

Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Program

- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost
- aritmetické teorie
- nerozhodnutelnost predikátové logiky
- Gödelovy věty o neúplnosti

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 9.4 z Kapitoly 9, Kapitola 10

9.4 Axiomatizovatelnost

Třída struktur $K \subseteq M_L$ je:

- **axiomatizovatelná**, existuje-li teorie T taková, že $M_L(T) = K$
- **konečně/otevřeně** axiomatiz., je-li ax. konečnou/otevřenou T
- teorie T' je **konečně/otevřeně** axiomatizovatelná, platí-li to o třídě jejích modelů $K = M_L(T')$

Pozorování: Je-li K axiomatizovatelná, musí být uzavřená na \equiv .

Například, jak ukážeme:

- grafy a částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně ax.
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

Věta: Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model. Potom není třída jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Důkaz: Je-li jazyk bez rovnosti, vezmeme kanonický model pro bezespornou větev v tablu z T pro $F \perp$ (T je bezesporná).

Je-li jazyk s rovností, přidáme spočetně mnoho nových konst.

symbolů c_i a vezmeme extenzi: $T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$

Každá konečná část T' má model: buď k největší, že c_k je v této konečné části: lib. $\geq (k+1)$ -prvkový model,21 interpretuj c_0, \dots, c_k jako různé prvky.

Věta o kompaktnosti dává model T' , ten je nekonečný, redukt na původní jazyk (zapomenutí c_i^A) je nekonečný model T . \square

- např. konečné grafy nejsou axiomatizovatelné
- nekonečné modely teorie jsou vždy axiomatizovatelné, máme-li rovnost: stačí přidat 'existuje alespoň n prvků' pro vš. $n \in \mathbb{N}$

Konečná axiomatizovatelnost

Věta (O konečné axiomatizovatelnosti): $K \subseteq M_L$ je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K} = M_L \setminus K$ jsou axiomatizovatelné.

Důkaz: \Rightarrow Je-li K axiomatizovatelná **sentencemi** $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (vezmi gen. uzávěry), potom $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ axiomatizuje \overline{K} .

\Leftarrow Bud' $K = M(T)$ a $\overline{K} = M(S)$. Potom **$T \cup S$ je sporná**, neboť:

$$M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

Věta o kompaktnosti dává konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že:

$$\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$$

Nyní si všimněme, že platí:

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T)$$

Tím jsme dokázali, že **$M(T) = M(T')$** , neboli T' je konečná axiomatizace K . □

Tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná

Bud' T teorie těles. Těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je

- **charakteristiky p** , je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ je term $1 + 1 + \dots + 1$ (s p jedničkami),
- **charakteristiky 0**, pokud není charakteristiky p pro žádné p .
- Tělesa charakteristiky p jsou konečně axiomatizovatelná:

$$T_p = T \cup \{p1 = 0\}$$

- Tělesa char. 0 jsou axiomatizovatelná, ale ne konečně:

$$T_0 = T \cup \{\neg p1 = 0 \mid p \text{ prvočíslo}\}$$

Tvrzení: Třída K těles char. 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz: Stačí ukázat, že \overline{K} (tělesa nenulové char. a netělesa) není axiomatizovatelná. **Sporem:** $\overline{K} = M(S)$. Potom $S' = S \cup T_0$ má model, neboť každá konečná část má model: těleso charakteristiky větší než jakékoliv p z axiomu T_0 tvaru $\neg p1 = 0$. Je-li \mathcal{A} je model S' , potom $\mathcal{A} \in M(S) = \overline{K}$. Zároveň ale $\mathcal{A} \in M(T_0) = K$, spor. \square

Otevřená axiomatizovatelnost

Tvrzení: Je-li T otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu T také modelem T .

Důkaz: Bud' T' otevřená axiomatizace T , \mathcal{A} model T' , $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Pro každou $\varphi \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ (φ je otevřená), tedy i $\mathcal{B} \models T'$. \square

Poznámka: Platí i obráceně, je-li každá podstruktura modelu také model, potom je otevřeně axiomatizovatelná. (Důkaz neuvedeme.)

- DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, např. žádná konečná podstruktura modelu DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ není těleso, nemá inverzní prvek k 2 vůči násobení
- pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou nejvýše n -prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (i jejich podgrupy jsou nejvýše n -prvkové); k (otevřené) teorii grup stačí přidat: $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$

KAPITOLA 10:

NEROZHODNUTELNOST A NEÚPLNOST

Jak lze s teoriemi pracovat algoritmicky?

+ zlatý hřeb přednášky: Gödelovy věty o neúplnosti (1931)

- ukazují limity formálního přístupu
- zastavily program formalizace matematiky
- pojem **algoritmu** budeme chápat jen intuitivně
- technické podrobnosti důkazů vynecháme

Typicky potřebujeme spočetný jazyk.

10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Rekurzivní axiomatizace

- v dokazování povolujeme nekonečné teorie, jak jsou zadané?
- pro ověření že daný důkaz (např. tablo, rezoluční zamítnutí) je korektní potřebujeme algoritmický přístup ke všem axiomům
- mohli bychom požadovat **enumerátor** pro T , tj. algoritmus, který vypisuje axiomy z T , a každý axiom někdy vypíše
- ale kdyby byl v důkazu chybný axiom, nikdy bychom se to nedozvěděli: stále bychom čekali, zda ho enumerátor vypíše
- proto požadujeme silnější vlastnost:

T je **rekurzivně axiomatizovaná**, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$.

(ekvivalentní enumerátoru vypisujícím axiomy v lexikograf. pořadí)

Můžeme v dané teorii 'algoritmicky rozhodovat pravdu'?

- T je **rozhodnutelná**, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$,
- T je **částečně rozhodnutelná**, existuje-li algoritmus, který:
 - pokud $T \models \varphi$, doběhne a odpoví "ano"
 - pokud $T \not\models \varphi$, buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví "ne"

Tvrzení: Je-li T je rekurzivně axiomatizovaná, potom:

(i) T je část. rozhod. (ii) je-li navíc kompletní, je rozhodnutelná

Důkaz: (i) Algoritmus konstruuje systematické tablo z T pro $\mathbb{F}\varphi$; stačí enumerátor pro T , nebo postupně generovat vš. sentence a testovat, jsou-li v T . Je-li $T \models \varphi$, konstrukce skončí, ověříme, že je tablo sporné. (Jinak skončit nemusí.)

(ii) Víme, že buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. Paralelně konstruueme tablo pro $\mathbb{F}\varphi$ a pro $\mathbb{T}\varphi$ (důkaz a zamítnutí φ z T). Jedna z konstrukcí po konečně mnoha krocích skončí.

Rekurzivně spočetná kompletace

T má **rekurzivně spočetnou kompletaci**, je-li (nějaká) množina až na \sim všech jednoduchých kompletních extenzí T **rekurzivně spočetná**, tj. existuje algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše i -tý axiom j -té extenze (v nějakém uspořádání), nebo odpoví, že už neexistuje.

Tvrzení: Je-li T rekurzivně axiomatizovaná a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je rozhodnutelná.

Důkaz: Buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tj. kompl. jedn. extenze T_i , že $T_i \not\models \varphi$. Kompletnost T_i dává $T_i \vdash \neg\varphi$.

Algoritmus paralelně konstruuje tablo důkaz φ z T a (postupně) tablo důkazy $\neg\varphi$ ze všech kompletních jedn. extenzí T_1, T_2, \dots . (Je-li jich nekonečně mnoho, uděláme **dovetailing**: 1. krok 1. tabla, potom 2. krok 1., 1. krok 2., 3. krok 1., 2. krok 2., 1. krok 3., atd.)

Alespoň jedno z tabel je sporné, můžeme předpokládat konečné, algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. □

Následující teorie jsou rekurzivně axiomatizované a mají rekurzivně spočetnou kompletaci, tedy jsou rozhodnutelné:

- (a) Teorie čisté rovnosti
- (b) Teorie unárního predikátu ($T = \emptyset$, $L = \langle U \rangle$ s rovností)
- (c) Teorie hustých lineárních uspořádání DeLO*
- (d) Teorie Booleových algeber (Alfred Tarski 1940),
- (e) Teorie algebraicky uzavřených těles (Tarski 1949),
- (f) Teorie komutativních grup (Wanda Szmielew 1955).

