První přednáška (handout)

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Jak se učit?

Velmi doporučuji tento online minikurz o efektivním učení:

https://www.samford.edu/departments/academic-success-center/how-to-study

Investujte 35 minut nyní, ušetřete mnoho hodin později!

Cesta k jistému úspěchu u zkoušky

- Před přednáškou alespoň zběžně projděte skripta, snažte se pochopit motivaci a smysl definic a hlavních tvrzení.
- Po přednášce skripta podrobně přečtěte, nejasnosti ujasněte.
- Ujistěte se, že umíte pracovat i s formalizmem.
- Věnujte pozornost i cvičení, pomůže vám vše pochopit.
- Studujte průběžně, a průběžně testujte své znalosti.

První přednáška

Program

- úvod do logiky
- neformální představení výrokové a predikátové logiky (“upoutávka”)
- syntaxe výrokové logiky
- sémantika výrokové logiky (začátek)

Materiály

Zápisky z přednášky, Kapitola 1 a Sekce 2.1-2.2.4 z Kapitoly 2

Kapitola 1: Úvod do logiky

Co je logika?

Dvě definice:

1. soubor principů, které jsou základem uspořádání prvků nějakého systému (např. programu, zařízení, protokolu)
2. věda o uvažování prováděném podle striktních pravidel zachovávajících platnost

V informatice obojí: daný systém nejprve *formálně popíšeme*, a poté o něm *formálně uvažujeme* (automaticky!), tj. odvozujeme platné inference za použití nějakého dokazovacího systému

Filozofie → Matematika → Teoretická informatika →

Aplikovaná informatika

- logic programming
- discrete optimization (SAT solving, scheduling, planning)
- database theory
- verification (software, hardware, protocol)
- automated reasoning and proving
- knowledge-based representation
- artificial intelligence

1.1 Výroková logika

Příklad ze života: Hledání pokladu

Při hledání pokladu jsme narazili na rozcestí dvou chodeb. Víme, že na konci každé chodby je buď poklad, nebo drak, ale ne obojí.

Trpaslík nám řekl, že:

- *"Alespoň jedna z těch dvou chodeb vede k pokladu"*, a že
- *"První chodba vede k drakovi."*

Je známo, že trpaslíci buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lžou. Kterou cestou se máme vydat?

Výroky neformálně

Výrok je tvrzení, kterému lze přiřadit pravdivostní hodnotu:

pravdivý (*True*, 1), nebo lživý (*False*, 0)

Prvovýroky (atomické výroky, výrokové proměnné) zkombinované pomocí logických spojek a závorek do složených výroků:

"(Trpaslík lže,) *právě když* (druhá chodba vede k drakovi.)"

- $\neg$ "neplatí X", *negace*
- $\wedge$ "X a Y", *konjunkce*
- $\vee$ "X nebo Y", *disjunkce* (není exkluzivní)
- $\rightarrow$ "pokud X, potom Y", *implikace* (čistě logická)
- $\leftrightarrow$ "X, právě když Y", *ekvivalence*

Formalizace ve výrokové logice

Volba množiny prvovýroků: bity informace popisující daný systém

$p_1 =$"*Poklad je v první chodbě.*"

$p_2 =$"*Poklad je ve druhé chodbě.*"

(Co nejmenší, např. hodnota $t =$"*Trpaslík mluví pravdu.*" je jednoznačně určená hodnotami $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$.)

- *Poklad nebo drak, ale ne obojí*: zakódované do volby $\mathbb{P}$ (přítomnost draka je absence pokladu)
- "*První chodba vede k drakovi.*" $\Leftrightarrow \neg p_1$
- "*Alespoň jedna z chodeb vede k pokladu.*" $\Leftrightarrow p_1 \vee p_2$
- *Trpaslík buď mluví pravdu, nebo lže*:

$$\varphi = (\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$$

Teorie $T = \{\varphi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$, φ je axiom T.

Modely a důsledky

Lze určit, kde je poklad? Je p_1 nebo p_2 důsledkem φ resp. T?

