

# Čtvrtá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

## Program

- tablo důkaz
- korektnost a úplnost
- věta o kompaktnosti

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 4.3-4.7 z Kapitoly 4 (Sekci 4.8 zatím přeskočíme)

## 4.3 Tablo důkaz

---

# Formální definice tabla

- **položka** je nápis  $\top\varphi$  nebo  $\text{F}\varphi$ , kde  $\varphi$  je nějaký výrok
- **konečné tablo z teorie  $T$**  je uspořádaný, položkami označovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie  $T$
  - pro libovolnou položku  $P$  na libovolné větvi  $V$  můžeme na konec větve  $V$  připojit atomické tablo pro položku  $P$
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku  $\text{T}\alpha$  pro libovolný axiom  $\alpha \in T$
- **tablo z teorie  $T$**  je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde:
  - $\tau_i$  jsou konečná tabla z  $T$
  - $\tau_0$  je jednoprvkové tablo
  - $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  v jednom kroku
- **tablo pro položku  $P$**  je tablo, které má položku  $P$  v kořeni

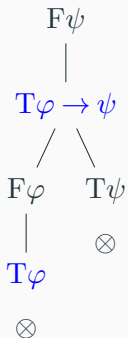
# Dokončené a sporné tablo

- Tablo je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je **sporná**, pokud obsahuje položky  $T\psi$  a  $F\psi$  pro nějaký výrok  $\psi$ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je **dokončená**, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi **redukována**,
  - a zároveň obsahuje položku  $T\alpha$  pro každý axiom  $\alpha \in T$ .
- Položka  $P$  je **redukována** na větvi  $V$  procházející touto položkou, pokud
  - je tvaru  $Tp$  resp.  $Fp$  pro nějaký prvovýrok  $p \in \mathbb{P}$ ,
  - nebo se vyskytuje na  $V$  jako kořen atomického tabla (byť ho podle konvence nezakreslujeme), tj., typicky, při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na  $V$ .

# Tablo důkaz a tablo zamítnutí

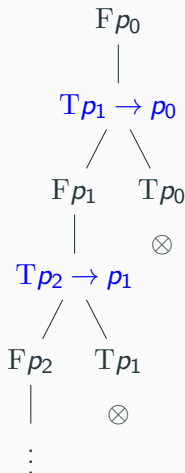
- **tablo důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **sporné** tablo z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni
- pokud existuje, je  $\varphi$  **(tablo) dokazatelný** z  $T$ , píšeme  $T \vdash \varphi$
- podobně, **tablo zamítnutí** je sporné tablo s  $T\varphi$  v kořeni
- existuje-li, je  $\varphi$  **(tablo) zamítnutelný** z  $T$ , tj. platí  $T \vdash \neg\varphi$

## Příklad: tablo důkaz



- tablo důkaz výroku  $\psi$  z  $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$
- položky vycházející z axiomů jsou modře
- ukázali jsme tedy  $T \vdash \psi$
- $\varphi, \psi$  jsou libovolné pevně dané výroky
- tím jsme dokázali tzv. větu o dedukci

## Příklad: dokončené tablo, které není sporné



- dokončené tablo pro výrok  $p_0$  z teorie  $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- nejlevější větev je **dokončená** a **bezesporná**
- sestává z položek  $Tp_{i+1} \rightarrow p_i$  a  $Fp_i$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$
- shoduje se s modelem  $v = (0, 0, \dots)$ , tj.  $v : \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$  kde  $v(p_i) = 0$  pro vš.  $i$
- máme protipříklad ukazující, že  $T \not\models p_0$



## **4.4 Konečnost a systematicčnost důkazů**

---

Dokážeme:

- existuje-li tablo důkaz, existuje i **konečný** tablo důkaz
- existuje algoritmus, který umí vždy zkonstruovat dokončené tablo, tzv. **systematické tablo**
- tento algoritmus tedy **zkonstruuje tablo důkaz**, pokud existuje (zde potřebujeme *korektnost* a *úplnost*, ty dokážeme později) (pokud tablo důkaz neexistuje, algoritmus se nemusí zastavit)

