

**Teaching goals:** After completing, the student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky,  $T$ -ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Uveďte příklad výroku v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ , který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ , (e) má za modely právě  $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ .

**Problem 2.** Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a)  $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ , (b)  $\{\downarrow\}$  kde  $\downarrow$  je Peirce arrow (NOR)

**Problem 3.** Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

**Problem 4.** Mějme teorii  $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .

- Rozhodněte, zda je teorie  $T$  [sporná/splnitelná/kompletní].
- Uveďte příklad výroku  $\varphi$ , který je [pravdivý/lživý/nezávislý] v  $T$
- Uveďte příklad extenze  $T'$  teorie  $T$  (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s  $T$ ), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní]. Uveďte také příklad extenze  $T'$  teorie  $T$ , která není konzervativní, ani jednoduchá.
- Na vašich příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/reduktů modelů).

**Problem 5.** Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  v jazyce  $\mathbb{P}$  platí:

- $T \models \varphi$ , právě když  $T \not\models \neg \varphi$
- $T \models \varphi$  a  $T \models \psi$ , právě když  $T \models \varphi \wedge \psi$
- $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ , právě když  $T \models \varphi \vee \psi$
- $T \models \varphi \rightarrow \psi$  a  $T \models \psi \rightarrow \chi$ , právě když  $T \models \varphi \rightarrow \chi$

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 6.** Mějme teorii  $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$  v jazyce  $\{p, q, r\}$ .

- (a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v  $T$ , lživý v  $T$ , nezávislý v  $T$ , splnitelný v  $T$ , a dvojice  $T$ -ekvivalentních výroků.  
 (b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v  $T$ ?  $T$ -ekvivalentní?

$$p, \neg q, \neg p \vee q, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r, p \vee q \vee r$$

**Problem 7.** Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- (a)  $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ,  
 (b)  $\{\uparrow\}$  kde  $\uparrow$  je Sheffer stroke (NAND),

**Problem 8.** Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

- (a)  $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$   
 (b)  $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

**Problem 9.** Převeďte do CNF a DNF oběma metodami:  $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$

**Problem 10.** Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj:  $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ , která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

**Problem 11.** Stejně zadání, jako Příklad ??, ale pro teorii  $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .

**Problem 12.** Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie  $T$ ,  $S$  nad  $\mathbb{P}$  platí:

- (a)  $S \subseteq T \Rightarrow \text{Csq}(T) \subseteq \text{Csq}(S)$   
 (b)  $\text{Csq}(S \cup T) = \text{Csq}(S) \cup \text{Csq}(T)$   
 (c)  $\text{Csq}(S \cap T) = \text{Csq}(S) \cap \text{Csq}(T)$

#### FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 13.** Ukažte, že  $\wedge$  a  $\vee$  nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že  $\{\wedge, \vee\}$  není *univerzální* množina logických spojek.

**Problem 14.** Uvažte Booleovský operátor IFTE( $p, q, r$ ) definovaný jako ‘if  $p$  then  $q$  else  $r$ ’.

- (a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.  
 (b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ( $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$ ) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

**Problem 15.** Buď  $\mathbb{P}$  spočetně nekonečná množina prvovýroků.

- (a) Ukažte, že již neplatí, že každou  $K \subseteq \mathbb{M}_{\mathbb{P}}$  lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.  
 (b) Uveďte příklad množiny modelů  $K$ , kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

**Problem 16.** Najděte CNF a DNF reprezentaci  $n$ -ární parity, tj. Booleovské funkce par:  $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\text{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty  $n$ .

**Problem 17.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$  nad  $\text{var}(T)$ .

- (a) Najděte všechny modely  $T$ .  
 (b) Které výroky ve tvaru  $p_i \rightarrow p_j$  jsou důsledky  $T$ ?