"Svět", ve kterém je např. v první chodbě poklad a ve druhé drak, popíšeme pomocí pravdivostního ohodnocení $p_1 = 1, p_2 = 0$, neboli modelu $v = (1, 0)$ jazyka $\mathbb{P}$. Celkem máme 4 "světy" a modely:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

Je "svět" popsaný modelem $v = (1, 0)$ *konzistentní* s tím, co víme, tj. platí v modelu v výrok φ resp. teorie T? Vyhodnotíme podle stromové struktury φ:

$$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 0,\ v(\neg p_1) = 0,\ v(p_1 \vee p_2) = 1,\ \ldots,\ v(\varphi) = 0$$

Množina modelů výroku φ (resp. *modelů teorie* T):

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \{(0,1)\}.$$

V každém modelu teorie T platí výrok p_2, neboli p_2 je důsledek T.

Dokazovací systémy

Ověřovat všechny modely je nepraktické, pro $|\mathbb{P}| = n$ máme 2^n modelů, a $\mathbb{P}$ může být i nekonečná.

Dokazovací systém

- důkaz výroku ψ z teorie T je formálně definovaný syntaktický objekt, snadno (mechanicky) ověřitelný
- lze hledat algoritmicky čistě na základě struktury ψ a axiomů T ("*syntaxe*"), nemusíme se zabývat modely ("*sémantikou*").

Klíčové vlastnosti:

- korektnost: pokud existuje důkaz ψ z T, potom ψ platí v T
- úplnost, pokud ψ platí v T, potom existuje důkaz ψ z T

Ukážeme si metodu analytického tabla a rezoluční metodu. Obě dokazují *sporem*: předpokládají platnost T a $\neg\psi$, hledají spor.

Metoda analytického tabla

- důkaz je strom olabelovaný předpoklady o platnosti výroků
- v kořeni: neplatí dokazovaný výrok ψ (důkaz sporem)
- připojíme platnost axiomů z T
- při konstrukci zjednodušujeme výroky ve vrcholech, invariant:

  Každý model teorie T, ve kterém neplatí ψ, se musí shodovat s některou z větví tabla.

  např.:

  True $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ zredukujeme rozvětvením na False φ_1 a True φ_2,
  False $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ zredukujeme připojením True φ_1 a False φ_2.

- sporná větev = předpokládá True i False stejného výroku
- důkaz = všechny větve sporné (tj. nemůže existovat model T, ve kterém neplatí ψ)

Příklad tablo důkazu

- False p_2
  - True $(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$
    - True $\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$
      - True $\neg p_1$
        - True $p_1 \vee p_2$
          - False p_1
            - True p_1
              - fail
            - True p_2
              - fail
    - True $\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$
      - True $\neg(\neg p_1)$
        - True $\neg(p_1 \vee p_2)$
          - False $(\neg p_1)$
            - True p_1
              - False $p_1 \vee p_2$
                - False p_1
                  - False p_2
                    - fail

Konjunktivní normální forma (CNF)

literál p, $\neg p$ klauzule disjunkce literálů CNF konjunkce klauzulí

každý výrok má ekvivalentní CNF ($\psi \sim \psi'$, stejné modely)

např. pro výrok $(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$

nahradíme $\neg(\neg p_1) \sim p_1$ a $\neg(p_1 \vee p_2) \sim (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ (*De Morgan*)

$$(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (p_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

a dále opakovaně použijeme distributivitu $\vee$ vůči $\wedge$:

$$(\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_1) \wedge$$
$$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_2)$$

už je CNF, ještě zjednodušíme: odstraníme duplicitní literály, a klauzule obsahující p_i a zároveň $\neg p_i$ (to jsou tautologie)

$$\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$$

Rezoluční důkaz

Dk sporem, převeď negaci dokazovaného do CNF a přidej k T

p_2 platí v T, právě když je následující CNF výrok nesplnitelný:

$$\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_2$$

množinový zápis: $S = \{\{\neg p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{p_1, p_2\}, \{\neg p_2\}\}$

rezoluční pravidlo: je-li $p \in C_1$ a $\neg p \in C_2$, potom *rezolventa*

$$C = (C_1 \setminus \{p\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg p\})$$

platí v každém modelu, ve kterém platí C_1 i C_2

rezoluční zamítnutí S: posloupnost klauzulí, kde každá je buď z S nebo rezolventa předchozích, poslední je prázdná klauzule $\square$

myšlenka: protože $\square$ nemá žádný model, je i S nesplnitelná

Příklad rezolučního důkazu

rezoluční zamítnutí (3. klauzule je rezolventou 1.&2., 5. je z 3.&4.)

