Fiches de Révision
MPSI

TOME II - Mathématiques

Jean-Baptiste Théou

Licence

Avant-propos

Il y a un plus d'un an, au milieu de ma SUP MP, j'ai décidé de faire mes fiches de révision à l'aide de Latex, un "traitement de texte" très puissant. Il en résulte les fiches qui suivent. Je pense que travailler sur des fiches de révision, totalement séparé de notre cours, est un énorme plus, et réduit grandement la quantité de travail pour apprendre son cours, ce qui laisse plus de temps pour les exercices. Mon experience en tout cas va dans ce sens, j'ai notablement progressé à l'aide de ces fiches.
J'ai décidé de les rassembler sous forme d'un "livre", ou plutôt sous forme d'un recueil. Ce livre à pour principal interet pour moi d'être transportable en cours. C'est cet interet qui m'a poussé à faire ce livre.
Dans la philosophie de mes fiches de révision, ce livre est disponible gratuitement et librement sur mon blog. Il est édité sous License Créative Commons. Vous pouvez librement adapter ce libre à vos besoins, les sources Latex sont disponibles sur mon blog. Je pense que pour être en accord avec la philosophie de ces fiches, il serai bien que si vous effectuez des modifications de mon ouvrage, vous rendiez ces modifications disponible à tous. Je laisserai volontiers une place pour vos modifications sur mon blog. Je pense sincèrement que ce serai vraiment profitable au plus grand nombre, et dans la logique de mon travail.
J'ai hiérarchisé mon ouvrage de façon chronologique, tout en rassemblant les chapitres portant sur le même sujet sous une même partie. Les parties sont rangées dans l'ordre "d'apparition" en MPSI. J'ai mis en Annexe des petites fiches de méthodologie, qui peuvent s'avérer utiles.
Je vous souhaite une bonne lecture, et surtout une bonne réussite.
Jean-Baptiste Théou

Remerciements

Je tient à remercier tout particulièrement Yann Guillou, ex Professeur de Physique-Chimie en MPSI au Lycée Lesage, actuellement en poste en Guadeloupe, qui m'a permis de consolider mes connaisances en physique et qui m'a ouvert les yeux sur la réalité de la physique et sur son histoire. Ces "digressions historiques" resterons de bons moments dans mon esprit, pour longtemps.
Je remercie aussi Paul Maheu, Professeur de Mathématiques en MPSI au Lycée Lesage, qui m'a permis d'aquérir de solides connaisances en Mathématiques.
Sans eux, ce livre ne pourrai exister.
Pour finir, je me dois à mon avis d'insérer cette citation dans mon ouvrage, citation que nous a donné Mr Guillou pour nos premiers coups de crayon en Prépa. Elle est à méditer ....

Je suis convaincu qu'il est plus bénéfique pour un étudiant de retrouver des démonstrations à partir de quelques indications que de les lire et de les relire .... Qu'il les lisent une fois, qu'il les retrouvent souvent

Srinivâsa Aiyangâr Râmânujan(1886-1920)

Première partie

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Chapitre 1

$\mathbb{R}$

1.1 Définitions

1.2 Structure

Définition 1 *($\mathbb{R}$,+,$\times$) est un corps totalement ordonnée. On dit qu'il est archimédien.*

Définition 2 *La relation "$\leq$" est une relation d'ordre. Elle est :*
$\rightarrow$ *Reflexive :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \; x \leq x$$

$\rightarrow$ *Anti-symétrique :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; si \; : (x \leq y, y \leq x), \; alors \; x = y$$

$\rightarrow$ *Transitive :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; si \; : (x \leq y, y \leq z), \; alors \; x \leq z$$

1.2.1 Majorant - Minorant

Soit A un ensemble

Majorant

Définition 3 *Si M est un majorant de A, avec $M \in A$, alors :*

$$M = Max(A)$$

Définition 4 *Si M est le plus petit des majorants de A, alors M est la borne supérieure de A :*

$$M = Sup(A)$$

Propriété 1 *Si $A \; c \; \mathbb{R}$, si Max(A) existe, alors Sup(A) existe et :*

$$Sup(A) = Max(A)$$

Minorant

Définition 5 *Si M est un minorant de A, avec $M \in A$, alors :*

$$M = Min(A)$$

Définition 6 *Si M est le plus grand des minorant de A, alors M est la borne inférieure de A :*

$$M = Inf(A)$$

Propriété 2 *Si $A\ c\ \mathbb{R}$, si Min(A) existe, alors Inf(A) existe et :*

$$Min(A) = Inf(A)$$

1.2.2 Borne supérieure - Borne inférieure

Propriété 3 *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède une borne inférieure.*

Propriété 4 *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.*

Propriété 5 *Toute partie de Z non vide et majorée possède un plus grand éléments. (Max)*

1.2.3 Partie bornée de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de E. On note ceci : $A \in P(E)$.
A est bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}\ tq\ \forall a \in A,\ |a| \leq M$$

Propriété 6 *Propriété d'Archimède : Soient (x,y)$\in \mathbb{R}$ et x>0, alors :*

$$\exists p \in Z\ tq\ y < px$$

1.2.4 Partie entière

Définition 7 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
Il existe un unique entier p telque p$\leq$ x<p+1
Cette entier p en la partie entière de x. On le note $E(x)$.

Définition 8 *En complément, on défini la partie décimale de x, notée $D(x)$:*

$$D(x) = x - E(x)$$

1.2.5 Densité

Définition 9 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$*
A est dense dans $\mathbb{R}$ si, avec $x \neq y$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \exists a \in A\ tq\ a \in]x; y[$$

Propriété 7 *Puisque l'espace des fractions rationnels, notée Q, est dense dans $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite de rationnelle qui converge vers x.*

1.3 Partie de $\mathbb{R}$

Définition 10 *Soient (a,b)$\in \mathbb{R}^2$. On appelle segment d'extrémité a,b :*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$

Définition 11 *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. I est un intervalle si :*

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x; y]\ c\ I$$

1.3.1 Sous-groupes de ($\mathbb{R}$;+)

Critère de reconnaissance des sous-groupes

Définition 12 *Soit H une partie de* $\mathbb{R}$.
On dit de H est un sous-groupe de ($\mathbb{R}$;+) si (H ;+) est un groupe.

Propriété 8 *H est un sous-groupe si et seulement si :*

1- $H \; c \, \mathbb{R}$ *et H non vide*

2- $\forall (x; y) \in H^2, x - y \in H$

Chapitre 2

Limite d'une fonction

2.1 Définitions

Définition 13 *Soit f une fonction, I un intervalle.*
f est majorée sur I si :

$$\exists m\ tq\ \forall x \in I\ f(x) < m$$

Définition 14 *On dit que f est croissante sur I si :*

$$\forall (x, x') \in I^2\ si\ x < x',\ f(x) \leq f(x')$$

2.1.1 Fonction k-lipschitzienne

Définition 15 *Soit f : $I \to \mathbb{R}$.*
f est k-lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Propriété 9 *Soient f et g deux fonctions k-lipschitziennes sur I, alors f+g est aussi k-lipschitzienne sur I*

2.1.2 Limite et continuité

Au voisinage d'un réel a

Soit $a \in R$.

Définition 16 *La propriété P est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I et d'un intervalle ouvert de centre a :*

$$(\exists \alpha > 0\ tq\ (P)\ soit\ vraie\ \forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap I)$$

Au voisinage de $+\infty$

Définition 17 *(P) est vraie au voisinage de $+\infty$ si elle est vrai sur I$\cap]A; +\infty[$, avec A fixé.*

2.1.3 Limite

Définition 18 *Soit (a,b) $\in \mathbb{R}^2$:*

$$(\lim_a f = b) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in D_f\ |x - a| \leq \alpha\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Propriété 10 *Soit a un réel, a = $+\infty$ ou a = $-\infty$.*
On suppose que f et g coincident au voisinage de a, alors :

$$\lim_a f = \lim_a g$$

2.1.4 Continuité

Définition 19 *Si f est définie en a, la limite éventuelle en a est nécessairement b=f(a)*

Propriété 11 *Soit $a \in \mathbb{R}$:*

- *Si $a \in D_f$*
  - *Si $\lim\limits_{a} f = f(a)$, alors f est continue en a.*
  - *Si $\lim\limits_{a} f \neq f(a)$, alors c'est impossible.*
  - *Si la limite n'existe pas, alors f n'est pas continue en a*
- *Si $a \notin D_f$*
  - *Si $\lim\limits_{a} f$ existe (dans $\mathbb{R}$), alors f est prolongable par continuité*
  - *Si la limite n'existe pas, rien à dire, sauf que f n'est pas prolongable.*

Caractérisation à l'aide de suite

Propriété 12

$$(\lim_{a} f = b) \Leftrightarrow (\forall (x_n) \textit{ suite convergente de limite a, } f(x_n) \textit{ converge vers } b)$$

On en déduit que :

Propriété 13 *Si il existe $(u_n), (v_n)$ deux suite telque :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n) = a \\ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (v_n) = a \end{cases}$$

et avec b $\neq$ b' :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (f(u_n)) = b \\ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (f(v_n)) = b' \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas

2.2 Limité ou continuité à gauche et à droite

2.2.1 Segment

Définition 20 *Soit I C $\mathbb{R}$. I est un intervalle si $\forall (a, b) \in I^2 \; [a, b] \, CI$*

Définition 21 *Soit a $\in \mathbb{R}$, et I un intervalle.*
a est interieur à I si :

$$\exists \alpha > 0 \textit{ tq }]a - \alpha, a + \alpha[\, CI$$

L'interieur de I, notée $\overset{o}{I}$, est l'ensemble des points interieurs à I.

2.2.2 Limite à droite, limite à gauche

Limite à droite

Définition 22 *Soit f, fonction définie sur un intervalle I, sauf peut etre en a, avec a interieur à I.*
La limite à droite de f en a est, si elle existe, la limite en a de la restriction de f à I$\cap \,]a, +\infty[$ On la note :

$$\lim_{a^+} f$$

Limite à gauche

Définition 23 *Soit f, fonction définie sur un intervalle I, sauf peut etre en a, avec a interieur à I.*
La limite à gauche, de f en a est, si elle existe, la limite en a de la restriction de f à I$\cap\,]-\infty, a[$ *On la note :*

$$\lim_{a^-} f$$

Propriété 14 *Si f est défini au voisinage de a :*
Si $a \in D_f$*, la limite en a de f est b si et seulement si :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{a^+} f = b \\ \lim\limits_{a^-} f = b \\ f(a) = b \end{cases}$$

Si $a \notin D_f$*, la limite en a de f est b si et seulement si :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{a^+} f = b \\ \lim\limits_{a^-} f = b \end{cases}$$

Propriété 15 *Si :*

$$\lim_a f = b$$

et

$$\lim_b g = c$$

Alors :

$$\lim_a gof = c$$

2.2.3 Continuité d'un intervalle

Propriété 16 *Soit* $a \in I$ *:*

$$(\lim_a f \textit{ existe }) \Leftrightarrow (f \textit{ est continue en } a)$$

Propriété 17 *Soit I un intervalle :*

$$(f \textit{ est continue sur } I\ ) \Leftrightarrow (\forall a \in I, f \textit{ est continue en } a\ )$$

2.3 Image continue

2.3.1 D'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 18 *Soit I un intervalle, (a,b)*$\in I^2$*. Si f est continue sur I, et* $y_0 \in [f(a), f(b)]$*, alors :*

$$\exists c \in [a, b] \;\; tq \; y_0 = f(c)$$

Propriété 19 *Si f est continue sur I, un intervalle, si* $a \in I$*, et* $b \in I$*, et f(a) et f(b) sont de signes contraire, alors :*

$$\exists c \in [a, b] \;\; tq \; f(c) = 0$$

Propriété 20 *Si I est un intervalle, et f continue sur I, alors f(I) est un intervalle.*

2.3.2 D'un segment

Propriété 21 *Soit f fonction continue sur [a,b], avec a et b réel.*
Alors f est bornée sur [a,b]

Propriété 22 *Soit f fonction continue sur [a,b], avec a et b réel.*
Alors le Sup et l'Inf de la fonction sur [a,b] existent.

Propriété 23 *Soit f continue sur [a,b]. Alors :*

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ tq\ f([a,b]) = [m,M]$$

2.4 Continuité uniforme sur un intervalle

Définition 24 *Soit f fonction définie sur un intervalle I.*
On dit que f est uniformement continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ tq\ \forall (x,y) \in I^2\ |x-y| < \alpha\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Propriété 24 *Si f est uniformement continue sur I, alors f est continue sur I.*

Propriété 25 *Une fonction k-lipschitzienne sur I est uniformement continue sur I.*

Théorème 1 *Théorème de Heine :*
Toutes fonctions continue sur un segments [a,b] est uniformement continue sur le segment.

2.5 Fonction monotone

2.5.1 Théorème de la "limite monotone"

Propriété 26 *Si f est croissante sur I, et a* $\in \overset{o}{I}$*, alors :*

$$\lim_{a^-} f\ \ et\ \ \lim_{a^+} f\ \textit{existent, mais peuvent etre différentes}$$

2.5.2 Monotonie et continuité

Propriété 27 *Soit f fonction définie et croissante sur I*

$$(\ \textit{f est continue sur I}\ ) \Leftrightarrow (\ \textit{f(I) est un intervalle}\ )$$

2.5.3 Théorème de la bijection

Propriété 28 *Soit I un intervalle.*
Si f est continue, strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur l'intervalle f(I), et f^{-1} *est continue sur f(I).*

Chapitre 3

Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3.1 Définitions

3.1.1 Définitions

Définition 25 *Soit f définie sur un voisinage d'un réel a. f est dérivable en a si :*

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans $\mathbb{R}$
Si f est dérivable, cette limite est le nombre dérivée de f en a.

Propriété 29 *Le nombre dérivé est la pente d'une droite passant par a. Cette droite est appelé tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.*
L'équation de cette tangente est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

3.1.2 Lien entre tangente et dérivabilité

Soit $x \in D_f$.

Propriété 30 *Si on peut écrire f(x) sous la forme :*

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$

avec :

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

alors f est dérivable en a et f'(a) = A.

3.1.3 Continuité et dérivabilité

Propriété 31 *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a*

Propriété 32 *f est dérivable en a si et seulement si :*

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

3.1.4 Théorème de Rolle

Théorème 2 *Si :*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur [a,b]} \\ f \text{ est dérivable sur]a,b[} \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

alors :

$$\exists c \in]a, b[\ tq \ f'(c) = 0$$

3.1.5 Théorème des accroissement finies

Théorème 3 *Si :*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur [a,b]} \\ f \text{ est dérivable sur]a,b[} \end{cases}$$

alors :

$$\exists c \in]a, b[\ tq \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3.1.6 Inégalité des accroissement finies

Théorème 4 *Si :*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur [a,b]} \\ f \text{ est dérivable sur]a,b[} \\ f' \text{ est borné sur]a,b[} \end{cases}$$

Soit M un majorant de |f'|, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Conséquence

$\rightarrow$ Si f est croissante sur I, alors f'(a) ≥ 0
$\rightarrow$ Si f et g sont dérivable sur [a,b], avec : $\forall x \in [a, b] \ f'(x) \leq g'(x)$, alors :

$$f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$

3.1.7 Classe d'une fonction

Soit f fonction, I un intervalle

Définition 26 *f est de classe C^n sur I si $f^{(n)}$ est définie et continue sur I*

Opération

Propriété 33 *Soit I un intervalle, soit $n \in N$.*
La somme, le produit, la composé de fonction C^n sur I, sont des fonctions C^n sur I

3.1.8 Formulaire

$\forall n \in N, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$cos^{(n)}(x) = cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$sin^{(n)}(x) = sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

3.1.9 Formule de Leinbniz

Soient f et g deux fonctions n fois dérivable sur I :

$$(fg)^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Chapitre 4

Étude locale d'une fonction

4.1 Étude locale

4.1.1 Dominance - Équivalence - Négligeabilité

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient f et g deux fonctions définie au voisinage de a sauf peut être en a.

