

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí tomu, jak se liší tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formálně definovat všechny potřebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich použití
- umí sestavit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metodě pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých příkladech
- zná větu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.* Konkrétně:

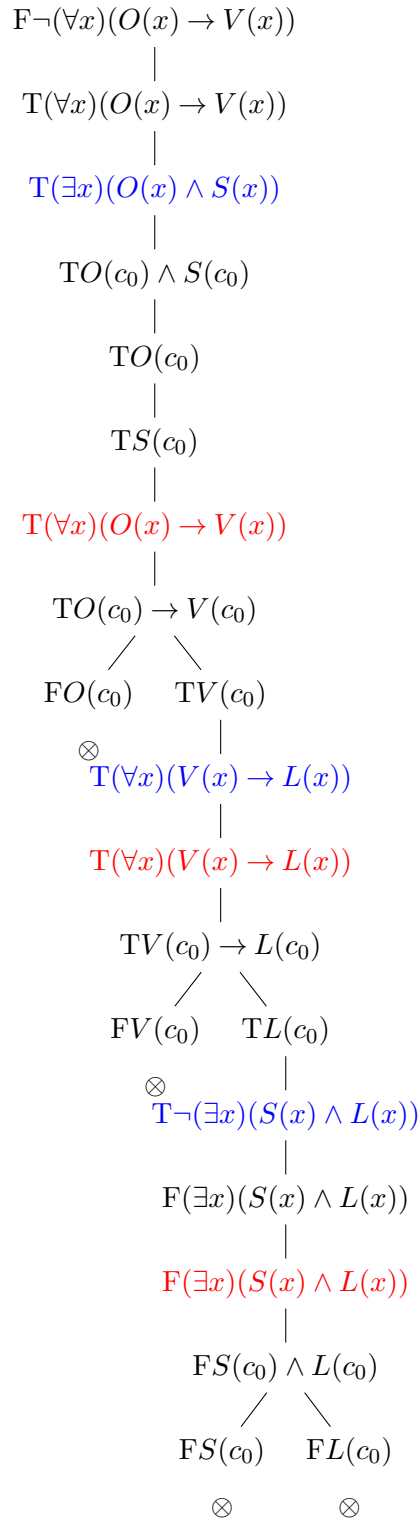
- Zvolte vhodný jazyk \mathcal{L} . Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
- Formalizujte naše znalosti a dokazované tvrzení jako sentence $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$ v jazyce \mathcal{L} .
- Sestrojte tablo důkaz sentence φ z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Solution. (a) Zvolme jazyk $\mathcal{L} = \langle V, L, O, S \rangle$ bez rovnosti, kde V , L , O a S jsou unární relační symboly o významu “být viníkem/lhářem/obviněným/svědkem”.

(b)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\forall x)(V(x) \rightarrow L(x)) \\ \alpha_2 &= (\exists x)(O(x) \wedge S(x)) \\ \alpha_3 &= \neg(\exists x)(S(x) \wedge L(x)) \\ \varphi &= \neg(\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))\end{aligned}$$

- (c) Sestrojíme dokončené tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ s položkou $F\varphi$ v kořeni. Uvidíme, že všechny větve budou sporné, půjde tedy o tablo důkaz. (Modře je vyznačeno připojení axiomů, červeně jsou kořeny atomických tabel položek typu ‘všichni’, které bychom mohli nekreslit, kdyby nám to konvence dovolila.)



Problem 2. Uvažte následující tvrzení:

(i) Nula je malé číslo.

- (ii) Číslo je malé, právě když je blízko nuly.
 (iii) Součet dvou malých čísel je malé číslo.
 (iv) Je-li x blízko y , potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.

