

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestavit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestavit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluční, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe. Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

**Řešení.** Nejprve zvolíme vhodný jazyk. V textu identifikujeme vlastnost objektů “ $x$  je holič” a vztah dvou objektů “(kdo)  $x$  holí (koho)  $y$ ”. Použijeme jazyk  $L = \langle B, S \rangle$  bez rovnosti, kde  $B$  je unární relační symbol,  $B(x)$  má význam “ $x$  je holič (barber)”,  $S$  je binární relační symbol,  $S(x, y)$  znamená “ $x$  holí (shaves)  $y$ ”.

V tomto jazyce formalizujeme tvrzení ze zadání:

- Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe:

$$\varphi_1 = (\forall x)(B(x) \rightarrow (\forall y)(\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)))$$

- Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe:

$$\varphi_2 = \neg(\exists x)(B(x) \wedge (\exists y)(S(x, y) \wedge S(y, y)))$$

- Neexistují žádní holiči:

$$\psi = \neg(\exists x)B(x)$$

Naším cílem je ukázat, že v teorii  $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  platí sentence  $\psi$ . Dokazujeme sporem, vyjdeme tedy z teorie  $T \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$ . Pomocí skolemizace k ní najdeme ekvivalentní CNF formuli  $S$ . Najdeme rezoluční zamítnutí  $S$ , čímž ukážeme, že  $S$  a tedy i  $T \cup \{\neg\psi\}$  je nesplnitelná.

Převědeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, a převedeme do CNF:

- $\varphi_1 \rightsquigarrow B(x) \rightarrow (\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)) \sim \neg B(x) \vee S(y, y) \vee S(x, y)$
- $\varphi_2 \rightsquigarrow \neg(B(x) \wedge S(x, y) \wedge S(y, y)) \sim \neg B(x) \vee \neg S(x, y) \vee \neg S(y, y)$
- $\neg\psi \rightsquigarrow B(c)$  (kde  $c$  je nový konstantní symbol)

Před skolemizací se ujistěte, že máte sentence. A nezapomeňte, že musíme skolemizovat sentence  $\neg\psi$ , ne  $\psi$ . (Negace skolemovy varianty není ekvivalentní s negací původní formule! Skolemizací  $\neg\exists B(x)$  bychom dostali  $\neg B(x)$ , čehož negace je  $B(x)$ , tj. ‘všichni jsou holiči’ zatímco správným postupem dostaneme ‘(svědek)  $c$  je holič’).

V množinovém zápisu tedy máme:

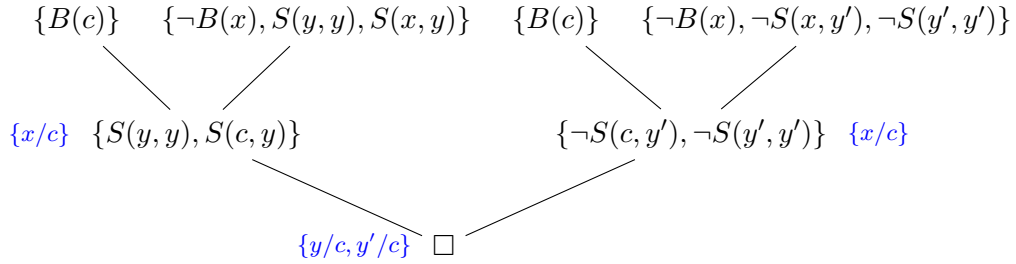
$$S = \{\{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y), \neg S(y, y)\}, \{B(c)\}\}$$

Rezoluční zamítnutí:

$$\{B(c)\}, \{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{S(y, y), S(c, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y'), \neg S(y', y')\}, \\ \{\neg S(c, y'), \neg S(y', y')\}, \square$$

První dvě klauzule jsou z  $S$ , třetí jejich rezolventa za použití unifikace  $\{x/c\}$ . Čtvrtá klauzule je variantou klauzule z  $S$ , proměnnou  $y$  jsme přejmenovali na  $y'$ , abychom dodrželi technickou podmínku o disjunktích množinách proměnných v rezolvovaných klauzulích. Pátá klauzule je rezolventou první a čtvrté za použití unifikace  $\{x/c\}$ . Poslední, prázdná klauzule  $\square$  je rezolventou z 3. a 5. klauzule, unifikace  $\{y/c, y'/c\}$ .

