

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větev, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestavit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

#### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: “*Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.*”
- Na truhle B je nápis: “*V truhle A je smrtonosná past.*”

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

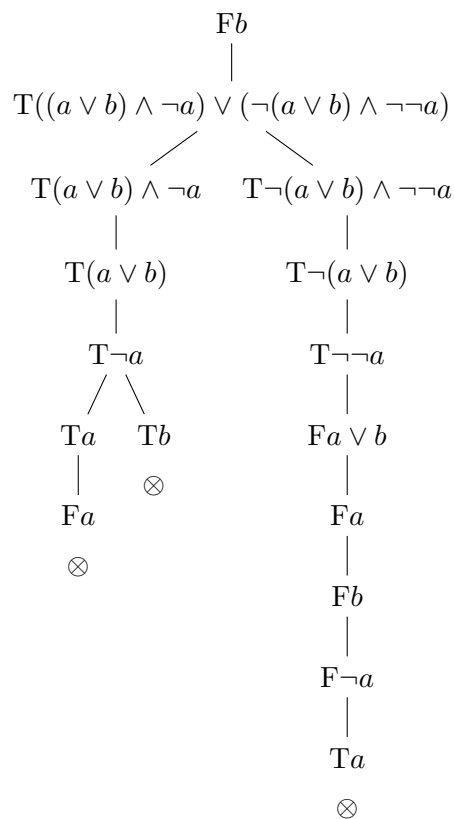
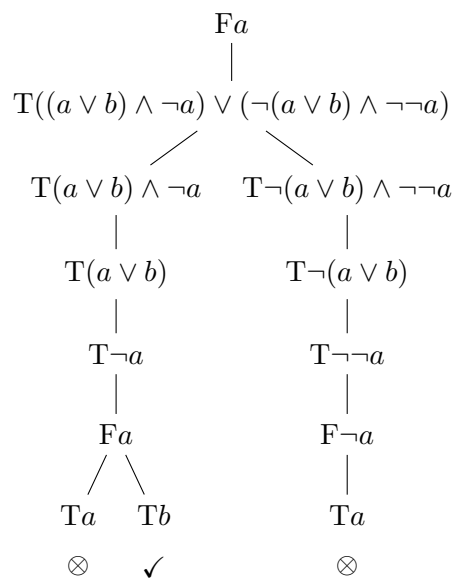
- Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii  $T$  nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných  $\mathbb{P}$ . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v  $\mathbb{P}$ .)
- Pokuste se sestavit tablo důkazy, z teorie  $T$ , výroků o významu “Poklad je v truhle A” a “Poklad je v truhle B”.
- Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestavte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
- Jaký závěr z toho můžeme učinit?

**Řešení.** (a) Z kontextu poznáme, že ‘*buď, ...nebo*’ je *exkluzivní* (truhla nemůže obsahovat zároveň poklad i smrtonosnou past). Zvolíme jazyk  $\mathbb{P} = \{a, b\}$ , kde  $a$  znamená ‘truhla A obsahuje poklad’, podobně pro  $b$ . Nápis na truhlách formalizujeme jako výroky  $a \vee b, \neg a$ . Teorie  $T$  vyjadřuje, že jsou oba pravdivé nebo oba lživé:

$$T = \{((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg \neg a)\}$$

(Alternativně bychom mohli formalizovat jako  $T = \{(a \vee b) \leftrightarrow \neg a\}$ , tj. nahlédnout, že “oba pravdivé nebo oba lživé” znamená ekvivalenci. Tabla by byla trochu menší, ale jinak podobná—vyzkoušejte si!)

- Tabla budou mít v kořeni položky  $Fa$  resp.  $Fb$  (dokazujeme ‘sporem’):

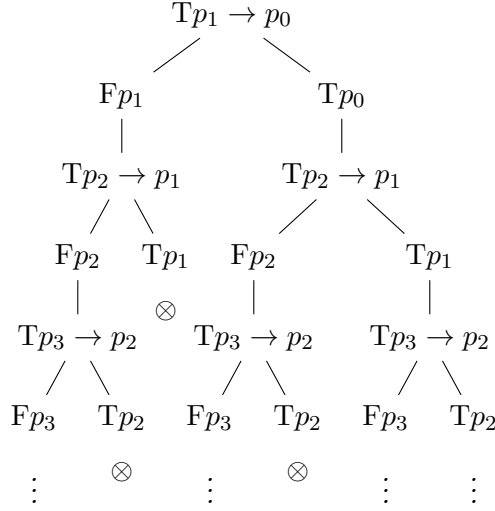


- (c) První tablo je dokončené, ale bezesporné. Bezesporná větev obsahuje položky  $Fa$ ,  $Tb$ , kanonický model pro tuto větev je  $v = (0, 1)$ . Je to model teorie  $T$  (všechny jeho větve jsou sporné), ve kterém v truhle  $A$  není poklad, tedy protipříklad k tvrzení, že v truhle  $A$  je poklad.
- (d) Druhé tablo je sporné, jde tedy o tablo důkaz a víme, že v truhle  $B$  je poklad.

**Příklad 2.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a)  $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  (b)  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Pomocí tablo metody najděte všechny modely  $T$ . Je každý model  $T$  kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

**Řešení.** Sestrojíme tablo z teorie  $T$ , do kořene dáme položku  $T\alpha_0$ , kde  $\alpha_0$  je první axiom  $T$ . Ukážeme jen začátek konstrukce, potřebujete-li, zkonstruuje více.

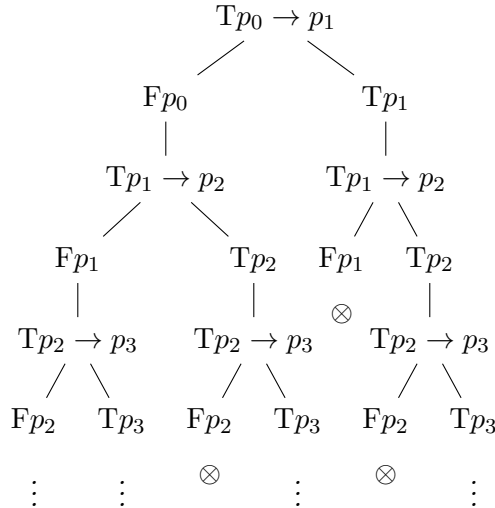
Nejprve vyřešme (a):



Každý model  $T$  se shoduje s některou (bezespornou) větví tohoto (dokončeného) tabla. (Zde dokonce platí, že každý model  $T$  je kanonickým modelem pro některou z větví. Obecně to ale neplatí.) Modely jsou:  $M(T) = \{v_{<k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{all}\}$  kde  $v_{all}(p_i) = 1$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ , a

$$v_{<k}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k, \\ 0 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

Nyní (b):



Opět není těžké nahlédnout, že každý model se shoduje s některou z větví. Máme  $M(T) = \{v_{none}\} \cap \{v_{\geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$  kde  $v_{none}(p_i) = 0$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ , a

$$v_{\geq k}(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i < k, \\ 1 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

**Příklad 3.** Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku  $\oplus$  (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

**Řešení.** Potřebujeme dvě atomická tabla, pro položky tvaru  $T\varphi \oplus \psi$  a  $F\varphi \oplus \psi$ . Mohou vypadat například následovně, podmínku si ověřte sami (snadno sémanticky):



**Příklad 4.** Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

**Řešení.** Pro konečná částečná uspořádání se dokáže snadno (podobně jako topologické uspořádání acyklického orientovaného grafu).

Mějme spočetně nekonečnou částečně uspořádanou množinu  $\langle X; \leq^X \rangle$ . Sestrojíme výrokovou teorii  $T$  takovou, aby její modely popisovaly lineární uspořádání na  $X$  rozšiřující  $\leq^X$ . Bude sestávat z následujících množin výroků:

- $p_{xx}$  pro všechna  $x \in X$  (reflexivita)
- $p_{xy} \rightarrow \neg p_{yx}$  pro všechna  $x \neq y \in X$  (antisymetrie)
- $p_{xy} \wedge p_{yz} \rightarrow p_{xz}$  pro všechna  $x, y, z \in X$  (tranzitivita)
- $p_{xy} \vee p_{yx}$  pro všechna  $x, y \in X$  (linearita)
- $p_{xy}$  pro všechna  $x, y$  taková, že  $x \leq^X y$  (jde o rozšíření  $\leq^X$ )

(Reflexivitu lze vynechat, plyne už z toho, že jde o rozšíření reflexivní relace  $\leq^X$ .)

Dokazujeme:  $\langle X; \leq^X \rangle$  má lineární rozšíření, právě když  $T$  má model, to je z věty o kompaktnosti právě když každá konečná část  $T$  má model. Vezměme libovolnou konečnou  $T' \subseteq T$ . Stačí tedy ukázat, že  $T'$  má model. Označme jako  $X'$  množinu všech  $x \in X$ , o kterých mluví  $T'$ , tj.:

$$X' = \{x \in X \mid p_{xy} \in \text{Var}(T') \text{ nebo } p_{yx} \in \text{Var}(T') \text{ pro nějaké } y \in X\}$$

Protože  $T'$  je konečná, je i  $X'$  konečná množina. Buď  $\leq^{X'}$  restrikce  $\leq^X$  na množinu  $X'$ , neboli  $\leq^{X'} = \leq^X \cap (X' \times X')$ . Toto konečné částečné uspořádání lze rozšířit na lineární uspořádání  $\leq_L^{X'}$ , což nám dává model teorie  $T'$  (kde  $v(p_{xy}) = 1$  právě když  $x \leq_L^{X'} y$ ).

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 5.** Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

- (i) Alespoň jeden z vyslýchanych říká pravdu a alespoň jeden lže.
- (ii) Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”
- (iii) Barbora říká: “Cyril lže”

(iv) *Cyřil řřká*: “Adam nebo Barbora řžou”

- (a) Zapiřte tvrzení (i) až (iv) jako vřroky  $\varphi_1$  až  $\varphi_4$  nad množinou prvovřroků  $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$ , přřčemř  $a, b, c$  znamená (po řadě), ře “Adam/Barbora/Cyřil řřká pravdu”.
- (b) Pomocř tablo metody dokařte, ře z teorie  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$  plyne, ře Adam řřká pravdu.
- (c) Je teorie  $T$  ekvivalentnř s teoriř  $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ ? Zdřvodnřte.

**Přřklad 6.** Pomocř tablo metody dokařte, ře nřsledujřcř vřroky jsou tautologie:

- (a)  $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$
- (b)  $p \leftrightarrow \neg\neg p$
- (c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (d)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

**Přřklad 7.** Pomocř tablo metody dokařte nebo najděte protipřřklad ve formě *kanonickřho* modelu pro bezspornou vřtev.

- (a)  $\{\neg q, p \vee q\} \models p$
- (b)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$
- (c)  $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

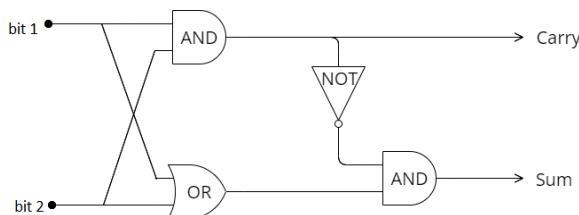
**Přřklad 8.** Pomocř tablo metody urřete vřechny modely nřsledujřcřch teoriř:

- (a)  $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$
- (b)  $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
- (c)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

**Přřklad 9.** Navrhnřte vhodnř atomickř tabla a ukařte, ře souhlasř-li model s kořenem vařich atomickřch tabel, souhlasř i s nřkterou vřtvř:

- pro Peirceovu spojku  $\downarrow$  (NOR),
- pro Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND),
- pro  $\oplus$  (XOR),
- pro ternřrnř operřtor “if  $p$  then  $q$  else  $r$ ” (IFTE).

**Přřklad 10.** *Half-adder circuit* je logickř obvod se dvřma vstupnřmi bity (bit 1, bit 2) a dvřma vřstupnřmi bity (carry, sum) nřzornřnř v nřsledujřcřm diagramu:



- (a) Formalizujte tento obvod ve vřrokově logice. Konkrětně, vyjřdřete jej jako teorii  $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$ , kde vřrokově proměnně znamenajř po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule  $\varphi, \psi$  neobsahujř proměnně  $c, s$ .
- (b) Dokařte tablo metodou, ře  $T \models c \rightarrow \neg s$ .

**Přřklad 11.** Pomocř vřty o kompaktnosti dokařte, ře kařdř spočetnř rovinnř graf je obarvitelnř čtyřmi barvami. Mřřete využřt Vřtu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

## K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 12.** Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí:

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi$$

**Příklad 13.** Mějme dvě neprázdné teorie  $A, B$  v témž jazyce. Necht platí, že každý model teorie  $A$  splňuje alespoň jeden axiom teorie  $B$ . Ukažte, že existují konečné množiny axiomů  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$  a  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq B$  takové, že  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rightarrow \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$  je tautologie.