

Fiches de Révision MP

TOME I - Physique et Chimie

Jean-Baptiste Théou

Licence

J'ai décidé d'éditer cet ouvrage sous la licence Créative Commons suivante : CC-by-nc-sa.

Pour plus d'information :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/>.

Ce type de licence vous offre une grande liberté, tout en permettant de protéger mon travail contre une utilisation commerciale à mon insu par exemple.

Pour plus d'information sur vos droits, consultez le site de Créative Commons

Avant-propos

Il y a un plus d'un an, au milieu de ma SUP MP, j'ai décidé de faire mes fiches de révision à l'aide de Latex, un "traitement de texte" très puissant. Il en résulte les fiches qui suivent. Je pense que travailler sur des fiches de révision, totalement séparé de notre cours, est un énorme plus, et réduit grandement la quantité de travail pour apprendre son cours, ce qui laisse plus de temps pour les exercices. Mon expérience en tout cas va dans ce sens, j'ai notablement progressé à l'aide de ces fiches.

J'ai décidé de les rassembler sous forme d'un "livre", ou plutôt sous forme d'un recueil. Ce livre a pour principal intérêt pour moi d'être transportable en cours. C'est cet intérêt qui m'a poussé à faire ce livre.

Dans la philosophie de mes fiches de révision, ce livre est disponible gratuitement et librement sur mon blog. Il est édité sous License Créative Commons. Vous pouvez librement adapter ce livre à vos besoins, les sources Latex sont disponibles sur mon blog. Je pense que pour être en accord avec la philosophie de ces fiches, il sera bien que si vous effectuez des modifications de mon ouvrage, vous rendiez ces modifications disponibles à tous. Je laisserai volontiers une place pour vos modifications sur mon blog. Je pense sincèrement que ce sera vraiment profitable au plus grand nombre, et dans la logique de mon travail.

J'ai hiérarchisé mon ouvrage de façon chronologique. Les parties sont rangées dans l'ordre "d'apparition" en MP, tout en conservant une certaine logique dans les parties. J'ai mis en Annexe des petites fiches de méthodologie, qui peuvent s'avérer utiles.

Je vous souhaite une bonne lecture, et surtout une bonne réussite.

Jean-Baptiste Théou

Remerciements

Je tiens à remercier Georges Marin, Professeur de Physique-Chimie en MP au Lycée Lesage et François Brunou, Professeur de Mathématiques en MP au Lycée Lesage.
Sans eux, ce livre ne pourrai exister.

Première partie

Electricité

Fonction de transfert

1.1 Modèle du quadripôles

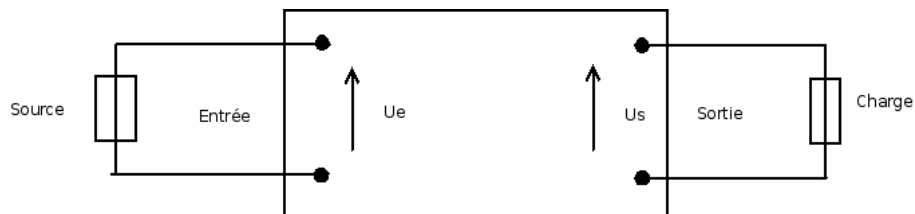


FIGURE 1.1 – Modèle du quadripôle

Si la source est une source de tension, on étudiera le cas où la source délivre un signal sinusoïdale ou échelon

Dans le cas sinusoïdale, on définit deux sous circuits :

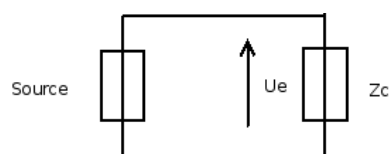


FIGURE 1.2 – La source

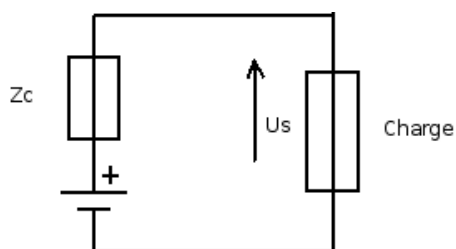


FIGURE 1.3 – La charge

1.2 Fonction de transfert complexe

Définition 1 Dans le cas d'une source fournissant un signal sinusoïdale, on définit une fonction de transfert par :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{X}_s}{\underline{X}_e}$$

avec :

→ \underline{X}_s : Grandeur de sortie (Tension ou intensité)

→ \underline{X}_e : Grandeur d'entrée (Tension ou intensité)

Ces fonctions de transfert sont sans dimensions.

1.2.1 Amplitude

Soit ω une pulsation, définie en rad.s^{-1} .

On associe à ω une fonction de transfert $H(j\omega)$.

Définition 2 On appelle amplitude de H le module de H .

$$(A \text{ est l'amplitude de } H) \Leftrightarrow (A = |H(j\omega)|)$$

1.2.2 Gain en décibel

Définition 3 On définit le gain en décibel d'une fonction de transfert par :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$$

On utilise une échelle logarithmique pour pouvoir couvrir un large spectre de fréquence.

1.2.3 Bande passante

Définition 4 On définit une bande passante comme l'ensemble des fréquences $\{f\}$ vérifiant :

$$|H(j2\pi f)| \geq \frac{H_{max}}{2}$$

1.2.4 Phase

Définition 5 La phase de la fonction de transfert $H(j\omega)$ est l'argument de celui-ci.

1.3 Représentations

1.3.1 Diagramme de Bode

On définit deux graphiques :

→ Celui du Gain : $\log(f)$ en abscisse, G_{dB} en ordonnée

→ Celui de la phase : $\log(f)$ en abscisse, φ en ordonnée

1.3.2 Diagramme de Nyquist

On définit, dans le plan complexe, un point M qui a pour module $|H(j\omega)|$ et pour angle par rapport à l'axe de réel, φ

1.4 Lien entre régime transitoire et fonction de transfert

1.4.1 Précaution d'utilisation

Pour pouvoir utiliser ce procédé qui permet d'obtenir l'équation temporelle d'après la fonction de transfert, il faut que, lors de l'obtention de la fonction de transfert, si il existe plusieurs dipôles identiques dans le circuit, on les ai considérés de façon différente (ex : Si il y a deux résistance de valeur R, on pose qu'une est de valeur R, l'autre de valeur R', même si R=R'). A partir de là, on peut passer en temporel, et une fois l'équation différentielle obtenu, on utilise le fait que R=R'.

1.4.2 Principe

Considérons un quadripole. Pour déterminer l'équation différentielle relative au régime transitoire, on peut utiliser la fonction de transfert. On considère donc que le circuit fonctionne en régime sinusoïdale. Une fois la fonction de transfert établie, on remplace les $(j\omega)^n \underline{X}^n$ par $\frac{d^n X}{dt^n}$, et on obtient l'équation différentielle qui régit le système en régime transitoire.

1.5 Type de réponse

1.5.1 Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à un échelon.

1.5.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse du système à un échelon de longueur τ .

Propriété 1 Dans ce cas, on obtient la propriété suivante, qui est une propriété des transformée de Fourier :

$$BP.\tau = 1$$

1.6 Réponse d'un filtre à un signal périodique

Soit $e(t)$ la tension d'entrée du quadripole.
Si $e(t)$ est de la forme :

$$e(t) = E.\cos(\omega t)$$

Alors $s(t)$, la tension de sortie du quadripole est donnée par :

$$s(t) = |H(j\omega)|.E.\cos(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))$$

1.7 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

1.7.1 Filtre intégrateur

Définition 6 On dit d'un filtre qu'il est intégrateur si :

$$s(t) = \frac{1}{a} \cdot \int e(t)$$

ou

$$e(t) = a \cdot \frac{ds(t)}{dt}$$

Ce qui signifie que la fonction de transfert du système est de la forme (Intégrateur idéal) :

$$H(j\omega) = \frac{1}{ja\omega}$$

1.7.2 Filtre dérivateur

Définition 7 On dit d'un filtre qu'il est dérivateur si :

$$s(t) = b. \frac{de(t)}{dt}$$

Ce qui signifie que la fonction de transfert du système est de la forme (Dérivateur idéal) :

$$H(j\omega) = jb\omega$$

Chapitre 2

Analyse d'un signal

2.1 Signal périodique

Soit f une fonction.

Définition 8 f est une fonction périodique si :

$$\exists T > 0 \forall t \ f(t + T) = f(t)$$

2.1.1 Caractéristique principale

Soit f une fonction périodique.

Période, fréquence

Ces deux caractéristiques sont fondamentale. La fréquence de la fonction est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

Valeur moyenne

Définition 9 On défini la valeur moyenne d'une fonction f de la façon suivante :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Valeur efficace

Définition 10 On défini la valeur efficace d'une fonction f de la façon suivante :

$$F_e = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle}$$

On peut l'écrire aussi sous la forme :

$$F_e^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt$$

2.2 Décomposition d'un signal périodique en fonction sinusoïdale

2.2.1 Théorème de Fourier

Énoncé 1 Considérons une fonction périodique f :

$$\exists T \neq 0 \forall t \ f(t+T) = f(t)$$

Il existe deux suites, (a_n) et (b_n) , telle que :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont appelés coefficients de Fourier.

Énoncé 2 $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Propriété 2 On observe que :

- Si f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n = 0$
- Si f est paire, $\forall n \in \mathbb{N} \ b_n = 0$

Coefficients de Fourier complexe

Propriété 3 En passant cos et sin en complexe, dans les coefficients de Fourier, on obtient que :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{\frac{i 2\pi n t}{T}}$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-\frac{i 2\pi n t}{T}} dt$$

2.2.2 Identité de Parseval

Soit f fonction périodique.

Définition 11 Considérons le développement en série de Fourier de f :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)$$

On en déduit que :

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{a_0^2}{4} + \sum_1^{\infty} \frac{a_n^2}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{b_n^2}{2}$$

car tous les doubles produits, issue de l'élevation au carré, qui comporte des fonctions cos ou sin ont une valeur moyenne nulle. En posant :

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

On obtient :

$$\langle f^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

2.2.3 Transformée de Fourier

Définition 12 *Considérons f , une fonction.*

On associe à f une fonction périodique \tilde{f} :

$$\forall t \quad f(t) \rightarrow \tilde{f}(\nu)$$

Avec :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

On peut retourner cette égalité.

Deuxième partie

Electrostatique et Electrocinétique

Chapitre 1

Forme locale de l'électrostatique

1.1 Champs électrique

1.1.1 Définitions

Définition 13 Soit E une application :

$$E : M \mapsto \vec{E}(M)$$

Si en un point M , on place une charge q_0 , cette charge subit une force \vec{f} .
On définit donc le champs électrique par :

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_0}$$

On observe donc que le champs électrique est indépendant de la charge q_0 . On obtient donc qu'en introduisant un champs, on se libère du point d'observation.

Loi de Coulomb

Définition 14 Soit $A(q_1)$ un point matériel de charge q_1 , $B(q_2)$, un point matériel de charge q_2 . La force exercé de A sur B est donnée par, avec $r = \|\vec{AB}\|$:

$$\vec{f} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$$

Avec :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$

. On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{q \cdot \vec{AB}}{AB}$$

Calcul direct du champs

Considérons un volume chargée.
Considérons une charge élémentaire dans ce volume, notée dq :

$$dq = \rho \cdot dv$$

Avec ρ la densité volumique de charge de ce volume, et dv le volume élémentaire contenant cette charge dq .

Soit M un point de l'espace, et P un point appartenant à dq. On obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{source} \frac{\rho \cdot \vec{PM}}{PM^3} \cdot dv$$

1.2 Potentiel électrique

Définition 15 En partant de l'expression de la force déterminer dans le paragraphe à propos de la loi de coulomb :

$$\vec{f} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM}$$

On obtient que, avec :

$$\delta\omega = \vec{f} \cdot d\vec{m}$$

$$\vec{OM} = r \cdot \vec{u}_r$$

$$d\vec{m} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta + r \cdot \sin(\theta) d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi$$

Donc :

$$\delta\omega = -\frac{d}{dr} \left(\frac{q \cdot q' \cdot r}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

On peut donc introduire une énergie potentielle (au sens mécanique du terme).

$$E_p = q' \cdot \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = q' \cdot V(m)$$

D'ou :

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{m} = -dV$$

On peut écrire cette relation sous la forme :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V$$

En partant de l'expression du gradient de V et de l'expression $d\vec{m}$ dans un système de coordonnées, on peut déterminer l'expression du champ électrique.

1.2.1 Calcul direct du potentiel

Définition 16 Considérons un volume chargé, de densité volumique de charge ρ .
Considérons un volume élémentaire dv , avec P appartenant à dv , et M un point de l'espace :

$$V(M) = \iiint_{V_{charge}} \frac{\rho \cdot dv}{4\pi\epsilon_0 \cdot PM}$$

1.2.2 Condition pour qu'un champ de vecteurs soit un gradient

Soit $\vec{D}(M)$ un champ de vecteur.

Soit $\overrightarrow{rot}(\vec{D})$, le rotationnel de D, défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{D} = \left(\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z}; \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x}; \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right)$$

Si $\overrightarrow{rot}(\vec{D}) = \vec{0}$, alors :

$$\exists g \text{ tq } \vec{D}(M) = \overrightarrow{grad}(f)$$

1.2.3 Lien entre direction de champs et surface equipotentielle

Propriété 4 $\vec{E}(M)$ sera parallèle à la surface équipotentielle $V(M)$, avec $\vec{E}(M)$ dirige vers les potentiels décroissants

1.3 Théorème de Gauss

Énoncé 3 Le flux du champ électrique à travers une surface fermée Σ orienté vers l'extérieur est égale à la charge intérieure à cette surface sur la permittivité du vide, ϵ_0 :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Propriété 5 D'après le théorème de Gauss, on peut déduire que le potentiel ne peut pas être extremum au niveau d'un point vide de charge.

1.3.1 Forme locale du théorème de Gauss

Opérateur Divergence

Définition 17 On définit l'opérateur divergence, notée div , par :

$$div : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{D} \mapsto div(\vec{D})$$

Supposons que $\vec{D}(x, y, z)$, alors :

$$div(\vec{D}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Propriété 6 Considérons une surface fermée Σ , de volume intérieur chargé V :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V div(\vec{E}) \cdot dV$$

1.3.2 Équation de Poisson

Opérateur Laplacien

Définition 18 On définit l'opérateur Laplacien, noté Δ , par :

$$\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \Delta(A)$$

Avec :

$$\Delta(A) = \frac{\partial^2 A}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 z}$$

Énoncé

Considérons une surface fermée, Σ , de densité volumique de charge ρ , de volume chargé V . D'après le théorème de Gauss, on obtient que :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon_0} = \iiint_V div(\vec{E}) \cdot dV$$

On en déduit donc la relation locale suivante, qui dépend du point M :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}(\vec{E})$$

Or, par définition :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V)$$

On obtient donc que :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = -\Delta(V)$$

Avec $\Delta(V)$ le Laplacien de V.

On obtient donc que :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\Delta V$$

Ceci constitue l'équation de Poisson.

Chapitre 2

Conducteur électrique en équilibre

2.1 Définitions

2.1.1 Conducteur

Définition 19 Un conducteur est un composant qui contient des charge mobiles, susceptible de se déplacer.

Définition 20 On dit qu'un conducteur est à l'équilibre si il est à l'équilibre mécanique.
Toutes les charges à l'intérieur de ce conducteur doivent être à l'équilibre mécanique.
Considérons une charge mobile. Cette charge est à l'équilibre si :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

2.2 Propriétés de l'équilibre pour un conducteur donnée

2.2.1 Conséquence des définitions globale

Le champs électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur

Considérons un électron.
Le système est à l'équilibre, on obtient donc :

$$q \cdot \vec{E} + m \cdot \vec{g} = \vec{0}$$

Ce qui implique que :

$$\vec{E} = \frac{-m \cdot \vec{g}}{q}$$

Par application numérique, on obtient un champs électrique de l'ordre du 10^{-11} .
On peut donc considérer qu'à l'équilibre, le champs électrique est nul.

Le conducteur est un volume équipotentiel

Sachant que :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$$

On obtient, qu'à l'équilibre, comme le champs est nul, le potentiel est une constante.
Un conducteur à l'équilibre est donc un volume équipotentiel

La densité volumique de charge est nul dans un conducteur

Nous avons vu que :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ceci implique que $\rho = 0$. À l'intérieur du conducteur, les charges se compensent. L'excédent de charge est porté par la surface. Il y a donc une densité surfacique de charge.

2.2.2 Cavité vide de charge dans un conducteur

En considérant le fait qu'on ne peut pas avoir un extremum du potentiel dans une zone vide de charge, et qu'il y a continuité du potentiel à la traversée de la surface, le potentiel dans la cavité est le même que dans le conducteur.

2.2.3 Champs électrique à la surface du conducteur

Nous avons vu :

$$\vec{E}_{int} - \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Or le champ intérieur est nul dans un conducteur à l'équilibre, nous l'avons vu. On obtient donc que :

$$E_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La mesure du champ électrique extérieur permet donc de connaître la densité surfacique σ .

2.3 Système de conducteur en équilibre

2.3.1 Il y a unicité des solutions

Considérons un ensemble de conducteurs. On démontre que si on a un ensemble de conducteurs, et si on fixe des conditions (ex : La charge q_i ou le potentiel V_i du conducteur i), alors $V(M)$ est fixé (Et non défini à une constante près, comme habituellement).

De plus, on a :

$$\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Car l'espace entre les conducteurs est vide de charge. On fait appel aux conditions appelées conditions limite :

→ Si V_i est connu, à l'aide d'une relation de continuité par exemple

→ Si q_k est connu, à l'aide d'une surface de Gauss par exemple

Alors il existe une solution unique pour définir $V(M)$

2.3.2 Conducteur seul dans l'espace

On pose la relation suivante :

$$Q = C.V$$

Avec Q la charge, C la capacité du conducteur, et V le potentiel.

Considérons une sphère de rayon r .

On obtient à l'aide d'une surface de Gauss que :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r}$$

En posant que le potentiel est nul à l'infini (pour la constante).

On obtient donc dans ce cas que :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

2.3.3 Influence électrique

Considérons une sphère métallique conducteurs.

Si on rapproche une charge de ce conducteur, la répartition des charges en surface est modifiée, mais ρ , la densité volumique de charge demeure nulle.

2.4 Condensateur

Définition 21 *Un condensateur est composé de deux conducteurs en influence totale.*

2.4.1 Capacité d'un condensateur

Considérons un condensateur composée de deux conducteurs sphériques 1, de charge Q_1 et 2, de charge intérieure (surface la plus proche de 1) $Q_{2 \text{ int}}$, et de charge extérieure $Q_{2 \text{ ext}}$, avec 1 intérieur à 2.

Considérons une surface Σ sphérique contenu dans 2. Les conducteurs étant à l'équilibre, on obtient que :

$$\forall M \in \Sigma \quad \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 = \frac{Q_1 + Q_{2 \text{ int}}}{\varepsilon_0}$$

Ceci implique que :

$$Q_{2 \text{ int}} = -Q_1$$

Considérons maintenant un point M extérieur à 2. On obtient :

$$\iint \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{Q_1 + Q_{2 \text{ int}} + Q_{2 \text{ ext}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{2 \text{ ext}}}{\varepsilon_0}$$

Le champ entre les armatures ne dépend que de Q_1 . On obtient donc :

$$Q_1 = C \cdot (V_1 - V_2)$$

Complément d'électrocinétique

3.1 Définitions

3.1.1 Intensité de courant

Définition 22 L'intensité est un débit de charge :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

3.1.2 Vecteur densité surfacique de courant

Définition 23 On considère une surface Σ . On peut écrire :

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Avec \vec{j} le vecteur densité surfacique de courant.

