NAIL062 V&P Logika: 10. sada příkladů – Rezoluční metoda v PL

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

Příklady na cvičení

Příklad 1. *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.* Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Řešení. *Nejprve zvolíme vhodný jazyk. V textu identifikujeme vlastnost objektů "x je holič" a vztah dvou objektů "(kdo) x holí (koho) y". Použijeme jazyk* $L = \langle B, S\rangle$ *bez rovnosti, kde* B *je unární relační symbol,* $B(x)$ *má význam "x je holič (barber)",* S *je binární relační symbol,* $S(x, y)$ *znamená "x holí (shaves) y".*

V tomto jazyce formalizujeme tvrzení ze zadání:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe:*
$$\varphi_1 \; = \; (\forall x)(B(x) \rightarrow (\forall y)(\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)))$$
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe:*
$$\varphi_2 \; = \; \neg(\exists x)(B(x) \wedge (\exists y)(S(x, y) \wedge S(y, y)))$$
- *Neexistují žádní holiči:*
$$\psi \; = \; \neg(\exists x)B(x)$$

Naším cílem je ukázat, že v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ *platí sentence* ψ*. Dokazujeme sporem, vyjdeme tedy z teorie* $T \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$*. Pomocí skolemizace k ní najdeme ekvisplnitelnou CNF formuli* S*. Najdeme rezoluční zamítnutí* S*, čímž ukážemem že* S *a tedy i* $T \cup \{\neg\psi\}$ *je nesplnitelná.*

Převedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, a převedeme do CNF:

- $\varphi_1 \; \rightsquigarrow \; B(x) \rightarrow (\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)) \; \sim \; \neg B(x) \vee S(y, y) \vee S(x, y)$
- $\varphi_1 \; \rightsquigarrow \; \neg(B(x) \wedge S(x, y) \wedge S(y, y)) \; \sim \; \neg B(x) \vee \neg S(x, y) \vee \neg S(y, y)$
- $\neg\psi \rightsquigarrow \; B(c)$ *(kde* c *je nový konstantní symbol)*

Před skolemizací se ujistěte, že máte sentence. A nezapomeňte, že musíme skolemizovat sentenci $\neg\psi$*, ne* ψ*. (Negace skolemovy varianty není ekvisplnitelná s negací původní formule! Skolemizací* $\neg\exists B(x)$ *bychom dostali* $\neg B(x)$*, čehož negace je* $B(x)$*, tj. 'všichni jsou holiči' zatímco správným postupem dostaneme '(svědek) c je holič'.).*

V množinovém zápisu tedy máme:

$$S = \{\{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y), \neg S(y, y)\}, \{B(c)\}\}$$

Rezoluční zamítnutí:

$$\{B(c)\}, \{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\}, \{S(y,y), S(c,y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x,y'), \neg S(y',y')\},$$
$$\{\neg S(c,y'), \neg S(y',y')\}, \square$$

První dvě klauzule jsou z S, třetí jejich rezolventa za použití unifikace $\{x/c\}$. Čtvrtá klauzule je variantou klauzule z S, proměnnou y jsme přejmenovali na y', abychom dodrželi technickou podmínku o disjunktních množinách proměnných v rezolvovaných klauzulích. Pátá klauzule je rezolventou první a čtvrté za použití unifikace $\{x/c\}$. Poslední, prázdná klauzule $\square$ je rezolventou z 3. a 5. klauzule, unifikace $\{y/c, y'/c\}$.

Typicky ale zamítnutí zakreslíme pouze rezolučním stromem, naznačíme i použité unifikace:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\{B(c)\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\} \arrow[dl, dash] & \{B(c)\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg B(x), \neg S(x,y'), \neg S(y',y')\} \arrow[dl, dash] \\
\{x/c\} & \{S(y,y), S(c,y)\} \arrow[drr, dash] & & & \{\neg S(c,y'), \neg S(y',y')\} \arrow[dl, dash] & \{x/c\} \\
& \{y/c, y'/c\} & & \square & &
\end{tikzcd}$$

Příklad 2. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

(i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
(ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

(a) Vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti (P je binární, K unární relační symbol, $P(x,y)$ znamená 'ovce x porodila ovci y', $K(x)$ 'ovce x byla naklonována').
(b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
(c) Najděte rezoluční zamítnutí S, nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
(d) Má S LI-zamítnutí?

