

Čtvrtá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Program

- tablo důkaz
- korektnost a úplnost
- věta o kompaktnosti

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.3-4.7 z Kapitoly 4 (Sekci 4.8 zatím přeskočíme)

4.3 Tablo důkaz

Formální definice tabla

- **položka** je nápis $\top\varphi$ nebo $\text{F}\varphi$, kde φ je nějaký výrok
- **konečné tablo z teorie T** je uspořádaný, položkami označovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
 - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
 - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
 - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\text{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- **tablo z teorie T** je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
 - τ_i jsou konečná tabla z T
 - τ_0 je jednoprvkové tablo
 - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- **tablo pro položku P** je tablo, které má položku P v kořeni

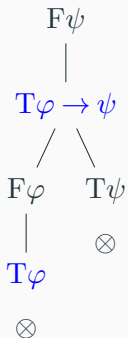
Dokončené a sporné tablo

- Tablo je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je **sporná**, pokud obsahuje položky $T\psi$ a $F\psi$ pro nějaký výrok ψ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je **dokončená**, pokud je sporná, nebo
 - každá její položka je na této větvi **redukována**,
 - a zároveň obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je **redukována** na větvi V procházející touto položkou, pokud
 - je tvaru Tp resp. Fp pro nějaký prvovýrok $p \in \mathbb{P}$,
 - nebo se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla (byť ho podle konvence nezakresluje), tj., typicky, při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V .

Tablo důkaz a tablo zamítnutí

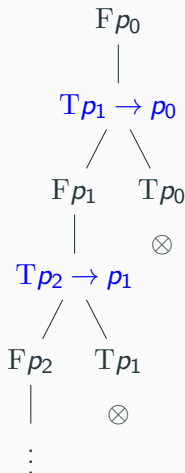
- **tablo důkaz** výroku φ z teorie T je **sporné** tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ **(tablo) dokazatelný** z T , píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, **tablo zamítnutí** je sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ **(tablo) zamítnutelný** z T , tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz



- tablo důkaz výroku ψ z $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$
- položky vycházející z axiomů jsou modře
- ukázali jsme tedy $T \vdash \psi$
- φ, ψ jsou libovolné pevně dané výroky
- tím jsme dokázali tzv. větu o dedukci

Příklad: dokončené tablo, které není sporné



- dokončené tablo pro výrok p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- nejlevější větev je **dokončená** a **bezesporná**
- sestává z položek $Tp_{i+1} \rightarrow p_i$ a Fp_i pro všechna $i \in \mathbb{N}$
- shoduje se s modelem $v = (0, 0, \dots)$, tj. $v : \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$ kde $v(p_i) = 0$ pro vš. i
- máme protipříklad ukazující, že $T \not\models p_0$

4.4 Konečnost a systematicčnost důkazů

Dokážeme:

- existuje-li tablo důkaz, existuje i **konečný** tablo důkaz
- existuje algoritmus, který umí vždy zkonstruovat dokončené tablo, tzv. **systematické tablo**
- tento algoritmus tedy **zkonstruuje tablo důkaz**, pokud existuje (zde potřebujeme *korektnost* a *úplnost*, ty dokážeme později) (pokud tablo důkaz neexistuje, algoritmus se nemusí zastavit)

Dokončení tabla: v čem je problém?

Pro konečnou T je snadné zkonstruovat dokončené tablo:

- na začátku použijeme všechny axiomy
- při redukci položek se výroky v nich zkracují
- stačí nedělat zbytečné kroky

Pro **nekonečnou** T bychom ale mohli zkonstruovat nekonečné tablo, a přitom:

- nikdy nepoužít některý axiom, nebo
- nikdy se nedostat k redukci některé položky

Myšlenka systematického tabla: na všechny se dostane, střídáme:

- **redukce následující položky** (po úrovních, zleva doprava) na všech bezesporných větvích, které jí procházejí
- **přidání následujícího axiomu** na všechny bezesporné větve (T je spočetná, axiomy libovolně očíslováme)

Definice systematického tabla

Systematické tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R , a pro každé $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející P
- nejprve definujeme τ'_i jako tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau'_i = \tau_i$
- tablo τ_{i+1} vznikne z τ'_i připojením $T\alpha_{i+1}$ na každou bezespornou větev
- to v případě, že $i < |T|$, jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) definujeme $\tau_{i+1} = \tau'_i$

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: Jsou všechny větve dokončené?

- Sporné větve jsou dokončené z definice.
- Bezesporná větev:
 - obsahuje $T\alpha_i$ pro všechna i (připojeno v i -tém kroku)
 - každá položka je na ní zredukována (leží-li v hloubce d , dostali jsme se k ní nejdéle v kroku $i = 2^{d+1} - 1$)
- Tedy i všechny bezesporné větve jsou dokončené. □

Věta (Konečnost sporu): Je-li $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ sporné tablo, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že τ_n je sporné konečné tablo.

Důkaz: Buď S množina všech vrcholů, nad kterými (ve stromovém uspořádání) není spor, tj. dvojice položek $T\psi$, $F\psi$.

- **Kdyby byla S nekonečná:** Podle Königova lemmatu pro podstrom τ na množině S máme nekonečnou, bezespornou větev v v S . To ale dává i **bezespornou větev v v τ** , což je spor.
- **Množina S je tedy konečná,** celá leží v hloubce $\leq d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$. Každý vrchol **na úrovni $d + 1$ už má nad sebou spor.**
- Zvolme n tak, že τ_n už obsahuje všechny vrcholy τ z prvních $d + 1$ úrovní. Potom každá větev tabla τ_n je sporná. \square

Důsledky konečnosti sporu

Tedy: Pokud neprodlužujeme už sporné větve (např. pro systematické tablo), potom sporné tablo je konečné.

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i **konečný** tablo důkaz φ z T .

Důkaz: Platí $\tau = \tau_n$, neboť sporné tablo už neměníme. \square

Důsledek (Systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T .

Důkaz bude až v příští sekci, chybí nám dvě fakta:

- je-li φ dokazatelná z T , potom v T platí (Věta o korektnosti)
- pokud by systematické tablo mělo bezespornou větev, šel by z ní vyrobit protipříklad (to je klíč k důkazu Věty o úplnosti)¹

4.5 Korektnost a úplnost

Nyní ukážeme, že **dokazatelnost** je totéž, co **platnost**, tj. pro každou teorii T a výrok φ :

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$$

Rozdělíme na dvě implikace:

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ (úplnost) “co platí, lze dokázat”

Korektnost: pomocné lemma

Model v se **shoduje**

- **s položkou P** , pokud $P = \text{T}\varphi$ a $v \models \varphi$, nebo $P = \text{F}\varphi$ a $v \not\models \varphi$
- **s větví V** , pokud se shoduje s každou položkou na této větvi

Lemma: Shoduje-li se model teorie T s položkou v kořeni tabla z teorie T , potom se shoduje s některou větví.

Důkaz: Indukcí podle kroků i při konstrukci tabla $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ takovou, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem v
- V_{i+1} je prodloužením V_i

Hledaná větev v τ je potom $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$.

Báze indukce: Model v se shoduje s kořenem τ , tj. s (jednoprvkovou) větví V_0 v τ_0 .

Indukční krok:

Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i bez prodloužení V_i , definujeme $V_{i+1} = V_i$.

Pokud τ_{i+1} vzniklo připojením $T\alpha$ (pro axiom $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev. Protože $v \models T$, máme i $v \models \alpha$, tedy v se shoduje i s novou položkou.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro položku P na konec V_i . Protože se v shoduje s P (která leží na V_i), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla, a proto se shoduje i s některou z jeho větví. (Ověříme si pro všechna atomická tabla.) Definujeme V_{i+1} jako prodloužení V_i o tuto větev atomického tabla. □

Věta o korektnosti [tablo metody ve výrokové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T , potom je φ pravdivý v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se shodoval s některou z větví tablo důkazu, ty jsou ale všechny sporné.

Důkaz: Sporem, necht' $T \not\models \varphi$, tj. existuje $v \in M(T)$, že $v \not\models \varphi$.

