

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladech
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestavit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}; +, -, 0 \rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- Je $\underline{\mathbb{Z}}_4$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle a \rangle$ generované nějakým $a \in \underline{\mathbb{Z}}_4$.
- Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}}_4$ ještě nějaké další podstruktury?
- Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}}_4$ modelem teorie grup?
- Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}}_4$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}}_4$?

Solution. (a) *Ano, lze ověřit, že $\underline{\mathbb{Z}}_4$ splňuje všechny axiomy teorie grup ($+$ je asociativní, 0 je neutrální vůči $+$, $-x$ je inverzní prvek k x vůči $+$ a 0).*

(b) $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 0 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0\}$ (triviální grupa), $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 1 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 3 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4$, $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 2 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$ (dvoupvková grupa izomorfní grupě $\underline{\mathbb{Z}}_4$).

(c) *Ne, jakmile máme prvek 1 nebo 3, generovaná podstruktura už je celá $\underline{\mathbb{Z}}_4$.*

(d) *Ano, teorie grup je otevřená, proto podstruktury modelů (grup) jsou také modely (podgrupy).*

(e) *Ne, jazyk teorie grup je s rovnostmi, konečná velikost modelu lze popsat sentencí, tedy různě velké konečné modely nemohou být elementárně ekvivalentní. Velikost ale nepotřebujeme, stačí nám “grupové vlastnosti”, např. sentence $(\forall x)x = 0$ odliší triviální grupu $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0\}$ od dvoupvkové grupy $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$ i od $\underline{\mathbb{Z}}_4$, a např. $(\forall x)x + x = 0$ platí v $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$ ale ne v $\underline{\mathbb{Z}}_4$.*

Problem 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
- Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ rozšířit na model teorie grup?
- Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
- Označme $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

Solution. (a) *Ano, $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, 0 \rangle$.*

(b) *Ne, prvek 1 (interpretace symbolu 0 z jazyka teorie grup) není neutrální prvek vzhledem k operaci \cdot (interpretaci symbolu $+$), protože $1 \cdot 0 = 0 \neq 1$.*

(c) *Ano, např. $\underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ (okruh celých čísel), neplatí v něm existence inverzních prvků vůči násobení pro všechny nenulové prvky, tj. sentence $(\forall x)(\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)x \cdot y = 1)$ (např. číslo 2 nemá v celých číslech inverz, ale v racionálních ano, $\frac{1}{2}$). (Z toho plyne, že teorie těles nemůže být otevřeně axiomatizovatelná, jinak by podstruktura tělesa musela být také tělesem.)*

(d) *Ano, tzv. teorie struktury je vždy kompletní: Pro každou sentenci ψ platí, že $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \psi \Leftrightarrow \underline{\mathbb{Q}} \models \psi$, pokud to neplatí, máme $\underline{\mathbb{Q}} \models \neg\psi$ (je to sentence) tedy $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \neg\psi$.*

Problem 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

- (a) Je T kompletní?
- (b) Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
- (c) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T ? Je T' jednoduchá extenze T ? Je T' konzervativní extenze T ?

Solution. Teorie říká, že každý prvek je jednou ze tří konstant. Ty ale nemusí být různé. Nejprve najděme všechny modely až na izomorfismus, je jich pět (nakreslete si je):

- $\mathcal{A}_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0 \rangle$ (jednoduchý model, $c_1^{\mathcal{A}_1} = c_2^{\mathcal{A}_1} = c_3^{\mathcal{A}_1} = 0$)
- $\mathcal{A}_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1 \rangle$ (dvoupřvkový model, $c_1^{\mathcal{A}_2} = c_2^{\mathcal{A}_2} \neq c_3^{\mathcal{A}_2}$)
- $\mathcal{A}_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1 \rangle$ (dvoupřvkový model, $c_1^{\mathcal{A}_3} \neq c_2^{\mathcal{A}_3} = c_3^{\mathcal{A}_3}$)
- $\mathcal{A}_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0 \rangle$ (dvoupřvkový model, $c_1^{\mathcal{A}_4} = c_3^{\mathcal{A}_4} \neq c_2^{\mathcal{A}_4}$)
- $\mathcal{A}_5 = \langle \{0, 1, 2\}; 0, 1, 2 \rangle$ (trojprvkový model, konstanty jsou různé)

- (a) Není kompletní, např. sentence $c_1 = c_2$ je v T nezávislá: platí v \mathcal{A}_1 , neplatí v \mathcal{A}_3 . (Neboli, dle sémantického kritéria, modely \mathcal{A}_1 a \mathcal{A}_3 nejsou elementárně ekvivalentní).
- (b) Jednoduché extenze odpovídají podmnožinám $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}$, je jich 32, kompletní odpovídají jednoduchým podmnožinám, je jich 5.

