NAIL062 P&P Logic: Worksheet 5 – The resolution method

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- zná potebné pojmy z rezoluní metody (rezoluní pravidlo, rezolventa, rezoluní dkaz/zamítnutí, rezoluní strom), umí je formáln definovat, uvést píklady
- umí pracovat s výroky v CNF a jejich modely v mnoinové reprezentaci
- umí sestrojit rezoluní zamítnutí dané (i nekonené) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit písluný rezoluní strom
- zná pojem stromu dosazení, umí ho formáln definovat a pro konkrétní CNF formuli sestrojit
- umí aplikovat rezoluní metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.)

Píklady na cviení

Problem 1. Oznamе jako φ výrok $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. Ukate, e φ je tautologie:

(a) Pevete $\neg\varphi$ do CNF a zapite výsledný výrok jako formuli S v mnoinové reprezentaci.
(b) Najdte rezoluní zamítnutí S.

Solution. *(a) Pomocí ekvivalentních úprav:* $\neg\varphi = \neg(\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg(\neg\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg(p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q)) \sim \neg p \wedge \neg q \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \sim \neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)$

$$S = \{\{\neg p\}, \{\neg q\}, \{p, q\}\}$$

(b) Rezoluní zamítnutí: $\{\neg p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{\neg q\}, \square$ *(nakreslete si rezoluní strom).*

Problem 2. Dokate rezolucí, e v $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí výrok s.

Solution. *Teorii* $T \cup \{\neg s\}$ *pevedeme do CNF:, a zapíeme v mnoinové reprezentaci. Máme* $(r \rightarrow p) \rightarrow s \sim \neg(\neg r \vee p) \vee s \sim (r \wedge \neg p) \vee s \sim (r \vee s) \wedge (\neg p \vee s)$, *ostatní axiomy se pevedou snadno. Dostaneme:* $S = \{\{p, \neg q\}, \{q, \neg r\}, \{r, s\}, \{\neg p, s\}, \{\neg s\}\}$. *Rezoluní zamítnutí znázorníme rezoluním stromem:*

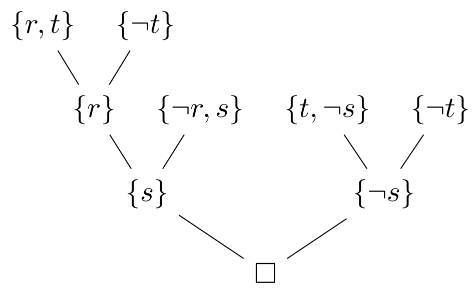
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\{r,s\} & & \{\neg s\} & & & & \{\neg p, s\} & & \{\neg s\} & & \\
& \diagdown & \diagup & & & & & \diagdown & \diagup & & \\
& & \{r\} & & \{q,\neg r\} & & & \{\neg p\} & & \{p,\neg q\} & \\
& & & \diagdown & \diagup & & & & \diagdown & \diagup & \\
& & & & \{q\} & & & & & \{\neg q\} & \\
& & & & & \diagdown & & \diagup & & & \\
& & & & & & \square & & & &
\end{array}$$

Problem 3. Nech prvovýroky r, s, t reprezentují (po ad), e *"Radka / Sára / Tom je ve kole"* a oznamе $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, e:

- *Není-li Tom ve kole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do koly nechodí.*
- *Není-li Radka ve kole, je tam Tom.*

(a) Formalizujte nae znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$.
(b) Rezoluní metodou dokate, e z T vyplývá, e *Tom je ve kole*: Napite formuli S v mnoinové reprezentaci, která je nesplnitelná, práv kdy to platí, a najdte rezoluní zamítnutí S. Nakreslete rezoluní strom.
(c) Urete mnoinu model teorie T.

