Vous voulez gagner un million de Dollars ? facile

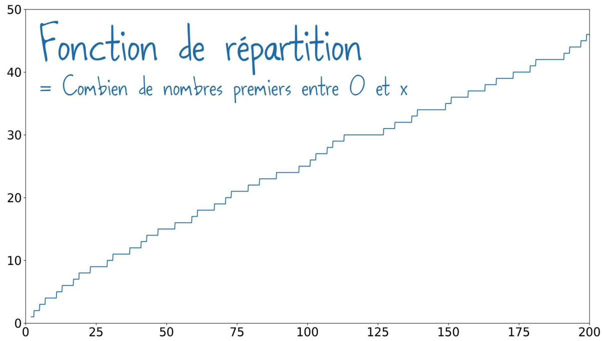
En 1900 David Hilbert a établi une liste de 23 problèmes mathématiques non résolus ou non prouvés. Beaucoup ont été résolus depuis, certains résistent encore.
En 2000, une liste de sept problèmes est publiée par l'institut Clay, correspondant à autant de conjectures. En mathématique, une conjecture est quelque chose que tout le monde pense vrai, mais on n'a pas encore réussi à le prouver par une preuve mathématique.
Une récompense d'un million de dollar est promise pour la découverte de leur solution. L'une des conjectures (celle dite de Poincaré) a été démontrée. Il reste donc 6 millions de dollars à prendre. Il n'y a qu'à se baisser.

Dans cet article, je vais vous parler d'une de ces conjectures : l'hypothèse de Riemann. Je ne rentrerai pas trop dans les détails pour que ça reste compréhensible, même par ma grand-mère.
Riemann est un mathématicien Allemand né en 1828 et mort en 1868. Il s'est beaucoup intéressé à la répartition des nombres premiers sur la droite des entiers, et toute l'histoire part de là.

Pour rappel, un nombre premier est un entier qui n'est divisible que par lui-même et par un. Il en existe une infinité : 2, 3, 5, 7, 11, 13, … Remarquez que 2 est le seul nombre pair qui soit premier, et ça c'est important, pas pour l'énigme qui nous intéresse, mais pour vos connaissances en général.

Pendant longtemps, les nombres premiers étaient considérés comme des curiosités pour s'amuser. Ils possèdent pourtant nombre de propriétés étranges. Par exemple, tout nombre supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers (ça c'est déjà énorme). Tout nombre entier strictement positif peut être écrit comme le produit de nombres premiers (encore plus énorme).
Il y a 25 nombres premiers entre 0 et 100, au delà ils se raréfient mais il y en toujours, on sait depuis l'Antiquité qu'il en existe une infinité. Il n'y a pas vraiment de logique dans leur répartition, parfois plusieurs sont regroupés, parfois il y a des grands troüs.
Les calculs sur les nombres premiers sont réputés complexes même avec les ordinateurs d'aujourd'hui, c'est pour ça qu'ils sont massivement utilisés maintenant pour sécuriser les échanges informatiques (domaine de la cryptographie, je vous renvoi à l'excellent article du journaliste Pop's). De simple amusement de salon ils sont passés au premier plan, à tel point que certains mathématiciens les considèrent comme les atomes des autres nombres.
Déterminer tous les nombres premiers entre 0 et 10 millions prend quelques secondes sur un ordinateur équipé d'un processeur moderne, par contre le temps de calcul augmente de façon exponentielle si on cherche par exemple entre 0 et 100 milliards.

Ce que mon ordi a fait en quelques secondes, à l'époque de Riemann, il fallait le faire à la main, ça représente plusieurs dizaines de millions de divisions, autant dire qu'une vie entière n'y suffisait pas.
On peut tracer la courbe de répartition des nombres premiers à la main, ça donne cette courbe en escalier (chaque fois qu'un nombre est premier, on fait +1), mais difficile de le faire à grande échelle.



