Vzorový zápočtový test: predikátová logika

Časový limit: 45 minut. Celkem bodů: 100.

1. Víme, že:

   (i) Aristoteles je Řek, César je Říman a Didó je Kartáginka.
   (ii) Žádný Řek není Říman.
   (iii) Žádný Kartáginec není Řek.
   (iv) V Kartágu se narodili pouze Kartáginci.

   Pomocí rezoluce chceme dokázat, že:

   (v) Existuje někdo, kdo se nenarodil v Kartágu a není to Říman.

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete <u>sentencemi</u> $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle R, M, K, N, a, c, d \rangle$ bez rovnosti, kde R, M, K, N jsou unární relační symboly a $R(x), M(x), K(x)$ resp. $N(x)$ znamenají (po řadě) "x je Řek / Říman / Kartágin[ec/ka]" resp. "x se narodil v Kartágu", a a, c, d jsou konstantní symboly označující Aristotela, Césara, Didó. *(15b)*

   (b) Pomocí skolemizace nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$. Převeďte T do CNF a napište ji v množinové reprezentaci. *(10b)*

   (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(20b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)(P(x) \to Q(x)),\ (\exists x)(\neg R(x) \to \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(P(x) \to R(x))$.

   (a) Zkonstruujte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(25b)*

   (b) Je φ pravdivá v T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte všechny odpovědi. *(10b)*

   (c) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Uveďte příklad nebo zdůvodněte, proč ne. *(10b)*

3. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \mathrm{abs}^A \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle \mathrm{abs} \rangle$ s rovností, kde abs je unární funkční symbol a abs^A je funkce absolutní hodnoty v $\mathbb{Z}$. Najděte příklad netriviální (t.j. jiné než $\emptyset$ a $\mathbb{Z}$) množiny definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte definující formuli. (10 bodů)