Protože je $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T , což je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

Model v se shoduje s kořenem $F\varphi$, tedy podle Lemmatu se shoduje s nějakou větví V . Všechny větve jsou ale sporné. Takže na V jsou $T\psi$ a $F\psi$ (pro nějaký výrok ψ), a model v se s těmito položkami shoduje. Máme $v \models \psi$ a zároveň $v \not\models \psi$, což je spor. \square

Úplnost: pomocné lemma

Selže-li dokazování, dostaneme **bezespornou, dokončenou** větev v v tablu z T s $F\varphi$ v kořeni; ukážeme, že dává protipříklad:

Kanonický model pro bezespornou, dokončenou větev V je model

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se na } V \text{ vyskytuje položka } Tp \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

(tento model tedy musí splňovat všechny axiomy T , ale protože se shoduje s položkou $F\varphi$ v kořeni, neplatí v něm výrok φ)

Důkaz pomocného lemmatu

Důkaz: Indukcí podle struktury výroků v položkách. **Báze indukce:**

- je-li $P = \mathsf{T}p$ pro prvovýrok p , máme $v(p) = 1$, shoduje se
- je-li $P = \mathsf{F}p$, potom na V nemůže být $\mathsf{T}p$ (byla by sporná), máme tedy $v(p) = 0$, shoduje se

Indukční krok: rozebereme dva případy, ostatní jsou obdobné

- $P = \mathsf{T}\varphi \wedge \psi$. Protože je V dokončená, je na ní P redukována. To znamená, že se na V vyskytují i položky $\mathsf{T}\varphi$ a $\mathsf{T}\psi$. Podle indukčního předpokladu se s nimi v shoduje: $v \models \varphi$ a $v \models \psi$. Takže platí i $v \models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P .
- $P = \mathsf{F}\varphi \wedge \psi$. Protože je P na V redukována, vyskytuje se na V položka $\mathsf{F}\varphi$ nebo položka $\mathsf{F}\psi$. Platí tedy $v \not\models \varphi$ nebo $v \not\models \psi$, z čehož plyne $v \not\models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P . □

Věta o úplnosti (+ důkaz systematičnosti)

Věta (O úplnosti): Je-li výrok φ pravdivý v teorii T , potom je tablo dokazatelný z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z T s $F\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev V , a dle Lemmatu se s ní kanonický model pro V shoduje.

Protože je V dokončená, obsahuje $T\alpha$ pro všechny axiomy T .

Model v tedy splňuje všechny axiomy a máme $v \models T$.

Protože se ale v shoduje i s položkou $F\varphi$ v kořeni, máme $v \not\models \varphi$, což dává protipříklad, a máme $T \not\models \varphi$, spor. □

Dokázali jsme i Důsledek o systematičnosti důkazů: Z důkazu vidíme, že i systematické tablo pro položku $F\varphi$ je nutně sporné, a je tedy tablo důkazem. □

4.6 Důsledky korektnosti a úplnosti

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- T je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \perp$)
- T je **kompletní**, je-li pro každý výrok buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$. To je snadné. \square

4.7 Věta o kompaktnosti

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: \Rightarrow **Snadné:** Model T je zjevně modelem každé její části.

\Leftarrow **Nepřímo:** buď T sporná, najdeme spornou konečnou $T' \subseteq T$.

Z **úplnosti** víme, že $T \vdash \perp$, tedy existuje i **konečný** tablo důkaz τ výroku \perp z T . Konstrukce τ má konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z T . Definujme:

$$T' = \{\alpha \in T \mid T\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

Tedy τ je tablo jen z teorie T' , máme tablo důkaz $T' \vdash \perp$, dle **korektnosti** je T' sporná. □

vlastnost nekonečného objektu \mathcal{O}



vlastnost všech konečných podobjektů \mathcal{O}'

- vlastnost popíšeme pomocí (nekonečné) teorie T
- ke každé konečné $T' \subseteq T$ sestrojíme konečný podobjekt \mathcal{O}'
- \mathcal{O}' splňuje danou vlastnost
- to nám dává model T'
- dle Věty o kompaktnosti má i T model
- což ukazuje, že i nekonečný objekt \mathcal{O} splňuje vlastnost

Věta o kompaktnosti má mnoho aplikací (několik z nich uvidíme později), následující příklad chápejte jako 'šablonu'.

Aplikace kompaktnosti: příklad

Důsledek: Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.

Důkaz: \Rightarrow Každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

\Leftarrow G je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Mějme jazyk $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$ (kde p_v je barva v) a uvažme teorii

$$T = \{p_u \leftrightarrow \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě G je bipartitní, právě když T má model. Dle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model.

Bud' G' podgraf G indukovaný na vrcholech, o kterých T' mluví:

$$V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \text{Var}(T')\}$$

Protože je T' konečná, je G' také konečný, tedy je dle předpokladu 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení $V(G')$ ale určuje model T' . \square