

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladech
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestavit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Uvažme $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}; +, -, 0 \rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- Je \mathbb{Z}_4 model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- Určete všechny podstruktury $\mathbb{Z}_4 \langle a \rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
- Obsahuje \mathbb{Z}_4 ještě nějaké další podstruktury?
- Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 modelem teorie grup?
- Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 elementárně ekvivalentní \mathbb{Z}_4 ?

Problem 2. Buď $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- Existuje redukt \mathbb{Q} , který je modelem teorie grup?
- Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ rozšířit na model teorie grup?
- Obsahuje \mathbb{Q} podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní \mathbb{Q} ?
- Označme $\text{Th}(\mathbb{Q})$ množinu všech sentencí pravdivých v \mathbb{Q} . Je $\text{Th}(\mathbb{Q})$ kompletní teorie?

Problem 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

- Je T kompletní?
- Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
- Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T ? Je T' jednoduchá extenze T ? Je T' konzervativní extenze T ?

Problem 4. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L , které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulami.

- $(-x) + x = 0$
- $x + (-y) < x$
- $-(x + y) < -x$

Problem 5. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde \cdot je násobení reálných čísel
- množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře \mathcal{A}
- množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin \mathbb{N} v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$
- množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

EXTRA PRACTICE

Problem 6. Buď $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že “existují právě čtyři prvky”.

- (a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L' , které jsou extenzemi teorie T .
- (b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L' ? Zdůvodněte.

Problem 7. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.

- (a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. (3b)
- (b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)

Problem 8. Mějme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$ s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned}\varphi : \quad & P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge \neg x = y \\ \psi : \quad & P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y)\end{aligned}$$

Uvažme následující L -teorii:

$$\begin{aligned}T = \{ & \varphi, \psi, \neg c = d, \\ & R(x, x), \\ & R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ & R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ & R(x, y) \vee R(y, x)\}\end{aligned}$$

- (a) Nalezněte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T .
- (b) Je sentence $(\forall x)R(c, x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
- (c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
- (d) Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T' ? Uveďte zdůvodnění.

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 9. Nechť $T_n = \{\neg c_i = c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ s rovností, kde c_1, \dots, c_n jsou konstantní symboly.

- (a) Pro dané konečné $k \geq 1$ určete počet k -prvkových modelů teorie T_n až na izomorfismus.
- (b) Určete počet spočetných modelů teorie T_n až na izomorfismus.
- (c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.