CAPÍTULO 10

Subespacios vectoriales

En las estructuras algebraicas en general, y en la de espacio vectorial en particular, juegan siempre un papel destacado aquellos subconjuntos que heredan las propiedades de la estructura algebraica en cuestión.

En la situación que nos ocupa, los subconjuntos de un espacio vectorial que a su vez son espacios vectoriales se pueden caracterizar fácilmente:

Definición. Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto U de V se llama *subespacio vectorial*, si
(U1) $0 \in U$.
(U2) Para todos u, $v \in U$ se tiene que $u + v \in U$.
(U3) Para todos $u \in U$, $\alpha \in K$ se tiene que $\alpha u \in U$.

Nota. Un subespacio vectorial U de V es a su vez un K-espacio vectorial.

Demostración. Basta verificar que con $u \in U$ también $-u \in U$; esto es así en virtud de (U3), ya que entonces $-u = (-1)u \in U$. Todos los demás requisitos son satisfechos por cualquier elemento de V, como se comprueba sin dificultad. $\square$

Nuestra interpretación de espacio vectorial en términos de geometría elemental vista en el Capítulo 9 nos ofrece los primeros ejemplos de subespacios vectoriales: las rectas de $\mathbb{R}^2$ que pasan por el origen, y las rectas y planos en $\mathbb{R}^3$ que igualmente contienen al origen.

En la situación general, ejemplos de subespacios vectoriales son también fáciles de encontrar:

(a) En todo espacio vectorial V, tanto $\{0\}$ como V son subespacios vectoriales de V.
(b) Sean U_1, $U_2 \subset V$ subespacios vectoriales. La intersección $U_1 \cap U_2$ es también un subespacio vectorial (¡pero la unión $U_1 \cup U_2$ en general no!):

$$\begin{aligned} v, w \in U_1 \cap U_2 \quad &\Longrightarrow \quad v, w \in U_1 \text{ y } v, w \in U_2 \\ &\Longrightarrow \quad \alpha v, v + w \in U_1 \text{ y } \alpha v, v + w \in U_2 \\ &\Longrightarrow \quad \alpha v, v + w \in U_1 \cap U_2. \end{aligned}$$

(c) De la misma manera se comprueba: La intersección de un número finito de subespacios vectoriales $U_1, \ldots, U_n$, o incluso la intersección de un número arbitrario de subespacios vectoriales, es de nuevo un subespacio vectorial.
(d) Consideremos el sistema lineal homogéneo $x+y=0$. Su conjunto de soluciones es

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

El conjunto L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$: posee la solución $x=y=0$, la suma de dos soluciones es de nuevo una solución y el producto de una solución por un número real es otra vez una solución. De la mano de este ejemplo se puede además intuir que, en general, el conjunto de soluciones en un cuerpo K de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas *homogéneo* es un subespacio vectorial de K^n. En particular es un espacio vectorial, por lo que a partir de ahora hablaremos del *espacio de soluciones*.
(e) A veces las apariencias engañan, y así existen subespacios vectoriales dados por ecuaciones no lineales: el conjunto

$$U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^4=0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Ello es así porque $U=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
(f) El conjunto $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$: el punto $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ pertenece a W, pero $2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ (el axioma (U3) no se respeta).

Definición. Sea V un K-espacio vectorial, y sean $v_1, \ldots, v_n \in V$. Un elemento $w \in V$ es *combinación lineal* de $v_1, \ldots, v_n$, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$w=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n.$$

Sean $w=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n$ y $z=\beta_1 v_1+\cdots+\beta_n v_n$ combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_n$. Entonces

$$\begin{aligned} w+z &= (\alpha_1+\beta_1) v_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n) v_n, \\ \lambda w &= (\lambda \alpha_1) v_1+\cdots+(\lambda \alpha_n) v_n, \text{ para } \lambda \in K \end{aligned}$$

también son combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_n$. Esto prueba que el conjunto

$$L(v_1, \ldots, v_n):=\left\{w \in V : w \text{ un combinación lineal de } v_1, \ldots, v_n\right\}.$$

es un subespacio vectorial de V (evidentemente, el vector 0 también pertenece al conjunto). Recibe el nombre de *envolvente lineal* de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejemplos. (a) Sea $V = K^n$. Empleemos la notación estándar

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con entrada 1 en la posición i-ésima, y el resto 0. Así se tiene

$$K^n = L(e_1, \ldots, e_n),$$

ya que todo vector $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ se puede escribir como

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

(b) La aplicación más importante del álgebra lineal sea quizás la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales. Sea por ejemplo para $K = \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Para entender su relación con las combinaciones lineales, pongamos

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una solución de este sistema de ecuaciones es equivalente a encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que verifiquen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b.$$

El sistema es compatible si y sólo si $b \in L(v_1, v_2, v_3)$.

El concepto de envolvente lineal se puede extender a un subconjunto cualquiera S (no necesariamente finito) de un K-espacio vectorial V:

$$L(S) := \big\{ w \in V : \text{ existen } v_1, \ldots, v_n \in S \text{ con } w \in L(v_1, \ldots, v_n) \big\};$$

diremos que $L(S)$ es la *envolvente lineal de S*.

Se comprueba trivialmente que $L(S)$ es un subespacio vectorial de V. Además, si S es finito, digamos $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces

$$L(\{v_1, \dots, v_n\}) = L(v_1, \dots, v_n).$$

Por razones prácticas vamos a convenir que $L(\emptyset) = \{0\}$.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial, y sea S un subconjunto de V. Si $U = L(S)$, se dice que U es el subespacio vectorial *generado por* S, o que S es *un sistema generador* de U.

