NAIL062 V&P Logika: 3. sada příkladů – Algebra výroků, Problém SAT

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- $\bullet$  rozumí souvislosti výroků/teorií až na [T-]ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace , umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladě

## Příklady na cvičení

**Příklad 1.** Nechť  $|\mathbb{P}| = n$  a mějme výrok  $\varphi \in VF_{\mathbb{P}}$  takový, že  $|M(\varphi)| = k$ . Určete počet až na ekvivalenci:

- (a) výroků  $\psi$  takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ,
- (b) teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- (c) kompletních teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- (d) teorií T nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \cup \{\varphi\}$  je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii  $\{\varphi, \psi\}$  kde  $|M(\psi)| = p$ . Spočtěte až na ekvivalenci:

- (e) výroky  $\chi$  takové, že  $\varphi \lor \psi \models \chi$ ,
- (f) teorie, ve kterých platí  $\varphi \vee \psi$ .
- Řešení. (a) Podmínku vyjádříme pomocí množin modelů:  $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$  nebo  $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$ . Víme, že všech modelů je  $2^n$ , a  $|M(\varphi)| = k$ . Chceme spočítat, kolik je možných množin  $M(\psi)$ . Podmínku  $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$  splňuje  $2^{2^n-k}$  množin (tj. tolik je nadmnožin dané k-prvkové množiny uvnitř  $2^n$ -prvkové množiny), podmínku  $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$  splňuje  $2^k$  množin. Musíme ale být opatrní, abychom případ  $M(\psi) = M(\varphi)$  nezapočítali dvakrát. Celkem máme  $2^{2^n-k} + 2^k 1$  možných množin modelů, tedy výroků  $\psi$  až na ekvivalenci.
- (b)  $T \models \varphi \text{ právě } když M(T) \subseteq M(\varphi), \text{ } takových \text{ } množin M(T) \text{ } je 2^k$
- (c) Navíc máme podmínku |M(T)| = 1, 1-prvkových podmnožin k-prvkové množiny je k.
- (d) Přeloženo do řeči modelů, podmínka říká, že M(T ∪ {φ}) ≠ ∅. Máme M(T ∪ {φ}) = M(T, φ) = M(T) ∩ M(φ) (jde o modely, ve kterých platí zároveň T a φ). Počítáme tedy kolik možných množin M(T) má neprázdný průnik s k-prvkovou množinou M(φ). To lze vyjádřit např. jako (2<sup>k</sup> −1)·(2<sup>2<sup>n</sup>-k</sup>), kde 2<sup>k</sup> −1 je počet možných (neprázdných) "průniků" M(T) ∩ M(φ), a 2<sup>2<sup>n</sup>-k</sup> znamená, že pro modely, ve kterých neplatí φ, si můžeme libovolně zvolit, zda budou v naší množině.
- (e) Protože  $\{\varphi,\psi\}$  je sporná, víme, že  $\emptyset = M(\varphi,\psi) = M(\varphi) \cap M(\psi)$ . Počítáme množiny  $M(\chi)$  takové, že  $M(\varphi \vee \psi) \subseteq M(\chi)$ . Díky Lindenbaum-Tarského algebře víme, že  $M(\varphi \vee \psi) = M(\varphi) \cup M(\psi)$ . Z disjunktnosti máme  $|M(\varphi) \cup M(\psi)| = k + p$ , snadno spočítáme, že množných množin modelů  $M(\chi)$  je  $2^{2^n (k+p)}$ .
- (f) M(T) musí být podmnožinou (k+p)-prvkové  $M(\varphi \vee \psi)$ , je jich tedy  $2^{k+p}$ .

**Příklad 2.** Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení: (a) výrok  $\varphi$  níže, (b)  $\varphi \wedge \neg p_1$ , (c)  $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$ .

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Řešení. (a) Sestrojíme implikační graf. Zjistíme, že má dvě komponenty silné souvislosti:  $C = \{p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$  a  $\overline{C} = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, p_5\}$ , nevede mezi nimi žádná hrana. Po kontrakci komponent tedy máme dvouvrcholový graf  $\mathcal{G}^*$  bez hran, ten má dvě topologická uspo-řádání:  $(C, \overline{C})$  a  $(\overline{C}, C)$ , která odpovídají modelům (0, 0, 1, 0, 1) a (1, 1, 0, 1, 0).

- (b) Komponenty jsou stejné, ale do  $\mathcal{G}^*$  přibude hrana  $C \to \overline{C}$ , tedy jediné topologické uspořádání je  $(C, \overline{C})$ , což odpovídá modelu (0, 0, 1, 0, 1).
- (c) Implikační graf je nyní silně souvislý, tedy jeho jediná komponenta obsahuje (všechny) dvojice opačných literálů. To znamená, že výrok je nesplnitelný.

