NAIL062 P&P Logic: Worksheet 4 – The tableaux method

Cíle výuky: Po absolvování cvieni student

- zná potebné pojmy z tablo metody (poloka, tablo, tablo dkaz/zamítnutí, dokonená/sporná vtev, kanonický model), umí je formáln definovat, uvést píklady
- zná vechna atomická tabla, a umí vytvoit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokonené tablo pro danou poloku z dané (i nekonené) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokonenou bezespornou vtev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná vtu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

Píklady na cvieni

Problem 1. Aladin nael v jeskyni dv truhly, A a B. Ví, e kadá truhla obsahuje bu poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespo jedna z tchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, e bu jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba livé.

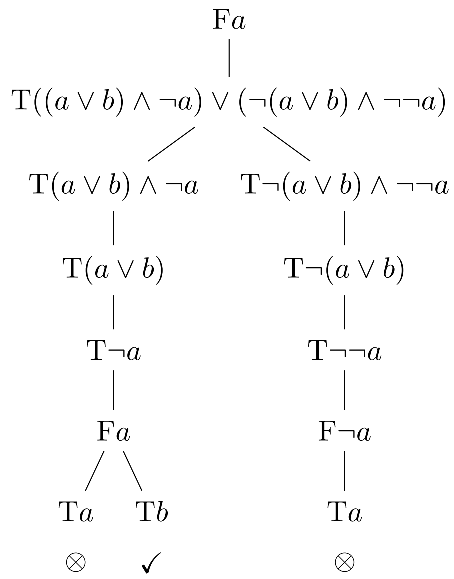
(a) Vyjádete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodn zvolenou mnoinou výrokových promnných $\mathbb{P}$. (Vysvtlete význam jednotlivých výrokových promnných v $\mathbb{P}$.)
(b) Pokuste se sestrojit tablo dkazy, z teorie T, výrok o významu "Poklad je v truhle A" a "Poklad je v truhle B".
(c) Je-li nkteré z tchto dokonených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro nkterou z jeho bezesporných vtví.
(d) Jaký závr z toho meme uinit?

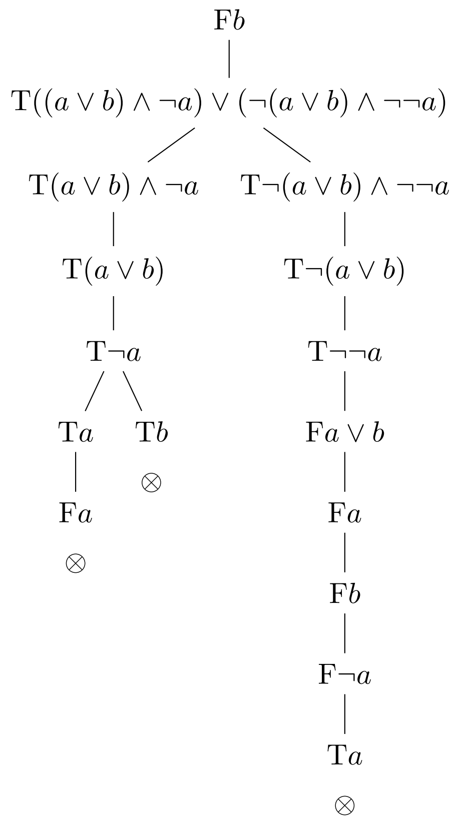
Solution. *(a) Z kontextu poznáme, e 'bu, ... nebo' je exkluzivní (truhla neme obsahovat zárove poklad i smrtonosnou past). Zvolíme jazyk $\mathbb{P} = \{a, b\}$, kde a znamená 'truhla A obsahuje poklad', podobn pro b. Nápisy na truhlách formalizujeme jako výroky $a \vee b, \neg a$. Teorie T vyjaduje, e jsou oba pravdivé nebo oba livé:*

$$T = \{((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a)\}$$

(Alternativn bychom mohli formalizovat jako $T = \{(a \vee b) \leftrightarrow \neg a\}$, tj. nahlédnout, e "oba pravdivé nebo oba livé" znamená ekvivalenci. Tabla by byla trochu mení, ale jinak podobná—vyzkouejte si!)

