

Šestá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Program

- sémantika predikátové logiky
- vlastnosti teorií
- podstruktura, expanze, redukt

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.4–6.6 z Kapitoly 6

6.4 Sémantika

- **modely jsou struktury** dané signatury,
- formule **platí** ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- **hodnoty termů** (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme **pravdivostní hodnoty atomických formulí**: je výsledná n -tice v relaci (interpretující daný relační symbol)?
- hodnoty složených formulí vyhodnocujeme také podle jejich stromu, přičemž $(\forall x)$ hraje roli 'konjunkce přes všechny prvky' a $(\exists y)$ hraje roli 'disjunkce přes všechny prvky' z domény struktury

Modely jazyka

Model jazyka L , nebo také **L -struktura**, je libovolná struktura v signatuře jazyka L . **Třidu** všech modelů jazyka označíme M_L .

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč **třída** a ne **množina** všech modelů M_L ? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je '**soubor**' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v **jazyce teorie množin**)

Mezi **modely jazyka uspořádání** $L = \langle \leq \rangle$ patří:

- částečně uspořádané množiny $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy **teorie uspořádání**
- $\langle \mathbb{C}, R^{\mathbb{C}} \rangle$ kde $(z_1, z_2) \in R^{\mathbb{C}}$ právě když $|z_1| = |z_2|$ (není č. usp.)

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L -strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \text{Var} \rightarrow A$.

Hodnota termu t ve struktuře \mathcal{A} při ohodnocení e , značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \text{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v t
- obecně, term t reprezentuje **termovou funkci** $f_t^{\mathcal{A}}: A^k \rightarrow A$, kde k je počet proměnných v t
- speciálně, hodnota konstantního termu na ohodnocení nezávisí, konstantní termy reprezentují konstantní funkce

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \perp) \wedge y$ v Booleově algebře

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ jazyka

$L = \langle +, 1 \rangle$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = 2$

$$(x + 1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$$

Pravdivostní hodnota formule

Bud' φ v jazyce L , $\mathcal{A} \in M_L$, $e : \text{Var} \rightarrow A$ ohodnocení proměnných.

Pravdivostní hodnota φ v \mathcal{A} při ohodnocení e , $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

- pro atomickou formuli $R(t_1, \dots, t_n)$:

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formuli tvaru $(\neg\varphi)$:

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

- pro formuli tvaru $(\varphi \square \psi)$ kde $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi \square \psi)[e] = f_{\square}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\text{PH}^A((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\text{PH}^A((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\text{PH}^A(\varphi)[e(x/a)])$$

kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pozorování: Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.
Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- tedy v ohodnocení e nastavíme hodnotu proměnné x postupně na všechny prvky $a \in A$ a požadujeme, aby PH byla jedna vždy (v případě \forall) nebo alespoň jednou (v případě \exists)
- speciálně, $\text{PH}^A(t_1 = t_2)[e] = 1 \Leftrightarrow (t_1^A[e], t_2^A[e]) \in =^A$ (**identita** na A), tj. $t_1^A[e] = t_2^A[e]$ (je to stejný prvek A)

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$
- $\text{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence)

Ale pro strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ máme:

- $\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 0$

Mějme formuli φ , strukturu \mathcal{A} (ve stejném jazyce), a ohodnocení e .

- je-li $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ **platí** v \mathcal{A} **při ohodnocení** e , $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ **neplatí** v \mathcal{A} **při ohodnoc.** e , $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je **pravdivá** (**platí**) v \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \text{Var} \rightarrow A$
- φ je **lživá** v \mathcal{A} , pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě $\mathcal{A} \models \neg\varphi$)
- pozor, **lživá** není totéž, co **není pravdivá** (**neplatí**)!
(je to pravda jen pro sentence)
- **platnost** je klíčový pojem sémantiky a celé logiky

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře při ohodnocení

- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$ právě když platí: jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ potom $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$ právě když platí: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
- $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$
- je-li term t substituovatelný za proměnnou x do φ , potom:
 $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro $a = t^{\mathcal{A}}[e]$
- je-li ψ varianta φ , potom $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře

- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace
- $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$
- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \psi$, potom $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace.
- $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
- speciálně, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ platí ve struktuře \mathcal{A} , právě když v \mathcal{A} platí její **generální uzávěr**, tj. sentence $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

6.5 Vlastnosti teorií

- **teorie** jazyka L je množina L -formulí, její prvky jsou **axiomy**
- **model** teorie T je L -struktura, ve které platí všechny axiomy T , tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- **třída modelů** teorie T je:

$$M_L(T) = \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L -formule, potom φ je:

- **pravdivá (platí) v T** , značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in M(T)$ (neboli: $M(T) \subseteq M(\varphi)$)
- **lživá v T** , pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $M(T) \cap M(\varphi) = \emptyset$)
- **nezávislá v T** , pokud není pravdivá v T ani lživá v T
- je-li $T = \emptyset$ (tj. $M(T) = M_L$), píšeme jen $\models \varphi$, a říkáme, že φ je pravdivá (v logice), (logicky) platí, je tautologie, apod.

