NAIL062 P&P Logic: Worksheet 2 – Semantics, properties of theories

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- rozumí pojmm sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formáln definovat a uvést píklady
- umí rozhodnout, zda je mnoina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí pevést daný výrok resp. konenou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí mnoiny model i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, dsledky, T-ekvivalence), umí pojmy formáln definovat a uvést píklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formáln definovat, uvést píklady
- umí v konkrétním pípad rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

Píklady na cviení

Problem 1. Uvete píklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s $(p \wedge q) \to \neg r$, (e) má za modely práv $\{(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)\}$.

Solution. *Napíklad: (a)* $p \vee \neg p$*, (b)* $p \wedge \neg p$*, (c)* p*, (d)* $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ *(e)* $(p \vee r) \wedge \neg q$

Problem 2. Jsou tyto mnoiny logických spojek univerzální? (a) $\{\vee, \to, \leftrightarrow\}$, (b) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR)

Solution. *(a) Ne, dokate strukturální indukcí, e kadá formule má za model* $(1, \ldots, 1)$.
(b) Ano, vyuijeme faktu, e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *je univerzální, a vyjádíme:*

- $\neg x \sim x \downarrow x$
- $x \vee y \sim \neg(x \downarrow y) \sim (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
- $x \wedge y \sim \neg(\neg x \vee \neg y) \sim \neg x \downarrow \neg y \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

Problem 3. Pevete následující výrok do CNF a DNF. Provete to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)$$

Solution. *(a) Nejprve najdeme modely výroku:* $\{(0,0,1), (1,0,0), (1,0,1)\}$*, kadý model popíeme jednou elementární konjunkcí:*

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

CNF získáme z mnoiny nemodel, kadá klauzule zakazuje jeden nemodel:

$$\{(0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

(b) $(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r) \sim \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \wedge r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$ *je DNF, CNF získáme distribucí, a dále zjednodušíme:* $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \sim (p \vee r) \wedge \neg q$

Problem 4. Mjme teorii $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \to \neg q, q \vee r\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

(a) Rozhodnte, zda je teorie T [sporná/splnitelná/kompletní].
(b) Uvete píklad výroku φ, který je [pravdivý/livý/nezávislý] v T

(c) Uvete píklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud mono neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní]. Uvete také píklad extenze T' teorie T, která není konzervativní, ani jednoduchá.
(d) Na vaich píkladech extenzí ukate, e platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/redukt model).

Solution. *Budeme potebovat znát modely:* $\mathrm{M}(T) = \{(0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$
(a) Není sporná, je splnitelná, není kompletní.
(b) V teorii T je pravdivý nap. $p \vee r$, livý $\neg q \wedge \neg r$, nezávislý $p \vee q$.
(c) Uveme píklady nebo zdvodnní neexistence:
1. *Jednoduchá:* $\{p \wedge q\}$
2. *Konzervativní:* $T_2 = \{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r, p \vee s\}$ *v jazyce* $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$
3. *Kompletní:* $\{\neg p, \neg q, r, \neg s\}$ *v jazyce* $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$
4. *Konzervativní jednoduchá: musí být ekvivalentní T, nap.* $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r\}$
5. *Kompletní jednoduchá:* $\{p, q, \neg r\}$
6. *Kompletní konzervativní: neexistuje, nekompletní teorie neme mít kompletní konzervativní extenzi (dokate si).*
7. *Není konzervativní ani jednoduchá:* $\{p \wedge q, r \vee s\}$ *v jazyce* $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$.

(d) Zkonstruujte písluné mnoiny model a ovte podmínku, ukáeme jen pro 2.:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T_2) = \{(0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$$

Vidíme, e zúením model T_2 na jazyk $\mathbb{P}$ získáme jen modely T, tedy jde o extenzi, a kadý model T lze rozíit na njaký model T_2, tedy je extenze konzervativní.

Problem 5. Dokate nebo vyvrate (nebo uvete správný vztah), e pro kadou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ platí:
(a) $T \models \varphi$, práv kdy $T \not\models \neg\varphi$
(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, práv kdy $T \models \varphi \wedge \psi$
(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, práv kdy $T \models \varphi \vee \psi$
(d) $T \models \varphi \to \psi$ a $T \models \psi \to \chi$, práv kdy $T \models \varphi \to \chi$

Solution. *Uvedeme jen správné odpovdi a protipíklady, dokate si sami (z definic).*
(a) Neplatí, nap. pro $T = p \vee q, \varphi = p$. (Je-li T bezesporná, platí $\Rightarrow$.)
(b) Platí.
(c) Neplatí, nap. pro $T = p \vee q, \varphi = p, \psi = q$. Platí $\Rightarrow$.
(d) Neplatí, nap. pro $T = \{p \to r\}, \varphi = p, \psi = q, \chi = r$. Platí $\Rightarrow$.

Dalí píklady k procviení

Problem 6. Mjme teorii $T = \{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.
(a) Uvete píklad následujícího: výrok pravdivý v T, livý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výrok.
(b) Které z následujících výrok jsou pravdivé, livé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \to r,\ \neg q \to r,\ p \vee q \vee r$$

Problem 7. Jsou následující mnoiny logických spojek univerzální? Zdvodnte.
(a) $\{\vee, \wedge, \to\}$,
(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

Problem 8. Urete mnoinu model dané formule. Vyuijte toho, e je v DNF resp. v CNF.
(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

Problem 9. Pevete do CNF a DNF obma metodami: $(\neg p \to (\neg q \to r)) \to p$

Problem 10. Najdte (co nejkratí) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj: $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, která vrací pevládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Problem 11. Stejné zadání, jako Píklad 4, ale pro teorii $T = \{(p \wedge q) \to r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

Problem 12. Dokate nebo vyvrate (nebo uvete správný vztah), e pro libovolné teorie T, S nad $\mathbb{P}$ platí:
(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Csq}(T) \subseteq \mathrm{Csq}(S)$
(b) $\mathrm{Csq}(S \cup T) = \mathrm{Csq}(S) \cup \mathrm{Csq}(T)$
(c) $\mathrm{Csq}(S \cap T) = \mathrm{Csq}(S) \cap \mathrm{Csq}(T)$

K zamylení

Problem 13. Ukate, e $\wedge$ a $\vee$ nestaí k definování vech Booleovských operátor, tj. e $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* mnoina logických spojek.

Problem 14. Uvate Booleovský operátor $\mathrm{IFTE}(p, q, r)$ definovaný jako 'if p then q else r'.
(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.
(b) Ukate, e vechny základní Booleovské operátory $(\neg, \to, \wedge, \vee, \dots)$ lze vyjádit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Problem 15. Bu $\mathbb{P}$ spoetn nekonená mnoina prvovýrok.
(a) Ukate, e ji neplatí, e kadou $K \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
(b) Uvete píklad mnoiny model K, kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Problem 16. Najdte CNF a DNF reprezentaci n-ární parity, tj. Booleovské funkce par: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, která vrací XOR vech vstupních hodnot:

$$\mathrm{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n.

Problem 17. Uvame nekonenou výrokovou teorii $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.
(a) Najdte vechny modely T.
(b) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou dsledky T?