Solution. *(a)* $T = \{\neg t \to \neg s, \neg(r \wedge \neg s), \neg r \to t\}$
(b) S získáme z teorie $T \cup \{\neg t\}$ pevodem do CNF: $S = \{\{t, \neg s\}, \{\neg r, s\}, \{r, t\}, \{\neg t\}\}$

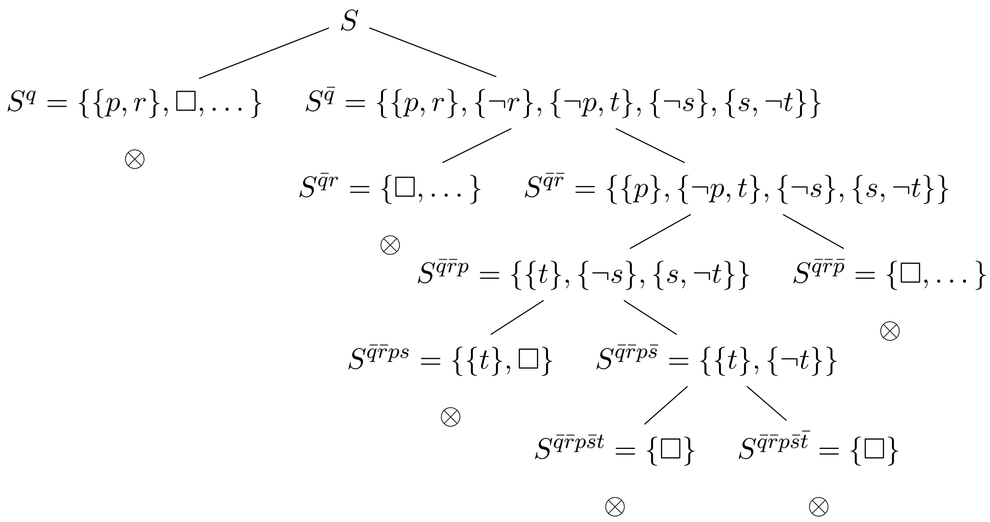


(c) Vyuijeme toho, e $T \models t$ (dokázali jsme v (b)). První a tetí axiom jsou díky tomu splnny, $T \sim \{t, \neg(r \wedge \neg s)\}$. Z toho snadno $\mathrm{M}(T) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$.

Problem 4. Zkonstruujte *strom dosazení* pro následující formuli. Na základ tohoto stromu sestrojte rezoluní zamítnutí, dle postupu z dkazu Vty o úplnosti rezoluce.

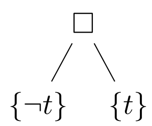
$$S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$$

Solution. *Pednostn vtvíme pes výrokové promnné v jednotkových klauzulích. (Jakmile narazíme na prázdnou klauzuli, víme, e vtev je sporná, zbytek formule nepotebujeme, zde kvli nedostatku místa nebudeme zapisovat.)*



Strom dosazení dává "návod", jak sestrojit rezoluní zamítnutí (to je klíem k dkazu vty o úplnosti rezoluce). Postupujeme od list ke koeni, neboli podle potu promnných ve formulích. Pro formule na listech stromu dosazení máme jednoprvková rezoluní zamítnutí $\square$.

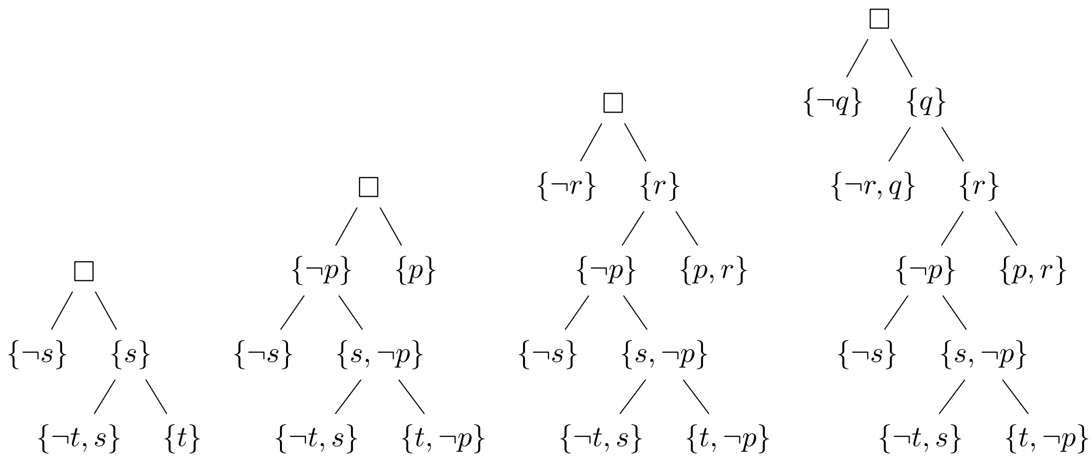
Formule $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}} = \{\{t\}, \{\neg t\}\}$ má jednokrokové rezoluní zamítnutí:



