Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Osmá přednáška

Program

- korektnost a úplnost, kanonický model
- věta o kompaktnosti, Löwenheim-Skolemova věta
- hilbertovský kalkulus

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.4-7.6 z Kapitoly 7 (+ Sekce 4.8)

7.4 Korektnost a úplnost

Korektnost a úplnost

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \;\Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$ (korektnost) *"co jsme dokázali, platí"*
- $T \models \varphi \;\Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$ (úplnost) *"co platí, lze dokázat"*

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)

Korektnost: pomocné lemma

Model $\mathcal{A}$ se shoduje s položkou P, pokud $P = \mathrm{T}\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = \mathrm{F}\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V, shoduje-li s každou položkou na V.

Lemma: Shoduje-li se model $\mathcal{A}$ teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tabla z T, potom lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots$ a expanzí $\mathcal{A}_i$ o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem $\mathcal{A}_i$
- V_{i+1} je prodloužením V_i a $\mathcal{A}_{i+1}$ je expanzí $\mathcal{A}_i$

Hledaná větev v τ je $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$, L_C-expanze $\mathcal{A}$ je 'limita' $\mathcal{A}_i$: vyskytuje-li se $c \in C$ na V_i, interpretuj jako v $\mathcal{A}_i$, jinak libovolně.

Báze: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou) V_0 v τ_0.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i: $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $\mathrm{T}\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i, definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i.

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ "svědek":** SÚNO $P = \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $\mathrm{T}\varphi(x/c)$, $\mathcal{A}_{i+1}$ je expanze $\mathcal{A}_i$ o $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$.
- **typ "všichni":** V_{i+1} je prodloužení V_i o atomické tablo. SÚNO nová položka $\mathrm{T}\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C-term t. Model $\mathcal{A}_{i+1}$ je libovolná expanze $\mathcal{A}_i$ o nové symboly z t. $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$, tedy se shoduje. $\square$

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T, potom je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, nechť $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T, což je sporné tablo z T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni.

Model $\mathcal{A}$ se shoduje s kořenem $\mathrm{F}\varphi$, tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly $c \in C$ tak, že se výsledná L_C-expanze $\mathcal{A}'$ shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s $\mathrm{T}\psi$ a zároveň $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou L_C-sentenci ψ. $\square$

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z bezesporné dokončené větve V (tabla z T) vyrobíme model

jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, kanonický model pro bezespornou dokončenou V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup C^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C-termů
- pro n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a "s_1", ..., "s_n" z A:

$$(\text{“}s_1\text{”}, \ldots, \text{“}s_n\text{”}) \in R^{\mathcal{A}} \;\Leftrightarrow\; \text{na } V \text{ je položka } \mathrm{T}R(s_1, \ldots, s_n)$$

- pro n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a "s_1", ..., "s_n" z A:

$$f^{\mathcal{A}}(\text{“}s_1\text{”}, \ldots, \text{“}s_n\text{”}) = \text{“}f(s_1, \ldots, s_n)\text{”}$$

- speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$

(funkce $f^{\mathcal{A}}$ je "vytvoření" termu ze symbolu f a vstupních termů)

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d\rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathrm{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- kanon. model: L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots\rangle$
- doména je $A = \{``d", ``f(d)", ``f(f(d))", \dots, ``c_0", ``f(c_0)", ``f(f(c_0))", \dots, ``c_1", ``f(c_1)", ``f(f(c_1))", \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = ``d"$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = ``c_i"$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(``d") = ``f(d)"$, $f^{\mathcal{A}}(``f(d)") = ``f(f(d))"$, ...
  - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{``d", ``f(d)", ``f(f(d))", \dots, ``f(c_0)", ``f(f(c_0))", \dots, ``f(c_1)", ``f(f(c_1))", \dots\}$.
- redukt na původní jazyk L: $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle$

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model $\mathcal{B}$ pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$\text{“}s_1\text{”} =^B \text{“}s_2\text{”} \;\Leftrightarrow\; \text{na } V \text{ je položka } \mathrm{T}s_1 = s_2$$

- kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$

- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury $\mathcal{B}$ a $=^{\mathcal{A}}$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ (symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v $\mathcal{B}$ a jako identitu v $\mathcal{A}$)

Všimněte si:

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný
- v jazyce s rovností může být i konečný

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\mathrm{F}\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots\rangle$$

