

# Šestá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

## Program

- sémantika predikátové logiky
- vlastnosti teorií
- podstruktura, expanze, redukt

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 6.4–6.6 z Kapitoly 6

## 6.4 Sémantika

---

- modely jsou struktury dané signatury,

- **modely jsou struktury** dané signatury,
- formule **platí** ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,

- **modely jsou struktury** dané signatury,
- formule **platí** ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- **hodnoty termů** (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),

- **modely jsou struktury** dané signatury,
- formule **platí** ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- **hodnoty termů** (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme **pravdivostní hodnoty atomických formulí**: je výsledná  $n$ -tice v relaci (interpretující daný relační symbol)?

- **modely jsou struktury** dané signatury,
- formule **platí** ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- **hodnoty termů** (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme **pravdivostní hodnoty atomických formulí**: je výsledná  $n$ -tice v relaci (interpretující daný relační symbol)?
- hodnoty složených formulí vyhodnocujeme také podle jejich stromu, přičemž  $(\forall x)$  hraje roli 'konjunkce přes všechny prvky' a  $(\exists y)$  hraje roli 'disjunkce přes všechny prvky' z domény struktury





# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ .

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů  $M_L$ ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů  $M_L$ ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  patří:

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů  $M_L$ ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  patří:

- částečně uspořádané množiny  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$ ,  $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$

# Modely jazyka

Model jazyka  $L$ , nebo také  $L$ -struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . Třidu všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů  $M_L$ ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  patří:

- částečně uspořádané množiny  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$ ,  $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf  $G = \langle V, E \rangle$ , typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy teorie uspořádání



# Modely jazyka

**Model jazyka**  $L$ , nebo také  **$L$ -struktura**, je libovolná struktura v signatuře jazyka  $L$ . **Třidu** všech modelů jazyka označíme  $M_L$ .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč **třída** a ne **množina** všech modelů  $M_L$ ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je '**soubor**' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v **jazyce teorie množin**)

Mezi **modely jazyka uspořádání**  $L = \langle \leq \rangle$  patří:

- částečně uspořádané množiny  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$ ,  $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf  $G = \langle V, E \rangle$ , typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy **teorie uspořádání**
- $\langle \mathbb{C}, R^{\mathbb{C}} \rangle$  kde  $(z_1, z_2) \in R^{\mathbb{C}}$  právě když  $|z_1| = |z_2|$  (není č. usp.)

## Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

## Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

**Ohodnocení proměnných** v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a
- je-li  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  složený term, kde  $f \in \mathcal{F}$ , potom:

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a
- je-li  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  složený term, kde  $f \in \mathcal{F}$ , potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$



# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

Ohodnocení proměnných v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a
- je-li  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  složený term, kde  $f \in \mathcal{F}$ , potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v  $t$

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

**Ohodnocení proměnných** v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

**Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$** , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a
- je-li  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  složený term, kde  $f \in \mathcal{F}$ , potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v  $t$
- obecně, term  $t$  reprezentuje **termovou funkci**  $f_t^{\mathcal{A}}: A^k \rightarrow A$ , kde  $k$  je počet proměnných v  $t$

# Hodnota termu

Mějme term  $t$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $L$ -strukturu  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$ .

**Ohodnocení proměnných** v množině  $A$  je lib. funkce  $e : \text{Var} \rightarrow A$ .

**Hodnota termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$** , značíme  $t^{\mathcal{A}}[e]$ , je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$  pro proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$  pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$ , a
- je-li  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  složený term, kde  $f \in \mathcal{F}$ , potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v  $t$
- obecně, term  $t$  reprezentuje **termovou funkci**  $f_t^{\mathcal{A}}: A^k \rightarrow A$ , kde  $k$  je počet proměnných v  $t$
- speciálně, hodnota konstantního termu na ohodnocení nezávisí, konstantní termy reprezentují konstantní funkce