Si S es un sistema generador de un K-espacio vectorial V, entonces para cada $v \in V$ existen un $m \in \mathbb{N}_{>0}$ así como vectores $v_1, \dots, v_m \in S$ y escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$.

Si $V = L(S)$ con S un conjunto finito, se dice que V está *finitamente generado*. En esta asignatura solamente consideraremos sistemáticamente espacios vectoriales finitamente generados.

La intersección $U_1 \cap U_2$ de dos subespacios vectoriales U_1 y U_2 de un espacio vectorial V es el mayor conjunto que está contenido tanto en U_1 como en U_2, y con ello también el mayor subespacio vectorial común a U_1 y U_2.

Se plantea entonces la pregunta: ¿Cuál es el menor subespacio vectorial que contiene tanto a U_1 como a U_2? La primera respuesta que se nos ocurre no es correcta:

Nota. La unión $U_1 \cup U_2$ de dos subespacios vectoriales U_1, U_2 de un espacio vectorial V no tiene por qué ser un subespacio vectorial: Sean

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\} \text{ y } U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}.$$

Se tiene que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \cup U_2$, pero $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$, lo que no respeta el axioma (U2).

Pero, ¿cuál es la respuesta entonces? Si $W \supset U_1 \cup U_2$ ha de ser un subespacio vectorial, entonces debe verificarse que $u_1 + u_2 \in W$ para todos $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Así podemos definir el conjunto

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Ahora es fácil demostrar que U_1+U_2 es un subespacio vectorial: Se tiene que $0 \in U_1+U_2$, y para $u_1,u_1' \in U_1$, $u_2,u_2' \in U_2$ y $\alpha \in K$ es

$$(u_1+u_2)+(u_1'+u_2') = (u_1+u_1')+(u_2+u_2') \in U_1+U_2$$
$$\alpha(u_1+u_2) = \alpha u_1+\alpha u_2 \in U_1+U_2.$$

Acabamos de probar: Cada subespacio vectorial que contiene U_1 y U_2, contiene también U_1+U_2. Entonces U_1+U_2 es el menor subespacio vectorial que contiene $U_1 \cup U_2$.

Así como se pueden formar intersecciones de tantos subespacios vectoriales como se quiera, lo mismo sucede con la suma.

Si un espacio vectorial V descompone en suma de dos subespacios vectoriales, es decir

$$V = U_1+U_2,$$

los vectores $v \in V$ se pueden escribir como sumas $v = u_1+u_2$ con $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Desafortunadamente esta escritura no es única.

La unicidad en la escritura se consigue bajo las condiciones que estudiaremos a continuación, cerrando el capítulo.

Teorema 10.1. *Sean U_1,U_2 dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, y sea $U = U_1+U_2$. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(i) *Si $u_1+u_2 = 0$ para $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, entonces $u_1 = u_2 = 0$.*
(ii) *Para cada $u \in U$ la representación $u = u_1+u_2$ es única.*
(iii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sea $u \in U$ con $u = u_1+u_2 = u_1'+u_2'$ para $u_1,u_1' \in U_1$, $u_2,u_2' \in U_2$. Hemos de probar que: $u_1 = u_1'$ y $u_2 = u_2'$. Es fácil, pues de

$$u = u_1+u_2 = u_1'+u_2'$$

se sigue que $(u_1-u_1')+(u_2-u_2') = 0$, donde $u_1-u_1' \in U_1$ y $u_2-u_2' \in U_2$. Por (i) se tiene que

$$u_1-u_1' = 0 \text{ y } u_2-u_2' = 0,$$

por consiguiente $u_1 = u_1'$ y $u_2 = u_2'$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sea $u \in U_1 \cap U_2 \subseteq U$. Se tiene que

$$u = 0+u = u+0,$$

y por (ii) debe ser $u = 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Sean $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ con $u_1+u_2 = 0$. Entonces

$$u_1 = -u_2 \in U_2 \text{ y } u_2 = -u_1 \in U_1,$$

y con ello

$$u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

lo que implica que $u_1 = u_2 = 0$. $\square$

Definición. Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial. La suma $U_1 + U_2$ se llama *suma directa* de U_1 y U_2, si se verifica cualquiera (y por tanto todas) de las condiciones del Teorema 10.1. Escribiremos en tal caso

$$U_1 \oplus U_2.$$

Se puede entonces simplificar diciendo que una suma de dos subespacios vectoriales se llama *directa* si la intersección de los mismos se reduce al vector 0.

Ejemplo. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y los vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos los subespacios $U_1 = L(e_1)$ y $U_2 = L(e_2)$. Se verifica que V es suma directa de U_1 y U_2, es decir

$$V = L(e_1) \oplus L(e_2),$$

ya que por una parte V es suma de ambos

$$V = L(e_1) + L(e_2)$$

porque cada vector de $V = \mathbb{R}^2$ se puede escribir como suma de un múltiplo de e_1 más un múltiplo de e_2, y por otro lado

$$\begin{aligned} L(e_1) \cap L(e_2) &= \left\{ v \in V : v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \cap \left\{ v \in V : v = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

En el capítulo siguiente nos proponemos entender cómo se pueden distinguir espacios vectoriales en función de su “tamaño”.

Una sencilla observación preliminar: un criterio útil no puede ser el número de elementos que contiene, es decir, su cardinal como conjunto que es, ya que este proceder ignora la estructura algebraica añadida al conjunto subyacente mediante la adición y la multiplicación por escalares.