(b) Tabla budou mít v koeni poloky Fa *resp.* Fb *(dokazujeme 'sporem'):*





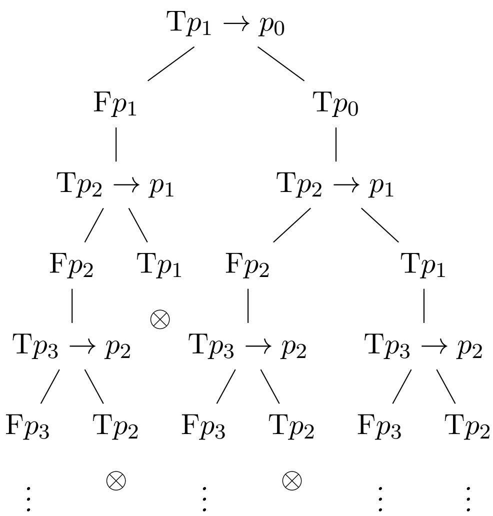
(c) *První tablo je dokonené, ale bezesporné. Bezesporná vtev obsahuje poloky* Fa, Tb, *kanonický model pro tuto vtev je* $v = (0, 1)$. *Je to model teorie* T *(vechny jeho vtve jsou sporné), ve kterém v truhle* A *není poklad, tedy protipíklad k tvrzení, e v truhle* A *je poklad.*

(d) *Druhé tablo je sporné, jde tedy o tablo dkaz a víme, e v truhle* B *je poklad.*

Problem 2. Uvame nekonenou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najdte vechny modely T. Je kadý model T kanonickým modelem pro nkterou z vtví tohoto tabla?

Solution. *Sestrojíme tablo z teorie T, do koene dáme poloku $\mathrm{T}\alpha_0$, kde α_0 je první axiom T. Ukáeme jen zaátek konstrukce, potebujete-li, zkonstruujte více.*

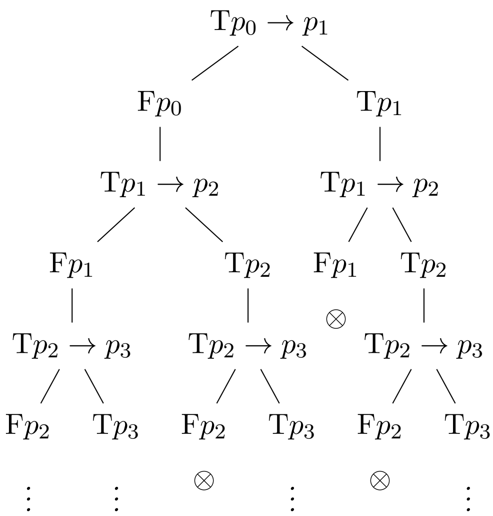
Nejprve vyeme (a):



Kadý model T se shoduje s nkterou (bezespornou) vtví tohoto (dokoneného) tabla. (Zde dokonce platí, e kadý model T je kanonickým *modelem pro nkterou z vtví. Obecn to ale neplatí.) Modely jsou:* $\mathrm{M}(T) = \{v_{<k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{all}\}$ *kde* $v_{all}(p_i) = 1$ *pro vechna* $i \in \mathbb{N}$, *a*

$$v_{<k}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k, \\ 0 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

Nyní (b):



Opt není tké nahlédnout, e kadý model se shoduje s nkterou z vtví. Máme $\mathrm{M}(T) = \{v_{none}\} \cap \{v_{\geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ *kde* $v_{none}(p_i) = 0$ *pro vechna* $i \in \mathbb{N}$, *a*

$$v_{\geq k}(p_i) = \begin{cases} 0 & \textit{if } i < k, \\ 1 & \textit{if } i \geq k. \end{cases}$$

Problem 3. Navrhnte vhodná atomická tabla pro logickou spojku $\oplus$ (XOR) a ukate, e souhlasí-li model s koenem vaich atomických tabel, souhlasí i s nkterou vtví.

Solution. *Potebujeme dv atomická tabla, pro poloky tvaru* $\mathrm{T}\varphi \oplus \psi$ *a* $\mathrm{F}\varphi \oplus \psi$. *Mohou vypadat napíklad následovn, podmínku si ovte sami (snadno sémanticky):*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{T}\varphi \oplus \psi & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & & \mathrm{F}\varphi \\ | & & | \\ \mathrm{F}\psi & & \mathrm{T}\psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \mathrm{F}\varphi \oplus \psi & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & & \mathrm{F}\varphi \\ | & & | \\ \mathrm{T}\psi & & \mathrm{F}\psi \end{array}$$

Problem 4. Pomocí vty o kompaktnosti ukate, e kadé spoetné ástené uspoádání lze rozíit na úplné (lineární) uspoádání.