- '$=$' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\cdots(f(s_2))\cdots)$ nebo $s_2 = f(\cdots(f(s_1))\cdots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=^B} = \{[\text{“}d\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}, [\text{“}c_0\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(c_0)\text{”}]_{=^B}, [\text{“}c_1\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(c_1)\text{”}]_{=^B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots\rangle$
  - $A = B/_{=^B}$, $d^{\mathcal{A}} = [\text{“}d\text{”}]_{=^B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [\text{“}c_i\text{”}]_{=^B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
  - $f^{\mathcal{A}}([\text{“}d\text{”}]_{=^B}) = [\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}$,
    $f^{\mathcal{A}}([\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}) = [\text{“}f(f(d))\text{”}]_{=^B} = [\text{“}d\text{”}]_{=^B}$, ...
  - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=^B}$.
- redukt na původní jazyk L: $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle$

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V.

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ "svědek":** $P = \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké "c" $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/\text{“}c\text{”})]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ "všichni":** $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$, na V jsou i položky $T\varphi(x/t)$ pro každý konstantní L_C-term, tj. pro každý prvek "t" $\in A$; z ind. předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/\text{“}t\text{”})]$ pro každé "t" $\in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Jazyk s rovností: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$, pro $\mathcal{B}$ máme, zbytek z Pozorování $\square$

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T, potom je tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z T s $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: Není-li sporné, má bezespornou (dokončenou) větev V, a dle Lemmatu se kanonický model $\mathcal{A}$ s větví V shoduje.

Buď $\mathcal{A}'$ redukt $\mathcal{A}$ na jazyk teorie T (zapomeň pomocné symboly).

Protože je V dokončená, obsahuje $\mathrm{T}\alpha$ pro všechny axiomy T. Model $\mathcal{A}$, tedy i $\mathcal{A}'$, splňuje všechny axiomy a máme $\mathcal{A}' \models T$.

Protože se ale $\mathcal{A}$, tedy i $\mathcal{A}'$, shoduje i s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni, máme $\mathcal{A}' \not\models \varphi$, což dává protipříklad, a máme $T \not\models \varphi$, spor. $\square$

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

$\vdash = \models$

Syntaktickou analogií důsledků jsou teorémy:

$$\mathrm{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\mathrm{Thm}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit 'platnost' pojmem 'dokazatelnost'. Např:

- T je sporná, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \bot$)
- T je kompletní, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \to \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \to \psi$. To je snadné. $\square$

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $\mathrm{F}\bot$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L-redukt kanonického modelu pro tuto větev. $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud T nemá model, je sporná, tedy $T \vdash \bot$. Vezměme nějaký konečný tablo důkaz $\bot$ z T. K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů T, ty tvoří konečnou podteorii $T' \subseteq T$, která nemá model. $\square$

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel
- teorie struktury $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence pravdivé v $\underline{\mathbb{N}}$
- n-tý numerál: term $\underline{n} = S(S(\cdots(S(0)\cdots)))$, kde S je n-krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n-tý numerál:

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu nestandardní model (označme $\mathcal{A}$)
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$, který je větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tzn. větší než hodnota termu $\underline{n}$ v nestandardním modelu $\mathcal{A}$)

Hilbertovský kalkulus

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky $\neg$, $\rightarrow$
- schémata logických axiomů (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)

  (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

  (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

  (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

  v predikátové logice navíc:

  (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ

  (v) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ

  (vi) **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností

- odvozovací pravidla:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)}$$

v predikátové logice navíc:

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$$

Hilbertovský důkaz

- hilbertovský důkaz výroku φ z teorie T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
  - φ_i je logický axiom, nebo
  - φ_i je axiom teorie ($\varphi_i \in T$), nebo
  - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí odvozovacího pravidla
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme: $T \vdash_H \varphi$

Příklad (jen ve výrokové logice)

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \to \psi$$

Hilbertovský důkaz:

1. $\neg\varphi$ — *axiom teorie*
2. $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ — *logický axiom (i)*
3. $\neg\psi \to \neg\varphi$ — *modus ponens na 1. a 2.*
4. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ — *logický axiom (iii)*
5. $\varphi \to \psi$ — *modus ponens na 3. a 4.*

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou korektní inferenční pravidla:
  - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, potom $T \models \psi$
  - je-li $T \models \varphi$, potom $T \models (\forall x)\varphi$ $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.