Considérons un modèle composé d'un seul type de porteur de charge. On obtient que :

$$dq = \rho_m \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot \Sigma \cdot dt$$

On peut identifier et on obtient que :

$$\vec{j} = \rho_m \cdot \vec{v}$$

Avec ρ_m la densité de charge mobile. Par un théorème de superposition, on obtient dans un modèle de multiple porteur de charge :

$$\vec{j} = \sum \rho_{m,i} \cdot \vec{v}_i$$

3.1.3 Équation de continuité

Considérons un conducteur fermé de surface Σ . Nous avons les équations suivantes :

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$i = \frac{-dQ}{dt}$$

$$Q = \iiint_v \rho \cdot dv$$

En considérant que cette surface est invariante avec le temps, on obtient que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

Ceci est une équation locale, car toutes ces composantes dépendent du point M. Cette équation est l'expression de la conservation de la charge.

On en déduit qu'en régime permanent, conscient que dans ce cas ρ est une constante par rapport au temps :

$$\text{div}(\vec{j}) = 0$$

3.2 Expression de la puissance reçue par un dipôle

Considérons un dipôle contenant des charges mobiles. En discrétisant le problème, on obtient l'expression du travail :

$$\omega = \sum q_i \cdot \vec{E}(m_i) \cdot \vec{v}_i \cdot dt$$

Cette somme est à réaliser sur l'ensemble des charges mobiles. Dans le cas continu, on obtient :

$$\omega = \iiint_v \rho_{mobile} \cdot d\tau \cdot \vec{E}(M) \cdot \langle \vec{v} \rangle \cdot dt$$

D'où l'expression de la puissance, sachant que :

$$P = \frac{d\omega}{dt} = \iiint_v \rho_{mobile} \cdot d\tau \cdot \vec{E}(M) \cdot \langle \vec{v} \rangle$$

D'où :

$$P = \iiint_v \vec{j} \cdot \vec{E}(M) \cdot d\tau$$

Cette expression est l'expression de la puissance reçue par le dipôle.

Au final, on obtient donc que :

$$P = i * (V_A - V_B)$$

Avec A et B respectivement le point d'entrée et le point de sortie du dipôle.

3.3 Conducteur ohmique

3.3.1 Loi d'Ohm

Soit la loi d'Ohm :

$$U = R \cdot i$$

Cette relation revient à dire que :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Avec σ la conductivité.

La loi d'ohm ne s'applique que si ρ_m est une constante indépendante de \vec{E} . En pratique, un dipôle vérifie la loi d'ohm dans un certain intervalle de valeur pour \vec{E} .

3.3.2 Résistance électrique

Définition 24 Considérons un dipôle électrique. On suppose qu'il vérifie la loi d'ohm, donc :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

De plus, nous avons les équations suivantes :

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

On en déduit donc que :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dm}$$

On obtient donc que :

$$V_A - V_B = R \cdot i$$

Avec R une constante, appelé résistance

Propriété 7 On remarque des corrélations entre la capacité et la résistance d'un dipôle. On montre que dans une topologie proche, on a :

$$R \cdot C = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

3.3.3 Effet Joule

Considérons un dipôle. Soit P la puissance reçue par ce dipôle. On obtient :

$$P = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

Or dans le cas d'un conducteur ohmique :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Donc :

$$P = \iiint \sigma \cdot E^2 \cdot d\tau > 0$$

Donc un conducteur ohmique ne peut que consommer de l'énergie.

Troisième partie

Thermodynamique

Chapitre 1

Rappel et complément - Thermodynamique classique

1.1 Principe

1.1.1 Principe zéro

Énoncé 4 *Si on prend un système isolé, celui-ci évolue vers un état d'équilibre*

Ce principe est celui de l'existence d'état d'équilibre.

Dans ces états d'équilibre, les grandeurs thermodynamique, grandeurs macroscopique, sont parfaitement définies.

Grandeur intensive, extensive

Définition 25 *Une grandeur est extensive si l'addition a un sens pour elle. Si ça n'est pas le cas, la grandeur est dite intensive*

1.1.2 Premier Principe

Énoncé 5 *Le premier principe est un principe d'évolution Il existe une grandeur, appelé énergie totale, extensive et conservative, que l'on peut définir dans tous système fermé. On appelle énergie totale d'un système, toutes l'énergie présente, peu importe sa forme.*

$$E_{tot} = E_{m,M} + u + E_{nucl} + E_{autre}$$

L'énergie est une fonction d'état. Elle ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état de départ et de l'état d'arrivée.

La variation de cette énergie est donnée par :

$$\Delta E = w + Q$$

Enthalpie

Définition 26 *Soit enthalpie, fonction d'état notée H, la fonction définie par :*

$$H = u + pV$$

Avec u énergie interne, p la pression et V le volume.

Propriété 8 *Dans le cas d'une transformation monobar (pression extérieure constante), on a :*

$$Q = \Delta H$$

Extension du premier principe à un système ouvert

Propriété 9 On peut étendre ce principe à un système ouvert. Par exemple, dans le cas d'un fluide en écoulement, on prend comme système : Système ouvert (Machine) + fluide qui entre pour l'instant t , et Système ouvert (Machine) + fluide qui sort à l'instant $t+dt$. Dans ce cas, on peut appliquer le premier principe à ce système.

1.1.3 Second principe

Énoncé 6 Énoncé de Thompson :

Une machine ne peut pas effectuer un travail si elle n'est en contact qu'avec une seule source de chaleur

Énoncé 7 Énoncé de Clausius :

Il ne peut pas y avoir de transformation dont le seul effet serait de transporter de la chaleur d'une source froide vers une source chaude.

Entropie

Énoncé 8 Pour tout système fermé, on peut définir une fonction d'état, notée S , appelée entropie, qui sera une grandeur extensive, mais non conservative. Cette grandeur peut être créée ou non, mais jamais détruite.

Définition 27 Le bilan entropique est défini par :

$$\Delta S = S^r + S^p = \int dS$$

$$S^r = \int \frac{\delta Q}{T_f}$$

Si le système est caractérisé par T, V , on a :

$$dS = \frac{du}{T} + \frac{p.dV}{T}$$

Si il est caractérisé par p, T , on a :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V.dp}{T}$$

On détermine S^p à l'aide de la relation :

$$S^p = \Delta S - S^r$$

Température

À l'aide de l'expression de dS dans le cas d'un système caractérisé par T, V , on peut définir la température par :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)_V$$

1.2 Quelques notions de mécanique statique

1.2.1 Modèle cinétique du gaz parfait

Définition 28 On montre que la pression exercée par N molécule de masse m , dans un volume V est donnée par :

$$P = \frac{N.m.<v^2>}{V.3}$$

Avec $<v^2>$ la vitesse quadratique moyenne des molécules.

Définition 29 On définit la constante de Boltzmann, notée k , par :

$$k = \frac{R}{N_A}$$

Avec R la constante des gaz parfaits, et N_A le nombre d'Avogadro.

Définition 30 Chaque terme énergétique ajoute un terme en $\frac{1}{2}R$ dans la capacité calorifique à volume constant dans le modèle des gaz parfaits.

Pour un gaz parfait diatomique, on définit :

- $C_v = \frac{3}{2}R$ à basse température (Translation)
- $C_v = \frac{5}{2}R$ à température ambiante (Translation + rotation)
- $C_v = \frac{7}{2}R$ à haute température (Translation + rotation + vibration)

1.2.2 Interprétation statistique de l'entropie

Définition 31 Un état macroscopique est constitué de multiples états microscopiques. Boltzmann définit l'entropie par :

$$S = k \cdot \ln(\Omega)$$

Avec Ω le nombre d'états microscopiques constituant l'état macroscopique. L'entropie augmente donc quand le nombre d'états microscopiques augmente.

1.3 Gaz parfait

1.3.1 Équation d'état des gaz parfaits

Définition 32 L'équation d'état des gaz parfaits est :

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Avec p , la pression exprimée en Pa (1 bar = 10^5 Pa), le volume en m^3 , n en moles et T en Kelvin. R , la constante des gaz parfaits, est donnée par :

$$R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

Cette équation est due à Gay-Lussac.

Définition 33 Cette équation est éloignée des résultats expérimentaux. On utilise une "variante" de cette équation, appelée équation de Van der Waals. Cette équation est :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R \cdot T$$

Dans cette équation, on prend en compte le covolume (le volume des atomes), ce qui réduit le volume disponible, et on considère les interactions entre atomes, ce qui diminue la pression. Ces deux choses ne sont pas considérées dans le modèle du gaz parfait.

1.3.2 Loi de Joules

Première loi de Joules

Énoncé 9 La première loi de Joules postule que u est une fonction qui dépend uniquement de la température. $u = f(T)$

Propriété 10 À partir de cette loi, on peut voir que :

$$du = \frac{\partial f}{\partial T} dT = n \cdot C_v \cdot dT$$

Deuxième loi de Joules

Énoncé 10 La deuxième loi de Joules dit que, à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$H = U + pV = f(T) + n.R.T = F(T)$$

Donc l'enthalpie est aussi une fonction de la température. De plus :

$$dH = n.C_p.dT \Rightarrow C_p = G(T)$$

La capacité calorifique à pression constante est donc aussi une fonction de la température. D'après ces expressions, on en déduit que :

$$n.C_p = n.C_v + n.R$$

On obtient donc la relation de Mayer :

$$C_p - C_v = R$$

1.3.3 Entropie

Définition 34 On appelle identité thermodynamique la relation suivante :

$$du = \delta Q + \delta w$$

Propriété 11 D'après l'identité thermodynamique, et sachant que :

$$dH = du + d(pV)$$

On obtient :

$$dH = \delta Q + \delta w + p dV + V dp$$

Sachant que H et u sont des fonctions d'état, donc ne dépendent pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état de départ et de l'état d'arrivée, on peut considérer une transformation réversible. On obtient donc :

$$\delta Q_{rev} = T_f dS$$

Donc :

$$dH = T_f ds + V dp$$

En développement à l'aide de l'entropie, dans le cas d'une transformation adiabatique quasi statique d'un gaz parfait, on obtient la relation de Laplace :

$$p.V^\gamma = cte$$

Avec γ défini par :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Chapitre 2

Potentiel Chimique

2.1 Enthalpie libre

2.1.1 Travail récupérable dans une transformation monotherme, monobar

Considérons une transformation monotherme, le système est en contact avec un thermostat, et monobar, la pression extérieure au système est constante (Ce genre de transformation est le cas global en chimie).

Par application du premier principe :

$$\Delta u = w + Q$$

D'où, avec w_a un travail autre que les forces de pression :

$$w_a = \Delta u + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S - T_0 \Delta S^p = \Delta G^* + T_0 \Delta S^p$$

Donc $-w_a$, le travail récupérable, est limité par :

$$w_a \leq \Delta G^*$$

2.1.2 Enthalpie libre

On introduit G , une fonction d'état, appelé enthalpie libre, qui est la fonction d'état la plus appropriée pour étudier un système chimique subissant une évolution monobar et monotherme. On peut en effet exprimer H en fonction de G , nous le verrons.

Posons :

$$G = U + pV - TS = H - TS$$

D'où :

$$dG = \delta w_a + V dp - S dT - T dS^p$$

Dans ce cas, si $w_a = 0$:

$$\Delta G \leq 0$$

G ne peut que diminuer au cours de l'évolution. L'état d'équilibre est atteint pour le minimum de cette fonction.

2.1.3 Relation de Gibbs-Helmoltz

Considérons un système réversible soumis uniquement à des forces de pression.

Dans ce cas :

$$dG = V dP - S dT$$

D'où :

$$S = - \frac{\partial G}{\partial T}$$

En utilisant la deuxième définition de G donné dans l'étude de l'enthalpie libre, on obtient que :

$$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p, etc..}$$

D'où :

$$\frac{H}{T^2} = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right)$$

2.2 Potentiel chimique

Définition 35 Considérons un système chimique, par exemple $C + O_2 \rightarrow CO_2$. Ce système est caractérisé par T, P, V, n_i , avec n_i les quantités de matière des entités présente.

L'enthalpie libre est donc une fonction de ces variables. Soit μ_i , le potentiel chimique de l'entité i , défini par :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j}$$

2.2.1 Relation d'Euler

Énoncé 11 Soit n_i la quantité de matière de l'entité i , et μ_i sont potentiel chimique. Notons l'une des entités chimiques $i0$.

On obtient la relation d'Euler, en considérant un système "séparer virtuellement" en deux parties, avec une partie négligable devant l'autre :

$$G(T, P) = \sum_i \mu_i \cdot n_i$$

2.2.2 Relation de Gibbs-Duhem

Énoncé 12 D'après la relation d'Euler, on obtient que :

$$V dp - S dT = \sum_i n_i \cdot d\mu_i$$

2.2.3 Équilibre d'un corps présent sous deux phases

Considérons un système contenant deux solvants, Eau et Huile par exemple, et un corps présent dans chaque un de ces deux solvants

On définit l'enthalpie libre de ce système comme la somme de l'enthalpie libre des deux sous systèmes.

On obtient que le corps va migrer dans la phase où le potentiel chimique est le plus faible. Or nous avons vu que :

$$\mu_i(T, P, n_i)$$

Donc le potentiel chimique va varier avec n_i . L'équilibre du système est donc atteint quand la variation d'enthalpie libre du système est nulle, donc quand les potentiels chimiques seront égaux.

2.3 Expression du potentiel chimique

2.3.1 Gaz parfait pur

On obtient la relation suivante :

$$\mu(T, P) = \mu(T, P_0) + R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

Avec P_0 une pression de référence, qui est de 1 bar par convention.

2.3.2 Gaz réel pur

Dans le cas d'un gaz réel pur, on utilise un développement de Viriel, qui remplace d'équation d'états des gaz parfait par :

$$\frac{p.V}{R.T} = n \left(1 + \frac{A(T)}{V} + \frac{B(T)}{V^2} + \frac{C(T)}{V^3} + \dots \right)$$

On obtient donc, la relation suivante :

$$\mu(T, P) = \mu(T, P_0) + R.T \ln \left(\frac{f}{P_0} \right)$$

Avec f la fugacité du gaz, qui dépend des coefficients $A(T)$, $B(T)$, $C(T)$, ...

2.3.3 Gaz parfait dans un mélange de gaz parfait

Considérons un mélange constitué de deux gaz parfait.
On obtient la relation suivante :

$$\mu_{i_{mélange}}(T, P) = \mu_{i_{pur}}(T, P_0) + R.T \ln \left(\frac{P_i}{P_0} \right)$$

Avec P_i , la pression partiel de l'entité i , c'est à dire la pression qu'exercerait le gaz si il était seul dans le système.

2.3.4 Phase condensée pur

Dans l'étude des phases condensée, on arrive à la conclusion que :

$$\mu(T, P) \simeq \mu(T, P_0)$$

Le potentiel chimique ne dépend plus que de la température

2.3.5 Mélange idéale - Mélange homogène

Définition 36 On définit un mélange homogène comme un mélange dont la composition est identique en tout point.

Considérons un mélange composé de n_e mole d'eau, et de n_a molécule d'alcool. Il y a une phase liquide et une phase gazeuse. À l'équilibre, il y a égalité des potentiels chimiques.

On obtient :

$$\mu_{A_{solution}} = \mu_{A_{pur}}(T, P) + R.T \ln \left(\frac{P_a}{P_{sa}} \right)$$

Avec P_i la pression partiel de l'entité A , et P_{sa} la pression de vapeur saturante de l'entité A .

2.3.6 Solution diluée

Considérons deux composants, A , le solvant, B , le soluté, avec $n_b \ll n_a$
On obtient :

$$\mu_{B_{solution}}(T, P, compo) = \mu(T, P) + R.T \ln(x_b)$$

On peut obtenir cette relation à l'aide de la relation de Gibbs-Duhelm

Énoncé 13 On a donc :

$$V dp - S dT = \sum_i n_i d\mu_i$$

Si P est constant, tout comme T , on obtient donc :

$$\sum_i n_i d\mu_i = 0$$

Donc

$$-n_a \cdot \frac{\partial \mu_a}{\partial x_b} = n_b \frac{\partial \mu_b}{\partial x_b}$$

Grace à ceci on obtient la relation ci dessus.

Cette relation est vérifié dans le cas d'une solution infiniment dilué. Si la solution n'est que dilué, on fait appelle à l'activité.

$$\mu_{B_{solution}}(T, P, compo) = f(T, P) + R.T.ln(a_b)$$

Avec a_b l'activité de l'espèce b.

Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire

3.1 Équilibre liquide-vapeur pour un corps pur

3.1.1 Équilibre d'un corps pur sous deux phases

Considérons un corps pur présent sous deux phases, liquide et gazeux. Si on considère une transformation monotherme et monobar, on obtient que :

$$\Delta G \leq 0$$

On en déduit que le système évolue toujours vers la phase avec le potentiel chimique le plus faible.

À l'équilibre chimique, on a :

$$\mu_l(T, P) = \mu_v(T, P)$$

La pression d'équilibre est donc une fonction de la température.

De cette considération, on obtient les diagrammes visible dans les fiches de révision de Sup, dans les changements d'états.

3.1.2 Chaleur latente de changement d'état

Définition 37 On considère un système de 1 kilogramme. A pression constant, on obtient un palier à température constante, dans le diagramme $T = f(t)$

Un corps pur est défini comme un corps admettent un palier de changement d'état.

Définition 38 La chaleur latente est l'énergie à fournir à 1 kilogramme de matière pour effectuer le changement d'état.

On obtient :

$$L = \Delta H_{\text{vaporisation}}$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut imaginer une transformation réversible pour effectuer le changement d'état. On obtient donc que :

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T_v}$$

3.1.3 Relation de Clapeyron

Supposons que le système soit à l'équilibre à la température T_1 et à la pression P_1 . On a donc :

$$\mu_l(T_1, P_1) = \mu_v(T_1, P_1)$$

On peut considérer qu'à la température $T_1 + dT$ et à la pression $P + dP$, le système est encore à l'équilibre. On en déduit que :

$$\Delta\mu_l = v_l dP - s_l dT$$

avec v_l et s_l des grandeurs molaires. Sachant qu'on obtient la même relation pour $\Delta\mu_v$, on obtient que :

$$L = \frac{T_v(v_v - v_l)dP}{dT}$$

Ceci constitue la relation de Clapeyron. On peut d'après cette relation, en considérant le signe de L , déterminer la pente de la courbe de changement d'état dans un diagramme $p = f(T)$, sachant que L est positif lors du changement d'état d'un état ordonné vers un état moins ordonné.

3.2 Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire

Définition 39 On définit un mélange binaire comme un mélange composée de deux entités, qui peuvent être en phase liquide ou en phase gazeuse (ou inclusif ..)

Considérons un système composé de deux entités, a et b, avec n_a et n_b les quantités de matière de a et b en phase liquide, n'_a et n'_b les quantités de matière de a et b en phases gazeuse.

Dans l'étude d'un tel système, on définit les fractions molaires suivante :

$$x_a = \frac{n_a}{n_a + n_b} \text{ et } x_b = 1 - x_a$$

$$x'_a = \frac{n'_a}{n'_a + n'_b} \text{ et } x'_b = 1 - x'_a$$

Le système est caractérisé par :

$$T, P, x'_a, x_a$$

Or, à l'aide de la relation qui dit que les potentiels chimiques des phases gazeuse et liquide sont égaux à l'équilibre, on obtient deux équations liant ces quatre inconnues.