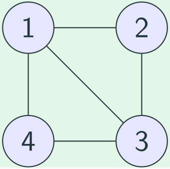
$$\{\neg p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_2\}, \{\neg p_2\}, \square$$

rezoluční strom (listy klauzule z S, vnitřní vrcholy rezolventy synů)

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\{\neg p_1\} \arrow[dr] & & \{p_1, p_2\} \arrow[dl] & \\
& \{p_2\} \arrow[dr] & & \{\neg p_2\} \arrow[dl] \\
& & \square &
\end{tikzcd}$$

Příklad: Barvení grafů

Najděte vrcholové obarvení následujícího grafu třemi barvami.



graf: množina vrcholů a množina (libovolně) orientovaných hran

$$\mathcal{G} = \langle V; E \rangle = \langle \{1, 2, 3, 4\}; \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \rangle$$

jak formalizovat? pro $v \in V$ a $c \in C = \{R, G, B\}$:

$$p_v^c = \textit{“vrchol } v \textit{ má barvu } c\textit{”}$$

$\mathbb{P} = \{p_v^c \mid c \in C, v \in V\} = \{p_1^R, p_1^G, p_1^B, p_2^R, p_2^G, p_2^B, p_3^R, p_3^G, p_3^B, p_4^R, p_4^G, p_4^B\}$

máme celkem $|\,\mathrm{M}_{\mathbb{P}}\,| = 2^{12} = 4096$ modelů jazyka (12-dim. vektorů)

Formalizace hranového obarvení

- každý vrchol má nejvýše jednu barvu: $4^4 = 2^8 = 256$ modelů

$$T_1 = \{(\neg p_v^R \vee \neg p_v^G) \wedge (\neg p_v^R \vee \neg p_v^B) \wedge (\neg p_v^G \vee \neg p_v^B) \mid v \in V\}$$

- a každý vrchol má alespoň jednu barvu: $3^4 = 81$ modelů

$$T_2 = T_1 \cup \{p_v^R \vee p_v^G \vee p_v^B \mid v \in V\} = T_1 \cup \{\bigvee_{c \in C} p_v^c \mid v \in V\}$$

T_2 je extenze teorie T_1 neboť každý důsledek T_1 platí i v T_2, zde dokonce $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_2) \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_1)$

- nakonec přidáme hranovou podmínku:

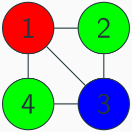
$$T_3 = T_2 \cup \{\bigwedge_{c \in C} (\neg p_u^c \vee \neg p_v^c) \mid (u, v) \in E\}$$

Výsledná teorie T_3 je splnitelná (má model), právě když je graf $\mathcal{G}$ 3-obarvitelný.

Co s ní?

Všechna obarvení?

T_3 má 6 modelů: $v = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ a další získané permutací barev



Obarvení, ve kterých je vrchol 1 modrý a vrchol 2 zelený?

Odpovídají modelům teorie $T_3 \cup \{p_1^B, p_2^G\}$

Důkaz, že vrcholy 2 a 4 musí mít stejnou barvu?

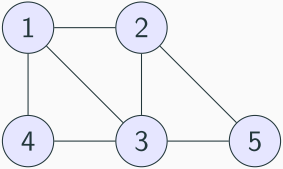
Tablo s kořenem False $(p_2^R \wedge p_4^R) \vee (p_2^G \wedge p_4^G) \vee (p_2^B \wedge p_4^B)$

Nebo rezolucí: přidáme negaci $(p_2^R \wedge p_4^R) \vee (p_2^G \wedge p_4^G) \vee (p_2^B \wedge p_4^B)$, vše převedeme do CNF a zamítneme

1.2 Predikátová logika

Nevýhody formalizace ve výrokové logice

Teorie T_3 je poměrně velká, a 'natvrdo' kóduje graf $\mathcal{G}$.