**Příklad 3.** Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \lor p_2 \lor \neg p_3) \land (\neg p_1 \lor p_2) \land p_1 \land (\neg p_1 \lor \neg p_2 \lor p_3) \land (p_1 \lor \neg p_2 \lor \neg p_4) \land (\neg p_2 \lor \neg p_3 \lor \neg p_4) \land (p_4 \lor \neg p_5 \lor \neg p_6)$$

**Řešení.** Provádíme postupně jednotkovou propagaci přes literály  $p_1, p_2, p_3, \neg p_4$ , zbývá výrok  $\neg p_5 \lor \neg p_6$ . Ten stačí ohodnotit tak, aby alespoň jedna z výrokových proměnných  $p_5, p_6$  byla ohodnocená nulou. Modely výroku jsou tedy:  $\{(1,1,1,0,0,1), (1,1,1,0,1,0), (1,1,1,0,1,1)\}$ 

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \lor \neg p_2) \land (\neg p_1 \lor p_2) \land (p_1 \lor \neg p_2) \land (p_2 \lor \neg p_3) \land (p_1 \lor p_3)$$

**Řešení.** Výrok neobsahuje jednotkovou klauzuli ani literál s čistým výskytem, musíme tedy větvit, např. přes  $p_1$ :

- Z φ ∧ p<sub>1</sub> dostáváme po jednotkové propagaci ¬p<sub>2</sub> ∧ p<sub>2</sub> ∧ (p<sub>2</sub> ∨ ¬p<sub>3</sub>), po jednotkové propagaci přes ¬p<sub>2</sub> dostáváme □ ∧ ¬p<sub>3</sub>, což obsahuje prázdnou klauzuli □, tedy je nesplnitelné.
- $Z \varphi \wedge \neg p_1$  dostáváme po jednotkové propagaci  $\neg p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_3$ , po jednotkové propagaci přes  $\neg p_2$  dostáváme  $\neg p_3 \wedge p_3$ , po jednotkové propagaci přes  $\neg p_3$  dostáváme prázdnou klauzuli  $\square$ , tedy opět je nesplnitelné.

V obou (všech) větvích výpočtu jsme dokázali nesplnitelnost, výrok je tedy nesplnitelný.

**Příklad 5.** Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

**Řešení.** Řešení jen naznačíme. Jako jazyk zvolme  $\mathbb{P} = \{p_{uv} \mid u, v \in V\}$ , kde  $p_{uv}$  bude znamenat, že vrchol u je v topologickém uspořádání (ostře) před v. To, že jde o ostré uspořádání, vyjádříme pomocí následujících axiomů:

- $\neg p_{vv} \ pro \ v\check{s}echna \ v \in V$
- $p_{uv} \rightarrow \neg p_{vu} \ pro \ v\check{s}echna \ u, v \in V$
- $p_{uv} \wedge p_{vw} \rightarrow p_{uw} \ pro \ v\check{s}echna \ u, v, w \in V$

Zbývá vyjádřit, že všechny grafové hrany vedou v topologickém uspořádání dopředu:

•  $p_{uv}$  pro všechny hrany  $(u, v) \in E$ 

Nakonec axiomy výše převedeme do CNF, v množinovém zápisu dostáváme:

$$S = \{ \{ \neg p_{vv} \}, \{ \neg p_{uv}, \neg p_{vu} \}, \{ \neg p_{uv}, \neg p_{vw}, \neg p_{uw} \} \mid u, v, w \in V \} \cup \{ \{ p_{uv} \} \mid (u, v) \in E \}$$

## Další příklady k procvičení

**Příklad 6.** Uvažme následující výroky  $\varphi$  a  $\psi$  nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$ :

$$\varphi = (\neg p \lor q) \to (p \land r)$$
  
$$\psi = s \to q$$

- (a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků  $\chi$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $\varphi \wedge \psi \models \chi$ .
- (b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .
- (c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad  $\mathbb{P}$  takovou, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .

Příklad 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \lor \neg b \lor c \lor \neg d) \land (\neg b \lor c) \land d \land (\neg a \lor \neg c \lor e) \land (\neg c \lor \neg d) \land (\neg a \lor \neg d \lor \neg e) \land (a \lor \neg b \lor \neg e)$$

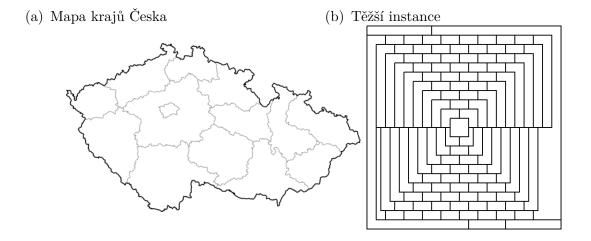
**Příklad 8.** Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu 4:

- (a)  $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
- (b)  $(p_0 \lor p_2) \land (p_0 \lor \neg p_3) \land (p_1 \lor \neg p_3) \land (p_1 \lor \neg p_4) \land (p_2 \lor \neg p_4) \land (p_0 \lor \neg p_5) \land (p_1 \lor \neg p_5) \land (p_2 \lor \neg p_5) \land (\neg p_1 \lor \neg p_6) \land (p_4 \lor p_6) \land (p_5 \lor p_6) \land p_1 \land \neg p_7$

**Příklad 9.** Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice a+b=c pro žádná  $1 \le a < b < c \le n$ ? Sestrojte výrokovou formuli  $\varphi_n$  v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve n=8.

Zkuste si doma: Napište skript generující  $\varphi_n$  v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici a < b < c takovou, že a + b = c).

**Příklad 10.** Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.



## K zamyšlení

- **Příklad 11.** Pro danou formuli  $\varphi$  v CNF najděte a 3-CNF formuli  $\varphi'$  takovou, že  $\varphi'$  je splnitelná, právě když  $\varphi$  je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce  $\varphi'$  je-li dána  $\varphi$  (tj. redukci z problému SAT do problému 3-SAT).
- **Příklad 12.** Zakódujte problém setřídění dané n-tice celých čísel do SAT.
- **Příklad 13.** Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.