NAIL062 V&P Logika: 5. sada příkladů – Rezoluční metoda

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z rezoluční metody (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí pracovat s výroky v CNF a jejich modely v množinové reprezentaci
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom
- zná pojem stromu dosazení, umí ho formálně definovat a pro konkrétní CNF formuli sestrojit
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)

Příklady na cvičení

Příklad 1. Označme jako φ výrok $\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$. Ukažte, že φ je tautologie:

(a) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a zapište výsledný výrok jako formuli S v množinové reprezentaci.
(b) Najděte rezoluční zamítnutí S.

Řešení. *(a) Pomocí ekvivalentních úprav:* $\neg\varphi = \neg(\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg(\neg\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg(p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg p \wedge \neg q \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \sim \neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)$

$$S = \{\{\neg p\}, \{\neg q\}, \{p, q\}\}$$

(b) Rezoluční zamítnutí: $\{\neg p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{\neg q\}, \square$ *(nakreslete si rezoluční strom).*

Příklad 2. Dokažte rezolucí, že v $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí výrok s.

Řešení. *Teorii* $T \cup \{\neg s\}$ *převedeme do CNF:, a zapíšeme v množinové reprezentaci. Máme* $(r \to p) \to s \sim \neg(\neg r \vee p) \vee s \sim (r \wedge \neg p) \vee s \sim (r \vee s) \wedge (\neg p \vee s)$, *ostatní axiomy se převedou snadno. Dostaneme:* $S = \{\{p, \neg q\}, \{q, \neg r\}, \{r, s\}, \{\neg p, s\}, \{\neg s\}\}$. *Rezoluční zamítnutí znázorníme rezolučním stromem:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\{r,s\} & & \{\neg s\} & & & & \{\neg p, s\} & & \{\neg s\} & & \\
& \diagdown\ \diagup & & & & & & \diagdown\ \diagup & & & \\
& \{r\} & & \{q, \neg r\} & & & & \{\neg p\} & & \{p, \neg q\} & \\
& & \diagdown\ \diagup & & & & & & \diagdown\ \diagup & & \\
& & \{q\} & & & & & & \{\neg q\} & & \\
& & & \diagdown & & & & \diagup & & & \\
& & & & & \square & & & & &
\end{array}$$

Příklad 3. Nechť prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že *"Radka / Sára / Tom je ve škole"* a označme $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, že:

- *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
- *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

(a) Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$.
(b) Rezoluční metodou dokažte, že z T vyplývá, že *Tom je ve škole*: Napište formuli S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když to platí, a najděte rezoluční zamítnutí S. Nakreslete rezoluční strom.
(c) Určete množinu modelů teorie T.

Řešení. *(a)* $T = \{\neg t \to \neg s, \neg(r \wedge \neg s), \neg r \to t\}$
(b) S *získáme z teorie* $T \cup \{\neg t\}$ *převodem do CNF:* $S = \{\{t, \neg s\}, \{\neg r, s\}, \{r, t\}, \{\neg t\}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{r,t\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg t\} \arrow[dl, dash] & & & & & \\
& \{r\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg r, s\} \arrow[dl, dash] & & \{t, \neg s\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg t\} \arrow[dl, dash] \\
& & \{s\} \arrow[drr, dash] & & & & \{\neg s\} \arrow[dll, dash] & \\
& & & & \square & & &
\end{tikzcd}$$

(c) Využijeme toho, že $T \models t$ *(dokázali jsme v (b)). První a třetí axiom jsou díky tomu splněny,* $T \sim \{t, \neg(r \wedge \neg s)\}$*. Z toho snadno* $\mathrm{M}(T) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$.

Příklad 4. Zkonstruujte *strom dosazení* pro následující formuli. Na základě tohoto stromu sestrojte rezoluční zamítnutí, dle postupu z důkazu Věty o úplnosti rezoluce.

$$S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$$

Řešení. *Přednostně větvíme přes výrokové proměnné v jednotkových klauzulích. (Jakmile narazíme na prázdnou klauzuli, víme, že větev je sporná, zbytek formule nepotřebujeme, zde kvůli nedostatku místa nebudeme zapisovat.)*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& S \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
S^{q} = \{\{p,r\}, \square, \dots\} & & S^{\bar q} = \{\{p,r\}, \{\neg r\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\otimes & S^{\bar q r} = \{\square, \dots\} & & S^{\bar q \bar r} = \{\{p\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& \otimes & S^{\bar q \bar r p} = \{\{t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & S^{\bar q \bar r \bar p} = \{\square, \dots\} \\
& S^{\bar q \bar r p s} = \{\{t\}, \square\} & & S^{\bar q \bar r p \bar s} = \{\{t\}, \{\neg t\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \otimes \\
& \otimes & S^{\bar q \bar r p \bar s t} = \{\square\} & & S^{\bar q \bar r p \bar s \bar t} = \{\square\} \\
& & \otimes & & \otimes
\end{tikzcd}$$

Strom dosazení dává "návod", jak sestrojit rezoluční zamítnutí (to je klíčem k důkazu věty o úplnosti rezoluce). Postupujeme od listů ke kořeni, neboli podle počtu proměnných ve formulích. Pro formule na listech stromu dosazení máme jednoprvková rezoluční zamítnutí $\square$.