Jak vzniklo? Z rezoluního zamítnutí $\square$ *formule* $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}t}$ *vyrobíme rezoluní dkaz klauzule* $\{\neg t\}$ *z* $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$*, a to tak, e pro kadý list, který vznikl odebráním literálu* $\neg t$*, vrátíme* $\neg t$ *do nj i do vech klauzulí nad ním. (Zde máme jen jeden list, co je zárove koen* $\square$*.)*

Analogicky vyrobíme rezoluní dkaz $\{t\}$ *z* $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}\bar{t}}$ *(pidáváme do vrchol literál* t*). A nakonec pidáme jeden rezoluní krok, který z* $\{\neg t\}$ *a* $\{t\}$ *odvodí* $\square$*. (Pokud by ádný list nevznikl odebráním literálu z klauzule z* $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$*, znamená to, e rezoluní zamítnutí, které máme, je u i rezoluním zamítnutím* $S^{\bar{q}\bar{r}p\bar{s}}$*.)*

Stejn postupujeme ve stromu výe, pro $S^{\bar{q}\bar{r}p}$*,* $S^{\bar{q}\bar{r}}$*,* $S^{\bar{q}}$*, a nakonec pro* S*:*



Ovte, e výsledný strom opravdu reprezentuje rezoluní zamítnutí S*. Vimnte si, jak jeho tvar kopíruje tvar stromu dosazení. (V naem pípad je strom "chlupatá cesta", co obecn být nemusí, ale konstrukce funguje stejn.)*

Dalí píklady k procviení

Problem 5. Najdte rezoluní zamítnutí následujících výrok:

(a) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$
(b) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$

Problem 6. Tonia a Fabio nám popisují svj nejnovjí recept na nejlepí pizzu na svt.

- Tonia ekla: "Do receptu patí anoviky nebo bazalka nebo esnek."
- Tonia také ekla: "Jestli tam nepatí duená unka, nepatí tam ani bazalka."
- Fabio ekl: "Do receptu patí duená unka."
- Fabio dále ekl: "Nepatí tam anoviky ani bazalka, ale patí tam esnek."

Víme, e Tonia vdy mluví pravdu, zatímco Fabio vdy le.

(a) Vyjádete nae znalosti jako výrokovou teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b, c, d\}$, kde výrokové promnné mají po ad význam "do receptu patí anoviky/bazalka/esnek/duená unka".
(b) Pomocí rezoluní metody dokate, e z teorie T vyplývá, e "do receptu patí anoviky". Nakreslete rezoluní strom.

Problem 7. Celá ísla postihla záhadná nemoc íící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro vechna ísla ve vech krocích).

(i) Zdravé íslo onemocní, práv kdy je práv jedno sousední íslo nemocné (v pedchozím ase).
(ii) Nemocné íslo se uzdraví, práv kdy je pedchozí íslo nemocné (v pedchozím ase).

(iii) V ase 0 *bylo nemocné íslo* 0*, ostatní ísla byla zdravá.*

(a) Napite teorie T_1, T_2, T_3 vyjadující (po ad) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ nad mnoinou prvovýrok $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjaduje, e "*íslo i je v ase t nemocné.*"

(b) Pevete axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napite teorii S v mnoinové reprezentaci, která je nesplnitelná, práv kdy $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: "*íslo* 1 *je zdravé v ase* 2." (Staí pevést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3, ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen písluné klauzule.)

(c) Rezolucí dokate, e S je nesplnitelná. Zamítnutí znázornte rezoluním stromem.

K zamylení

Problem 8. Dokate podrobn, e je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, potom je i C splnitelná.