Le système est donc divariant, il ne dépend que de deux inconnues.

3.3 Mélange de deux constituants totalement miscible à l'état liquide

3.3.1 Mélange idéale

Considérons deux constituants, a et b.

Nous avons les hypothèses suivantes :

$$P_a = x_a \cdot P_{sa}(T)$$

$$P_b = x_b \cdot P_{sb}(T) = (1 - x_a)P_{sb}(T)$$

On obtient donc que :

$$P = P_a + P_b = P_{sb}(T) + x_a(P_{sa}(T) - P_{sb}(T))$$

Diagramme isotherme

On en déduit que dans un diagramme isotherme, la pression est une fonction affine du titre x_a , le titre du liquide.

Si on considère le titre en vapeur, x'_a , on obtient que :

$$P = \frac{P_{sb}}{1 - x'_a(1 - \frac{P_{sb}}{P_{sa}})}$$

On obtient donc une hyperbole.

Soit x''_a le nombre de mole de a (liquide + vapeur), sur le nombre totale de moles du système. Pour qu'il y ait équilibre liquide vapeur, il faut que ce titre soit compris entre les deux courbes.

Diagramme isobare

Les relations démontrées précédemment restent valables. On obtient, en fixant la pression un diagramme isobare

Règle des segments inverse

Soit y , la grandeur définie par :

$$y = \frac{x_a'' - x_a'}{x_a - x_a'}$$

On obtient que :

$$y = \frac{d(MV)}{d(LV)}$$

avec $d(XZ)$ la distance entre X et Z.

3.3.2 Mélange réel

On peut toujours construire les diagrammes à l'aide d'expérience. On observe par contre des diagrammes avec un ou deux fusceaux, et des points azéotropiques.

Points azéotropiques

Un point azéotrope est un point de rencontre des deux courbes $f(x_a)$ et $f(x_a')$, par exemple. En ce point, le changement d'état s'effectue à température constante. On pourrait donc croire que le mélange binaire est un corps pur, car l'existence de ce palier est l'une de leurs caractéristiques. Mais ce point azéotrope dépend de la pression, donc le palier dépend de la pression à laquelle on travaille, ce qui n'est pas le cas pour un corps pur.

Ces points ont une forte influence, dans la distillation par exemple, car on ne peut pas dissocier les deux composants. On peut dissocier un composant et un mélange azéotrope.

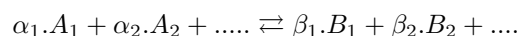
Chapitre 4

Grandeurs thermochimique standards

4.1 Réaction chimiques

4.1.1 Équation bilan

Définition 40 Considérons une réaction chimique. On associe à cette réaction une équation bilan :



Cette équation rend compte de principalement de deux principes :

- Conservation de la matière (Conservation des noyaux)
- Conservation de la charge (Conservation des électrons)

4.1.2 Avancement de la réaction

Considérons la réaction chimique précédente.

Soit dn_{A_i} la variation de quantité de matière du réactif A_i et dn_{B_j} la variation de quantité de matière du produit B_j .

On introduit l'avancement de la réaction, noté ε :

$$d\varepsilon = \frac{-dn_{A_i}}{\alpha_i} = \frac{dn_{B_j}}{\beta_j}$$

L'unité de ε est la mole.

Si il n'y a pas de réaction :

$$d\varepsilon = 0$$

Si il y a une réaction, ε est bornée par une valeur maximale :

$$\varepsilon < \varepsilon_{\max}$$

Donc, dans tout les cas, ε est une grandeur bornée.

On introduit donc le degré d'avancement, ou taux d'avancement, notée γ :

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \in [0, 1]$$

4.1.3 Chaleur de réaction

Définition 41 Considérons un système fermé.

On appelle chaleur de réaction la chaleur reçue par le système.

Si :

- $Q > 0$: Réaction endothermique
- $Q < 0$: Réaction exothermique

4.2 Enthalpie de réaction

4.2.1 Variation d'enthalpie au cours d'une réaction

Propriété 12 Considérons une transformation monobar. Dans ce cas, on obtient que :

$$\delta Q = dH$$

D'où l'expression de l'enthalpie du système :

$$H = \sum_i n_{A_i} \cdot h_{A_i}(T, P) + \sum_j n_{B_j} \cdot h_{B_j}(T, P)$$

Avec h_{A_i} l'enthalpie molaire de A_i pure. Pour obtenir cette expression, on suppose donc que l'enthalpie n'est pas modifiée par le fait de mélanger les espèces.

Propriété 13 Considérons maintenant une réaction monotherme et monobar, ce qui est le cas dans la grande majorité des réactions chimiques. On obtient :

$$dH = \sum_i dn_{A_i} \cdot h_{A_i}(T, P) + \sum_j dn_{B_j} \cdot h_{B_j}(T, P)$$

De plus, d'après la définition de ε :

$$d\varepsilon = \frac{-dn_{A_i}}{\alpha_i} = \frac{dn_{B_j}}{\beta_j}$$

On obtient donc :

$$dH = \left(\sum_j \beta_j \cdot h_{B_j}(T, P) - \sum_i \alpha_i \cdot h_{A_i}(T, P) \right) \cdot d\varepsilon$$

4.2.2 Enthalpie standard de réaction

Définition 42 On définit l'enthalpie de réaction, par :

$$\Delta^r H(T, P) = \sum_j \beta_j \cdot h_{B_j}(T, P) - \sum_i \alpha_i \cdot h_{A_i}(T, P)$$

Propriété 14 Au cours d'une transformation monotherme et monobar, on obtient donc :

$$dH = \Delta^r H(T, P) \cdot d\varepsilon$$

Cette enthalpie standard de réaction correspond à la variation d'enthalpie dans la réaction avec l'état initial (T, P juste les réactifs) et l'état final (T, P juste les produits).

Définition 43 On définit l'enthalpie standard de réaction par :

$$\Delta H^{r,0} = \Delta^r H(T_0, P_0)$$

Avec $T_0 = 25^\circ\text{C}$ et $P_0 = 1\text{bar}$

4.2.3 Relation de Kirchhoff

Énoncé 14 La relation de Kirchhoff permet de déterminer l'enthalpie de réaction à partir de l'enthalpie standard de réaction. On obtient la relation suivante :

→ Si il n'y a pas de changement d'état entre T_0 et T :

$$\Delta^r H(T, P_0) = \Delta H^{r,0} + \int_{T_0}^T \Delta C_p(T) dT$$

→ Si il y a un changement d'état, par exemple en T_1 , on obtient :

$$\Delta^r H(T, P_0) = \Delta H^{r,0} + \int_{T_0}^{T_1} \Delta C_p(T)_{\text{Etat A}} dT + L + \int_{T_1}^T \Delta C_p(T)_{\text{Etat B}} dT$$

En général on peut faire une approximation en négligeant les intégrales à chaque fois.

4.3 Enthalpie de formation d'un corps pur

4.3.1 Détermination expérimentale de $\Delta^r H$

On peut toujours, en décomposant les réactions, obtenir $\Delta^r H$. Ceci est permis car l'enthalpie est une fonction d'état.

4.3.2 Enthalpie de formation

On définit l'enthalpie de formation comme l'enthalpie de réaction de la réaction suivante :

Corps pur simple dans leur état stable à $T_0, P_0 \rightarrow$ Corps unique

De cette définition, on en déduit que l'enthalpie de formation d'un corps pur simple est nulle.

4.4 Énergie interne de réaction

Définition 44 Dans le cas d'une transformation isochore, on a :

$$dU = \Delta^r u(T, V).d\varepsilon$$

Avec :

$$\Delta^r u(T, V) = \Delta^r H - \Delta(PV)$$

On fait l'hypothèse que les phases condensées sont incompressibles. On néglige donc $\Delta(PV)$.

Dans le cas des gaz parfaits :

$$PV = n.R.T \Rightarrow \Delta(PV) = R.T. \left(\sum_j B_{j,gaz} - \sum_i A_{i,gaz} \right)$$

En connaissant l'enthalpie de réaction, on connaît l'énergie interne de réaction.

4.5 Entropie standard de réaction

Dans ce cas, nous avons uniquement une définition formelle ! Elle n'a aucune réalité physique. Car lors du mélange, l'entropie ne se conserve pas.

On a :

$$\Delta^r S(T, P) = \sum_j \beta_j . s_{B_j}(T, P) - \sum_i \alpha_i . s_{A_i}(T, P)$$

Mais c'est tout !!! Nous n'avons pas les relations vues dans les autres chapitres, car l'entropie ne se conserve pas lors du mélange.

4.5.1 Entropie absolue

Contrairement à l'autre grandeur vue précédemment, l'entropie n'est pas définie à une constante près. On définit donc l'entropie absolue :

$$\Delta^r S(T_0, P_0) = \sum_j \beta_j . s_{B_j}(T_0, P_0) - \sum_i \alpha_i . s_{A_i}(T_0, P_0)$$

On ne considère pas de mélange, on considère les corps non mélangés. On obtient la même relation pour obtenir l'entropie standard de réaction à l'aide de l'entropie absolue, sauf que les approximations précédentes ne sont plus vérifiées. Encore une fois, cette définition est purement formelle. Elle n'a pas de réalité physique.

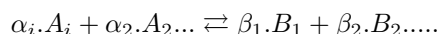
Chapitre 5

Equilibre chimique

5.1 Affinité chimique

5.1.1 Variation de l'enthalpie libre au cours d'une réaction monobar et monotherme

Considérons le système suivant :



On obtient :

$$dG = VdP - SdT + \sum_i \mu_i.dn_i$$

D'ou ici, considérant que cette réaction est monobar et monotherme :

$$dG = \left[\sum_j \beta_j \cdot \mu_{B_j} - \sum_i \alpha_i \mu_{A_i} \right] . d\varepsilon$$

Avec $d\varepsilon$ l'avancement.

5.1.2 Définition

Définition 45 On définit l'affinité chimique, notée A , défini dans le cas d'une transformation monotherme et monobar de la façon suivante :

$$dG = -A.d\varepsilon$$

L'unité de A est le Joules.moles⁻¹.

En considérant l'énergie interne et sa relation avec l'enthalpie libre, on considérant que les seules forces sont des forces de pression, on obtient :

$$\frac{A.d\varepsilon}{T} > 0 = \text{Entropie créée}$$

On en déduit donc que A et $d\varepsilon$ sont toujours de même signe.

5.1.3 Prédiction de l'évolution de la réaction

Considérons une transformation monobar, monotherme, donc les seules forces sont des forces de pressions. Nous avons le principe d'évolution suivant :

$$\Delta G \leq 0$$

L'enthalpie libre évolue toujours vers un minimum.

Si la réaction est quantitative, la fonction $G=f(\varepsilon)$ est décroissante jusqu'à atteindre son minimum

pour ε_{max} .

Si la réaction admet un état d'équilibre, la fonction décroissant jusqu'à un maximum, pour le ε_{eq} et croit jusqu'à ε_{max} .

Nous avons donc un principe d'évolution à l'aide de l'affinité chimique :

- Si $A > 0$, alors $d\varepsilon > 0$, la réaction se produit donc dans le sens direct
- Si $A < 0$, alors $d\varepsilon < 0$, la réaction se produit donc dans le sens indirect

5.1.4 Expression de A

L'expression de l'affinité de A est :

$$A = \sum_i \alpha_i \cdot \mu_{A_i} - \sum_j \beta_j \cdot \mu_{B_j}$$

En considérant des solutions idéale et des gaz parfaits, on obtient, en partant de l'expression des potentiels, et sachant que :

$$G = \sum n \cdot \mu$$

On obtient :

$$A = -\Delta^r G(T, P) - RT \ln(Q)$$

Avec Q le quotient de réaction, défini par :

$$Q = \frac{\prod_j a_{B_j}^{\beta_j}}{\prod_i a_{A_i}^{\alpha_i}}$$

Ce quotient est défini $\forall \varepsilon$.

5.1.5 Relation de Gulberg et Waages

Condition d'équilibre

A l'équilibre, on a :

$$A = 0$$

On obtient donc que :

$$\ln(Q) = \frac{-\Delta^r G(T, P)}{R.T}$$

Si on fixe la pression et la température, le quotient de réaction est totalement défini à l'équilibre. On le note K(T).

D'où à l'équilibre :

$$Q = K(T) = e^{-\frac{\Delta^r G(T, P)}{R.T}}$$

5.2 Déplacement de l'équilibre

5.2.1 Influence d'une variation de température

Loi de Van't Hoff

Nous avons par définition :

$$A = -\Delta^r G(T, P) - R.T \ln(Q)$$

Soit T_1 la température d'équilibre. On a donc :

$$\ln(Q) = \frac{-\Delta^r G(T, P)}{R.T}$$

On introduit une petite variation de température :

$$T = T_1 + \nu, \quad \nu \ll T_1$$

D'après la relation de Gibbs-Helmoltz, qui dit que :

$$\frac{\partial \frac{G}{T}}{\partial T} = \frac{-H}{T^2}$$

On obtient que :

$$\frac{\partial \ln(K)}{\partial T} = \frac{\Delta^r H}{R \cdot T^2}$$

Ceci constitue la loi de Van't Hoff.

Donc, si $\Delta^r H > 0$, $A > 0$, la réaction a lieu dans le sens direct.

Principe de modération

Si on élève la température, l'équilibre se déplace dans le sens de la réaction endothermique, qui consomme de l'énergie.

En d'autre terme, si on apporte de l'énergie à un système, celui ci réagit en s'opposant à cette énergie en quelque sorte, en consommant une partie de cette énergie.

5.2.2 Influence d'une variation de pression

Une élévation de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution du nombre mole. Ceci constitue encore un principe de modération

5.2.3 Influence de l'ajout d'un constituant

A volume constant

A température constante et à volume constant, l'ajout d'un réactif déplace l'équilibre de la réaction dans le sens de la consommation du réactif

A pression constant, gaz inerte

A pression constante, l'ajout d'un gaz inerte déplace l'équilibre quand le sens qui augmente le nombre de mole de gaz

A pression constant, ajout d'un réactif

Si on ajoute un réactif à pression constante, il y a plusieurs cas de figure :

→ L'équilibre peut se déplacer dans le sens de la consommation des réactifs

→ Mais il peut aussi se déplacer dans le sens de la production des réactifs, dans le sens indirect donc.

5.3 Potentiel d'oxydo-réduction

5.3.1 Force électromotrice d'une pile

Considérons une pile, constitué d'un circuit extérieur et deux becher, constitué respectivement de (Ox_1, Red_1) et (Ox_2, Red_2) . La pile est en convention générateur, et le circuit en convention récepteur.

Considérons un avancement $d\varepsilon$. Pour cette avancement, nous observons le déplacement de la charge dq dans le circuit :

$$dq = n \cdot m \cdot N_a \cdot e \cdot d\varepsilon$$

On obtient donc l'expression de la puissance et du travail reçu par le circuit :

$$P_{elec} = i.(-u) = -u. \frac{dq}{dt}$$

$$W_{elec} = -U.n.m.N_a.e.d\varepsilon$$

On voit donc que la réaction est contrôlée par le circuit extérieur.

On peut donc se placer dans un cas réversible, en plaçant un GBF de force électromotrice E dans le circuit externe.

Considérons une transformation réversible, monotherme et monobare. On obtient donc :

$$dG = W_{elec}$$

Avec G l'enthalpie libre. D'où :

$$-Ad\varepsilon = -n.m.N_a.e.E.d\varepsilon$$

D'où :

$$A = n.m.N_a.e.E$$

On peut donc relier l'avancement de la réaction à E.

5.3.2 Relation de Nernst

En partant de l'expression précédente, et en développant l'expression de l'affinité chimique, on obtient que :

$$\prod_{ox/red} = \prod^0 + \frac{R.T}{n.N_a.e} . \ln(10) . \log\left(\frac{a(ox)}{a(red)}\right)$$

Avec \prod le potentiel du groupe ox/red, \prod^0 le potentiel standard du groupe ox/red, et $a(X)$ l'activité de X.

Pour T = 25°C, on obtient :

$$\frac{R.T}{N_a.e} . \ln(10) = 0.06$$

On obtient donc la formule de Nernst :

$$\prod_{ox/red} = \prod^0 + \frac{0.06}{n} . \log\left(\frac{a(ox)}{a(red)}\right)$$

Mais c'est formule n'est valable qu'à 25°C, à cause du 0.06.

5.4 Variance

Définition 46 On considère un système chimique à l'équilibre (il y a donc coexistence des réactifs et des produits).

On appelle variance le nombre de paramètres intensifs que l'on peut fixer arbitrairement sans rompre l'équilibre.

Chapitre 6

Diagramme d'Ellingham

6.1 Construction du diagramme

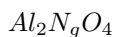
6.1.1 Oxyde

Définition 47 Un oxyde est de la forme M_yO_x , avec M un élément (ici un métal), et O l'oxygène.

En général, le nombre d'oxydation de l'oxygène est -II.

Si ce n'est pas le cas, on appelle ces entités des peroxyde.

On définit aussi des oxydes mixtes, très présents dans les roches par exemple. Exemple :



Un oxyde peut passer par les trois états de la matière, mais on le trouve majoritairement, sous les "conditions normales" de température et de pression, dans l'état solide.

Structure

La structure d'un oxyde peut être des liaisons covalentes, ou une forme parfaitement ionique, ou encore un mixte de ces deux structures.

Propriétés acide-base

Les oxydes peuvent être acides au sens de Brønsted, c'est à dire capable de céder un ou plusieurs H^+ , comme au sens de Lewis, c'est à dire capable de capter des doublets.

Ils peuvent aussi être des bases au sens de Brønsted, c'est à dire capable d'accepter un ou plusieurs H^+ .

Réaction de formation d'un oxyde

Par convention, dans toutes les réactions de formation d'un oxyde, on pose 1 pour le coefficient stoechiométrique de O_2 , et on équilibre l'équation en conséquence.

6.1.2 L'approximation d'Ellingham

Dans les réactions étudiées, à savoir les réactions de formation des métaux à partir des oxydes, on peut introduire l'enthalpie libre :

$$\Delta G^r(T) = \Delta H^r(T) - T \cdot \Delta S^r(T)$$

L'approximation d'Ellingham consiste à dire qu'en l'absence de changement d'état, l'enthalpie de formation et l'entropie de formation sont des constantes indépendantes de la température. On obtient donc une fonction affine en fonction de la température pour l'enthalpie libre.

Si il y a un changement d'état, la fonction reste affine, mais la pente est différente, il y a donc une brisure de pente.

6.2 Utilisation du Diagramme d'Ellingham

6.2.1 Prévision des réactions

On utilise le diagramme d'Ellingham pour étudier la faisabilité d'une réaction. En effet, la réaction a lieu si l'affinité chimique A est positive, donc si $\Delta G^r(T)$ est négatif, et on peut lire cette information directement sur le diagramme d'Ellingham. Lorsque les deux droites impliquées dans la réaction se croisent, on appelle la température où ceci arrive température d'inversion. Cette température correspond à :

$$\Delta G^r(T) = 0$$

6.2.2 Domaine d'existence

Grâce au diagramme d'Ellingham, on obtient le domaine d'existence du métal et de son oxyde, à un T fixé.

Quatrième partie

Magnétostatique

Chapitre 1

Loi de Biot et Savart

1.1 Distribution linéique

Énoncé 15 Considérons le champ électrique $d\vec{B}$ crée par un élément de longueur dl . On obtient l'expression du champs par la relation suivante :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

1.2 Distribution volumique

Énoncé 16 On peut élargir la loi de Biot et Savart à une distribution volumique de charge. Sachant que :

$$i = \iiint \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

On obtient l'expression du champs \vec{B} crée par une distribution volumique de courant :

$$\vec{B} = \iiint \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \cdot dV$$

1.3 Propriété de symétrie

Propriété 15 Nous avons les propriétés suivantes concernant les symétries :

- Si M appartient à un plan de symétrie, alors le champs $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan
- Si M appartient à un plan d'anti-symétrie, alors le champs $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan.

Chapitre 2

Potentiel Vecteur

2.1 La divergence du champs magnétique est nul

2.1.1 Cacul pour le champs crée par un élément de circuit

Propriété 16 Considérons le champs crée en un point M par une surface élémentaire dl d'un fil parcourus par l'intensité i .

Considérons Σ , une surface contenant M . D'ou, l'expression du flux sur cette surface :

$$\iint_{\Sigma} \vec{dB} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Or, les $\vec{n} \cdot \vec{dB}$ s'annule car chaque terme possède sont anti-symétrique. Donc le flux à travers la surface Σ est nul. De plus, nous savons que, avec V le volume délimité par Σ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{dB} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) dV$$

Or le flux est nul quelque soit Σ . On obtient donc que :

$$\text{div}(\vec{dB}) = 0$$

Donc que :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

La divergence du champs magnétique est donc nul.

2.1.2 Calcul utilisant l'analyse vectorielle

Propriété 17 Soit \vec{D} un champs vectorielle et f une grandeur scalaire. Nous avons la propriété suivante :

$$\vec{\text{rot}}(f \cdot \vec{D}) = f \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{D}) + \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{D}$$

Propriété 18 Considérons un circuit filiforme. D'après la loi de Biot et Savard, nous avons :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int \vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

En développant PM , on obtient que :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int \vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) \wedge \vec{dl}$$

Avec $\overrightarrow{\text{grad}}_M$ le gradient par rapport à aux coordonnées de M.
De plus, avec la propriété précédente, on obtient que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\frac{1}{PM}\right) \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{\text{rot}}_M\left(\frac{\overrightarrow{dl}}{PM} - \frac{1}{PM} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_M(\overrightarrow{dl})\right)$$

Or \overrightarrow{dl} est totalement indépendant de M, donc $\overrightarrow{\text{rot}}_M(\overrightarrow{dl}) = 0$.
On obtient donc que :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \int \overrightarrow{\text{rot}}_M\left(\frac{\overrightarrow{dl}}{PM}\right)$$

De plus, $\overrightarrow{\text{rot}}_M$ est indépendant du point P, on peut donc inverser l'intégrale et le $\overrightarrow{\text{rot}}$.
On obtient donc :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}_M \left(\int \frac{\mu_0 \cdot \overrightarrow{dl}}{4\pi \cdot PM} \right)$$

De plus on sait que quelque soit le champs de vecteur \overrightarrow{D} , nous avons le résultat suivant :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{D})) = 0$$

On obtient donc que :

$$\text{div}(\overrightarrow{B}) = 0$$

2.2 Définitions du potentiel vecteur

Définition 48 On définit le potentiel vecteur par :

Si $\text{div}(\overrightarrow{B}) = 0$, alors $\exists \overrightarrow{A}$ telque $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A})$.

On appelle potentiel vecteur le vecteur \overrightarrow{A} . Ce potentiel vecteur peut avoir une "infinité" d'expression. Son expression classique est :

$$\overrightarrow{A} = \int \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot PM} \cdot \overrightarrow{dl}$$

2.2.1 Jauge dite de Coulomb

Propriété 19 Pour réduire en quelque sorte cette infinité, on pose que le potentiel vecteur doit vérifier :

$$\text{div}(\overrightarrow{A}) = 0$$

Cette condition réduit le nombre de possibilité pour \overrightarrow{A} . Le potentiel classique vérifie cette condition.

2.3 Théorème de Stokes

Théorème 1 Soit $\overrightarrow{D}(M)$ un champs de vecteur associé au point M.

Considérons un contour γ .

Soit C la circulation du champs de vecteur sur γ . On obtient que :

$$C = \oint \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{D}) \cdot \overrightarrow{n} \cdot dS$$

Avec Σ une surface quelconque de contour γ .

Ce théorème est utile pour déterminer un potentiel vecteur à partir du champs magnétique

2.4 Analogie entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire

On peut étendre les propriétés vu pour le potentiel scalaire V au potentiel vecteur \vec{A} . Ceci consiste à faire les transpositions suivantes pour la composante A_x par exemple :

$$\rho \rightarrow j_x$$
$$\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4.\pi}$$

Avec j_x la composant selon u_x du vecteur densité de courant. On obtient donc le parrallèle suivant par exemple :

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \Delta A_x = -\mu_0.j_x$$

2.5 Champ magnétique au voisinage d'un axe d'anti-symétrie

Considérons le champs magnétique crée par un spire centré sur l'axe Oz par exemple. On obtient donc par raison de symétrie que :

$$\vec{B} = B_1(r, z)\vec{u}_r + B_2(r, z)\vec{u}_z$$

Plaçons nous dans le plan Oxy. peut donc assimiler \vec{u}_r et \vec{u}_z au vecteur des coordonnées cartésiennes. Sachant que l'axe est un axe d'anti-symétrie, on obtient que B_1 est une fonction impaire et que B_2 est une fonction paire (utile pour envisager un développement limite de ces fonctions). De plus on sait que :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

Ceci implique donc que

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} . dS = 0$$

On obtient au final que :

$$B_1(r, z) = -\frac{\partial B_2}{\partial z} \cdot \frac{r}{2}$$

En connaissant la composante du champs sur l'axe, on connaît le champs au voisinage de l'axe.

On peut étendre ce résonnement en électrostatique, en considérant que $\text{div}(\vec{E}) = 0$, c'est à dire que l'axe ne porte par de charge.

Chapitre 3

Théorème d'Ampère

3.1 Laplacien vecteur

En coordonnée cartésienne, on peut définir le Laplacien vecteur du potentiel vecteur de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\Delta(\vec{A})} = \Delta(\vec{A} \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + \Delta(\vec{A} \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + \Delta(\vec{A} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

3.2 Forme locale du théorème d'Ampère

Théorème 2 Nous avons, nous l'avons vu :

$$\Delta \vec{A} \cdot \vec{u}_x = -\mu_0 \cdot \vec{j} \cdot \vec{u}_x$$

De plus, on obtient le résultat suivant :

$$\overrightarrow{\text{rot}(\text{rot}(\vec{A}))} = \overrightarrow{\text{grad}(\text{div}(\vec{A}))} - \overrightarrow{\Delta(\vec{A})}$$

D'où, en considérant la jauge de Coulomb sur le potentiel vecteur, on obtient que :

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{B})} = -\overrightarrow{\Delta(\vec{A})}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{B})} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

Ceci constitue la forme locale du théorème d'Ampère.

3.3 Forme global du théorème d'Ampère

Théorème 3 Considérons un contour fermé Γ , et Σ une surface quelconque de contour Γ . En considérant la forme locale du théorème d'Ampère et le théorème de Stokes, on obtient que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i$$

Avec i le courant enlacé défini par :

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

On doit définir le sens de $d\vec{l}$. Le courant enlacé est donc une grandeur algébrique

Champs magnétique crée par un dipole magnétique

4.1 Définitions et propriétés

Définition 49 Un dipole magnétique est n'importe quel circuit "vu de loin", c'est à dire que pour un point M suffisamment loin du dipole, on peut faire l'approximation dipolaire, c'est à dire que $\| \overrightarrow{OM} \| \gg$ devant toutes les distances caractéristique du circuit.

Propriété 20 En partant de l'expression "classique" du potentiel vecteur, en déterminant le produit scalaire :

$$\vec{K} \cdot \vec{A} = \int \mu_0 \cdot i \cdot \frac{\vec{K} \cdot d\vec{l}}{4 \cdot \pi \cdot PM}$$

Avec \vec{K} un vecteur constant et en effectuant l'approximation dipolaire, on obtient que :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Avec \vec{M} le moment magnétique défini par :

$$\vec{M} = \iint i \cdot n \cdot dS$$

A partir de cette expression du potentiel vecteur, on peut déterminer l'expression du champs magnétique, sachant que :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$$

4.2 Analogie entre dipole électrique et dipole magnétique

Sachant que le potentiel crée par un dipole électrique est donnée par :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

En effectuant l'approximation du dipole électrique, et que le potentiel vecteur dans le cas qu'un dipole magnétique est donnée par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi \cdot OM^3} \cdot \vec{M} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Toujours en effectuant l'approximation du dipole magnétique. On peut donc étendre les résultats obtenu dans le cas d'un dipole électrique pour un dipole magnétique en effectuant les modifications suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{p} &\rightarrow \vec{M} \\ \vec{p} \cdot \overrightarrow{OM} &= \vec{M} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \frac{1}{\varepsilon_0} &\rightarrow \mu_0\end{aligned}$$

Cinquième partie

Electromagnétisme

Chapitre 1

Actions électromagnétique exercées sur un circuit

1.1 Effet Hall

Définition 50 Considérons un conducteur, par exemple un pavé, dans lequel se déplace des particules chargée selon la vitesse :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_x$$

Supposons l'existence d'un champs magnétique portée par \vec{u}_y , orienté selon l'axe Oy. Nous savons qu'une particule chargée subit la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Sous l'action du champs magnétique, on observe la création d'un champs électrique, du à la disymétrie des charges dans le conducteur.

On obtient donc qu'il y a création d'une différence de potentiel, et que la force de Lorentz tend vers un équilibre.

On en déduit donc que le champs électrique du à l'action du champs magnétique est égale à :

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

D'ou :

$$U = v \cdot B \cdot d$$

Or de plus :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \rho_{mob} \cdot \vec{v} \\ i &= \iint \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = j \cdot dS \end{aligned}$$

On obtient donc la formule de l'effet Hall :

$$U = \frac{I \cdot d \cdot B}{S \cdot \rho_{mob}}$$

Avec ρ_{mob} la densité de charge des charges en mouvement.

1.2 Force de Laplace

1.2.1 Expression

Définition 51 La force de Laplace est la force magnétique exercé sur un circuit.

Considérons un conducteur parcouru par un courant. Les charges en mouvement subissent la force de

Lorentz, donnée par :

$$\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Comme vu précédemment, il apparaît un champ magnétique d'expression :

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Mais le conducteur contient aussi des charges fixes. Ces charges subissent le nouveau champ électrique à travers la force de Lorentz électrique.

Considérons un élément \vec{dl} du conducteur :

$$d\vec{F} = \Sigma q_f \cdot \vec{E} = -\rho_{fixe} \cdot \vec{V} \cdot dS \cdot dl \wedge \vec{B}$$

De plus, nous avons les relations suivantes :

$$\rho_{fixe} + \rho_{mob} = 0$$

$$\vec{j} = \rho_{mob} \cdot \vec{v}$$

$$i = j \cdot dS$$

On obtient donc l'expression de la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i \cdot \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Dans le cas d'une distribution volumique de courant, on obtient :

$$d\vec{F} = dV \cdot \vec{j} \wedge \vec{B}$$

1.2.2 Définition légale de l'Ampère

Définition 52 Considérons deux fils parcourus par un même courant (sens opposé).

Par application du théorème d'Ampère, à l'aide de symétrie, et de la force de Laplace, on obtient que :

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 \cdot i^2 \cdot dl}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{u}_r$$

Cette relation constitue la définition légale de l'Ampère. À l'aide de la force, on peut définir $i = 1 \text{ A}$

1.3 Torseur des forces exercées sur un circuit

1.3.1 Energie d'interaction entre le champ et un circuit

Travail des forces de Laplace

Considérons une portion de circuit \vec{dl} qui, sous l'action d'un champ magnétique, effectue une translation de $d\vec{\lambda}$.

Par définition du travail d'une force, le travail de la force de Laplace $d\vec{F}$ est donnée par :

$$\delta W = d\vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$$

On obtient que :

$$W = i\Phi_C$$

Avec Φ_C le flux coupé défini par :

$$\Phi_C = dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{B}$$

En explicitant ce flux coupé, on obtient que :

$$W = i \cdot \Delta\Phi$$

Avec Φ le flux propre du circuit, c'est à dire le flux qui traverse le circuit. Ce flux est donc défini par rapport au circuit.

Energie d'interaction électromagnétique

On observe que le travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. On peut mettre le $\Delta\Phi$ sous forme d'une différence d'énergie potentiel :

$$W = E_{p1} - E_{p2}$$

Avec $E_{pX} = -i \cdot \Phi_X$

1.3.2 Dipole magnétique dans un champs magnétique uniforme

Mouvement de Translation

Propriété 21 Considérons un dipole magnétique qui, sous l'action d'un champs magnétique uniforme, subit une translation $d\vec{\lambda}$.

On obtient que :

$$\delta W = i \cdot \Delta\Phi = i \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = 0$$

Avec les deux surfaces sont identiquement orienté et parcourus par le meme courant, donc la variation de flux propre est nul. De plus, par définition :

$$\delta W = \vec{R} \cdot d\vec{l}$$

Donc la résultante du champs magnétique est nul.

Mouvement de Rotation

Propriété 22 De la même façon, mais cette fois ci en considérant un mouvement de rotation, on obtient que :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\vec{M} \wedge \vec{B}$$

Avec \mathcal{M} le moment des forces, et \vec{M} le moment magnétique.

1.3.3 Dipole magnétique dans un champs magnétique non-uniforme

Propriété 23 L'expression du moment des forces reste identique :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\vec{M} \wedge \vec{B}$$

Par contre, nous obtenons maintenant, pour l'expression de la résultante de la force, en considérons que le moment des forces $\vec{\mathcal{M}}$ est constant (Mouvement de translation) :

$$\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})$$

1.3.4 Analogie entre dipole magnétique et dipole électrique

Dipole magnétique

- Moment magnétique : $\vec{M} = i \cdot S \cdot \vec{n}$
- Energie potentiel : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$
- Moment des forces : $\vec{\mathcal{M}} = -\vec{M} \wedge \vec{B}$
- Résultante des forces : $\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})$

Dipole électrique

- Moment dipolaire : $\vec{P} = q \cdot \overrightarrow{AB}$
- Energie potentiel : $E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}$
- Moment des forces : $\vec{\mathcal{M}} = -\vec{P} \wedge \vec{E}$
- Résultante des forces : $\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P} \cdot \vec{E})$

Chapitre 2

Induction Electromagnétique

2.1 Loi de Faraday

2.1.1 Expression de Faraday

Pour Faraday, une modification de la disposition des lignes de champs induit un courant

2.1.2 Déplacement d'un élément de circuit dans un champs permanent

Considérons un conducteur. Sous l'action d'un champs magnétique \vec{B} , le conducteur se déplace.

Ceci donne donc à tous points du circuit une vitesse. Tous ces point sont donc soumis à la force de Lorentz magnétique :

$$\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Il se peut que cette force admette une composante sur son axe, ceci entraine donc un déplacement de charge, donc création d'un courant.

On introduit le champs électromoteur de Newman :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Avec \vec{v}_e la vitesse d'entraînement des charges, qui à priori est différente de \vec{v} .

On peut donc introduire une force électromotrice :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

On obtient, en considérant un élément de circuit qui se déplace, que :

$$e = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Avec Φ_c le flux coupé de \vec{B}

2.1.3 Enoncé

Généralisation

Il apparait un courant induit dès qu'il y a une variation du flux coupé de \vec{B}

Loi de Faraday

La loi de Faraday dit que :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Avec Φ le flux propre de \vec{B}

Propriété 24 Si $e > 0$, alors le courant induit $i > 0$ (Dans le sens défini arbitrairement positif)

Loi de Lentz

Énoncé 17 Le courant induit s'oppose à sa cause

Forme locale de la loi de Faraday

En partant de l'expression de e donnée par la loi de Faraday, en utilisant le fait que :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Et en utilisant le théorème de Stokes, on obtient la forme locale du théorème de Gauss :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\delta \frac{\vec{B}}{\partial t}$$

Expression du champs

En partant de la forme locale du théorème de Gauss, on obtient que :

$$\vec{E} = \frac{-\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}(V)$$

On peut mettre ceci sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_c$$

Avec \vec{E}_m le champs de Newman, qui provient de la variation du champs magnétique, et \vec{E}_c le champs électrostatique du aux charges présente.

2.1.4 Quantité d'électricité induit

En partant de l'expression de e donnée par la loi de Faraday, on obtient que :

$$q = \frac{\Phi(t_1) - \Phi(t_2)}{R}$$

On observe donc que la variation de charge est indépendante du temps, donc de la vitesse. Elle ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.

2.2 Induction mutuelle de deux circuits

2.2.1 Coefficient d'induction mutuelle

Énoncé 18 Considérons deux circuits. En exprimant le flux crée par le premier circuit sur le second, on obtient que :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} \cdot i_1$$

$M_{1 \rightarrow 2}$ est appelé coefficient d'induction mutuelle. On montre que :

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$$

2.2.2 Auto-induction

Considérons le flux propre du circuit 1 par rapport au champs crée par 1 :

$$\Phi = \iint \vec{b} \cdot \vec{n} . dS$$

On obtient que :

$$\Phi = L.i$$

L est appelé coefficient d'auto induction. Pour déterminer L, on doit connaitre le champs crée en tout point.

Chapitre 3

Équations de Maxwell

3.1 Les quatres équations

3.1.1 Flux magnétique

L'équation de Maxwell du flux magnétique, est donnée par :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Ceci est la forme locale de l'équation. Nous avons aussi une forme intégrale, à l'aide du théorème de Stokes :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

Avec Σ une surface fermé.

3.1.2 Équation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, sous sa forme locale :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En faisant circuler le champs électrique, on obtient que :

$$e = \frac{-d\Phi}{dt}$$

Ceci est l'expression globale. On remarque que les deux équations précédentes sont indépendante du milieu considéré.

3.1.3 Équation de Maxwell-Gauss

La forme locale est donnée par :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit la forme global, qui n'est d'autre que le théorème de Gauss :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

3.1.4 Équation de Maxwell-Ampère

La forme locale de cette équation est donnée par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On observe donc que cette forme locale est la forme locale du théorème d'Ampère, à laquelle on a ajouté une différentielle du champs électrique. Cette modification était obligatoire pour corriger des aberrations du théorème d'Ampère.

3.2 Propriétés des champs

3.2.1 Conditions limites

Du champs électrique

Considérons une surface de densité surfacique σ , séparant deux milieux (1) et (2). On obtient que :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Avec \vec{E}_k le champs électrique crée dans le milieu k, en un point très près de la surface de séparation.

Champs magnétique

Considérons un "cylindre élémentaire", parcouru par un vecteur densité de courant \vec{j}_s . On obtient que :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \cdot \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Avec \vec{B}_k le champs magnétique crée dans le milieu k, en un point très près de la surface de séparation.

3.2.2 Équations de propagation des champs

Champs électrique

En appliquant l'opérateur \overrightarrow{rot} à $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$, on obtient l'équation de propagation du champs électrique :

$$\Delta(\vec{E}) - \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

Champs magnétique

De la même façon pour le champs magnétique, on obtient que :

$$\Delta(\vec{B}) - \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{j})$$

3.3 Potentiels

3.3.1 Définitions

Potentiel vecteur

En partant de la définition du potentiel vecteur \vec{A} , on montre que l'on peut obtenir un autre potentiel vecteur \vec{A}' de la façon suivante

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(\Phi)$$

Potentiel scalaire V

En partant de l'expression de $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$, on montre que :

$$\vec{E} = \frac{-\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V)$$

On obtient donc l'expression connu dans le cas statique.