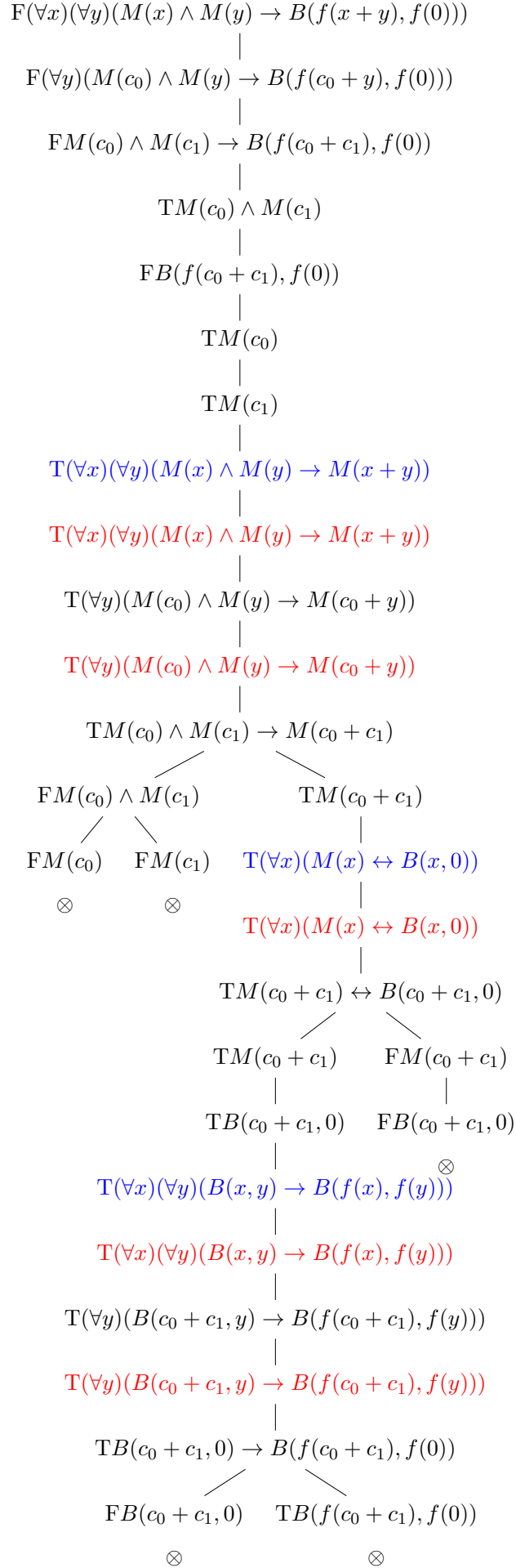
Chceme dokázat, že platí: (v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x + y)$ je blízko $f(0)$.

- (a) Formalizujte tvrzení jako sentence $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ bez rovnosti.
 (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$.
 (c) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T .

Solution. (a)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= M(0) \\ \varphi_2 &= (\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x, 0)) \\ \varphi_3 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow M(x + y)) \\ \varphi_4 &= (\forall x)(\forall y)(B(x, y) \rightarrow B(f(x), f(y))) \\ \varphi_5 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow B(f(x + y), f(0)))\end{aligned}$$

- (b) Tablo vyjde sporné, máme tedy $T \vdash \varphi_5$ a z úplnosti $T \models \varphi_5$. Všimněte si, že axiom $\varphi_1 = M(0)$ není potřeba:



