

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladech
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

- (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
- (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
- (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Příklad 2. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \triangleright^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem \triangleright , kde $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v \mathcal{A} ?

II. Pro každou z nich najděte strukturu \mathcal{B} (existuje-li) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

- (a) $x \triangleright y$
- (b) $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$
- (c) $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
- (e) $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

Příklad 3. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu \mathcal{A} , formuli φ , a sentenci ψ ,

- (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
- (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x ? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Příklad 4. Rozhodněte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f \rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

- (a) $T = \{U(f(x)), \neg x = y, x = y \vee y = z\}$
- (b) $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee y = z\}$
- (c) $T = \{U(f(x)), \neg x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee y = z\}$
- (d) $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee y = z\}$

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 5. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převedte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
- (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
- (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Příklad 6. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ ?

- (a) term z za proměnnou x , term y za proměnnou x ,
- (b) term z za proměnnou y , term $g(f(y), w)$ za proměnnou y ,
- (c) term x za proměnnou z , term y za proměnnou z ,

Příklad 7. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

- (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
- (b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
- (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
- (d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
- (e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ . Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

- (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
- (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
- (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
- (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

K ZAMYŠLENÍ

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x + y) + z \\0 + x &= x = x + 0 \\x + (-x) &= 0 = (-x) + x\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T . Zdůvodněte.

- (a) $x + y = y + x$
- (b) $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$