## Dokončení tabla: v čem je problém?

Pro konečnou  $T$  je snadné zkonstruovat dokončené tablo:

- na začátku použijeme všechny axiomy
- při redukci položek se výroky v nich zkracují
- stačí nedělat zbytečné kroky

Pro **nekonečnou**  $T$  bychom ale mohli zkonstruovat nekonečné tablo, a přitom:

- nikdy nepoužít některý axiom, nebo
- nikdy se nedostat k redukci některé položky

**Myšlenka systematického tabla:** na všechny se dostane, střídáme:

- **redukce následující položky** (po úrovních, zleva doprava) na všech bezesporných větvích, které jí procházejí
- **přidání následujícího axiomu** na všechny bezesporné větve ( $T$  je spočetná, axiomy libovolně očíslováme)

# Definice systematického tabla

**Systematické tablo** z teorie  $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  pro položku  $R$  je tablo  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde  $\tau_0$  je jednoprvkové tablo s položkou  $R$ , a pro každé  $i \geq 0$ :

- buď  $P$  nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející  $P$
- nejprve definujeme  $\tau'_i$  jako tablo vzniklé z  $\tau_i$  připojením atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev procházející  $P$
- pokud taková položka  $P$  neexistuje, potom  $\tau'_i = \tau_i$
- tablo  $\tau_{i+1}$  vznikne z  $\tau'_i$  připojením  $T\alpha_{i+1}$  na každou bezespornou větev
- to v případě, že  $i < |T|$ , jinak (je-li  $T$  konečná a už jsme použili všechny axiomy) definujeme  $\tau_{i+1} = \tau'_i$

**Lemma:** Systematické tablo je dokončené.

**Důkaz:** Jsou všechny větve dokončené?

- Sporné větve jsou dokončené z definice.
- Bezesporná větev:
  - obsahuje  $T\alpha_i$  pro všechna  $i$  (připojeno v  $i$ -tém kroku)
  - každá položka je na ní zredukována (leží-li v hloubce  $d$ , dostali jsme se k ní nejdéle v kroku  $i = 2^{d+1} - 1$ )
- Tedy i všechny bezesporné větve jsou dokončené. □

**Věta (Konečnost sporu):** Je-li  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  sporné tablo, potom existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $\tau_n$  je sporné konečné tablo.

**Důkaz:** Buď  $S$  množina všech vrcholů, nad kterými (ve stromovém uspořádání) není spor, tj. dvojice položek  $T\psi$ ,  $F\psi$ .

- **Kdyby byla  $S$  nekonečná:** Podle Königova lemmatu pro podstrom  $\tau$  na množině  $S$  máme nekonečnou, bezespornou větev  $v$  v  $S$ . To ale dává i **bezespornou větev  $v$  v  $\tau$** , což je spor.
- **Množina  $S$  je tedy konečná,** celá leží v hloubce  $\leq d$  pro nějaké  $d \in \mathbb{N}$ . Každý vrchol **na úrovni  $d + 1$  už má nad sebou spor.**
- Zvolme  $n$  tak, že  $\tau_n$  už obsahuje všechny vrcholy  $\tau$  z prvních  $d + 1$  úrovní. Potom každá větev tabla  $\tau_n$  je sporná.  $\square$

## Důsledky konečnosti sporu

Tedy: Pokud neprodlužujeme už sporné větve (např. pro systematické tablo), potom sporné tablo je konečné.

**Důsledek (Konečnost důkazů):** Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom existuje i **konečný** tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ .

**Důkaz:** Platí  $\tau = \tau_n$ , neboť sporné tablo už neměníme.  $\square$

**Důsledek (Systematičnost důkazů):** Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem  $\varphi$  z  $T$ .

Důkaz bude až v příští sekci, chybí nám dvě fakta:

- je-li  $\varphi$  dokazatelná z  $T$ , potom v  $T$  platí (Věta o korektnosti)
- pokud by systematické tablo mělo bezespornou větev, šel by z ní vyrobit protipříklad (to je klíč k důkazu Věty o úplnosti)<sup>1</sup>

## 4.5 Korektnost a úplnost

---



Nyní ukážeme, že **dokazatelnost** je totéž, co **platnost**, tj. pro každou teorii  $T$  a výrok  $\varphi$ :

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$$

Rozdělíme na dvě implikace:

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$  (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$  (úplnost) “co platí, lze dokázat”

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $v$  se shoduje

- s položkou  $P$ , pokud  $P = \text{T}\varphi$  a  $v \models \varphi$ , nebo  $P = \text{F}\varphi$  a  $v \not\models \varphi$
- s větví  $V$ , pokud se shoduje s každou položkou na této větvi

**Lemma:** Shoduje-li se model teorie  $T$  s položkou v kořeni tabla z teorie  $T$ , potom se shoduje s některou větví.

**Důkaz:** Indukcí podle kroků  $i$  při konstrukci tabla  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  takovou, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $v$
- $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$

Hledaná větev v  $\tau$  je potom  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ .

**Báze indukce:** Model  $v$  se shoduje s kořenem  $\tau$ , tj. s (jednoprvkovou) větví  $V_0$  v  $\tau_0$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

### Indukční krok:

Pokud  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  bez prodloužení  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1} = V_i$ .

Pokud  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením  $T\alpha$  (pro axiom  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev. Protože  $v \models T$ , máme i  $v \models \alpha$ , tedy  $v$  se shoduje i s novou položkou.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro položku  $P$  na konec  $V_i$ . Protože se  $v$  shoduje s  $P$  (která leží na  $V_i$ ), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla, a proto se shoduje i s některou z jeho větví. (Ověříme si pro všechna atomická tabla.) Definujeme  $V_{i+1}$  jako prodloužení  $V_i$  o tuto větev atomického tabla. □

## Věta o korektnosti [tablo metody ve výrokové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li výrok  $\varphi$  tablo dokazatelný z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivý v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se shodoval s některou z větví tablo důkazu, ty jsou ale všechny sporné.

**Důkaz:** Sporem, necht'  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $v \in M(T)$ , že  $v \not\models \varphi$ .

Protože je  $T \vdash \varphi$ , existuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ , což je sporné tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.

Model  $v$  se shoduje s kořenem  $F\varphi$ , tedy podle Lemmatu se shoduje s nějakou větví  $V$ . Všechny větve jsou ale sporné. Takže na  $V$  jsou  $T\psi$  a  $F\psi$  (pro nějaký výrok  $\psi$ ), a model  $v$  se s těmito položkami shoduje. Máme  $v \models \psi$  a zároveň  $v \not\models \psi$ , což je spor.  $\square$

## Úplnost: pomocné lemma

Selže-li dokazování, dostaneme **bezespornou, dokončenou** větev v tablu z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni; ukážeme, že dává protipříklad:

**Kanonický model** pro bezespornou, dokončenou větev  $V$  je model

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se na } V \text{ vyskytuje položka } Tp \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

(tento model tedy musí splňovat všechny axiomy  $T$ , ale protože se shoduje s položkou  $F\varphi$  v kořeni, neplatí v něm výrok  $\varphi$ )

# Důkaz pomocného lemmatu

**Důkaz:** Indukcí podle struktury výroků v položkách. **Báze indukce:**

- je-li  $P = \mathsf{T}p$  pro prvovýrok  $p$ , máme  $v(p) = 1$ , shoduje se
- je-li  $P = \mathsf{F}p$ , potom na  $V$  nemůže být  $\mathsf{T}p$  (byla by sporná), máme tedy  $v(p) = 0$ , shoduje se

