

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky,  $T$ -ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

#### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Uveďte příklad výroku v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ , který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ , (e) má za modely právě  $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ .

**Řešení.** *Například: (a)  $p \vee \neg p$ , (b)  $p \wedge \neg p$ , (c)  $p$ , (d)  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$  (e)  $(p \vee r) \wedge \neg q$*

**Příklad 2.** Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a)  $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ , (b)  $\{\downarrow\}$  kde  $\downarrow$  je Peirce arrow (NOR)

**Řešení.** (a) *Ne, dokažte strukturální indukci, že každá formule má za model  $(1, \dots, 1)$ .*  
(b) *Ano, využijeme faktu, že  $\{\neg, \vee, \wedge\}$  je univerzální, a vyjádříme:*

- $\neg x \sim x \downarrow x$
- $x \vee y \sim \neg(x \downarrow y) \sim (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
- $x \wedge y \sim \neg(\neg x \vee \neg y) \sim \neg x \downarrow \neg y \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

**Příklad 3.** Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

**Řešení.** (a) *Nejprve najdeme modely výroku:  $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ , každý model popíšeme jednou elementární konjunkcí:*

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

*CNF získáme z množiny nemodelů, každá klauzule zakazuje jeden nemodel:*

$$\{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

(b)  *$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \sim \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \wedge r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$  je DNF, CNF získáme distribucí, a dále zjednodušíme:  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \sim (p \vee r) \wedge \neg q$*

**Příklad 4.** Mějme teorii  $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .

(a) Rozhodněte, zda je teorie  $T$  [sporná/splnitelná/kompletní].

- (b) Uveďte příklad výroku  $\varphi$ , který je [pravdivý/lživý/nezávislý] v  $T$
- (c) Uveďte příklad extenze  $T'$  teorie  $T$  (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s  $T$ ), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní]. Uveďte také příklad extenze  $T'$  teorie  $T$ , která není konzervativní, ani jednoduchá.
- (d) Na vašich příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/reduktů modelů).

**Řešení.** Budeme potřebovat znát modely:  $M(T) = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

- (a) *Není sporná, je splnitelná, není kompletní.*
- (b) *V teorii  $T$  je pravdivý např.  $p \vee r$ , lživý  $\neg q \wedge \neg r$ , nezávislý  $p \vee q$ .*
- (c) *Uveďme příklady nebo zdůvodnění neexistence:*
1. *Jednoduchá:  $\{p \wedge q\}$*
  2. *Konzervativní:  $T_2 = \{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r, p \vee s\}$  v jazyce  $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$*
  3. *Kompletní:  $\{\neg p, \neg q, r, \neg s\}$  v jazyce  $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$*
  4. *Konzervativní jednoduchá: musí být ekvivalentní  $T$ , např.  $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r\}$*
  5. *Kompletní jednoduchá:  $\{p, q, \neg r\}$*
  6. *Kompletní konzervativní: neexistuje, nekompletní teorie nemůže mít kompletní konzervativní extenzi (dokažte si).*
  7. *Není konzervativní ani jednoduchá:  $\{p \wedge q, r \vee s\}$  v jazyce  $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$ .*
- (d) *Zkonstruuje příslušné množiny modelů a ověří podmínku, ukážeme jen pro 2.:*

$$M_{\mathbb{P}'}(T_2) = \{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

Vidíme, že zúžením modelů  $T_2$  na jazyk  $\mathbb{P}$  získáme jen modely  $T$ , tedy jde o extenzi, a každý model  $T$  lze rozšířit na nějaký model  $T_2$ , tedy je extenze konzervativní.

**Příklad 5.** Dokažte nebo vyvráťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  v jazyce  $\mathbb{P}$  platí:

- (a)  $T \models \varphi$ , právě když  $T \not\models \neg \varphi$
- (b)  $T \models \varphi$  a  $T \models \psi$ , právě když  $T \models \varphi \wedge \psi$
- (c)  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ , právě když  $T \models \varphi \vee \psi$
- (d)  $T \models \varphi \rightarrow \psi$  a  $T \models \psi \rightarrow \chi$ , právě když  $T \models \varphi \rightarrow \chi$

**Řešení.** Uvedeme jen správné odpovědi a protipříklady, dokažte si sami (z definic).

- (a) *Neplatí, např. pro  $T = p \vee q, \varphi = p$ . (Je-li  $T$  bezsporná, platí  $\Rightarrow$ .)*
- (b) *Platí.*
- (c) *Neplatí, např. pro  $T = p \vee q, \varphi = p, \psi = q$ . Platí  $\Rightarrow$ .*
- (d) *Neplatí, např. pro  $T = \{p \rightarrow r\}, \varphi = p, \psi = q, \chi = r$ . Platí  $\Rightarrow$ .*

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Mějme teorii  $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$  v jazyce  $\{p, q, r\}$ .

- (a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v  $T$ , lživý v  $T$ , nezávislý v  $T$ , splnitelný v  $T$ , a dvojice  $T$ -ekvivalentních výroků.
- (b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v  $T$ ?  $T$ -ekvivalentní?

$$p, \neg q, \neg p \vee q, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r, p \vee q \vee r$$

**Příklad 7.** Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- (a)  $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ,

(b)  $\{\uparrow\}$  kde  $\uparrow$  je Sheffer stroke (NAND),

**Příklad 8.** Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

(a)  $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$

(b)  $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

**Příklad 9.** Převedte do CNF a DNF oběma metodami:  $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$

**Příklad 10.** Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj:  $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ , která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

**Příklad 11.** Stejně zadání, jako Příklad 4, ale pro teorii  $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .

**Příklad 12.** Dokažte nebo vyvratěte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie  $T$ ,  $S$  nad  $\mathbb{P}$  platí:

(a)  $S \subseteq T \Rightarrow \text{Csq}(T) \subseteq \text{Csq}(S)$

(b)  $\text{Csq}(S \cup T) = \text{Csq}(S) \cup \text{Csq}(T)$

(c)  $\text{Csq}(S \cap T) = \text{Csq}(S) \cap \text{Csq}(T)$

### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 13.** Ukažte, že  $\wedge$  a  $\vee$  nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že  $\{\wedge, \vee\}$  není *univerzální* množina logických spojek.

**Příklad 14.** Uvažte Booleovský operátor  $\text{IFTE}(p, q, r)$  definovaný jako ‘if  $p$  then  $q$  else  $r$ ’.

(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.

(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ( $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$ ) lze vyjádřit pomocí  $\text{IFTE}$  a konstant  $\text{TRUE}$  a  $\text{FALSE}$ .

**Příklad 15.** Buď  $\mathbb{P}$  spočetně nekonečná množina prvovýroků.

(a) Ukažte, že již neplatí, že každou  $K \subseteq \mathbb{M}_{\mathbb{P}}$  lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.

(b) Uveďte příklad množiny modelů  $K$ , kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

**Příklad 16.** Najděte CNF a DNF reprezentaci  $n$ -ární parity, tj. Booleovské funkce  $\text{par}: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\text{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty  $n$ .

**Příklad 17.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$  nad  $\text{var}(T)$ .

(a) Najděte všechny modely  $T$ .

(b) Které výroky ve tvaru  $p_i \rightarrow p_j$  jsou důsledky  $T$ ?