CAPÍTULO 7

# Sistemas de ecuaciones lineales

Terminamos el capítulo 5 aprendiendo a resolver ecuaciones diofánticas lineales en dos indeterminadas, es decir, ecuaciones de la forma

$$ax + by = c \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{Z}$$

y donde se buscan $x,y \in \mathbb{Z}$.

Queremos plantearnos en este capítulo el problema de la resolución de ecuaciones con coeficientes en un cuerpo $(K,+,\cdot)$; piénsese por ejemplo en los reales $\mathbb{R}$. El elemento neutro aditivo lo denotaremos por 0, y por 1 el multiplicativo.

Consideremos en primer lugar el caso de una indeterminada. Sean $a,b \in K$. Buscamos el conjunto de todos los $x \in K$ que satisfacen la ecuación

$$ax = b.$$

Este caso ya es instructivo por la casuística que ofrece:

(a) Si $a \neq 0$ la ecuación posee exactamente una solución, que es $x = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$, ya todo elemento del cuerpo distinto de 0 posee inverso.
(b) Si $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación no tiene solución: no existe ningún $x \in K$ que cumpla que $0 \cdot x = b \neq 0$.
(c) Si $a = 0$ y $b = 0$ la ecuación tantas soluciones como elementos tenga $K$: cada $x \in K$ es solución, ya que

$$a \cdot x = 0 \cdot x = 0 = b \text{ para todos } x \in K.$$

Démos un paso adelante y consideremos dos ecuaciones lineales con dos indeterminadas $x$ e $y$, de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

con $a_i, b_i, c_i \in K$ con $i = 1,2$. La pregunta es: ¿Cómo encontrar—si es posible—una solución de la primera **y** de la segunda ecuación? Se trata de buscar pares $(x,y) \in K \times K = K^2$ que satisfagan el sistema de ecuaciones.

Para empezar podemos "eliminar" la incógnita $y$: para ello basta multiplicar la primera ecuación por $b_2$ y la segunda por $b_1$, y después sustraer la segunda de la primera:

$$\begin{array}{rcrcl} b_2a_1x & + & b_2b_1y & = & b_2c_1 \\ -[b_1a_2x & + & b_1b_2y & = & b_1c_2] \\ \hline (a_1b_2 & - & a_2b_1)x & = & b_2c_1 - b_1c_2. \end{array}$$

Análogamente podemos eliminar la $x$:

$$\begin{array}{rcrcl} -[a_2a_1x & + & a_2b_1y & = & a_2c_1] \\ a_1a_2x & + & a_1b_2y & = & a_1c_2 \\ \hline (a_1b_2 & - & a_2b_1)y & = & a_1c_2 - a_2c_1. \end{array}$$

Si las constantes $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ satisfacen la inecuación

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

entonces *la* solución del sistema de ecuaciones lineales viene dado por

$$x^* = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \; y^* = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Substituyendo en el sistema original se ve en seguida que estas $x^*$ e $y^*$ satisfacen las ecuaciones que lo forman; es decir, substituyendo queda

$$\begin{aligned} a_1x^* + b_1y^* &= \frac{a_1(b_2c_1 - b_1c_2) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = \cdots = c_1 \\ a_2x^* + b_2y^* &= \frac{a_2(b_2c_1 - b_1c_2) + b_2(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = \cdots = c_2 \end{aligned}$$

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ el sistema o bien no tiene solución o bien tiene infinitas soluciones, dependiendo de cómo se comporten las constantes $c_1$ y $c_2$ con respecto a $a_i, b_i$. En particular se tiene: si $c_1 = c_2 = 0$ entonces el sistema de ecuaciones lineales tiene *por lo menos* la solución $x = y = 0$. Además es la única si se verifica que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen una interpretación geométrica simple, que explicaremos de la mano de tres ejemplos para sistemas con dos incógnitas.