## Hodnota termu: příklady

## Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu  $t = -(x \vee \perp) \wedge y$  v Booleově algebře

$\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})}$  při ohodnocení  $e$  ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

## Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu  $t = -(x \vee \perp) \wedge y$  v Booleově algebře

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$  při ohodnocení  $e$  ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

## Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu  $t = -(x \vee \perp) \wedge y$  v Booleově algebře

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$  při ohodnocení  $e$  ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu  $x + 1$  ve struktuře  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$  jazyka

$L = \langle +, 1 \rangle$  při ohodnocení  $e$  ve kterém  $e(x) = 2$

## Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu  $t = -(x \vee \perp) \wedge y$  v Booleově algebře

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$  při ohodnocení  $e$  ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu  $x + 1$  ve struktuře  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$  jazyka

$L = \langle +, 1 \rangle$  při ohodnocení  $e$  ve kterém  $e(x) = 2$

$$(x + 1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$$



# Pravdivostní hodnota formule

## Pravdivostní hodnota formule

Bud'  $\varphi$  v jazyce  $L$ ,  $\mathcal{A} \in M_L$ ,  $e : \text{Var} \rightarrow A$  ohodnocení proměnných.

Pravdivostní hodnota  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ ,  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ :

## Pravdivostní hodnota formule

Bud'  $\varphi$  v jazyce  $L$ ,  $\mathcal{A} \in M_L$ ,  $e : \text{Var} \rightarrow A$  ohodnocení proměnných.

Pravdivostní hodnota  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ ,  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ :

- pro atomickou formuli  $R(t_1, \dots, t_n)$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

## Pravdivostní hodnota formule

Bud'  $\varphi$  v jazyce  $L$ ,  $\mathcal{A} \in M_L$ ,  $e : \text{Var} \rightarrow A$  ohodnocení proměnných.

**Pravdivostní hodnota**  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ ,  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ :

- pro atomickou formuli  $R(t_1, \dots, t_n)$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formuli tvaru  $(\neg\varphi)$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

# Pravdivostní hodnota formule

Bud'  $\varphi$  v jazyce  $L$ ,  $\mathcal{A} \in M_L$ ,  $e : \text{Var} \rightarrow A$  ohodnocení proměnných.

**Pravdivostní hodnota**  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$ ,  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ :

- pro atomickou formulí  $R(t_1, \dots, t_n)$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formulí tvaru  $(\neg\varphi)$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

- pro formulí tvaru  $(\varphi \square \psi)$  kde  $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi \square \psi)[e] = f_{\square}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru  $(Qx)\varphi$  kde  $Q \in \{\forall, \exists\}$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru  $(Qx)\varphi$  kde  $Q \in \{\forall, \exists\}$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde  $e(x/a)$  je ohodnocení získané z  $e$  změnou  $e(x)$  na  $a$



## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru  $(Qx)\varphi$  kde  $Q \in \{\forall, \exists\}$ :

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde  $e(x/a)$  je ohodnocení získané z  $e$  změnou  $e(x)$  na  $a$

**Pozorování:** Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.  
Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru  $(Qx)\varphi$  kde  $Q \in \{\forall, \exists\}$ :

$$\text{PH}^A((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^A((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

kde  $e(x/a)$  je ohodnocení získané z  $e$  změnou  $e(x)$  na  $a$

**Pozorování:** Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.  
Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- tedy v ohodnocení  $e$  nastavíme hodnotu proměnné  $x$  postupně na všechny prvky  $a \in A$  a požadujeme, aby PH byla jedna vždy (v případě  $\forall$ ) nebo alespoň jednou (v případě  $\exists$ )

## Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru  $(Qx)\varphi$  kde  $Q \in \{\forall, \exists\}$ :

$$\text{PH}^A((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^A((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

kde  $e(x/a)$  je ohodnocení získané z  $e$  změnou  $e(x)$  na  $a$

**Pozorování:** Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.  
Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- tedy v ohodnocení  $e$  nastavíme hodnotu proměnné  $x$  postupně na všechny prvky  $a \in A$  a požadujeme, aby PH byla jedna vždy (v případě  $\forall$ ) nebo alespoň jednou (v případě  $\exists$ )
- speciálně,  $\text{PH}^A(t_1 = t_2)[e] = 1 \Leftrightarrow (t_1^A[e], t_2^A[e]) \in =^A$  (**identita** na  $A$ ), tj.  $t_1^A[e] = t_2^A[e]$  (je to stejný prvek  $A$ )

Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$  právě když  $e(x) \in (0, 1]$

Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$  právě když  $e(x) \in (0, 1]$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$  právě když  $e(y) = 0$

Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$  právě když  $e(x) \in (0, 1]$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$  právě když  $e(y) = 0$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$  pro každé ohodnocení  $e$  (je to sentence)

Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0)))[e] = 1$  právě když  $e(x) \in (0, 1]$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$  právě když  $e(y) = 0$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$  pro každé ohodnocení  $e$  (je to sentence)

Ale pro strukturu  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$  máme:



Vezměme si uspořádané těleso  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$  právě když  $e(x) \in (0, 1]$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$  právě když  $e(y) = 0$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$  pro každé ohodnocení  $e$  (je to sentence)

Ale pro strukturu  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$  máme:

- $\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 0$

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$ ,  $\varphi$  **neplatí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnoc.**  $e$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$ ,  $\varphi$  **neplatí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnoc.**  $e$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\varphi$  je **pravdivá (platí)** v  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi$ , pokud platí při každém ohodnocení  $e : \text{Var} \rightarrow A$

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$ ,  $\varphi$  **neplatí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnoc.**  $e$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\varphi$  je **pravdivá (platí)** v  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi$ , pokud platí při každém ohodnocení  $e : \text{Var} \rightarrow A$
- $\varphi$  je **lživá** v  $\mathcal{A}$ , pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ )

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$ ,  $\varphi$  **neplatí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnoc.**  $e$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\varphi$  je **pravdivá** (**platí**) v  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi$ , pokud platí při každém ohodnocení  $e : \text{Var} \rightarrow A$
- $\varphi$  je **lživá** v  $\mathcal{A}$ , pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ )
- pozor, **lživá** není totéž, co **není pravdivá** (**neplatí**)!  
(je to pravda jen pro sentence)

Mějme formuli  $\varphi$ , strukturu  $\mathcal{A}$  (ve stejném jazyce), a ohodnocení  $e$ .

- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ ,  $\varphi$  **platí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnocení**  $e$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$ ,  $\varphi$  **neplatí** v  $\mathcal{A}$  **při ohodnoc.**  $e$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\varphi$  je **pravdivá** (**platí**) v  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi$ , pokud platí při každém ohodnocení  $e : \text{Var} \rightarrow A$
- $\varphi$  je **lživá** v  $\mathcal{A}$ , pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ )
- pozor, **lživá** není totéž, co **není pravdivá** (**neplatí**)!  
(je to pravda jen pro sentence)
- **platnost** je klíčový pojem sémantiky a celé logiky



## Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře při ohodnocení

- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  a  $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  nebo  $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$  právě když platí: jestliže  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  potom  $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$  právě když platí:  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$  pro každé  $a \in A$
- $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$  pro nějaké  $a \in A$
- je-li term  $t$  substituovatelný za proměnnou  $x$  do  $\varphi$ , potom:  
 $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$  pro  $a = t^{\mathcal{A}}[e]$
- je-li  $\psi$  varianta  $\varphi$ , potom  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \psi[e]$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

## Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře

- pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$ , potom  $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$ ; je-li  $\varphi$  sentence, platí i opačná implikace
- $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$  a  $\mathcal{A} \models \psi$
- pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  nebo  $\mathcal{A} \models \psi$ , potom  $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$ ; je-li  $\varphi$  sentence, platí i opačná implikace.
- $\mathcal{A} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
- speciálně,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když v  $\mathcal{A}$  platí její **generální uzávěr**, tj. sentence  $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

## 6.5 Vlastnosti teorií

---

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  a  $\varphi$   $L$ -formule, potom  $\varphi$  je:

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  a  $\varphi$   $L$ -formule, potom  $\varphi$  je:

- **pravdivá (platí) v  $T$** , značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\mathcal{A} \in M(T)$  (neboli:  $M(T) \subseteq M(\varphi)$ )



- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  a  $\varphi$   $L$ -formule, potom  $\varphi$  je:

- **pravdivá (platí) v  $T$** , značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\mathcal{A} \in M(T)$  (neboli:  $M(T) \subseteq M(\varphi)$ )
- **lživá v  $T$** , pokud  $T \models \neg\varphi$ , tj. pokud je lživá v každém modelu  $T$  (neboli:  $M(T) \cap M(\varphi) = \emptyset$ )

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  a  $\varphi$   $L$ -formule, potom  $\varphi$  je:

- **pravdivá (platí) v  $T$** , značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\mathcal{A} \in M(T)$  (neboli:  $M(T) \subseteq M(\varphi)$ )
- **lživá v  $T$** , pokud  $T \models \neg\varphi$ , tj. pokud je lživá v každém modelu  $T$  (neboli:  $M(T) \cap M(\varphi) = \emptyset$ )
- **nezávislá v  $T$** , pokud není pravdivá v  $T$  ani lživá v  $T$

- **teorie** jazyka  $L$  je množina  $L$ -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie  $T$  je  $L$ -struktura, ve které platí všechny axiomy  $T$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie  $T$  je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  a  $\varphi$   $L$ -formule, potom  $\varphi$  je:

- **pravdivá (platí) v  $T$** , značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro všechna  $\mathcal{A} \in M(T)$  (neboli:  $M(T) \subseteq M(\varphi)$ )
- **lživá v  $T$** , pokud  $T \models \neg\varphi$ , tj. pokud je lživá v každém modelu  $T$  (neboli:  $M(T) \cap M(\varphi) = \emptyset$ )
- **nezávislá v  $T$** , pokud není pravdivá v  $T$  ani lživá v  $T$
- je-li  $T = \emptyset$  (tj.  $M(T) = M_L$ ), píšeme jen  $\models \varphi$ , a říkáme, že  $\varphi$  je pravdivá (v logice), (logicky) platí, je tautologie, apod.

- $T$  je **sporná**, pokud v ní platí **spor**  $\perp$  (definujeme jako  $R(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots, x_n)$ , kde  $R$  je lib. relační symbol)

- $T$  je **sporná**, pokud v ní platí **spor**  $\perp$  (definujeme jako  $R(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots, x_n)$ , kde  $R$  je lib. relační symbol)
- $T$  je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je **bezesporná** (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)

## Další sémantické pojmy o teorii

- $T$  je **sporná**, pokud v ní platí **spor**  $\perp$  (definujeme jako  $R(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots, x_n)$ , kde  $R$  je lib. relační symbol)
- $T$  je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je **bezesporná** (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)
- **důsledky**  $T$  jsou **sentence** pravdivé v  $T$ , množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $L$  je

$$\text{Csq}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

## Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)



# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí tytéž sentence.

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí tytéž sentence.

**Pozorování:** Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model **až na elementární ekvivalenci**.

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí tytéž sentence.

**Pozorování:** Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model **až na elementární ekvivalenci**.

Příklad: uspořádané množiny  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  a  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ .

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí tytéž sentence.

**Pozorování:** Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model **až na elementární ekvivalenci**.

Příklad: uspořádané množiny  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  a  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ .

- **nejsou izomorfní**,  $\mathbb{Q}$  je spočetná a  $\mathbb{R}$  nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná **bijekce** mezi doménami

# Kompletnost v predikátové logice

- $T$  je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí tytéž sentence.

**Pozorování:** Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model **až na elementární ekvivalenci**.

Příklad: uspořádané množiny  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  a  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ .

- **nejsou izomorfní**,  $\mathbb{Q}$  je spočetná a  $\mathbb{R}$  nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná **bijekce** mezi domény
- **ale  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$** : indukcí dle struktury sentence  $\varphi$  lze ukázat  $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ ; netriviální případ je  $\exists$ , klíčová je **hustota**

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  **sen-**  
**tence** (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.



# Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  **sen-**  
**tence** (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.

**Důkaz:** Platí následující ekvivalence:

# Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  **sen-**  
**tence** (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.

**Důkaz:** Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model,

# Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  **sen-**  
**tence** (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.

**Důkaz:** Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model,
- právě když  $\neg\varphi$  neplatí v žádném modelu  $T$ ,

# Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  sentence (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.

**Důkaz:** Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model,
- právě když  $\neg\varphi$  neplatí v žádném modelu  $T$ ,
- právě když  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$  ( $\varphi$  je sentence!).  $\square$

# Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

**Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti):** Je-li  $T$  teorie a  $\varphi$  sentence (v témž jazyce), potom:  $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model.

**Důkaz:** Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$  nemá model,
- právě když  $\neg\varphi$  neplatí v žádném modelu  $T$ ,
- právě když  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$  ( $\varphi$  je sentence!).  $\square$

NB: Předpoklad, že  $\varphi$  je sentence, je nutný: pro  $T = \{P(c)\}$  a formuli  $\varphi = P(x)$  je  $P(c) \not\models P(x)$  ale  $\{P(c), \neg P(x)\}$  nemá model.



Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

## Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x)\}$$



## Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x)\}$$

**Modely:**  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ , kde  $E^{\mathcal{G}}$  je symetrická ireflexivní relace, tj. **jednoduché** grafy, hranu  $\{x, y\}$  reprezentuje dvojice  $(x, y), (y, x)$

## Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x)\}$$

**Modely:**  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ , kde  $E^{\mathcal{G}}$  je symetrická ireflexivní relace, tj. **jednoduché** grafy, hranu  $\{x, y\}$  reprezentuje dvojice  $(x, y), (y, x)$

- Formule  $\neg x = y \rightarrow E(x, y)$  platí v grafu, právě když je **úplný**. Je tedy nezávislá v  $T_{\text{graph}}$ .

# Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x)\}$$

**Modely:**  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ , kde  $E^{\mathcal{G}}$  je symetrická ireflexivní relace, tj. **jednoduché** grafy, hranu  $\{x, y\}$  reprezentuje dvojice  $(x, y), (y, x)$

- Formule  $\neg x = y \rightarrow E(x, y)$  platí v grafu, právě když je **úplný**. Je tedy nezávislá v  $T_{\text{graph}}$ .
- Formule  $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge (\forall z)(E(x, z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2))$  vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2.

# Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů:  $L = \langle E \rangle$  s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{ \neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x) \}$$

**Modely:**  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ , kde  $E^{\mathcal{G}}$  je symetrická ireflexivní relace, tj. **jednoduché** grafy, hranu  $\{x, y\}$  reprezentuje dvojice  $(x, y), (y, x)$

- Formule  $\neg x = y \rightarrow E(x, y)$  platí v grafu, právě když je **úplný**. Je tedy nezávislá v  $T_{\text{graph}}$ .
- Formule  $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge (\forall z)(E(x, z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2))$  vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2. Platí tedy právě v grafech, které jsou disjunktní sjednocení kružnic, a je nezávislá v teorii  $T_{\text{graph}}$ .



## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je částečné uspořádání.



## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je částečné uspořádání.

Příklad:  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je částečné uspořádání.

Příklad:  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

- Formule  $x \leq y \vee y \leq x$  (**linearita**) platí v  $\mathcal{A}$ , ale neplatí v  $\mathcal{B}$ :  
neplatí např. při ohodnocení kde  $e(x) = \{0\}$ ,  $e(y) = \{1\}$   
(píšeme  $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ ). Je tedy nezávislá v  $T$ .

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je částečné uspořádání.

Příklad:  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

- Formule  $x \leq y \vee y \leq x$  (**linearita**) platí v  $\mathcal{A}$ , ale neplatí v  $\mathcal{B}$ : neplatí např. při ohodnocení kde  $e(x) = \{0\}$ ,  $e(y) = \{1\}$  (píšeme  $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ ). Je tedy nezávislá v  $T$ .
- Sentence  $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$  (označme  $\psi$ ) je pravdivá v  $\mathcal{B}$  a lživá v  $\mathcal{A}$ , píšeme  $\mathcal{B} \models \psi$ ,  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ . Je také nezávislá v  $T$ .

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je částečné uspořádání.

Příklad:  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

- Formule  $x \leq y \vee y \leq x$  (**linearita**) platí v  $\mathcal{A}$ , ale neplatí v  $\mathcal{B}$ : neplatí např. při ohodnocení kde  $e(x) = \{0\}$ ,  $e(y) = \{1\}$  (píšeme  $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ ). Je tedy nezávislá v  $T$ .
- Sentence  $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$  (označme  $\psi$ ) je pravdivá v  $\mathcal{B}$  a lživá v  $\mathcal{A}$ , píšeme  $\mathcal{B} \models \psi$ ,  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ . Je také nezávislá v  $T$ .
- Formule  $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$  (označme  $\chi$ ) je pravdivá v  $T$ , píšeme  $T \models \chi$ .

## Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností, axiomy **reflexivity**, **antisymetrie**, a **tranzitivity**

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

**Modely:**  $\langle S, \leq^S \rangle$ , kde  $\leq^S$  je **částečné uspořádání**.

Příklad:  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

- Formule  $x \leq y \vee y \leq x$  (**linearita**) platí v  $\mathcal{A}$ , ale neplatí v  $\mathcal{B}$ : neplatí např. při ohodnocení kde  $e(x) = \{0\}$ ,  $e(y) = \{1\}$  (píšeme  $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ ). Je tedy nezávislá v  $T$ .
- Sentence  $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$  (označme  $\psi$ ) je pravdivá v  $\mathcal{B}$  a lživá v  $\mathcal{A}$ , píšeme  $\mathcal{B} \models \psi$ ,  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ . Je také nezávislá v  $T$ .
- Formule  $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$  (označme  $\chi$ ) je pravdivá v  $T$ , píšeme  $T \models \chi$ . Totéž platí pro její **generální uzávěr**  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\chi$ .



## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

$$T_1 = \{x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$0 + x = x, \quad x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0, \quad (-x) + x = 0\}$$



## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

$$T_1 = \{x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$0 + x = x, \quad x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0, \quad (-x) + x = 0\}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita  $+$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

$$T_1 = \{x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$0 + x = x, x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0, (-x) + x = 0\}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita  $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

$$\begin{aligned}T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x, \quad x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0, \quad (-x) + x = 0 \}\end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita  $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů:  $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  s rovností, navíc neutralita  $1$  vůči  $\cdot$ , asociativita  $\cdot$ , a (levá i pravá) distributivita  $\cdot$  vůči  $+$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup:  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností, axiomy asociativita  $+$ , neutralita  $0$  vůči  $+$ , a  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  (vůči  $+$  a  $0$ )

$$\begin{aligned}T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x, \quad x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0, \quad (-x) + x = 0 \}\end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita  $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů:  $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  s rovností, navíc neutralita  $1$  vůči  $\cdot$ , asociativita  $\cdot$ , a (levá i pravá) distributivita  $\cdot$  vůči  $+$

$$\begin{aligned}T_3 = T_2 \cup \{ & 1 \cdot x = x \cdot 1, \\ & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ & (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \}\end{aligned}$$



## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity  $\cdot$ :

## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity  $\cdot$ :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom **komutativity**  $\cdot$ :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy **existence inverzního prvku**  $k \cdot$  a **netriviality**:



## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom **komutativity**  $\cdot$ :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy **existence inverzního prvku**  $k$   $\cdot$  a **netriviality**:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1), \neg 0 = 1\}$$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom **komutativity**  $\cdot$ :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy **existence inverzního prvku**  $k$   $\cdot$  a **netriviality**:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1), \neg 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce  $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$  s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů **kompatibility uspořádání**:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

## Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom **komutativity**  $\cdot$ :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy **existence inverzního prvku**  $k \cdot$  a **netriviality**:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1), \neg 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce  $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$  s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů **kompatibility uspořádání**:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Modely jsou tělesa s **lineárním (totálním)** uspořádáním, které je kompatibilní s tělesovými operacemi.

## **6.6 Podstruktura, expanze, redukt**

---



- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je **(indukovaná) podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:



- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je (indukovaná) **podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je (indukovaná) **podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každý relační symbol  $R \in \mathcal{R}$

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je **(indukovaná) podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každý relační symbol  $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$  pro každý funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$ , tj.  $f^{\mathcal{B}}$  je restrikce  $f^{\mathcal{A}}$  na množinu  $B$ , a výstupy jsou všechny z  $B$

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je (indukovaná) podstruktura struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každý relační symbol  $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$  pro každý funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$ , tj.  $f^{\mathcal{B}}$  je restrikce  $f^{\mathcal{A}}$  na množinu  $B$ , a výstupy jsou všechny z  $B$

speciálně, pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$  máme  $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$



## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ , můžeme psát:  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$



## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ , můžeme psát:  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou obou těchto struktur, platí:  
 $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$

## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ , můžeme psát:  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou obou těchto struktur, platí:  $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$
- Množina  $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$  není univerzem podstruktury  $\underline{\mathbb{Z}}$  ani  $\underline{\mathbb{Q}}$ , není uzavřená na násobení.

**Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)**

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.



## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená.

## Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme).

# Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow B$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa  $\mathbb{Q}$  na množině  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$ , není těleso. (Je to tzv. okruh.)

## Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

## Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

## Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :



# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$  je podstruktura  $\underline{\mathbb{N}}$  na množině všech sudých čísel

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$  je podstruktura  $\underline{\mathbb{N}}$  na množině všech sudých čísel

Pokud  $\mathcal{A}$  nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a  $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \upharpoonright X$ .



## Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

## Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )

## Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )



# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  je její redukt

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  je její redukt
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  (**okruh** celých čísel) je její expanze

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  je její redukt
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  (**okruh** celých čísel) je její expanze
- Mějme graf  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ . Potom **expanze**  $\mathcal{G}$  o **jména prvků** (z množiny  $G$ ) je struktura  $\langle G, E^{\mathcal{G}}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$  v jazyce  $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$ , kde  $c_v^{\mathcal{G}} = v$  pro všechny vrcholy  $v \in G$ .



## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$

## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem



## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

⇒ **Víme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . **Chceme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ .

## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

⇒ **Víme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . **Chceme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . Mějme model  $\mathcal{A}' \models T'$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A'$  a ukažme, že  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ).

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .



## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Bud'  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Bud'  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ . Dle předpokladu platí  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$  pro všechna ohodnocení  $e'$ .

## Pokračování důkazu

Bud'  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Bud'  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ . Dle předpokladu platí  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$  pro všechna ohodnocení  $e'$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ , což znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$  ( $e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$ ), z toho plyne  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$ .

## Pokračování důkazu

Buď  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Buď  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ . Dle předpokladu platí  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$  pro všechna ohodnocení  $e'$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ , což znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$  ( $e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$ ), z toho plyne  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$ .

Formule  $\varphi$  neobsahuje  $c$  (je nový), máme tedy i  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ . □