

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

#### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

- $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
- $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
- $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

**Příklad 2.** Převeďte na ekvivalentní CNF formuli, запиšte v množinové reprezentaci.

- $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$
- $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

**Příklad 3.** Necht  $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii  $T'$  ekvivalentní s  $T$ . Převeďte  $T'$  do CNF a výslednou formuli  $S$  запиšte v množinové reprezentaci.

**Příklad 4.** Necht  $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle R \rangle$  s rovností, kde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (\exists y)R(y, x) \\ \varphi_2 &= (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))\end{aligned}$$

- Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii  $T'$  (případně v širším jazyce  $L'$ ) ekvivalentní s  $T$ .
- Bud  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde  $(n, m) \in R^{\mathcal{A}}$  právě když  $n$  dělí  $m$ . Nalezněte expanzi  $\mathcal{A}'$   $L$ -struktury  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L'$  takovou, že  $\mathcal{A}' \models T'$ . (Množina všech přirozených čísel  $\mathbb{N}$  obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

**Příklad 5.** Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nespílitelnou konjunktci základních instancí jejích axiomů ( $c, d$  jsou konstantní symboly v daném jazyce).

- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Teorie těles  $T$  jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  obsahuje jeden axiom  $\varphi$ , který není otevřený:  $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$ . Víme, že  $T \models 0 \cdot y = 0$  a  $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$ .

- Najděte Skolemovu variantu  $\varphi_S$  formule  $\varphi$  s novým funkčním symbolem  $f$ .
- Uvažme teorii  $T'$  vzniklou z  $T$  nahrazením  $\varphi$  za  $\varphi_S$ . Platí  $\varphi$  v  $T'$ ?
- Lze každý model  $T$  jednoznačně rozšířit na model  $T'$ ?

Nyní uvažme formuli  $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$ .

- (d) Platí v  $T$  axiomy existence a jednoznačnosti pro  $\psi(x, y)$  a proměnnou  $y$ ?
- (e) Sestrojte extenzi  $T''$  teorie  $T$  o definici symbolu  $f$  formulí  $\psi$ .
- (f) Je  $T''$  ekvivalentní teorii  $T'$ ?
- (g) Najděte  $L$ -formuli, která je v  $T''$ -ekvivalentní s formulí:  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

**Příklad 7.** Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: “*Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.*”. Sestrojte příslušnou CNF formuli  $S$ , a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

#### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 8.** Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:

- (a)  $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- (b)  $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$