Jednoduché extenze, které nejsou kompletní:

- T modely $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$
- $T \cup \{x = y \vee x = z\}$ modely $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$
- $T \cup \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y\}$ modely $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$

(Pozor: $(\exists x)(\exists y)\neg x = y \sim \neg(\forall x)(\forall y)x = y \not\sim \neg x = y \sim (\forall x)(\forall y)\neg x = y$.)

⋮

- $\{x = x \wedge \neg x = x\}$ sporná teorie, nemá model

Jednoduché kompletní extenze:

- $\text{Th}(\mathcal{A}_1) \sim \{x = y\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_2) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, c_1 = c_2, \neg c_2 = c_3\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_3) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, \neg c_1 = c_2, c_2 = c_3\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_4) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, c_1 = c_3, \neg c_1 = c_2\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_5) \sim \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3, \neg(c_1 = c_2 \vee c_1 = c_3 \vee c_2 = c_3)\}$

- (c) Teorie navíc říká, že každý prvek je buď interpretací symbolu c_1 nebo c_4 . Modely tedy mají nejvýše dva prvky, až na izomorfismus jsou to:

- $\mathcal{A}'_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0, 0 \rangle$
- $\mathcal{A}'_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0, 1 \rangle$

Teorie T' je extenzí T , platí v ní všechny důsledky teorie T , sémanticky: restrikce modelů T' na původní jazyk L jsou modely T (např. restrikcí modelu \mathcal{A}'_1 na L je \mathcal{A}_1). Není to jednoduchá extenze, zvětšili jsme jazyk.

Není to ani konzervativní extenze, např. sentence $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z)$ je sentence původního jazyka L , platí v T' ale neplatila v T . Sémanticky: (tříprvkový) model \mathcal{A}_5 teorie T nelze expandovat do jazyka L' na model teorie T' , neboli restrikcí modelů T' na původní jazyk L nedostaneme všechny modely T .

Problem 4. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomu

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L , které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

- (a) $(-x) + x = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Solution. Všimněte si, že axiomy teorie vyjadřují existenci a jednoznačnost pro definici funkčního symbolu $-$, jde tedy o korektní extenzi o definice. Postupujeme dle (důkazu) tvrzení z přednášky:

- (a) $(\exists z)(x + z = 0 \wedge z + x = 0)$ (Podformule $x + z = 0$ říká, že ' z je $-x$ ' a druhá, že ' $(-x) + x = 0$ '.)
 (b) Nejprve nahradíme definicí term $-y$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z < x)$$

Nyní relační symbol $<$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z \leq z \wedge \neg(x + z = z))$$

- (c) $(\exists u)(\exists v)((x + y) + u = 0 \wedge x + v = 0 \wedge u \leq v \wedge \neg u = v)$ (Kde ' u je $-(x + y)$ ' a ' v je $-x$ '.)

Problem 5. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde \cdot je násobení reálných čísel
 (b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře \mathcal{A}
 (c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin \mathbb{N} v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$
 (d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

- Solution.** (a) $(\exists y)F(y, y) = x \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ (Číslo x je čtverec, a není to nula.)
 (b) $(\exists z)(F(x, y) = z \wedge (\forall u)F(z, u) = u)$ (Součin je roven jedné.)
 (c) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = y$ (Kdykoliv je množina sjednocením dvou množin, je rovna jedné z nich. A není prázdná.)
 (d) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ (Kdykoliv je součin dvou čísel roven prvočíslu, je jedno z nich rovno prvočíslu, a prvočíslo není nula.)

EXTRA PRACTICE

Problem 6. Buď $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

- (a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L' , které jsou extenzemi teorie T .
 (b) Má T nějakou konzervativní extenzi v jazyce L' ? Zdůvodněte.

Problem 7. Necht $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

- (a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. (3b)

- (b) Necht $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)

Problem 8. Mějme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$ s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned}\varphi : & P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge \neg x = y \\ \psi : & P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y)\end{aligned}$$

Uvažme následující L -teorii:

$$\begin{aligned}T = \{ & \varphi, \psi, \neg c = d, \\ & R(x, x), \\ & R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ & R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ & R(x, y) \vee R(y, x)\}\end{aligned}$$

- (a) Nalezněte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T .
 (b) Je sentence $(\forall x)R(c, x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
 (c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
 (d) Necht $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T' ? Uveďte zdůvodnění.

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 9. Necht $T_n = \{\neg c_i = c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ s rovností, kde c_1, \dots, c_n jsou konstantní symboly.

- (a) Pro dané konečné $k \geq 1$ určete počet k -prvkových modelů teorie T_n až na izomorfismus.
 (b) Určete počet spočetných modelů teorie T_n až na izomorfismus.
 (c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.