De même que pour le potentiel vecteur, on montre que :

$$V' = V - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + cte$$

Φ est donc le lien entre \vec{A} et V. On ne peut pas fixer arbitrairement \vec{A} et V, ces deux potentiels sont liée.

3.3.2 Conditions de Jauge

Équations vérifié par le potentiel vecteur et V

On montre que ces deux potentiels doivent vérifier les relations suivantes :

$$\Delta(\vec{A}) - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \overrightarrow{grad}(\text{div}(\vec{A}) + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t})$$

Jauge de Coulomb

La jauge de Coulomb est de poser que :

$$\text{div}(\vec{A}) = 0$$

L'équation précédente devient donc :

$$\Delta(\vec{A}) - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V)$$

Jauge de Lorentz

La jauge de Lorentz est de poser que :

$$\text{div}(\vec{A}) + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

À l'aide des ces jauges, on obtient donc deux équations :

$$\Delta(\vec{A}) + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \cdot \vec{j}$$

$$\Delta(V) + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Régime quasi-stationnaire

4.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire

4.1.1 Définitions

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta(V) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} &= \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \\ \rightarrow \Delta(\vec{A}) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

On montre que l'on peut faire l'approximation des régimes quasi-stationnaires si :

$$d \ll c \cdot \tau$$

Avec d une distance caractéristique et τ un temps caractéristique.

4.1.2 Approximation du régime quasi-stationnaire électrique

On a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On fait l'approximation du régime quasi-stationnaire électrique si :

$$\| \vec{j} \| \ll \rho \cdot c$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Ceci modifie les équations de Maxwell, car on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

4.1.3 Approximation du régime quasi-stationnaire magnétique

On a :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On fait l'approximation du régime quasi-stationnaire magnétique, si :

$$\| \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \| \ll \| \vec{j} \|$$

Dans ce cas, on obtient donc que :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

4.2 Cas des conducteurs ohmique

4.2.1 Loi d'ohm

Un conducteur vérifie la loi d'ohm si :

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$
$$\vec{j} = \rho_m \cdot \langle \vec{v} \rangle$$

Avec $\langle \vec{v} \rangle$ la valeur moyenne de la vitesse et ρ_m la densité de charge mobile.

4.2.2 Densité volumique de charge

La conservation de la charge est donnée par la relation :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On montre que la densité de charge peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \cdot t}$$

On montre que la densité de charge devient nul en un temps extrêmement court, de l'ordre de 10^{-11} pour le cuivre par exemple.

4.2.3 Cas du régime sinusoïdale

Dans le cas sinusoïdale, on montre qu'on peut considérer qu'on est en régime quasi stationnaire si :

$$f \ll \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \tau}$$

4.2.4 Interface conducteur-vide

Densité de courant

Dans le cas d'un fil, dans un régime statique, le vecteur densité \vec{j} à la surface du fil est tangent, car autrement, il y aurait accumulation de charge.

Dans le cas du régime variable, on montre que \vec{j} n'est pas forcément tangent à la surface.

4.2.5 Cas du conducteur parfait

Définitions

On dit d'un conducteur qu'il est parfait si :

$$\gamma \rightarrow +\infty$$

Avec :

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

Champs électrique à l'intérieur du conducteur

On montre que dans un conducteur, le courant passe à la surface. Ceci est appelé effet de peau

Sixième partie

Onde Electromagnétique

Chapitre 1

Ondes électromagnétique

1.1 Solution des équations de propagations

1.1.1 Équation de propagation

D'après les quatres équations de Maxwell, nous pouvons obtenir des équations de propagations. Par exemple, pour l'équation de propagation du champs électrique \vec{E} , nous faisons :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E}))$$

Qui, d'après les équations de Maxwell donne :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}(-\frac{d\vec{B}}{dt})$$

En développant à l'aide de l'analyse vectorielle, et en se placant dans le vide, c'est à dire avec :

$$\rho = 0$$

$$\vec{j} = 0$$

On obtient l'équation de propagation : $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ On obtient de même pour \vec{B}

1.1.2 Ondes planes

Définition 53 Une onde plane est une solution de l'équation de propagation qui ne dépend que d'une variable d'espace en coordonnée cartésienne.

Par exemple (ceci reste valable dans toute cette fiche), soit f une onde plane ne dépendant que de x et de t :

$$f(x, t)$$

L'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

En posant α et β défini par :

$$\alpha = x - ct$$

$$\beta = x + ct$$

Et en développant, on obtient que la solution général est une combinaison linéaire de deux ondes progressive (c'est à dire qui translate le motif), qui progresse dans des sens opposés

1.1.3 Onde sphérique

Définition 54 En coordonnée sphérique, une onde sphérique est une solution de l'équation de propagation qui ne dépend que de r et t .

En développant de façon analogue à précédemment, mais cette fois en utilisant $y=rf$, on obtient que cette solution est une onde de progression atténuée en $\frac{1}{r}$.

1.2 Onde électromagnétique plane progressive

Définition 55 Une onde plane progressive, f , est définie par :

→ Plane : $f(x,t)$

→ Progressive : $f(x-ct)$, c'est à dire que : $x_2 - x_1 = c.(t_2 - t_1)$

1.2.1 Les champs E et B sont transverse

En utilisant les divergences de ces champs, on montre respectivement que :

$$\vec{E} \perp \vec{u}_x$$

$$\vec{B} \perp \vec{u}_x$$

1.2.2 Les champs sont orthogonaux

En partant de l'expression du rotationnel de \vec{E} , on montre que :

$$\vec{B} \perp \vec{E}$$

En se plaçant dans l'hypothèse d'une onde plane progressive. On montre plus particulièrement que :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

1.2.3 Force exercée sur une particule chargée par l'onde

La force exercée est la force de Lorentz. En remplaçant la composante magnétique par l'expression de \vec{B} déterminé précédemment, on obtient que dans le cadre de la mécanique classique, c'est à dire pour des vitesses négligeables devant la vitesse de la lumière, la force de Lorentz se ramène dans ce cas à :

$$\vec{f} \simeq q \cdot \vec{E}$$

1.2.4 Vecteur de Poynting

Par définition :

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

En développant à l'aide de l'expression de \vec{B} déterminé précédemment, et à l'aide de la densité d'énergie dans l'espace, u , défini par :

$$u = \varepsilon_0 \cdot E^2$$

On montre que :

$$\vec{\pi} = c \cdot u \cdot \vec{u}_x$$

On obtient donc que l'énergie se propage selon l'axe de propagation et en étudiant la puissance, on obtient que l'énergie se déplace à la vitesse de la lumière.

1.3 Onde plane progressive monochromatique

Définition 56 On dit que f est une onde monochromatique si l'on peut l'écrire sous la forme :

$$f = A.\cos(k(x - ct))$$

1.3.1 Propriétés

Celle d'une onde progressive

Cette onde possède toutes les propriétés énoncées précédemment, de part son caractère progressive.

Double périodicité

Posons :

$$kc = \omega$$

De ce fait, on peut écrire f sous la forme :

$$f = A.\cos(k.x - \omega.t)$$

En fixant t , on montre que la fonction est périodique par rapport à x , on définit sa période λ , période spatiale, par :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

De même, en fixant x , on montre que la fonction est périodique par rapport à t , on définit sa période T , période temporelle, par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On peut donc écrire f sous la forme suivante, qui fait apparaître la double périodicité :

$$f = A.\cos(2\pi \cdot (\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}))$$

Vecteur d'onde

Définition 57 On appelle vecteur d'onde :

$$\vec{k} = k.\vec{u}_x$$

avec k nombre d'onde.

$$f = A.\cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega.t)$$

1.3.2 Polarisation

Représentation complexe des champs

On peut écrire le champ électrique par exemple sous la forme :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}.e^{i(\omega.t - k.x)})$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E_{oy}.\vec{u}_y + E_{oz}.e^{i\varphi}.\vec{u}_z$$

Onde polarisée rectilignement

Cette onde est polarisée rectilignement si $\varphi = 0$. Dans ce cas, l'onde décrit une droite en vibrant.

Onde polarisée elliptiquement

Si $\varphi \neq 0$, alors l'onde décrit en vibrant une ellipse.

Chapitre 2

Propagation d'une onde plane électromagnétique progressive monochromatique dans un milieu matériel

2.1 Plasma

2.1.1 Position du problème

Définition 58 Un plasma est un milieu totalement ionisé. On considère cet état comme le quatrième état de la matière. C'est un milieu électriquement neutre.

Considérons une onde monochromatique :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

2.1.2 Expression de \vec{j}

Par application du P.F.D. sur un électron du plasma, qui n'est soumis qu'à la force de Lorentz. On obtient, en développement une expression de \vec{j} :

$$\vec{j} = \frac{-i \cdot e^2 \cdot n_0}{m_e \cdot \omega} \vec{E}$$

Avec :

- n_0 : Nombre d'électrons par unité de volume
- m_e : Masse de l'électron
- ω : Pulsation du champs électrique

On ne considère que la masse de l'électron car la partie de \vec{j} du au cation est négligable par rapport à celle dû aux électrons.

2.1.3 Équation de Maxwell

En utilisant les équations de Maxwell liant \vec{E} et \vec{B} , c'est à dire les rotationnels, on obtient l'expression suivante pour le nombre d'onde :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

Avec :

$$\omega_c^2 = \frac{\mu_0 \cdot n_0 \cdot c^2 \cdot e^2}{m_e}$$

ω_c est appelé pulsation de coupure. On définit aussi la fréquence de coupure par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\mu_0 \cdot n_0 \cdot e^2 \cdot c^2}}{m_e}$$

On obtient une fréquence de coupure de l'ordre du Mhz

2.1.4 Étude des diverses solutions

Si $\omega > \omega_c$

Dans ce cas, nous avons :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

En utilisant l'expression du rotationnel de \vec{E} , on obtient que :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{\frac{\omega}{k}}$$

On obtient dans ce cas une expression de \vec{B} proche de celle déterminée dans le chapitre précédent, sauf que la vitesse n'est pas la vitesse de la lumière, mais la vitesse de phase, que nous définirons plus tard.

On obtient que l'expression du champ dans le plasma est donnée par :

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{\frac{-x}{\delta}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \vec{u}_y$$

avec :

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

Si $\omega_c > \omega$

Dans ce cas, on obtient pour le nombre d'onde :

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$$

En développant, on obtient que l'onde ne rentre pas dans le plasma, mais qu'elle est totalement réfléchi. Comme application de cela, nous avons par exemple le fait que les ondes FM sont des ondes de courtes portées (de l'ordre du MHz), car elles ne se réfléchissent pas dans la ionosphère (qui est assimilable à un plasma), alors que les ondes longues (de l'ordre du KHz) s'y réfléchissent, ce qui permet une plus grande propagation.

2.2 Vitesse de phase - Vitesse de groupe

2.2.1 Vitesse de phase

On considère le cas où :

$$\omega > \omega_c$$

Nous avons :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\left(\frac{\omega}{k}\right)}\right)\right) \vec{u}_y$$

On obtient donc que l'onde se propage à la vitesse $\frac{\omega}{k}$. Cette vitesse est appelé vitesse de phases. En développant, on obtient que :

$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

On obtient donc que :

$$v_{\varphi} > c$$

Ceci semble surprenant car la relativité restreint montre qu'aucun objet ou énergie ne peut se déplacer plus rapidement que la vitesse. Cependant, la vitesse de phase ne rentre pas dans ces catégorie car c'est la vitesse de déplacement d'un champs, et non d'une énergie. Cependant, nous ne pouvons pas mettre en évidence ce champs car il est dépourvu d'énergie. Car nous allons le voir, l'énergie se déplace à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière, se qui est en accord avec la relativité restreinte d'Einstein.

2.2.2 Vitesse de groupe

En développant le vecteur de Poyting, on montre que l'énergie se déplace à une vitesse v_g appelé vitesse de groupe. Nous avons :

$$v_g < c$$

2.2.3 Vitesse de déplacement d'un signal

Pour déterminer la vitesse de déplacement d'un signal, considérons une solution de l'équation de propagation non monochromatique, c'est à dire que la signal ne possède pas une fréquence, mais un spectre très réduit centré autour de cette fréquence ω_0 . On écrit cette solution sous la forme :

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\omega) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} d\omega$$

On montre que k n'est plus égal à $f(\omega)$, mais on peut effectuer un développement limité de k :

$$k \simeq k_0 + (\omega - \omega_0) \frac{\partial k}{\partial \omega} \bigg|_{\omega_0}$$

On obtient d'après l'expression de la solution que f est un produit que l'intégrale d'une onde se déplacement avec la vitesse de phases et d'une intégrale d'une onde qui se déplace à la vitesse de groupe.

Considérons le cas ou :

$$\omega > \omega_c$$

On montre que si :

$$\frac{\omega}{k} = c$$

Alors l'onde rentre totalement dans le milieu. Sinon, il y a une partie de l'onde qui est réfléchi. En utilisant les relations de continuité de l'énergie, on obtient les relation suivante :

$$E'_0 = \frac{2 \cdot E_{0i}}{1 + \frac{c}{v_{\phi}}}$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{c}{v_{\phi}} - 1}{\frac{c}{v_{\phi}} + 1} \right)^2$$

Avec :

- E'_0 l'énergie de l'onde qui rentre dans le plasma
- E_{0r} l'énergie de l'onde réfléchi
- E_{0i} l'énergie de l'onde incidente

On observe bien les considérations de réflexions selon la valeur de ω .

2.3 Conducteur ohmique

Considérons une onde incidente qui rentre dans un conducteur ohmique. L'onde initiale est caractérisé par :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - kx) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \cdot i}{c} \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{u}_z$$

Nous rechercherons une solution de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re}[\underline{E}(x)e^{i\omega t}] \vec{u}_y$$

Pour l'onde dans le milieu conducteur.

2.3.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire

A l'aide des équations de Maxwell, on montre que l'on peut faire cette approximation, c'est à dire considérer que :

$$\rho = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Dans les équations de Maxwell si :

$$\varepsilon_0 \cdot \omega \ll \gamma$$

2.3.2 Expression du champs électrique

En utilisant les équations de Maxwell, on montre que :

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{\frac{-x}{\delta}} \cos(\omega \cdot t - \frac{x}{\omega}) \vec{u}_y$$

De la même façon, on obtient l'expression du champs magnétique :

$$\vec{B} = \frac{E_0 \cdot e^{\frac{-x}{\delta}} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \delta \cdot \omega} \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4})$$

2.3.3 Puissance absorbée par une tranche de conducteur

Considérons une tranche de conducteur, c'est à dire une longueur finie en y et en z, noté a et b, et infinie en x. On obtient :

$$< P > = \frac{E_{Ot}^2 \cdot ab}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \cdot \mu_0}}$$

On peut obtenir cette expression directement ou à l'aide du vecteur de Poynting.

2.3.4 Onde transmise - Onde réfléchie

À l'aide de relation de continuité de l'énergie, et à l'aide de relation sur les champs, on obtient que l'onde est intégralement transmise si :

$$\omega = \frac{c^2 \cdot \mu_0 \cdot \gamma}{4\pi}$$

On obtient des fréquence de l'ordre de 10^{17} , c'est à dire une longueur d'onde dans le vide de l'ordre du nanomètre. Si cette condition n'est pas rempli, c'est à dire si on travaille avec des fréquences

inferieur, alors on obtient une onde réfléchi. Les caractéristiques de cette onde réfléchi sont donnée par :

$$\frac{E_{Or}}{E_{0i}} = \frac{1 - \frac{c}{\omega.\delta}}{1 + \frac{c}{\omega.\delta}}$$

Pour des fréquences de l'ordre du kHz, ce rapport est $\simeq 1$, on obtient donc que le conducteur se comporte comme un miroir.

Ondes électromagnétiques "confinées" avec conditions aux limites

3.1 Réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un plan conducteur parfait

Définition 59 On considère qu'un conducteur est parfait quand :

$$\gamma \rightarrow +\infty$$

Ce qui revient donc à :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

3.1.1 Réflexion normale

Considérons un champs électrique et un champs magnétique de la forme :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega.t - kx) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega.t - kx) \vec{u}_z$$

Onde réfléchie

On obtient une onde réfléchi, avec un coefficient de réflexion -1, c'est à dire que :

$$\frac{E_{Or}}{E_{0i}} = -1$$

Il n'y a donc pas d'onde transmise. On obtient donc comme expression pour les champs réfléchis :

$$\vec{E}_r = -E_{0i} \cos(\omega.t + kx) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega.t + kx) \vec{u}_z$$

On obtient donc des ondes planes progressive, mais de sens opposé.

Onde stationnaire

En étudiant maintenant le champs électrique totale, et le champs magnétique totale, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ \vec{B} &= \vec{B}_i + \vec{B}_r\end{aligned}$$

On obtient que ces champs ne sont pas des ondes progressives :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 2.E_{Oi}.\sin(kx)\sin(\omega.t).\vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{2.E_{Oi}}{c}.\cos(kx).\cos(\omega.t).\vec{u}_z\end{aligned}$$

On obtient que ces champs s'annule periodiquement selon x. On obtient donc, par analogie avec les cordes vibrante, des ventres et des noeuds. Le champs vibre donc sur place.

Énergie transporté

En calculant le vecteur de Poyting, on obtient que :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = 0$$

Sur une periode, il n'y a donc pas de transporte d'énergie.

Interface

En considérant les rélations de discontinuité des champs a la frontière, on obtient qu'en $x = 0^-$, les charges oscille, avec :

$$\vec{j}_s = \frac{2.E_{Oi}}{\mu_0.c}.\cos(\omega.t).\vec{u}_y$$

On obtient donc que les charges oscille à la surface du conducteur

Phénomène de résonnance

Considérons deux conducteurs parrallèle séparé par une distance L. Il faut que L vérifie, pour pouvoir observé un phénomène de résonnance, la relation suivante :

$$L = p.\frac{\lambda}{2}$$

3.1.2 Réflexion oblique

Considérons une onde arrivant oblique par rapport à l'axe Ox, formant l'angle i avec cette axe. Elle se réfléchie sur le conducteur parfait. Nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_{Oi}.\cos(\omega.t - \vec{k}_i.\vec{OM}).\vec{u}_z \\ \vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i}{k} \wedge \frac{\vec{E}_i}{c}\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\vec{k}_i &= k.(\cos(i).\vec{u}_x + \sin(i).\vec{u}_y) \\ \vec{k}_r &= k.(-\cos(i).\vec{u}_x + \sin(i).\vec{u}_y)\end{aligned}$$

On obtient donc par continuité, c'est à dire sachant que le champs en nul en $x=0$, que :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= -E_{Oi}.\cos(\omega.t - \vec{k}_r.\vec{OM}).\vec{u}_z \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}_r}{k} \wedge \frac{\vec{E}_r}{c}\end{aligned}$$

En développant, a l'aide des équations de Maxwell, on obtient les expressions des champs totaux \vec{E} et \vec{B} .

3.2 Propagation guidée entre deux plans parallèle

Considérons deux plans parallèle, l'un défini par $x=0$, l'autre par $x=a$. Par discontinuité des champs, nous avons les relations de passage suivante en 0 :

$$\vec{E}_{x=0^+} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_{x=0^+} = \mu_0 \cdot \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

Nous allons rechercher des solutions de la forme :

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}](x, y) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot z)}$$

On recherche donc des solutions qui se propage selon l'axe des z .

3.2.1 Champs électrique transverse normale aux plaques

On recherche un champs électrique porté par \vec{u}_x . En utilisant les équations de Maxwell, on montre que si :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Alors :

$$E(x, y) = E_0$$

est une solutions du problème.

3.2.2 Champs électrique parallèle aux plaques

On recherche un champs électrique cette fois ci porté par \vec{u}_y .

Équation de propagation

À l'aide de l'équation de propagation, on montre que le champs vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \cdot E(x)$$

On observe donc que le type de solution dépend du signe de :

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites nous disent que $E(x)$ s'annule deux fois en 0 et en a . Le cas hyperbolique est donc impossible dans la résolution de l'équation différentielle, on obtient donc une solution sinusoïdale :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \cos(\omega \cdot t - kx)) \cdot \vec{u}_y$$

Relation de dispersion

D'après l'équation différentielle et les conditions aux limites, nous savons que :

$$\frac{n \cdot \pi}{a} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

Ceci implique donc que :

$$f \geq \frac{n \cdot c}{2 \cdot a}$$

Le choix de n n'est donc pas totalement libre.
De plus, d'après l'expression de la vitesse de phase :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

On obtient que cette vitesse dépend de la fréquence.

Vitesse de groupe

En développant l'expression de l'énergie, on montre qu'elle se déplace à une vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{c^2}{v_{\phi}}$$

Asymptotiquement en fréquence, on obtient donc que la vitesse de groupe et la vitesse de phases tendent vers c .

3.2.3 Interprétation en termes de superposition d'onde plane

On peut interpréter :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - kx) \cdot \vec{u}_y$$

Qui n'est pas une onde plane, comme la superposition de deux ondes planes. On obtient cette décomposition à l'aide d'un changement de variable :

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \cdot E_0 [\cos(\omega \cdot t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) - \cos(\omega \cdot t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})]$$

On obtient donc que ça peut être interprété comme la superposition de deux ondes planes. En développant les expressions de \vec{k}_1 et de \vec{k}_2 , on reconnaît la figure d'onde réfléchi, et en calculant le module de ces vecteurs, on obtient que l'onde se propage à la vitesse de la lumière.

Énergie Electrostatique

4.1 Énergie d'une charge dans un champs électrique extérieur

Soit $M(q)$ une charge. On peut écrire l'énergie potentielle d'interaction de la charge q avec le champ extérieur sous la forme :

$$E_p = q \cdot V(M)$$

Avec $V(M)$ le potentiel crée par les charges extérieurs.

4.2 Énergie électrique d'un système de charges fixes

Soit $A(q_A)$ et $B(q_B)$ deux charges. On montre que l'on peut écrire l'énergie potentielle de deux charges sous la forme :

$$E_p = \frac{q_A \cdot q_B}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{ab}}$$

Avec r_{ab} la distance entre les charges A et B.

4.2.1 Cas d'un ensemble de N charges

Considérons le cas de n charges. On peut écrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot V_i$$

En notant V_i le potentiel électrostatique crée par les charges autres que i au point M_i , occupé par la charge q_i .

4.2.2 Généralisation

On peut généraliser ceci à une distribution continue de charges, en écrivant l'énergie potentielle d'interaction sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \iiint \rho \cdot V \cdot d\tau$$

Avec $d\tau$ un élément de volume et V le potentiel.

4.3 Densité d'énergie électrostatique

En partant de l'expression de l'énergie potentielle sous forme intégrale, et d'après le théorème de Gauss, on obtient que :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \iiint \rho \cdot V \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot \iiint \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot d\tau$$

Il faut bien noter que le domaine d'intégration n'est pas le même. Pour la première intégrale, on intègre sur l'espace où $\rho \neq 0$. Pour la seconde, on intègre sur l'espace tout entier. On peut donc introduire une densité volumique d'énergie, donnée par :

$$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$$

4.4 Énergie Magnétique et Électromagnétique

4.4.1 Densité volumique d'énergie magnétique

De façon analogue à précédemment, on montre que :

$$E = \iiint \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} dv$$

On montre bien que l'énergie est réparti de façon uniforme dans tout l'espace, avec une densité volumique de :

$$\frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}$$

4.4.2 Bilan d'énergie dans un volume élémentaire

On postule l'existence d'une densité volumique d'énergie u telle que l'énergie électromagnétique d'un système puisse s'écrire :

$$\vec{E} = \iiint \vec{u} \cdot dv$$

De même, on postule qu'il existe un vecteur densité de flux de puissance, noté Π , tel que :

$$\vec{P} = \iint \Pi \cdot \vec{n} \cdot dS$$

On montre que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{J} \cdot \vec{E} = 0$$

Ceci constitue le bilan d'énergie dans un volume élémentaire.

4.4.3 Vecteur de Poynting

On montre que $\vec{\Pi}$, appelé vecteur de Poynting, a pour expression :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On montre que ce vecteur donne la direction dans lequel se transfère l'énergie.

4.5 L'essentiel

Nous devons retenir les choses suivantes :

4.5.1 Équation de Maxwell

$$\begin{aligned}\rightarrow \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \rightarrow \operatorname{rot}(\vec{E}) &= \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \rightarrow \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \rightarrow \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

4.5.2 Force de Lorentz

Une charge q plongée dans un champ (\vec{E}, \vec{B}) subit la force suivante :

$$\vec{f} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

4.5.3 Autres expressions

Les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\rightarrow u &= \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \\ \rightarrow \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\end{aligned}$$

Avec toutes ces expressions, on redémontre l'ensemble des lois de l'électromagnétisme.

Septième partie

Mécanique

Chapitre 1

Mécanique du solide

1.1 Lois de la mécanique d'un système matériel

1.1.1 Modélisation d'un système matériel

On peut modifier un système matériel de deux façons :

→ Approche discrète : $m_t = \sum m_i$

→ Approche continue : $m_t = \iiint \rho \cdot dV$

Dans la suite de l'exposé, on utilise la notation discrète, mais la notation continue est totalement utilisable.

1.1.2 Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique)

Quantité de mouvement d'un système

Définition 60 On appelle quantité de mouvement d'un système, notée \vec{P} :

$$\vec{P} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

En introduisant le barycentre, ou centre de masse, noté G :

$$m_t \cdot \vec{OG} = \sum m_i \cdot \vec{OM}_i$$

On obtient que :

$$\vec{P} = m_t \cdot \vec{V}_G$$

Théorème 4 Par application de la seconde loi de Newton, on obtient que :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Ceci constitue le théorème du centre d'inertie

1.1.3 Référentiel Barycentrique

Définition 61 Un référentiel barycentrique est un référentiel qui a pour origine le centre des masses du système, et qui est en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen.

Définition 62 On note X^* la grandeur X dans le référentiel barycentrique.

Propriété 25 Dans un référentiel barycentrique, nous avons :

$$\vec{p}^* = \vec{0}$$

1.1.4 Système ouvert

Pour un système ouvert, on considère la masse à l'instant t , et la masse à l'instant $t+dt$ du système, plus la masse éjectée durant dt . On peut donc définir dans ce cas un système fermé.

1.2 Théorème du moment cinétique

1.2.1 Moment cinétique

Définition 63 Considérons le moment cinétique d'un point matériel O , dans le référentiel R , défini par :

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}$$

On définit donc le moment cinétique pour un ensemble de point par :

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_i$$

Propriété 26 On obtient la formule de changement de point du moment cinétique :

$$\overrightarrow{L_{A/R}} = \overrightarrow{L_{O/R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{p}$$

Avec \vec{p} la quantité de mouvement du système. On obtient donc que le moment cinétique et la quantité de mouvement constitue un torseur cinétique

1.2.2 Théorème de Koenig

En partant de la décomposition de la vitesse :

$$\vec{v}_i = \vec{v_{G/R}} + \vec{v}_i^*$$

Avec $\vec{v_{G/R}}$ la vitesse du centre de masse G par rapport au référentiel R , et \vec{v}_i^* la vitesse du point i dans le référentiel barycentrique.

On obtient que :

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = m_t \cdot \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v_G} + \overrightarrow{L_O^*}$$

On décompose donc le moment cinétique en un moment dû à un mouvement de translation, et un autre dû à un mouvement de rotation.

Propriété 27 Le moment cinétique, dans le référentiel barycentrique, ne dépend pas du point où on le calcule. On l'écrit donc :

$$\overrightarrow{L^*}$$

1.2.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe

Soit O un point fixe par rapport à R . On obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{O/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}$$

1.2.4 Théorème du moment cinétique en un point mobile

Soit A un point mobile par rapport à R . On obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{A/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}} - \vec{v_A} \wedge \vec{p}$$

En particulier, si R est un référentiel galiléen et que le point mobile est G , le centre de masse, on obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{G/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}$$

1.2.5 Représentation torsorielle

Nous avons les représentations suivantes :

$$\text{Torseur Cinématique} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{L}_O \end{array} \right.$$

$$\text{Torseur Dynamique} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum \vec{F}_{ext} \\ \vec{M} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext} \end{array} \right.$$

On observe que le torseur dynamique est la dérivé du torseur cinématique

1.3 Théorème de l'énergie cinétique

1.3.1 Énergie cinétique

Définition 64 Par définition, pour un ensemble de point materiel, on obtient :

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

1.3.2 Théorème de Koenig

De la façon que précédemment, on obtient que :

$$\vec{E}_c = \frac{1}{2} m_t V_g^2 + \vec{E}_c^*$$

1.3.3 Théorèmes

Propriété 28 En partant de l'expression de l'énergie cinétique, on obtient que :

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$$

Avec W_{ext} le travail des forces extérieures et W_{int} le travail des forces intérieures. Si le système est un solide, donc indéformable, on obtient :

$$\Delta E_c = W_{ext}$$

1.4 Cas du solide

Définition 65 On définit un solide par :

$$\forall (A, B) \in \text{Objet}^2 \quad \|\vec{AB}\| = \text{cte}$$

C'est donc un objet indéformable

1.4.1 Cinétique

Champs de vitesse

Considérons un solide, en mouvement dans un référentiel R fixe. On définit un référentiel R', lié au solide. Soit C le centre d'un repère lié à R', et M un point du solide. On obtient :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CM}$$

Avec $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané

1.4.2 Torseur cinématique

Solide possédant un point fixe

Considérons que le solide possède un point fixe, notée C. D'après la relation précédente, on obtient que, pour tous point M du solide :

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$$

En utilisant le théorème du moment cinétique, on obtient que :

$$I = \sum m_i . r_i^2$$

Avec I le moment d'inertie par rapport aux axes.

Solide possédant un axe fixe

On obtient que le vecteur rotation instantanée est porté par l'axe fixe, Oz par exemple. En appliquant le théorème du moment cinétique, on obtient que :

$$\vec{L}_C = I_{Oz} . \vec{\Omega} + \vec{L}_{C\perp}$$

Si z est un axe de symétrie, on obtient que :

$$\vec{L}_C = I_{Oz} . \vec{\Omega}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{C//}$$

1.4.3 Moment d'inertie par rapport à un axe

Relation de Huygens

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles séparées d'une distance A. On obtient que :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + m_t . A^2$$

Ceci constitue la relation de Huygens.

1.4.4 Energie cinétique

Supposons que le solide possède un point fixe, noté C. On obtient, en partant de l'expression général de l'énergie cinétique, et du champs de vitesse, la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} . \vec{L}_C . \vec{\Omega}$$

De plus, si on suppose qu'il existe un axe de rotation instantanée Δ parallèle à $\vec{\Omega}$, on obtient que :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta} . \Omega^2$$

1.5 Contact entre deux solides

1.5.1 Types de mouvement relatif

Il existe trois types de mouvement relatif :

- Mouvement de Translation
- Mouvement de Rotation
- Mouvement de Roulement

1.5.2 Vitesse de glissement

On considère deux solides en contact. À un instant t donnée, on suppose que les points I_1 , du solide 1, et I_2 , du solide 2, sont en contact. On obtient l'expression de la vitesse de glissement, noté \vec{v}_g :

$$\vec{v}_{g_{2 \rightarrow 1}} = \vec{v}_{I_2/R} - \vec{v}_{I_1/R}$$

1.5.3 Lois de Coulomb pour le glissement

Considérons un contact. La résultante \vec{R} se décompose en deux forces :

→ \vec{F} , la force de frottement

→ \vec{n} , la réaction normale au support

En l'absence de glissement

En l'absence de glissement, on obtient que :

$$\frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{n}\|} \leq f_0$$

Avec f_0 le coefficient de frottement statique

Avec glissement

Si il y a glissement, on obtient que :

$$\frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{n}\|} = f$$

Avec f le coefficient de frottement dynamique, $f \ll f_0$

Huitième partie

Optique physique

Chapitre 1

La lumière

1.1 Modèle scalaire de la lumière

1.1.1 Amplitude lumineuse

Soit M un point de l'espace, et t un instant. On associe à M et t :

$$\varphi : (M, t) \mapsto \varphi(M, t)$$

Cette fonction φ est appelé amplitude lumineuse. Cette grandeur est inobservable dans la réalité. L'éclairement est défini comme la puissance lumineuse qui arrive sur une Surface. On le note E . On montre que :

$$E \propto |\varphi|^2$$

1.1.2 Notion d'onde

Dans ce chapitre, on considère deux types d'onde :

Onde plane monochromatique

L'amplitude lumineuse associé à ce type d'onde est donnée par :

$$\varphi(M, t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x = \theta)$$

On peut aussi adopter la notation complexe, ce que nous allons faire dans la suite

Onde sphérique monochromatique

L'amplitude lumineuse est ici donnée par :

$$\varphi(M, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \theta)$$

1.1.3 Relation d'ondes - Rayon lumineux

Le rayon optique, considéré en optique géométrique, peut être représenté comme un tube selon lequel se propage l'onde. Le rayon lumineux donne la direction de propagation de l'onde.

Théorème de Malus-Dupin

Théorème 5 La surface d'onde, défini comme :

$$\{M/\varphi(M, t) = \varphi(M_0, t)\}$$

C'est à dire, cette surface d'onde défini tous les points ayant la même amplitude lumineuse.

Nous considérons deux types de surfaces d'ondes :

→ Pour une onde plane : $x = \text{constante}$

→ Pour une onde sphérique : Une sphère de rayon r

On montre que les lentilles ont pour effet de modifier cette surface d'onde. La modification entraîné dépend de la lentille considéré.

Théorème 6 Soit S une source et S' l'image de cette source par une lentille. Le temps mis pour relier S et S' est indépendant du chemin suivit.

À l'aide de ce dernier théorème, nous pouvons redémontrer les lois de Snell-Descartes.

1.2 Vision

1.2.1 Formation des images

Un appareil d'optique

L'oeil, qui permet la formation d'image, est un appareil optique, qui n'est pas assimilable à une lentille simple. On montre que l'oeil s'accomode aussi, pour pouvoir être toujours au point.

Un capteur : La rétine

La rétine est composé de deux entités :

→ Les batonnets : En périphérie de la rétine, en très grand nombre, très sensible

→ Les cones : Au centre, en petit nombre mais très concentré spatialement. Responsable de la vision en couleur.

L'oeil bouge constamment, car autrement, l'information n'est plus actualisé.

Vision des couleurs

L'oeil ne perçoit pas les longueurs d'ondes. On défini une couleur comme un contenu spectral, c'est à dire une énergie en fonction de la longueur d'ondes. Nous avons donc une sensation coloré. Cependant, avec la norme RGB, on ne peut pas restituer toutes les couleurs, car certain couleurs sont formé à l'aide de coefficients négatifs pour R, G ou B.

1.2.2 Sources de Lumière

Nous avons trois types de sources de lumière :

→ Les lasers : Source cohérente, c'est à dire que θ , dans l'amplitude lumineuse, est parfaitement déterminé. Cette source est très proche d'une sources monochromatique, en effet sa composition en longueur d'onde est défini à l'aide d'une courbe de Gauss, avec à mi-hauteur un écart de l'ordre de 0,3 nm.

→ Les lampes spectrales : Source incohérente, car, de par l'agitation thermique, nous avons, par effet Doppler-Fizeau, un éventail de longueur d'onde, et non une longueur d'onde. De plus, la lumière étant émise par les atomes qui se dé-excité, il ne sont pas synchrone, donc θ est totalement aléatoire, dans l'amplitude lumineuse.

→

Chapitre 2

Interférence non localisées de deux ondes

2.1 Superposition de deux ondes sphérique progressive monochromatique

2.1.1 Calcul de l'éclairement

Considérons un point M, et deux sources S_1 et S_2 séparé respectivement de r_1 et r_2 de M. Ce sont deux sources monochromatique sphérique de pulsation ω .

En M, nous avons :

$$\varphi_1 = \frac{A}{r_1} \cos(\omega.t - \omega.\frac{r_1}{c})$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{r_2} \cos(\omega.t - \omega.\frac{r_2}{c} + \theta)$$

Considérons E, l'éclairement, défini par :

$$E = |\varphi|^2$$

En passant en notation complexe, on obtient :

$$E = \frac{A^2}{r_1^2} \left(1 + \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} + 2 \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \theta\right) \right)$$

On montre que :

→ $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right)$ varie extrêmement rapidement

→ $\frac{r_1}{r_2}$ varie très lentement par rapport au cos

On peut donc faire l'approximation suivante :

$$\frac{r_1}{r_2} = cte$$

On obtient donc une expression de la forme :

$$E = \frac{A^2}{r_1^2} (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \theta))$$

2.1.2 Franges d'interférences

Natures

D'après l'expression précédente, on obtient que E varie d'un minimum vers un maximum périodiquement, avec une période spatiale de λ . D'après la considération que :

$$S_2M - S_1M = cte$$

On obtient que les franges d'interférences sont des hyperbolides.

Intersection des franges d'interférence par un plan parallèle au segment S_1S_2

. Soit a la distance séparant S_1 et S_2 , D la distance entre le segment S_1S_2 et le plan contenant M , et M le point défini par :

$$M = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ D \end{pmatrix}$$

En faisant les approximations suivantes, appelé approximation axiale :

$$a \ll D$$

$$X \ll D$$

$$Y \ll D$$

On montre que :

$$S_2M - S_1M = \frac{-a.X}{D}$$

On obtient donc une dépendance linéaire entre X et l'éclairement

Intersection des franges d'interférence par un plan perpendiculaire au segment S_1S_2

Soit D la distance entre S_1 et l'origine O , a la distance entre S_1 et S_2 , ρ la distance entre M et l'origine. M est porté par Ox et S_1 et S_2 porté par Oy .

En faisant l'approximation axiale, on obtient :

$$S_2M - S_1M = a.(1 - \frac{\rho^2}{2.D^2})$$

On obtient donc une dépendance quadratique.

2.2 Dispositif diviseur d'onde

2.2.1 Impossibilité de deux sources cohérentes

On ne peut pas obtenir, dans la durée, deux sources synchronisées l'une sur l'autre, c'est à dire avec θ indépendant du temps. Partant de ce constat, nous avons plusieurs moyens d'obtenir deux sources virtuelles cohérentes, à partir d'une source.

2.2.2 Miroir de Fresnel

Considérons deux miroirs M_1 et M_2 , liés, avec M_2 forment un angle α faible avec M_1 . On montre que la source se réfléchit sur les deux miroirs, ce qui permet d'obtenir des figures d'interférence, les supports de rayon se croisant. On obtient donc, à l'aide de ces deux miroirs, deux sources virtuelles synchrones.

2.3 Conditions de visibilité des franges - Cohérence

2.3.1 Cohérence temporelle d'une sources

Durée d'un train d'ondes

La lumière émise par une lampe spectrale est dû au dé-excitation d'atomes. Soit τ la durée d'émission du à un atome. On montre que l'on observe des interférences si :

$$r_2 - r_1 < c.\tau$$

On appelle longueur de cohérence, notée δ :

$$\delta = c.\tau$$

Cette condition permet de déterminer la taille observable de la figure d'interférence.

Largeur spectrale des raies d'émission

Considérons un paquet d'onde, c'est à dire un signal sinusoidale borné. On montre que ce signal peut être décomposé sous la forme :

$$s(t) = \int_0^\infty g(\nu).e^{i.2\pi.\nu.t} dt$$

La sources n'est donc absolument pas monochromatique. On peut approximer la courbe, qui est une courbe en cloche, par un "rectangle". En considérant un $d\nu$ de la distribution, et en déterminant l'éclairement, on obtient encore une restriction sur le nombre de franges d'interférence visible. Soit p le nombre de franges visible :

$$p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Avec $\lambda_2 - \lambda_1$ la largeur de la cloche et λ_2 une longueur d'onde de la cloche.

En intégrant l'élément différentielle de E déterminé précédemment, entre deux fréquences, on obtient une porteuse, qui module un signal.

Contraste

Par définition, on appelle contraste, noté γ :

$$\gamma = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}$$

Avec E_{max} l'éclairement maximale, E_{min} l'éclairement minimale.

On montre que des que l'on s'écarte un peu du centre de la figure d'interférence, le contraste devient très faible. On ne peut donc discerner qu'un très petit nombres de franges. Cependant, l'oeil est aussi sensible au couleur, ce qui nous permet de discerner un nombres plus important de franges qu'un capteur par exemple.

2.3.2 Interférences à grande différence de marche

On suppose dans ce cas que :

$$E(x) = cte$$

Définition 66 On appelle différence de marche la différence :

$$r_2 - r_1$$

On observe le mieux les franges d'interférence quand la différence de marche est nulle, c'est à dire quand on se trouve sur la médiatrice entre les deux sources virtuels dans le cas des miroirs de Fresnel. Pour une longueur d'onde donnée, en fixant le point M dans le cas d'une grande différence de marche, on obtient, en simplifiant l'expression de l'éclairement

$$E(\lambda) = K.(1 + \cos(\frac{2.\pi.a.X_0}{\lambda.D}))$$

On obtient que le maximum de l'éclairement est atteint pour certaine longueurs d'onde :

$$\lambda = \frac{2.a.X_0}{D(2p+1)}$$

On obtient que plus p augment, plus les longueurs d'ondes entraînent un éclairement maximum sont proche.

2.3.3 Cohérence spatiale d'une expérience d'interférence

Extension spatiale de la source

Une source ponctuelle ne peut pas être réalisée en réalité. Toute source a une épaisseur. Notons b cette largeur. On obtient donc que les franges d'interférences ne sont pas sans dimensions. Pour pouvoir voir les franges d'interférences, il faut donc que l'épaisseur soit bien inférieure à l'interfrange. On obtient donc qu'il faut que :

$$b < \frac{\lambda.D}{4.a}$$

Ceci est une condition contraignante, car la largeur de la source doit être de l'ordre de la 100 de μm .

Calcul de l'éclairement

En considérant un élément différentielle d'éclairement, on obtient que :

$$E = K.b(1 + \frac{\sin(\frac{\pi.a.b}{\lambda.D})}{\frac{\pi.a.b}{\lambda.D}}.\cos(\frac{2\pi.a.X}{\lambda.D}))$$

Largeur maximale de la fente source

D'après l'expression du contraste, on ne peut observer les interférences que si le contraste est suffisamment important, c'est à dire qu'on obtient un contraste seuil, donc un b maximale.

Chapitre 3

Interféromètre de Michelson

3.1 L'interféromètre

3.1.1 Description

Considérons deux miroirs, notés M_1 et M_2 , et une lame semi réfléchissant, formant un angle de 45 degré avec l'horizontale. Notons :

$$e = OM_2 - OM_1$$

Avec ce système, on obtient des interférences, car la lumière émise d'une source ne met pas le même temps pour aller de la source au plan.

Considérons deux voies :

- Voie 1 : Réflexion sur la séparatrice, puis réflexion sur M_1
- Voie 2 : Réflexion sur M_2 , puis réflexion sur la séparatrice

3.1.2 Cas de la source ponctuelle

Tracé de rayon

A partir d'un point source Considérons donné une source ponctuelle, noté O, et l'ensemble M_1 , M_2 et la lame semi-réfléchissante. M_1 à pour coordonnée (0,Y) et M_2 à pour coordonnée (X,0). Notons α l'angle entre l'horizontale et le miroir M_1 . On obtient le tracé des rayons pour la voie 1 et 2 en déterminant les images par les différents systèmes optique. On obtient le tracé des rayons arrivant au point P, un point de l'écran.

A partir d'un point de l'écran Inversement, on peut, étant donnée le dispositif et un point de l'écran, tracer les rayons de la voie 1 et de la voie 2, provenant d'une source quelconque.

Image de M_2

On peut aussi, à partir du premier tracé, celui d'un point source, obtenir un schéma équivalent, ne portant que sur un axe du repère. Ce montage est virtuel, mais rigoureusement équivalent. Si $\alpha = 0$, on dit que le Michelson est en "lame d'air", c'est à dire que le miroir M_1 et M_2 sont parallèle tout les deux à l'axe 0x. Si $\alpha \neq 0$, on dit que le Michelson est en "coin d'air"

3.1.3 Les différents cas

- Disposition des miroirs. Ceci dépend de deux paramètres : α et e.
 - $\alpha = 0$: lame d'air
 - $\alpha \neq 0$: Coin d'air

- Sources. On peut considérer plusieurs types de sources
 - Sources ponctuelles : Assimilable à un point
 - Sources étendue
 - Sources à distance finie
 - Sources à l'infini

Cas d'une source ponctuelle

Dans le cas d'une source ponctuelle, on obtient que les deux sources virtuelles sont synchrones, notées O_1, O_2 , on obtient donc que, en faisant l'hypothèse que $O_1M \simeq O_2M$.

$$E(M) = K \cdot [1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda}(O_2M - O_1M))]$$

Les lieux d'éclairement constant sont des hyperbolides de révolution.

3.1.4 Michelson en "lame d'air"

Nous avons donc $\alpha = 0$. On obtient donc que O_1 et O_2 vont être sur l'axe.

Source ponctuelle à distance finie

Soit P un point de l'écran de coordonnées (r, Y) . Soit D la distance entre l'écran et O_1 , et θ l'angle entre O_1P et la verticale, et $2.e$ la distance entre O_1 et O_2 .

On suppose :

$$r \ll D$$

On obtient, en développant que :

$$E(M) = K[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2.e \cdot \cos(\theta))]$$

Description de la figure d'interférence

Considérons les franges brillantes : On obtient que :

$$\cos(\theta) = \frac{p \cdot \lambda}{2.e}$$

En général, on a :

$$\lambda \ll e$$

Soit r_k le rayon du k-ème anneau. On obtient, en considérant l'angle θ_k petit, que :

$$\frac{r_k}{D} = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{k + \varepsilon - 1}$$

On ne peut pas déduire grand chose de cette expression, concernant l'évolution de r_k avec e , car le ε dépend de e . On montre cependant, en repartant de l'équation initiale, que si e augmente, le rayon augmente.

3.1.5 Sources étendue

Élargissement de la source

Au lieu d'avoir un point source, noté O, on obtient en ensemble de point source. Soit S un autre point source appartenant à la source étendue. On obtient que la figure d'interférence dû à S est translaté par rapport à celle de O. Notons a la distance entre les deux centres des anneaux d'interférences. On obtient une condition sur la largeur de la source, pour pouvoir continuer des interférences. Il faut que :

$$a < r_{k+1} - r_k$$

En développant, en se plaçant dans le cas où $\varepsilon = 1$ et $k \gg 1$, on obtient que a doit vérifier :

$$a < D \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

Soit N le nombre d'anneau visible. On obtient que :

$$\sqrt{N} = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \cdot \frac{1}{a}$$

On obtient donc que N est bornée, sauf si $D \rightarrow \infty$. En se plaçant à l'infini, on observera un très grand nombre d'anneaux. Ceci peut être réalisé à l'aide d'une lentille. Dans ce cas de figure, on obtient pour l'éclairement, en un point de l'écran M :

$$E(M) = K \cdot [1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2e \cos(\theta))]$$

On peut donc se libérer de la cohérence spatiale dans le cas d'une source étendue à l'infini.

Cohérence temporelle

On ne peut, en pratique, obtenir une source monochromatique. En développant, on montre que les anneaux d'interférence vont aller en s'épaississant. On n'observe donc que les anneaux au centre, ceux à la périphérie ne sont pas visibles.

3.1.6 Anneau de Haidinger

Considérons deux lames cristallines, toutes deux parallèles, séparées d'une distance e . Considérons un rayon incident. Une partie de ce rayon se réfléchit, l'autre pénètre dans les deux lames. Et ainsi de suite pour toutes les interfaces. On montre, en développant à l'aide de considérations d'optique ondulatoire, que les rayons utilisables, c'est-à-dire ayant une énergie non négligeable devant le rayon incident, se trouvent au tout début du processus. Les autres "s'épuisent" très vite.

Calcul du déphasage

Considérons une interface entre deux milieux 1 et 2. Un rayon incident, provenant de 1, passe dans 2, puis se réfléchit sur la deuxième lame, pour enfin revenir dans le milieu 1, en traversant la première lame. Lors du passage de la première interface, une partie du rayon est aussi réfléchi. On obtient donc deux rayons qui peuvent interférer. On montre, à l'aide de considérations géométriques, que le δt entre les deux chemins s'exprime de la façon suivante :

$$\delta t = \frac{2 \cdot e \cdot n_2}{c} \cdot \cos(r)$$

Avec e la distance entre les deux lames, n_2 l'indice entre les lames, et r l'angle de réfraction du rayon incident.

3.2 Localisation des franges d'interférence

3.2.1 Dans le cas d'une source ponctuelle

On obtient, en utilisant le schéma équivalent, que les interférences sont non localisées, c'est-à-dire que l'on peut placer l'écran où l'on veut, on observera des interférences.

3.2.2 Dans le cas d'une source étendue

Avec un Michelson en lame d'air, on obtient que la localisation est à l'infini.

3.3 Michelson en "coin d'air"

Définition 67 Un Michelson est dit en coin d'air si :

$$\alpha \neq 0$$

Cas d'une source ponctuelle

Considérons une source ponctuelle. On obtient que les franges d'interférence sont non localisées.

Cas d'une source étendue

Considérons une source étendue. Dans ce cas, nous avons localisation des franges d'interférence sur une sphère, défini comme passant par les deux points O_1 et O_2 , et par l'intersection virtuel des deux miroirs. Pour le moment, les images des interférences sont virtuel. Pour les voir, on utilise une lentille à la sortie du Michelson.

La nature des franges dépend de la distance de la source. En générale, on obtient des anneaux. Si d tend vers l'infini, on obtient des lignes. Pour faire tendre d vers l'infini, on place la source du Michelson dans le plan focale d'une lentille.

3.3.1 Etude du cas d'une source étendue, à l'infini

Comme nous l'avons vu, nous avons la localisation sur une sphère. Mais dans le cas où d tend vers l'infini, on obtient que cette sphère est un plan. On obtient donc une image sur M_1 . Soit P un point de M_1 .

Dans ce cas, en considérant que α est petit, on obtient que l'éclairement a pour expression :

$$E(P) = K[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha \cdot x)]$$

3.3.2 Elargissement de la source

Dans ce cas, on peut considérer un autre point source (appartenant à la largeur de la source), noté S . La source étant à l'infini, les rayons sont parallèles. Cependant, ils sont inclinés d'un angle β par rapport à la normale. On obtient donc une expression différente pour la différence de marche. D'où :

$$O \rightarrow E_O(P) = K[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha \cdot x)]$$

$$S \rightarrow E_S(P) = K[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha \cdot x \cdot \cos(\beta))]$$

On obtient donc que les franges vont en s'élargissant quand on se décale vers la périphérie. On observe donc pas les franges périphériques. D'autre part, le centre de la figure n'est pas, a priori, dans le champ d'observation. On n'observe donc pas de figure d'interférence. Pour en observer, il faut tendre vers le contact optique, c'est à dire faire tendre $e \rightarrow 0$.

En résumé, nous avons ceci :

→ Source ponctuelle : La source à l'infini → Franges rectilignes

→ Source étendue : La source à l'infini et le contact optique → Franges rectilignes.

De plus, on peut déterminer, en fixant α et e , une taille maximale pour la source.

3.3.3 Source non strictement monochromatique

On ne peut, dans la réalité, obtenir une source parfaitement monochromatique. On obtient donc :

$$E_{\lambda_1}(P) = K.[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_1}(2e - 2\alpha \cdot x))]$$

$$E_{\lambda_2}(P) = K.[1 + \cos(\frac{2.\pi}{\lambda_2}(2e - 2\alpha.x))]$$

On obtient donc que les franges d'interférence vont en s'épaissant. Il faut donc encore le contact optique.

3.4 Franges de Fizeau, ou d'égale épaisseur

On considère ici une lame mince. On considère donc ici un milieu transparent, de faible épaisseur, cette épaisseur étant variable sur la surface. On montre que la couleur dépend de l'épaisseur de la lame mince. Soit i l'angle d'incidence du rayon lumineux dans la lame mince. On montre que l'éclairement E pour expression :

$$E = K[1 + \cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.e.\cos(i))]$$

On observe donc que l'éclairement est maximal pour certaines longueurs d'onde. Ceci est observable sur une flaque d'eau avec un peu d'huile. L'huile fait office de la lame mince. On obtient une irisation, qui dépend de l'angle selon lequel on observe la flaque.

3.5 Interféromètre réel

Dans le cas d'un interféromètre réel, la séparatrice n'est pas un plan. On place donc une compensatrice dans le montage, pour corriger le retard dû à l'épaisseur de la séparatrice.

3.5.1 Déphasage

On montre, qu'à la réflexion, de par les différents indices, et le fait que les réfractions ne se font pas toutes sur les mêmes interfaces, on obtient un déphasage. On obtient donc que l'expression réelle de l'éclairement du Michelson est :

$$E = K[1 + \cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.e.\cos(\theta) + \pi)]$$

Neuvième partie

Chimie

Chapitre 1

Diagramme potentiel ph

1.1 Rappels

1.1.1 Diagramme de prédominance Acide-Base

Définitions de Bronsted

Les définitions d'après Bronsted sont :

- Acide : Une entité capable de céder un ou plusieurs protons
- Base : Une entité capable de capter un ou plusieurs protons

Équation de définition

On définit le couple acide-base (AH, A^-) par l'équation : $AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$

Constante d'acidité

La constante d'acidité, noté K_A , associé à un couple (AH, A^-), est défini comme la constante de réaction de l'équation de définition. D'où :

$$K_A = \frac{[A^-] \cdot [H_3O^+]}{[AH]}$$

Diagramme de prédominance

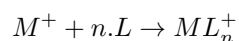
D'après la constante d'acidité, on peut définir un diagramme de prédominance, en remarquant que l'on peut écrire cette constante sous la forme :

$$\log\left(\frac{[A^-]}{[AH]}\right) = pH - pK_a$$

1.1.2 Diagramme de prédominance d'un complexe

Forme générale

On définit une réaction de complexation par :



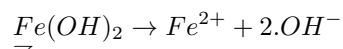
On peut définir des constantes de dissocation successive par :

$$Kd_n = \frac{[ML_{n-1}^+] \cdot [L]}{[ML_n^+]}$$

A partir de ces constantes, on peut définir une diagramme de prédominance, avec les Kd_1, Kd_2, \dots, Kd_n .

1.1.3 Diagramme d'existence d'un précipité

On définit la réaction de référence comme la réaction de dissolution du précipité. On l'écrit par exemple sous la forme :



On définit donc ici la constante de dissolution, noté K_s , par :

$$K_s = [Fe^{2+}].[OH^-]^2$$

On ne peut définir cette constante qu'à l'équilibre, donc en présence du précipité. A partir de cette constante, on peut définir un diagramme de prédominance en fonction du pH.

1.1.4 Couple oxydant-réducteur

Nombre d'oxydation

En étudiant le nombre d'oxydation, on peut savoir quelle entité est l'oxydant, laquelle est le réducteur, à l'aide de la règle suivante :

- L'oxydant a le nombre d'oxydation le plus grand
- Le réducteur a le nombre d'oxydation le plus faible

Domaine d'un oxydant (ou d'un réducteur)

A l'aide de la formule de Nernst, on peut obtenir un diagramme de prédominance. Si le groupe réducteur, ou le groupe oxydant, n'est composé que de solide, alors on établit le diagramme de prédominance en utilisant une concentration de référence par exemple.

1.2 Diagramme potentiel-pH de l'eau

1.2.1 L'eau est un oxydant

En considérant l'eau comme un oxydant, on montre que l'eau est stable pour une certaine zone

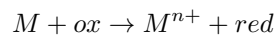
Chapitre 2

corrosion

2.1 Réaction d'oxydoréduction d'un métal

Définition 68 La corrosion d'un métal est l'oxydation de cet élément à l'état d'ion métallique. En milieu aqueux, cette réaction est appelée corrosion humide.

Cette réaction d'oxydation du métal a besoin d'un oxydant, susceptible de capter les électrons produit. On obtient donc que la corrosion du métal M a pour équation :



2.1.1 Réaction sur une électrode

Description de l'interface métal-solution

Dans le cas d'un morceau en solution, on obtient qu'il peut exister une différence de potentiel entre la solution et le morceau de métal, contrairement au cas de deux solutions.

Réaction

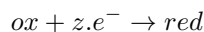
Le système est composé de deux électrodes. L'électrode où a lieu la réaction de réduction est appelé cathode. C'est dans cette électrode qu'arrive les électrons. L'électrode où a lieu la réaction d'oxydation est appelé anode, c'est de cette électrode que partent les électrons. En résumé "imagé", nous avons :

- La cathode : Écurie des cations
- L'anode : Écurie des anions

2.2 Cinétique

2.2.1 Intensité de corrosion

Considérons l'anode. Sur l'anode, nous avons la réaction suivante :



La charge élémentaire est donc :

$$dq = z.d\varepsilon.Na.e$$

Avec ε l'avancement. On obtient donc, sachant que :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Que :

$$i = z.Na.e.v$$

On peut donc déterminer, juste en mesurant l'intensité, la vitesse de la réaction v .

2.2.2 Courbe intensité-potentiel

Courant anodique, courant cathodique

Courant anodique

Dans le cas où $i > 0$, nous sommes donc dans le cas du courant anodique. On montre que l'on peut écrire, en supposant que la réaction admet un ordre :

$$i_A = k.[Ox]$$

Ceci est vrai, sachant que nous avons établi une relation liant i à v . De plus, nous avons la variation de k avec la température d'après la loi d'Arrhenius :

$$k = k_0.e^{\frac{-E_{m,a}}{R.T}}$$

Courant cathodique

De même, à la cathode, nous avons le courant cathodique, défini par :

$$i_c = -k'.[red]$$

Avec toujours :

$$k' = k'_0.e^{\frac{-E_{m,a}}{R.T}}$$

Équilibre

À l'équilibre, il n'y a pas de courant dans le circuit. Nous avons donc les relations suivantes à l'équilibre :

$$\rightarrow i_T = i_c + i_a = 0$$

$$\rightarrow \mu_{ox} = \mu_{red}$$

En développant la première condition, on obtient qu'elle implique que :

$$\frac{[ox]}{[red]} = \frac{k_{0c}}{k_{0a}}$$

On obtient donc que le potentiel à une valeur bien définie par $\frac{k_{0c}}{k_{0a}}$ à l'équilibre.