Définition 27 *On dit que f est dominée par g au voisinage de a si $\exists V_a$, voisinage de a telque $\mid \frac{f}{g} \mid$ soit majorée de V_a*

$$(f(x) = 0(g(x))) \Leftrightarrow (\exists V_a,\ \textit{voisinage de } a, \exists M \in \mathbb{R} \textit{ telque } \forall x \in V_a \ \mid f(x) \mid \leq M \mid g(x) \mid)$$

Définition 28 *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, si, pour $a \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ telque\ \forall x \in]a + \alpha; a - \alpha[\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

On le note $f(x) \ll g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$. On a :

$$(f(x) \ll g(x)) \Leftrightarrow (\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0)$$

La définition est identique si a est infini

Définition 29 *On dit que f est équivalent à g, si :*

$$f(x) - g(x) \ll g(x)$$

On note $f(x) \sim g(x)$. Et on a :

$$(f(x) \sim g(x)) \Leftrightarrow (\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1)$$

4.1.2 Comparaison successives

Soit f,g,h trois fonctions défini au voisinage de a, sauf peut être en a.
Si :
$\rightarrow$ Si $f(x) \ll g(x)$, $g(x) \ll h(x)$ alors :

$$f(x) \ll h(x)$$

$\rightarrow$ Si $f(x) \ll g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ alors :

$$f(x) \ll h(x)$$

→ Si $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \ll h(x)$ alors :

$$f(x) \ll h(x)$$

→ Si $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ alors

$$f(x) \sim g(x)$$

4.1.3 Échelle de comparaison

Au voisinage de 0 :

$$0 \ll .. \ll x^2 \ll x \ll 1 \ll ln(x) \ll \frac{1}{x}$$

Au voisinage de ∞

$$0 \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll 1 \ll 1 \ll ln(x) \ll \sqrt{x} \ll x^2 \ll e^x$$

4.1.4 Règles de Manipulation

Somme de deux fonctions

Si, au voisinage de a :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \sim \alpha u(x) \\ g(x) \sim \beta u(x) \\ \alpha + \beta \neq 0 \end{array}\right\} \text{Alors } f(x) + g(x) \sim (\alpha + \beta) u(x)$$

Produit, rapport, valeur absolu

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \sim u(x) \\ g(x) \sim v(x) \end{array}\right\} \text{Alors } f(x) \times g(x) \sim u(x) \times v(x)$$

De plus :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{u(x)}{v(x)}$$

Soit α un réel :

$$(f(x))^\alpha \sim (u(x))^\alpha$$

$$\mid f(x) \mid \sim \mid u(x) \mid$$

Changement de variable

Le changement de variable dans un équivalent est autorisé, mais pas la composé ne l'est pas.

Propriété 34 *Si $f(x) \sim g(x)$, alors $\lim_a f$ et $\lim_b f$ ont même nature et si elles existent sont égales*

4.1.5 Formule de Taylor avec reste de Young

Préliminaire

Théorème 5 *Si φ est une fonction dérivable sur V_0, un voisinage de 0, et si*

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \exists n \in N \textit{ telque si } x \to 0, \varphi'(x) = O(x^n) \end{array}\right\} \textit{Alors } \varphi(x) = O(x^{n+1})$$

Si φ est dérivable sur V_0 et si :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \textit{si } x \to 0, \varphi'(x) = o(x^n) \end{array}\right\} \textit{Alors si } x \to 0 \; \varphi(x) = o(x^{n+1})$$

Formule de Taylor

Définition 30 *Si f est de classe C^n sur V_0, alors $\forall x \in V_0$:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Si f est de classe C^n sur un voisinage de a, V_a, $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in V_a$:

$$f(x) = f(0) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

Chapitre 5

Développements limités

5.1 Notation de Landau

Définition 31 *Si, lorsque x* $\mapsto 0$*,* $f(x) \ll g(x)$*, on note :*

$$f(x) = o(g(x))$$

Soit n,p entiers :
- $\rightarrow$ $x^n \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
- $\rightarrow$ $o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
- $\rightarrow$ $o(x^n) + o(x^p) = o(x^{inf(n,p)})$
- $\rightarrow$ *Si A est un réel fixé :*

$$A \times o(x^n) = o(x^n)$$

5.2 Définitions

Définition 32 *Soit f une fonction définie au voisinage de O.*
On dit que f possède un développement limité d'ordre n si il $\exists(a_0, ...a_n) \in \mathbb{R}^n$ *telque :*

$$f(x) - (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) \ll x^n$$

donc, au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o(x^n)$*.*
Il y a unicité du développement limité.
On peut faire une combinaisons linéaire de développement limité.

Définition 33 *On appelle partie principale du développement limité la fonction polynomiale suivant :*

$$x \mapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

5.3 Équivalence et développement limité

Définition 34 *Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, si* $\exists k$ *telque* $a_k \neq 0$*, notons p l'indice du* 1^{er} *terme non nuls, alors, au voisinage de 0 :*

$$f(x) \sim a_px^p$$

5.4 Régularité au voisinage de 0 et développement limité

Définition 35 *Au voisinage de 0 :*
- $\rightarrow$ *f est de classe* $C^0 \Leftrightarrow \exists$ *un développement limité d'ordre O*

$\rightarrow$ *f est dérivable* $\Leftrightarrow \exists$ *un développement limité d'ordre 1*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est de classe } C^1 \Rightarrow \exists \text{ un développement limité d'ordre 1} \\ f \text{ est de classe } C^2 \Rightarrow \exists \text{ un développement limité d'ordre 2} \end{array}\right\} \text{Formule de Taylor-Young}$$

5.5 Développement limités usuels

$\rightarrow \ (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

$\rightarrow \ cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$

$\rightarrow \ sin(x) = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^7)$

$\rightarrow \ e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$\rightarrow \ \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

$\rightarrow \ ch(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + \dfrac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

$\rightarrow \ sh(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\rightarrow \ ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

5.6 Dérivation et Intégration

Définition 36 *Pour obtenir le développement limité de f'(x), on dérive terme à terme le développement limité de f(x).*
Pour obtenir le développement limité de F(x), une primitive de f(x), on intègre terme à terme :
Si $f(x) = a_0 + ... + a_n x^n + o(x^n)$*, alors :*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

5.7 Développement limité au voisinage d'un réel a

Définition 37 *Soit f fonction défini au voisinage de a. On dit que f possède, au voisinage de a, un développement limité d'ordre n si* $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ *telque :*

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + ... + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

De plus :
(f est dérivable en a)$\Leftrightarrow$ *(f est défini en a,*
et f possède au voisinage de a un développement limité d'ordre 1)

5.7.1 Tangente

Propriété 35 *Si, au voisinage de a, f(x) =* $\lambda_0 + \lambda_1(x-a) + o((x-a))$*, alors :*

$$y = \lambda_0 + \lambda_1(x-a)$$

est tangent à la courbe en a. Le terme suivant non nul détermine la position relative de la tangente par rapport à la courbe.

5.8 Développement limité généralisé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition 38 *Si au voisinage de 0, on peut écrire :*

$$f(x) = \lambda_0 x^{\alpha} + ... + \lambda_n x^{\alpha+n} + o(x^{\alpha+n})$$

Alors ceci constitue un développement limité généralisé de f en 0.

Définition 39 *Si $x \mapsto +\infty$, avec f défini au voisinage de $+\infty$. Si on peut écrire :*

$$f(x) = \lambda_0 x^{\alpha} + ... + \lambda_n x^{\alpha-n} + o(x^{\alpha-n})$$

Deuxième partie

Les suites

Chapitre 6

Suite numérique - Géneralité

6.1 Propriétés

6.1.1 Opérations

Soit (a),(b),(c) trois suites. On peut effectuer trois types d'opérations sur les suites :
$\rightarrow$ Une somme :

$$((a) + (b) = (c)) \Leftrightarrow (\forall n \in N \ a + b = c)$$

$\rightarrow$ Un produit :

$$((a).(b) = (c)) \Leftrightarrow (\forall n \in N \ a.b = c)$$

$\rightarrow$ Un produit par un scalaire :

$$((a) = \lambda(c)) \Leftrightarrow (\forall n \in N \ a = \lambda c)$$

6.2 Suites particulière

6.2.1 Suite arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétiques :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1).\frac{u_0 + u_n}{2}$$

6.2.2 Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0.\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

6.3 Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficiants constants

Soit (u_n) une suite vérifiant la récurrence :

$$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

Alors, on obtient l'équation caractéristique, en simplifiant par r^n :

$$r^2 = ar + b$$

Donc :

$$\exists(A,B) \in \Re^2 \ tq \ (u_n) = A(r_1)^n + B(r_2)^n$$

Chapitre 7

Convergence des suite numériques réelles

7.1 Suites convergentes

Définition 40 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels.*
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_0\ |u_n| < \varepsilon$$

Définition 41 *Soit $l \in \mathbb{R}$. La suite u_n converge vers l si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_0\ |u_n - l| < \varepsilon$$

Les suites convergentes possède les propriétés suivantes :

- → Une suite constante est convergente
- → Une suite géométrique de raison a avec | a |<1 converge vers 0
- → La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0
- → Si (u_n) converge vers une limite l, elle est unique.
- → Un suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0
- → Une suite convergente est bornée
- → Si (a_n) converge vers 0 et $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_0\ |u_n| \leq |a_n|$, alors (u_n) converge vers 0

7.1.1 Caractérisation de la borne supérieur

On peut caractériser la borne supérieur d'un ensemble non vide et majorée à l'aide d'une suite. Soit A une partie de $\mathbb{R}$

$$(\text{ M est la borne supérieur de A }) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \exists (a_n)\ tq\ \forall n \in \mathbb{N} a_n \in A\ et\ a_n \text{ converge vers M} \end{cases}$$

7.1.2 Caractérisation d'une partie dense

Soit A une partie de $\mathbb{R}$

$$(\text{ A est dense dans } \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n) \in \mathbb{R}^n, \forall n\ u_n \in A\ et\ a_n \text{ converge vers x})$$

7.1.3 Opération sur les suites convergentes

Nous avons les propriétés suivantes :

$\rightarrow$ La somme de deux suites convergente est convergente, et la limite de la somme est la somme des limites.

$\rightarrow$ Le produit par une constante d'une suite convergente est convergente

$\rightarrow$ Le produit d'une suite bornée par une suite convergente de limite nul est une suite convergente de limite nul.

$\rightarrow$ Le produit d'une suite convergente par une suite convergente de limite nul est une suite convergente de limite nul.

$\rightarrow$ Le produit de deux suite convergentes est une suite convergente

$\rightarrow$ Si (u_n) est une suite convergente de terme tous non nuls, si $l \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$

$\rightarrow$ Si (u_n) est une suite convergente de limite l, alors $(|u_n|)$ converge vers |l|

7.1.4 Lien entre le signe de la limite et le signe des termes de la suite

$\rightarrow$ Si l>0, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$

$\rightarrow$ Si l<0, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq n_0$, $u_n < 0$

$\rightarrow$ Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $u_n < 0$, alors $l \leq 0$

$\rightarrow$ Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$, alors $l \geq 0$

De ces correspondances, on détermine les comparaisons entre deux suites convergentes.

7.1.5 Théorème d'encadrement

Si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers l} \\ (v_n) \text{ converge vers l} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq x_n \leq v_n \end{cases}$$

Alors x_n converge vers l.

7.1.6 Suite extraites

Propriété 36 *Si (u_n) converge, alors toutes ses suites extraites converge vers la même limite.*

Propriété 37 *Si :*

$$\begin{cases} (u_{\varphi_{(n)}})\ et\ (u_{\psi_{(n)}}) \textit{ converge vers la même limite} \\ \{\varphi_{(n)}\ /\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_{(n)}\ /\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) converge

7.2 Suites divergentes

7.2.1 Caractéristation des suites divergentes

Si :

$$\begin{cases} (u_{\varphi_{(n)}}) \textit{ et } (u_{\psi_{(n)}}) \text{ converge vers des limites différentes} \\ \{\varphi_{(n)} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_{(n)} \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) diverge

7.2.2 Suites qui diverge vers $\pm\infty$

Définition 42 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels.*
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; tq \; \forall n \geq n_0 \; u_n > A$$

Définition 43 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels.*
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $-\infty$ si :

$$\forall B \in \mathbb{R}^-, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; tq \; \forall n \geq n_0 \; u_n < B$$

Propriétés

→ ((u_n) diverge vers $-\infty$) ⇔ ($(-u_n)$ diverge vers $+\infty$)
→ La somme d'une suite bornée et d'une suite qui diverge vers $+\infty$ diverge vers $+\infty$
→ L'inverse d'une suite qui tend vers $+\infty$ converge vers 0

7.2.3 Théorème de minoration

Théorème 6 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telque :*

$$\begin{cases} (u_n) \textit{ diverge vers } +\infty \\ \exists n_0 \; tq \; \forall n \geq n_0 \; u_n \geq x_n \end{cases}$$

Alors (x_n) diverge vers $+\infty$

7.3 Suite monotone et convergente

Théorème 7 *Soit (u_n) une suite croissante.*
Si elle est majorée, alors elle converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$

Théorème 8 *Soit (u_n) une suite décroissante.*
Si elle est minorée, alors elle converge. Sinon, elle diverge vers $-\infty$

7.3.1 Suites adjacentes

Définition 44 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Elle sont dites adjacentes si :*

1. *(u_n) croissante*
2. *(v_n) décroissante*
3. *$(u_n - v_n)$ converge vers 0*

Propriété 38 *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite, notée l et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq l \leq v_n$$

7.3.2 Segments emboités

Définition 45 *On considère une suite de segments. On dit que la suite est emboitée si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}]\, C\, [a_n, b_n]$$

Propriété 39 *Nous avons les propriétés suivantes :*

$\rightarrow$ *L'intersection de tous les intervalles d'une suites d'intervalle emboitée est non vide*

$\rightarrow$ *Si la longeur de l'intervalle tend vers 0, alors l'intersection est un singleton*

7.3.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 9 *De toutes suites réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.*

Chapitre 8

Suite à valeur complexe

8.1 Convergence

Définition 46 *Soit (z_n) une suite à valeur complexe. On dit que cette suite converge vers λ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_0\ |u_n - \lambda| < \varepsilon$$

8.2 Partie réeles, partie imaginaire

Propriété 40 *Si Re(z_n) converge vers a et Im(z_n) converge vers b, alors (z_n) converge vers a+ib.*

8.3 Suites des modules et suites des arguments

Soit (z_n) la suite défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$$

Propriété 41 *Si :*

$$\begin{cases} (\rho_n) \text{ converge vers } a \\ (\theta_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

alors (z_n) converge vers ae^{ib}

Mais si la suite des arguments ne converge pas, la suite (z_n) peut quand meme converger.

8.4 Opération

8.4.1 Somme de deux suites convergente

Propriété 42 *Soient (z_n) et (z'_n) deux suites convergentes de limite λ et λ'.*
On obtient que $(z_n + z'_n)$ converge vers $\lambda + \lambda'$

Chapitre 9

Etude des suites

9.1 Suite complexe

Soit (z_n) une suite de complexe

Propriété 43

$$((z_n) \textit{ converge vers } \lambda) \Leftrightarrow (|z_n - \lambda| \textit{ converge vers 0 })$$

Propriété 44

$$((z_n) \textit{ converge vers } \lambda) \Leftrightarrow (Re(z_n) \textit{ converge vers } Re(\lambda) \textit{ et } Im(z_n) \textit{ converge vers } Im(\lambda))$$

Propriété 45 *Si (z_n) converge vers λ, alors $(|z_n|)$ converge vers $|\lambda|$.*
Mais aucune information sur le comportement de l'argument.

Propriété 46 *Si le module de z_n converge vers R et que l'argument de z_n converge vers α, alors (z_n) converge vers $Re^{i\alpha}$*

Propriété 47 *Soit (z_n) suite complexe défini par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ z_n = a^n$$

Avec $a \in C$. Si :

- $\rightarrow$ *a=0, (z_n) est une suite constante*
- $\rightarrow$ *$a \in]0,1[$, (z_n) converge vers 0*
- $\rightarrow$ *$|a| > 1$, (z_n) diverge vers $+\infty$*
- $\rightarrow$ *$|a| = 1$.*
  - $\rightarrow$ *Si $a \neq 1$, alors la suite diverge*
  - $\rightarrow$ *Si $a = 1$, (z_n) est une suite constante*

9.2 Suites définies par récurrence

Définition 47 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur D_f, et (u_n) une suite définie telque :*

$$u_0 \in \mathbb{R}$$

$$\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

9.2.1 Existance de la suite

Propriété 48 *Soit (u_n) une suite de réel, défini par récurrence à l'aide de la fonction f.*

$$(\forall n,\ u_n \textit{ existe}) \Leftarrow (u_0 \in D_f \textit{ et } D_f \textit{ est stable par f})$$

$$(\forall n,\ u_n \textit{ existe}) \Leftarrow (u_0 \in D_f\ et\ f(D_f)CD_f)$$

9.2.2 Sens de variation

Propriété 49 *Soit (u_n) une suite de réel, défini par récurrence à l'aide de la fonction f.*

$$((u_n) \textit{ est croissante }) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n)$$

$$((u_n) \textit{ est croissante }) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \geq u_n)$$

En pratique, si $\forall x \in I,\ f(x) \geq x$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$, alors (u_n) est croissante.