Solution. *Pro konená ástená uspoádání se dokáe snadno (podobn jako topologické uspoádání acyklického orientovaného grafu).*

Mjme spoetn nekonenou ásten uspoádanou mnoinu $\langle X; \leq^X \rangle$. *Sestrojíme výrokovou teorii* T *takovou, aby její modely popisovaly lineární uspoádání na* X *roziující* $\leq^X$. *Bude sestávat z následujících mnoin výrok:*

- p_{xx} *pro vechna* $x \in X$ *(reflexivita)*
- $p_{xy} \to \neg p_{yx}$ *pro vechna* $x \neq y \in X$ *(antisymetrie)*
- $p_{xy} \wedge p_{yz} \to p_{xz}$ *pro vechna* $x, y, z \in X$ *(tranzitivita)*
- $p_{xy} \vee p_{yx}$ *pro vechna* $x, y \in X$ *(linearita)*
- p_{xy} *pro vechna* x, y *taková, e* $x \leq^X y$ *(jde o rozíení* $\leq^X$*)*

(Reflexivitu lze vynechat, plyne u z toho, e jde o rozíení reflexivní relace $\leq^X$*.)*

Dokazujme: $\langle X; \leq^X \rangle$ *má lineární rozíení, práv kdy* T *má model, to je z vty o kompaktnosti práv kdy kadá konená ást* T *má model. Vezmme libovolnou konenou* $T' \subseteq T$. *Staí tedy ukázat, e* T' *má model. Oznąme jako* X' *mnoinu vech* $x \in X$, o kterých mluví T', *tj.:*

$$X' = \{x \in X \mid p_{xy} \in \mathrm{Var}(T') \textit{ nebo } p_{yx} \in \mathrm{Var}(T') \textit{ pro njaké } y \in X\}$$

Protoe T' *je konená, je i* X' *konená mnoina. Bu* $\leq^{X'}$ *restrikce* $\leq^X$ *na mnoinu* X', *neboli* $\leq^{X'} = \leq^X \cap (X' \times X')$. *Toto konené ástené uspoádání lze rozíit na lineární uspoádání* $\leq_L^{X'}$, *co nám dává model teorie* T' *(kde* $v(p_{xy}) = 1$ *práv kdy* $x \leq_L^{X'} y$*).*

Dalí píklady k procviení

Problem 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, pi výslechu bylo zjitno následující:

(i) Alespo jeden z vyslýchaných íká pravdu a alespo jeden le.
(ii) Adam íká: "Barbora nebo Cyril lou"
(iii) Barbora íká: "Cyril le"
(iv) Cyril íká: "Adam nebo Barbora lou"

(a) Zapite tvrzení (i) a (iv) jako výroky φ_1 a φ_4 nad mnoinou prvovýrok $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, piem a, b, c znamená (po ad), e *“Adam/Barbora/Cyril íká pravdu”*.
(b) Pomocí tablo metody dokate, e z teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ plyne, e Adam íká pravdu.
(c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdvodnte.

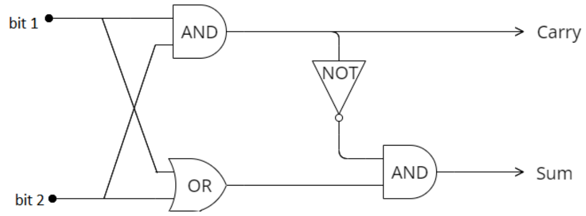
Problem 6. Pomocí tablo metody dokate, e následující výroky jsou tautologie:
(a) $(p \to (q \to q))$
(b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Problem 7. Pomocí tablo metody dokate nebo najdte protipíklad ve form *kanonického* modelu pro bezespornou vtev.
(a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$
(b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$
(c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$

Problem 8. Pomocí tablo metody urete vechny modely následujících teorií:
(a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)\}$
(b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
(c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$

Problem 9. Navrhnte vhodná atomická tabla a ukate, e souhlasí-li model s koenem vaich atomických tabel, souhlasí i s nkterou vtví:
- pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR),
- pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND),
- pro $\oplus$ (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Problem 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvma výstupními bity (carry, sum) znázornný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétn, vyjádete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové promnné znamenají po ad “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují promnné c, s.
(b) Dokate tablo metodou, e $T \models c \to \neg s$.

Problem 11. Pomocí vty o kompaktnosti dokate, e kadý spoetný rovinný graf je obarvitelný tymi barvami. Mete vyuít Vtu o tyech barvách (pro konené grafy).

K zamylení

Problem 12. Dokate pímo (transformací tabel) *vtu o dedukci*, tj. e pro kadou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \to \psi \text{ práv kdy } T, \varphi \vdash \psi$$

Problem 13. Mjme dv neprázdné teorie A, B v tém jazyce. Nech platí, e kadý model teorie A spluje alespo jeden axiom teorie B. Ukate, e existují konené mnoiny axiom $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, e $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \to \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$ je tautologie.