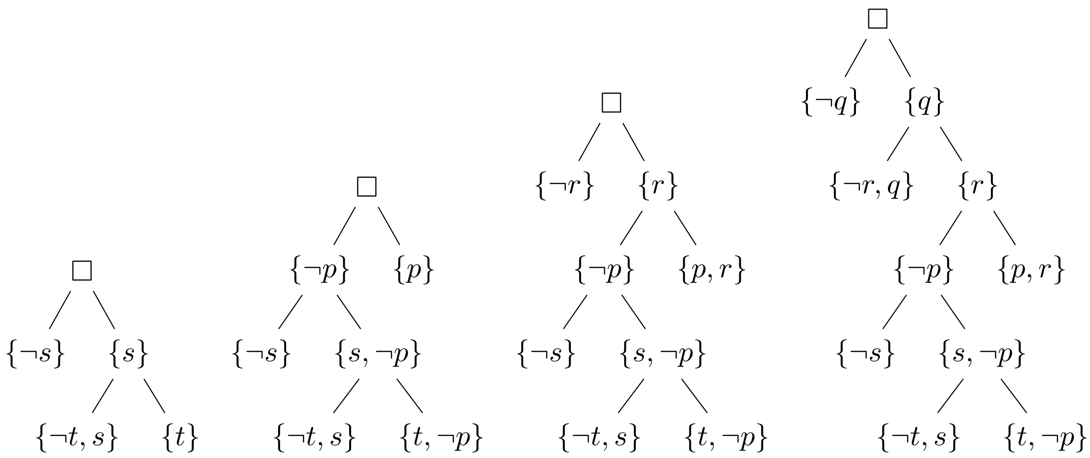
Formule $S^{\bar q \bar r p \bar s} = \{\{t\}, \{\neg t\}\}$ *má jednokrokové rezoluční zamítnutí:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \square \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\neg t\} & & \{t\}
\end{tikzcd}$$

Jak vzniklo? Z rezolučního zamítnutí □ formule $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}t}$ vyrobíme rezoluční důkaz klauzule $\{\neg t\}$ z $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$, a to tak, že pro každý list, který vznikl odebráním literálu $\neg t$, vrátíme $\neg t$ do něj i do všech klauzulí nad ním. (Zde máme jen jeden list, což je zároveň kořen □.)

Analogicky vyrobíme rezoluční důkaz $\{t\}$ z $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}\bar{t}}$ (přidáváme do vrcholů literál t). A nakonec přidáme jeden rezoluční krok, který z $\{\neg t\}$ a $\{t\}$ odvodí □. (Pokud by žádný list nevznikl odebráním literálu z klauzule z $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$, znamená to, že rezoluční zamítnutí, které máme, je už i rezolučním zamítnutím $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$.)

Stejně postupujeme ve stromu výše, pro $S^{\bar{q}\bar{r}p}$, $S^{\bar{q}\bar{r}}$, $S^{\bar{q}}$, a nakonec pro S:



Ověřte, že výsledný strom opravdu reprezentuje rezoluční zamítnutí S. Všimněte si, jak jeho tvar kopíruje tvar stromu dosazení. (V našem případě je strom "chlupatá cesta", což obecně být nemusí, ale konstrukce funguje stejně.)

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

(a) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$

(b) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$

Příklad 6. Tonia a Fabio nám popisují svůj nejnovější recept na nejlepší pizzu na světě.

- Tonia řekla: "Do receptu patří ančovičky nebo bazalka nebo česnek."
- Tonia také řekla: "Jestli tam nepatří dušená šunka, nepatří tam ani bazalka."
- Fabio řekl: "Do receptu patří dušená šunka."
- Fabio dále řekl: "Nepatří tam ančovičky ani bazalka, ale patří tam česnek."

Víme, že Tonia vždy mluví pravdu, zatímco Fabio vždy lže.

(a) Vyjádřete naše znalosti jako výrokovou teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b, c, d\}$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "do receptu patří ančovičky/bazalka/česnek/dušená šunka".

(b) Pomocí rezoluční metody dokažte, že z teorie T vyplývá, že "do receptu patří ančovičky". Nakreslete rezoluční strom.

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

(i) Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno sousední číslo nemocné (v předchozím čase).

(ii) Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).
(iii) V čase 0 *bylo nemocné číslo* 0, *ostatní čísla byla zdravá.*

(a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že "*číslo i je v čase t nemocné.*"
(b) Převeďte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: "*Číslo* 1 *je zdravé v čase* 2." (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3, ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)
(c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

K zamyšlení

Příklad 8. Dokažte podrobně, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, potom je i C splnitelná.