Další sémantické pojmy o teorii

- T je **sporná**, pokud v ní platí **spor** \perp (definujeme jako $R(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots, x_n)$, kde R je lib. relační symbol)
- T je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je **bezesporná** (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)
- **důsledky** T jsou **sentence** pravdivé v T , množina všech důsledků T v jazyce L je

$$\text{Csq}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

Kompletnost v predikátové logice

- T je **kompletní**, je-li bezesporná a každá **sentence** je v ní buď pravdivá, nebo lživá. **Pozor: neplatí, že má jediný model!**
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho **izomorfních** modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model **až na izomorfismus** ale také **nestačí!**

Struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} (v témž jazyce) jsou **elementárně ekvivalentní**, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model **až na elementární ekvivalenci**.

Příklad: uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

- **nejsou izomorfní**, \mathbb{Q} je spočetná a \mathbb{R} nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná **bijekce** mezi domény
- **ale $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$** : indukcí dle struktury sentence φ lze ukázat $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$; netriviální případ je \exists , klíčová je **hustota**

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,
- právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T ,
- právě když φ platí v každém modelu T (φ je sentence!). \square

NB: Předpoklad, že φ je sentence, je nutný: pro $T = \{P(c)\}$ a formuli $\varphi = P(x)$ je $P(c) \not\models P(x)$ ale $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model.

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy **ireflexivity** a **symetrie**

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. **jednoduché** grafy, hranu $\{x, y\}$ reprezentuje dvojice $(x, y), (y, x)$

- Formule $\neg x = y \rightarrow E(x, y)$ platí v grafu, právě když je **úplný**. Je tedy nezávislá v T_{graph} .
- Formule $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge (\forall z)(E(x, z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2))$ vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2. Platí tedy právě v grafech, které jsou disjunktní sjednocení kružnic, a je nezávislá v teorii T_{graph} .

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy **reflexivity**, **antisymetrie**, a **tranzitivity**

$$T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde \leq^S je **částečné uspořádání**.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (**linearita**) platí v \mathcal{A} , ale neplatí v \mathcal{B} : neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T .
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ψ) je pravdivá v \mathcal{B} a lživá v \mathcal{A} , píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je také nezávislá v T .
- Formule $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ (označme χ) je pravdivá v T , píšeme $T \models \chi$. Totéž platí pro její **generální uzávěr** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\chi$.

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned}T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x, \quad x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0, \quad (-x) + x = 0 \}\end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů: $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ s rovností, navíc neutralita 1 vůči \cdot , asociativita \cdot , a (levá i pravá) distributivita \cdot vůči $+$

$$\begin{aligned}T_3 = T_2 \cup \{ & 1 \cdot x = x \cdot 1, \\ & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ & (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \}\end{aligned}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom **komutativity** \cdot :

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy **existence inverzního prvku** $k \cdot$ a **netriviality**:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1), \neg 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů **kompatibility uspořádání**:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Modely jsou tělesa s **lineárním (totálním)** uspořádáním, které je kompatibilní s tělesovými operacemi.

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- B musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je **(indukovaná) podstruktura** struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B , a výstupy jsou všechny z B

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je **uzavřená** na funkci $f : A^n \rightarrow A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury \mathcal{A} (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce** \mathcal{A} na množinu C , značíme $\mathcal{A} \upharpoonright C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e: \text{Var} \rightarrow \mathcal{B}$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ , pro atomickou zřejmé. \square

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře \mathcal{A} , právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa \mathbb{Q} na množině \mathbb{Z} , $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce \mathcal{A} (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je **generovaná** X , značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud \mathcal{A} nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \upharpoonright X$.

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L -strukturu \mathcal{A} a L' -strukturu \mathcal{A}' na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v \mathcal{A} i v \mathcal{A}' , potom:

- \mathcal{A}' je **expanze** \mathcal{A} do L' (**L' -expanze** struktury \mathcal{A})
- \mathcal{A} je **redukt** \mathcal{A}' na L (**L -redukt** struktury \mathcal{A}')

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
 - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
 - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (**okruh** celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom **expanze** \mathcal{G} o **jména prvků** (z množiny G) je struktura $\langle G, E^{\mathcal{G}}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena **novým** konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L -formuli φ s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n . Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a buď T' stejná teorie jako T , ale v jazyce L' . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

⇒ **Víme:** φ platí v každém modelu T . **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T' . Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Bud' \mathcal{A} redukt \mathcal{A}' na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že \mathcal{A} je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e' , speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v \mathcal{A}' .

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

⇐ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T' . **Chceme:** φ platí v každém modelu T . Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Bud' \mathcal{A}' expanze \mathcal{A} do L' , kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e' . Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$), z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$.

Formule φ neobsahuje c (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □