = v_0 = 100$,

$$C = -v^{-1} - \alpha t = -v_0^{-1}$$

a celkový výsledek je tedy:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - \alpha t v_0}.$$

1.1.2 Rozjezd auta - variace konstant

V případě lineárních rovnic se autonomním rovnicím říká *homogenní* a lze je vždy řešit separací. Pokud se na pravé straně navíc objeví člen závislý pouze na čase, *absolutní člen*, jedná se o *nehomogenní rovnici*, kterou řešíme *variací konstant*.

Uvažujme zrychlený pohyb, kde v čase lineárně zvyšujeme výkon motoru a zároveň uvažujeme odporovou sílu přímo úměrnou rychlosti:

$$mv'(t) = Pt - cv(t), \quad v(0) = 0$$

Jedná se o lineární rovnici, protože obsahuje pouze členy obsahující závisle proměnnou v nebo její derivaci v' . Absolutní člen Pt by mohl být i nelineární, např. Pt^2 , a stále by šlo o lineární rovnici. Lineární rovnice obvykle zapisujeme tak, aby na levé straně byly členy obsahující závislou proměnnou a na pravé straně je buď nula (homogenní rovnice), nebo „absolutní člen“, kterému se v kontextu lineárních rovnic obvykle říká *pravá strana*.

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $mv' = -cv$, pomocí separace proměnných najdeme řešení $v = Ce^{-\alpha t}$, $\alpha = c/m$. Nyní hledáme řešení původní rovnice ve tvaru:

$$v(t) = C(t)e^{-\alpha t}$$

kde jsme provedli „variaci“ integrační konstanty C . Neúplné řešení v tomto tvaru dosadíme do nehomogenní rovnice:

$$mC'(t)e^{-\alpha t} - m\alpha C(t)e^{-\alpha t} = Pt - m\alpha C(t)e^{-\alpha t}$$

oba poslední členy se odečtou, dále vyjádříme C' a integrujeme per partes:

$$C(t) = \frac{P}{m} \int t e^{\alpha t} dt = \frac{P}{m\alpha^2} (\alpha t - 1) e^{\alpha t} + C_0.$$

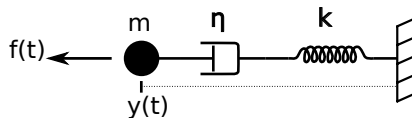
Celé řešení je pak

$$v(t) = C(t)e^{-\alpha t} = C_0 e^{-\alpha t} + \frac{P}{m\alpha^2} (\alpha t - 1)$$

přičemž C_0 se opět určí z počáteční podmínky. Všimněme si, že počáteční podmínka ovlivňuje jen první člen řešení, který odpovídá řešení homogenní rovnice, druhý člen, kterému se říká *partikulární řešení* na počáteční podmínce nezávisí, ale závisí na absolutním členu.

1.1.3 Tlumený a buzený oscilátor

V mnoha aplikacích je třeba vyšetřovat různé oscilující systémy. Může jít o mechanické oscilátory jako v případě vibrací různých motorů, nebo o elektrický oscilátor (RLC obvod), nebo o model visko-elastického materiálu (elastická plastelína), nebo o gravitační oscilátor (kyvadlo). Tlumený a buzený oscilátor (viz. schéma 1.1.3) se skládá z pružiny



Obrázek 1.1: Schéma tlumeného oscilátoru.

o tuhosti k (závislost síly na výchylce y), sériově zapojeného tlumiče o dynamické tuhosti η (závislost síly na rychlosti změny výchylky) a tělesa o hmotnosti m , které je *buzeno* vnější silou $f(t)$ (obvykle periodickou). Použitím druhého Newtonova zákona a bilance sil dostaneme rovnici:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \eta \frac{dy}{dt} + ky = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1,$$

kterou můžeme zjednodušit na tvar:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = F(t), \quad \alpha = \frac{\eta}{m}, \quad \beta = \frac{k}{m}, \quad F(t) = \frac{f(t)}{m}$$

Jedná se o nehomogenní (pokud $f \neq 0$) lineární rovnici druhého řádu. Připomeňme obvyklou metodu řešení takovéto rovnice. Nejprve řešíme *charakteristickou rovnici*

$$Y^2 + \alpha Y + \beta = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má buď jeden (násobný) nebo dva (obecně komplexní) kořeny Y^+ , Y^- , pak má homogenní rovnice ($F = 0$) řešení ve tvaru

$$y(t) = C^+ e^{Y^+ t} + C^- e^{Y^- t}. \quad (1.2)$$

Pro reálné kořeny (převaha tlumení) máme prostý součet dvou exponencií. Pro násobný kořen Y je řešení ve tvaru

$$y(t) = C_1 t e^{Y t} + C_2 e^{Y t}.$$

Pro komplexně sdružené kořeny $Y_{\pm} = a \pm ib$ musí být komplexně sdružené i integrační konstanty C^+ , C^- v rovnici (1.2), jelikož řešení $y(t)$ má být reálná funkce, pak lze řešení napsat jako:

$$\begin{aligned} y(t) &= (A + iB)e^{at}e^{ibt} + (A - iB)e^{at}e^{-ibt} = Ae^{at}(e^{ibt} + e^{-ibt}) + Be^{at}i(e^{ibt} - e^{-ibt}) \\ &= e^{at}(2A\cos(bt) + 2B\sin(bt)). \end{aligned}$$

Pro některé speciální pravé strany F existují předpisy pro partikulární řešení.

Nyní naznačíme, odkud se vzala výše ukázaná metoda řešení pomocí charakteristické rovnice, jak tato charakteristická rovnice souvisí s charakteristickou rovnicí pro vlastní čísla matice, a jak lze řešit nehomogenní lineární rovnici pro obecnou pravou stranu. Klíčovým trikem, je převod rovnice vyššího řádu na soustavu rovnic nižšího řádu. Zavedeme novou proměnnou $z(t)$ pro derivaci y' , pak můžeme původní rovnici napsat ve tvaru soustavy:

$$y'(t) - z(t) = 0, \quad y(0) = y_0 \quad (1.3)$$

$$z'(t) + \alpha z(t) + \beta y(t) = F(t), \quad z(0) = y_1 \quad (1.4)$$

Tuto lineární soustavu můžeme napsat ve vektorovém tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

nebo při vhodném označení vektorů a matic ještě jednodušeji:

$$\mathbf{Y}'(t) + \mathbb{A}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(t).$$

Tento vektorový zápis budeme dále hojně využívat, vektory budou vždy psány tučně, matice dvojitým fontem.

1.1.4 Příklady systémů ODR

dravec-kořist

Uvažujme jednoduchý ekologický systém složený z populace predátora a jeho kořisti (klasickým příkladem jsou lišky a zajíci). Označme $x(t)$ počet zajíců a $y(t)$ počet lišek v čase t s počátečními velikostmi x_0 a y_0 . Zajíci mají neomezený zdroj potravy, lišky se živí pouze lovem zajíců. Tento ekologický systém popisuje Lotkův-Voltarrův systém diferenciálních rovnic:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y), \quad x(0) = x_0 \quad (1.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + \gamma x), \quad y(0) = y_0. \quad (1.6)$$

Význam členů na pravé straně je: ax vyjadřuje přirozený přírůstek zajíců za jednotku času, $-\alpha xy$ umrtí zajíců v důsledku interakce, γxy přírůstek lišek v důsledku interakce, $-cy$ přirozený úbytek lišek. Označme $\mathbf{x} = (x, y)^T$ a zapišme vektorově:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\alpha x \\ \gamma y & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vidíme, že matice na pravé straně sama závisí na hledaném řešení, proto se jedná o nelineární systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Model N hmotných bodů (planet)

Každá planeta má 6 stavových proměnných 3 ve vektoru polohy \mathbf{x}_i a 3 ve vektoru rychlosti \mathbf{v}_i . Pohybová rovnice jedné planety je:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i$$

$$m_i \frac{d}{dt}\mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^N \kappa \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$$

Podobně lze modelovat pohyb iontů v plazmatu, nebo molekul v chemickém roztoku. Nebo dynamické mechanické systémy jako auto (minimální model zahrnuje asi 9 stupňů volnosti: 4 úhlové polohy kol, 4 výšky kol - odpružení, 1 poloha volantu) nebo kostra člověka, nebo mechanický systém člověk-kolo.

Kapitola 2

Teorie soustav ODR

Systémy obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) jsou základním modelem při popisu netriviálních časově proměnných jevů z fyziky, chemie, biologie, ekonomie, elektrotechniky a mnoha dalších oborů. Cílem dalších kapitol bude nejprve prozkoumání základních obecných vlastností soustav ODR (kapitola 2.1) a poté seznámení se s řešením lineárních soustav (kapitoly 2.2 a 2.3). Další kapitoly budou věnovány úvodu do numerických metod pro řešení ODR a jejich soustav.

2.1 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

2.1.1 Cauchyova úloha pro rovnice 1. řádu

Uvažujme časový interval (otevřený, neprázdný) $I \subset \mathbf{R}$, na kterém chceme najít vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$ o n složkách, s hodnotami v oblasti (otevřená jednoduše souvislá množina) $H \subset \mathbf{R}^n$. Na intervalu I chceme řešit soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

nebo ve vektorovém zápisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{2.1}$$

kde $t \in I$ a \mathbf{f} je daná vektorová funkce z $I \times H$ do \mathbf{R}^n . Tečka nad písmenem je obvyklé značení časové derivace:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Dále budeme i systémům říkat diferenciální rovnice, nebo jen rovnice a používat téměř výhradně vektorového zápisu.

Definice 2.1.1. Reálnou vektorovou funkci $\mathbf{x} : I \rightarrow H$ nazveme řešením soustavy (2.1) obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, pokud

1. Funkce \mathbf{x} je definována na nějakém (nedegenerovaném) podintervalu $J \subset I$.
2. Graf funkce \mathbf{x} leží celý v definičním oboru funkce \mathbf{f} , tj. platí

$$(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times H$$

pro všechna $t \in J$.

3. Funkce \mathbf{x} vyhovuje soustavě (2.1) pro všechna $t \in J$.

Body 1 a 2 jsou vlastně obsaženy v bodě 3. Někdy také říkáme, že \mathbf{x} je řešením rovnice na intervalu J .

Příklad 2.1.2. Nad rybníkem H fouká vítr. Směr větru a jeho velikost v čase t během jednoho dne I a v místě \mathbf{x} rybníka $H \subset \mathbf{R}^2$ je dán funkcí $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Balón s minimální hmotností a třením je větrem unášen po trajektorii dané funkcí $\mathbf{x}(t)$, která splňuje rovnici (2.1). Rychlost balónu v čase t je tedy rovna rychlosti větru v místě, kde je balón, a ve stejném čase t .

Příklad 2.1.3. Ukážeme, že vektorová funkce

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} - c_3 e^{-t} \\ 2c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

je pro každou volbu reálných konstant c_1, c_2, c_3 řešením soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Nejprve spočteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \\ 2c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \\ 4c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -2e^{-2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & 2e^{-2t} & e^{-t} \\ 4e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Dále spočteme pravou stranu:

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -2e^{-2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & 2e^{-2t} & e^{-t} \\ 4e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.1.4. Ukažte, že vektorová funkce

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 t \cos[(1-t^2)^{3/2} - c_2] \\ c_1 t \sin[(1-t^2)^{3/2} - c_2] \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1)$$

je pro každou volbu reálných konstant c_1, c_2 řešením soustavy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 3t\sqrt{1-t^2} \\ -3t\sqrt{1-t^2} & t^{-1} \end{pmatrix}$$

Pohyb balónu v příkladu 2.1.2 není jednoznačně určen, jelikož nevíme odkud byl vypuštěn. Z fyzikálního kontextu víme, že se balón z bodu vypuštění bude pohybovat po jednoznačné trajektorii. Pokud je náš model správně, musí mít i rovnice pro jeho pohyb jednoznačné řešení při zadání počáteční polohy. Tento typ úloh nazýváme *Cauchyovou úlohou* nebo *počáteční úlohou* (na rozdíl od tzv. okrajových úloh jako je průhyb nosníku ukotveného na obou stranách **TODO**: uvest v motivacních ulohách)

Definice 2.1.5. Na (otevřeném, neprázdném) intervalu $I \subset \mathbf{R}$ a oblasti $H \subset \mathbf{R}^n$ je dána funkce $\mathbf{f} : I \times H \rightarrow \mathbf{R}^n$. Nechť $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ je pevně zvolený bod v oblasti $I \times H$.

Cauchyovou úlohou je nalezení řešení rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

které je definováno na intervalu J obsahujícím τ a splňuje *počáteční podmínku*

$$\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}.$$

Příklad 2.1.6. Ukažte, že funkce

$$x(t) = \frac{1}{\xi^{-1} - t}, \quad t \in (-\infty, \xi^{-1})$$

je řešením Cauchyovy úlohy

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = \xi, \quad \xi > 0.$$

Příklad 2.1.7. Ukažte, že vektorová funkce

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -(2\xi_1 + \xi_2)e^{-3t} + (3\xi_1 + \xi_2)e^{-2t} \\ (6\xi_1 + 3\xi_2)e^{-3t} - (6\xi_1 + 2\xi_2)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

nebo-li

$$\mathbf{x}(t) = \mathbb{X}(t)\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

je řešením Cauchyovy úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{X}(t) &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} e^{-2t} \\ \mathbb{X}(0) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Příklad 2.1.8. Necht q a h jsou reálné funkce spojité na otevřeném intervalu I . Označme

$$Q(t, \tau) = \int_{\tau}^t q(s) \, ds, \quad H(t, \tau) = \int_{\tau}^t h(s) \, ds.$$

Ukažte, že pro libovolné $\tau \in I$ a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^2$ je vektorová funkce

$$\mathbf{x}(t) = \mathbb{X}(t)\boldsymbol{\xi} = e^{Q(t, \tau)} \begin{pmatrix} \cos H(t, \tau) & \sin H(t, \tau) \\ -\sin H(t, \tau) & \cos H(t, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

pro všechna $t \in I$ řešením Cauchyovy úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} q(t) & h(t) \\ -h(t) & q(t) \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

Důkaz.

$$\dot{\mathbb{X}} = e^{Q(t, \tau)} q(t) \begin{pmatrix} \cos H(t, \tau) & \sin H(t, \tau) \\ -\sin H(t, \tau) & \cos H(t, \tau) \end{pmatrix} + e^{Q(t, \tau)} \begin{pmatrix} -\sin H(t, \tau) & \cos H(t, \tau) \\ -\cos H(t, \tau) & -\sin H(t, \tau) \end{pmatrix} h(t)$$

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = e^{Q(t, \tau)} \begin{pmatrix} q \cos H - h \sin H & q \sin H + h \cos H \\ -h \cos H - q \sin H & -h \sin H + q \cos H \end{pmatrix}$$

□

2.1.2 Rovnice vyššího řádu

V této podkapitole zavedeme soustavy rovnic vyššího řádu a ukážeme, že je lze převést na soustavy rovnic řádu prvního, podobně jako jsme to udělali v případě tlumeného oscilátoru v kapitole 1.1.3.

Definice 2.1.9. Nechť je dán otevřený interval $I \subset \mathbf{R}$ a oblast $H \subset \mathbf{R}^n$. Nechť je dána funkce $f : I \times H \rightarrow \mathbf{R}$ a počáteční bod $(\tau, \xi) \in I \times H$. *Cauchyovou úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu*

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

nazýváme úlohu najít reálnou funkci $x(t)$ mající tyto vlastnosti:

1. Funkce x je definovaná a n -krát spojitě diferencovatelná na nějakém nedegenerovaném intervalu $J \subset I$.
2. Platí $(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in H$ pro všechna $t \in J$.
3. Funkce x splňuje rovnost (2.2) pro všechna $t \in J$.
4. Počáteční čas τ leží v J a řešení x a jeho derivace až do řádu $n - 1$ včetně nabývají v bodě τ předepsaných hodnot, tj. platí

$$\tau \in J, \quad x^{(k)}(\tau) = \xi_k, \quad \text{pro } k = 0, \dots, n - 1.$$

Funkci x mající vlastnosti 1 až 4 z definice 2.1.9 nazýváme *řešením Cauchyovy úlohy* (2.2). Má-li funkce x pouze vlastnosti 1 až 3, nazýváme ji *řešením obyčejné diferenciální rovnice* (2.2).

Rovnici n -tého řádu nyní převedeme na soustavu n rovnic řádu prvního. Pokud označíme

$$x_k = x^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n - 1;$$

pak platí

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(\tau) = \xi_1, \\ \dot{x}_2 = x_3, & x_2(\tau) = \xi_2, \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, & x_{n-1}(\tau) = \xi_{n-1}, \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & x_n(\tau) = \xi_n. \end{array}$$

To je Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, kde

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_2, \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_3, \\ &\vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_n, \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Důsledek 2.1.10. Mezi Cauchyovými úlohami (2.1) a (2.2) platí tento vztah:

Je-li funkce x řešením Cauchyovy úlohy (2.2), pak vektorová funkce $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ je řešením Cauchyovy úlohy (2.1) a naopak.

TODO: Napsat presneji.

2.1.3 Existence a jednoznačnost řešení

Jak jsme již zmínili, při známé počáteční poloze bude mít balón v realitě jednoznačnou trajektorii. Ovšem diferenciální rovnice (2.1) je pouze modelem pro pohyb balónu a proto z fyzikální reality nelze nic vyvozovat o jejích vlastnostech. Naopak bychom měli dokázat, že rovnice má jednoznačné řešení (což je pojem, který nejprve musíme definovat), abychom ověřili, že náš model je správně postulovaný (nemusí být ještě nutně správný). V této kapitole si ukážeme za jakých podmínek existuje řešení rovnice 1. řádu a za jakých podmínek je toto řešení jednoznačné. Nakonec uvidíme, že tím zpětně upřesníme naše fyzikální úvahy o balónu.

Věta 2.1.11 (Peanova o existenci). Necht' je dána Cauchyova úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \quad (2.3)$$

kde funkce \mathbf{f} je spojitá na množině $I \times H \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, která obsahuje počáteční bod $X_0 = (\tau, \boldsymbol{\xi})$. Pak existuje řešení Cauchyovy úlohy (2.3) na okolí $J \subset I$ bodu τ .

Peanova věta nám poskytuje existenci řešení pouze na malém okolí počátečního času, řekněme na uzavřeném intervalu $J_0 = \langle \tau - \epsilon, \tau + \epsilon \rangle$ (všimněte si, že řešení existuje i před počátečním časem). Pro koncový bod můžeme znovu použít Peanovu větu a tím prodloužit řešení: pokud $\tau + \epsilon \in I$ a $\mathbf{x}(\tau + \epsilon) \in H$, pak řešení existuje na větším intervalu $J_1 = \langle \tau - \epsilon, \tau + \epsilon + \delta \rangle$. Takto můžeme řešení prodlužovat dokud nám neopustí množinu kde je funkce \mathbf{f} spojitá, tj. $I \times H$. Tím získáme *maximální interval řešení*, tedy nejdelší

interval na kterém nějaké řešení Cauchyovy úlohy existuje. Řešení na maximálním intervalu nazýváme *maximální řešení*. **TODO:** Jak je to v případě, že různé větve řešení mají různé maximální intervaly? Jak je to s případy exploze v konečném čase: $y' = y^2$?

Dále nás bude zajímat, za jakých podmínek řešení nejen existuje, ale je jednoznačné.

Příklad 2.1.12. Uvažujme rovnici

$$x' = 2\sqrt{|x|}.$$

pravá strana je spojitá na celém \mathbf{R} . Rovnice má nekonečně mnoho řešení složených z následujících tří větví:

1.

$$x(t) = 0$$

2.

$$x(t) = (t + C)^2$$

3.

$$x(t) = -(C - t)^2$$

Při prodlužování řešení větve 1 směrem doprava si v libovolném bodě můžeme vybrat, zda budeme pokračovat větví 1 nebo větví 2, podobně při prodlužování doleva se můžeme v kterémkoliv bodě přepnout do větve 3.

Definice 2.1.13. Říkáme, že Cauchyova úloha (2.3) má jednoznačné řešení na intervalu $J \subset I$, pokud se libovolná dvě řešení $\mathbf{x}_1(\cdot)$ a $\mathbf{x}_2(\cdot)$ splňující (2.3) na intervalu J na tomto intervalu shodují, tj. platí $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ pro všechny časy $t \in J$.

Z příkladu je vidět, že nejednoznačnost řešení je pouze v bodě $y = 0$, který je zvláštní tím, že tam má funkce nedefinovanou derivaci $f(x) = \sqrt{|x|}$ a limity derivace jsou nekonečné. Nyní zavedeme třídu funkcí, které tímto problémem netrpí a pro něž dostáváme jednoznačnost řešení.

Definice 2.1.14. Nechť $I \times H$ je oblast v $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Vektorová funkce $\mathbf{f} : I \times H \rightarrow \mathbf{R}^n$ se nazývá *lipschitzovská vzhledem k proměnné \mathbf{x}* na množině $I \times H$, pokud existuje kladná konstanta L taková, že pro každý čas $t \in I$ a dvojici bodů \mathbf{x}, \mathbf{y} v H platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (2.4)$$

Pokud chceme zdůraznit hodnotu konstanty L , říkáme, že je funkce Lipschitzovská s konstantou L . Za normu $\|\cdot\|$ v podmínice (2.4) můžeme použít kteroukoliv normu na prostoru \mathbf{R}^n , protože všechny normy na konečně rozměrných prostorech jsou ekvivalentní. Nicméně hodnota konstanty L na volbě normy závisí.

Důležitou třídu funkcí lipschitzovských vzhledem k proměnné \mathbf{x} tvoří funkce mající omezené všechny své první parciální derivace vzhledem k proměnným x_1, x_2, \dots, x_n . Zkusme to dokázat, použijeme normu $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$. Mějme funkci $\mathbf{f} : I \times H \rightarrow \mathbf{R}^n$ s omezenými parciálními derivacemi:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) \right\| \leq M, \quad \text{pro všechna } t \in I, \mathbf{x} \in H, i = 1, \dots, n$$

Nyní mějme libovolný čas $t \in I$ a libovolné body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Pro funkci f_i , sestrojíme funkci na úsečce spojující body \mathbf{x} a \mathbf{y} :

$$g_i(s) = f_i(t, \mathbf{z}(s)), \quad \mathbf{z}(s) = (1-s)\mathbf{x} + s\mathbf{y}.$$

Pro její derivaci platí:

$$g'_i(s) = \nabla f_i(t, \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{z}(s))(y_j - x_j)$$

Podle věty o střední hodnotě existuje ke každé funkci g_i , $i = 1, 2, \dots, n$, bod $s_i \in \langle 0, 1 \rangle$ takový, že platí

$$f_i(t, \mathbf{x}) - f_i(t, \mathbf{y}) = g_i(0) - g_i(1) = g'_i(s_i).$$

Bodu s_i odpovídá bod $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}(s_i)$, kombinací posledních dvou vztahů pak dostaneme

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| = |g'_i(s_i)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{z}(s_i)) \right| |y_j - x_j| \leq M \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Nyní vysčítáme přes i a dostaneme:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq nM \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Čímž jsme dokázali, že \mathbf{f} je na $I \times H$ lipschitzovská vzhledem k \mathbf{x} s konstantou nM .

Věta 2.1.15 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti). Nechť $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{f} : I \times H \rightarrow \mathbf{R}^n$ je funkce spojitá vzhledem k proměnné t a lipschitzovská vzhledem k \mathbf{x} na oblasti $I \times H \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Pak pro Cauchyovu úlohu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{2.5}$$

jednoznačné řešení na nějakém okolí $J \subset I$ počátečního času τ .

TODO: Globální řešení, maximální interval řešení a jeho jednoznačnost

2.2 Lineární soustavy ODR

TODO: Pokusit se zjednodušit separovat pokročilé a méně podstatné části.

Pro řešení obecných diferenciálních rovnic neexistuje žádný obecný postup, podobně jako neexistuje obecný postup pro integrování. Pro většinu rovnic neexistuje řešení v uzavřeném tvaru a tím spíše to platí pro systémy ODR. Pro některé typy rovnic však o řešení něco říci umíme. V této kapitole se budeme věnovat řešení lineárních rovnic, kde funkce \mathbf{f} je ve tvaru $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$. Tento typ rovnic je důležitý, protože hladké funkce \mathbf{f} lze lokálně aproximovat právě lineární rovnicí. Použitím Taylorova rozvoje zvlášť pro každý parametr funkce \mathbf{f} dostaneme:

$$f_i(t_0 + s, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f_i(t_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial f_i}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}_0)s + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t_0, \mathbf{x}_0)h_j + O(\delta^2).$$

Pokud uvažujeme malé odchylky $s, h_j \leq \delta$. Ve vektorovém zápisu pak máme:

$$\mathbf{f}(t_0 + s, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \approx \mathbb{A}\mathbf{h} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) + \partial_t \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)s, \quad \mathbb{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0),$$

kde $\mathbb{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$ je matice prvních derivací. Zde je dokonce \mathbb{A} nezávislé na čase, což je speciální třída lineárních soustav ODR s *konstantními koeficienty*. Pro tento typ rovnic dokonce máme obecný postup pro nalezení řešení v uzavřeném tvaru.

Definice 2.2.1. Necht' I je otevřený interval v \mathbf{R} , $\mathbf{f} : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Říkáme, že soustava obyčejných diferenciálních rovnic $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je *lineární* právě tehdy, když existuje maticová funkce $\mathbb{A}(t)$ typu $n \times n$ a vektorová funkce \mathbf{b} typu $n \times 1$, tj.

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

tak, že platí

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (2.7)$$

pro všechna $(t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbf{R}^n$. Matici \mathbb{A} nazýváme *maticí lineární soustavy* a vektorovou funkci \mathbf{b} nazýváme *pravou stranou lineární soustavy*. Říkáme, že lineární soustava je *homogenní*, pokud $b_i(t) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ a všechna $t \in I$. V opačném případě soustavu nazýváme *nehomogenní*.

Soustava lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu pak má tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

nebo lépe ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (2.9)$$

Nyní si ukážeme, že pro lineární soustavy existuje jednoznačné řešení. Pokud budou $\mathbb{A}(t)$ i $\mathbf{b}(t)$ spojité funkce na otevřeném intervalu I , bude i $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ spojitá v proměnné $t \in I$. Její parciální derivace v proměnné \mathbf{x}

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = a_{ij}(t)$$

nezávisí na \mathbf{x} a díky spojitosti budou omezené na libovolném uzavřeném podintervalu $J \subset I$. Funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je tedy lipschitzovská na $J \times \mathbf{R}^n$. Jelikož J je libovolný uzavřený podinterval I , můžeme řešení prodloužit až na celý interval I . Pak v důsledku věty 2.1.15 dostáváme následující větu o existenci a jednoznačnost řešení lineárních rovnic.

Věta 2.2.2. Nechť maticová funkce \mathbb{A} a vektorová funkce \mathbf{b} jsou spojité na uzavřeném intervalu I . Pak pro každý počáteční bod $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in I \times \mathbf{R}^n$ má Cauchyova úloha

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \quad (2.10)$$

právě jedno řešení $\mathbf{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$, které je definované na celém intervalu I .

2.2.1 Homogenní rovnice

Nyní se budeme podrobněji zabývat homogenní lineární rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

Bez určení počáteční podmínky má ovšem tato rovnice více (dokonce nekonečně mnoho) řešení, pro která platí princip superpozice. Mějme $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$, dvě řešení rovnice (2.11), a dále dvě reálná čísla α, β , pak i funkce $\mathbf{z}(t) = \alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t)$ je řešením stejné rovnice, neboť

$$\dot{\mathbf{z}} = \alpha\dot{\mathbf{x}} + \beta\dot{\mathbf{y}} = \alpha\mathbb{A}\mathbf{x} + \beta\mathbb{A}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{z},$$

kde jsme nejdříve použili linearitu derivace a pak linearitu maticového násobení. Z toho plyne, že množina řešení rovnice (2.11) tvoří vektorový prostor obecného prostoru funkcí na intervalu I . Pro každý vektor počátečních podmínek $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ dostáváme právě jedno řešení. Tedy prostor řešení má také dimenzi n . Z těchto pozorování plyne následující věta.

Věta 2.2.3. Nechť maticová funkce $\mathbb{A}(t)$ a vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na otevřeném intervalu I . Pak množina $\mathcal{U}(I)$ všech řešení homogenní ODR (2.11), definovaných na celém intervalu I , tvoří n -rozměrný vektorový prostor.

Zejména je dobré si uvědomit, že nulová funkce, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ pro všechna $t \in I$, je také řešením a zároveň je to nulový prvek vektorového prostoru řešení. Dále si v každém n -rozměrném vektorovém prostoru můžeme zvolit n prvkovou bázi, tj. množinu lineárně nezávislých vektorů generující tento vektorový prostor.

Fundamentální systém řešení

Definice 2.2.4. Říkáme, že vektorové funkce

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

tvoří bázi řešení (též *fundamentální systém řešení*) soustavy (2.11) pokud funkce $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou lineárně nezávislými řešeními soustavy (2.11) na intervalu I .

Matici (maticovou funkci), která má ve sloupcích vektory takovéto báze, tj.

$$\mathbb{V}(t) = \begin{pmatrix} v_{11}(t) & \dots & v_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n}(t) & \dots & v_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

nazýváme *fundamentální maticí* soustavy (2.11). Libovolné řešení soustavy pak lze napsat jako lineární kombinaci prvků báze, tj.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1(t) + c_2 \mathbf{v}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{v}_n(t) = \mathbb{V}(t) \mathbf{c}. \quad (2.13)$$

Upřesněme si co to znamená, že prvky báze, tedy vektorové funkce $\mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_n(t)$, jsou lineárně nezávislé. Má platit, že pokud lineární kombinace (což je opět funkce a navíc také řešení rovnice)

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathbf{v}_1(t) + c_2 \mathbf{v}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{v}_n(t) = \mathbb{V}(t) \mathbf{c}$$

je nulová funkce (nulový prvek prostoru řešení), pak vektor $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ je roven nule.

Standardní fundamentální systém

Možností jak zvolit fundamentální systém (bázi řešení) je nekonečně mnoho. Pokud řešíme Cauchyovu úlohu, chceme zvolit takový systém, ze kterého snadno dostaneme

jednoznačné řešení pro daný počáteční bod $(\tau, \boldsymbol{\xi})$. Označíme si $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$ řešení počáteční úlohy:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}. \quad (2.14)$$

Pro pevný počáteční čas τ dostaneme pro každé $\boldsymbol{\xi}$ právě jeden prvek prostoru řešení a naopak, každé řešení odpovídá jedné volbě počáteční podmínky v čase τ . Tím máme definované zobrazení

$$\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{U}(I), \quad \Phi(\boldsymbol{\xi})[t] = \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}),$$

které je lineární, tj. lineární kombinace počátečních podmínek odpovídá stejné lineární kombinaci řešení.

Zvolme si za fundamentální systém množinu řešení:

$$\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{e}_2), \dots, \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{e}_n) \quad (2.15)$$

kde \boldsymbol{e}_i jsou vektory standardní báze \mathbf{R}^n , tedy \boldsymbol{e}_i má jedničku ve složce i , jinde má nuly:

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} e_{i1} \\ \vdots \\ e_{in} \end{pmatrix}, \quad e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Vlastně zobrazujeme pomocí zobrazení Φ standardní bázi $\{\boldsymbol{e}_i\}$ prostoru počátečních podmínek \mathbf{R}^n na *standardní bázi prostoru řešení* $\mathcal{U}(I)$. Z toho ostatně plyne, že (2.15) je skutečně báze. Tuto bázi též nazýváme *standardním fundamentálním systémem* Cauchyovy úlohy (2.9). Mezi všemi bázemi prostoru $\mathcal{U}(I)$ má standardní fundamentální systém tu vlastnost, že koeficienty řešení $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$ jsou přímo složky počáteční podmínky, tj. v obecném tvaru řešení (2.13) je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\xi}$.

Fundamentální matici soustavy (2.9) sestavenou ze standardní báze řešení (2.15), nazýváme *standardní fundamentální maticí* (dále jen SFM). Tato matice $\mathbb{U}(t, \tau)$ je jednak funkcí nezávisle proměnné t , ale navíc ještě funkcí počátečního času τ , jelikož i standardní fundamentální systém závisí na τ . Pro každé řešení pak platí:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{x}(\tau) = \mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi}.$$

SFM tedy jednak reprezentuje zobrazení Φ , jelikož $\Phi(\boldsymbol{\xi})[t] = \mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi}$ a dále realizuje přechod od času τ do času t a proto se jí také říká *matice přechodu*.

Vlastnosti fundamentálních matic

Uveďme nyní důležité vlastnosti fundamentálních matic a standardních fundamentálních matic. Jednodušší tvrzení i dokážeme.

Věta 2.2.5. Nechť $\mathbb{V}(t)$ je fundamentální matice homogenní soustavy ODR (2.11) definovaná na intervalu I . Pak platí:

1. $\dot{\mathbb{V}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbb{V}(t)$ pro všechna $t \in I$.
2. Je-li \mathbb{C} regulární reálná konstantní matice typu (n, n) , pak také maticová funkce $\mathbb{W}(t) = \mathbb{V}(t)\mathbb{C}$ je fundamentální matice soustavy (2.11).

Důkaz. První tvrzení plyne ihned z toho, že sloupce matice $\mathbb{V}(t)$ jsou řešení rovnice (2.11). Derivování na levé straně i maticové násobení na pravé straně (2.11) působí na každý sloupec zvlášť.

Druhé tvrzení popisuje přechod k jiné bázi prostoru řešení $\mathcal{U}(I)$. Je třeba dokázat, že sloupce matice \mathbb{W} tvoří také fundamentální systém, tj. sloupce v \mathbb{W} musí být lineárně nezávislé. To ale plyne z toho, že je matice \mathbb{C} regulární. Pro libovolnou lineární kombinaci \mathbf{c} máme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbb{W}(t)\mathbf{c} = \mathbb{V}(t)\mathbb{C}\mathbf{c} = \mathbb{V}(t)\tilde{\mathbf{c}}$$

tedy $\mathbf{y}(t)$ bude rovno nule jen pokud $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ což je právě tehdy, když $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. □

Věta 2.2.6 (Liouvillova věta). Nechť $\mathbb{V}(t)$ je fundamentální matice homogenní soustavy ODR (2.11) definovaná na intervalu I . Pak platí

$$\det \mathbb{V}(t) = (\det \mathbb{V}(\tau)) \exp \left(\int_{\tau}^t \operatorname{tr} \mathbb{A}(s) \, ds \right), \quad \operatorname{tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

pro všechna $t, \tau \in I$.

Důkaz. [Proof in Wikipedia.](#)

TODO: Vlastní důkaz. □

TODO: Použití Liouvillovy věty.

Věta 2.2.7. Nechť $\mathbb{U}(t, \tau)$ je standardní fundamentální matice Cauchyovy úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

pro $t, \tau \in I$. Pak platí:

1. $\mathbb{U}(\tau, \tau)$ je jednotková matice pro všechna $\tau \in I$.

2. $\mathbb{U}(t, \tau)$ je regulární matice (tj. $\det \mathbb{U}(t, \tau) \neq 0$) pro všechna $t, \tau \in I$.
3. $\mathbb{U}(t, \tau)\mathbb{U}(\tau, s) = \mathbb{U}(t, s)$ pro všechna $t, \tau, s \in I$.
4. $[\mathbb{U}(t, \tau)]^{-1} = \mathbb{U}(\tau, t)$ pro všechna $t, \tau \in I$.

Důkaz.

1. Sloupec i matice $\mathbb{U}(\tau, \tau)$ je řešení $\mathbf{x}(\cdot; \tau, \mathbf{e}_i)$ v čase τ , kde splňuje počáteční podmínku:

$$\mathbf{x}(\tau; \tau, \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i.$$

Tento vektor má jedničku pouze na řádku i , tj. matice $\mathbb{U}(\tau, \tau)$ má jedničky pouze na diagonále, jinde má nuly.

2. Plyne z Liouvillový věty.
3. Pro libovolné $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ máme

$$\mathbb{U}(t, s)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}(t; s, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(t; \tau, \mathbf{x}(\tau; s, \boldsymbol{\xi})) = \mathbb{U}(t, \tau)\mathbf{x}(\tau; s, \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{U}(t, \tau)\mathbb{U}(\tau, s)\boldsymbol{\xi}$$

4. Plyne z bodů 1) a 3). **TODO:** Na vhodném místě upozornit na to, že řešení je počáteční podmínkou dáno i pro $t < \tau$.

□

Z předchozích dvou vět vyplývá výpočet SFM \mathbb{U} z libovolné FM $\mathbb{V}(t)$ pomocí vztahu:

$$\mathbb{U}(t, \tau) = \mathbb{V}(t)\mathbb{C}, \quad \mathbb{C} = \mathbb{V}^{-1}(\tau)$$

Výsledná matice bude opět FM a je jednotková v čase τ navíc platí $\mathbb{U}(\tau, \tau) = \mathbb{E}$ z čehož plyne, že její sloupce tvoří standardní fundamentální systém a jedná se tedy o SFM.

2.2.2 Nehomogenní rovnice

Řešení nehomogenních systémů lineárních ODR prvního řádu lze provést podobně jako pro jednoduché lineární ODR, tedy pomocí variace konstant. Připomeňme krátce postup pro jednoduchou rovnici

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(\tau) = \xi. \quad (2.16)$$

Pro rovnici nejprve určíme řešení homogenní rovnice. Dostaneme jednorozměrný vektorový prostor řešení

$$x(t) = x_h(t)\xi.$$

Dále hledáme partikulární nehomogenní rovnice pomocí variace konstant, tj. ve tvaru $x_p(t) = c(t)x_h(t)$

$$\dot{x}_p(t) = \dot{c}(t)x_h(t) = b(t)$$

a tedy

$$x_p(t) = x_h(t) \int_{\tau}^t b(s)x_h^{-1}(s) ds.$$

Mohli bychom místo určitého integrálu použít neurčitý s libovolnou integrační konstantou, ale takto je partikulární řešení na počátku nulové, $x_p(\tau) = 0$. Díky tomu je pak celé řešení rovnice (2.16) součtem homogenního a partikulárního řešení:

$$x(t) = x_h(t)\xi + x_p(t).$$

Stejný postup můžeme aplikovat i na nehomogenní systém lineárních ODR. Celkové řešení má tvar:

$$\mathbf{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_p(t; \tau, \mathbf{0})$$

kde $\mathbb{U}(t, \tau)$ je standardní fundamentální matice pro příslušnou homogenní rovnici a \mathbf{x}_p je partikulární řešení

$$\mathbf{x}_p(t; \tau, \mathbf{0}) = \mathbb{U}(t, \tau) \int_{\tau}^t (\mathbb{U}(s, \tau))^{-1} \mathbf{b}(s) ds = \int_{\tau}^t \mathbb{U}(t, s) \mathbf{b}(s) ds.$$

Pro druhou rovnost stačí dát vše pod integrál a použít vlastnosti standardní fundamentální matice:

$$\mathbb{U}(t, \tau)(\mathbb{U}(s, \tau))^{-1} = \mathbb{U}(t, \tau)\mathbb{U}(\tau, s) = \mathbb{U}(t, s).$$

Tyto přípravné úvahy nám dovolují vyslovit následující větu.

Věta 2.2.8. Nechť maticová funkce \mathbb{A} a vektorová funkce \mathbf{b} jsou spojité na nějakém otevřeném intervalu I a nechť $\tau \in I$ je libovolné. Pak Cauchyova úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

má pro každý bod $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ právě jedno řešení, které je na celém intervalu I dáno předpisem

$$\mathbf{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi} + \int_{\tau}^t \mathbb{U}(t, s)\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in I.$$

Důkaz. Větu je nejjednodušší dokázat přímým výpočtem, pro levou stranu rovnice máme:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbb{A}(t)\mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbb{U}(t, t)\mathbf{b}(t) + \int_{\tau}^t \partial_t \mathbb{U}(t, s)\mathbf{b}(s) \, ds \\ &= \mathbb{A}(t)\mathbb{U}(t, \tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}(t) + \int_{\tau}^t \mathbb{A}(t)\mathbb{U}(t, s)\mathbf{b}(s) \, ds \\ &= \mathbb{A}(t)x(t) + b(t),\end{aligned}$$

kde jsme použili vzorec

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau}^t f(t, s) \, ds = f(t, t) + \int_{\tau}^t \partial_t f(t, s) \, ds.$$

Zbývá ověřit splnění počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(\tau; \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{U}(\tau, \tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\xi}.$$

□

2.3 Soustavy s konstantními koeficienty

TODO: Zmínka o Putzerově a Mocninné metodě a proč detailně děláme postup přes vlastní vektory ...

Dále se zaměříme na případ homogenních lineárních soustav s konstantními koeficienty, tj. soustav, které lze zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}, \tag{2.17}$$

kde \mathbb{A} je konstantní reálná čtvercová matice.

Protože konstantní maticová funkce $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}$ je spojitá pro všechna $t \in \mathbf{R}$, má Cauchyova úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{2.18}$$

pro každý počáteční bod $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ právě jedno řešení $\mathbf{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$ definované pro všechny časy $t \in \mathbf{R}$.

Jelikož matice \mathbb{A} nezávisí na čase, bude řešení vypadat stejně po libovolný počáteční okamžik τ . Pro řešení $\mathbf{x}(\cdot; \tau, \boldsymbol{\xi})$ Cauchyovy úlohy (2.18) a řešení $\mathbf{x}(\cdot; 0, \boldsymbol{\xi})$ Cauchyovy úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \quad (2.19)$$

platí

$$\mathbf{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(t - \tau; 0, \boldsymbol{\xi}),$$

jelikož v obou případech jde o řešení v čase $t - \tau$ od počáteční podmínky. Důsledkem je jednodušší struktura standardních fundamentálních matic:

Tvrzení 2.3.1. Pro standardní fundamentální matici $\mathbb{U}(t, \tau)$ rovnice (2.17) platí

$$\mathbb{U}(t, \tau) = \mathbb{U}(t - \tau, 0), \quad \text{pro všechna } t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Dále si ukážeme jak lze najít SFM pro rovnice s konstantními koeficienty.

Tvrzení 2.3.2. Necht' $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu λ matice \mathbb{A} , tj. platí

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Pak je vektorová funkce

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2.20)$$

řešením soustavy (2.17).

Důkaz. Důkaz provedeme dosazením do rovnice:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \lambda\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbb{A}\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbb{A}\mathbf{v}(t).$$

□

Algebraická odbočka

Vlastní čísla λ_i , $i = 1, \dots, m$ reálné matice \mathbb{A} jsou kořeny charakteristického polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda I)$. Tento polynom s reálnými koeficienty má n obecně komplexních kořenů pokud každý kořen λ_i počítáme v jeho násobnosti r_i , tj. platí $\sum_i r_i = n$. Ke každému komplexnímu kořeni existuje kořen komplexně sdružený.

Pro každou regulární matici \mathbb{A} existuje regulární matice \mathbb{P} taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}^{-1}, \quad (2.21)$$

kde \mathbb{J} je tzv. *Jordanův kanonický tvar*. Jordanův tvar \mathbb{J} má na diagonále vlastní čísla matice \mathbb{A} v jejich příslušné násobnosti, případně může mít na některých místech jedničky v první subdiagonále, jinde má nuly. Pokud má Jordanův tvar nějaké jedničky v první subdiagonále, říkáme, že matice \mathbb{A} je *defektní*.

Pokud je \mathbb{J} diagonální matice, říkáme, že \mathbb{A} je diagonalizovatelná. V tom případě ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje prostor vlastních vektorů dimenze r_i . Ke každému vlastnímu číslu tedy lze najít r_i vektorů, které tvoří bázi příslušného vlastního podprostoru. Celkem tak dostaneme n lineárně nezávislých vlastních vektorů \mathbf{u}_j příslušejících vlastním číslům λ_j , $j = 1, \dots, n$. Tyto vektory tedy splňují rovnice:

$$\mathbb{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j, \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, n.$$

Za matici \mathbb{P} v Jordanově rozkladu (2.21) lze použít libovolnou matici, která má ve sloupcích n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice \mathbb{A} , jelikož

$$(\mathbb{A}\mathbb{P})_{\cdot,j} = \lambda_j\mathbb{P}_{\cdot,j} = (\mathbb{P}\mathbb{J})_{\cdot,j}$$

Pokud některému k -násobnému vlastnímu číslu přísluší méně než k lineárně nezávislých vlastních vektorů, jedná se o defektní matici \mathbb{A} . V tom případě je nalezení fundamentální matice již obtížnější a z praktického hlediska je lépe použít např. Putzerovu metodu (viz. dále).

SFM pro systémy s diagonalizovatelnou maticí

Předpokládejme nyní, že v lineární soustavě ODR (2.17) je matice \mathbb{A} diagonalizovatelná. Pak podle Tvzení (2.3.2) existuje n lineárně nezávislých řešení soustavy (2.17) ve tvaru

$$\mathbf{v}_j(t) = \mathbf{u}_j e^{\lambda_j t}, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Tato řešení dávají sloupce fundamentální matice

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{P}e^{\mathbb{J}t}, \quad (e^{\mathbb{J}t})_{ii} = e^{\lambda_i t}$$

kde matice \mathbb{P} má ve sloupcích libovolných n lineárně nezávislých vlastních vektorů a $e^{\mathbb{J}t}$ je diagonální matice s prvky $(e^{\mathbb{J}t})_{ii} = e^{J_{ii}t} = e^{\lambda_i t}$. Standardní fundamentální matici pak dostaneme vynásobením inverzí matice $\mathbb{V}(\tau)$, tedy

$$\mathbb{U}(t, \tau) = \mathbb{P}e^{\mathbb{J}t}(\mathbb{P}e^{\mathbb{J}\tau})^{-1} = \mathbb{P}e^{\mathbb{J}(t-\tau)}\mathbb{P}^{-1}.$$

Při praktickém výpočtu nejprve určíme vlastní čísla, to lze obecně provést pro soustavy do velikosti 4, nebo pokud má soustava nějaký speciální tvar. Pak pro každé vlastní

číslo λ určíme vlastní podprostor, tedy prostor řešení rovnice $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$. Z vlastních vektorů sestavíme matici \mathbb{P} , vypočteme \mathbb{P}^{-1} a nakonec

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{P}e^{\mathbb{J}t}\mathbb{P}^{-1}.$$

TODO: Příklad.

Oscilující řešení pro komplexní vlastní čísla

Zvláštní zmínku zasluhuje případ, kdy má matice \mathbb{A} komplexní vlastní čísla. Pro reálnou matici \mathbb{A} má charakteristický polynom reálné koeficienty a tudíž ke každému komplexnímu vlastnímu číslu $\lambda_1 = a + ib$ existuje komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2 = a - ib$. Pak jsou ovšem komplexně sdružené i příslušné vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_a + i\mathbf{u}_b$ a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_a - i\mathbf{u}_b$, jelikož:

$$0 = (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\mathbf{v}_1 = \bar{0} = \overline{(\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\mathbf{v}_1} = (\mathbb{A} - \bar{\lambda}_1 \mathbb{I})\overline{\mathbf{v}_1} = (\mathbb{A} - \lambda_2 \mathbb{I})\mathbf{v}_2.$$

Podle předchozí kapitoly pak máme dvojici komplexně sdružených řešení:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) (\mathbf{u}_a + i\mathbf{u}_b), \\ \mathbf{w}_2(t) &= e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = e^{at} (\cos(bt) - i \sin(bt)) (\mathbf{u}_a - i\mathbf{u}_b).\end{aligned}$$

Jejich kombinací dostaneme dvojici reálných řešení:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(t) &= \frac{\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t)}{2} = e^{at} (\cos(bt) \mathbf{u}_a - \sin(bt) \mathbf{u}_b), \\ \mathbf{u}_2(t) &= \frac{\mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_1(t)}{2i} = e^{at} (\sin(bt) \mathbf{u}_a + \cos(bt) \mathbf{u}_b).\end{aligned}$$

Řešení $\mathbf{u}_1(t)$ odpovídá reálné části a řešení \mathbf{u}_2 imaginární části řešení $\mathbf{w}_1(t)$ nebo $\mathbf{w}_2(t)$. Pro určení obou těchto řešení nám stačí jedno z komplexně sdružených vlastních čísel a jeden vlastní vektor, např. λ_1 a \mathbf{v}_1 . Takto můžeme postupovat pro libovolné (i násobné) komplexní vlastní číslo λ_1 a libovolný jemu příslušející vlastní vektor \mathbf{v}_1 .

Příklad 2.3.3. Najděte standardní fundamentální matici pro rovnici:

$$\begin{aligned}y'_1 &= y_2 - 7y_1 \\ y'_2 &= -2y_1 - 5y_2\end{aligned}$$

Matice soustavy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = -6 + i$ a $\lambda_2 = -6 - i$. Dále najdeme vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\lambda_1 = -6 + i:$$

$$0 = \begin{pmatrix} -7 - (-6 + i) & 1 \\ -2 & -5 - (-6 + i) \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 - i:$$

$$0 = \begin{pmatrix} -7 - (-6 - i) & 1 \\ -2 & -5 - (-6 - i) \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 + i & 1 \\ -2 & 1 + i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že vlastní matice $\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E}$ je komplexně sdružená s maticí $\mathbb{A} - \lambda_2 \mathbb{E}$, což je pravda obecně, jelikož \mathbb{A} je reálná a vlastní čísla jsou komplexně sdružená. Podobně vlastní vektory jsou komplexně sdružené. Což opět platí obecně, jelikož komplexní sdružení součinu je součin komplexních sdružení, tedy $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. A proto i pro součin s maticí platí

$$0 = (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E}) \mathbf{v}_1 = \overline{0} = \overline{(\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E}) \mathbf{v}_1} = (\mathbb{A} - \overline{\lambda_1} \mathbb{E}) \overline{\mathbf{v}_1} = (\mathbb{A} - \lambda_2 \mathbb{E}) \mathbf{v}_2.$$

Postupujeme-li stejně jako v reálném případě, víme, že $u_1 = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ a $u_2 = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ jsou řešením a tvoří bázi vektorového prostoru řešení ovšem nad tělesem komplexních čísel. Navíc víme, že jsou to komplexně sdružené vektorové funkce. Pro libovolné komplexní číslo c lze napsat jeho reálnou a imaginární část takto

$$\operatorname{Re} c = \frac{c + \bar{c}}{2}, \quad \operatorname{Im} c = \frac{c - \bar{c}}{2i}.$$

Tedy jako *lineární kombinaci* čísel c a \bar{c} . Jelikož je u_1 komplexně sdružená funkce s u_2 , jsou funkce $y_1 = \operatorname{Re} u_1 = \operatorname{Re} u_2$ a $y_2 = \operatorname{Im} u_1 = -\operatorname{Im} u_2$ také dvojicí nezávislých řešení a nyní už dvojicí reálnou.

Za bázi prostoru reálných řešení rovnice, vezmeme reálnou a imaginární část komplexního řešení:

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = e^{-6t} (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-6t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t + i(\sin t - \cos t) \\ 2 \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

tedy fundamentální matice je

$$\mathbb{V}(t) = e^{-6t} \cos t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + e^{-6t} \sin t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pro nalezení SFM spočteme inverzi

$$\mathbb{V}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A vypočteme:

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{V}(t) \mathbb{V}^{-1}(0) = e^{-6t} \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-6t} \sin t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Putzerova metoda

Věta 2.3.4. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla matice \mathbb{A} zapsaná v libovolném pořadí, přičemž každé vlastní číslo je v posloupnosti zapsáno tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Sestavme posloupnost n matic

$\mathbb{P}_0 = \mathbb{E}$, kde \mathbb{E} je jednotková matice,

$\mathbb{P}_1 = (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E})\mathbb{P}_0 = \mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E}$,

\dots

$\mathbb{P}_j = (\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{E})\mathbb{P}_{j-1} = (\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{E})(\mathbb{A} - \lambda_{j-1} \mathbb{E}) \cdots (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E})$,

\dots

$\mathbb{P}_{n-1} = (\mathbb{A} - \lambda_{n-1} \mathbb{E})\mathbb{P}_{n-2} = (\mathbb{A} - \lambda_{n-1} \mathbb{E})(\mathbb{A} - \lambda_{n-2} \mathbb{E}) \cdots (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{E})$,

a posloupnost n funkcí $q_j(t)$, které jsou řešeními n Cauchyových úloh

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda_1 q_1, & q_1(0) &= 1, \\ \dot{q}_2 &= \lambda_2 q_2 + q_1, & q_2(0) &= 0, \\ \dots & & & \\ \dot{q}_j &= \lambda_j q_j + q_{j-1}, & q_j(0) &= 0, \\ \dots & & & \\ \dot{q}_n &= \lambda_n q_n + q_{n-1}, & q_n(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Potom matice

$$\mathbb{U}(t) = q_1(t)\mathbb{P}_0 + q_2(t)\mathbb{P}_1 + \cdots + q_n(t)\mathbb{P}_{n-1}, \quad t \in R \tag{2.23}$$

je standardní fundamentální maticí Cauchyovy úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}. \tag{2.24}$$

2.3.2 Metoda rozvoje v mocninnou řadu

Věta 2.3.5. Standardní fundamentální matici $\mathbb{U}(t)$ soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}$ lze psát ve tvaru

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{E} + \mathbb{A}t + \frac{(\mathbb{A}t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathbb{A}t)^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^k}{k!}, \quad t \in R \tag{2.25}$$

Důkaz: Pro takto definovanou matici \mathbb{U} zřejmě platí $\mathbb{U}(0) = \mathbb{E}$. Pro její derivaci platí

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{U}}(t) &= \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 t + \frac{\mathbb{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = \\ &= \mathbb{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^k}{k!} = \mathbb{A}\mathbb{U}(t), \quad t \in R\end{aligned}$$

$\mathbb{U}(t)$ je tedy standardní fundamentální matice uvedené soustavy.