9.2.3 Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers l et que f est continue en l, alors l = f(l)

9.3 Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs.
Supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$

$\rightarrow$ Si a $\in [0, 1[$, (u_n) converge vers 0
$\rightarrow$ Si a>1, (u_n) diverge vers $+\infty$

9.4 Comparaison des suites

9.4.1 Définitions

Définition 48 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeur réelle.*
On dit que (v_n) domine (u_n) si :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+\ tq\ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq A.|v_n|$$

On note u_n=O(v_n)

Définition 49 *On dit que (u_n) est négligable devant (v_n) ou que (v_n) est préponderant devant (u_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_0\ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

On note $u_n \ll v_n$ ou $u_n = o(v_n)$

Définition 50 *On dit que (u_n) est équivalent à (v_n) si ($u_n - v_n$) est négligable devant (v_n)*

9.4.2 Comparaison des suites de référence

Propriété 50 *Soit (c_n) une suite telleque :*

$$\lim_{n\to+\infty} |c_n| = +\infty$$

Si (a_n) converge vers 0, si (b_n) converge vers l, l$\neq$ 0, alors :

$$a_n \ll b_n \ll c_n$$

Comparaison des suites qui divergent vers $+\infty$

Soit A > 1, $\alpha > 0$:

$$ln(n) \ll n^{\alpha} \ll A^n \ll n! \ll n^n$$

Comparaion des suites qui converge vers 0

Soit B < 1, $\beta < 0$, alors :

$$0 \ll B^n \ll n^{\beta} \ll \frac{1}{ln(n)}$$

Comparaion des suites convergente de limite non nul

Soient l,l′ deux réels non nuls.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers l et l′.
Alors :

$$u_n \sim \frac{l}{l'} v_n$$

9.5 Règles d'utilisation des équivalents et négligabilité

Propriété 51 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.*

$$u_n \ll v_n \text{ } et \text{ } v_n \ll w_n \Rightarrow u_n \ll w_n$$

$$u_n \sim v_n \text{ } et \text{ } v_n \sim w_n \Rightarrow u_n \sim w_n$$

$$u_n \sim v_n \text{ } et \text{ } v_n \ll w_n \Rightarrow u_n \ll w_n$$

$$u_n \ll v_n \text{ } et \text{ } v_n \sim w_n \Rightarrow u_n \ll w_n$$

Propriété 52 *Soient (u_n), (v_n) deux suites et (a_n), (b_n) deux autres suites.*
Si :

$$(u_n) \sim (v_n) \text{ } et \text{ } (a_n) \sim (b_n)$$

alors :

$$(u_n)(a_n) \sim (v_n)(b_n)$$

Ceci n'est pas vrai dans le cas de l'addition.

Propriété 53 *Soient (u_n), (v_n) et (a_n) trois suites et λ, μ deux réels de somme non nuls.*
Si :

$$(u_n) \sim \lambda(a_n) \text{ } et \text{ } (v_n) \sim \lambda(a_n)$$

Alors :

$$u_n + v_n \sim (\lambda + \mu)a_n$$

Si la somme des deux réels est nul, nous n'avons aucun résultats.

Propriété 54 *Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$*

Propriété des équivalents

Propriété 55 *Soient u_n et v_n deux suites telque $u_n \sim v_n$.*
$\rightarrow$ *Si u_n diverge, alors v_n diverge*
$\rightarrow$ *Si u_n converge, alors v_n converge vers la même limite*
$\rightarrow$ *Si la limite de u_n en l'infini est l'infini, alors la limite de v_n en l'infini est aussi l'infini*

Troisième partie

Arcs Paramétré

Chapitre 10

Arcs Paramétrés et Arcs Polaire

10.1 Étude locale d'un arc

Définition 51 *Soit τ un arc paramétré défini par (F,I), avec I un intervalle et F une fonction :*

$$F : I \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto M(t)$$

avec : M(t) = $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Propriété 56 *Supposons que x et y soient de classe C^n sur I, alors on dit que (τ) est de classe C^n*

10.1.1 Point Régulier

Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au support de l'arc en M(t_0). On dit alors que M(t_0) est un point régulier de l'arc.

10.1.2 Point Singulier

Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) = \overrightarrow{0}$, alors M($t_0$) est un point singulier.
Par application de la formule de Taylor, on obtient les deux entiers caractéristiques suivants.

Premier entier caractéristique de (τ) en M(t_0)

Définition 52 *Notons p, si il existe :*

$$p = Min\{k / \frac{d^k\overrightarrow{M}}{dt^k}(t_0) \neq \overrightarrow{O}\}$$

alors $\frac{d^p\overrightarrow{M}}{dt^p}(t_0)$ est tangent à l'arc en M(t_0)

Deuxième entier caractéristique de (τ) en M(t_0)

Notons q, si il existe :

$$q = Min\{k / \frac{d^k\overrightarrow{M}}{dt^k}(t_0) \ et \ \frac{d^p\overrightarrow{M}}{dt^p}(t_0) \text{ soient non colinéaire}\}$$

Coordonnée de M(t) dans un repère particulier

Soit R le repère défini par : $(M(t_0), \frac{d^p\overrightarrow{M}}{dt^p}(t_0), \frac{d^q\overrightarrow{M}}{dt^q}(t_0))$
Dans ce repère, on obtient les coordonnées suivantes pour M(t) :

$$\begin{cases} X(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!} \\ Y(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!} \end{cases}$$

On obtient donc :
$\rightarrow$ p paire, q impaire : Point de rebroussement du première ordre
$\rightarrow$ p paire, q paire : Point de rebroussement du deuxième ordre
$\rightarrow$ p impaire, q paire : Point ordinaire
$\rightarrow$ p impaire, q impaire : Point d'inflexion

10.2 Etude métrique des arc paramétré

10.2.1 Longeur d'un arc

Soit (τ) un arc de classe C^1 sur I = [a,b], avec a < b.
Soit l($M\widehat{(a)M}(b)$) la longeur de l'arc (τ) reliant M(a) à M(b). On obtient :

$$l(M\widehat{(a)M}(b)) = \int_a^b ||\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)||dt$$

10.2.2 Abscisse curviligne

Soit τ un arc de classe C^1 sur un intervalle I.
On défini une abscisse curviligne avec :

1- Un point de l'arc, appelé origine.

2- Une orientation sur l'axe :
$\rightarrow$ Le sens des t croissants
$\rightarrow$ Ou le sens des t décroissants

Soit M(t_0) l'origine de l'abcisse, soit s(t) l'abscisse du point M(t).

$$s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t ||\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u)||du$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ selon l'orientation de l'axe.
On obtient aussi :

$$\frac{ds}{dt} = ||\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}||.\varepsilon$$

s est un paramétrage du support de l'arc. De plus, on obtient :

$$||\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}|| = 1$$

Repère de Frenet en M(t)

On note $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ le premier vecteur de Frenet en M(t). On le calcul en utilisant le faite que :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{\varepsilon}{||\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}||}.\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$$

On note $\overrightarrow{N}$ l'unique vecteur vérifiant que (M(t),$\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$) soit un repère orthonormée directe, appelé repère de Frenet en M(t).
Soit $\varphi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})[2\pi]$, avec $\overrightarrow{i}$ vecteur horizontal passant par M(t).
Alors :

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

10.2.3 Courbure d'un arc en un point

Définition 53 *On défini le rayon de courbure en M(t), notée R, par :*

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

Définition 54 *La courbure en M(t), notée γ, est défini par :*

$$\gamma = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

10.2.4 Formules de Frenet

Soit $\overrightarrow{T} \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} \begin{pmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{pmatrix}$ les deux vecteurs de la base de Frenet.
Sachant que :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{d\varphi} = \overrightarrow{N}$$

On obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}$$

De meme, on obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

Lien entre courbure, vitesse et accélération

Notons $\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ et v = $||\overrightarrow{V}||$.
On obtient :

$$\overrightarrow{V} = \varepsilon.v.\overrightarrow{T}$$

. Notons $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$. Alors :

$$\overrightarrow{a} = \varepsilon.\frac{dv}{dt}.\overrightarrow{T} + v^2.\gamma.\overrightarrow{N}$$

De cette expression, on en déduit que :

$$\gamma = \varepsilon.\frac{Det(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{a})}{v^3}$$

10.3 Plan d'étude d'un arc paramétré

1- Domaine de définition

2- Réduction du domaine d'étude :

$\rightarrow$ Periodicité

$\rightarrow$ Symétrie

$\rightarrow$ Partié

3- Dérivablité : Faire un double tableau de variation (un pour x, un pour y)

4- Tangentes

$\rightarrow$ En un point régulier : Le vecteur de coordonée $(x'(t_0), y'(t_0))$ est tangent en t_0.

$\rightarrow$ En un point singulier :

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Ou on peut utiliser la méthode des entiers caractéristiques

$\rightarrow$ En un point limite

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{y(t) - \lim_{t_0} y}{x(t) - \lim_{t_0} x}$$

5- Branches infinies : Si $\lim_{t_0} x = +\infty$ et $\lim_{t_0} y = +\infty$

$\rightarrow$ $\lim_{t_0} \frac{y}{x}$

$\rightarrow$ ∞ : Branche de direction Oy

$\rightarrow$ $a \in \mathbb{R}$:

$\rightarrow$ $\lim_{t_0} y - ax$:

$\rightarrow$ $b \in \mathbb{R}$: y = ax+b asymptote

$\rightarrow$ ∞ ou $\emptyset$: Branche de direction ax

$\rightarrow$ 0 : Branche de direction Ox

$\rightarrow$ $\emptyset$: Aucune méthode

6- Concavité :

$\rightarrow$ Etude du signe de $Det(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{\Gamma})$

$\rightarrow$ L'angle $(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{\Gamma})$ donne la position de la tangente

$\rightarrow$ Les points d'inflexion sont les points de changements de concavité

7- Point double : On résoud le système suivant, d'inconnu (t,t'), avec $t \neq t'$:

$$\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases}$$

10.4 Arcs polaire

10.4.1 Liens polaire-cartésien

Soit (ρ,θ) les coordonnée de M, telque :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$$

On obtient les coordonées cartérisien de M avec :

$$\begin{cases} x = \rho cos(\theta) \\ y = \rho sin(\theta) \end{cases}$$

On a donc :

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

10.4.2 Equivalence et symétrie

Soit $M(\rho, \theta) = M(-\rho, \theta + \pi)$ (cette égalité est vérifie pour tout point du plan) :
$\rightarrow$ M_1 symétrique de M par rapport à (Ox) si :

$$M_1(\rho, -\theta + k2\pi/k \in Z)$$

$\rightarrow$ M_2 symétrique de M par rapport à (Oy) si :

$$M_2(\rho, \pi - \theta)$$

$\rightarrow$ M_3 symétrique de M par rapport à l'origine si :

$$M_3(\rho, \pi + \theta)$$

10.4.3 Étude des tangentes

$\rightarrow$ Si $\rho(\theta)$ est dérivable en θ : $\frac{dM(\theta)}{\theta}$ est tangent en M(θ)

$$\frac{dM(\theta)}{\theta} = \rho'\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{v}$$

avec :

$$\overrightarrow{u}(\theta)\begin{pmatrix}\cos(x) \\ \sin x\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}(\theta)\begin{pmatrix}-sin(x) \\ \cos x\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Si $\rho(\theta)$ = 0 : $\overrightarrow{u}(\theta)$ est tangent en 0

10.4.4 Etude d'une branche infini

Si :

$$\lim_{\theta \mapsto \theta_0} \rho(\theta) = \infty$$

Alors la courbe possède une branche infini de direction $\overrightarrow{u}(\theta_0)$. On réalise alors une étude dans le repère (0,$\overrightarrow{u}(\theta_0)$,$\overrightarrow{v}(\theta_0)$) :

$$\lim_{\theta \mapsto \theta_0} Y(\theta)$$

avec $Y(\theta) = \rho sin(\theta - \theta_0)$

Chapitre 11

Les coniques

11.1 Définition

Définition 55 *On appelle conique de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e l'ensemble :*

$$\{M/e.distance(M,\Delta) = MF\}$$

11.1.1 Définitions bifocale d'une ellipse

Définition 56 *Soit F et F′ les deux foyers de l'ellipse. On défini cette ellipse par :*

$$(\text{ M appartient à l'ellipse }) \Leftrightarrow (MF + MF' = cte = 2.a)$$

avec a le demi-grand axe.

11.1.2 Définitions bifocale d'une hyperbole

Définition 57 *Soit F et F′ les deux foyers de l'hyperbole. On défini cette hyperbole par :*

$$(\text{ M appartient à l'hyperbole }) \Leftrightarrow (|MF - MF'| = cte = 2.a)$$

avec a la valeur absolue de la distance du point d'intersection entre l'axe 0x et l'hyperbole avec l'origine.

Définition 58 *On appelle cercle principale d'une ellipse le cercle de centre O et de rayon a.*

11.2 Les différentes coniques

11.2.1 L'ellipse

Une ellipse est définie par l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Avec a>b, a est appelé le demi grand axe, et b le demi petit axe. On peut aussi paramétrer un point M de l'ellipse par :

$$\begin{cases} x(t) = acos(t) \\ y(t) = bsin(t) \end{cases}$$

Avec t l'angle entre l'axe Ox et OP, avec P le point correspondant à M sur le cercle principale de l'ellipse. M est obtenir à partir de P à l'aide d'une affinité.

11.2.2 L'hyperbole

Une hyperbole est définie par l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pour vérifier cette formule, on prend y=0, et on doit obtenir deux solutions. De plus, on obtient les asymptotes en annulant 1. On peut aussi paramétrer un point M de l'hyperbole par :

$$\begin{cases} x(t) = ach(t) \\ y(t) = bsh(t) \end{cases}$$

11.2.3 Parabole

L'équation réduite est :

$$y^2 = 2px$$

11.3 Équation polaire dans un repère de centre F

Soit M(ρ, θ), Δ droite d'équation $x = x_\Delta$. L'équation générale est :

$$\rho = \frac{ex_\Delta}{1 + ecos(\theta)}$$

avec e l'excentricité de la conique. Notons c l'abscisse de F.

→ Si e < 1 : C'est une ellipse. Nous avons donc les résultats suivants

→ $e = \frac{c}{a}$

→ $c^2 = a^2 - b^2$

→ $x_\Delta = \frac{a^2}{c}$

→ Si e = 1 : C'est une parabole.

→ Si e > 1 : C'est une hyperbole.

→ $e = \frac{c}{a}$

→ $c^2 = a^2 + b^2$

→ $x_\Delta = \frac{a^2}{c}$

Quatrième partie

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Chapitre 12

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

12.1 Norme

Définition 59 *Soit E un espace vectoriel.*
n est une norme de E si :

$$n : E \to \mathbb{R}$$

telque :
- $\rightarrow$ $\forall x \in E$ *n(x)* $\geq$ *0*
- $\rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$
- $\rightarrow$ $\forall x \in E,\ n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\rightarrow$ $\forall (x, y) \in E^2\ n(x + y) \leq n(x) + n(y)$

Propriété 57 *La norme euclidienne, notée* $||(x, y)||_2$ *est défini par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 60 *On défini la norme* $||(x, y)||_n$ *par :*

$$||(x, y)||_n = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$$

Définition 61 *On défini la norme infini par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ||(x, y)||_\infty = Max(|x|, |y|)$$

12.1.1 Boules

Définition 62 *Soit n une norme sur E, soit* $x_0 \in E$*, et* $r \in \mathbb{R}^+$*.*
On appelle Boule de centre x_0*, de rayon r :*

$$B(x_0, r) = \{x \in E / n(x_0 - x) \leq r\}$$

12.1.2 Norme équivalentes

Définition 63 *Soient* n_1, n_2 *deux normes sur E.*
n_1 *et* n_2 *sont dites équivalentes si il existe deux réels strictement positifs telque* $\forall x \in E$ *:*

$$\alpha n_2(x) \leq n_1(x) \leq \beta n_2(x)$$

$$\frac{1}{\beta} n_1(x) \leq n_2(x) \leq \frac{1}{\alpha} n_1(x)$$

Propriété 58 *Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

12.1.3 Convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite de vecteur de E :

- $\rightarrow$ On dit que (u_n) converge vers 0 pour la norme n si la suite des réels $(n(u_n))$ converge vers 0
- $\rightarrow$ Si deux normes sont équivalente, toutes suites convergentes pour l'une est convergente pour l'autre
- $\rightarrow$ Dans un espace de dimension finie, la définition de la convergence ne dépend pas de la norme considéré.

12.2 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 64 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, et n une norme de $\mathbb{R}^2$.*
Soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.
Soit $(x_0, y_0) \in A$, et l un réel.
On dit que : $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = l$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \; tq \; \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha) : |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

Propriété 59 *Soit f et g deux fonction défini sur A :*

- $\rightarrow$ *La limite de la somme et la somme des limites.*
- $\rightarrow$ *La limite du produit et le produit des limites*
- $\rightarrow$ *Composition : Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{(a,b)} f = l$ et si $\lim\limits_{l} \varphi = m$, alors :*

$$\lim_{(a,b)} \varphi o f = m$$

12.2.1 Théorème d'encadrement

Soient f,g,h fonctions défini sur A.
Si $\forall (x, y) \in A$:

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$$

et si $\lim\limits_{(a,b)} g = \lim\limits_{(a,b)} h = l$, alors :

$$\lim_{(a,b)} f = l$$

12.2.2 Caractérisation de la divergence

Si :

- $\rightarrow$ $\lim\limits_{t_0} x_1 = a$
- $\rightarrow$ $\lim\limits_{t_0} y_1 = b$
- $\rightarrow$ $\lim\limits_{\alpha} x_2 = a$
- $\rightarrow$ $\lim\limits_{\alpha} y_2 = b$

et $\lim\limits_{t \rightarrow t_0} f(x_1(t), y_1(t)) = l$ et $\lim\limits_{u \rightarrow \alpha} f(x_2(y), y_2(u)) = l'$, avec l $\neq$ l', alors :

$$\lim_{(a,b)} f \text{ n'existe pas}$$

12.2.3 Continuité

Définition 65 *Si f est une fonction définie en (a,b) et sur un voisinage de (a,b), avec :*

$$\lim_{(a,b)} f = f(a, b)$$

Alors, on dit que f est continue en (a,b).