**Ejemplos.** Sea $K = \mathbb{R}$.

(a) Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

Usando la notación anterior, en este caso $a_1 = a_2 = b_1 = 1$ y $b_2 = -1$. Como $a_1b_2 - a_2b_1 = -2 \neq 0$, el sistema posee exactamente una solución, que no es otra que $(x, y) =$

$(1,0)$. Tal solución corresponde a un punto en el plano, que es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $x+y=1$ y $x-y=1$ en $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea ahora

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 3y & = & 4 \end{array}$$

con $a_1 = a_2 = 1$ y $b_1 = b_2 = 3$. Si $(\tilde{x},\tilde{y})$ fuera una solución, tendríamos que $3\tilde{x}+3\tilde{y}=3$ y que $3\tilde{x}+3\tilde{y}=4$, es decir $3=4$, ¡contradicción! Las rectas de ecuaciones $x+y=1$ y $3x+3y=4$ son paralelas, así que no se cortan. El conjunto de soluciones del sistema es $\emptyset$.

(c) Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 \\ 3x & + & 6y & = & 3, \end{array}$$

donde $a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = 3$ y $b_2 = 6$. Ambas ecuaciones describen la misma recta, por lo que exactamente *todos* los puntos de esa recta forman el conjunto de soluciones del sistema:

$$\left(x, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. También podríamos haber tomado una descripción equivalente del mismo conjunto de soluciones:

$$(1-2y, y)$$

para $y \in \mathbb{R}$ arbitrario.

En general, un sistema de ecuaciones lineales sobre un cuerpo $K$ tiene la forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

donde $m, n$ son números naturales arbitrarios, de forma que $m$ es el número de ecuaciones, $n$ es el número de incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Los $m \cdot n$ elementos $a_{ij}$ de $K$ se denominan *coeficientes* del sistema, y los $m$ elementos $b_i$ de $K$ se llaman *términos independientes (o constantes)* del sistema.

En caso de que $b_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ el sistema se dice *homogéneo*. En otro caso, esto es, si existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $b_i \neq 0$, el sistema lineal se llama *no homogéneo*.

Una $n$-tupla $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ en $K^n$ se llama *solución* del sistema de ecuaciones lineales si cada $i$-ésima componente $x_i^*$ de $x^*$ satisface el sistema (es decir, verifica las ecuaciones que lo forman).

Un sistema de ecuaciones lineales se llama *compatible*, si posee por lo menos una solución; *incompatible* si no posee ninguna solución; *compatible determinado*, si tiene exactamente una solución. Si tiene más de una se dice compatible *indeterminado*.

Los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales se ordenan a menudo en una tabla. Nosotros escribiremos

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta tabla se llama *matriz* de tamaño $m \times n$ o, por abreviar, *matriz* $m \times n$. Así, $A$ es la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales $(*)$ dado arriba. Si se añaden los términos independientes del sistema de ecuaciones lineales a la matriz $A$, obtendremos la matriz $m \times (n+1)$ denotada como

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Esta nueva matriz se llama *matriz ampliada* del sistema de ecuaciones lineales $(*)$ anterior.

Consideremos ahora otro sistema lineal

$$\begin{array}{ccc} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}x_1 + \cdots + a'_{kn}x_n & = & b'_k \end{array}$$

con $k$ ecuaciones y $n$ incógnitas, de matriz ampliada

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \end{array}\right).$$

**Definición.** Los dos sistemas de ecuaciones lineales de matrices ampliadas $(A|b)$ y $(A'|b')$ se dicen *equivalentes*, si poseen el mismo conjunto de soluciones.

La idea es transformar un sistema dado en otro equivalente que sea más fácil de resolver. Esta simplificación se hace aplicando unas reglas permitidas, que son las *transformaciones elementales*. Las transformaciones elementales preservan sistemas equivalentes; son las siguientes:

(a) Transformaciones de Tipo I:

$T_{ij}$ : Intercambio de la $i$-ésima y la $j$-ésima ecuación.

(b) Transformaciones de Tipo II:

$$T_{ij}(c): \text{ Substitución de la } i\text{-ésima ecuación por la ecuación}$$

$$(a_{i1}+ca_{j1})x_1+(a_{i2}+ca_{j2})x_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})x_n=b_i+cb_j$$

con $j\in\{1,\dots,m\}$, $j\neq i$, $c\in K$. Es decir, se substituye la ecuación $i$-ésima por la suma de la ecuación $i$-ésima y $c$ veces la $j$-ésima.