Řešení. *Všimněte si, že všechny objekty, o kterých mluvíme, jsou ovce, nepotřebujeme tedy predikát pro 'býti ovcí'. Postup je stejný jako v předchozím příkladě:*

(a) Možností jak formulovat formule je více, pokud se snažíme co nejpřesněji držet textu, dostaneme např.:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\forall x)(((\exists y)P(y,x) \lor K(x)) \land \neg((\exists z)P(z,x) \land K(x))) \\
\varphi_2 &= \neg(\exists x)(K(x) \land (\exists y)P(x,y)) \\
\varphi_3 &= (\forall x)((\exists y)P(x,y) \to (\exists z)P(z,x))
\end{aligned}$$

(b) Vyjdeme z teorie $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ (dokazujeme sporem). Převedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, převedeme do CNF, a zapíšeme v množinovém zápisu:

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(y,x) \lor K(x)) \land \neg(P(z,x) \land K(x))) \rightsquigarrow (P(f(x),x) \lor K(x)) \land \neg(P(z,x) \land K(x)) \sim \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}\}$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)\neg(K(x) \land P(x,y)) \sim \{\{\neg K(x), \neg P(x,y)\}\}$
- $\neg\varphi_3 \sim (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(P(x,y) \to P(z,x)) \rightsquigarrow \neg(P(c,d) \to P(z,c)) \sim \{\{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

$S = \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}, \{\neg K(x), \neg P(x,y)\}, \{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

(c) *Rezoluční strom pro rezoluční zamítnutí $S \vdash_R \square$:*

$$\begin{array}{cccc}
\{P(f(x),x),K(x)\} & \{\neg P(z,c)\} & & \\
& \{x/c, z/f(c)\}\ \{K(c)\} & \{\neg K(x),\neg P(x,y)\} & \\
& & \{x/c, z/f(c)\}\ \{\neg P(c,y)\} & \{P(c,d)\} \\
& & & \{y/d\}\ \square
\end{array}$$

(d) *Ano, v (c) se nám podařilo sestrojit LI-zamítnutí. I kdyby ne, existence LI-zamítnutí plyne z Věty o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule, naše CNF formule S je Hornova.*

Příklad 3. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x),\ (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(y,x)),\ (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,x)) \rightarrow R(x)),\ (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvisplnitelnou teorii T'.
(b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
(c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
(d) Nalezněte nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

Řešení. *(a) Skolemizací dostáváme:*

$$T' = \{\neg R(x),\ P(c,y) \rightarrow P(y,c),\ P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow R(x),\ P(x,f(x))\}$$

(Pozor u třetího axiomu: $(\exists y)$ vytýkáme z antecedentu implikace, změní se na $(\forall y)$).

(b) *Snadno převedeme do CNF:*

$$S = \{\{\neg R(x)\},\{\neg P(c,y),P(y,c)\},\{\neg P(x,y),\neg P(y,x),R(x)\},\{P(x,f(x))\}\}$$

(c) *Rezoluční strom pro $S \vdash_R \square$:*

$$\begin{array}{cccc}
\{\neg R(x)\} & \{\neg P(x',y),\neg P(y,x'),R(x')\} & & \\
& \{x'/x\}\ \{\neg P(x,y),\neg P(y,x)\} & \{\neg P(c,y'),P(y',c)\} & \\
& & \{x/c, y'/y\}\ \{\neg P(c,y)\} & \{P(x,f(x))\} \\
& & & \{x/c, y/f(c)\}\ \square
\end{array}$$