12.3 Dérivation

12.3.1 Dérivées partielles

Soit f fonction définie au voisinage de (a,b).

Définition 66 *On appelle première dérivée partielle de f en (a,b) :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

Définition 67 *On appelle deuxième dérivée partielle de f en (a,b) :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

12.3.2 Dérivée suivant un vecteur

Définition 68 *Soit $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On défini le nombre dérivée de f en (a,b) suivant $\overrightarrow{u}$, notée $d_{\overrightarrow{u}} f(a,b)$, par :*

$$d_{\overrightarrow{u}} f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + \alpha.t, b + \beta.t) - f(a,b)}{t}$$

12.3.3 Fonction de classe C^1

Définition 69 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe C^1 sur A si :*
$\rightarrow$ *f possède sur A deux dérivées partielles*
$\rightarrow$ *Ces deux fonctions sont continue sur A*

12.3.4 Développement limité d'ordre 1

Si f est de classe C^1 sur A, voisinage de (a,b), alors :

$$\forall (x,y) \in A \; f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b) + o(||(x,y) - (a,b)||)$$

Propriété 60 *Soit $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ et f une fonction de classe C^1 au voisinage de (a,b).*

$$d_{\overrightarrow{u}} f = \alpha.\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

On en déduit que si f est de classe C^1 au voisinage de (a,b), alors $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, \; d_{\overrightarrow{u}} f$ existe et est continue.

12.3.5 Plan tangent

Définition 70 *On appelle plan tangent à la surface représentative d'une fonction de classe C^1 le plan définie par le repère :*

$$(M(a,b,f(a,b)), \overrightarrow{t_{\overrightarrow{i}}}, \overrightarrow{t_{\overrightarrow{j}}})$$

avec :

$$\overrightarrow{t_{\overrightarrow{i}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{t_{\overrightarrow{j}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

Vecteur normale au plan tangent

Définition 71 *On défini un vecteur normale au plan tangent, notée $\overrightarrow{n}$, par :*

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{grad}(f(x,y) - z)$$

12.3.6 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 72 *Soit f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$.*
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est défini sur A et possède des dérivées partielles, on les notes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x}$$

Respectivement pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y}$$

Théorème 10 *Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continue sur A, alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

12.3.7 Dérivée des composées

Premier type de composées

Soit f une fonction de classe C^1 de A dans $\mathbb{R}$, avec $Ac\mathbb{R}$.
Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g = φ o f.

$$g : A \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \varphi(f(x,y))$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\varphi'(f(x,y))$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\varphi'(f(x,y))$$

Second type de composées

Soit x,y deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(x(t), y(t))$$

On obtient, à l'aide d'un développement limité :

$$\forall t : \varphi'(t) = x'(t).\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t).\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$$

Cinquième partie

Equations differentielles

Chapitre 13

Équation différentielle

13.1 Fonction exponentielle complexe

Soit :

$$f : t \mapsto x(t) + iy(t) = e^{rt}$$

Avec r = a+ib.
On obtient, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = re^{rt}$$

13.2 Équation différentielle

13.2.1 Première ordre

$$(\forall x \in \mathbb{R}\ ay'(t) + by(t) = 0) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R},\ tq\ \forall x \in \mathbb{R}\ y = Ke^{-\frac{b}{a}x})$$

13.2.2 Second ordre

On établie l'équation caractéristique, de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On détermine Δ et on obtient :
→ $\Delta > 0$:

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2\ tq\ \forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

→ $\Delta = 0$:

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2\ tq\ \forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$$

→ $\Delta > 0$: Solution dans C, avec $r_0 = \pm i\omega$

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2\ tq\ \forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = (Acos(\omega x) + Bsin(\omega x))e^{r_0 x}$$

13.3 Recherche d'une solution particulière

13.3.1 Second membre constant

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$ay'' + by' + cy = d$$

Si $C \neq 0$:

$$y_0 : x \mapsto \frac{d}{c}$$

est une solution particulière. Si $C = 0$:

$$y_0 : x \mapsto \frac{d}{b}x$$

est une solution particulière

13.3.2 Second membre polynomiale

En géneral, on recherche un polynome de meme degrès. Soit :

$$y'' + 3y = 2x + 1$$

On pose :

$$y_0 : x \mapsto ax + b$$

On dérive deux fois y_0 et on remplace dans l'équation pour déterminer a et b

13.3.3 Second membre exponentielle

Si le second membre est de la forme :

$$x \mapsto e^{\alpha x}$$

Alors on peut espérer une solution de la forme $\lambda e^{\alpha x}$

13.4 Méthode de variation de la constante

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ ay'(t) + by(t) = f(x)$$

On résoud l'équation sans second membre, plus on pose $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$z(x) = \frac{y(x)}{e^{-\frac{b}{a}x}} \Leftrightarrow y(x) = z(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

Puis on injecte cette expression y(x) dans (E) pour déterminer z(x)

13.5 Principe de superposition

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$$

On considere :

$$(E_1) \ : \ ay'' + by' + cy = 0$$
$$(E_2) \ : \ ay'' + by' + cy = f_1(x)$$
$$(E_3) \ : \ ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

Soit y_1, y_2 solutions respective de (E_2) et (E_3). La solution particuliere de (E) est $y_1 + y_2$

Chapitre 14

Équations différentielle linéaire

14.1 Généralité

Définition 73 *On considère (E) l'équation d'inconnue la fonction y n fois dérivable sur une partie A de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in A,\ a_n(x).y^{(n)}(x) + ... + a_0.y(x) = b(x)$$

avec : $a_n, .., a_0, b$ *des fonctions définies sur A.*
On dit que (E) est une équation differentielle linéaire d'ordre n.

Nota 1 *On note cette équation :*

$$(E) :\ \forall x \in A :\ a_n(x).y^{(n)} + ... + a_0.y = b(x)$$

Propriété 61 *L'ensemble des solutions de (E) est soit :*
- $\rightarrow$ *Vide*
- $\rightarrow$ *Un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre.*

Si les coefficients sont constant.
L'ensemble des solutions est un espace de dimension n.

Chapitre 15

Équations différentielles linéaire d'ordre 1

Définition 74 *Soit* $A \in \mathbb{R}$.
Soit a,b,c trois fonctions définies sur A, et (E) :

$$(E):\ a(x).y' + b(x).y = c(x)$$

$$(E_0):\ a(x).y' + b(x).y = 0$$

Si :
- $\rightarrow$ *Si a et b sont continues sur A*
- $\rightarrow$ *A est un intervalle, notons le I*
- $\rightarrow$ $\forall x \in I\ a(x) \neq 0$

Alors :

$$(E_0) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R}\ tq\ \forall x \in I\ y(x) = K.e^{\int \frac{-b(x)}{a(x)} dx})$$

Sixième partie

Intégration

Chapitre 16

Intégration

Définition 75 *L'intégrale d'une fonction est par définition un nombre.*
Une primitive est une autre fonction.

16.1 Fonctions continues par morceaux

16.1.1 Subdivision

Soit [a,b] segment de $\mathbb{R}$, avec a<b.

Définition 76 *On appelle subdivision de [a,b], une liste vérifiant :*

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$$

On note $\sigma = (x_i)_{a \leq i \leq n}$.
Le pas d'une subdivision, qui est la longueur d'intervalle la plus importante, est défini comme :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

Si les intervalles sont tous de la mêmes longueurs, la subdivision est dite régulière. De plus, si σ est celle d'une subdivision régulière de [a,b], alors :

$$\forall k,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

16.1.2 Fonction en escalier sur [a,b]

Soit f fonction définie sur [a,b].

Définition 77 *On dit que f est en escalier si il existe une subdivision de [a,b] :* $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *telle que :*

$$\forall i \in \{1, ...n\}\text{ , } f \text{ est constante sur }]x_{i-1}; x_i[$$

Propriété 62 *On défini les propriétés suivantes :*
$\rightarrow$ *Une fonction en escalier est bornée*
$\rightarrow$ *L'ensemble des fonctions en escalier sur [a,b] est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*

16.1.3 Fonction continue par morceaux

Soit f défini sur [a,b]

Définition 78 *f est continue par morceaux sur [a,b] si :*

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2,...,n\} \text{ f est continue sur }]x_{i-1};x_i[\\ \forall i \in \{1,2,...,n\} \lim\limits_{x_i^-} \text{ existe} \\ \forall i \in \{0,2,...,n-1\} \lim\limits_{x_i^+} \text{ existe} \end{cases}$$

Propriété 63 *On défini les propriétés suivantes :*

$\rightarrow$ *Une fonction continue par morceaux est bornée*

$\rightarrow$ *L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur [a,b] est un espace vectoriel*

$\rightarrow$ *Une fonction en escalier est continue par morceaux*

$\rightarrow$ *Une fonction continue sur [a,b] est continue par morceaux*

16.1.4 Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur [a,b] (ce qui comprend les fonctions continues sur [a,b])

Définition 79

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ Il existe deux fonctions en escalier sur [a,b], } \varphi \text{ et } \psi \text{ telque}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b]\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

16.2 Intégrale de Riemann

16.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 80 *Soit φ fonction en escalier sur [a,b].*
Notons $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à φ, et posons :

$$\forall i \in \{1,..,n\}\ ,\ \forall x \in]x_{i-1};x_i[\ \varphi(x) = \lambda_i$$

L'intégrale sur [a,b] de φ est :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\lambda_i$$

On note aussi cette intégrale de la façon suivante :
Si a < b, alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_a^b \varphi$$

Si b < a :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_b^a \varphi$$

Convention :

$$\int_a^b \varphi = -\int_b^a \varphi$$

$$\int_a^a \varphi = 0$$

Propriété 64 *Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur [a,b].*
Si λ et μ sont deux réels :

$$\int_{[a,b]} \lambda\varphi + \mu\varphi = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$$

Propriété 65 *Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur [a,b].*
Si $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$, alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$$

De plus, si $\varphi \geq 0$ sur [a,b] alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$$

16.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit f fonction continue par morceaux sur [a,b]. Notons :

$$\begin{cases} E_+ = \{\varphi \text{ en escalier sur [a,b] } /\varphi \geq g\} \\ E_- = \{\varphi \text{ en escalier sur [a,b] } /\varphi \leq g\} \\ A_+ = \left\{\int_{[a,b]} \varphi/\varphi \in E_+\right\} \\ A_- = \left\{\int_{[a,b]} \varphi/\varphi \in E_-\right\} \end{cases}$$

Propriété 66 *Inf(A_+) et Sup(A_-) existent et sont égaux*

Définition 81 *La valeur commune de ces deux réels est l'intégrale de Riemannsur [a,b] de f. On la note :*

$$\int_{[a,b]} f$$

16.3.1 Somme de Riemann

Propriété 67 *Soit f fonction continue par morceaux sur [a,b].*
Notons $\forall n \in N$: Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\int_{[a,b]} f$

$$\begin{cases} u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) \\ v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \end{cases}$$

16.3.2 Linéarité

Propriété 68 *Soient λ,μ réels, f, g fonctions continues par morceaux.*

$$\int_{[a,b]} \lambda\varphi + \mu\varphi = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$$

16.3.3 Transmition de l'ordre

Propriété 69 *Si f et g sont continue par morceaux et $f \leq g$, alors :*

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

16.3.4 Intégrale et valeur absolu

Propriété 70 *Soit f fonction continue par morceaux sur [a,b], donc :*

$$\int_{[a,b]} |f| \geq | \int_{[a,b]} f \, |$$

16.3.5 Relation de Chasles

Propriété 71 *Soit f continues par morceaux sur [a,b] et $b \in [a, c]$.*

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

16.3.6 Inégalité de la moyenne

Propriété 72 *Soit f,g continues par morceaux sur [a,b], g est bornée, avec a < b. Donc M = $\sup\limits_{[a,b]} |g|$ existe.*

$$|\int_{[a,b]} fg| \leq \sup_{[a,b]} |g| \times \int_{[a,b]} |f|$$

Définition 82 $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} g$ *est la valeur moyenne de g sur [a,b].*

$$\int_{[a,b]} g = \mu(b-a)$$

16.4 Intégrale et primitive d'une fonction continue

On obtient les propriétés suivant :

$$\begin{cases} \text{Soit } x \in I. \text{ f est continue sur I, donc } \int_a^x f \text{ existe} \\ \text{Si } x_0 \text{ est à l'intérieur de I, si f est continue sur I, alors } \int_a^x f \text{ est aussi continue sur I} \\ \text{Si f est continue sur I, alors } g : x \mapsto \int_a^x f \text{ est dérivable sur I et sa dérivé est f.} \end{cases}$$

De la dernière propriété, on déduit que g est de classe C^1 sur I. En résumé, si f est de classe C^n alors g est de classe C^{n+1}

Propriété 73 *Si φ est une fonction positive et continue sur [a,b] d'inégalité nulle, alors :*

$$\varphi = 0$$

16.4.1 Utilisation des primitives d'une fonction continue

Définition 83 *Soit f définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I, c'est une fonction dérivable sur I dont la dérivée est f.*

16.4.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Soit f continue sur un intervalle I, si F est une primitive de f sur I, alors :

$$(\text{G est une autre primitive de f sur I}) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I \; G(x) = F(x) + K)$$

Il en découle que :

$$(\text{F est une primitive de f sur I }) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I \; F(x) = \int_a^x f(t)dt + K)$$

Et que $\forall (a,b)^2 \in I^2$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

16.4.3 Notation

Définition 84 *Si f est continue sur I : $\int f(x)dx$ désigne la valeur de x d'une primitive de f.*

16.4.4 Technique de calcul d'une intégrale

Intégrale par partie

Définition 85 *Si f,g sont de classe C^1 sur I, $(a, b) \in I^2$, alors :*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

Changement de variables

Définition 86 *Soit u une bijection de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle [a,b]*
Soit f continue sur [a,b].

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

16.4.5 Intégrale d'une fonction paire, impaire, periodique

Fonction paire

Propriété 74 *Soit $a \in \mathbb{R}$*
Si f est continue et paire sur [-a,a], alors :

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$$

Fonction impaire

Propriété 75 *Si f est continue et impaire sur [-a,a], alors :*

$$\int_{-a}^a f = 0$$

Fonction periodique

Propriété 76 *Si f est continue et T periodique sur $\mathbb{R}$*
Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f \text{ est indépendant de a}$$

16.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 87 *Soient f,g continues sur [a,b] :*

$$|\int_{[a,b]} fg| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2}$$

Si cette inégalité devient une égalité, alors $\exists\lambda_0 \in \mathbb{R}$ telque

$$g = -\lambda_0 f$$

16.6 Formule de Taylor avec reste intégrale

Définition 88 *Soit f fonction de classe C^n.*
$\forall x \in D_f$, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + ... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$$

16.7 Inégalité de Taylor-Lagrange

Définition 89 *Soit f de classe C^{n+1} sur I, $a \in I$.*
Supposons que $f^{(n+1)}$ soit majorée sur I.
Notons $M_{n+1} = \sup\limits_I |f^{(n+1)}|$
$\forall x \in I$ *:*

$$|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}(t)dt| \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Septième partie

Nombres complexes

Chapitre 17

Nombres complexes

17.1 Formules

17.1.1 Généralités

→ (C,+,x) est un corps
→ (a+ib)+(a′+ib′) = (a+a′)+i(b+b′)

→ (a+ib).(a′+ib′) = (aa′-bb′)+i(ab′+a′b)

→ Il y a unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire pour un complexe.

→ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

→ $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

→ Re(z) = $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

→ Im(z) = $\dfrac{z-\overline{z}}{2}$

→ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_b - z_a$

→ On défini le barycentre de la façon suivante :

$$\alpha + \beta \neq 0, z_g = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

17.1.2 Forme Trigonométrique et exponentielle

Soit z = x+iy un complexe.
→ |z| = $\sqrt{x^2+y^2}$

→ $|z|^2 = z.\overline{z}$

→ |-z| = |z| = $|\overline{z}|$

→ $(z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\overline{z} = z)$

→ $(z \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\overline{z} = -z)$

$\rightarrow$ |Im(z)| $\leq$ |z|

$\rightarrow$ |Re(z)| $\leq$ |z|

$\rightarrow$ $|z.z'| = |z|.|z'|$

$\rightarrow$ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$\rightarrow$ $e^{i(\theta+\theta'})=cos(\theta+\theta')+isin(\theta+\theta')$

$\rightarrow$ $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=cos(\theta)$

$\rightarrow$ $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=sin(\theta)$

$\rightarrow$ cos(iy) = ch(y)

$\rightarrow$ sin(iy) = ish(y)

$\rightarrow$ Formule de Moivre :

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}\Leftrightarrow(cos(\theta)+isin(\theta))^n=cos(n\theta)+isin(in\theta)$$

$\rightarrow$ z = x+iy = $\rho e^{i\theta}$

$\rightarrow$ Racine n^{eme} de l'unite :

$$z^n=1\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,...,n-1\}\ z=e^{i\dfrac{k2\pi}{n}}$$

$\rightarrow$ Racine n^{eme} d'un complexe non nul, avec $z=\rho e^{i\theta}$, $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$:

$$z^n=z_0\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,...,n-1\}\ z=A.e^{i\dfrac{k2\pi}{n}}$$

Avec A la solution évidente (Passage à la racine n^{eme})

Chapitre 18

Nombres complexe et géométrie dans le plan

18.1 Alignement, Orthogonalité, Cocyclicité

Soit $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ l'angle formé par ces deux vecteurs.