Obohatit jazyk $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{p_5^R, p_5^G, p_5^B\}$ a vytvořit ještě větší teorii T_3' přidáním axiomů o vrcholu 5 a hranách $(2,5), (3,5)$?

A co vlastnosti obecně platné o všech nebo mnoha grafech?

V predikátové logice můžeme mluvit o vrcholech grafu pomocí proměnných a přirozeně vyjádřit vlastnosti jako:

- *"z vrcholu u vede hrana do vrcholu v"*
- *"vrchol u je zelený"*

Predikátová logika: struktury a jazyk

Modely už nejsou 0–1 vektory, ale struktury, např. naše (orientované) grafy:

$\mathcal{G} = \langle V^{\mathcal{G}}; E^{\mathcal{G}} \rangle = \langle \{1, 2, 3, 4\}; \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \rangle$

$\mathcal{G}' = \langle V^{\mathcal{G}'}; E^{\mathcal{G}'} \rangle = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}; \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (3, 5)\} \rangle$

- množina vrcholů, a binární relace na této množině
- jazyk specifikuje kolik relací jakých arit má struktura mít, a symboly pro ně
- např. jazyk grafů $\mathcal{L} = \langle E \rangle$ (kde E je binární relační symbol)
- $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$ jsou struktury v jazyce $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-struktury)
- můžeme mít také funkce a konstanty, a symbol $=$ pro rovnost

Predikátová logika: syntaxe a sémantika

Syntaxe: místo prvovýroků atomické formule, např. $E(x, y)$, kde x, y jsou proměnné reprezentující vrcholy; stejné logické spojky, ale navíc kvantifikátory:

$(\forall x)$ *"pro všechny vrcholy x"*

$(\exists y)$ *"existuje vrchol y"*

(hrají roli "konjunkce" a "disjunkce" přes všechny prvky)

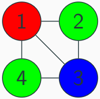
- "V grafu nejsou smyčky": $(\forall x)(\neg E(x, x))$
- "Existuje vrchol výstupního stupně 1":
  $(\exists x)(\exists y)(E(x, y) \wedge (\forall z)(E(x, z) \rightarrow y = z))$

Sémantika: V daném grafu $\mathcal{G}$ a při dosazení vrcholu u za proměnnou x a vrcholu v za proměnnou y vyhodnotíme $E(x, y)$ jako True, právě když $(u, v) \in E^{\mathcal{G}}$.

Barvení grafů v predikátové logice

Jazyk $\mathcal{L}' = \langle E, R, G, B \rangle$, kde E je binární a R, G, B jsou unární relační symboly ($R(x)$ znamená *"vrchol x je červený"*)

$\mathcal{L}'$-struktura: graf s trojicí množin vrcholů



$$\mathcal{G}_C = \langle V^{\mathcal{G}_C}; E^{\mathcal{G}_C}, R^{\mathcal{G}_C}, G^{\mathcal{G}_C}, B^{\mathcal{G}_C} \rangle$$
$$= \langle \{1,2,3,4\}; \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}, \{1\}, \{2,4\}, \{3\} \rangle$$

$\mathcal{G}_C$ je expanze $\mathcal{L}$-struktury $\mathcal{G}$ do jazyka $\mathcal{L}'$

Nejvýše jedna barva, alespoň jedna barva, hranová podmínka:

- $(\forall x)((\neg R(x) \vee \neg G(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg B(x)) \wedge (\neg G(x) \vee \neg B(x)))$
- $(\forall x)(R(x) \vee G(x) \vee B(x))$
- $(\forall x)(\forall y)(E(x,y) \rightarrow ((\neg R(x) \vee \neg R(y)) \wedge (\neg G(x) \vee \neg G(y)) \wedge (\neg B(x) \vee \neg B(y))))$

1.3 Další druhy logických systémů

Predikátové logiky vyšších řádů

- Predikátová logika, kde proměnné reprezentují jednotlivé vrcholy, je logika prvního řádu (first-order, FO)
- Logika druhého řádu (second-order, SO): proměnné i pro množiny vrcholů a *n*-tic vrcholů (tj. relace, funkce)

$$(\exists S)(\forall x)(\forall y)(E(x,y) \to (S(x) \leftrightarrow \neg S(y)))$$

"Graf je bipartitní."