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Kdy lze třídu struktur 'efektivně (algoritmicky) popsat'?

$K \subseteq M_L$ je **rek. axiomatizovatelná**, pokud existuje rek. axiomatizovaná T , že $K = M_L(T)$. T' je **rek. axiomatizovatelná**, platí-li to pro třídu jejích modelů (tj. je-li ekvivalentní rek. axiomatizované teorii).

(podobně lze definovat **rek. spočetnou axiomatizovatelnost**)

Tvrzení: Je-li \mathcal{A} konečná struktura v konečném jazyce s rovností, potom je teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná.

(z toho plyne i rozhodnutelnost $\text{Th}(\mathcal{A})$, ale $\mathcal{A} \models \varphi$ lze ověřit přímo)

Důkaz: Buď $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. $\text{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme sentencí "existuje právě n prvků a_1, \dots, a_n splňujících právě ty **základní vztahy** o funkčních hodnotách a relacích, které platí v \mathcal{A} ".

Např. je-li $f^{\mathcal{A}}(a_4, a_2) = a_{17}$, přidej atom. formuli $f(x_{a_4}, x_{a_2}) = x_{a_{17}}$, je-li $(a_3, a_3, a_1) \notin R^{\mathcal{A}}$ přidej $\neg R(x_{a_3}, x_{a_3}, x_{a_1})$. \square

Pro následující struktury je $\text{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná:

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, jde o tzv. teorii **diskrétních lineárních uspořádání**
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, jde o teorii DeLO
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$, teorie **následníka s nulou**
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$, **Presburgerova aritmetika**
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie **reálně uzavřených těles**, znamená že lze algoritmicky rozhodovat Euklid. geometrii (Tarski, 1949)
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie **algebraicky uzavřených těles char. 0**

Důsledek: Pro struktury výše platí, že $\text{Th}(\mathcal{A})$ je rozhodnutelná.

Důkaz: $\text{Th}(\mathcal{A})$ je vždy kompletní.

Teorie **standardního modelu aritmetiky** $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ale **není** rekurzivně axiomatizovatelná (viz První Gödelova věta o neúplnosti).

10.2 Aritmetika

- přirozená čísla hrají důležitou roli v matematice i v aplikacích
- **jazyk aritmetiky** je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovností
- **standardní model aritmetiky** $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ nemá rekurzivně axiomatizovatelnou teorii (První věta o neúplnosti)
- proto používáme rekurzivně axiomatizované teorie, které vlastnosti $\underline{\mathbb{N}}$ popisují částečně; říkáme jim **aritmetiky**
- představíme dvě: **Robinsonovu** Q a **Peanovu** PA

Robinsonova aritmetika Q

$$\neg S(x) = 0$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$$

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$$

$$x + S(y) = S(x + y)$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$$

- velmi slabá, nelze v ní dokázat např. komutativitu ani asociativitu $+$ či \cdot , nebo tranzitivitu \leq
- ale lze dokázat všechna **existenční tvrzení o numerálech** pravdivá v \mathbb{N} , tj. formule v PNF, jen \exists , za volné proměnné substituujeme **numerály** $\underline{n} = S(\dots S(0) \dots)$
- např. pro $\varphi(x, y) = (\exists z)(x + z = y)$ je $Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2})$

Tvrzení: Je-li $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ existenční formule, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, pak $Q \vdash \varphi(x_1/\underline{a_1}, \dots, x_n/\underline{a_n})$ právě když $\mathbb{N} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]$

(Důkaz vynecháme.)

Extenze Q o **schéma indukce**, tj. pro každou L -formuli $\varphi(x, \bar{y})$:

$$(\varphi(0, \bar{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \bar{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \bar{y})$$

- mnohem lepší aproximace $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$
- dokáže 'základní' vlastnosti (např. komut. a asociativitu $+$)
- stále ale existují sentence platné v $\underline{\mathbb{N}}$ ale nezávislé v PA (opět dokážeme v První větě o neúplnosti)

Poznámka: strukturu $\underline{\mathbb{N}}$ lze axiomatizovat (až na \simeq) v predikátové logice **2. řádu**, extenzí PA o tzv. **axiom indukce**:

$$(\forall X)((X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(S(x)))) \rightarrow (\forall x)X(x))$$

- X reprezentuje (libovolnou) podmnožinu modelu
- použijeme na množinu všech následníků 0
- každý prvek je následník 0 \Rightarrow izomorfismus s $\underline{\mathbb{N}}$

10.3 Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Věta (O nerozhodnutelnosti predikátové logiky): Neexistuje algoritmus, který pro vstupní formuli φ rozhodne, zda je logicky platná.

- tj. zda je formule φ [v lib. jazyce 1. řádu] tautologie ($\models \varphi$)
- neboli $T = \emptyset$ není rozhodnutelná

Nemáme formalismus pro algoritmy (Turingovy stroje), dokážeme redukcí na jiný nerozhodnutelný problém: **Hilbertův 10. problém**

“Najděte algoritmus, který po konečně mnoha krocích určí, zda daná diofantická rovnice s libovolným počtem proměnných a celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení.”

diofantická rovnice: $p(x_1, \dots, x_n) = 0$, kde p je celočíselný polynom

ukážeme, že existuje **redukce** ‘těžkého’ Hilbertova 10. problému na náš problém, tedy i náš problém je ‘těžký’

Nerozhodnutelnost Hilbertova desátého problému

Věta (Matiyasevich 1970): Problém existence celočíselného řešení dané diofantické rovnice s celočísl. koeficienty je nerozhodnutelný.
(Důkaz neuvedeme.)

Důsledek: Neexistuje algoritmus rozhodující, mají-li dané polynomy $p(x_1, \dots, x_n), q(x_1, \dots, x_n)$ s přiroz. koeficienty přirozené řešení, tj.

$$\mathbb{N} \models (\exists x_1) \dots (\exists x_n) p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n)$$

Důkaz: Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích říká, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet čtyř čtverců (celých čísel). Naopak, každé celé číslo je rozdíl dvou přirozených. Diofantickou rovnici lze tedy transformovat na rovnici z důsledku, a naopak. \square

Důkaz nerozhodnutelnosti predikátové logiky

Uvažme φ tvaru $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n)$ kde p a q jsou přirozené polynomy. Dle Tvzení o Robinsonově aritmetice:

$$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow Q \vdash \varphi$$

Bud' ψ_Q konjunkce (gen. uzávěrů) axiomů Q (je konečná). Zřejmě:

$$Q \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi_Q \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \psi_Q \rightarrow \varphi$$

Dle Věty o úplnosti je to ale ekvivalentní $\models \psi_Q \rightarrow \varphi$. Dostáváme:

$$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_Q \rightarrow \varphi$$

Sporem: Pokud bychom měli algoritmus rozhodující logickou platnost, mohli bychom rozhodovat i existenci přirozeného řešení rovnice $p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n)$, tj. Hilbertův 10. problém. \square

10.4 Gödelovy věty

První věta o neúplnosti + důsledek o nekompletnosti

Věta (Gödel 1931): Je-li T bezsporná rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky, potom existuje sentence, která je pravdivá v \mathbb{N} , ale není dokazatelná v T .

- vlastnosti aritmetiky přir. čísel nelze 'rozumně', efektivně popsat (v logice 1. řádu), takový popis je nutně 'neúplný'
- **pravdivost** je ve standardním modelu \mathbb{N} zatímco **dokazatelnost** v T (samozřejmě pravdivá v T je v T i dokazatelná)
- **bezspornost** nutná (sporná teorie dokáže vše)
- bez **rekurzivní axiomatizovatelnosti** by teorie nebyla 'užitečná'
- extenze Q znamená 'základní aritmetická síla' (různé varianty předpokladu; nelze-li zakódovat přir. čísla s $+$, \cdot je moc 'slabá')

Důsledek: Splňuje-li teorie T předpoklady První věty o neúplnosti a je-li navíc \mathbb{N} modelem T , potom T není kompletní.