(c) Transformaciones de Tipo III:

$$T_i(c): \text{ Substitución de la } i\text{-ésima ecuación por la ecuación}$$

$$ca_{i1}x_1+ca_{i2}x_2+\cdots+ca_{in}x_n=cb_i$$

con $c\in K\setminus\{0\}$.Es decir, se substituye la ecuación $i$-ésima por ella misma multiplicada por la constante no nula $c$.

(d) Transformaciones de Tipo IV:

$$T_i: \text{ Eliminamos la } i\text{-ésima ecuación si ésta es cero,}$$

es decir, si $b_i=0$ y $a_{ij}=0$ para todo $j$.

**Ejemplo.** Con $K=\mathbb{R}$, apliquemos transformaciones elementales al primer sistema de ecuaciones que aparece abajo para simplificarlo:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+2x_2+2x_3&=2\\ x_1+x_2+x_3&=0\end{aligned} \xrightarrow{T_{12}} \begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=2\\ 2x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2+x_3&=0\end{aligned} \xrightarrow{T_{21}(-2)} \begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=2\\ -3x_2-3x_3&=-3\\ x_1+x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{T_{31}(-1)} \begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=2\\ -3x_2-3x_3&=-3\\ -x_2-x_3&=-2\end{aligned} \xrightarrow{T_{32}\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=2\\ -3x_2-3x_3&=-3\\ 0x_3&=-1\end{aligned}$$

El último sistema es incompatible: la ecuación

$$0\cdot x_3=-1$$

no puede satisfacerse por ningún $x_3\in\mathbb{R}$. Con ello, el primer sistema de ecuaciones también es incompatible, como asegura el resultado siguiente:

**Teorema 7.1.** *Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si uno se puede transformar en el otro por medio de un número finito de transformaciones elementales.*

*Demostración.* Es evidente que las transformaciones elementales de tipos I, III y IV no alteran el conjunto de soluciones. Queda por ver que éste también es el caso para transformaciones de tipo II. Sea entonces $(A'|b')$ un sistema creado a partir de $(A|b)$ por transformaciones $T_{ij}(c)$. Si $x^*$ es una solución de $(A|b)$, entonces se tiene en particular que

$$a_{i1}x_1^*+\cdots+a_{in}x_n^*=b_i$$

$$a_{j1}x_1^*+\cdots+a_{jn}x_n^*=b_j$$

y así también

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1^* + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n^* \qquad = b_i + cb_j$$

$$a_{i1}x_1^* + \cdots + a_{in}x_n^* + c(a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^*) = b_i + cb_j$$

esto es, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ también es solución de $(A'|b')$. Recíprocamente, supongamos que $(A|b)$ proviene de $(A'|b')$ por transformaciones elementales $T_{ij}(-c)$. Entonces: Si $x^*$ es una solución de $(A'|b')$, también $x^*$ es solución de $(A|b)$. □

**Definición.** Los sistemas de ecuaciones lineales de matriz ampliada de la forma $(A'|b')$, $A' = (a'_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n}}$, con $n$ incógnitas y $k$ ecuaciones tales que existen un número $r$ con $0 \le r \le k$, y subíndices $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$ con la propiedad

$$a'_{ij} = 0 \text{ para } \begin{cases} i = 1, \ldots, r, & j < j_i \\ i > r, & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

y

$$a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{rj_r} \neq 0$$

reciben el nombre de sistemas de ecuaciones lineales *en forma escalonada por filas*.

Se demuestra que:

**Teorema 7.2.** *Todo sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada asociada $(A|b)$ es equivalente a otro de matriz ampliada $(A'|b')$ en forma escalonada por filas, es decir, de la forma*

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1j_1+1} & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{2j_2} & a'_{2j_2+1} & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{3j_3} & \cdots & * & * & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & * & * & \cdots & * & b'_{r-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & a'_{rj_r} & * & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\
\hline
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & b'_k
\end{array}\right)$$

*donde el símbolo $*$ representa un elemento arbitrario de $K$. (Para $i = 1, \ldots, r$, la ecuación i-ésima sólo depende de las incógnitas $x_j$ tales que $j > j_i$.)*

*Demostración.* Sea $(A|b)$ un sistema de ecuaciones lineales. Aplicando transformaciones elementales de tipos I y II, se puede transformar $(A|b)$ en forma escalonada por filas.