Q.E.D.

Z tvrzení minulé věty je patrné, proč se pro standardní fundamentální matici používá také symbol $e^{\mathbb{A}t}$.

Věta 2.3.6. Matice \mathbb{A} vyhovuje své charakteristické rovnici, tedy

$$\mathbb{A}^n + c_1 \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \mathbb{A} + c_n \mathbb{E} = 0, \quad (2.26)$$

kde

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n) = 0 \quad (2.27)$$

je charakteristická rovnice matice \mathbb{A} .

Z minulé věty vyplývá, že matice \mathbb{A}^n je lineární kombinací matic $\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{n-1}$. To znamená, že existují funkce $b_0(t), b_1(t), \dots, b_{n-1}(t)$ takové, že platí

$$e^{\mathbb{A}t} = \mathbb{U}(t) = b_0(t) \mathbb{E} + b_1(t) \mathbb{A} + \cdots + b_{n-1}(t) \mathbb{A}^{n-1}, \quad t \in R. \quad (2.28)$$

Uvědomme si, že také každé vlastní číslo λ_i matice \mathbb{A} splňuje její charakteristickou rovnici, a tedy platí

$$\lambda_i^n + c_1 \lambda_i^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda_i + c_n = 0, \quad (2.29)$$

a tedy λ_i^n zkombinujeme z hodnot $1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}$, stejnými koeficienty, jako jsme získali \mathbb{A}^n kombinací matic $\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{n-1}$. Proto bude také platit

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^k}{k!} = b_0(t) + b_1(t) \lambda_i + \cdots + b_{n-1}(t) \lambda_i^{n-1}, \quad t \in R, \quad (2.30)$$

kde b_0, b_1, \dots, b_n jsou totožné s funkcemi b_0, b_1, \dots, b_n ze vztahu (2.28).

Má-li tedy matice \mathbb{A} n navzájem různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, pak funkce b_0, b_1, \dots, b_n můžeme hledat jako řešení soustavy n lineárně nezávislých algebraických rovnic

$$\begin{aligned}b_0(t) + b_1(t) \lambda_1 + \cdots + b_{n-1}(t) \lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t}, \\ b_0(t) + b_1(t) \lambda_2 + \cdots + b_{n-1}(t) \lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t}, \\ &\vdots \\ b_0(t) + b_1(t) \lambda_n + \cdots + b_{n-1}(t) \lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t}.\end{aligned} \quad (2.31)$$

Má-li tedy matice \mathbb{A} některé vlastní číslo λ_i vícenásobné, dosazujeme pro něj do předchozí soustavy kromě vztahu (2.30) také jeho derivace podle proměnné λ_i (tolik, aby rovnic příslušejících λ_i bylo tolik, kolik je jeho násobnost - označme ji k). k rovnic pro λ_i pak bude mít tvar

$$\begin{aligned} b_0(t) + b_1(t)\lambda_i + \cdots + b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} &= e^{\lambda_i t}, \\ b_1(t) + \cdots + (n-1)b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2} &= te^{\lambda_i t}, \\ \vdots & \\ (k-1)!b_{k-1}(t)\lambda_i + \cdots + (n-k)\cdots(n-1)b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-k-1} &= t^{k-1}e^{\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sestavíme-li soustavu rovnic takto pro každé vlastní číslo, dostaneme systém n lineárně nezávislých algebraických rovnic pro n neznámých funkcí b_0, b_1, \dots, b_n . Po jejím vyřešení a dosazení do rovnice (2.28) dostaneme hledanou standardní fundamentální matici.

2.4 Stabilita rovnovážných bodů

Kapitola 3

Numerické metody pro ODR

Jak jsme již poznamenali, analytické řešení soustavy ODR, lze najít jen pro speciální případy funkce \mathbf{f} . Obecný postup máme k dispozici pouze pro lineární soustavy s konstantními koeficienty a i zde jsme omezeni na malé systémy, pro které jsme schopni nalézt vlastní čísla. Numerické metody umožňují řešit obecné soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, ale vždy pouze přibližně, přičemž chyba se obvykle zvyšuje s časem. Některé přírodní procesy jsou popsány rovnicemi, kde malá změna počáteční podmínky vede po jistém čase ke kvalitativně odlišným řešením. Příkladem může být kulička na britu. Do stejné kategorie patří například rovnice pro popis počasí. Důsledkem je praktická nemožnost dlouhodobých předpovědí.

Podle Důsledku 2.1.10, lze každou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic libovolného řádu převést na soustavu rovnic prvního řádu. Dále se proto můžeme omezit na zkoumání numerických metod pro rovnice prvního řádu, konkrétně na počáteční úlohu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}. \quad (3.1)$$

Omezíme se na počáteční čas $\tau = 0$ a řešení pouze pro kladné časy $t > 0$ (obvykle nás zajímá nějaká forma predikce).

Dále, abychom měli zajištěnu existenci jednoznačného řešení úlohy (3.1), budeme pro jednoduchost požadovat následující vlastnosti funkce pravé strany \mathbf{f} :

1. vektorová funkce \mathbf{f} je spojitá funkce na pásu $(t, \mathbf{x}) \in \langle a, b \rangle \times \mathbf{R}^n$
2. \mathbf{f} je na tomto pásu lipschitzovská vzhledem \mathbf{x} s konstantou L nezávislou na t , tj.

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \text{pro všechna } t \in \langle a, b \rangle, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$$

Hodnoty řešení a funkce pravé strany jsou z prostoru \mathbf{R}^n , na kterém budeme uvažovat libovolnou danou normu $\|\cdot\|$, např. eukleidovskou.

Než přistoupíme ke studiu konkrétních metod poznamenejme, že přibližné řešení úlohy (3.1) lze hledat několika principiálně odlišnými postupy. Zde zmiňme především v teorii diferenciálních rovnic užitečnou, avšak pro numerické řešení neefektivní, *metodu postupných aproximací* založenou na integrální variantě rovnic (3.1)

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(s, x(s)) \, ds$$

a konstrukci postupných aproximací funkce $x(t)$ podle vztahu

$$x_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s, x_n(s)) \, ds.$$

Na tomto přístupu je založen důkaz Picardovy věty o existenci a jednoznačnosti.

My se budeme zabývat jiným typem metod, tzv. *diskrétními metodami*, založenými na hledání přibližných hodnot funkce $x(t)$ pouze v konečném počtu bodů t_i z intervalu $[0, T]$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme uvažovat ekvidistantní volbu bodů t_i , tj.

$$t_i = a + ih, \quad i \in I_N = \{0, 1, \dots, N\},$$

kde $N = T/h$. Konstantu h nazýváme *integrační krok* metody.

3.1 Eulerovy metody a základní pojmy

TODO: Zjednodušit, zdůraznit podstatné, porovnání explicitní a implicitní metody.

3.1.1 Explicitní Eulerova metoda

Jako úvodní příklad si představíme nejednodušší numerickou metodu pro řešení ODR prvního řádu a to explicitní Eulerovu metodu. Na ní si také demonstrujeme základní pojmy konzistence, konvergence a stability numerické metody. Uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \text{pro } t > 0, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Z předepsané počáteční podmínky můžeme spočítat „polohu“ a „rychlost“ v počátečním čase, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}'(0) = \mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0)$. Pro krátký čas $t = h$ můžeme použít Taylorův rozvoj pro výpočet řešení:

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{y}(0) + h\mathbf{y}'(0) + O(h^2) = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0) + O(h^2).$$

Eulervu metodu dostaneme pokud v předchozím vzorci zanedbáme člen $O(h^2)$. Tím dostaneme přibližnou hodnotu řešení $\mathbf{y}(h) \approx \mathbf{y}_1$ v čase $t_1 = h$. V dalším kroku metody provedeme stejný postup pro počáteční úlohu:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \text{for } t > h, \\ \mathbf{y}(h) &= \mathbf{y}_1.\end{aligned}$$

a dostaneme hodnotu přibližného řešení v čase $t_2 = 2h$:

$$\mathbf{y}(2h) \approx \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + h\mathbf{f}(h, \mathbf{y}_1).$$

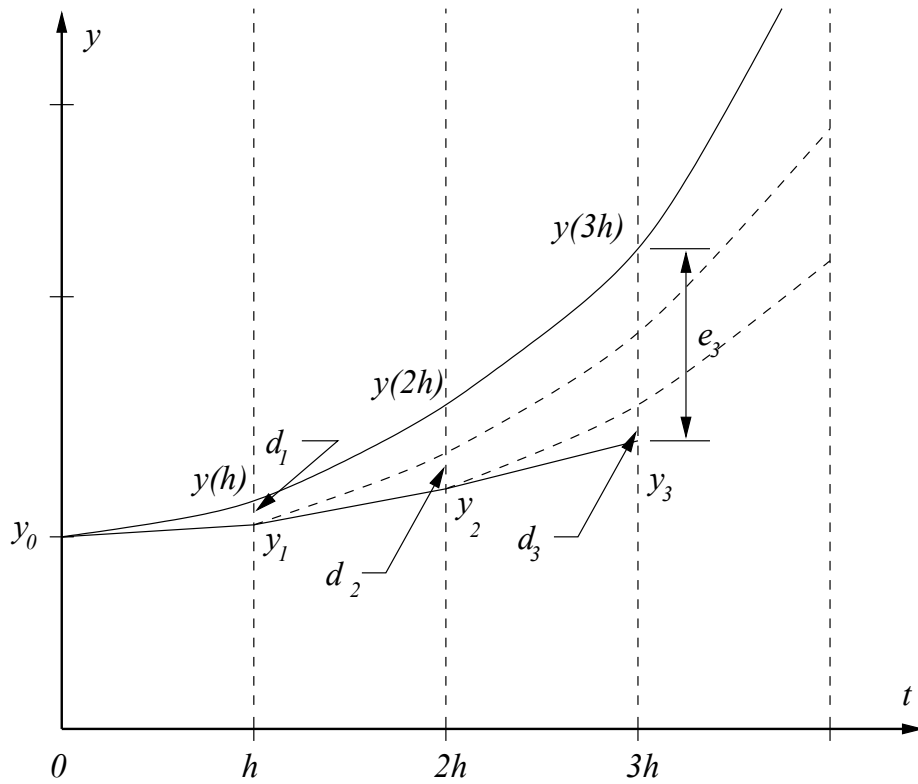
Pro hodnotu přibližného řešení v čase $t_{i+1} = (i+1)h$ pak dostáváme rekurentní formuli

$$\mathbf{y}(t_{i+1}) \approx \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i), \quad t_i = ih, \quad n > 0. \quad (3.2)$$

Takto dostaneme postupně hodnoty přibližného řešení y_i v časech t_i , pro $i = 1, 2, \dots$. V každém kroku tedy zkonstruujeme tečnu k přesnému řešení začínajícímu v bodě (t_i, \mathbf{y}_i) a až do času t_{i+1} aproximujeme řešení touto tečnou, viz. Obr 3.1. Takto můžeme chápat přibližné řešení jako po částech lineární funkci:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{\mathbf{y}_{i+1}(t - t_i) + \mathbf{y}_i(t_{i+1} - t)}{h}, \quad \text{na } [t_i, t_{i+1}].$$

3.1.2 Chyby numerických metod



Obrázek 3.1: Přesné řešení (nahore) a přibližné řešení (dole) vypočtené explicitní Eulerovou metodou. Lokální chyby d_i a globální chyba e_3 .

Na Obrázku 3.1 vidíme nahore přesné řešení (skalární lineární rovnice $y' = 2y$) pro počáteční podmínku (t_0, y_0) zobrazené plnou čarou. Lomená plná čára vespod zobrazuje přibližné řešení pro stejnou počáteční podmínku.

Definice 3.1.1. Globální chyba e_i v čase t_i je rozdíl mezi přesným a přibližným řešením po i krocích metody:

$$e_i = y(t_i) - y_i.$$

přičemž obě řešení splňují stejnou počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$.

V obecnějším smyslu můžeme globální chybu chápat jako funkci $e(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$.

Globální chyba tedy zahrnuje odchylky ze všech časových kroků. Naproti tomu lokální chyba d_i je rozdíl přesného a přibližného řešení po jednom kroku. Pro první krok splývá s globální chybou $d_1 = e_1 = y(t_1; t_0, y_0) - y_1$ pro obecný krok i musíme uvažovat přesné

řešení $\mathbf{y}(t; t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})$, které startuje z hodnoty přibližného řešení \mathbf{y}_{i-1} v předchozím čase t_{i-1} , na Obrázku 3.1 jsou tato řešení vyznačena čárkovaně.

Definice 3.1.2. Lokální chyba \mathbf{d}_i v čase t_i je rozdíl mezi přesným a přibližným řešením po jednom kroku metody,

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) - \mathbf{y}_i,$$

kde přesné řešení splňuje počáteční podmínku $\mathbf{y}(t_{i-1}) = \mathbf{y}_{i-1}$.

Lokální chyba je úzce spjata s *lokální diskretizační chybou*. K její definici si nejprve zavedeme diferenční operátor Eulerovy metody:

$$\mathcal{L}_h \mathbf{y}(t_i) = \frac{\mathbf{y}(t_i) - \mathbf{y}(t_{i-1})}{h} - \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}(t_{i-1})), \quad \text{pro } i > 0.$$

Definice 3.1.3. Lokální diskretizační chyba $\boldsymbol{\tau}_i$ v čase t_i je přesnost s jakou přesné řešení $\mathbf{y}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})$ splňuje diferenční rovnici metody:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathcal{L}_h \mathbf{y}(t_i)$$

V případě explicitní Eulerovy metody máme

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) - \mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i) - \left\{ \mathbf{y}_{i-1} + h \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \right\} = h \mathcal{L}_h \mathbf{y}(t_i)$$

a tedy $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{d}_i/h$. Pro jiné metody může být vztah lokální chyby a lokální diskretizační chyby složitější.

Definice 3.1.4. Říkáme, že metoda je konzistentní, pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i \in I_N} \|\boldsymbol{\tau}_i\| = 0.$$

Metoda je konzistentní řádu p , pokud pro všechna $i = 1, \dots, N$ platí $\|\boldsymbol{\tau}_i\| = O(h^p)$, tj.

$$\|\boldsymbol{\tau}_i\| \leq Ch^p$$

pro nějakou konstantu C a všechna dostatečně malá h .

Definice 3.1.5. Říkáme, že metoda je konvergentní řádu p , pokud při výpočtu numerického řešení na pevném intervalu $t \in [0, T]$ konverguje globální chyba s klesajícím h k nule:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i \in I_N} \|\mathbf{e}_i\| = 0,$$

Pokud $\max_{i < N} \|\mathbf{e}_i\| = O(h^p)$, říkáme, že metoda konverguje s řádem p .

i	t_i	y_i	d_i	e_i
0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1	0.0010	0.9000	0.0048	0.0048
2	0.0020	0.8100	0.0044	0.0087
3	0.0030	0.7290	0.0039	0.0118
4	0.0040	0.6561	0.0035	0.0142
5	0.0050	0.5905	0.0032	0.0160
6	0.0060	0.5314	0.0029	0.0174
7	0.0070	0.4783	0.0026	0.0183
8	0.0080	0.4305	0.0023	0.0189
9	0.0090	0.3874	0.0021	0.0191
10	0.0100	0.3487	0.0019	0.0192

Tabulka 3.1: Řešení a chyby při použití Eulerovy metody, $\lambda = -100$, $h = 0.001$.

h	$i = T/h$	y_i	e_i
1.00e-3	1.00e+2	2.66e-5	1.88e-5
1.00e-4	1.00e+3	4.32e-5	2.23e-6
1.00e-5	1.00e+4	4.52e-5	2.27e-7
1.00e-6	1.00e+5	4.54e-5	2.27e-8

Tabulka 3.2: Závislost chyby řešení na časovém kroku, $T = 0.1$, $\lambda = -100$.

Příklad 3.1.6. Uvažujme počáteční úlohu:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1.$$

Její přesné řešení je $y(t) = e^{\lambda t}$. Předpis pro y_n podle Eulerovy metody (3.2) je

$$y_i = (1 + h\lambda)y_{i-1}, \quad i > 0, \quad y_0 = 1.$$

Volbou $\lambda = -100$ a $h = 0.001$ dostaneme

$$y_i = 0.9y_{i-1}, \quad i > 0, \quad y_0 = 1$$

V tabulce 3.1.2 je prvních deset kroků Eulerovy metody. Vidíme, že lokální chyba d_i neroste, dokonce naopak klesá, zato globální chyba e_i stále roste. Tabulka 3.1.2 ukazuje závislost globální chyby na velikosti časového kroku h . Vidíme, že e_i klesá lineárně v závislosti na h , jde tedy o konvergentní metodu prvního řádu.

Zkusme toto pozorování dokázat obecně pro explicitní Eulerovu metodu. Podle definice lokální chyby máme:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}(t_i; t_{i-1}, y_{i-1}) - \mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i) - \mathbf{y}_{i-1} - h\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \quad (3.3)$$

Pro přesné řešení použijeme Taylorův rozvoj:

$$\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}(t_{i-1}) + h\mathbf{y}'(t_{i-1}) + \frac{h^2}{2}\mathbf{y}''(\xi_i), \quad \text{pro nějaké } \xi_i \in (t_{i-1}, t_i).$$

Nyní dosadíme do (3.3) a dále použijeme rovnici pro $y'(t_{i-1})$, jelikož pro lokální chyby předpokládáme $y(t_{i-1}) = y_{i-1}$, dostaneme:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}(t_{i-1}) + h\mathbf{y}'(t_{i-1}) + \frac{h^2}{2}\mathbf{y}''(\xi_i) - \mathbf{y}(t_{i-1}) - h\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) = \frac{h^2}{2}\mathbf{y}''(\xi_i).$$

Odtud také určíme lokální diskretizační chybu: $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{d}_i/h = \frac{h}{2}\mathbf{y}''(\xi_i)$ a proto je explicitní Eulerova metoda konzistentní řádu 1.

TODO: global error and convergency

Věta 3.1.7. Nechť \mathbf{y} je řešení počáteční úlohy s pravou stranou \mathbf{f} splňující předpoklady Picardovy věty 2.1.15 s Lipschitzovskou konstantou L . Dále nechť má řešení \mathbf{y} na intervalu $[0, T]$ dvě spojité derivace. Pak pro přibližné řešení \mathbf{y}_i vypočtené explicitní Eulerovou metodou platí

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}(t_i)\| \leq hM(t_i)E_L(t_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.4)$$

kde

$$M(t_i) = \frac{1}{2} \max_{s \in [0, t_i]} \|\ddot{\mathbf{y}}(s)\|, \quad E_L(t) = \begin{cases} \frac{e^{Lt}-1}{L} & \text{pro } L > 0 \\ t & \text{pro } L = 0 \end{cases},$$

Vzorec (3.4) vyjadřuje *apriorní odhad* chyby Eulerovy metody, pokud známe funkci $M(t)$. Bez znalosti řešení tuto funkci ovšem neznáme. Dostáváme ale z Věty 3.1.7 informaci, že rychlost konvergence Eulerovy metody je h .

3.1.3 Zaokrouhlovací chyba

Doposud jsme analyzovali pouze chyby způsobené diskretizací diferenciální rovnice. Pro Eulerovu metodu dostáváme lineární pokles globální chyby z závislosti na kroku h metody. Při praktickém řešení na počítači však nepočítáme v přesné aritmetice a na řešení se projevuje též zaokrouhlovací chyba.

Definice 3.1.8. Nechť \mathbf{y}_i je numerické řešení počáteční úlohy v přesné aritmetice a $\tilde{\mathbf{y}}_i$ řešení stejné úlohy v aritmetice s konečnou přesností. Pak veličinu

$$\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{y}}_i$$

nazýváme *celkovou zaokrouhlovací chybou*.

Pro velikost celkové zaokrouhlovací chyby lze dokázat následující větu:

Věta 3.1.9. Nechť je pravá strana \mathbf{f} Lipschitzovská s konstantou L a nechť je lokální zaokrouhlovací chyba ε_i při výpočtu jednoho kroku metody omezená konstantou ε . Pak platí

$$\|\boldsymbol{\eta}_i\| \leq \frac{\varepsilon}{h} E_L(t_i), i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Tedy chyba roste přímo úměrně počtu vypočtených kroků a nepřímo úměrně s h . Tato zaokrouhlovací chyba se sčítá s globální diskretizační chybou a pro jejich normu dostáváme graf na obrázku 3.2. S klesajícím krokem h , nejprve celková chyba klesá jako globální diskretizační chyba až do okamžiku, kdy se globální diskretizační chyba vyrovná s celkovou zaokrouhlovací chybou která naopak roste. Tomuto minimu celkové chyby se říká *mezní přesnost metody*. Pro menší h pak dominuje zaokrouhlovací chyba a celková chyba už jen roste.

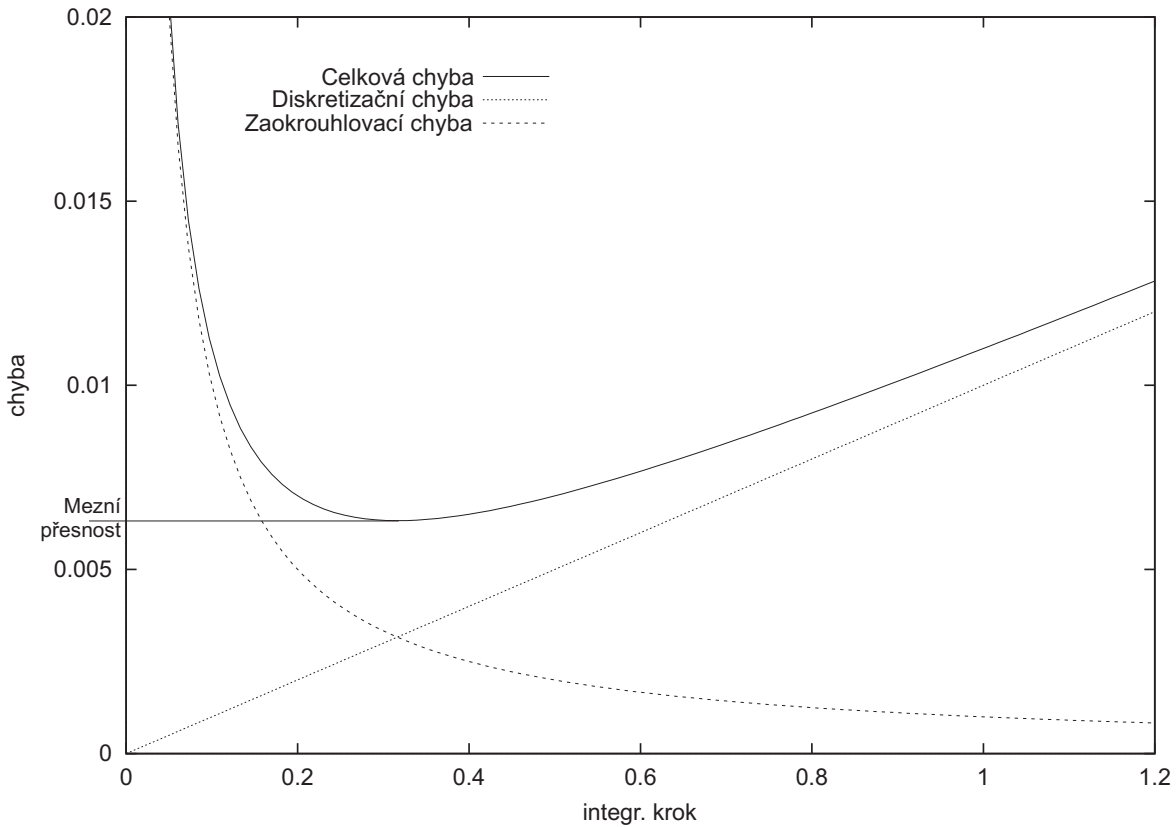
3.1.4 Stabilita a absolutní stabilita

Příklad 3.1.10. Uvažujme numerické řešení Příkladu 3.1.6 s volbou $\lambda = -100$ a $h = 0.05$. V tomto případě dostáváme předpis

$$y_i = (1 + h\lambda)y_{i-1} = -4y_{i-1}$$

a numerické řešení prezentované v Tabulce 3.3 vykazuje oscilace a exponenciální nárůst.

Jev demonstrováný v posledním příkladu nazýváme „numerická nestabilita“ metody.



Obrázek 3.2: Vztah diskretizační, zaokrouhlovací a celkové chyby.

Definice 3.1.11. Jednokroková numerická metoda je *stabilní* pokud existují kladné konstanty \hat{h} , k takové, že pro numerické řešení \mathbf{y}_i úlohy s počáteční podmínkou \mathbf{y}_0 a numerické řešení \mathbf{z}_i úlohy s počáteční podmínkou $\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\delta}_0$ platí

$$\max_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{z}_i\| \leq k\delta, \quad \text{pro všechna } h \in (0, \hat{h}).$$

kdykoliv $\|\boldsymbol{\delta}_0\| \leq \delta$.

Pro Eulerovu metodu můžeme odhadnout rozdíl řešení následovně

$$\|\boldsymbol{\delta}_i\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{z}_i\| \leq \|\boldsymbol{\delta}_{i-1}\| + h\|f(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) - f(t_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})\|.$$

a díky lipschicovské podmínce:

$$\|\boldsymbol{\delta}_i\| \leq (1 + iL)\|\boldsymbol{\delta}_{i-1}\|.$$

Iterováním dostaneme:

$$\|\boldsymbol{\delta}_i\| \leq (1 + hL)^n \|\boldsymbol{\delta}_0\| \leq e^{hLi} \|\boldsymbol{\delta}_0\| \leq e^{LT} \|\boldsymbol{\delta}_0\| \leq k\delta$$

i	t_i	y_n
0	0.00	1
1	0.05	-4
2	0.10	16
3	0.15	-64
4	0.20	256
5	0.25	-1024

Tabulka 3.3: Řešení rovnice $y' = -100y$ s explicitní Eulerovou metodou s krokem $h = 0.05$. Přesné řešení rychle konverguje k nule, numerické vykazuje exponenciálně rostoucí oscilace.

kde $k = e^{LT}$ a $\|\delta_0\| \leq \delta$.

Eulerova metoda je tedy stabilní. Proč tedy nefunguje v posledním příkladu? Definice stability je problematická ze dvou důvodů:

1. Popisuje odchylku dvou řešení pouze pro malé časové kroky $h \leq \hat{h}$.
2. Dovoluje libovolný (i exponenciální) růst odchylky řešení.

Definice 3.1.12. Metoda se nazývá *absolutně stabilní* pro časový krok h a danou ODR, pokud změna počáteční podmínky y_0 o δ vyvolá změnu numerického řešení v dalších časech opět nejvýše o δ .

Absolutní stabilita se vyšetřuje na obecné skalární lineární rovnici:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad (3.6)$$

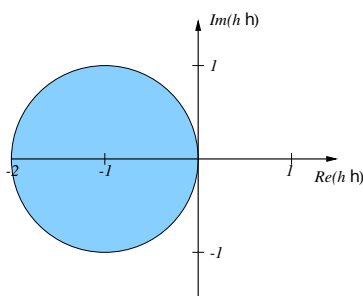
kde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definice 3.1.13. Monžinu kroků h a komplexních hodnot λ , pro které je metoda absolutně stabilní pro rovnici (3.6) nazýváme *regionem absolutní stability* dané metody.

Pro Eulerovu metodu máme

$$\delta_i = y_i - z_i = (1 + h\lambda)^i |\delta_0|.$$

Má-li být tato difference omezená pro libovolné $ih \leq T$, musí být $|1 + h\lambda| \leq 1$. Součin $h\lambda$ je komplexní číslo, které musí být v jednotkovém kruhu se středem v $-1 + 0i$, viz. Obrázek 3.3. V posledním příkladu jsme měli $h\lambda = -4$, tedy mimo region absolutní stability.



Obrázek 3.3: Oblast absolutní stability pro explicitní Eulerovu metodu.

3.1.5 Implicitní Eulerova metoda

V předchozí části jsme viděli, že pro některé typy rovnic (s velkými vlastními čísly) vyžaduje explicitní Eulerova metoda velmi krátké časové kroky, což ovšem může vést na velkou zaokrouhlovací chybu. Uvažujme počáteční úlohu:

$$y' = -\alpha(y - t^2) + 2t, \quad t > 0, y(0) = y_0 \quad (3.7)$$

s přesným řešením

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + t^2.$$

Nyní uvažujme velmi velké α , např. $\alpha = 100$. Pro t blízko 0 převažuje na pravé straně první člen a řešení velmi rychle klesá k nule jako $e^{-\alpha t}$, jak se řešení přiblíží k t^2 , převáží druhý člen a řešení roste jako t^2 . Použití explicitní Eulerovy metody pro tuto úlohu vyžaduje časový krok $h \leq 2/\alpha$. Navíc tato podmínka musí být splněna i na časovém intervalu, kde se řešení mění pomalu. Pro srovnání uvažujme počáteční úlohu:

$$x' = 2t, \quad t > 0, x(0) = x_0 \quad (3.8)$$

Pro $y_0 = 1$ je řešení rovnice (3.7) $y(t) = e^{-100t} + t^2$ a $y(0.5) = 0.25$. Pro $x_0 = 0$ je řešení (3.8) $x(t) = t^2$ a $x(0.5) = 0.25$. Tabulka 3.4 obsahuje tři kroky explicitní Eulerovy metody s krokem 0.1 pro obě rovnice startující z času $t_0 = 0.5$. Je vidět, že pro rovnici (3.7) dojde (kvůli porušení podmínky stability) k oscilacím i když startujeme prakticky z přesného řešení.

Definice 3.1.14. Úloha se nazývá *tuhá* na intervalu I pokud časový krok vyžadovaný pro absolutní stabilitu je menší než časový krok vyžadovaný pro splnění požadované přesnosti.

Soustavy ODE jsou tuhé pokud jejich Jakobián (matice prvních derivací) má řádově odlišná vlastní čísla. Například rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -101 \end{pmatrix}$$

n	t_n	$y(t_n)$	ey_n	$x(t_n)$	ex_n
0	0.5	0.25	0	0.25	0
1	0.6	0.36	-0.01	0.36	-0.01
2	0.7	0.49	0.08	0.49	-0.02
3	0.8	0.64	-0.73	0.64	-0.03

Tabulka 3.4: Porovnání chyb explicitní Eulerovy metody pro tuhou ($y(t)$) a netuhou rovnici $x(t)$. Pro tuhou rovnici není splněna podmínka stability a dojde k oscilacím.

má jakobián $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{A}$ a jeho vlastní čísla jsou -1 a -100 . Příslušná počáteční úloha je tuhá.

Pro efektivní řešení tuhých úloh potřebujeme metodu, jejíž podmínky stability neomezuji časový krok. Jak uvidíme později tuto podmínku nesplňuje žádná explicitní metoda a je třeba použít metodu implicitní. Uvažujme opět obecnou počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \text{for } t > 0, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Na rozdíl od explicitní metody použijeme nyní Taylorův rozvoj v čase t_n vyhodnocený v čase $t_{n-1} = t_n - h$:

$$\mathbf{y}(t_n - h) = \mathbf{y}(t_n) - h\mathbf{y}'(t_n) + O(h^2) = \mathbf{y}_n - h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + O(h^2).$$

Odtud dostaneme předpis implicitní Eulerovy metody:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n).$$

Metoda se nazývá *implicitní* protože k získání řešení y_n v čase t_n z řešení y_{n-1} v předchozím časovém kroku je třeba řešit obecně nelineární algebraickou rovnici, respektive soustavu takových rovnic.

Jaká je podmínka lineární stability implicitní Eulerovy metody? Pro rovnici testovací rovnici (3.6) máme:

$$y_n = y_{n-1} + h\lambda y_n,$$

kde algebraická rovnice pro přechod k dalšímu časovému kroku má analytické řešení:

$$y_n = y_{n-1} \frac{1}{1 - h\lambda}.$$

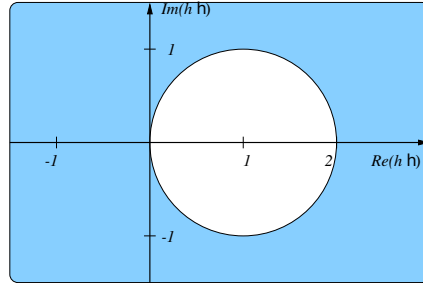
Podmínka stability je tedy

$$\frac{1}{|1 - h\lambda|} \leq 1,$$

nebo-li

$$|1 - h\lambda| \geq 1.$$

Tedy, oblast absolutní stability pro implicitní Eulerovu metodu je množina mimo jednotkový kruh se středem $1 + 0i$ v komplexní rovině. Je tedy stabilní s libovolným časovým krokem pro stabilní rovnice jako $\dot{x} = -x$ a navíc pro velké časové kroky je stabilní i pro nestabilní rovnice jako $\dot{x} = x$.



Obrázek 3.4: Oblast absolutní stability pro explicitní Eulerovu metodu.

3.1.6 Systémy nelineárních algebraických rovnic

Implicitní metody tedy v principu umožňují použití libovolného časového kroku pro stabilní rovnice, nicméně potřebujeme v každém kroku řešit (systém) nelineárních rovnic. Nejjednodušším přístupem je metoda prostých iterací:

```

 $\mathbf{y}_n^0 := \mathbf{y}_{n-1};$ 
 $\nu := 0;$ 
 $e := \infty;$ 
while  $e \geq \epsilon$  do
   $\mathbf{y}_n^{\nu+1} := \mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n^\nu);$ 
   $e := \|\mathbf{y}_n^{\nu+1} - \mathbf{y}_n^\nu\|;$ 
   $\nu := \nu + 1$ 

```

Ukážeme, že metoda konverguje pokud $|hL| \leq 1$, kde L je Lipschitzovská konstanta funkce \mathbf{f} vzhledem k \mathbf{y} . Zobrazení F realizující jednu iteraci:

$$\mathbf{y}_n^{\nu+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_n^\nu) = \mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n^\nu)$$

se nazývá kontraktivní, pokud

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

pro nějaké $\alpha < 1$. Podle Banachovy věty o pevném bodě bude metoda prostých iterací konvergovat pokud F bude kontraktivní zobrazení. V našem případě:

$$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}) - \mathbf{y}_{n-1} - h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y})\| \leq h\|\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y})\| \leq hL\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

tedy zobrazení je kontraktivní pokud $\alpha = hL < 1$. Dostali jsme tady výsledek, že implicitní Eulerova metoda používající metodu prostých iterací jako nelineární řešič, má stejné omezující podmínky na časový krok jako explicitní Eulerova metoda. Je tedy třeba použít lepší metodu pro řešení nelineárních rovnic.

Jednou z možností je použití Newtonovy metody. Uvažujme skalární nelineární rovnici $F(x) = 0$, kde $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce se spojitou první derivací. Počáteční přiblížení označíme $x^0 \in \mathbf{R}$. Další iterace metody se spočítají podle vzorce:

$$x^{\nu+1} = x^\nu - \frac{F(x^\nu)}{F'(x^\nu)}.$$

Pokud je počáteční přiblížení dostatečně blízko řešení x , pak metoda konverguje.

Pro řešení soustav ODR však potřebujeme řešit soustavu nelineárních rovnic ve tvaru:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1} - h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) = 0$$

Pro systémy rovnic lze Newtonovu metodu upravit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0 &:= \mathbf{y}_{n-1}; \\ \nu &:= 0; \\ \mathbf{F}^0 &:= \mathbf{F}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{Y}^0 - \mathbf{y}_{n-1} - h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{Y}^0); \\ \text{while } |\mathbf{F}^\nu| &\geq \epsilon \text{ do} \\ \quad \mathbb{A}^\nu &:= \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{Y}^\nu) = \mathbb{I} - h\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(t_n, \mathbf{Y}^\nu); \\ \quad \text{řešení soustavy: } \mathbb{A}^\nu \mathbf{d}^\nu &= \mathbf{F}^\nu; \\ \quad \mathbf{Y}^{\nu+1} &:= \mathbf{Y}^\nu - \lambda \mathbf{d}^\nu; \\ \quad \mathbf{F}^{\nu+1} &:= \mathbf{F}(\mathbf{Y}^{\nu+1}) = \mathbf{Y}^{\nu+1} - \mathbf{y}_{n-1} - h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{Y}^{\nu+1}); \\ \quad \nu &:= \nu + 1 \end{aligned}$$

Doplňující poznámky:

- Parametr λ je v základní verzi algoritmu roven 1, pokročilejší verze algoritmu provádějí pro nalezený vektor kroku \mathbf{d}^ν vhodné zkrácení délky kroku, aby byla zajištěna konvergence metody i dále od řešení.
- Soustavu lineárních rovnic lze řešit iteračně s omezenou přesností.

- V rámci numerického řešení systému ODE není výhodné nechat Newtonovu metodu používat velké množství iterací, proto se při překročení vhodného limitu do 10 iterací provede zkrácení časového kroku h . Tím se zlepší jako konvergence Newtonovy metody, tak konvergence případného vnitřního lineárního řešiče.

3.2 Metody vyšších řádů

Jak explicitní tak implicitní Eulerova metoda jsou metody prvního řádu. Z praktického hlediska jsou více náchylné na akumulaci chyby vzniklé v jednotlivých krocích. V této kapitole ukážeme jak odvodit explicitní jednokrokovou metodu druhého řádu a představíme si i další jednokrokové metody vyšších řádů, tak zvané Runge-Kuttovy metody.

3.2.1 Metoda Taylorova rozvoje

Opět řešíme počáteční úlohu:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (3.9)$$

Podobně jako v případě explicitní Eulerovy metody začneme Taylorovým rozvojem:

$$\mathbf{y}(t_n + h) = \mathbf{y}(t_n) + h\dot{\mathbf{y}}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{y}}(t_n) + O(h^3) \quad (3.10)$$

Dále potřebujeme spočítat obě derivace \mathbf{y} z rovnice (3.9). První derivaci získáme přímo z rovnice, druhou derivaci spočteme derivováním obou stran rovnice podle času:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \partial_t \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) + \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\dot{\mathbf{y}}(t) = [\partial_t \mathbf{f} + (\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f})\mathbf{f}](t, \mathbf{y}(t)). \quad (3.11)$$

Zde upozorníme, že $\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}$ je Jacobiho matice $n \times n$ derivací vektorové funkce \mathbf{f} podle vektoru \mathbf{y} , výraz $(\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f})\mathbf{f}$ je tedy násobení této matice vektorovou hodnotou funkce \mathbf{f} . Dále jsme použili notaci pro počítání s funkcemi, například $[f + g](t) = f(t) + g(t)$, tedy všechny funkce na pravé straně jsou vyhodnoceny v bodě $(t, \mathbf{y}(t))$. Nyní dosadíme (3.11) do (3.10) a dostaneme metodu druhého řádu:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \frac{h^2}{2} [\partial_t \mathbf{f} + \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f} \mathbf{f}](t_n, \mathbf{y}_n).$$

Podobně bychom mohli spočítat i vyšší derivace \mathbf{y} , použít delší část Taylorova rozvoje a obdržet metody vyšších řádů. Nicméně takto získaná metoda není použitelná v praxi, protože vyžaduje znalost nejen funkce \mathbf{f} , ale i jejích derivací a to případně i vysokého řádu.

3.2.2 Metoda druhého řádu

Jednou možností by bylo aproximovat derivace \mathbf{f} , ale my se vydáme jinou cestou. Začneme tím, že zintegrujeme počáteční problém (3.9) podle času:

$$\mathbf{y}(0+h) = \mathbf{y}_0 + \int_0^h \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \quad (3.12)$$

Dále si připomeneme, že určité integrály lze aproximovat pomocí numerické kvadratury. Nejjednodušší kvadrturní vzorec je obdélníkové pravidlo (midpoint rule):

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + O(|b-a|^3).$$

pokud funkce f má omezenou druhou derivaci. Aplikací na integrovaný počáteční problém (3.12) dostaneme:

$$y_{n+1} = y_n + h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}, \mathbf{y}\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + O(h^3)$$

za předpokladu, že \mathbf{f} má omezené všechny druhé derivace. Nyní je otázka jak získat $\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{y}(t_n + \frac{h}{2})$. K tomu použijeme jeden krok explicitní Eulerovy metody s krokem $h/2$, dohromady pak dostaneme následující předpis pro výpočet jednoho kroku metody:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_2 \quad (3.15)$$

Tato metoda by měla mít lokální diskretizační chybu $O(h^3)$, globální chybu $O(h^2)$ a byla by to tedy metoda druhého řádu. To nyní dokážeme pro obecnější metodu ve tvaru:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + ch, \mathbf{y}_n + ah\mathbf{k}_1) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h(b_1\mathbf{k}_1 + b_2\mathbf{k}_2), \quad (3.18)$$

kde a, b_1, b_2, c jsou zatím obecné reálné parametry. Toto schéma se nazývá dvou stupňová (two stage) Runge-Kuttova metoda. Pro určení parametrů schématu a zároveň pro důkaz řádu lokální diskretizační chyby dosadíme přesné řešení do schématu, provedeme Taylorův rozvoj a výsledek porovnáme s rozvojem (3.10) pro $\mathbf{y}(t_n + h)$. Taylorův rozvoj funkce \mathbf{f} v bodě (t, \mathbf{y}) má tvar:

$$\mathbf{f}(t+\tau, \mathbf{y}+\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \tau\partial_t\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\boldsymbol{\xi} + O(\tau\|\boldsymbol{\xi}\|) + O(\tau^2) + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \quad (3.19)$$

Nyní tento rozvoj použijeme pro \mathbf{k}_2 , dosazením $t = t_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_n$, $\tau = hc$, $\boldsymbol{\xi} = h\mathbf{a}\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$

$$\mathbf{k}_2 = [f + hc\partial_t f + (\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f})(h\mathbf{a}\mathbf{f})](t_n, \mathbf{y}(t_n)) + O(h^2).$$

Jelikož jak τ tak $\boldsymbol{\xi}$ obsahuje h zjednodušili jsme všechny tři chybové Taylorova rozvoje jen na $O(h^2)$. Nyní použijeme poslední řádek schématu (3.16) a dosadíme do něj přesné řešení:

$$\mathbf{y}(t_n + h) = \mathbf{y}(t_n) + h [b_1\mathbf{f} + b_2\mathbf{f} + b_2hc\partial_t f + b_2ha(\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f})\mathbf{f}](t_n, \mathbf{y}(t_n)) + O(h^3)$$

Tento rozvoj porovnáme s rozvojem (3.10), do kterého jsme dosadili za $\dot{\mathbf{y}}$ a $\ddot{\mathbf{y}}$ podle (3.9) a (3.11):

$$\mathbf{y}(t_n + h) = \mathbf{y}(t_n) + \left[h\mathbf{f} + \frac{h^2}{2}(\partial_t\mathbf{f} + (\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f})\mathbf{f}) \right](t_n, \mathbf{y}(t_n)) + O(h^3) \quad (3.20)$$

Odtud dostáváme následující rovnice pro parametry schématu:

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2a = b_2c = \frac{1}{2}$$

Tři rovnice pro čtyři parametry dávají volnost jednoho parametru a dostáváme tak celou třídu metod druhého řádu. V praxi se používají zejména dvě z nich, bohužel české pojmenování neexistuje a anglické velmi kolísá:

1. Pro volbu $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $a = c = \frac{1}{2}$ dostáváme metodu (3.13), která se v angličtině nazývá: 'explicit midpoint method' nebo 'modified Euler method'.
2. Pro volbu $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, $a = c = 1$ dostáváme metodu:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (3.23)$$

V angličtině ji najdete po názvy: 'Heun's method', 'modified Euler method' (opět !!), 'improved Euler method'.

3.2.3 Runge-Kuttovy metody

Obecná s -stupňová Runge-Kuttova metoda používá s vyhodnocení funkce \mathbf{f} a má tvar

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i,$$

kde

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}(t_n + hc_i, y_n + h\alpha_i), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}k_j$$

Parametry Runge-Kuttových metod se obvykle zapisují ve formě takzvaných Butcherových tabulek:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (3.24)$$

nebo též:

$$\mathbf{c} \left| \begin{array}{c} \mathbb{A} \\ \mathbf{b} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Již uvedené metody tedy můžeme pomocí Butcherových tabulek napsat následovně:

Explicitní Eulerova metoda:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (3.26)$$

Implicitní Eulerova metoda:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (3.27)$$

Explicit Midpoint Method:

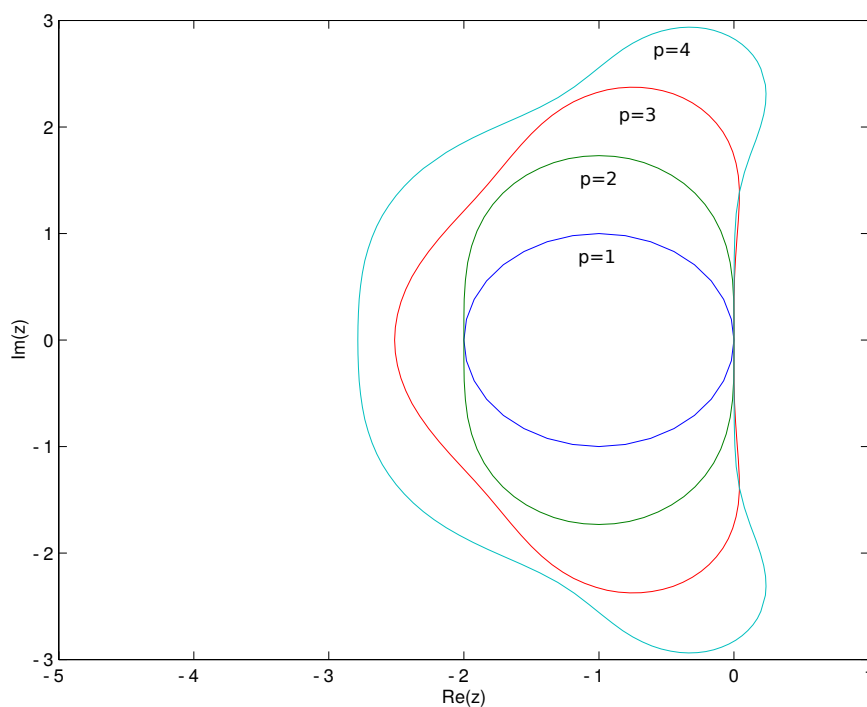
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad (3.28)$$

Heunova metoda:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad (3.29)$$

Explicitní RK metody

Pro explicitní metody má matice \mathbb{A} nenulové hodnoty pouze pod diagonálou, ostatní metody jsou implicitní.



Obrázek 3.5: Oblast absolutní stability pro p -stupňové RK metody řádu p .

Příklad explicitní tří stupňové metody třetího řádu (též pod jménem Heunova metoda):

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 1/3 & 1/3 & & \\
 2/3 & 0 & 2/3 & \\
 \hline
 & 1/4 & 0 & 3/4
 \end{array} \tag{3.30}$$

Příklad explicitní čtyřstupňové metody čtvrtého řádu (standardní RK metoda):

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
 \end{array} \tag{3.31}$$

Výhodou této metody jsou další nulové hodnoty v tabulce a tím menší počet operací, to však má význam jen pro jednoduché funkce \mathbf{f} . Dále je populární explicitní metodou

čtvrtého řádu, takzvané tří-osminové pravidlo:

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/3 & 1/3 & & & \\
 2/3 & -1/3 & 1 & & \\
 1 & 1 & -1 & 1 & \\
 \hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
 \end{array} \tag{3.32}$$

Výhodou této metody je menší konstanta u chybového členu v porovnání se standardní RK metodou.

Z uvedených příkladů by se dalo soudit, že každá s -stupňová metoda má řád s . To je bohužel pravda pouze pro $s \leq 4$. Každá metoda pátého řádu je minimálně 6-ti stupňová. Z tohoto důvodu jsou nejčastěji používány metody čtvrtého řádu. Další důležitou otázkou je stabilita metod. Lze dokázat, že pro pevné $s \leq 4$ mají všechny s -stupňové RK metody řádu s stejnou oblast absolutní stability, viz. Obrázek 3.2.3. Žádná explicitní metoda není nepodmíněně absolutně stabilní.

Implicitní RK metody

Pokusme se odvodit jednostupňovou implicitní metodu nejvyššího možného řádu. Obecně má metoda předpis:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hb_1\mathbf{k}_1 \tag{3.33}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n + c_1h, \mathbf{y}_n + ha_{11}\mathbf{k}_1) \tag{3.34}$$

Pro k_1 použijeme Taylorův rozvoj (3.19):

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} + c_1h\partial_t\mathbf{f} + ha_{11}\mathbf{k}_1\partial_y\mathbf{f} + O(h^2)$$

dále na pravé straně použijeme znovu rozvoj pro $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} + O(h)$:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} + c_1h\partial_t\mathbf{f} + ha_{11}\mathbf{f}(\partial_y\mathbf{f}) + O(h^2).$$

Nyní dosadíme do (3.33)

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + b_1h\mathbf{f} + (b_1c_1)h^2\partial_t\mathbf{f} + (b_1a_{11})h^2\mathbf{f}(\partial_y\mathbf{f}) + O(h^3)$$

a porovnáme s Taylorovým rozvojem přesného řešení (3.20), pro parametry metody dostaneme:

$$b_1 = 1, \quad b_1c_1 = 1/2, \quad b_1a_{11} = 1/2.$$

A tedy implicitní schéma druhého řádu:

$$\frac{1/2 \mid 1/2}{\mid 1} \quad (3.35)$$

nazývané 'implicit midpoint rule'. Dvoustupňová implicitní metoda (Hammer, Hollingsworth) maximálního možného řádu 4 má tabulku:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (3.36)$$

Vypočtíme region absolutní stability pro implicitní metodu středního bodu. Aplikací metody na testovací lineární rovnici dostaneme:

$$y_{n+1} = y_n + hk_1, \quad k_1 = \lambda y_n + \frac{h\lambda}{2}k_1$$

$$k_1 = \frac{\lambda}{1 - h\lambda/2}y_n, \quad y_{n+1} = \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}y_n$$

Region absolutní stability je uvnitř křivky dané rovnicí:

$$\frac{1 + z/2}{1 - z/2} = e^{i\theta}, \quad z = h\lambda$$

Vyjádříme z :

$$z = 2 \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = -2i \tan(\theta/2)$$

což znamená, že hranice regionu absolutní stability je imaginární osa a region absolutní stability je záporná polorovina komplexní roviny $\operatorname{Re} h\lambda \leq 0$.

Minimální počty úrovní pro dosažení daného řádu:

p	1	2	3	4	5	6	7	8
min s	1	2	3	4	6	7	9	11

3.3 Vícekrokové metody

Runge-Kuttovy metody zvyšují řád pomocí přidání mezikroků, které se pro vlastní řešení nepoužijí. Jedná se však o metody jednokrokové, kde se k výpočtu časového

kroku používá pouze informace z kroku předchozího. Vícekrokové metody naproti tomu používají pro výpočet nového kroku hodnotu řešení z několika předchozích kroků. Příklad:

$$y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} = h\beta_1 f_{n-1}, \quad f_i = f(t_i, y_i)$$

Parametry metody nalezneme tak, aby metoda byla exaktní pro $y(t)$ polynomiální stupně nejvýše dva. K tomu stačí, aby rovnice byla splněna pro $y = 1$, $y = t$, a $y = t^2$. Pro $y(t) = 1$ je $y' = f(t) = 0$ a dostáváme rovnici pro parametry:

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{3.37}$$

Pro $y(t) = t$, $y' = f(t) = 1$ dostáváme rovnici pro parametry:

$$t + \alpha_1(t - h) + \alpha_2(t - 2h) = h\beta_1 \tag{3.38}$$

Odečtením předchozí rovnice (3.37) t :

$$-\alpha_1 h - 2\alpha_2 h = h\beta_1$$

a po vydělení h :

$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 \tag{3.39}$$

Pro $y(t) = t^2$, $f = 2t$ máme rovnici:

$$t^2 + \alpha_1(t - h)^2 + \alpha_2(t - 2h)^2 = h\beta_1 2(t - h)$$

Opět použijeme předchozí rovnice abychom se zbavili členů obsahujících t . Odečteme (3.38) krát t :

$$-h\alpha_1(t - h) - 2h\alpha_2(t - 2h) = h\beta_1(t - 2h)$$

vydělíme $-h$

$$\alpha_1(t - h) + 2\alpha_2(t - 2h) = -\beta_1(t - 2h)$$

přičteme (3.39) krát t :

$$\alpha_1(-h) + 2\alpha_2(-2h) = -\beta_1(-2h)$$

a opět dělíme $-h$:

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 = -2\beta_1 \tag{3.40}$$

Dohromady máme pro parametry soustavu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešením jsou parametry $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 2$ a metoda druhého řádu

$$y_n - y_{n-2} = 2hf_{n-1} = 2hf(t_{n-1}, y_{n-1}),$$

které se také říká metoda skákající žáby (leap frog method).

Region stability, start Heunovou metodou:

$$y_1 = y_0 + h/2(\lambda y_0 + \lambda(y_0 + h\lambda y_0))$$

$$y_2 = y_0 + 2h\lambda y_1 = y_0 + 2h\lambda(y_0 + h/2(\lambda y_0 + \lambda(y_0 + h\lambda y_0)))$$

3.3.1 Výhody

- Méně numerických operací oproti stejně přesným RK metodám.
- Potřebují nastartovat první kroky pomocí vhodné RK metody.
- (1. Dahlquistova bariéra). Stabilní n -kroková metoda může mít maximální řád $n + 1$ pro liché n a maximální řád $n + 2$ pro n sudé.
- (2. Dahlquistova bariéra). Explicitní metody nejsou absolutně stabilní a implicitní absolutně stabilní vícevkrové metody mají řád maximálně 2 (např. trapézové pravidlo).

3.3.2 Nevýhody

-

Literatura

- [1] Joseph E. Flaherty, *ODE lecture notes*.