Důkaz: Vezměme Gödelovu sentenci φ ($\mathbb{N} \models \varphi$, $T \not\models \varphi$). Je-li T kompletní, víme $T \vdash \neg\varphi$, z korektnosti $T \models \neg\varphi$, tedy $\mathbb{N} \models \neg\varphi$. \square

- Gödelova sentence formalizuje “**Nejsem dokazatelná v T** ”
- převratná důkazová technika, dva hlavní principy:
- **aritmetizace syntaxe**, zakódování sentencí a jejich dokazatelnosti do přirozených čísel
- **self-reference**, sentence ‘mluví sama o sobě’ (o svém kódu)
- všechny technické detaily vynecháme, viz např. V. Švejdar: *Logika – neúplnost, složitost a nutnost*, Academia 2002

- Gödelovo číslování ‘rozumně’ kóduje konečné syntaktické objekty (termy, formule, tablo důkazy) do \mathbb{N} : lze algoritmicky [de-]kódovat, simulovat ‘manipulaci’ s objekty na jejich kódech
- pro φ bude $\lceil \varphi \rceil$ příslušný kód, φ odpovídající $\lceil \varphi \rceil$ -tý numerál
- pro danou T máme binární relaci $\text{Proof}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ definovanou $(n, m) \in \text{Proof}_T \Leftrightarrow n = \lceil \varphi \rceil, m = \lceil \tau \rceil$, τ je tablo důkaz φ z T
- je-li T rek. axiomatizovaná, je relace $\text{Proof}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ **rekurzivní** (lze algoritmicky ověřit korektnost tabla, tj. $(n, m) \in \text{Proof}_T$)
- klíčovou technickou částí důkazu První věty je fakt, že relaci Proof_T lze **reprezentovat** predikátem v Robinsonově aritmetice

Predikát dokazatelnosti

Tvrzení: Je-li T rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky, potom existuje formule $Prf_T(x, y)$ v jazyce aritmetiky, která **reprezentuje** relaci Proof_T , tj. pro každá $n, m \in \mathbb{N}$:

- je-li $(n, m) \in \text{Proof}_T$, potom $Q \vdash Prf_T(\underline{n}, \underline{m})$
- jinak $Q \vdash \neg Prf_T(\underline{n}, \underline{m})$

(Důkaz vynecháme!)

- formule $Prf_T(x, y)$ vyjadřuje “ **y je důkaz x v T** ”
- formule $(\exists y)Prf_T(x, y)$ znamená “ **x je dokazatelná v T** ”
- svědek poskytuje kód tablo důkazu, a $\underline{\mathbb{N}}$ splňuje Q , proto:

Pozorování: $T \vdash \varphi$ právě když $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\varphi}, y)$.

Budeme potřebovat následující důsledek (také bez důkazu):

Důsledek: Je-li $T \vdash \varphi$, potom $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\varphi}, y)$.

Self-reference

vyjádřili jsme φ je dokazatelná ale chceme já nejsem dokazatelná
přirozené jazyky mají self-referenci: Tato věta má 22 znaků.;
formální systémy obvykle ne, umožňují ale přímou referenci (mluvit
o posloupnostech symbolů):

Následující věta má 29 znaků. "Následující věta má 29
znaků."

zde není žádná self-reference, pomůžeme si proto trikem zdvojení:

Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v
uvozovkách má 149 znaků. "Následující věta zapsaná
jednou a ještě jednou v uvozovkách má 149 znaků."

přímou referencí a zdvojením tedy získáme self-referenci; podobně
program v C, který vypíše svůj kód (34 je ASCII kód uvozovky):

```
main(){char *c="main(){char *c=%c%s%c; printf(c,34,c,34);}";  
printf(c,34,c,34);}
```

Věta o pevném bodě

Věta: Je-li T extenzí Robinsonovy aritmetiky, potom pro každou formuli $\varphi(x)$ (v jazyce teorie T) existuje sentence ψ taková, že:

