

**Teaching goals:** After completing, the student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větev, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: “*Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.*”
- Na truhle B je nápis: “*V truhle A je smrtonosná past.*”

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii  $T$  nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných  $\mathbb{P}$ . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v  $\mathbb{P}$ .)
- Pokuste se sestrojit tablo důkazy, z teorie  $T$ , výroků o významu “Poklad je v truhle A” a “Poklad je v truhle B”.
- Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
- Jaký závěr z toho můžeme učinit?

**Problem 2.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a)  $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  (b)  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Pomocí tablo metody najděte všechny modely  $T$ . Je každý model  $T$  kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

**Problem 3.** Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku  $\oplus$  (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

**Problem 4.** Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 5.** Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

- Alespoň jeden z vyslýcháných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
  - Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”*
  - Barbora říká: “Cyril lže”*
  - Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”*
- Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky  $\varphi_1$  až  $\varphi_4$  nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$ , přičemž  $a, b, c$  znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyril říká pravdu”.
  - Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$  plyne, že Adam říká pravdu.
  - Je teorie  $T$  ekvivalentní s teorií  $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ ? Zdůvodněte.

**Problem 6.** Pomocí tablo metody dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

- (a)  $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$   
 (b)  $p \leftrightarrow \neg\neg p$   
 (c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$   
 (d)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

**Problem 7.** Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.

- (a)  $\{\neg q, p \vee q\} \models p$   
 (b)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$   
 (c)  $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

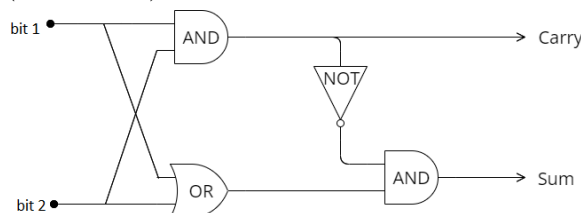
**Problem 8.** Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

- (a)  $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$   
 (b)  $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$   
 (c)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

**Problem 9.** Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku  $\downarrow$  (NOR),
- pro Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND),
- pro  $\oplus$  (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

**Problem 10.** *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- (a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako teorii  $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$ , kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule  $\varphi, \psi$  neobsahují proměnné  $c, s$ .  
 (b) Dokažte tablo metodou, že  $T \models c \rightarrow \neg s$ .

**Problem 11.** Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami. Můžete využít Větu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 12.** Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí:

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi$$

**Problem 13.** Mějme dvě neprázdné teorie  $A, B$  v témž jazyce. Nechť platí, že každý model teorie  $A$  splňuje alespoň jeden axiom teorie  $B$ . Ukažte, že existují konečné množiny axiomů  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$  a  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq B$  takové, že  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rightarrow \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$  je tautologie.