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$$

Soit :

$$z = \left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

18.1.1 Alignements

$$\text{A,B,C alignées} \Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0$$

$$\text{A,B,C alignées} \Leftrightarrow (z = \overline{z}) \Leftrightarrow (Det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})) = 0$$

avec $Det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - x'y$

18.1.2 Orthogonalité

$$\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\ \text{orthogonaux} \Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}\right) \Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\ \text{orthogonaux} \Leftrightarrow (z = -\overline{z}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = 0$$

18.1.3 Cocyclicité

Soit A,B,C trois points d'un cercle C de centre O.

$$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$$

Condition de cocyclicité

Propriété 77 *Si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})\ [\pi]$ alors A,B,C,D sont soit cocyclique, soit alignés.*

18.2 Similitude

Soit z l'affixe de M, z' l'affixe de M'.

18.2.1 Translation

Définition 90 *Soit $\overrightarrow{u}$ vecteur du plan. On appele translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application :*

$$t_{\overrightarrow{u}} : P \to P$$

$$M \mapsto M'$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

Expression analytique complexe

soit α l'affixe de $\overrightarrow{u}$ Alors :

$$z' = \alpha + z$$

Bijectivité

$t_{\overrightarrow{u}}$ est une application bijective. Soit :

$$t_{\overrightarrow{u}}^{-1} : P \to P$$

$$M \mapsto M'$$

avec z' = z - α

18.2.2 Homothetie

Définition 91 *Soit Ω un point d'affixe ω. Soit $k \in \mathbb{R}$. On appele homothétie de centre Ω et de rapport k l'application :*

$$h : P \to P$$

$$M \mapsto M'$$

avec $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Expression analytique complexe

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

On détermine le centre d'une homothétie en déterminant son point fixe, donc en résolvant :

$$z = z'$$

Bijectivité

h est une application bijective. Soit :

$$h^{-1} : P \to P$$

$$M \mapsto M'$$

avec z' - ω = $\frac{1}{k}(z - \omega)$

18.2.3 Rotation

Définition 92 *Soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel. On appele rotation de centre Ω et d'angle θ l'application*

$$r : P \to P$$
$$M \mapsto M'$$

avec $\Omega M'$=ΩM et $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})$ = θ [2π]

Expression analytique complexe

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - w)$$

On détermine le centre d'une rotation en déterminant son point fixe, donc en résolvant :

$$z = z'$$

Bijectivité

h est une application bijective. Soit :

$$r^{-1} : P \to P$$
$$M \mapsto M'$$

avec z' - $\omega = e^{-i\theta}(z - \omega)$

18.2.4 Similitude

Définition 93 *Soit Ω un point d'affixe ω et (θ,k) $\in \mathbb{R}^2$. On appele similitude direct de centre Ω, d'angle θ, et de rapport k l'application :*

$$S : P \to P$$
$$M \mapsto M'$$

avec $\Omega M'$=$k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})$ = θ [2π]

Expression analytique complexe

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - w)$$

On détermine le centre d'une similitude en déterminant son point fixe, donc en résolvant :

$$z = z'$$

Bijectivité

S est une application bijective. Soit :

$$S^{-1} : P \to P$$
$$M \mapsto M'$$

avec z' - ω = $\frac{1}{k}e^{-i\theta}(z - \omega)$

18.2.5 Affinité

Soit φ l'application défini par :

$$\varphi : Plan \mapsto Plan$$
$$P(x, y) \mapsto M(x, \frac{b}{a}.y)$$

φ est appelé affinité de base Ox, de direction Oy et de rapport $\frac{b}{a}$

Huitième partie

Polynomes

Chapitre 19

Les polynomes

19.1 Définitions

Soit K un corps (Soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$)

Définition 94 *Un polynome à coefficiants dans K est une suite d'élement de K tous nul à partir d'un certain rang.*

$$P = (a_0, ..., a_n, 0, ...)$$

On peut l'écrire aussi sous la forme :

$$P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$$

avec X l'indéterminé.
Il existe aussi la forme suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

L'ensemble des polynomes à coefficiants dans K est notée K[X].

Soit P et Q deux polynomes. On as :

$$P = Q \Leftrightarrow \forall k \in N \; a_k = b_k$$

19.1.1 Opérations

On peut effectuer quatres opérations :
$\rightarrow$ Une addition :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k$$

$\rightarrow$ Un produit :

$$P.Q = \sum_{k,k' \geq 0}^{\infty} (a_k.b'_k) X^{k+k'}$$

$\rightarrow$ Un produit par λ, $\lambda \in K$:

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) X^k$$

$\rightarrow$ Une composée :

$$P(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q^k$$

19.1.2 Structure

19.1.3 Polynome constante

On observe qu'un polynome constant s'identifie à un élement du corps. On obtient donc que :

$$K \, c \, K[X]$$

Structure de (K[X],+,x)

$\rightarrow$ (K[X],+) est un groupe commutatif
$\rightarrow$ (K[X],+,x) est un anneau commutatif : On peut donc utiliser les identités remarquables sur les polymones. Cette anneau est intègre, ce qui signifie que :

$$(P.Q = 0) \Leftrightarrow (P = 0 \; ou \; Q = 0)$$

19.1.4 Fonction polynome associée

Soit $P \in K[X]$, défini par :

$$P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$$

On obtient la fonction polynome associée :

$$\forall x \in K, \; \widetilde{P}(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

L'application qui lie le polynome à sa fonction associée est une bijection.
Toutes les notions de partié se transmette de la fonction polynome associée au polynome.

19.1.5 Degrés

Définition 95 *On défini le degrés d'un polynome par :*

$$deg(P) = Max \, \{k \in N / a_k \neq 0\}$$

Par convention :

$$deg(0) = -\infty$$

$$deg(P_{Constant}) = 0$$

Degrés d'une combinaison

On peut déterminer le degrés de deux combinaison :

$$deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)$$

$$deg(P + Q) \leq Max(deg(P), deg(Q))$$

19.1.6 Valuation

Définition 96 *On défini la valuation d'un polynome par :*

$$val(P) = Min \, \{k \in N / a_k \neq 0\}$$

Par convention :

$$deg(0) = +\infty$$

Valuation d'une combinaison

On peut déterminer le degres de deux combinaison :

$$val(P.Q) = val(P) + val(Q)$$

$$val(P + Q) \geq Min(val(P), val(Q))$$

19.1.7 Division euclidienne dans K[X]

Diviseur, Multiple

Définition 97 *Soient A,B deux polynomes.*
On dit que B divise A, ou que A multiplie B, si :

$$\exists Q \in K[X] \; A = B.Q$$

Il en découle que les polynomes constant non nuls divisent tous les autres.

Division euclidienne

Définition 98 *Soit A,B deux polynomes, B non nul.*

$$\exists!(R,Q) \in K[X] \; tq \; A = B.Q + R$$

avec deg(R) $\leq$ deg(Q)-1.
On appelle respectivement R et Q le reste et le quotient de la division euclidienne.

19.1.8 Formule de Taylor

Soit a un réel. Soit P un polynome de degrés n.
On obtient :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{D^k(P)(a)}}{k!}(X-a)^k$$

avec $\widetilde{D^k(P)}(a)$ la dérivé k^{eme} de P prise en a.

19.2 Racine d'un polynome

Soit $P \in K[X]$. Soit r $\in K$

19.2.1 Racine simple

Définition 99 *r est une racine de P si* $\widetilde{P}(r) = 0$

Propriété 78 *(r est une racine de P) $\Leftrightarrow$ ((X-r) divise P)*

19.2.2 Racine multiple et ordre de multiplicité

Définition 100 *r est une racine d'ordre α si $(X-r)^\alpha$ divise P et $(X-r)^{\alpha+1}$ ne divise pas P.*

Propriété 79 *(r est une racine d'ordre α de P) $\Leftrightarrow$ ($\forall i \in \{0,..,\alpha-1\}$ $\widetilde{D^i(P)}(r) = 0$ et $\widetilde{D^\alpha(P)}(r) \neq 0$)*

19.2.3 Polynome scindé

Soit $P \in K[X]$ de degrés n et de termes dominant a_nX^n

Définition 101 *P est scindé si le nombre de racine, en comptant les ordres de multiplicité, est n :*

$$\exists(r_1,...,r_n) \in K^n, \exists(\alpha_1,...,\alpha_n) \in N^n \; tq \; P = a_n(X-r_1)^{\alpha_1}...(X-r_n)^{\alpha_n}$$

Lien entre coefficiants et racine d'un polynome scindé

On obtient les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1 ... r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

19.2.4 Polynome irréductible

Dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 102 *Un polynome est irréductible si il n'est divisible que par les polynomes constant et par les produits de lui-meme par un constante.*

Dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 11 *Tout polynome non constant dans* $\mathbb{C}[X]$ *possède au moins une racine complexe.*

On en déduit donc que :
→ Tout polynomes dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé
→ Les seuls polynomes irréductible de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degrés 1

Neuvième partie

Espace vectoriel

Chapitre 20

Espace vectoriel

20.1 Définitions

Définition 103 *Soit E un espace et K un corps.*
Donc dit que (E,+,.) est un K-espace vectoriel si il vérifie les propriétés suivantes :
1- + est une loi de composition interne :

$$\forall (x,y) \in E^2 \; x+y \in E$$

2- + est une loi associative :

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \; (x+y)+z = x+(y+z)$$

3- + possède un élement neutre O_E :

$$\forall x \in E \; x+O_E = O_E+x = x$$

4- Tous éléments x de E est symétrisable pour + dans E. Ce symétrique est $-x$:

$$\forall x \in E \; x+(-x) = (-x)+x = O_E$$

5- + est commutatif dans E :

$$\forall (x,y) \in E^2 \; x+y = y+x$$

6- "." est une loi de composition externe :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \; \lambda.x \in E$$

7- "." possède un élement neutre 1_K :

$$\forall x \in E \; 1_k.x = x$$

8- "." vérifie :

$$\forall x \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K^2 \; \lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$$

9- "." vérifie :

$$\forall x \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K^2 \; (\lambda+\mu).x = (\lambda.x)+(\mu.x)$$

10- "." vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in K \; \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$$

Si un espace ne vérifie que les 4^{ere} propriétés, on dit que c'est un groupe. Si il vérifie les 5^{ere}, c'est un groupe commutatif.

Propriété 80 *Soit E un K-espace vectoriel :*

$\rightarrow\ \forall x \in E,\ 0_K.x = 0_E$

$\rightarrow\ \forall x \in E\ -x = (-1_K).x$

$\rightarrow$ *Soit x un vecteur de E,* $\lambda \in K$ *:*

$$(\lambda.x = O_E) \Leftrightarrow (\lambda = O_K \text{ ou } x = O_E)$$

20.2 Sous-espaces vectoriels

20.2.1 Définitions

Définition 104 *Soit E un K-espace vectoriel. Soit F un espace.*
On dit que F est un sous-espace de E si :

$$\begin{cases} F\ c\ E \\ (F, +, .) \text{ est un K-espace vectoriel} \end{cases}$$

Propriété 81 *Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux sous espace de E :*
$\rightarrow$ $\{O_E\}$ *est le plus petit sous espace de E.*
$\rightarrow$ $F \cap G$ *est un sous espace de E*
$\rightarrow$ $F \cup G$ *est un sous espace de E*

20.2.2 Critère de reconaissance

Propriété 82 *(F est un sous espace de E)* $\Leftrightarrow \begin{cases} F\ c\ E \\ F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2,\ \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$

20.2.3 Sous espace supplémentaire

Soit E un K-espace vectoriel. Soient F,G deux sous espace de E.

Définition 105 *F et G sont dit en somme direct si :*

$$F \cap G = \{O_E\}$$

Définition 106 *F et G sont supplementaire si ils sont en somme direct et que :*

$$F + G = E$$

On le note :

$$F \oplus G = E$$

Propriété 83 *Si F et G sont supplementaires, alors*

$$\forall x \in E$$

, il existe un unique couple (x,y) avec $y \in F$*,*$z \in G$ *telque :*

$$x = y + z$$

20.2.4 Partie génératrice d'un sous-espace

Sous espace engendré par un partie

Soit A une partie de E.
Soit G le plus petit espace contenant A.

Définition 107 *G est le sous espace engendré par A. On le note :*

$$G = Vect(A)$$

On dit que A est une partie génératrice de G.

Sous espace engendré par une partie fini

Soit $u_1, ..., u_n$ n vecteur de E.

$$Vect(\{u_1, ..., u_n\}) = \{\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n / \lambda_1, ..., \lambda_n \in K^n\}$$

20.2.5 Produit de deux espaces

Définition 108 *Soient E et F deux K-espace vectoriel.*
On munit le produit E×F des deux lois suivant :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall (x', y') \in E \times F, \forall \lambda \in K$$

$$\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \lambda.(x + y) = (\lambda x, \lambda y) \end{cases}$$

Propriété 84 *(E×F,+,.) est un K-espace vectoriel, de vecteur nul (O_E, O_F)*

20.3 Application linéaire

Définition 109 *Soient E et F deux K-espace vectoriels, f une application de E dans F.*
f est une application linéaire si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \forall (\lambda, \mu) \in K^2 \ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

20.3.1 Vocabulaire

→ Application linéaire → Morphisme d'espace vectoriel
→ Application linéaire de E dans E → Endomorphisme
→ Application linéaire bijective → Isomorphisme
→ Application linéaire bijective de E dans E → Automorphisme
On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaire de E dans F

Propriété 85 *Soit f isomorphisme de E dans F.*
Alors f^{-1} existe et est linéaire de F dans E

20.3.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit $f \in L(E, F)$

Image

Définition 110 *On appele image de f l'ensemble des images de tous les vecteurs de E par f :*

$$Im(f) = \{f(x)/x \in E\}$$

Im(f) est un sous espace vectoriel de F

Noyau

Définition 111 *On appele noyau de f l'ensemble des antécédants O_F par f :*

$$Ker(f) = \{x \in E/f(x) = 0\}$$

Ker(f) est un sous espace vectoriel de E

Propriété 86 *f est une application injective si et seulement Ker(f) est réduit au vecteur nul :*

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (Ker(f) = \{O_E\})$$

20.3.3 Opérations sur les applications linéaires

$\rightarrow$ La combinaison linéaire de deux applications linéaire est une application linéaire
$\rightarrow$ La composée de deux applications linéaire est linéaire

20.3.4 Structure

$\rightarrow$ (L(E),+,o,.) est un K-Algèbre : On peut donc utiliser les identites remarquables
$\rightarrow$ GL(E) : Groupe des automorphisme de E. Dans ce groupe :

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

20.3.5 Projecteur

Définition 112 *Soit E un K-espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces supplémentaire de E. Soit $x \in E$*

$$\exists!(y, z), y \in F, z \in G, x = y + z$$

On appelle projeté de x sur F parallement à G, notée p(x), le vecteur y.

Propriété 87 *p est une application linéaire*

Propriété 88 *Soit p la projection de F parallement à G :*

$\rightarrow$ *Im(p) = F*

$\rightarrow$ *Ker(p) = G*

$\rightarrow$ *pop = p*

$\rightarrow$ $\forall x \in E$ *(p(x) =x)* $\Leftrightarrow$ *($x \in F$)*

Propriété 89 *Soit q la projection de G parallement à F. p et q sont deux projecteur associé.*
$\rightarrow$ *Im(q) = G*

$\rightarrow$ *Ker(q) = F*

$\rightarrow$ *poq = O_E*

$\rightarrow$ *p+q = Ide*

Propriété caractéristique

Propriété 90 *Si :*

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ fof = f \end{array}\right.$$

Alors f est une projection sur F parallement à G avec :

$$\left\{\begin{array}{l} F = \{x \in E / f(x) = x\} \\ G = Ker(f) \end{array}\right.$$

20.3.6 Symétrie

Définition 113 *Soit E un K-espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces supplémentaire de E. Soit $x \in E$*

$$\exists!(y,z), y \in F, z \in G, x = y + z$$

On appelle symétrie de x par rapport à F parallement à G :

$$s(x) = y - z$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} (s(x) = x) \Leftrightarrow (x \in F) \\ (s(x) = -x) \Leftrightarrow (x \in G) \end{array}\right.$$

Propriété 91 *Soit s une symétrie :*
$\rightarrow$ *s est une application linéaire*
$\rightarrow$ *sos = Ide, donc s est une bijection*

Propriété caractéristique

Propriété 92 *Si :*

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ fof = Ide \end{array}\right.$$

Alors f est une symétrie

Chapitre 21

Espace vectoriel de dimensions finies

21.1 Partie libre - Partie liée - Partie génératrice

21.1.1 Partie finie liée

Définition 114 *Soient $u_1, ..., u_p$ p vecteurs d'un K-espace vectoriels de E.*
On dit que $\{u_1, ..., u_n\}$ est liée ou que les vecteurs $u_1, ..., u_n$ sont linéairement dépendants si $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p$ non tous nuls telque :

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p = O_E$$

Propriété 93 *Toutes parties qui contient le vecteur nul est liée*

Propriété 94 *Si L est liée, et L c L', alors L' est liée.*

Vecteurs colinéaires

Soit u,v deux vecteurs de E.

$$\text{(u et v sont colinéaire} \Leftrightarrow (\exists\lambda \in K \; tq \; u = \lambda v \; ou \; v = 0))$$

21.1.2 Partie fini libre

Définition 115 *Soit L partie finie de E.*

$$(L \text{ est libre}) \Leftrightarrow (L \text{ n'est pas libre})$$

On la caractérise par : Si $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p$ tq $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p = O_E$ alors

$$\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$$

On dit que la partie est linéairement indépendante.

Propriété 95 *Si L est libre, et L' c L, alors L' est aussi libre.*

21.1.3 Partie génératrice

Soit E un K espace vectoriel. Nous avons l'ensemble des propriétés suivantes :

1- G est une partie génératrice de E si :

$$Vect(G) \; c \; E$$

2- Si A et B sont deux parties de E, si A c B, alors :

$$Vect(A) \; c \; Vect(B)$$

3- Si G est une partie génératrice de E, G' une partie telque G c G', alors G' est une partie génératrice de E

21.1.4 Base

Définition 116 *Une base d'un espace E est une partie génératrice de E et libre.*

Propriété 96 *Si B = $e_1, ..., e_n$ est une base fini de E, alors, $\forall u \in E$, $\exists !$ n uplet de scalaire $(x_1, ..., x_n)$ telque :*

$$u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

Le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ est appelé le n-uplet de coordonées de u dans la base B. On le note aussi :

$$mat_B(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Base de référence

→ $\mathbb{R}_n[X]$: {1,X,X^2,...,X^n}

→ $\mathbb{R}^n$: {(1,...,0),...,(0,...,1)}

21.2 Dimension d'un espace de dimension finie

Définition 117 *Soit E un K-espace vectoriel.*
Si E possède une partie génératrice finie, on dit que E est un espace de dimension finies.

Propriété 97 *Soit E un espace de dimension finies et G = $\{u_1, ..., u_p\}$ une partie génératrice de E.*
Si G est libre, alors G est une base de E.

Propriété 98 *De toute partie génératrice finie, on peut extraire une base.*

Théorème 12 *Théorème de la base incomplète :*
Soit L = $\{u_1, ..., u_n\}$.
Si L est une partie libre, on peut la completer en une base.

Propriété 99 *Lemme de Steiniz :*
Si E possède une partie génératrice de n vecteurs, alors toute partie de n+1 vecteurs est liée

Théorème 13 *Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le meme nombre d'élements et ce nombre commun est la dimension de l'espace.*
Si B est une base de E :

$$dim(E) = card(B)$$

Propriété 100 *Soit E un espace de dimension n, soit A une partie de E*
→ *Si A est une partie génératrice de E, alors card(A) $\geq$ n*
→ *Si card(A) < n, alors A n'est pas génératrice de E*
→ *Si A est libre, alors card(A) $\leq$ n*
→ *Si card(A) > n, alors A est liée.*

21.2.1 Caractérisation des bases

Soit E un espace vectoriel de dimension n et A une partie de E.
Si A est une base, alors A est libre, A est génératrice de E et card(A) = dim(E).

→ A est une base ⇔ A est libre et card(A) = dim(E)
→ A est une base ⇔ A est génératrice de E et card(A) = dim(E)

21.3 Sous-espace d'un espace de dimension finie

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :

Propriété 101 *Soit F sous espace de E.*
F est de dimension finie et dim(F) $\leq$ dim(E).

Propriété 102 *Soient F et G deux sous-espace de E :*

$$(F = G) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F\ c\ G \\ dim(F) = dim(G) \end{array} \right.$$

Propriété 103 *Formule de Grassman :*
Soit F et G deux sous-espace de E :

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Propriété 104 *Soit E espace de dimension finie.*
Soient F et G deux sous espaces de E. F et G sont supplémentaire si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F + G = E \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{array} \right.$$

Propriété 105 *Tous sous-espace possède au moins un supplémentaire*

Propriété 106 $\rightarrow$ *dim($\emptyset$) = 0*
$\rightarrow$ *Si D est un sous espace de dimension 1, c'est une droite vectorielle*
$\rightarrow$ *Si P est un sous espace de dimension 2, c'est un plan vectoriel*
$\rightarrow$ *Si H est un sous espace de dimension n-1, c'est un hyperplan*
$\rightarrow$ *Tout supplémentaires d'un hyperplan est une droite vectoriel*

21.3.1 Rang d'une partie

Définition 118 *Soit A une partie d'un espace E.*
Le rang de A est la dimension du sous espace engendré par A :

$$rang(A) = dim(VectA)$$

Propriété 107 *Soit A c E :*
$\rightarrow$ *(rang(A) = dim(E))* $\Leftrightarrow$ *(A est une partie génératrice de E)*
$\rightarrow$ *(A est libre)* $\Leftrightarrow$ *($rang(A) = card(A)$)*

21.3.2 Sous espace supplémentaire et base

Soient F,G deux sous espaces de E, de base B_F, B_G :

$$\text{(F et G sont supplémentaire)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_F \cup B_G = B_E \\ B_F \cap B_G = \emptyset \end{array} \right.$$

21.4 Application linéaire entre deux espaces de dimension finies

Soient E et F deux K-espaces vectoriel de dimension finies

21.4.1 Caractérisation par l'image d'une base de E

Soit B_E = $e_1, ..., e_p$ une base de E.
Soit u un vecteur de E telque :

$$mat_B(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{bmatrix}$$

Si f ∈ L(E,F), alors :

$$f(u) = x_1 f(e_1) + ... + x_p f(e_p)$$

21.4.2 Image d'une partie libre, liée ou génératrice de E

Soit f ∈ L(E,F).

→ Si L_1 = $u_1, ..., u_p$ est une partie liée, alors $f(u_1), ..., f(u_p)$

→ Si L_1 = $u_1, ..., u_p$ est une partie libre, alors ? ? ? ? ? ?

→ L'image d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de Im(f)
→ Si B est une base de E, alors f(B) est génératrice de Im(f)

21.4.3 Rang d'une application linéaire

Définition 119 *Soit f ∈ L(E,F).*
Le rang de f est la dimension de l'image de f :

$$rang(f) = dim(Im(f))$$

Propriété 108 *(f est surjective) ⇔ (rang(f) = dim(F))*

21.4.4 Théorème du rang

Soit f ∈ L(E,F) :

$$dim(Ker(f)) + rang(f) = dim(E)$$

Propriété 109 *(f est injective) ⇔ (rang(f) = dim(E))*

21.4.5 Forme linéaire

Définition 120 *Une forme linéaire d'un espace est une application linéaire de E dans son corps K.*

Propriété 110 *Si φ est une forme linéaire : $rang(\varphi) \leq 1$*

Propriété 111 *Le noyau d'une forme linéaire non nuls est un hyperplan*

21.5 Isomorphisme

Définition 121 *On considère E,F deux espaces de dimension finie.*
On dit que E et F sont isomorphe si il existe un isomorphisme de E dans F.
Dans cette situation, on obtient :
→ *Ker(f) = O_E*
→ *Im(f) = F*
→ *rang(f) = dim(F) = dim(E)*
→ *Deux espaces isomorphe ont meme dimension*
→ *Soit B_E une base de E, f un isomorphisme, alors f(B_E) est une base.*

21.5.1 Caractérisation des isomorphismes

Soit φ une application linéaire de E dans F :

Propriété 112

$$(\varphi \; est \; bijective) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ker(\varphi) = \{O_E\} \\ dim(E) = dim(F) \end{array} \right.$$

$$(\varphi \; est \; bijective) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} rang(\varphi) = dim(F) \\ dim(E) = dim(F) \end{array} \right.$$

$$(\varphi \; est \; bijective) \Leftrightarrow (\varphi(B_E) \text{ est une base de } F)$$

21.5.2 Espace isomorphe

Théorème 14 *Si F est un espace de dimension finie, si E et F sont isomorphe, alors E est aussi de dimension finie, et dim(E) = dim(F)*

Dixième partie

Espace vectoriel euclidien

Chapitre 22

Espaces vectoriels euclidiens

22.1 Produit scalaire

Définition 122 *Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et :*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$

φ est un produit scalaire sur E si :
$\to$ *φ est bilinéaire*
$\to$ *φ est symétrique*
$\to$ *φ est positive*
$\to$ *φ est définie*

22.1.1 Notation et Vocabulaire

$\to$ Si φ est un produit scalaire sur E, on note :

$$\forall (u, v) \in E^2 \ \varphi(u, v) = < u, v >$$

$\to$ On défini la norme de u par :

$$\forall u \in E \ ||u|| = \sqrt{< u, u >}$$

$\to$ Sachant que φ est définie, on obtient :

$$\forall u \in E, \ (||u|| = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$$

$\to$ On dit que u et v sont orthogonaux si :

$$< u, v > = 0$$

$\to$ Un espace vectoriel est dit euclidien si :
1- E est de dimension finies
2- On a défini un produit scalaire sur E

22.2 Propriétés

Propriété 113 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien.*
Soient u,v deux vecteurs de E :

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2 < u, v > + ||v||^2$$

Théorème 15 *Théorème de Pythagore :*

$$(u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux}) \Leftrightarrow (||u+v|| = ||u||^2 + ||v||^2)$$

Propriété 114 *Soit $u \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$||\lambda u|| = |\lambda|.||u||$$

Propriété 115 *Inégalité de Cauchy :*
Soient u,v deux vecteurs :

$$| < u, v > | \leq ||u|| \times ||v||$$

Si il y a égalité, alors u et v sont colinéaire

Propriété 116 *Inégalité de Minkouskay :*

$$||x + y|| \leq (||x|| + ||y||)$$

Propriété 117 *Si $\{u_1, ..., u_n\}$ sont des vecteurs non nuls et 2 à 2 orthogonaux, alors la partie est libre.*

22.3 Base orthonormée

Définition 123 *Soit $(e_1, ..., e_n)$ n vecteur de E, avec E espace de dimension n, deux à deux ortogonaux (famille orthogonale) et unitaire (famille normée) ($\forall k$ $||e_k|| = 1$).*
Alors,$(e_1, ..., e_n)$ est une famille dites orthonormée, qui, de plus, est ici une base.

Propriété 118 *Tout $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien de dimension finie admet au moins une base orthonormée.*

Propriété 119 *Soit B une base orthonormée de E. Soient u,v deux vecteurs de E de coordonnée respectif $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$, alors :*

$$< u, v >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Propriété 120 *On défini dans ce cas la norme de u par :*

$$||u|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Propriété 121 *Pour déterminer les coordonnées dans une base orthonormée, on détermine :*

$$\forall k \in \{1, ..., p\} \ < u, e_k >= x_k$$

22.3.1 Matrice orthogonales

Définition 124 *Une matrice de passage entre deux bases orthonormées est dites orthogonale.*

Propriété 122 *Soit B une base orthonormée. Soit B′ une autre base. Soit P = $mat_B(B')$.*

$$(B' \text{ est orthogonale}) \Leftrightarrow (P^{-1} =^t P)$$

Propriété 123 *Soit P une matrice orthogonale :*

$$det(P) = \pm 1$$

Propriété 124 *Si P est orthogonale, alors ${}^tP$ est orthogonale et $(l_1, ..., l_n)$ forme aussi une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$*

22.3.2 Orientation de l'espace vectoriel

Définition 125 *Soit E un espace vectoriel.*
On oriente une base en définisant une base dites directe.

Propriété 125 *Soit B_0 une base directe.*
Si B est une base de E :

$$\begin{cases} det_{B_0}(B) > 0 \text{ B est directe} \\ det_{B_0}(B) < 0 \text{ B est indirecte} \end{cases}$$

Propriété 126 *Soit B,B′ deux bases de E :*

$$(det_B(B') > 0) \Leftrightarrow (\text{ B et B' ont la même orientation})$$

Dans le cas des bases orthonormée, on as :

Bases orthonormée

Propriété 127 *Soit B_1 une base orthonormée directe*

$$\begin{cases} det_{B_1}(B) = 1 \text{ alors B est orthonormée directe} \\ det_{B_1}(B) = -1 \text{ alors B est orthonormée indirecte} \end{cases}$$

Propriété 128 *Soit $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$.*
Si B et B′ sont deux bases orthonormée directe :

$$det_B(u_1, ..., u_n) = det_{B'}(u_1, ..., u_n)$$

Ce déterminant commun à toutes les bases orthonormée directe est notée Det($u_1, ..., u_n$)

22.3.3 Orthogonalité et sous-espace

Soit E un espace euclidien

Sous espace orthogonaux

Définition 126 *Soient F et G deux sous-espaces.*

$$(\text{F est orthogonal à G}) \Leftrightarrow (\forall x \in F, \forall y \in G, < x, y >= 0)$$

Propriété 129 *Deux sous espaces orthogonaux sont en somme directe.*

Propriété 130 *On en déduit que :*

$$dim(F) + dim(G) \leq dim(E)$$

Orthogonal d'un sous-espace

Définition 127 *Soit F un sous espace de E.*
On appele orthogonale de F l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.
On note :

$$F^{\perp} = \{x \in E / \forall y \in F \ < x, y >= 0\}$$

Propriété 131 *$F^{\perp}$ est un espace vectoriel.*

Propriété 132 *F et $F^{\perp}$ sont deux sous espaces supplémentaire*

Propriété 133 *On en déduit que :*

$$dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F)$$

Propriété 134 *L'orthogonale de l'orthogonale de F :*

$$(F^{\perp})^{\perp} = F$$

Propriété 135 *Soit $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$.*
Soit u un vecteur de E de coordonée $(x_1, ..., x_n)$. Il existe donc $(a_1, ..., a_n)$ telque :

$$\varphi(u) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$$

On obtient donc :

$$\varphi(u) =< a, u >$$

Par conséquence :

$$Ker(\varphi) = (Vect(a))^{\perp}$$

22.3.4 Projection orthogonale

Définition 128 *La projection orthogonale sur un sous espace vectoriel F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$*

Définition 129 *Soit B$(e_1, ...e_p)$ une base orthonormée de F.*
Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, ..., x_p)$.
On obtient donc le projetté orthogonale de x sur F, notée p(x) :

$$p(x) =< x, e_1 > e_1 + ...+ < x, e_p > e_p$$

Propriété 136 *Si p est la projection orthogonale sur F. Si $u \in E$, alors :*

$$Inf\{||x - y||/y \in F\} = ||x - p(x)||$$

Et on note :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \parallel x - y \parallel$$

Et on appelle ceci distance de x à F.

Propriété 137 *Si :*
$\rightarrow\ y \in F$
$\rightarrow\ x - y \in F^{\perp}$
Alors y = p(x).

Chapitre 23

Espace euclidien de dimension 3

23.1 Définitions

23.2 Angle de deux vecteurs non nuls

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, non colinéaire.
Soit $\overrightarrow{n}$ vecteur orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On obtient :

$$\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{< \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} >}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||} \\ et \ : \\ sin(\theta) = \dfrac{Det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{n})}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.||\overrightarrow{n}||} \end{cases}$$

23.2.1 Produit vectoriel

Définition 130 *Soit ($\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) une base orthonormée directe de E.*
Le produit vectoriel est l'unique application de E×E dans E :

- *Alternée :* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
- *Bilinéaire*
- *Vérifiant :* $\begin{cases} \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \end{cases}$

La définition du produit vectoriel est indépendante du choix de la base orthonormée.

Propriété 138 *Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs :*

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{u} \textit{ et } \overrightarrow{v} \textit{ sont colinéaire})$$

Propriété 139 *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaire :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$$

Propriété 140 *On obtient la propriété suivante, pour la norme du produit vectoriel :*

$$||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.|sin(\theta)|$$

23.2.2 Double produit vectoriel

Propriété 141 *Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ trois vecteurs :*

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}.(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}.(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$$

23.2.3 Produit mixte

Définition 131 *Soient* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *trois vecteurs de E :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

Chapitre 24

Isométrie Vectorielle

24.1 Généralités

Définition 132 *Soit E un espace euclidien, soit f* $\in L(E)$.
f est une isométrie vectorielle si :

$$\forall x \in E \; ||f(x)|| = ||x||$$

Propriété 142 *Soit f* $\in L(E)$.

$$(f \text{ est une isométrie vectorielle}) \Leftrightarrow (\forall x \in E \; \forall y \in E, \; < f(x), f(y) >=< x, y >)$$

On dit que f est un endomorphisme orthogonale

Propriété 143 *Une isométrie vectorielle est bijective*

Propriété 144 *La réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle*

Propriété 145 *La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle*

Propriété 146 *L'ensemble des isométrie vectorielles, munie de la loi de composition des applications est un groupe, appelé le groupe orthogonale de E, notée O(E)*

Propriété 147 *Soit f endomorphisme de E, et B base orthonormée.*

$$(f \text{ est une isométrie vectorielle}) \Leftrightarrow (f(B) \text{ est une base orthonomée})$$

$$(f \text{ est une isométrie vectorielle}) \Leftrightarrow (mat_B(f) \text{ est une base orthogonale})$$

24.2 Isométrie vectorielle plane

24.2.1 Classification

Nom	Matrice	Déterminant	Vecteur invariant
Rotation d'angle θ	$\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$	+1	$\{0\}$ ou E pour Ide
Symétrie $\perp$ / à une droite D	$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ \sin(x) & -\cos(x) \end{bmatrix}$	-1	Droite vectorielle

24.2.2 Cas particulier des rotations

Propriété 148 *L'ensemble des rotations vectorielle planes est un sous groupe de O(E), appelé groupe spéciale orthogonale. Il est notée SO(E)*

24.2.3 Rotation orthogonales

Propriété 149 *La composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites est une rotation d'angle deux fois l'angle entre les deux droites.*

24.3 Isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3

24.3.1 Symétrie orthogonale

Soit E un espace euclidien de base B=(i,j,k) orthonormée directe.
Soit F un sous espace de E, et s_f la symétrie orthogonale par rapport à F :

Définition de F	Base	Matrice	Déterminant	Type
F = $\{0\}$	Quelconque	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	-1	$s_f = h_{-1}$
dim(F) = 1	(e_1, e_2, e_3) D =Vect(e_1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	1	$\times$
dim(F) = 2	(e_1, e_2, e_3) P =Vect(e_1, e_2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	-1	Réflection
dim(F) = 3	Quelconque	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1	$s_f = Ide$

24.3.2 Propriété de la matrice d'un symétrie orthogonale dans une base orthonormée

Si B est une base orthonormée et s une symétrie orthogonale.
Soit M=$mat_B(s)$.
Sachant que s est une symétrie, M est inversible et $M^{-1} = M$. De plus, la symétrie est orthogonale, donc la matrice l'est aussi, donc $M^{-1} =^t M$.
On obtient donc M = ${}^tM$. Donc M est une symétrie.

24.3.3 Rotation

Définition 133 *Soit D une droite vectorielle orienté et θ un réel.*
La rotation d'axe de D et d'angle θ est l'application linéaire r telque :
- $\rightarrow$ *$\forall u \in D$ r(u)=u*
- $\rightarrow$ *Le plan $D^\perp$ est stable par r et la restriction de r à ce plan est une rotation plane d'angle θ orienté par D.*

Propriété 150 *Soit $B_=(e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée directe telle que D=Vect(e_1) et $D^\perp = Vect(e_2, e_3)$, alors :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Donc :

$$det(r) = 1$$

Propriété 151 *Cas particulier :*
- $\rightarrow$ *$\theta = 0$, alors r = Ide*
- $\rightarrow$ *$\theta = \pi$, alors r=s_D*

Propriété 152 *Composée de deux réflections :*
Soient P,P' deux plans distincts telque $P \cap P' = D$:

→ *Si* $u \in D : s_{P'}(s_P(u)) = u$
→ *Si* $u \in D^{\perp}$ *r est stable dans* $D^{\perp}$
→ $s_{P'}os_P(u)$ *est une rotation d'axe D.*

24.3.4 Calcul de l'image d'un vecteur de x par une rotation

Soit r rotation d'axe D, orienté par $\overrightarrow{d}$, vecteur directeur de D, et d'angle θ.
Soit $\overrightarrow{x} \notin D$:

$$r(\overrightarrow{x}) = \frac{<\overrightarrow{x}, \overrightarrow{d}>}{||d||^2}.\overrightarrow{d} + cos(\theta)\frac{(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{x}) \wedge \overrightarrow{d}}{||\overrightarrow{d}||^2} + sin(\theta)\frac{\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{d}||}$$

Si $||\overrightarrow{d}|| = 1$:

$$r(\overrightarrow{x}) = <\overrightarrow{x}, \overrightarrow{d}>.\overrightarrow{d} + cos(\theta)(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{x}) \wedge \overrightarrow{d} + sin(\theta)\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{x}$$

24.3.5 Classification

Soit Inv(f) l'ensemble des vecteurs invariants.

dim(Inv(f))	f	Base	Matrice	Det
3	Ide	Quelconque	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
2	Réflexion s_p	Base adaptée	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	-1
1	Rotation d'axe D, d'angle θ	Base adaptée	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$	1
0	Réflexion o rotation	Base adaptée	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$	-1

24.3.6 Élements caractéristiques d'une rotation

→ L'axe : L'ensemble des vecteurs invariante
→ L'angle :
  → cos(θ) est obtenu par la Trace(r) = 1 + 2cos(θ) dans une base adaptée.
  → Le signe de sin(θ) est obtenu par le signe de Det(x,r(x),d), avec x espace non invariant de l'espace, r(x) la rotation et d un vecteur directeur de l'axe

24.3.7 Autres résultats

Propriété 153 *La matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est symétrique*

Onzième partie

Espace Affine

Chapitre 25

Espace Affine

25.1 Définitions

Définition 134 *Soit E un $\Re$ espace vectoriel.*
Soit ξ un ensemble.
On dit que ξ est un espace affine de direction l'espace vectoriel E si il existe φ défini par :

$$\varphi : \xi \times \xi \to E$$
$$(a,b) \mapsto \overrightarrow{ab}$$

telle que :
- $\to$ $\forall (A,B,C) \in \xi^3 \ \varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$
- $\to$ $\forall A \in \xi, \forall u \in E, \ \exists! B \in \xi$ *tq* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$

Vocabulaire 1 *Si ξ est un espace affine, ses éléments sont appelé points.*

Vocabulaire 2 *Si B est une base de E, O$\in$ ξ, alors (O,B) est un repère de ξ*

Vocabulaire 3 *Si M$\in$ ξ, les coordonées de M dans (O,B) sont celles de $\overrightarrow{OM}$ dans B.*

Propriété 154 *$\Im$ est un sous espace affine de ξ si :*
- $\to$ $\Im = \emptyset$
- $\to$ *ou $\exists$ A $\in$ ξ et F sous espace vectoriel de E telque :*

$$\Im = A + F$$

25.2 Applications affines

Définition 135 *Soit ξ un espace affine, E un espace vectoriel.*
On appelle application affine de ξ toute application f de ξ dans ξ telle qu'il existe $\varphi \in L(E)$ et O,O' deux points telque :

$$\forall M \in \xi \ \overrightarrow{O'f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$
$$\forall M \in \xi \ f(M) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$$

On dit que φ est l'application linéaire associée à f.

Propriété 155 *Si f est une application affine associée à φ :*

$$\forall (A,B) \in \xi^2 \ \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$$

Propriété 156 *La composée de deux applications affines est affine et l'application linéaire associée est la composée des applications linéaires associées.*

25.2.1 Homothétie affine

Définition 136 *Soit $A \in \xi$ et $k \in \Re$.*
On appelle homothétie de centre A et de rapport k l'application :

$$h : \xi \to \xi$$

$$M \mapsto M'$$

avec $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.
h est une application affine.

25.2.2 Conservation du barycentre

Propriété 157 *Si f est l'application affine associée à φ, et G le barycentre de $\{(M_i, \lambda_i)/i = 1, ..., p\}$, alors : f(G) est le barycentre de $\{(f(M_i), \lambda_i)/i = 1, .., p\}$*

25.2.3 Expression analytique dans un repère

Définition 137 *Soit f application affine de E, et R=(O,B) un repère de ξ.*
Il existe des réels $a_{i,j}, b_i$ telque si M à pour coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ et M' à pour coordonées $(x'_1, ..., x'_n)$:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n + b_1 \\ .... \\ .... \\ x'_n = a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

25.3 Isométries affines

25.3.1 Généralités

Définition 138 *Soit f une application affine d'un espace affine ξ.*
f est une isométrie si :

$$\forall M, N \in \xi^2 \ ||\overrightarrow{f(M)f(N)}|| = ||\overrightarrow{MN}||$$

Propriété 158 *Si φ est l'application linéaire associée à f :*

$$(\textit{ f est une isométrie }) \Leftrightarrow (\varphi \textit{ est un endomorphisme orthogonale})$$

Vocabulaire 4 *Si :*
$\to$ *det(φ) = 1, alors f est un déplacement*
$\to$ *det(φ) = -1, alors f est un anti-déplacement*

25.3.2 Déplacement du plan

Soit f un déplacement plan.

Application linéaire	Isométrie
Identité	Translation
Rotation d'angle θ [2π]	Rotation affine d'angle θ [2π] de centre Ω

25.3.3 Déplacement de l'espace affine de dimension 3

Application linéaire	Point Fixe	Isométrie
Identité	Aucun	Translation
Rotation d'angle θ	Un point	Rotation affine d'axe affine Δ, orienté par D, d'angle θ
Rotation d'angle θ	Aucun	Vissage d'axe affine Δ, de vecteur u, d'angle θ

Un vissage est la composée d'une translation de vecteur $\perp$ au plan et d'une rotation plane.

Propriété 159 *Si f est un vissage, r une rotation plane, et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur $\perp$ à ce plan, alors :*

$$f = \overrightarrow{u_1} o r = r o \overrightarrow{u_1}$$

Chapitre 26

Equations linéaires

26.1 Espace affine

Définition 139 *Soit E un K-espace vectoriel.*
Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$

$$\{x_0\} + F = \{x_0 + y/y \in F\}$$

est appelé espace affine de direction F.

Propriété 160 *Les espaces vectorielles sont des espaces affines particuliers.*

Propriété 161 *Si F est de dimension finies, on dit que $\{x_0\} + F$ est un espace affine de dimension finies.*
Si F est une droite vectorielle, alors $\{x_0\} + F$ est une droite affine.

26.2 Equations linéaires

Définition 140 *Soient E et F deux K-espace vectoriel.*
Soit $f \in L(E, F)$. Soit $b \in F$.
L'équation d'inconnue x, vecteur de E :

$$f(x) = b$$

est appelé équation linéaire.

26.2.1 Structure de l'ensemble des solutions

$\rightarrow$ Si $b \in Im(f)$, l'espace des solutions est un espace affine de dimenseion Ker(f)
$\rightarrow$ Si $b \notin Im(f)$, l'espaces des solutions est l'ensemble vide.

Propriété 162 *Si l'équation f(x) = b à une unique solution, alors :*
$\rightarrow$ $b \in Im(f)$
$\rightarrow$ *Ker(f) = $\{O_E\}$*
Donc :
$\rightarrow$ $b \in Im(f)$
$\rightarrow$ *f est injective*

26.3 Système linéaire

Définition 141 *Soit (S) un système d'inconnu $(x_1, ..., x_p)$.*
Posons :

$$K^p \rightarrow K^n$$

$$(x_1, ..., x_n) \rightarrow (a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p, ..., a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p)$$

Notons :

→ $x = (x_1, ..., x_n)$

→ $b = (b_1, ..., b_n)$

On dit que :

→ *f est l'application associée à (S)*

→ *Le rang du système est le rang de A ou rang de f*

→ *Si b ∈ Im(f), alors S est un espace affine de dimension p-rang(A) = p-rang(S)*

26.3.1 Système de Cramer

Définition 142 *Un système de Cramer est un système linéaire de n équations, à n inconnues, de rang n.*

On obtient la formule :

$$x_j = \frac{1}{det(A)} det_{\varphi}(c_1, ..., c_{j-1}, b, c_{j+1}, ..., c_n)$$

Douzième partie

Matrice

Chapitre 27

Matrice et espaces vectoriel de dimension finies

27.1 Matrice

27.1.1 Définition

Définition 143 *La matrice à n lignes et p colonnes est défini par :*

$$M = [a_{i,j}]$$

avec i variant de 1 à n, et j variant de 1 à p

27.1.2 Matrice carrée

Définition 144 *Une matrice M est carrée si n=p. On défini la diagonale de A comme le n-uplet :* $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

27.1.3 Vecteur ligne

Définition 145 *On défini le vecteur ligne comme le p-uplet :*

$$l_i = (x_{i,1}, ..., x_{i,p})$$

27.1.4 Vecteur colonne

Définition 146 *On défini le vecteur colonne comme le n-uplet :*

$$l_j = (x_{1,j}, ..., x_{n,j})$$

27.1.5 Matrice carrée particulière

Soit T = $[x_{i,j}] \in M_n(K)$

Définition 147 *On dit que T est triangulaire supérieur si :*

$$T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Définition 148 *On dit que T est triangulaire inférieur si :*

$$T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Définition 149 *On dit que T est une matrice scalaire si :*

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Si λ=1, alors la matrice est la matrice unité, noté I_n

27.1.6 Matrice carrée symétrique et antisymétrique

Définition 150 *Soit S = $[x_{i,j}] \in M_n(K)$*
S est symétrique si $x_{i,j} = x_{j,i}$
S est antisymétrique si $x_{i,j} = -x_{j,i}$. Ceci implique que la diagonale de S est forcément nul dans ce cas

27.1.7 Transposition et trace

Définition 151 *La transposée de M noté ${}^tM$ est défini par :*

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

alors

$${}^tM = \begin{bmatrix} a & e & i \\ d & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{bmatrix}$$

On a :

$${}^t({}^tM) = M$$

Définition 152 *On défini la trace d'un matrice carrée comme la somme des termes de sa diagonale :*

$$Trace(A) = \sum_{i=1}^{n} x_{k,k}$$

27.1.8 Espace vectoriel des matrices

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonne.
L'addition des matrices est une addition termes à termes
$(M_{n,p}(K), +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre [O]
$(M_{n,p}(K), +, o)$ est un K espace vectoriel
Soit

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ensemble $A_{1,1}, ..., A_{n,p}$ est une base de $M_{n,p}(K)$ et dim($M_{n,p}(K)$)=n.p
$(M_n(K), +, x, o)$ est un K-algèbre de dimension n^2. Si AB=BA, alors les identités remarquables sont utilisables.

27.1.9 Transposition

Définition 153 *Soit :*

$$\varphi : M_{n,p}(K) \to M_{p,n}(K)$$

$$M \mapsto^t M$$

φ est un isomorphisme, donc c'est une application linéaire. De plus, si la matrice est une matrice carrée :

$$\varphi \text{ est symétrie de } M_n(K)$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^tM = M \Leftrightarrow M \text{ est symétrique} \\ {}^tM = -M \Leftrightarrow M \text{ est antisymétrique} \end{array}\right\} \text{Ce sont deux espaces supplémentaire}$$

27.1.10 Produit de matrice

Définition 154 *On défini le produit de matrice par :*
Soit l_1 la première ligne de la matrice A
Soit c_1 la première colonne de la matrice B
Soit a_1 le première terme de la matrice produit

$$AB = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = [ae + bf + cg + dh]$$

avec [ae+bf+cg+dh] = a_1 Le produit $l_2.c_1$ donne le terme $a_{2,1}$ Le produit est non commutatif

Cas particuliers

Si $M \in M_{n,p}(K) et [0] \in M_{p,q}(K)$ alors :

$$M \times [0] = 0$$

Soit T une matrice scalaire $\in M_{p,q}(K)$, alors :

$$M \times T = \lambda M$$

Soit I_n matrice unité d'ordre n, et $M \in M_n(K)$ alors :

$$MI_n = I_nM = M$$

27.1.11 Transposition et trace du produit

Soit A et B deux matrice $\in M_{n,p}(K)$. Alors :

$${}^t(AB) = {}^t B \times {}^t A$$

et

Trace(AB) = Trace (BA), mais généralement AB $\neq BA$

27.1.12 Matrice Carrée inversible

Définition 155 *Soit M $\in M_n(K)$. On dit que M est inversible si*

$$\exists N \in M_n(K) \text{ telque } MN = NM = I_n$$

On pose $N = M^{-1}$. On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrice carrée inversible d'ordre n. Cette ensemble est un groupe linéaire. Et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Propriété 163 *Soit (A,B)$\in (M_n(k))^2$ telque :*

$$AB = I_n$$

On obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} A \text{ est inversible et } B = A^{-1} \\ B \text{ est inversible et } A = B^{-1} \end{array}\right.$$

Matrice carrée et inverse

Voir Méthodologie.

27.1.13 Rang d'une matrice

Définition 156 *Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes. Si $A \in M_{n,p}(K)$ et qu'on note c_i son i^{eme} vecteurs colonnes, alors :*

$$rang(A) = rang(\{c_1, ..., c_p\}) = dim(Vect\{c_1, ..., c_p\})$$

et de plus :

$$0 \leq rang(A) \leq Min\{n, p\}$$

Rang de matrice particulière

Le rang d'une matrice diagonale est r, si :

$$\forall i \in \{1, ..., r\}\, \lambda_{ii} \neq 0$$

Si dans une matrice carrée d'ordre n, les termes diagonaux sont non tous nul, alors $rang(A) = n$

27.1.14 Opération élémentaire

Définition 157 *Il existe trois opérations élémentaire :*

I) *L'échange de deux colonnes : $c_i \leftrightarrow c_j$*

II) *Le produit d'une colonne par un scalaire non nuls*

III) *L'addition à une colonne d'une combinaison linéaire des autres*

Ces opérations élémentaire ne modifie par le rang de A

27.2 Matrice et espaces vectoriel de dimension finies

27.2.1 Matrice de coordonnée d'un vecteur dans une base

Définition 158 *Soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base d'un espace vectoriel de E*
Soit $u \in E$, $\exists!(x_1, ..., x_n) \in K^n$ telque :

$$u = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

On note $mat_B(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{1,n}(K)$ la matrice de de u dans B

27.2.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 159 *Si $\forall j \in \{1, ..p\}$, $u_j \in E$ et $mat_B(u) = \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ . \\ . \\ x_{n,j} \end{bmatrix}$, alors :*

$$mat_B(u_1, ..., u_p) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & . & . & x_{1,p} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{n,1} & . & . & x_{n,p} \end{bmatrix}$$

De plus, le rang de la matrice est le rang de la famille de vecteurs.