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$$

- také “diagonalizační lemma” nebo “self-referenční” lemma
- ψ je **self-referenční**, říká o sobě: “já splňuji vlastnost φ ”
- v důkazu První věty bude $\varphi(x)$ formule $\neg(\exists y)Prf_T(x, y)$
- všimněte si, jak se v důkazu použije přímá reference a zdvojení

Důkaz (myšlenka): **Zdvojující funkce** $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dekoduje vstup n jako $\varphi(x)$, dosadí numerál \underline{n} , znovu zakóduje: pro vš. $\chi(x)$ platí:

$$d(\lceil \chi(x) \rceil) = \lceil \chi(\underline{\chi(x)}) \rceil$$

S využitím T extenze Q se dokáže, že d je v T **reprezentovatelná**. Pro jednoduchost ať ji reprezentuje term, označíme ho také d (ale ve skutečnosti je to složitá formule).

Pokračování důkazu

Tedy Q , proto i T , dokazuje o **numerálech**, že d opravdu 'zdvojuje':

$$T \vdash d(\underline{\chi(x)}) = \underline{\chi(\underline{\chi(x)})}$$

Hledaná self-referenční sentence ψ je sentence:

$$\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))$$

Chceme dokázat, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$, neboli:

$$T \vdash \varphi(\underline{d(\underline{\varphi(d(x))})}) \leftrightarrow \varphi(\underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))})$$

K tomu stačí $T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))}$ což máme z reprezentovatelnosti d , kde $\chi(x)$ je $\varphi(d(x))$. □

ψ tedy říká: »Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má vlastnost φ . «Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má vlastnost φ .» kde v uvozovkách znamená numerál kódu (přímá reference)

Nedefinovatelnost pravdy

Věta: V žádném bezesporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky nemůže existovat definice pravdy.

- **definice pravdy** v aritmetické teorii T je formule $\tau(x)$ taková, že pro každou sentenci ψ platí: $T \vdash \psi \leftrightarrow \tau(\underline{\psi})$
- kdyby existovala, místo dokazování by stačilo spočíst kód $\lceil \psi \rceil$, dosadit numerál $\underline{\psi}$ do τ , a vyhodnotit
- rozcvička pro důkaz Gödelovy První věty o neúplnosti
- důkaz užívá **Paradox lháře**, vyjádříme “Nejsem pravdivá v T ”
- důkaz První věty užívá stejný trik s “Nejsem dokazatelná v T ”

Důkaz: Sporem, ať existuje definice pravdy $\tau(x)$. Z Věty o pevném bodě kde $\varphi(x)$ je $\neg\tau(x)$ dostáváme sentenci ψ takovou, že:

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\psi})$$

Protože $\tau(x)$ je definice pravdy, platí ale i $T \vdash \psi \leftrightarrow \tau(\underline{\psi})$, tedy i $T \vdash \tau(\underline{\psi}) \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\psi})$. To by ale znamenalo, že T je sporná. \square

Důkaz První věty o neúplnosti

T bezesp. rek. ax. ext. Q . Gödelovu sentenci ($\underline{N} \models \psi_T, T \not\models \psi_T$) získáme z Věty o pevném bodě kde $\varphi(x)$ je $\neg(\exists y)Prf_T(x, y)$:

$$T \vdash \psi_T \leftrightarrow \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$$

Tedy ψ_T je v T ekvivalentní “ ψ_T není dokazatelná v T ”.

Ekvivalence platí i v \underline{N} (z konstrukce, protože \underline{N} splňuje Q), a spolu s ekvivalencí z Pozorování o predikátu dokazatelnosti:

$$\underline{N} \models \psi_T \Leftrightarrow \underline{N} \models \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y) \Leftrightarrow T \not\models \psi_T$$

Stačí tedy ukázat nedokazatelnost ψ_T v T . **Sporem: ať $T \vdash \psi_T$.**

- Self-reference: $T \vdash \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$
- Důsledek o predikátu dokazatelnosti: $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$

To by ale znamenalo, že T je sporná. □

Důsledky a zesílení

Důsledek (už byl): Je-li T rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky a je-li \mathbb{N} model T , potom T není kompletní.

