Simplificação de Expressões

Introdução a Programação

Objetivos de Aprendizagem

- Conhecer propriedades elementares
- Simplificar expressões booleanas

Agenda

- Propriedades da Álgebra de Boole
- Teoremas de De Morgan
- Simplificação de Expressões
    - Soma de Produtos
    - Produto de Somas

Propriedades

Propriedades da Álgebra de Boole

OR

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \overline{A} = 1$$

Propriedades da Álgegra de Boole

AND

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

Propriedades da Álgebra de Boole

NOT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Teoremas de De Morgan

Teoremas de De Morgan

Primeiro

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

Teoremas de De Morgan

Segundo

$$\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Demonstração

Primeiro Teorema de De Morgan

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	?	?
0	1	?	?
1	0	?	?
1	1	?	?

Demonstração

Primeiro Teorema de De Morgan

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Demonstração

Segundo Teorema de De Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	?	?
0	1	?	?
1	0	?	?
1	1	?	?

Demonstração

Segundo Teorema de De Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Simplificação de Expressões Booleanas

> Dada uma função Booleana, descrita por sua tabela verdade, simplificar ou derivar essa expressão é encontrar uma equação que a descreva.

Descrevendo uma Função Booleana

- Pode-se definir uma função Booleana descrevendo-se todas as situações em que a função vale 1 ou todas as situações em que a função vale 0
- Há duas formas de realizar a descrição de uma função
  - Soma de Produtos (SDP)
  - Produto de Somas (PDS)
- Utilizando-se um dos métodos é possível descrever **completamente** uma função Booleana

Soma de Produtos

A	B	C	mintermo
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?

Soma de Produtos

A	B	C	mintermo
0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$

Soma de Produtos

- Cada termo produto construído conforme a regra anteriormente descrita é denominado **mintermo** (ou minitermo)
- Para um dado mintermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 1.
- Porém, se substituirmos nesse mesmo mintermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 0
- Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **OU** entre os mintermos associados aos 1s da função

Exemplo 1

- Quais os valores de (A, B, C) em que F vale 1?
  - $(010), (011), (101), (110)$
- Ou seja, quais os mintermos associados?
  - $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
  - $A \cdot \overline{B} \cdot C$
  - $\overline{A} \cdot B \cdot C$
  - $A \cdot B \cdot \overline{C}$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

$$F_{min} = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Produto de Somas

A	B	C	maxtermo
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?

Produto de Somas

A	B	C	maxtermo
0	0	0	$A + B + C$
0	0	1	$A + B + \overline{C}$
0	1	0	$A + \overline{B} + C$
0	1	1	$A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	$\overline{A} + B + C$
1	0	1	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} + C$

Produto de Somas

- Médodo Dual ao SDP
- Cada termo soma construído conforme a regra anteriormente descrita é denominado **maxtermo**
- Para um dado maxtermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 0
- Porém, se substituirmos nesse mesmo maxtermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 1
- Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **E (AND)** entre os maxtermos associados aos 0s da função

Exemplo 2

- Quais os valores de (A, B, C) em que F vale 0?
  - $(000), (001), (100), (111)$
- Ou seja, quais os maxtermos associados?
  - $A + B + C$
  - $A + B + \overline{C}$
  - $\overline{A} + B + C$
  - $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

$$F_{max} = (A + B + C) \cdot (A + B\overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

Para encontrar a equação para uma função booleana a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **OU (OR)** entre os mintermos associados aos 1s da função

Para encontrar a equação para uma função lógica a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **E (AND)** entre os maxtermos associados aos 0s da função

Perguntas

Exercícios

1

Aplique as propriedades da Álgebra de Boole para simplificar as expressões abaixo:

1. $A \cdot \overline{B} + A \cdot B$
2. $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$
3. $\overline{A \cdot B} + A$
4. $(\overline{A + \overline{B}}) \cdot B$
5. $(\overline{AB}) \cdot (\overline{A} + C)$

2

Aplique as propriedades da Álgebra de Boole para simplificar as expressões F_{min} e F_{max} encontradas anteriormente e mostrar que elas são equivalentes.

- $F_{min} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
- $F_{max} = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

José Roberto Bezerra

jbroberto@ifce.edu.br

jbroberto76

Powered by Slidev

Cover image by haikei