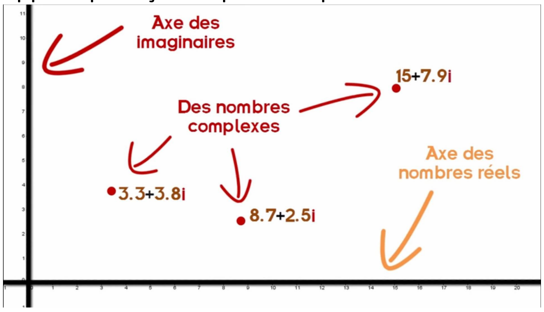
Riemann a donc cherché une fonction, une formule magique qui donnerait plus facilement la répartition des nombres premiers.
Il s'est appuyé pour ça sur les travaux d'un mathématicien Suisse, Leonhard Euler (1707 – 1783). Euler c'est une vraie Rock Star des mathématiques, on lui doit pleins de trucs, on lui doit notamment la formule la plus célèbre des mathématiques :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

*[du coup exp (i * PI) = -1, vous l'auriez deviné]*
Prenez quelques secondes pour bien regarder cette merveille, elle fait le lien entre trois domaines mathématiques qui en première approche ne devraient pas avoir de lien, et Euler a établit ce lien.
- Cosinus, Sinus et le nombre PI ont été inventé pour la géométrie du cercle, le nombre PI permet de faire un lien entre le diamètre et la circonférence d'un cercle, c'est même pour ça qu'on l'a crée dans l'Antiquité.
- Les fonctions Exponentielle et Logarithme ont été inventée par John Napier vers 1600 pour faciliter les multiplications et les divisions. Souvenez vous de la galère que c'était de faire une division à la main, personnellement je ne sais plus faire. Le log permet de ramener une multiplication à une addition car log (a * b) = log(a) + log(b) et une division à une soustraction car log (a / b) = log(a) - log(b), souvenez vous des tables de logarithme, quel cauchemar.
- Le 'i' qu'on voit dans la formule, c'est le 'i' des nombres complexes, encore un domaine super utilisé dans l'informatique moderne, dites vous que l'application Shazam ne pourrait pas fonctionner sans les nombres complexes.

Les nombres complexes, c'est juste un outil mathématique qui a été inventé pour aide à solutionner

des problèmes comme par exemple $x^2 + 1 = 0$, qui n'a pas de solution dans l'ensemble des réels.
Les nombres complexes sont des nombres qui s'écrivent sous la forme a + i*b où a et b sont des nombres (réels) et où i est une « entité » tel que $i^2 = -1$.
On a l'habitude de les représenter sur un plan, qu'on appelle pour ça le « plan complexe »



Il faut voir ça comme un outil mathématique qui sert juste à résoudre des problèmes réels. C'est souvent plus facile de modéliser un problème dans le plan complexe et ensuite de le ramener à la droite des réels (Jipihorn en parle bien sur sa chaîne Youtube).

Je vous rappelle que Riemann s'intéresse à la répartition des nombres premiers, et pour ça il est parti d'une égalité qui avait été démontrée par Euler (encore lui), plus d'un siècle avant, voici cette égalité. **(Attention, c'est là qu'il faut toute votre attention, concentrez-vous, c'est super important, toute l'histoire démarre de cette égalité incroyable)** :

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \frac{1}{1-7^{-s}} \times \cdots$$

Ça a l'air super compliqué, mais en fait pas tant que ça. Prenez quelques secondes pour bien observer cette égalité démontrée par Euler. Concentrez vous sur les trucs en rouge, le reste c'est du détail.
Je commence par la première partie. En math on a le droit de faire des sommes infinies d'expressions élémentaires, c'est ce qu'on appelle un développement en série (et que nous avons étudié à l'Ecole). Il faut savoir que cette notion et méga utilisée dans vos ordinateurs, un ordinateur ne sait faire que les quatre opérations de base, s'il doit calculer un cosinus, l'ordinateur utilise le développement en série entière de la fonction cosinus.
Au dénominateur de cette première partie, on trouve tous les entiers de 2 à l'infini **(et c'est important de noter ça)**.
La deuxième partie est une multiplication infinie d'expressions élémentaires, je ne vais pas rentrer dans les détails de la démonstration, mais Euler à démontré mathématiquement que ces deux parties étaient égales.
Regardez bien les dénominateurs de la deuxième partie, on a les chiffres 2, 3, 5, 7, puis si on continue 11, 13, 17, 19, … ce sont tous les nombres premiers entre 0 et l'infini, abouzant, non ?

Il faut bien observer cette égalité, car c'est le point central de la problématique qui nous intéresse ici. D'un coté vous avez une somme infinie faisant intervenir tous les entiers positifs, et de l'autre vous avez une multiplication infinie faisant intervenir tous les nombres premiers, c'est très important, car tout part de là.

Riemann s'est dit, comme la seconde partie contient tous les nombres premiers, la première partie de l'égalité doit forcément contenir le « secret » de la répartition des nombres premiers, ou au moins une information importante.

Comme il était très modeste, il a appelé la première partie de cette égalité, la fonction « Zeta de Riemann ». Il n'a rien inventé là, il lui a simplement donné un nom, et elle est noté avec une lettre Grec, Zeta, ça fait plus chic.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

Cette fonction Zeta a quelques propriétés remarquables, par exemple Zeta(2) est égal à PI au carré sur six, c'est toujours méga important de voir ce que donne une fonction pour la valeur 2,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Que vient faire PI dans cette histoire, PI a été inventé pour faire le lien entre le rayon et la circonférence d'un cercle, quel est le rapport entre Zeta et un cercle, cette fonction est carrément étrange et mystérieuse, mais c'est important pour votre culture de connaître Zeta(2).
Riemann a eu l'idée d'étendre la définition de la fonction Zeta au plan complexe. Je ne vais pas rentrer dans les détails, mais en mathématique on a le droit de faire ça par des techniques qu'on désignent avec des mots compliqués comme « holomorphe ». En gros il fait en sorte de pouvoir injecter des nombres complexes dans la fonction Zeta. Du coup ça nous donne des choses du genre :

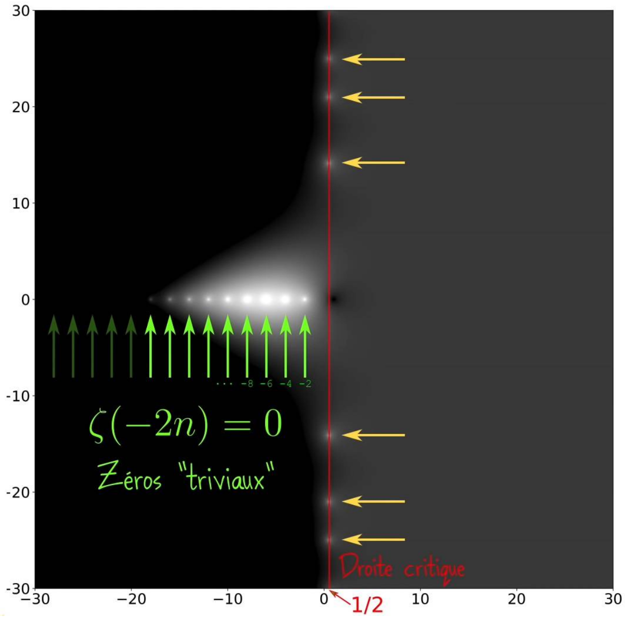
$$\zeta(2+i) = 1 + \frac{1}{2^{2+i}} + \frac{1}{3^{2+i}} + \frac{1}{4^{2+i}} + \frac{1}{5^{2+i}} + \cdots$$

Du coup il faut calculer une puissance avec des nombres complexes, et ça c'est compliqué (norm's), heureusement Euler arrive une nouvelle fois à notre rescousse avec une formule qui envoie encore plus de pâtos. En fait c'est une généralisation de la première. Prenez quelques secondes pour la regarder, elle n'est pas aussi compliquée qu'on pourrait le croire (mais elle est abouzante).

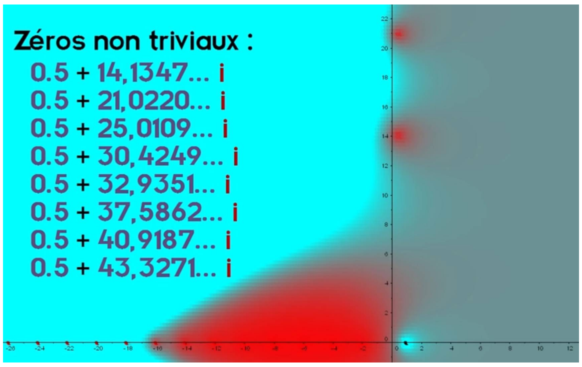
$$x^{a+ib} = x^a \cos(b \ln x) + i x^a \sin(b \ln x)$$

On peut calculer ça à la main, mais un ordinateur est vivement conseillé, parce que calculer un cosinus de logarithme juste avec des tables de calcul, bonjour le mal de tête, mais Riemann, lui, l'a fait à la main.

Bref avec d'autres petits changements encore, Rieman parvient à définir Zeta sur l'ensemble du plan complexe. Ensuite il se mets en tête de rechercher les points du plan qui annulent la fonction Zeta. Rapidement, il prouve que tous les nombre pairs négatifs annulent la fonction Zeta, il les appellent les « zéros triviaux », mais c'est loin d'être trivial de le démontrer.



Il continue à chercher, et il trouve d'autres points qui annulent la fonction Zeta, et il constate que tous ces points sont alignés sur une droite verticale qui passe par 0,5. Par exemple, la liste des premier « zéros » est ci-dessous :

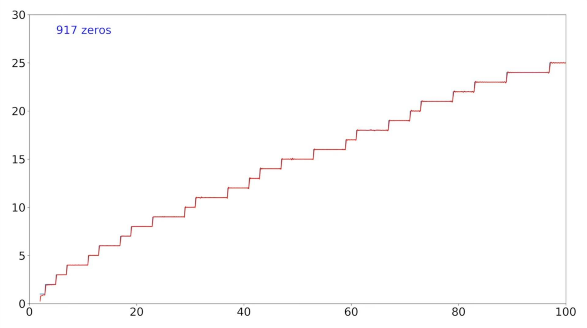


A ce jour, on a trouvé des milliards de ces points par ordinateur, les coordonnées commencent toutes par 0,5, et la deuxième coordonnée est toujours un nombre alambiqués et sans aucune logique de répartition apparente (un peu comme les nombres premiers en fait).

Et c'est ça l'hypothèse de Riemann : « tous les zéros non triviaux de la fonction Zeta de Riemann commencent par 0,5 ». Si vous démontrez ça ou que vous trouvez un contre exemple, vous gagnez un million de dollar. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur le problème depuis 150 ans et se sont cassés les dents, et pourtant tout le monde pense que l'hypothèse est vraie. Un mathématicien Allemand a tenté de proposer une solution il y a quelques années, la communauté a rejeté sa proposition.

Démontrer l'hypothèse de Riemann ne changerait certainement pas grand chose à la vie de la planète, ça permettrait simplement de lever le voile sur l'un des nombreux mystères des nombres premiers, certains l'appelle le Da Vinci code des nombres premiers, d'autres pensent que ça permettrait d'ouvrir de nouveaux horizons de recherche en mathématique. En tout cas tout le monde à le droit d'essayer, et c'est gratuit, alors pourquoi s'en priver ?

C'est bien beau cette histoire de zéro de la fonction Zeta, mais avec tout ça, nous n'avons toujours pas notre fonction de répartition des nombres premiers, c'était ça l'objectif de Riemann au départ.
Je ne vais pas rentrer dans les détails techniques, il est parti d'une fonction régulière et continue, et pour chaque zéro calculé de la fonction Zeta, il apporte une correction à la courbe d'origine via une suite, et plus on calcule de zéros, et plus la courbe de répartition est précise. La courbe ci-dessous est celle qu'on obtient au bout de 917 zéros (j'ai fait une copie d'écran au hasard et c'est tombé sur 917), on voit qu'elle colle très bien à la courbe en escalier faite à la main au début de cet article.



Si on calculait une infinité de zéros, on obtiendrait en théorie la répartition des nombres premiers, mais l'infini c'est loin, mais surtout « l'infini c'est droit devant » (Ap's Mirab's)...

Dans les mathématiques, même sur des choses aussi simples que les nombres entiers, on est loin d'avoir tout découvert, alors toi mon cher Colon, avec ton article zacreux sur le big bang, qui pense avoir tout chiqué aux Trad's et à la Galaxie, allonge toi et usine Zeta(48+2*i) pompes, on fait moins le malin, hein ?

Pour cet article, je me suis inspiré de la vidéo de « ScienceEtonnante » et de celle de « El Jj »

Jean-Bernard