Typicky ale zamítnutí zakreslíme pouze rezolučním stromem, naznačíme i použité unifikace:



**Příklad 2.** Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

- (i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovčí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
- (ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: (iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena. Konkrétně:

- (a) Vyjádřete sentencemi  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  v jazyce  $L = \langle P, K \rangle$  bez rovnosti ( $P$  je binární,  $K$  unární relační symbol,  $P(x, y)$  znamená ‘ovce  $x$  porodila ovci  $y$ ’,  $K(x)$  ‘ovce  $x$  byla naklonována’).
- (b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí  $S$  (může být ve větším jazyce), která je nespíitelná, právě když  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$ .
- (c) Najděte rezoluční zamítnutí  $S$ , nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
- (d) Má  $S$  LI-zamítnutí?

**Řešení.** Všimněte si, že všechny objekty, o kterých mluvíme, jsou ovce, nepotřebujeme tedy predikát pro ‘býti ovčí’. Postup je stejný jako v předchozím příkladě:

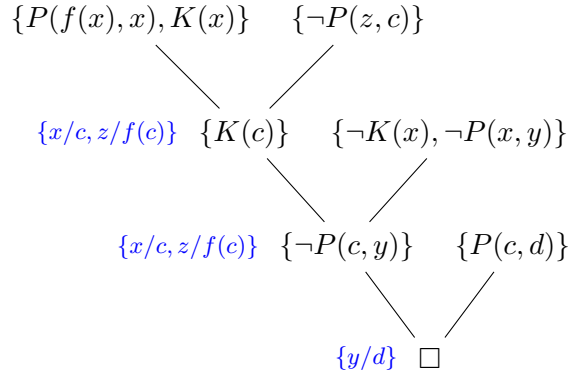
- (a) Možností jak formulovat formule je více, pokud se snažíme co nej přesněji držet textu, dostaneme např.:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\forall x)((\exists y)P(y, x) \vee K(x)) \wedge \neg((\exists z)P(z, x) \wedge K(x)) \\ \varphi_2 &= \neg(\exists x)(K(x) \wedge (\exists y)P(x, y)) \\ \varphi_3 &= (\forall x)((\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)P(z, x)) \end{aligned}$$

- (b) Vyjdeme z teorie  $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$  (dokazujeme sporem). Převědeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, převedeme do CNF, a zapíšeme v množinovém zápisu:

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_1 &\sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(y, x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z, x) \wedge K(x))) \rightsquigarrow (P(f(x), x) \vee K(x)) \wedge \\ &\quad \neg(P(z, x) \wedge K(x)) \sim \{\{P(f(x), x), K(x)\}, \{\neg P(z, x), \neg K(x)\}\} \\ \bullet \varphi_2 &\sim (\forall x)(\forall y)\neg(K(x) \wedge P(x, y)) \sim \{\{\neg K(x), \neg P(x, y)\}\} \\ \bullet \neg\varphi_3 &\sim (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(P(x, y) \rightarrow P(z, x)) \rightsquigarrow \neg(P(c, d) \rightarrow P(z, c)) \sim \{\{P(c, d)\}, \{\neg P(z, c)\}\} \\ S &= \{\{P(f(x), x), K(x)\}, \{\neg P(z, x), \neg K(x)\}, \{\neg K(x), \neg P(x, y)\}, \{P(c, d)\}, \{\neg P(z, c)\}\} \end{aligned}$$

(c) Rezoluční strom pro rezoluční zamítnutí  $S \vdash_R \square$ :



(d) Ano, v (c) se nám podařilo sestavit LI-zamítnutí. I kdyby ne, existence LI-zamítnutí plyne z Věty o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule, naše CNF formule  $S$  je Hornova.