Loi de Bothlet-Volmer

Par définition, nous avons :

$$i = i_a + i_c$$

En développant les énergies d'activation dans la formule d'Arrhenius, on obtient que :

$$i = i_0 \left[e^{-\frac{\Delta G_a^* + \alpha \Delta E}{RT}} - e^{-\frac{\Delta G_c^* - (1 - \alpha) \Delta E}{RT}} \right]$$

On peut, à partir de cette relation, définir les systèmes lents et les systèmes rapides :

→ Si i_0 est grand, on obtient que le système est rapide.

→ Si i_0 est petit, on obtient que le système est lent.

Courant de diffusions

On montre que le profil intensité-potentiel est borné en intensité. Il admet des intensités limitées, appelé intensité de diffusion. Ces limites sont dues au fait que le système tend à s'homogénéiser.

Dixième partie

Annexe

Analyse Vectorielle

A.1 Opérateur

A.1.1 Opérateur gradient

Définition 69 L'opérateur gradient est défini par :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Un moyen pour retenir les expressions suivant est de penser qu'on divise les dérivées par les éléments non différentiel dans l'expression du \overrightarrow{dl} , dans le système de coordonnées considéré. Par exemple, en cylindrique :

$$\overrightarrow{dl} = dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta} + dz \cdot \overrightarrow{u_z}$$

On divise donc la coordonnée du gradient selon u_θ par r .

En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En coordonnée sphérique

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

A.1.2 Opérateur Divergence

En coordonnée cartésienne

$$div(\vec{D}) = \frac{\partial(\vec{D} \cdot \vec{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{D} \cdot \vec{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{D} \cdot \vec{u}_z)}{\partial z}$$

A.1.3 Opérateur Laplacien scalaire

Définition 70 On définit le Laplacien scalaire par :

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}(f))$$

En coordonnée cartésienne

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A.1.4 Opérateur Laplacien vecteur

En coordonnée cartésienne

$$\overrightarrow{\Delta(\vec{D})} = \begin{pmatrix} \Delta(\vec{D} \cdot \vec{u}_x) \\ \Delta(\vec{D} \cdot \vec{u}_y) \\ \Delta(\vec{D} \cdot \vec{u}_z) \end{pmatrix}$$

A.1.5 Opérateur Rotationnel

En coordonnée cartésienne

$$\overrightarrow{rot}(\vec{D}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} \\ \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} \\ \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

A.1.6 Opérateur Nabla

En coordonnée cartésienne

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Propriété 29 A partir de cet opérateur, on peut retrouver les autres opérateurs :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f)$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2(f)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{D}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{D}$$

A.2 Propriétés, formules et théorèmes

A.2.1 Propriétés des opérateurs

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{D})) = 0$$

A.2.2 Formules

Nous avons les formules suivantes :

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f.\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g.\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\rightarrow \text{div}(f.\vec{D}) = f.\text{div}(\vec{D}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f).\vec{D}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(f.\vec{D}) = f.\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{D}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{D}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{D})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{D}) - \Delta(\vec{D})$$

A.2.3 Théorème

Théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de la Divergence

Soit Σ une surface fermée. On obtient que :

$$\iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} . dS = \iiint_{Vol} \text{div}(\vec{D}) . dV$$

Avec Vol le volume intérieur de Σ .

Théorème de Stokes

Soit Σ une surface quelconque, de contours Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{rot}(\vec{D}) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Table des matières

Licence	i
Avant-propos	iii
Remerciements	v
I Electricité	1
1 Fonction de transfert	3
1.1 Modèle du quadripôles	3
1.2 Fonction de transfert complexe	4
1.2.1 Amplitude	4
1.2.2 Gain en décibel	4
1.2.3 Bande passante	4
1.2.4 Phase	4
1.3 Représentations	4
1.3.1 Diagramme de Bode	4
1.3.2 Diagramme de Nykwest	4
1.4 Lien entre régime transitoire et fonction de transfert	5
1.4.1 Précaution d'utilisation	5
1.4.2 Principe	5
1.5 Type de réponse	5
1.5.1 Réponse indicielle	5
1.5.2 Réponse impulsionnelle	5
1.6 Réponse d'un filtre à un signal périodique	5
1.7 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre	5
1.7.1 Filtre intégrateur	5
1.7.2 Filtre dérivateur	6
2 Analyse d'un signal	7
2.1 Signal périodique	7
2.1.1 Caractéristique principale	7
2.2 Décomposition d'un signal périodique en fonction sinusoïdale	8
2.2.1 Théorème de Fourier	8
2.2.2 Identité de Parseval	8
2.2.3 Transformée de Fourier	9

II Electrostatique et Electrocinétique 11

1	Forme locale de l'électrostatique	13
1.1	Champs électrique	13
1.1.1	Définitions	13
1.2	Potentiel électrique	14
1.2.1	Calcul direct du potentiel	14
1.2.2	Condition pour qu'un champs de vecteurs soit un gradient	14
1.2.3	Lien entre direction de champs et surface equipotentielle	15
1.3	Théorème de Gauss	15
1.3.1	Forme locale du théorème de Gauss	15
1.3.2	Équation de Poisson	15
2	Conducteur électrique en équilibre	17
2.1	Définitions	17
2.1.1	Conducteur	17
2.2	Propriétés de l'équilibre pour un conducteur donnée	17
2.2.1	Conséquence des définitions globale	17
2.2.2	Cavité vide de charge dans un conducteur	18
2.2.3	Champs électrique à la surface du conducteur	18
2.3	Système de conducteur en équilibre	18
2.3.1	Il y a unicité des solutions	18
2.3.2	Conducteur seul dans l'espace	18
2.3.3	Influence électrique	19
2.4	Condensateur	19
2.4.1	Capacité d'un condensateur	19
3	Complément d'électrocineétique	21
3.1	Définitions	21
3.1.1	Intensité de courant	21
3.1.2	Vecteur densité surfacique de courant	21
3.1.3	Équation de continuité	21
3.2	Expression de la puissance reçu par un dipôle	22
3.3	Conducteur ohmique	22
3.3.1	Loi d'Ohm	22
3.3.2	Résistance électrique	23
3.3.3	Effet Joule	23

III Thermodynamique 25

1	Rappel et complément - Thermodynamique classique	27
1.1	Principe	27
1.1.1	Principe zéro	27
1.1.2	Premier Principe	27
1.1.3	Second principe	28
1.2	Quelques notions de mécanique statique	28
1.2.1	Modèle cinétique du gaz parfait	28
1.2.2	Interprétation statistique de l'entropie	29
1.3	Gaz parfait	29
1.3.1	Équation d'état des gaz parfaits	29
1.3.2	Loi de Joules	29
1.3.3	Entropie	30

2	Potentiel Chimique	31
2.1	Enthalpie libre	31
2.1.1	Travail récupérable dans une transformation monotherme, monobar	31
2.1.2	Enthalpie libre	31
2.1.3	Relation de Gibbs-Helmoltz	31
2.2	Potentiel chimique	32
2.2.1	Relation d'Euler	32
2.2.2	Relation de Gibbs-Duhem	32
2.2.3	Équilibre d'un corps présent sous deux phases	32
2.3	Expression du potentiel chimique	32
2.3.1	Gaz parfait pur	32
2.3.2	Gaz réel pur	33
2.3.3	Gaz parfait dans un mélange de gaz parfait	33
2.3.4	Phase condensée pur	33
2.3.5	Mélange idéale - Mélange homogène	33
2.3.6	Solution diluée	33
3	Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire	35
3.1	Équilibre liquide-vapeur pour un corps pur	35
3.1.1	Équilibre d'un corps pur sous deux phases	35
3.1.2	Chaleur latente de changement d'état	35
3.1.3	Relation de Clapeyron	35
3.2	Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire	36
3.3	Mélange de deux constituants totalement miscible à l'état liquide	36
3.3.1	Mélange idéale	36
3.3.2	Mélange réel	37
4	Grandeurs thermochimique standards	39
4.1	Réaction chimiques	39
4.1.1	Équation bilan	39
4.1.2	Avancement de la réaction	39
4.1.3	Chaleur de réaction	39
4.2	Enthalpie de réaction	40
4.2.1	Variation d'enthalpie au cours d'une réaction	40
4.2.2	Enthalpie standard de réaction	40
4.2.3	Relation de Kirchoff	40
4.3	Enthalpie de formation d'un corps pur	41
4.3.1	Détermination expérimentale de $\Delta^r H$	41
4.3.2	Enthalpie de formation	41
4.4	Énergie interne de réaction	41
4.5	Entropie standard de réaction	41
4.5.1	Entropie absolue	41
5	Equilibre chimique	43
5.1	Affinité chimique	43
5.1.1	Variation de l'enthalpie libre au cours d'une réaction monobar et monotherme	43
5.1.2	Définition	43
5.1.3	Prévision de l'évolution de la réaction	43
5.1.4	Expression de A	44
5.1.5	Relation de Gulberg et Waages	44
5.2	Déplacement de l'équilibre	44
5.2.1	Influence d'une variation de température	44
5.2.2	Influence d'une variation de pression	45
5.2.3	Influence de l'ajout d'un constituant	45
5.3	Potentiel d'oxydo-réduction	45
5.3.1	Force électromotrice d'une pile	45

5.3.2	Relation de Nernst	46
5.4	Variance	46
6	Diagramme d'Ellingham	47
6.1	Construction du diagramme	47
6.1.1	Oxyde	47
6.1.2	L'approximation d'Ellingham	47
6.2	Utilisation du Diagramme d'Ellingham	48
6.2.1	Prévision des réactions	48
6.2.2	Domaine d'existence	48
IV	Magnétostatique	49
1	Loi de Biot et Savart	51
1.1	Distribution linéique	51
1.2	Distribution volumique	51
1.3	Propriété de symétrie	51
2	Potentiel Vecteur	53
2.1	La divergence du champs magnétique est nul	53
2.1.1	Cacul pour le champs crée par un élément de circuit	53
2.1.2	Calcul utilisant l'analyse vectorielle	53
2.2	Définitions du potentiel vecteur	54
2.2.1	Jauge dite de Coulomb	54
2.3	Théorème de Stokes	54
2.4	Analogie entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire	55
2.5	Champ magnétique au voisinage d'un axe d'anti-symétrie	55
3	Théorème d'Ampère	57
3.1	Laplacien vecteur	57
3.2	Forme locale du théorème d'Ampère	57
3.3	Forme global du théorème d'Ampère	57
4	Champs magnétique crée par un dipole magnétique	59
4.1	Définitions et propriétés	59
4.2	Analogie entre dipole électrique et dipole magnétique	59
V	Electromagnétisme	61
1	Actions électromagnétique exercées sur un circuit	63
1.1	Effet Hall	63
1.2	Force de Laplace	63
1.2.1	Expression	63
1.2.2	Définitions légale de l'Ampère	64
1.3	Torseur des forces exercées sur un circuit	64
1.3.1	Energie d'interaction entre le champ et un circuit	64
1.3.2	Dipole magnétique dans un champs magnétique uniforme	65
1.3.3	Dipole magnétique dans un champs magnétique non-uniforme	65
1.3.4	Analogie entre dipole magnétique et dipole électrique	65
2	Induction Electromagnétique	67
2.1	Loi de Faraday	67
2.1.1	Expression de Faraday	67
2.1.2	Déplacement d'un élément de circuit dans un champs permanent	67
2.1.3	Enoncé	67

2.1.4	Quantité d'électricité induit	68
2.2	Induction mutuelle de deux circuits	68
2.2.1	Coefficient d'induction mutuelle	68
2.2.2	Auto-induction	69
3	Équations de Maxwell	71
3.1	Les quatres équations	71
3.1.1	Flux magnétique	71
3.1.2	Équation de Maxwell-Faraday	71
3.1.3	Équation de Maxwell-Gauss	71
3.1.4	Équation de Maxwell-Ampère	72
3.2	Propriétés des champs	72
3.2.1	Conditions limites	72
3.2.2	Équations de propagation des champs	72
3.3	Potentiels	72
3.3.1	Définitions	72
3.3.2	Conditions de Jauge	73
4	Régime quasi-stationnaire	75
4.1	Approximation des régimes quasi-stationnaire	75
4.1.1	Définitions	75
4.1.2	Approximation du régime quasi-stationnaire électrique	75
4.1.3	Approximation du régime quasi-stationnaire magnétique	75
4.2	Cas des conducteurs ohmique	76
4.2.1	Loi d'ohm	76
4.2.2	Densité volumique de charge	76
4.2.3	Cas du régime sinusoïdale	76
4.2.4	Interface conducteur-vide	76
4.2.5	Cas du conducteur parfait	76
VI	Onde Electromagnétique	77
1	Ondes électromagnétique	79
1.1	Solution des équations de propagations	79
1.1.1	Équation de propagation	79
1.1.2	Ondes planes	79
1.1.3	Onde sphérique	80
1.2	Onde électromagnétique plane progressive	80
1.2.1	Les champs E et B sont transverse	80
1.2.2	Les champs sont orthogonaux	80
1.2.3	Force exercée sur une particule chargée par l'onde	80
1.2.4	Vecteur de Poynting	80
1.3	Onde plane progressive monochromatique	81
1.3.1	Propriétés	81
1.3.2	Polarisation	81
2	Propagation d'une onde plane électromagnétique progressive monochromatique dans un milieu matériel	83
2.1	Plasma	83
2.1.1	Position du problème	83
2.1.2	Expression de j	83
2.1.3	Équation de Maxwell	83
2.1.4	Étude des diverses solutions	84
2.2	Vitesse de phase - Vitesse de groupe	84
2.2.1	Vitesse de phase	84
2.2.2	Vitesse de groupe	85

2.2.3	Vitesse de déplacement d'un signal	85
2.3	Conducteur ohmique	86
2.3.1	Approximation des régimes quasi-stationnaire	86
2.3.2	Expression du champ électrique	86
2.3.3	Puissance absorbée par une tranche de conducteur	86
2.3.4	Onde transmise - Onde réfléchie	86
3	Ondes électromagnétiques "confinées" avec conditions aux limites	89
3.1	Réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un plan conducteur parfait	89
3.1.1	Réflexion normale	89
3.1.2	Réflexion oblique	90
3.2	Propagation guidée entre deux plans parallèles	91
3.2.1	Champs électrique transverse normale aux plaques	91
3.2.2	Champs électrique parallèle aux plaques	91
3.2.3	Interprétation en termes de superposition d'onde plane	92
4	Énergie Electrostatique	93
4.1	Énergie d'une charge dans un champ électrique extérieur	93
4.2	Énergie électrique d'un système de charges fixes	93
4.2.1	Cas d'un ensemble de N charges	93
4.2.2	Généralisation	93
4.3	Densité d'énergie électrostatique	94
4.4	Énergie Magnétique et Électromagnétique	94
4.4.1	Densité volumique d'énergie magnétique	94
4.4.2	Bilan d'énergie dans un volume élémentaire	94
4.4.3	Vecteur de Poynting	94
4.5	L'essentiel	94
4.5.1	Équation de Maxwell	95
4.5.2	Force de Lorentz	95
4.5.3	Autres expressions	95

VII Mécanique 97

1	Mécanique du solide	99
1.1	Lois de la mécanique d'un système matériel	99
1.1.1	Modélisation d'un système matériel	99
1.1.2	Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique)	99
1.1.3	Référentiel Barycentrique	99
1.1.4	Système ouvert	100
1.2	Théorème du moment cinétique	100
1.2.1	Moment cinétique	100
1.2.2	Théorème de Koenig	100
1.2.3	Théorème du moment cinétique en un point fixe	100
1.2.4	Théorème du moment cinétique en un point mobile	100
1.2.5	Représentation torsorielle	101
1.3	Théorème de l'énergie cinétique	101
1.3.1	Énergie cinétique	101
1.3.2	Théorème de Koenig	101
1.3.3	Théorèmes	101
1.4	Cas du solide	101
1.4.1	Cinétique	101
1.4.2	Torseur cinématique	102
1.4.3	Moment d'inertie par rapport à un axe	102
1.4.4	Énergie cinétique	102

1.5	Contact entre deux solides	102
1.5.1	Types de mouvement relatif	102
1.5.2	Vitesse de glissement	103
1.5.3	Lois de Coulomb pour le glissement	103
VIII	Optique physique	105
1	La lumière	107
1.1	Modèle scalaire de la lumière	107
1.1.1	Amplitude lumineuse	107
1.1.2	Notion d'onde	107
1.1.3	Relation d'ondes - Rayon lumineux	107
1.2	Vision	108
1.2.1	Formation des images	108
1.2.2	Sources de Lumière	108
2	Interférence non localisées de deux ondes	109
2.1	Superposition de deux ondes sphérique progressive monochromatique	109
2.1.1	Calcul de l'éclairement	109
2.1.2	Franges d'interférences	110
2.2	Dispositif diviseur d'onde	110
2.2.1	Impossibilité de deux sources cohérentes	110
2.2.2	Miroir de Fresnel	110
2.3	Conditions de visibilité des franges - Cohérence	111
2.3.1	Cohérence temporelle d'une sources	111
2.3.2	Interférences à grande différence de marche	111
2.3.3	Cohérence spatiale d'une expérience d'interférence	112
3	Interféromètre de Michelson	113
3.1	L'interféromètre	113
3.1.1	Description	113
3.1.2	Cas de la source ponctuelle	113
3.1.3	Les différents cas	113
3.1.4	Michelson en "lame d'air"	114
3.1.5	Sources étendue	114
3.1.6	Anneau de Haidinger	115
3.2	Localisation des franges d'interférence	115
3.2.1	Dans le cas d'une source ponctuelle	115
3.2.2	Dans le cas d'une source étendue	115
3.3	Michelson en "coin d'air"	116
3.3.1	Etude du cas d'une source étendue, à l'infini	116
3.3.2	Elargissement de la source	116
3.3.3	Source non strictement monochromatique	116
3.4	Franges de Fizeau, ou d'égale épaisseur	117
3.5	Interféromètre réel	117
3.5.1	Déphasage	117
IX	Chimie	119
1	Diagramme potentiel ph	121
1.1	Rappels	121
1.1.1	Diagramme de prédominance Acide-Base	121
1.1.2	Diagramme de prédominance d'un complexe	121
1.1.3	Diagramme d'existence d'un précipité	122
1.1.4	Couple oxydant-réducteur	122

1.2	Diagramme potentiel-pH de l'eau	122
1.2.1	L'eau est un oxydant	122
2	corrosion	123
2.1	Réaction d'oxydoréduction d'un métal	123
2.1.1	Réaction sur une électrode	123
2.2	Cinétique	123
2.2.1	Intensité de corrosion	123
2.2.2	Courbe intensité-potentiel	124
X	Annexe	125
A	Analyse Vectorielle	127
A.1	Opérateur	127
A.1.1	Opérateur gradient	127
A.1.2	Opérateur Divergence	128
A.1.3	Opérateur Laplacien scalaire	128
A.1.4	Opérateur Laplacien vecteur	128
A.1.5	Opérateur Rotationnel	128
A.1.6	Opérateur Nabla	129
A.2	Propriétés, formules et théorèmes	129
A.2.1	Propriétés des opérateurs	129
A.2.2	Formules	129
A.2.3	Théorème	129