

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky, T -ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$, (e) má za modely právě $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

Příklad 2. Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, (b) $\{\downarrow\}$ kde \downarrow je Peirce arrow (NOR)

Příklad 3. Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

Příklad 4. Mějme teorii $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

- Rozhodněte, zda je teorie T [sporná/splnitelná/kompletní].
- Uveďte příklad výroku φ , který je [pravdivý/lživý/nezávislý] v T
- Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní]. Uveďte také příklad extenze T' teorie T , která není konzervativní, ani jednoduchá.
- Na vašich příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/reduktů modelů).

Příklad 5. Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce \mathbb{P} platí:

- $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg \varphi$
- $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
- $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
- $T \models \varphi \rightarrow \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 6. Mějme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.

- (a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T , lživý v T , nezávislý v T , splnitelný v T , a dvojice T -ekvivalentních výroků.
 (b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T ? T -ekvivalentní?

$$p, \neg q, \neg p \vee q, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r, p \vee q \vee r$$

Příklad 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- (a) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$,
 (b) $\{\uparrow\}$ kde \uparrow je Sheffer stroke (NAND),

Příklad 8. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

- (a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
 (b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

Příklad 9. Převeďte do CNF a DNF oběma metodami: $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$

Příklad 10. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj: $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 11. Stejně zadání, jako Příklad 4, ale pro teorii $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

Příklad 12. Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T , S nad \mathbb{P} platí:

- (a) $S \subseteq T \Rightarrow \text{Csq}(T) \subseteq \text{Csq}(S)$
 (b) $\text{Csq}(S \cup T) = \text{Csq}(S) \cup \text{Csq}(T)$
 (c) $\text{Csq}(S \cap T) = \text{Csq}(S) \cap \text{Csq}(T)$

K ZAMYŠLENÍ

Příklad 13. Ukažte, že \wedge a \vee nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 14. Uvažte Booleovský operátor IFTE(p, q, r) definovaný jako ‘if p then q else r ’.

- (a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.
 (b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ($\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Příklad 15. Buď \mathbb{P} spočetně nekonečná množina prvovýroků.

- (a) Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathbb{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
 (b) Uveďte příklad množiny modelů K , kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 16. Najděte CNF a DNF reprezentaci n -ární parity, tj. Booleovské funkce par: $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\text{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n .

Příklad 17. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\text{var}(T)$.

- (a) Najděte všechny modely T .
 (b) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledky T ?