*Paso 1*: Si $a_{ij} = 0$ para todos $i, j$, entonces ya tenemos la forma escalonada por filas buscada. Supongamos que $a_{ij} \neq 0$ para por lo menos una pareja de subíndices $(i, j)$. Sea $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ el menor subíndice tal que la $j_1$-ésima columna de $A$ no consta solamente de ceros. Aplicando transformaciones elementales de tipo I se deduce que $a_{1j_1} \neq 0$. Para $i = 2, \dots, k$ aplicamos transformaciones elementales

$$T_{i1}\Big(-\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}\Big).$$

Así conseguiremos un sistema de ecuaciones lineales cuya $j_1$-ésima columna tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{ij_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

en la que $x_{j_1}$ solamente aparece en la primera ecuación. (Las incógnitas $x_1, \dots, x_{j_1-1}$ no aparecen en el sistema si $j_1 > 1$.) De esta manera obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1j_1+1} & a_{1j_1+2} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2j_1+1} & a'_{2j_1+2} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{3j_1+1} & a'_{3j_1+2} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{rj_1+1} & a'_{rj_1+2} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{r+1j_1+1} & a'_{r+1j_1+2} & \cdots & a'_{r+!n} & b'_{r+1} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{kj_1+1} & a'_{kj_1+2} & \cdots & a'_{kn} & b'_k
\end{array}\right)$$

La matriz corresponde al sistema

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} & + & a_{1j_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{2j_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & a'_{3j_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & & & \vdots & \cdots & \vdots & & & \vdots \\
 & & a'_{kj_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k
\end{array}$$

*Paso 2*: Como en el paso 1, consideramos el sistema

$$\begin{array}{ccccccc}
a'_{2j_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
a'_{3j_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & & & \vdots \\
a'_{kj_1+1}x_{j_1+1} & + & \cdots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k
\end{array}$$

y repetimos el argumento de arriba. Tras $k$ pasos como mucho logramos la forma de escalera por filas deseada. $\square$

La demostración del Teorema 7.2 nos ofrece un método útil para la simplificación de un sistema de ecuaciones lineales: el *método de eliminación de Gauß*.

**Ejemplo.** Sea $K = \mathbb{R}$. Buscamos el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\
3x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\
x_1 & & & + & 4x_3 & = & -2
\end{array}$$

cuya matriz ampliada asociada es

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

En lugar de trabajar usando las ecuaciones directamente, razones prácticas aconsejan hacerlo con las matrices ampliadas asociadas. Sobre la matriz $A_1$ aplicamos entonces el método de eliminación de Gauß:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{31}(1)} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{21}(3)} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{32}(1)} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right).$$

Se ve rápidamente: el sistema es compatible determinado con $6x_3 = -6$, es decir $x_3 = -1$, con $-2x_2 = -2 - x_3 = -1$, es decir $x_2 = \frac{1}{2}$, y con $x_1 = 2 - 2x_2 - x_3 = 2 - 1 + 1 = 2$.

**Ejemplo.** Sea $K = \mathbb{R}$. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 30 \end{array}$$

de matriz ampliada asociada

$$(A_2|b_2) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 30 \end{array}\right).$$

Aplicando el método de eliminación de Gauß se obtiene su forma de escalera por filas:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{31}(-4)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -4 & 26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{21}(-2)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{32}(-7)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -4 & 26 \end{array}\right).$$

Esto es, hemos obtenido el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma de escalera por filas:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 4x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 26x_3 & - & 4x_4 & = & 26 \end{array}$$

Las indeterminadas $x_1$, $x_2$ y $x_3$ se llaman variables principales, en tanto que $x_4$ se denomina variable libre, y se dice que el sistema posee un grado de libertad (que corresponde a $x_4$).

**Definición.** Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas $x_1,\dots x_n$ dado en forma escalonada por filas, como la matriz del enunciado del Teorema 7.2. Las incógnitas $x_{j_1},\dots,x_{j_r}$ se llaman *variables principales*, y las incógnitas $x_i$ con $i \notin \{j_1,\dots j_r\}$ se llaman *variables libres*, o también *parámetros* del sistema. El número de parámetros del sistema corresponde a lo que se denominan *grados de libertad*.

La aplicación del método de eliminación de Gauß nos ofrece también las soluciones del sistema:

**Teorema 7.3.** *Sea un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada $(A'|b')$ en forma escalonada por filas como la del Teorema 7.2.*

(a) *El sistema es compatible si y solamente si $b'_{r+1} = \cdots = b'_k = 0$.*
(b) *Supongamos que el sistema de matriz $(A'|b')$ fuera compatible. Se tiene entonces que:*
  (i) *Para cada elección arbitraria $\alpha_j$, $j \notin \{j_1,\dots,j_r\}$, de valores para las variables libres de la forma escalonada por filas de $(A|b)$ existe exactamente una solución $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ del sistema de ecuaciones con $x_j^* = \alpha_j$, $j \notin \{j_1,\dots,j_r\}$. Además, por la ecuación r-ésima del sistema queda fijada la variable principal $x_{j_r}$, de forma que*

$$x_{j_r} = x_{j_r}^* := \frac{1}{a'_{rj_r}}\left(b'_r - a'_{rj_r+1}x^*_{j_r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n^*\right).$$

  *De la ecuación $(r-1)$-ésima se deduce la variable principal $x_{j_r-1}$, y así sucesivamente.*
  (ii) *El sistema de matriz $(A|b)$ es compatible determinado si y sólo si $r = n$ y $b'_{r+1} = \ldots = b'_k = 0$ en la forma escalonada. (En particular ha de cumplirse que $k \geq n$, es decir, que el número de ecuaciones sea mayor o igual que el de incógnitas.)*

*Demostración.* Si se tiene $b'_\nu \neq 0$ para $\nu \in \{r+1,\dots,k\}$, entonces la correspondiente ecuación $\nu$-ésima

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b'_\nu,$$

no posee soluciones, por lo que tampoco todo el sistema. Si se verifica que $b'_{r+1} = \cdots = b'_k = 0$, entonces $(x_1^*,\dots x_n^*)$ serán todas las soluciones del sistema. □

Una forma escalonada por filas se puede simplificar aplicando transformaciones elementales de tipo III

$$T_i((a'_{ij_i})^{-1})$$

para $i = 1, \dots, r$. La ecuación $i$-ésima ($i \leq r$) será de la forma

$$x_{j_i} + a''_{i\,j_i+1} x_{j_i+1} + \cdots + a''_{in} x_n = b''_i .$$

Esto se puede hacer con la primera ecuación

$$x_{j_1} + a''_{1\,j_1+1} x_{j_1+1} + \cdots + a''_{1\,j_2-1} x_{j_2-1} + a''_{1\,j_2+1} x_{j_2+1} + \cdots = b''_1$$

(aquí, por supuesto, solamente aparecen $x_{j_1}$ y a lo sumo las $n-r$ variables libres $x_i$, $i \neq j_1, \dots j_r$.)

De esta primera ecuación solamente se puede eliminar la incógnita $x_{j_2}$: basta con restar la segunda ecuación multiplicada por $a''_{1j_2}$ de la primera. Así se pueden eliminar las variables $x_{j_\nu}$ para $\nu = 2, \dots, k$ de la primera ecuación. Se repite el proceso, y al final se obtiene que se pueden eliminar las incógnitas $x_{j_r}$ de las primeras $r-1$ ecuaciones, y dejar estar ecuaciones de la forma

$$0 = 0$$

(gracias a las transformaciones elementales de tipo IV).

Sobrantes quedan exactamente $r$ ecuaciones, si el sistema de ecuaciones es compatible, las cuales ofrecen inmediatamente una solución. Así se obtiene la llamada forma escalonada por filas *reducida* del sistema de ecuaciones lineales con matriz

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & & & j_1 & & & & j_2 & & & & j_3 & \cdots & j_r & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & &
\end{array} \\
\begin{array}{r} A' = \\ r \rightarrow \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & & & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

(Aquí $*$ representa de nuevo un elemento arbitrario de $K$.)

Si el sistema de ecuaciones lineales es incompatible se obtendrá una ecuación $(r+1)$-ésima contradictoria de la forma

$$0 = 1.$$

**Ejemplo.** Sea $K = \mathbb{R}$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales del último ejemplo, que tiene forma escalonada por filas

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & - & x_2 & - & 4x_3 & & & = & 0 \\
 & & & & 26x_3 & - & 4x_4 & = & 26
\end{array}$$