Důkaz: T není sporná, tedy splňuje předpoklady První věty. Víme, že G . sentence splňuje $\mathbb{N} \models \psi_T$ a $T \not\models \psi_T$. Je-li T kompletní, máme $T \vdash \neg\psi_T$, z korektnosti $T \models \neg\psi_T$, tj. $\mathbb{N} \models \neg\psi_T$, spor. \square

Důsledek: Teorie $\text{Th}(\mathbb{N})$ není rekurzivně axiomatizovatelná.

Důkaz: $\text{Th}(\mathbb{N})$ je extenze Q , platí v \mathbb{N} . Kdyby byla rekurzivně axiomatizovatelná, podle Důledku by [její rekurzivní axiomatizace] nebyla kompletní, ale je. \square

Zesílení První věty: předpoklad $\mathbb{N} \models T$ v Důledku je nadbytečný.

Věta (Rosserův trik, 1936): V bezsporné rekurzivně axiomatizované extenzi Robinsonovy aritmetiky existuje nezávislá sentence.

(Bez důkazu.)

Gödelova Druhá věta o neúplnosti

Efektivně daná, dostatečně bohatá T nedokáže svou bezespornost.

- bezespornost vyjádří sentence Con_T : $\neg(\exists y)Prf_T(\underline{0 = S(0)}, y)$
- všimněte si: $\mathbb{N} \models Con_T \Leftrightarrow T \not\models 0 = S(0)$
- tj. Con_T opravdu vyjadřuje, že “ T je bezesporná”

Věta (Gödel, 1931): Je-li T bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze PA , potom Con_T není dokazatelná v T .

- všimněte si: Con_T je pravdivá v \mathbb{N} (neboť T je bezesporná)
- není třeba plná síla PA , stačí slabší předpoklad
- ukážeme si hlavní myšlenku důkazu

Gödelova sentence ψ_T vyjadřuje: “Nejsem dokazatelná v T .”

V důkazu První věty o neúplnosti jsme ukázali:

“Pokud je T bezesporná, potom ψ_T není dokazatelná v T .”

Z toho jednak plyne, že $T \not\vdash \psi_T$, neboť T bezesporná je.

Na druhou stranu to lze formulovat jako: “Platí $Con_T \rightarrow \psi_T$.”

Je-li T extenze Peanovy aritmetiky, lze důkaz tohoto tvrzení zformalizovat v rámci teorie T , tedy ukázat, že:

$$T \vdash Con_T \rightarrow \psi_T$$

Kdyby platilo $T \vdash Con_T$, dostali bychom i $T \vdash \psi_T$, což je spor. \square

Důsledek: PA má model, ve kterém platí $(\exists y)Prf_{PA}(0 = S(0), y)$.

Důkaz: Sentence Con_{PA} není dokazatelná, tedy ani pravdivá v PA . Platí ale v \mathbb{N} (neboť PA je bezesporná), což znamená, že je Con_{PA} nezávislá v PA . V nějakém modelu tedy musí platit její negace, která je ekvivalentní $(\exists y)Prf_{PA}(0 = S(0), y)$. \square

Poznámka: Musí to být nestandardní model PA , svědek **nestandardní** prvek (není hodnotou žádného numerálu).

Důsledek: PA má bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi, která “dokazuje svou spornost”, tj. $T \vdash \neg Con_T$.

Důkaz: $T = PA \cup \{\neg Con_{PA}\}$ je **bezesporná**, neboť $PA \not\vdash Con_{PA}$. Také triviálně $T \vdash \neg Con_{PA}$, tj. T ‘dokazuje spornost’ PA . Protože $PA \subseteq T$, platí i $T \vdash \neg Con_T$. \square

Poznámka: \mathbb{N} nemůže být modelem T .

Formalizace matematiky je založena na **Zermelově–Fraenkelově teorii množin s axiomem výběru (ZFC)**. Formálně vzato to není extenze PA , ale můžeme v ní Peanovu aritmetiku ‘interpretovat’.

Důsledek: Je-li ZFC bezesporná, není Con_{ZFC} v ZFC dokazatelná.

Pokud by tedy někdo v rámci ZFC dokázal, že je ZFC bezesporná, znamenalo by to, že je ZFC sporná.