

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalence struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladě
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Jsou následující formulky variantami formulky  $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$ ?

- $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
- $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
- $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

**Příklad 2.** Mějme strukturu  $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \triangleright^A)$  v jazyce s jediným binárním relačním symbolem  $\triangleright$ , kde  $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$ .

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v  $\mathcal{A}$ ?

II. Pro každou z nich najděte strukturu  $\mathcal{B}$  (existuje-li) takovou, že  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

- $x \triangleright y$
- $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$
- $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
- $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
- $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

**Příklad 3.** Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu  $\mathcal{A}$ , formulky  $\varphi$ , a sentenci  $\psi$ ,

- $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
- $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí to i pro každou formulku  $\psi$  s volnou proměnnou  $x$ ? A pro každou formulku  $\psi$  ve které  $x$  není volná?

**Příklad 4.** Rozhodněte, zda je  $T$  (v jazyce  $L = \langle U, f \rangle$  s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

- $T = \{U(f(x)), \neg x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- $T = \{U(f(x)), \neg x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$

### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 5.** Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a)  $(\exists x)(\forall y)P(y, x) \vee (y = 0)$
- (b)  $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
- (c)  $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

**Příklad 6.** Označme  $\varphi$  formuli  $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$ . Které z následujících termů jsou substituovatelné do  $\varphi$ ?

- (a) term  $z$  za proměnnou  $x$ , term  $y$  za proměnnou  $x$ ,
- (b) term  $z$  za proměnnou  $y$ , term  $g(f(y), w)$  za proměnnou  $y$ ,
- (c) term  $x$  za proměnnou  $z$ , term  $y$  za proměnnou  $z$ ,

**Příklad 7.** Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

- (a)  $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
- (b)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
- (c)  $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
- (d)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
- (e)  $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

**Příklad 8.** Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli  $\varphi$ . Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

- (a)  $\varphi \models (\forall x)\varphi$
- (b)  $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
- (c)  $\varphi \models (\exists x)\varphi$
- (d)  $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Buď  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup  $T$  sestává z těchto axiomů:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ 0 + x &= x = x + 0 \\ x + (-x) &= 0 = (-x) + x \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v  $T$ . Zdůvodněte.

- (a)  $x + y = y + x$
- (b)  $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c)  $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d)  $-(x + y) = (-y) + (-x)$