**Příklad 3.** Necht  $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti.

- (a) Skolemizací nalezněte k  $T$  otevřenou ekvivalentní teorii  $T'$ .
- (b) Převeďte  $T'$  na ekvivalentní teorii  $S$  v CNF. Zapište  $S$  v množinové reprezentaci.
- (c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie  $S$ . U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (d) Nalezněte nespílitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z  $S$ . *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

**Řešení.** (a) Skolemizací dostáváme:

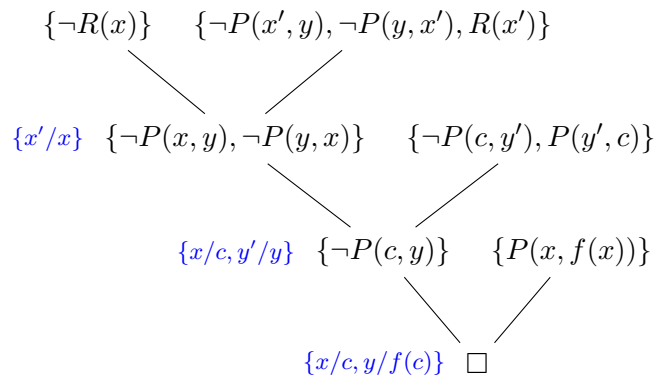
$$T' = \{\neg R(x), P(c, y) \rightarrow P(y, c), P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow R(x), P(x, f(x))\}$$

(Pozor u třetího axiomu:  $(\exists y)$  vytýkáme z antecedentu implikace, změní se na  $(\forall y)$ ).

(b) Snadno převedeme do CNF:

$$S = \{\{\neg R(x)\}, \{\neg P(c, y), P(y, c)\}, \{\neg P(x, y), \neg P(y, x), R(x)\}, \{P(x, f(x))\}\}$$

(c) Rezoluční strom pro  $S \vdash_R \square$ :



(Všimněte si, kde potřebujeme přejmenovat proměnné, aby rezolované klauzule měly disjunktční množiny proměnných.)

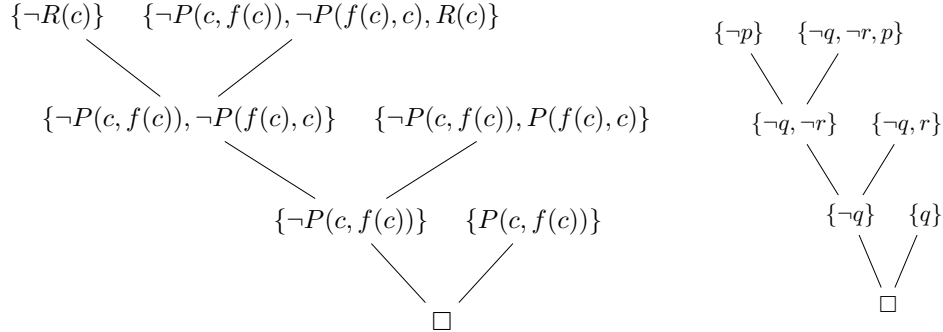
(d) K nalezení konjunkce základních instancí axiomů můžeme použít sestrojené rezoluční zamítnutí. Pro každý list rezolučního stromu, který je označovaný klauzulí  $C$  (až na přejmenování je to klauzule z  $S$ ), aplikujeme na  $C$  postupně všechny unifikace na cestě od tohoto listu až ke kořeni:

- $\neg R(x) \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg R(c)$
- $\neg P(x', y) \vee \neg P(y, x') \vee R(x') \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)$
- $\neg P(c, y') \vee P(y', c) \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)$
- $P(x, f(x)) \cdot \{x/c, y/f(c)\} = P(c, f(c))$

Pokud by v některých klauzulích zůstaly proměnné, substituujeme za ně libovolný konstantní term. Dostáváme nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z  $S$ :

$$\neg R(c) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)) \wedge P(c, f(c))$$

Její rezoluční zamítnutí ‘na úrovni výrokové logiky’ má stejnou strukturu jako rezoluční zamítnutí  $S$ :



Pokud bychom chtěli základní instance původní teorie  $T$ , musíme se podívat, ze kterých axiomů  $T$  vznikly naše klauzule, a aplikovat stejné unifikace, výsledkem by bylo:

$$\neg R(c) \wedge (P(c, f(c)) \rightarrow P(f(c), c)) \wedge (P(c, f(c)) \wedge P(f(c), c) \rightarrow R(c)) \wedge P(c, f(c))$$

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 4.** Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \{ \neg Q(h(b), w), H(w, a) \}, \{ \neg H(v, a) \}, \\ \{ \neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a) \}, \{ P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b) \}\}$$

**Příklad 5.** Mějme jazyk  $L = \langle <, j, h, s \rangle$  bez rovnosti, kde  $j, h, q$  jsou konstantní symboly (‘jablka/hrušky/švestky’) a  $x < y$  vyjadřuje, že “ovoce  $y$  je lepší než ovoce  $x$ ”. Víme, že:

- (i) Relace “být lepší” je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
- (ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že (iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

- (a) Tvzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce  $L$ .
- (b) Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli  $S$ , která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište  $S$  v množinové reprezentaci.
- (c) Rezolucí dokažte, že  $S$  není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. Návod: stačí čtyři rezoluční kroky.
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $S$ , která je nesplnitelná.
- (e) Je  $S$  zamítnutelná LI-rezolucí?

**Příklad 6.** Buď  $T = \{\varphi\}$  teorie jazyka  $L = \langle U, c \rangle$  s rovností, kde  $U$  je unární relační symbol,  $c$  konstantní symbol, a axiom  $\varphi$  vyjadřuje “*Existuje alespoň 5 prvků, pro které platí  $U(x)$ .*”

- (a) Najděte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze  $T$ .
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 7.** Necht  $T = \{U(x) \rightarrow U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle U, f \rangle$  s rovností, kde  $U$  je unární relační symbol,  $f$  je unární funkční symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “*existují maximálně 4 prvky*”.

- (a) Je teorie  $T$  extenzí teorie  $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$  v jazyce  $L' = \langle U \rangle$ ? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

**Příklad 8.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovností, kde  $S$  je unární funkční symbol.

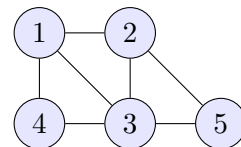
- (a) Nalezněte extenzi  $T'$  teorie  $T$  o definici nového unárního funkčního symbolu  $P$  takovou, že  $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$ .
- (b) Je teorie  $T'$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 9.** Necht  $T$  je extenze teorie  $DeLO^-$  (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom  $c \leq d$  v jazyce  $L = \langle \leq, c, d \rangle$  s rovností, kde  $c, d$  jsou nové konstantní symboly.

- (a) Jsou sentence  $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$  a  $(\forall x)(x \leq d)$  pravdivé / lživé / nezávislé v  $T$ ?
- (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$ .

**Příklad 10.** Mějme následující graf.

- (a) Najděte všechny automorfismy.
- (b) Které podmnožiny množiny vrcholů  $V$  jsou definovatelné? Uveďte definující formule. (*Nápověda: Využijte (a).*)
- (c) Které binární relace na  $V$  jsou definovatelné?



#### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 11.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovností, kde  $S$  je unární funkční symbol.

- (a) Buď  $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$ , kde  $S(r) = r + 1$  pro  $r \in \mathbb{R}$ . Pro která  $r \in \mathbb{R}$  je množina  $\{r\}$  definovatelná v  $\mathcal{R}$  z parametru 0?
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
- (c) Je extenze  $T'$  teorie  $T$  o axiom  $S(x) = x$   $\omega$ -kategorická teorie? Je  $T'$  kompletní?
- (d) Pro která  $0 < n \in \mathbb{N}$  existuje  $L$ -struktura  $\mathcal{B}$  velikosti  $n$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ? Existuje spočetná struktura  $\mathcal{B}$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ?