NAIL062 V&P Logika: 10. sada příkladů – Rezoluční metoda v PL

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

Příklady na cvičení

Příklad 1. *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.* Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Příklad 2. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

(i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
(ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

(a) Vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti (P je binární, K unární relační symbol, $P(x, y)$ znamená 'ovce x porodila ovci y', $K(x)$ 'ovce x byla naklonována').
(b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
(c) Najděte rezoluční zamítnutí S, nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
(d) Má S LI-zamítnutí?

Příklad 3. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x),\ (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)),\ (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)),\ (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvisplnitelnou teorii T'.
(b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
(c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
(d) Nalezněte nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

Další příklady k procvičení

Příklad 4. Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\},\ \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\},\ \{\neg H(v, a)\},$$
$$\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\},\ \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

Příklad 5. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s\rangle$ bez rovnosti, kde j, h, q jsou konstantní symboly ('jablka/hrušky/švestky') a $x < y$ vyjadřuje, že *"ovoce y je lepší než ovoce x"*. Víme, že:

(i) Relace "být lepší" je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
(ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že *(iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.*

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce L.
(b) Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli S, která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište S v množinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S, která je nesplnitelná.
(e) Je S zamítnutelná LI-rezolucí?

Příklad 6. Buď $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, c konstantní symbol, a axiom φ vyjadřuje *"Existuje alespoň* 5 *prvků, pro které platí* $U(x)$*."*

(a) Najděte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze T.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 7. Nechť $T = \{U(x) \rightarrow U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že "existují maximálně 4 prvky".

(a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

Příklad 8. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

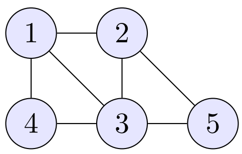
(a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
(b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 9. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.

(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T?
(b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

Příklad 10. Mějme následující graf.

(a) Najděte všechny automorfismy.
(b) Které podmnožiny množiny vrcholů V jsou definovatelné? Uveďte definující formule. *(Nápověda: Využijte (a).)*
(c) Které binární relace na V jsou definovatelné?



K zamyšlení

Příklad 11. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

(a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r+1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0?
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
(c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní?
(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spočetná struktura $\mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$?