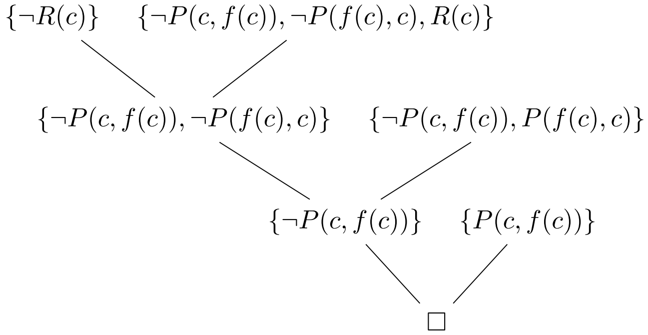
(Všimněte si, kde potřebujeme přejmenovat proměnné, aby rezolvované klauzule měly disjunktní množiny proměnných.)

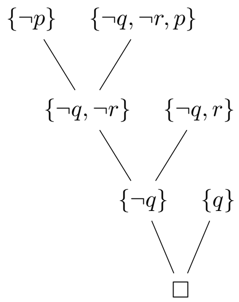
(d) *K nalezení konjunkce základních instancí axiomů můžeme použít sestrojené rezoluční zamítnutí. Pro každý list rezolučního stromu, který je označkovaný klauzulí C (až na přejmenování je to klauzule z S), aplikujeme na C postupně všechny unifikace na cestě od tohoto listu až ke kořeni:*
- $\neg R(x) \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg R(c)$
- $\neg P(x', y) \vee \neg P(y, x') \vee R(x') \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)$
- $\neg P(c, y') \vee P(y', c) \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)$
- $P(x, f(x)) \cdot \{x/c, y/f(c)\} = P(c, f(c))$

Pokud by v některých klauzulích zůstaly proměnné, substituujeme za ně libovolný konstantní term. Dostáváme nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S:

$$\neg R(c) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)) \wedge P(c, f(c))$$

Její rezoluční zamítnutí 'na úrovni výrokové logiky' má stejnou strukturu jako rezoluční zamítnutí S:





Pokud bychom chtěli základní instance původní teorie T, musíme se podívat, ze kterých axiomů T vznikly naše klauzle, a aplikovat stejné unifikace, výsledkem by bylo:

$$\neg R(c) \wedge (P(c, f(c)) \rightarrow P(f(c), c)) \wedge (P(c, f(c)) \wedge P(f(c), c) \rightarrow R(c)) \wedge P(c, f(c))$$

Další příklady k procvičení

Příklad 4. Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}, \{\neg H(v, a)\}, \\ \{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}, \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

Příklad 5. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s \rangle$ bez rovnosti, kde j, h, q jsou konstantní symboly ('jablka/hrušky/švestky') a $x < y$ vyjadřuje, že *"ovoce y je lepší než ovoce x"*. Víme, že:

(i) Relace "být lepší" je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
(ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že *(iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.*

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce L.
(b) Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli S, která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište S v množinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S, která je nesplnitelná.
(e) Je S zamítnutelná LI-rezolucí?

Příklad 6. Buď $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, c konstantní symbol, a axiom φ vyjadřuje *“Existuje alespoň* 5 *prvků, pro které platí* $U(x)$*.”*

(a) Najděte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze T.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 7. Nechť $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že “existují maximálně 4 prvky”.

(a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

Příklad 8. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

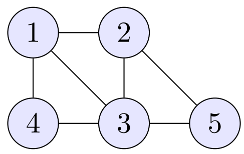
(a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
(b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 9. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.

(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T?
(b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

Příklad 10. Mějme následující graf.

(a) Najděte všechny automorfismy.
(b) Které podmnožiny množiny vrcholů V jsou definovatelné? Uveďte definující formule. *(Nápověda: Využijte (a).)*
(c) Které binární relace na V jsou definovatelné?



K zamyšlení

Příklad 11. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

(a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r+1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0?
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
(c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní?
(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spočetná struktura $\mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$?