**Indukční krok:** rozebereme dva případy, ostatní jsou obdobné

- $P = \mathsf{T}\varphi \wedge \psi$ . Protože je  $V$  dokončená, je na ní  $P$  redukována. To znamená, že se na  $V$  vyskytují i položky  $\mathsf{T}\varphi$  a  $\mathsf{T}\psi$ . Podle indukčního předpokladu se s nimi  $v$  shoduje:  $v \models \varphi$  a  $v \models \psi$ . Takže platí i  $v \models \varphi \wedge \psi$  a  $v$  se shoduje s  $P$ .
- $P = \mathsf{F}\varphi \wedge \psi$ . Protože je  $P$  na  $V$  redukována, vyskytuje se na  $V$  položka  $\mathsf{F}\varphi$  nebo položka  $\mathsf{F}\psi$ . Platí tedy  $v \not\models \varphi$  nebo  $v \not\models \psi$ , z čehož plyne  $v \not\models \varphi \wedge \psi$  a  $v$  se shoduje s  $P$ . □

## Věta o úplnosti (+ důkaz systematičnosti)

**Věta (O úplnosti):** Je-li výrok  $\varphi$  pravdivý v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelný z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se s ní kanonický model pro  $V$  shoduje.

Protože je  $V$  dokončená, obsahuje  $T\alpha$  pro všechny axiomy  $T$ .

Model  $v$  tedy splňuje všechny axiomy a máme  $v \models T$ .

Protože se ale  $v$  shoduje i s položkou  $F\varphi$  v kořeni, máme  $v \not\models \varphi$ , což dává protipříklad, a máme  $T \not\models \varphi$ , spor.  $\square$

**Dokázali jsme i Důsledek o systematičnosti důkazů:** Z důkazu vidíme, že i systematické tablo pro položku  $F\varphi$  je nutně sporné, a je tedy tablo důkazem.  $\square$

## 4.6 Důsledky korektnosti a úplnosti

---



$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- $T$  je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ )
- $T$  je **kompletní**, je-li pro každý výrok buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ , ale ne obojí (jinak by byla sporná)

**Věta (O dedukci):**  $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**Důkaz:** Stačí dokázat:  $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$ . To je snadné.  $\square$

## 4.7 Věta o kompaktnosti

---

**Věta (O kompaktnosti):** Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

**Důkaz:**  $\Rightarrow$  **Snadné:** Model  $T$  je zjevně modelem každé její části.

$\Leftarrow$  **Nepřímo:** buď  $T$  sporná, najdeme spornou konečnou  $T' \subseteq T$ .

Z **úplnosti** víme, že  $T \vdash \perp$ , tedy existuje i **konečný** tablo důkaz  $\tau$  výroku  $\perp$  z  $T$ . Konstrukce  $\tau$  má konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z  $T$ . Definujme:

$$T' = \{\alpha \in T \mid T\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

Tedy  $\tau$  je tablo jen z teorie  $T'$ , máme tablo důkaz  $T' \vdash \perp$ , dle **korektnosti** je  $T'$  sporná. □

vlastnost nekonečného objektu  $\mathcal{O}$



vlastnost všech konečných podobjektů  $\mathcal{O}'$

- vlastnost popíšeme pomocí (nekonečné) teorie  $T$
- ke každé konečné  $T' \subseteq T$  sestojíme konečný podobjekt  $\mathcal{O}'$
- $\mathcal{O}'$  splňuje danou vlastnost
- to nám dává model  $T'$
- dle Věty o kompaktnosti má i  $T$  model
- což ukazuje, že i nekonečný objekt  $\mathcal{O}$  splňuje vlastnost

Věta o kompaktnosti má mnoho aplikací (několik z nich uvidíme později), následující příklad chápejte jako 'šablonu'.

## Aplikace kompaktnosti: příklad

**Důsledek:** Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.

**Důkaz:**  $\Rightarrow$  Každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

$\Leftarrow$   $G$  je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Mějme jazyk  $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$  (kde  $p_v$  je barva  $v$ ) a uvažme teorii

$$T = \{p_u \leftrightarrow \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě  $G$  je bipartitní, právě když  $T$  má model. Dle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná  $T' \subseteq T$  má model.

Bud'  $G'$  podgraf  $G$  indukovaný na vrcholech, o kterých  $T'$  mluví:

$$V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \text{Var}(T')\}$$

Protože je  $T'$  konečná, je  $G'$  také konečný, tedy je dle předpokladu 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení  $V(G')$  ale určuje model  $T'$ .  $\square$