27.2.3 Matrice de passage entre deux bases

Définition 160 *On note $mat_B(B')$ la matrice de passage de B à B'. On la note P*

27.2.4 Coordonnée d'un vecteur dans deux bases

Définition 161 *On note B et B' deux bases de E.*
On note $P = mat_B(B') \in M_n(K)$ la matrice de passage de B à B'
Soit $u \in E$
On pose $X = mat_B(u)$ et $X' = mat_{B'}(u)$
On obtient la relation :

$$X = PX'$$

De plus, P est inversible, et son inverse est :

$$P^{-1} = mat_{B'}(B)$$

27.2.5 Matrice d'une application linéaire

Définition 162 *Soit $f \in L(E, F)$.*
Soit $B_E = \{e_1, ..., e_p\}$ base de E et $B_F = \{f_1, ..., f_n\}$ base de F.
Soit M la matrice de f dans B_E, B_F :

$$M = mat_{B_E,B_F}(f) = mat_{B_F}(\{f(e_1), ..., f(e_p)\})$$

Le nombre de colonne de la matrice est défini par la dimension de l'espace de départ, celui des ligne par la dimension de l'espace d'arrivé

Cas Particuliers

I) La matrice de l'application nul $\in L(E, F)$ est la matrice nul de $M_{dim(F),dim(E)}(K)$

II) La matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée d'ordre dim(E)

III) La matrice de l'identité est I_n

IV) La matrice de l'homothétie est de rapport k par rapport à I_n

27.2.6 Coordonnée de l'image d'un vecteur

Définition 163 *Soit B_E base de E, B_F base de F.*
Soit $u \in E$
Posons $M = mat_{B_E,B_F}(f)$, $X = mat_{B_E}(u)$, $Y = mat_{B_F}(u)$. Alors :

$$Y = M.X$$

De plus :

Théorème 16 *Si f est une application de E dans F telque $\exists M \in M_{n,p}$ telque $\forall u \in E$, l'égalité ci-dessus est vérifié, alors f est une application linéaire*

27.2.7 Unicité de la matrice, pour les bases fixes

Définition 164 *Soient B_E, B_F bases de E et de F, avec dim(E) = p, dim(F)=n Soit :*

$$\varphi : L(E, F) \to M_{n,p}(K)$$

$$f \to mat_{B_E,B_F}(f)$$

φ est une application linéaire. On en déduit donc que :

$$(f = g) \Leftrightarrow (mat_{B_E,B_F}(f) = mat_{B_E,B_F}(g))$$

Propriété 164 *Soit $f \in L(E,F)$, B_E, B_F bases de E et F*
Soit $A \in M_{n,p}(K)$
Soit $x \in E$. Supposons que $X = mat_{B_E}(x)$ et $Y = mat_{B_F}(f(x))$, et qu'on obtient :

$$Y = AX$$

Alors $A = mat_{B_E,B_F}(f)$

27.2.8 Matrice et opérations

Définition 165 *Soient B_E, B_F bases fixées de E et de F.*
φ est une application linéaire, c'est donc un isomorphisme. Nous avons en effet montré que φ est bijective.
On en déduit que $M_{n,p}(K)$ est de dimension finies, donc L(E,F) l'est aussi.

$$dim(L(E,F) = dim(E) \times dim(F) = dim(M_{n,p})$$

27.2.9 Composée d'application linéaire

Définition 166 *Soient E,F,G espaces vectoriel de dimension finie, et de bases respective B_E, B_F, B_G.*
Soit $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$. Alors :

$$mat_{B_E,B_G}(gof) = mat_{B_F,B_G}(g) \times mat_{B_E,B_F}(f)$$

27.2.10 Matrice inversible et isomorphisme - Endomorphisme

Définition 167 *Si f est un isomorphisme de E dans F, alors $mat_{B_E,B_F}(f)$ est inversible est :*

$$(mat_{B_E,B_F}(f))^{-1} = mat_{B_F,B_E}(f^{-1})$$

Si f est un endomorphisme, on a :

$$(mat_{B_E}(f))^n = mat_{B_E}(f^n)$$

27.2.11 Changement de bases

Définition 168 *Soit $f \in L(E,F)$. Soient $B_E, B_{E'}$ bases de E. Soient $B_F, B_{F'}$ bases de F.*
On pose :

$$\begin{cases} M = mat_{B_E,B_F}(f) \\ M' = mat_{B_{E'},B_{F'}}(f) \\ P = mat_{B_E}(B_{E'}) \\ Q = mat_{B_{F'}}(B_F) \end{cases}$$

Alors :

$$M' = Q^{-1}MP$$

ou, si f est un endomorphisme :

$$M' = P^{-1}MP$$

27.2.12 Trace d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme, A,B deux matrices d'ordre n. On sait déjà que Trace(AB)=Trace(BA) et si :

$$\begin{cases} M = mat_{B_E}(f) \\ M' = mat_{B_{E'}}(f) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} rang(M) = rang(M') = rang(f) \\ Trace(M) = Trace(M') = rang(f) \\ det(M) = det(M') = det(f) \end{cases}$$

27.2.13 Matrice semblable

Définition 169 *Soient A,B deux matrice carrée d'ordre n. On dit que A et B sont semblable si ∃E espace vectoriel, $\exists B_E, B_{E'}$ bases de E, ∃f endomorphisme de E telque :*

$$B = P^{-1}MP$$

Ce qui revient à :

$$(\textit{A et B sont semblables}) \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(K) \textit{ telque } B = P^{-1}MP)$$

27.2.14 Rang d'une application linéaire

On peut toujours ramener la matrice dans des bases $B_{E'}, B_{F'}$ de f à J_r :

$$J_r = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Donc si :
f ∈ L(E,F) tel qu'il $\exists B_{E'}, B_{F'}$ bases de E et F telque $mat_{B_{E'},B_{F'}}(f) = J_r$, alors rang(f)=r
De plus, on a :

$$({}^tP)^{-1} =^t (P^{-1})$$

On montre que ${}^tA$ et ${}^tJ_r$ sont semblable, donc le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes comme celui de ses vecteurs lignes.
Et on obtient :

$$rang({}^tA) = rang(A)$$

Chapitre 28

Déterminants

28.1 Forme n-linéaire

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

Définition 170 *Soit :*

$$\varphi : E^n \to K$$

$$(u_1, ..., u_n) \mapsto \varphi(u_1, ..., u_n)$$

φ est une forme n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Expression dans une base

Définition 171 *Soit B = $(e_1, ..., e_n)$ base de E.*
Soit $u_1, ..., u_n$ n vecteurs de E.

Notons pour $j \in \{1, ..., n\}$ $mat_B(u_j) = \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ . \\ . \\ x_{n,j} \end{bmatrix}$
Si φ est une forme n-linéaire, alors :

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = \sum_{1 \leq i_1, ..., i_n \leq n} x_{i_1,1} ... x_{i_n,n} \varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$$

28.1.1 Forme n-linéaire alterné

Définition 172 *Soit φ forme n-linéaire.*
On dit que φ est alternée si :
$\forall u_1, ..., u_n \in E^n$
$\forall i, j$ *éléments distinct de* $\{1, ..., n\}$

$$\varphi(u_1, ..., u_i, ..., u_j, ..., u_n) = -\varphi(u_1, ..., u_j, ..., u_i, ..., u_n)$$

Propriété 165 *Si φ est une forme n-linéaire alterné.*
Si $\{u_1, ..., u_n\}$ est une partie liée de E.
Alors :

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = 0$$

Expression dans une base

Soit φ forme n linéaire alterné et B base de E.

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = \sum_{1 \leq i_1, ..., i_n \leq n} x_{i_1,1} ... x_{i_n,n} \varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$$

Soit S_n l'ensemble des bijections de $\{1, ..., n\}$ dans lui même.

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma_1,1} ... x_{\sigma_n,n} \varphi(e_{\sigma_1}, ..., e_{\sigma_n})$$

Si $\sigma \in S_n$, on note $\varphi(e_{\sigma_1}, ..., e_{\sigma_n}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, ..., e_n)$
On dit que $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ, avec $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$, avec p nombre de changement effectuer pour obtenir le bon ordre de la base.
On obtient donc :

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = \left[\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma_1,1} ... x_{\sigma_n,n} \right] \varphi(e_1, ..., e_n)$$

Définition 173 *Le déterminant dans la base B est l'unique forme n-linéaire alternée φ vérifiant :*

$$\varphi(e_1, ..., e_n) = 1$$

On le note : det_B

Propriété 166 *Toutes les applications de $E \times E \times .... \times E \to K$ défini par $\forall(u_1, ..., u_n) \in E^n$:*

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = A \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} ... x_{\sigma(n),n}$$

avec A scalaire fixé, est une forme n-linéaire de alterné et $\varphi(B) = A$, avec B base de E.

Autre formulation :

Propriété 167 *L'ensemble des formes n-linéaire alternée est une droite vectorielle.*

$$Vect(det_b) = \{ \ A.det_b \ / \ A \text{ scalaire quelconque } \}$$

28.2 Déterminant dans une base B

Définition 174 *Soit B base de E.*
det_B est l'unique forme n-linéaire alternée vérifiant $det_B(B) = 1$.

$$det_B(u_1, ..., u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} ... x_{\sigma(n),n}$$

28.2.1 Déterminant dans deux bases différentes

Soit B,B' deux bases de E. $\forall u_1, ..., u_n$ vecteurs de E :

$$det_{B'}(u_1, ..., u_n) = det_{B'}(B).det_B(u_1, ..., u_n)$$

Propriété 168

$$(det_B(u_1, ..., u_n) = 0) \Leftrightarrow (\{u_1, ..., u_n\} \text{ est liée})$$

$$(det_B(u_1, ..., u_n) \neq 0) \Leftrightarrow (\{u_1, ..., u_n\} \text{ est une base})$$

Propriété 169 *Si B et B' sont deux bases :*

$$det_{B'}(B) = \frac{1}{det_B(B')}$$

Formulaire

$\rightarrow$ $det_B(B) = 1$
$\rightarrow$ $det_B(\lambda u_1, ..., \lambda u_n) = \lambda^n.det(u_1, ..., u_n)$
$\rightarrow$ $det(Ide) = 1$

28.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 175 *Soit f* $\in L(E)$
Soient B et B′ deux bases de E.

$$det_B(f(B)) = det_{B'}(f(B'))$$

Ce scalaire, indépendant du choix de la base, est appelé déterminant de f. On le note : det(f)

Propriété 170 *Si f,g sont deux endomorphisme de E :*

$$det(fog) = det(g).det(f)$$

Propriété 171 *Si* $f \in L(E)$ *:*

$$(f \text{ est bijectif}) \Leftrightarrow (det(f) \neq 0)$$

Propriété 172 *Si f est un automorphisme de E :*

$$det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)} = (det(f))^{-1}$$

28.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 176 *Soit* $A \in M_n(K)$.
Notons $c_1, ..., c_n$ *ses vecteurs colonnes, élément de* K^n.
Notons $l_1, ..., l_n$ *ses vecteurs lignes, élément de* K^n.
Soit φ *la base canonique de* K^n.

$$det(A) = det_\varphi(c_1, ..., c_n) = det_\varphi(l_1, ..., l_n)$$

Propriété 173 *Soit* $f \in L(E)$*, avec B base de E.*
Notons M = $mat_B(f)$.
On obtient :

$$det(f) = det_B(f(B)) = det(M)$$

28.4.1 Lien entre vecteurs lignes et vecteurs colonnes

Si $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} ... a_{n,\sigma(n)}$$

Propriété 174 *D'après l'égalité ci-dessus, on établie que :*

$$det({}^tA) = det(A)$$

28.4.2 Déterminant singulier

Soient (A,B) $\in M_n(K)^2$, $\lambda \in K$.

$$det(AB) = det(A).det(B)$$

$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$

$$det(A + B) = ????$$

28.4.3 Opérations élémentaires et déterminant

On peut effectuer des opérations élémentaires, tout comme pour le calcul de rang, pour calculer le déterminant d'une matrice. Ceci implique les règles suivantes :
$\rightarrow$ $c_i \leftrightarrow c_j$: Changement de signe du déterminant
$\rightarrow$ $c_i \leftarrow \lambda c_j$: λ fois le déterminant
$\rightarrow$ $c_i \leftarrow \sum\limits_{k=1,k\neq i} \lambda_k.c_k$: Aucun changement

28.4.4 Déterminant remarquable

Matrice diagonale

Soit A, matrice diagonale de diagonale : $(d_1, ..., d_n)$ On obtient :

$$det(A) = d_1 d_2 ... d_n$$

Matrice triangulaire

Soit A, matrice triangulaire de diagonale : $(t_{11}, ..., t_{nn}$ On obtient :

$$det(A) = t_{11} ... t_{nn}$$

28.5 Développement de déterminant d'une matrice

Définition 177 *Soit A = $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$.*
Soit $j \in \{1, ..., n\}$.
Le développement par rapport à la j-ème colonne donne :

$$det(A) = a_{1,j}\Delta_{1,j} + ... + a_{n,j}\Delta_{n,j}$$

Le développement par rapport à la i-ème ligne donne :

$$det(A) = a_{i,1}\Delta_{i,1} + ... + a_{i,n}\Delta_{i,n}$$

On appelle cofacteur de $a_{i,j}$ dans le développement $\Delta_{i,j}$:

$$\Delta_{i,j} = \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(j)=i} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(j-1),j-1} a_{\sigma(j+1),j+1} ... a_{\sigma(n),n}$$

28.5.1 Calcul des cofacteurs

Propriété 175 *On détermine le cofacteurs à l'aide de l'égalité suivantes :*

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \times A$$

Avec :
$\rightarrow$ *A : Déterminant de la matrice obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j.*

28.5.2 Inverse d'une matrice inversible

Soit A = $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit la comatrice de A :

$$Com(A) = [\Delta_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$$

Si A est inversible, donc det(A) $\neq$ 0, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t Com(A)$$

28.5.3 Formule de Sarrus, pour n=3

La formule de Sarrus est de reporte la 1^{er} et la 2^{nd} ligne de la matrice sous la matrice, puis de trace les diagonales et les anti-diagonales. Les diagonales sont comptées positivement, les anti-diagonales négative

Treizième partie

Annexe

Annexe A

Trigonométrie

A.1 Formules

A.1.1 Décomposition

$\rightarrow$ cos(a+b) = cos(a).cos(b) - sin(a).sin(b)

$\rightarrow$ cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)

$\rightarrow$ sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)

$\rightarrow$ sin(a-b) = sin(a).cos(b) - sin(b).cos(a)

$\rightarrow$ tan(a+b) = $\dfrac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a).tan(b)}$

$\rightarrow$ tan(a-b) = $\dfrac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a).tan(b)}$

A.1.2 Angle double

$\rightarrow$ sin(2a) = 2.sin(a).cos(a)

$\rightarrow$ cos(2a) = $2.cos^2(a) - 1$ = $1 - 2.sin^2(a)$

$\rightarrow$ tan(2a) = $\dfrac{2.tan(a)}{1 - tan^2(a)}$

A.1.3 Linéarisation

$\rightarrow$ 2.cos(a).cos(b) = cos(a+b) + cos(a-b)

$\rightarrow$ 2.sin(a).sin(b) = cos(a-b) - cos(a+b)

$\rightarrow$ 2.sin(a).cos(b) = sin(a+b) + sin(a-b)

$\rightarrow$ $cos^2(a) = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$

$\rightarrow$ $sin^2(a) = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$

A.1.4 Somme

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ cos(p) + cos (q) = $2.(cos(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2}))$

$\rightarrow$ cos(p) - cos (q) = -$2.(sin(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2}))$

$\rightarrow$ sin(p) + sin (q) = $2.(sin(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2}))$

$\rightarrow$ sin(p) - sin (q) = $2.(cos(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2}))$

A.2 Fonction inverse

A.2.1 Fonction Hyperbolique

Fonction	D_f	$D_{f'}$	f′(x)
Argch	$]1:+\infty$	]1 ;+∞[	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Argsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Argth	$]-1;1[$	$]-1;1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

A.2.2 Fonction Trigonométrique

Fonction	D_f	$D_{f'}$	f′(x)
Arccos	[-1 :1]	]-1 ;1[	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcsin	[-1 :1]	]-1 ;1[	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ arcsin(x) + arccos(x) = $\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ arctan(x) + arctan($\frac{1}{x}$) = $\pm\frac{\pi}{2}$ (dépend du signe de x)

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Table des matières