

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky, T -ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$, (e) má za modely právě $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

Solution. *Například: (a) $p \vee \neg p$, (b) $p \wedge \neg p$, (c) p , (d) $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ (e) $(p \vee r) \wedge \neg q$*

Problem 2. Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, (b) $\{\downarrow\}$ kde \downarrow je Peirce arrow (NOR)

Solution. (a) *Ne, dokažte strukturální indukci, že každá formule má za model $(1, \dots, 1)$.*
 (b) *Ano, využijeme faktu, že $\{\neg, \vee, \wedge\}$ je univerzální, a vyjádříme:*

- $\neg x \sim x \downarrow x$
- $x \vee y \sim \neg(x \downarrow y) \sim (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
- $x \wedge y \sim \neg(\neg x \vee \neg y) \sim \neg x \downarrow \neg y \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

Problem 3. Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

Solution. (a) *Nejprve najdeme modely výroku: $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$, každý model popíšeme jednou elementární konjunkcí:*

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

CNF získáme z množiny nemodelů, každá klauzule zakazuje jeden nemodel:

$$\{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

(b) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \sim \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \wedge r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$ je DNF, CNF získáme distribucí, a dále zjednodušíme: $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \sim (p \vee r) \wedge \neg q$

Problem 4. Mějme teorii $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

- Rozhodněte, zda je teorie T [sporná/splnitelná/kompletní].
- Uveďte příklad výroku φ , který je [pravdivý/lživý/nezávislý] v T

- (c) Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní]. Uveďte také příklad extenze T' teorie T , která není konzervativní, ani jednoduchá.
- (d) Na vašich příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/reduktů modelů).

Solution. Budeme potřebovat znát modely: $M(T) = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(a) *Není sporná, je splnitelná, není kompletní.*

(b) *V teorii T je pravdivý např. $p \vee r$, lživý $\neg q \wedge \neg r$, nezávislý $p \vee q$.*

(c) *Uveďme příklady nebo zdůvodnění neexistence:*

1. *Jednoduchá: $\{p \wedge q\}$*

2. *Konzervativní: $T_2 = \{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r, p \vee s\}$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$*

3. *Kompletní: $\{\neg p, \neg q, r, \neg s\}$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$*

4. *Konzervativní jednoduchá: musí být ekvivalentní T , např. $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r\}$*

5. *Kompletní jednoduchá: $\{p, q, \neg r\}$*

6. *Kompletní konzervativní: neexistuje, nekompletní teorie nemůže mít kompletní konzervativní extenzi (dokažte si).*

7. *Není konzervativní ani jednoduchá: $\{p \wedge q, r \vee s\}$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$.*

(d) *Zkonstruuje příslušné množiny modelů a ověří podmínku, ukážeme jen pro 2.:*

$$M_{\mathbb{P}'}(T_2) = \{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

Vidíme, že zúžením modelů T_2 na jazyk \mathbb{P} získáme jen modely T , tedy jde o extenzi, a každý model T lze rozšířit na nějaký model T_2 , tedy je extenze konzervativní.

Problem 5. Dokažte nebo vyvratte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce \mathbb{P} platí:

(a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg \varphi$

(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$

(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$

(d) $T \models \varphi \rightarrow \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

Solution. Uvedeme jen správné odpovědi a protipříklady, dokažte si sami (z definic).

(a) *Neplatí, např. pro $T = p \vee q, \varphi = p$. (Je-li T bezesporná, platí \Rightarrow .)*

(b) *Platí.*

(c) *Neplatí, např. pro $T = p \vee q, \varphi = p, \psi = q$. Platí \Rightarrow .*

(d) *Neplatí, např. pro $T = \{p \rightarrow r\}, \varphi = p, \psi = q, \chi = r$. Platí \Rightarrow .*

EXTRA PRACTICE

Problem 6. Mějme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T , lživý v T , nezávislý v T , splnitelný v T , a dvojice T -ekvivalentních výroků.

(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T ? T -ekvivalentní?

$$p, \neg q, \neg p \vee q, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r, p \vee q \vee r$$

Problem 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

(a) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$,

(b) $\{\uparrow\}$ kde \uparrow je Sheffer stroke (NAND),

Problem 8. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$

(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

Problem 9. Převeďte do CNF a DNF oběma metodami: $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$

Problem 10. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj: $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Problem 11. Stejně zadání, jako Příklad ??, ale pro teorii $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

Problem 12. Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T, S nad \mathbb{P} platí:

(a) $S \subseteq T \Rightarrow \text{Csq}(T) \subseteq \text{Csq}(S)$

(b) $\text{Csq}(S \cup T) = \text{Csq}(S) \cup \text{Csq}(T)$

(c) $\text{Csq}(S \cap T) = \text{Csq}(S) \cap \text{Csq}(T)$

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 13. Ukažte, že \wedge a \vee nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Problem 14. Uvažte Booleovský operátor IFTE(p, q, r) definovaný jako ‘if p then q else r ’.

(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.

(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ($\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Problem 15. Buď \mathbb{P} spočetně nekonečná množina prvovýroků.

(a) Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathbb{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.

(b) Uveďte příklad množiny modelů K , kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Problem 16. Najděte CNF a DNF reprezentaci n -ární parity, tj. Booleovské funkce $\text{par}: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\text{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n .

Problem 17. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\text{var}(T)$.

(a) Najděte všechny modely T .

(b) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledky T ?