- A v logice *třetího řádu* máme i množiny množin (např. v topologii).

Logiky zobecňující pojem pravdy

Kromě toho lze zobecnit pojem platnosti (pravdy):

- temporální logiky (platnost ‘vždy’, ‘někdy v budoucnosti’, ‘dokud’ apod.) – např. v paralelním programování
- modální logiky (‘je možné’, ‘je nutné’) – v umělé inteligenci, uvažování autonomních agentů o svém okolí
- fuzzy logiky (‘je 0.35 pravdivé’) – v automatických pračkách
- intuicionistická logika (povoluje jen konstruktivní důkazy, nemá *zákon vyloučeného třetího*)

1.4 O přednášce

Obsah předmětu

I. Výroková logika
   - Syntaxe a sémantika
   - Problém SAT
   - Tablo metoda
   - Rezoluční metoda

II. Predikátová logika
   - Syntaxe a sémantika
   - Tablo metoda v predikátové logice
   - Rezoluční metoda v predikátové logice
   - Aplikace: databáze, Prolog

III. Pokročilé partie
   - Teorie modelů
   - Nerozhodnutelnost a neúplnost

ČÁST I – VÝROKOVÁ LOGIKA

Kapitola 2: Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Syntaxe a sémantika

syntaxe dává pravidla pro tvoření korektních formálních výrazů sestávajících ze symbolů, a pro operace s nimi (*výrok*, *důkaz*, ...)

sémantika popisuje význam syntaktických objektů "v reálném světě" (*model*, ...)

Klíčem k logice je vztah mezi syntaxí a sémantikou:

- sémantické objekty studujeme pomocí syntaxe ('jaké výroky platí v modelu?')
- syntaktické pomocí sémantiky, např. ekvivalence výroků: $\psi \sim \psi'$ právě když $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\psi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\psi')$

2.1 Syntaxe výrokové logiky

Jazyk

- určený množinou prvovýroků (výrokových proměnných, atomických výroků) – neprázdná, konečná nebo i *nekonečná*

$$\mathbb{P}_1 = \{p, q, r\}$$

$$\mathbb{P}_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

  (obvykle *spočetná*, *uspořádaná*)

- dále do jazyka patří logické symboly:
  - logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - závorky $(,)$

Výrok

Výrok (výroková formule) v jazyce $\mathbb{P}$ je prvek množiny $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ definované *induktivně*: $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je nejmenší množina splňující

- pro každý prvovýrok $p \in \mathbb{P}$ platí $p \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$,
- pro každý výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je $(\neg\varphi)$ také prvek $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$
- pro každé $\varphi, \psi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ jsou $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ také prvky $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

Výroky jsou nutně *konečné* řetězce!

$\mathrm{Var}(\varphi)$: množina všech prvovýroků ve φ (vždy konečná)

podvýrok: podřetězec, který je sám výrok

$\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$, $\mathrm{Var}(\varphi) = \{p, q, r\}$
podvýroky: $p, q, (\neg q), (p \vee (\neg q)), r, (p \wedge q), (r \rightarrow (p \wedge q)), \varphi$

pravda: $\top = (p \vee (\neg p))$, spor: $\bot = (p \wedge (\neg p))$ ($p \in \mathbb{P}$ je pevně daný)

Konvence zápisu

při *zápisu* výroků můžeme vynechat některé závorky:

$\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q)))$ lze zapsat jako $p \vee \neg q \leftrightarrow (r \to p \wedge q)$

- priorita operátorů: $\neg$ nejvyšší, dále $\wedge$ a $\vee$, nakonec $\to$ a $\leftrightarrow$
- asociativita $\wedge$ a $\vee$: nápis $p \wedge q \wedge r$ znamená výrok $(p \wedge (q \wedge r))$
- vnější závorky nemusíme psát

Poznámka: v definici jsme mohli místo *infixového* zápisu zvolit *prefixový* ("polskou notaci"): *"každý prvovýrok je výrok, jsou-li φ, ψ výroky, jsou výroky také $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\to\varphi\psi$, a $\leftrightarrow\varphi\psi$"* nebo i *postfixový*

$\varphi = \leftrightarrow \vee p \neg q \to r \wedge pq$

$\varphi = pq \neg \vee rpq \wedge \to \leftrightarrow$

Důležitá je jen stromová struktura výroků!

Strom výroku

Tree(φ) je zakořeněný uspořádaný strom, definovaný induktivně:

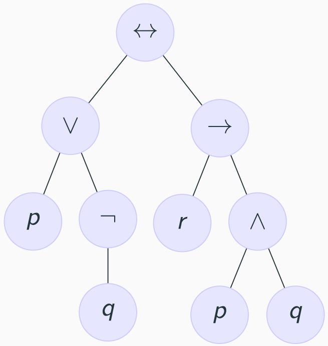
- $\varphi = p \in \mathbb{P}$: jediný vrchol, s labelem p
- $\varphi = (\neg\varphi')$: kořen s labelem $\neg$, jediný syn je kořen Tree(φ').
- $\varphi = (\varphi' \square \varphi'')$ pro $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: kořen s labelem $\square$ a dvěma syny: levý syn je kořen Tree(φ'), pravý Tree(φ'').

$\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$

rekonstrukce φ průchodem stromu,

podvýroky odpovídají podstromům

Tree(φ) je jednoznačně určený!



Teorie

Teorie v jazyce $\mathbb{P}$ je libovolná množina výroků $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. Výrokům $\varphi \in T$ říkáme také axiomy.

$T = \emptyset$ a $T = \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ nad libovolným jazykem,
$T = \{p \wedge q, q \rightarrow (p \vee r)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$
$T = \{p_0\} \cup \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad *nekonečným* $\mathbb{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Poznámka: *Konečnou* teorii by bylo možné (byť ne praktické!) nahradit jediným výrokem: konjunkcí všech axiomů.

Připouštíme ale i *nekonečné teorie*; hodí se např. pro popis systému v (diskrétním) čase $t = 0, 1, 2, \ldots$.

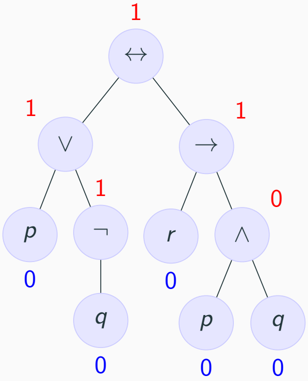
2.2 Sémantika výrokové logiky

Pravdivostní hodnota: příklad

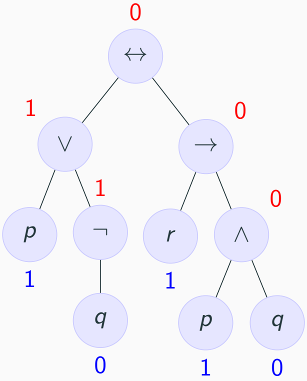
pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných jednoznačně určuje pravdivostní hodnotu výroku (vyhodnoť od listů ke kořeni)

$$\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$$

(a) φ platí při ohodnocení
$p = 0,\ q = 0,\ r = 0$



(b) φ neplatí při ohodnocení
$p = 1,\ q = 0,\ r = 1$



Sémantika logických spojek

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \qquad f_{\neg}(x) = 1 - x$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad f_{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad f_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad f_{\rightarrow}(x, y)$$

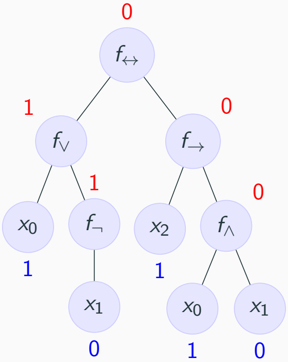
$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad f_{\leftrightarrow}(x, y)$$

Výroky a booleovské funkce

sémantika logických spojek je daná booleovskými funkcemi, každý výrok určuje *složenou* booleovskou funkci, tzv. pravdivostní funkci

např. $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$

$$f_{\varphi,\mathbb{P}'}(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(x_0, f_{\neg}(x_1)), f_{\rightarrow}(x_2, f_{\wedge}(x_0, x_1)))$$



pravdivostní hodnota φ při ohodnocení $p = 1,\ q = 0,\ r = 1,\ s = 1$:

$$\begin{aligned} f_{\varphi,\mathbb{P}'}(1,0,1,1) &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1, f_{\neg}(0)), f_{\rightarrow}(1, f_{\wedge}(1,0))) \\ &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1,1), f_{\rightarrow}(1,0)) \\ &= f_{\leftrightarrow}(1,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pravdivostní funkce formálně

Pravdivostní funkce výroku φ v *konečném* jazyce $\mathbb{P}$ je funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}\colon \{0,1\}^{|\mathbb{P}|} \to \{0,1\}$ definovaná induktivně:

- je-li φ *i*-tý prvovýrok z $\mathbb{P}$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}) = x_i$
- je-li $\varphi = (\neg\varphi')$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}) = f_\neg(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}))$
- je-li $\varphi = (\varphi' \mathbin{\square} \varphi'')$ kde $\square \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$:
  $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}) =$
  $f_\square(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}), f_{\varphi'',\mathbb{P}}(x_0,\dots,x_{n-1}))$

Poznámka: Pravdivostní funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}$ závisí pouze na proměnných odpovídajících prvovýrokům z $\mathrm{Var}(\varphi) \subseteq \mathbb{P}$.

Je-li výrok v *nekonečném* jazyce $\mathbb{P}$, můžeme se omezit na jazyk $\mathrm{Var}(\varphi)$ (který je konečný) a uvažovat pravdivostní funkci nad ním.

Modely

Pravdivostní ohodnocení reprezentuje ‘reálný svět’ (systém) v námi zvoleném ‘formálním světě’, proto mu také říkáme model

Model jazyka $\mathbb{P}$: libovolné pravdivostní ohodnocení $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$
Množina všech modelů: $\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{v \mid v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{P}}$

$\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, ohodnocení p je pravda, q nepravda, a r pravda:
formálně $v = \{(p,1),(q,0),(r,1)\}$ ale píšeme[1] jen $v = (1,0,1)$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{&(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),\\ &(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}\end{aligned}$$

[1] Formálně ztotožňujeme $\{0,1\}^{\mathbb{P}}$ s $\{0,1\}^{|\mathbb{P}|}$, množina $\mathbb{P}$ je uspořádaná.

Platnost

výrok platí v modelu, pokud je jeho pravdivostní hodnota rovna 1

Výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$, model $v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$. Pokud $f_{\varphi,\mathbb{P}}(v) = 1$, potom říkáme, že φ platí v modelu v, v je modelem φ, a píšeme $v \models \varphi$.

Množina všech modelů resp. *nemodelů* φ:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \mid v \models \varphi\} = f_{\varphi,\mathbb{P}}^{-1}[1]$$

$$\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)} = M_{\mathbb{P}} \setminus M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \mid v \not\models \varphi\} = f_{\varphi,\mathbb{P}}^{-1}[0]$$

Je-li jazyk zřejmý z kontextu, můžeme vynechat, ale jinak ne!

$$\mathrm{M}_{\{p,q\}}(p \to q) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$$

$$\mathrm{M}_{\{p,q,r\}}(p \to q) = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Platnost teorie, model teorie

Teorie T platí v modelu v, pokud každý axiom $\varphi \in T$ platí ve v.
Podobně jako pro výrok: v je modelem T, $v \models T$, $v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$.

Někdy píšeme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi)$ místo $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T \cup \{\varphi\})$, $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ místo $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$.

- $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \cap \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1) \supseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2) \supseteq \dots \supseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$

Najděme modely $T = \{p \vee q \vee r, q \rightarrow r, \neg r\}$ (v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$):

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\neg r) = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)\}$$
$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\neg r, q \rightarrow r) = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$$
$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \{(1,0,0)\}$$