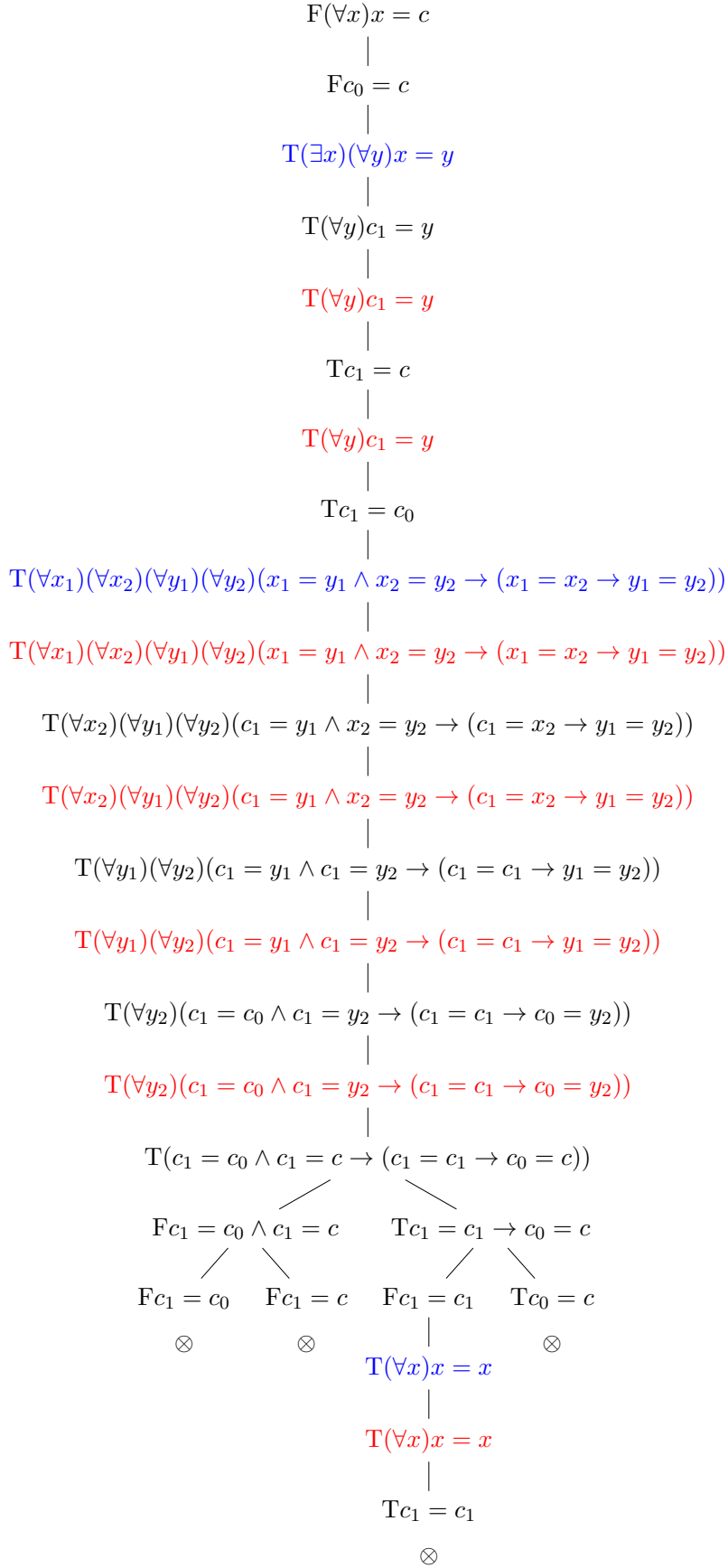
(c) Najdeme dva elementárně neekvivalentní modely T :

- $\mathcal{A} = \langle \{0\}; M^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$ kde $M^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$, $f^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$, $+^{\mathcal{A}} = \{((0, 0), 0)\}$, a $0^{\mathcal{A}} = 0$
- $\mathcal{B} = \langle \{0, 1\}; M^{\mathcal{B}}, B^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, +^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}} \rangle$ kde $M^{\mathcal{B}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$, $f^{\mathcal{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$, $+^{\mathcal{B}} = \{((0, 0), 0), ((0, 1), 1), ((1, 0), 1), ((1, 1), 0)\}$, a $0^{\mathcal{B}} = 0$

Kompletní jednoduché extenze jsou potom $\text{Th}(\mathcal{A})$ a $\text{Th}(\mathcal{B})$ (tj. všechny L -sentence, které platí v \mathcal{A} resp. \mathcal{B}). Teorie struktury je vždy kompletní teorie. Nejsou ekvivalentní například proto, že $(\forall x)M(x)$ platí v \mathcal{A} ale ne v \mathcal{B} . (Uvědomte si, že jazyk je bez rovnosti, potřebujeme tedy sentenci bez rovnosti.)

Problem 3. Uvažme jazyk $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol. Tablo metodou dokažte, že v teorii $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$ platí formule $x = c$.

Solution. Sestrojíme dokončené tablo z teorie T s položkou $F(\forall x)x = c$ v kořeni (formule v položkách tabla musí být sentence). Protože je jazyk s rovností, můžeme v tablu používat i axiomy rovnosti pro jazyk L , resp. jejich generální uzávěry: $(\forall x)x = x$ a $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2))$.



Problem 4. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol \leq a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekonečný model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model \mathcal{A} s nekonečným klesajícím řetězcem; tj. že v \mathcal{A} existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ takové, že: $\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0$. (Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Solution. Z předpokladu víme, že T má nekonečný model \mathcal{B} , tj. nekonečné lineární uspořádání. To by ale mohlo být např. $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$, které žádný nekonečný řetězec nemá. Potřebujeme model s nekonečným klesajícím řetězcem, ten získáme z Věty o kompaktnosti (verze pro predikátovou logiku):

Jazyk L rozšíříme přidáním spočetně mnoha nových konstantních symbolů c_i ($i \in \mathbb{N}$). Označme rozšířený jazyk L' . Uvažme následující L' teorii T' :

$$T' = T \cup \{c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Stačí ukázat, že T' má model. Ten zřejmě musí být nekonečný a jeho redukt na jazyk L je hledaný model \mathcal{A} teorie T , který má nekonečný klesající řetězec $\dots < c_{n+1}^{\mathcal{A}} < c_n^{\mathcal{A}} < \dots < c_0^{\mathcal{A}}$.

Z věty o kompaktnosti víme, že T' má model, právě když každá konečná podmnožina T' má model. Máme-li konečnou podteorii $S \subseteq T'$, ta obsahuje jen konečně mnoho formulí $c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i$, pro nějakou konečnou množinu indexů $I \subseteq \mathbb{N}$. Označme jako \mathcal{B} nekonečný model T , který máme z předpokladu. (Tento model nemusí mít nekonečný klesající řetězec! Mohl by to být např. $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$) V něm stačí vybrat libovolný konečný klesající řetězec délky $|I|$ jako interpretace konstantních symbolů c_i pro $i \in I$ (symboly $c_j \notin I$ interpretujeme libovolně), a dostáváme model S .

EXTRA PRACTICE

Problem 5. Uvažte následující tvrzení:

- (i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.
 - (ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.
 - (iii) U každého docenta někdo studuje.
 - (iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.
 - (v) Každou učebnici někdo přečetl.
- (a) Formalizujte (i)–(v) jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti.
 (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.
 (c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T ? Je lživá v T ? Je nezávislá v T ? Zdůvodněte.
 (d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte.

Problem 6. Tablo metodou dokažte následující pravidla ‘vytýkání’ kvantifikátorů, kde $\varphi(x)$ je formule s jedinou volnou proměnnou x , a ψ je sentence.

- | | |
|---|---|
| (a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$ | (c) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ |
| (b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$ | (d) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ |

Problem 7. Necht $L(x, y)$ reprezentuje “*existuje let z x do y* ” a $S(x, y)$ reprezentuje “*existuje spojení z x do y* ”. Předpokládejme, že z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Problem 8. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T . Necht φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \quad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

- (a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)
- (b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T , tím že najdete model T , ve kterém ψ neplatí.
- (c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na \sim) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.
- (d) Necht S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S ?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 9. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

- (a) *Větu o konstantách:* Buď φ formule v jazyce L s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n a T teorie v L . Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T v L' . Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$
- (b) *Větu o dedukci:* Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Problem 10. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

- (a) $T^* \models x = y \rightarrow y = x$ (symetrie)
- (b) $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x, x_2 = x, y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = x$ a $y_2 = z$.