CAPÍTULO 8

Números complejos e hipercomplejos

En capítulos anteriores hemos aprendido métodos para la resolución de algunas ecuaciones lineales. Sin embargo, existen ecuaciones no lineales, por ejemplo *cuadráticas*, que son de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, y queremos resoverla. Se puede en primer lugar dividir por a y resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

La igualdad no varía si sumamos a ambos miembros una misma cantidad, y así

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Haber sumado precisamente $b^2/4a^2$ nos permite factorizar el miembro izquierdo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

De aquí se deduce que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y despejar la x es ya obvio; por tanto queda la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hay solución real cuando la cantidad $b^2 - 4ac$, llamada *discriminante* de la ecuación, es mayor o igual que 0. Pero, ¿qué sucede cuándo $b^2 - 4ac < 0$?

En realidad, la pregunta surge ya con ecuaciones cuadráticas sencillas; haciendo $a = c = 1$ y $b = 0$ en la ecuación de arriba nos encontramos la celebérrima ecuación

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1.$$

Hubo algunos matemáticos que no se conformaron con decir “no tiene solución (real)”, y lograron una forma de resolver ecuaciones así, introduciendo una nueva "variable" i tal que $i^2 = -1$. Esta i habría de comportarse como un número real más, sujeta a sus reglas: habría de poder sumarse, y multiplicarse con ellos. De forma que si se considera i, habría de considerarse $2i, 3i, -i, -2i, \ldots$, pero también $1+i, 2+5i, \ldots$, y en general todos los números de la forma

$$a + bi \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Tales números se llaman *números complejos*. El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$. En un número complejo $z = a + bi$, el número real a se llama *parte real* de z, y se denota $\mathrm{Re}(z)$; el coeficiente b que acompaña a la i se denomina *parte imaginaria* de z, y se denota $\mathrm{Im}(z)$.

En $\mathbb{C}$, toda ecuación cuadrática como la del principio del capítulo posee al menos una solución (posee exactamente una si su discriminante es igual a cero, y posee dos en caso contrario).

Por ejemplo, ahora ya se puede resolver la ecuación $x^2 = -1$: tiene como soluciones tanto i como $-i$, ya que

$$i^2 = -1, \quad \text{y también} \quad (-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Las soluciones de una ecuación también se llaman *raíces* de la ecuación, pues en el origen se trataban problemas como éste: resolver la ecuación $x^2 = -1$ es lo mismo que encontrar las raíces cuadradas de -1.

Dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ se suman de la manera esperada, es decir:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \end{aligned}$$

Su multiplicación también responde a lo que se nos antoja intuitivo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_2 b_1 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i + (-1) b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i \end{aligned}$$

Un caso particular es

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

El número complejo $a - bi$ se llama *conjugado* del complejo $a + bi$ (y viceversa). Se escribe

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Nótese que la suma y el producto de números complejos se han denotado también con los símbolos usuales “$+$” y “$\cdot$”, aunque, en puridad, no son las mismas operaciones; por razones prácticas, sin embargo, adoptaremos este convenio. De hecho, estas suma y producto dotan al conjunto $\mathbb{C}$ de la estructura de cuerpo.

Efectivamente: se pueden comprobar sin dificultad todos los axiomas para ver que efectivamente $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo: el elemento neutro de la suma es $0+0i$, denotado simplemente por 0, y el del producto es $1+0i$, denotado simplemente por 1; en general, un complejo de la forma $a+0i$ se denotará como a (con lo que además queda claro que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). Además, el inverso aditivo de $a+bi$ es $-a-bi$, pues trivialmente se verifica que

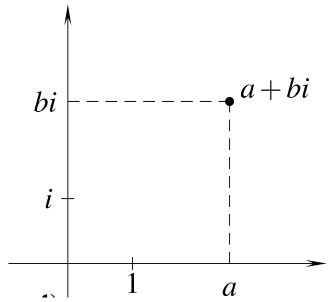
$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i,$$

en tanto que cualquier $z = a+bi \neq 0+0i$ posee inverso multiplicativo, a saber

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}.$$

Se deja la comprobación del resto de axiomas de cuerpo como ejercicio al ávido lector.

Un número complejo $z = a+bi$ tiene una clara interpretación geométrica si se le identifica con un par (a,b) de números reales: representa un punto del plano. Efectivamente, todo número complejo se puede representar en el plano haciendo variar su parte real en el eje de abscisas y su parte imaginaria en el eje de ordenadas; el origen de coordenadas corresponde así al complejo $0 = 0+0i$.



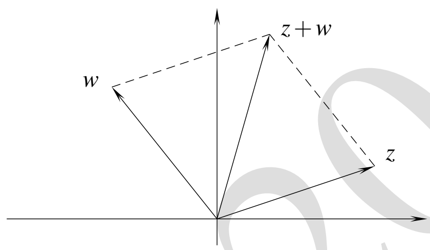
El plano de los números complejos recibe el nombre de *plano de Gauß*, por ser este matemático alemán uno de los primeros en representarlos en el plano.

La distancia al origen de coordenadas del punto (a,b) correspondiente al número complejo $z = a+bi$ se denomina *módulo* de z, y se denota $|z|$. Queda entonces definido como

$$|z| = |a+bi| := \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}.$$

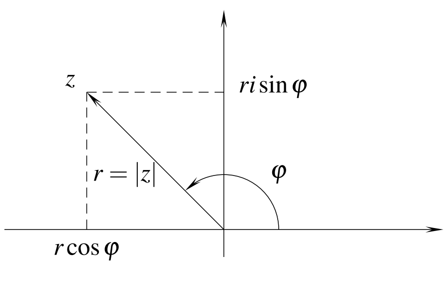
Es claro de las definiciones que $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$, es decir, $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$.

La suma de dos números complejos z y w se visualiza muy fácilmente en el plano de Gauß por medio de la llamada "regla del paralelogramo":



Sin embargo, no existe un análogo tan sencillo para el producto. En efecto, el afán por representar en el plano de Gauß la multiplicación de dos números complejos sugiere que otras coordenadas podrían ser más convenientes para la representación de un número complejo que las dadas por sus partes real e imaginaria.

Se llega así a la representación *polar* (también llamada módulo-argumental) de un número complejo z; éste también queda unívocamente determinado en el plano de Gauß mediante su módulo $r = |z|$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas:



Tal ángulo $\varphi \in [0, 2\pi[$ recibe el nombre de *argumento* del número complejo. Nociones de trigonometría elemental permiten deducir la representación polar:

$$z = a+bi = r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi\cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Con esta representación, calcular el producto de dos números complejos, pongamos $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ y $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, es fácil:

$$\begin{aligned} z\cdot z' =& rr'(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \\ =& rr'\big(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi'\sin\varphi)\big) \\ =& rr'\big(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\big); \end{aligned}$$

es decir, basta multiplicar los módulos y sumar los argumentos. Ahora es ya muy sencillo operar con la forma polar (siempre que se sepa suficiente trigonometría) por ejemplo para calcular la potencia enésima de un número complejo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

La representación de un número complejo $a+bi$ como un par ordenado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ planteaba una natural tendencia a la generalización: ¿por qué no considerar una tripleta (a,b,c) de números reales? Sumar dos de tales tripletas siguiendo el patrón de los complejos es inmediato, basta sumar componente a componente. Pero ¿cómo multiplicarlas, manteniendo—en lo posible—la estructura de cuerpo?

Este problema atormentó al matemático irlandés Hamilton durante al menos trece años, hasta que al fin, el lunes 16 de octubre de 1843, encuentra la solución. Hasta entonces, seducido por el ejemplo de los complejos, había considerado tripletas (a,b,c) de la forma $a+bi+cj$, lo que reducía el problema de la multiplicación a determinar las productos i^2, j^2 e ij. Como quería tener $i^2 = j^2 = -1$, siguiendo la pauta de $\mathbb{C}$, solamente le quedaba encontrar coeficientes reales α, β, γ tales que $ij = \alpha + \beta i + \gamma j$ respetando la estructura de cuerpo, pero cualquier solución que encontraba era insatisfactoria (en el sentido de que no se mantenían simultáneamente las propiedades conmutativa del producto y distributiva).

La genialidad de aquel lunes fue considerar además una k. En resumen, todo encajaba si se consideraban lo que él mismo llamó *cuaterniones*, esto es, números de la forma

$$a+bi+cj+dk$$

tales que

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ &ij = k = -ji \\ &jk = i = -kj \\ &ki = j = -ik. \end{aligned}$$

El conjunto de los números cuaterniones se denota por $\mathbb{H}$, en honor a Hamilton.

Dado un cuaternión $q = a + bi + cj + dk$, al número real a se le llama *parte escalar* de q. Al resto del cuaternión, $bi + cj + dk$, se le llama *parte vectorial*. Dos cuaterniones son iguales si y solamente si coinciden sus partes escalares y vectoriales; y dos partes vectoriales coinciden si lo hacen coeficiente a coeficiente.

Dos cuaterniones se pueden sumar en clara analogía con los complejos:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Y se pueden multiplicar de acuerdo a la regla siguiente[1]:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ +(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ +(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2)j \\ +(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k\end{aligned}$$

Los cuaterniones tienen un conjugado similar al de los complejos: si $q = a + bi + cj + dk$ es un cuaternión, su conjugado se define como

$$\overline{q} := a - bi - cj - dk$$

De esta definición se deduce fácilmente que

$$\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$$
$$q + \overline{q} = 2a.$$

En clara analogía con el módulo de un número complejo se define la *norma* de un cuaternión $q = a + bi + cj + dk$ como

$$N(q) := \sqrt{\overline{q}q}$$

Nótese que $(N(q))^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; además $N(q) = 0$ si y sólo si $q = 0$.

Con las suma y producto definidas anteriormente, se puede demostrar que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ tiene estructura de *cuerpo no conmutativo*, es decir, verifica todos los axiomas de cuerpo, excepto el de la conmutatividad del producto: en efecto, basta observar por ejemplo que

$$ij = -ji.$$

El elemento neutro aditivo es el cuaternión $0 + 0i + 0j + 0k$, y el multiplicativo es $1 + 0i + 0j + 0k$. Todo cuaternión no nulo q también posee un inverso multiplicativo q^{-1}: para verlo, tomemos las igualdades

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1$$

[1]Para el lector avanzado que ya sepa lo que es el producto escalar "$*$" y el vectorial "$\times$" de vectores, si v_p denota la parte vectorial de un cuaternión p y v_q la de q, se verifica que $pq = a_1 a_2 - v_p * v_q + a_1 v_q + a_2 v_p + p \times q$, donde $a_1 a_2 - v_p * v_q$ es la parte escalar de pq y $a_1 v_q + a_2 v_p + v_p \times v_q$ su parte vectorial.

y multipliquemos por el conjugado $\overline{q}$ a derecha o izquierda, para obtener

$$q^{-1}q\overline{q} = \overline{q}qq^{-1} = \overline{q}.$$

Como $\overline{q}q = q\overline{q} = N(q)^2$ (es fácil ver que el producto de un cuaternión por su conjugado sí conmuta), entonces

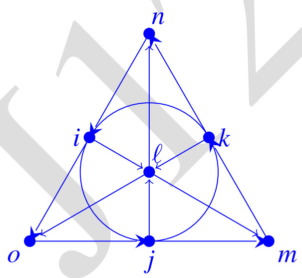
$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)^2}.$$

Los cuaterniones juegan un papel destacado en la programación de videojuegos porque permiten efectuar cálculos de rotaciones de manera muy eficiente.

Se puede uno preguntar si existen generalizaciones de los cuaterniones, de modo similar a la manera en que los cuaterniones son generalizaciones de los complejos. La respuesta es que sí: el conjunto $\mathbb{O}$ de los *octoniones*, que son números de la forma

$$a + bi + cj + dk + e\ell + fm + gn + ho,$$

donde $a, b, \ldots, h \in \mathbb{R}$ y i, j, k, ℓ, m, n, o satisfacen que todos ellos al cuadrado son -1, y además siguen las reglas de multiplicación dadas por el diagrama siguiente:



Este diagrama se lee así: el producto de cada dos símbolos es el tercero en la "línea" que los contiene, con un signo "+" o "−" según la dirección de la flecha y la posición de los símbolos en el producto; las "líneas" incluyen el círculo que conecta i, j, k, y se han de imaginar también flechas que cierran todos los extremos. Así, por ejemplo se tiene la "línea" $o \to j \to m$ que conlleva la "línea invisible" $m \to o$; de aquí se coligen por ejemplo

$$oj = m, \quad jm = o, \quad mo = j.$$

Otro ejemplo: de la línea $i \to j \to k (\to i)$ se deducen, entre otros, los productos

$$ij = k, \quad \text{y también} \quad kj = -i.$$

La multiplicación de octoniones no es conmutativa, ni tan siquiera conserva la propiedad asociativa, pues por ejemplo se tiene

$$j \cdot (\ell \cdot o) = j \cdot k = i, \quad \text{pero} \quad (j \cdot \ell) \cdot o = n \cdot o = -i.$$

Los números complejos, los cuaterniones y los octoniones comparten adición, multiplicación distributiva y norma multiplicativa—el módulo para $\mathbb{C}$, la norma N para $\mathbb{H}$ y su natural extensión a $\mathbb{O}$—todas ellas extendidas unas de otras sucesivamente. Tales conjuntos se denominan *sistemas numéricos hipercomplejos*, y puede incluso demostrarse que son los únicos que existen.