NAIL062 P&P Logic: Worksheet 10 – Resolution in predicate logic

**Cíle výuky:** Po absolvování cvienı́ student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádt Unifikaní algoritmus
- zná potebné pojmy z rezoluní metody v predikátové logice (rezoluní pravidlo, rezolventa, rezoluní dkaz/zamítnutí, rezoluní strom), umí je formáln definovat, uvést píklady, vysvtlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluní metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést vechny potebné kroky (pevod do PNF, skolemizace, pevod do CNF)
- umí sestrojit rezoluní zamítnutí dané (i nekonené) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit písluný rezoluní strom, vetn uvedení pouitých unifikací
- z rezoluního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiom
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie model

## Píklady na cvienı́

**Problem 1.** *Kadý holi holí vechny, kdo neholí sami sebe. ádný holi neholí nikoho, kdo holí sám sebe.* Formalizujte v predikátové logice a dokate rezolucí, e: *Neexistují ádní holii.*

**Solution.** *Nejprve zvolíme vhodný jazyk. V textu identifikujeme vlastnost objekt "x je holi" a vztah dvou objekt "(kdo) x holí (koho) y". Pouijeme jazyk $L = \langle B, S\rangle$ bez rovnosti, kde $B$ je unární relaní symbol, $B(x)$ má význam "x je holi (barber)", $S$ je binární relaní symbol, $S(x, y)$ znamená "x holí (shaves) y".*

*V tomto jazyce formalizujeme tvrzení ze zadání:*

- *Kadý holi holí vechny, kdo neholí sami sebe:*

$$\varphi_1 \;=\; (\forall x)(B(x) \to (\forall y)(\neg S(y, y) \to S(x, y)))$$

- *ádný holi neholí nikoho, kdo holí sám sebe:*

$$\varphi_2 \;=\; \neg(\exists x)(B(x) \land (\exists y)(S(x, y) \land S(y, y)))$$

- *Neexistují ádní holii:*

$$\psi \;=\; \neg(\exists x)B(x)$$

*Naím cílem je ukázat, e v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ platí sentence $\psi$. Dokazujeme sporem, vyjdeme tedy z teorie $T \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$. Pomocí skolemizace k ní najdeme ekvisplnitelnou CNF formuli $S$. Najdeme rezoluní zamítnutí $S$, ím ukáemem e $S$ a tedy i $T \cup \{\neg\psi\}$ je nesplnitelná.*

*Pevedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, a pevedeme do CNF:*

- $\varphi_1 \;\rightsquigarrow\; B(x) \to (\neg S(y, y) \to S(x, y)) \;\sim\; \neg B(x) \lor S(y, y) \lor S(x, y)$
- $\varphi_1 \;\rightsquigarrow\; \neg(B(x) \land S(x, y) \land S(y, y)) \;\sim\; \neg B(x) \lor \neg S(x, y) \lor \neg S(y, y)$
- $\neg\psi \rightsquigarrow\; B(c)$ *(kde c je nový konstantní symbol)*

*Ped skolemizací se ujistte, e máte sentence. A nezapomete, e musíme skolemizovat sentenci $\neg\psi$, ne $\psi$. (Negace skolemovy varianty není ekvisplnitelná s negací pvodní formule! Skolemizací $\neg\exists B(x)$ bychom dostali $\neg B(x)$, eho negace je $B(x)$, tj. 'vichni jsou holii' zatímco správným postupem dostaneme '(svdek) c je holi'.).*

*V mnoinovém zápisu tedy máme:*

$$S = \{\{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y), \neg S(y, y)\}, \{B(c)\}\}$$

*Rezoluní zamítnutí:*

$$\{B(c)\}, \{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\}, \{S(y,y), S(c,y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x,y'), \neg S(y',y')\},$$
$$\{\neg S(c,y'), \neg S(y',y')\}, \square$$

*První dv klauzule jsou z $S$, tetí jejich rezolventa za pouití unifikace $\{x/c\}$. tvrtá klauzule je variantou klauzule z $S$, promnnou $y$ jsme pejmenovali na $y'$, abychom dodreli technickou podmínku o disjunktních mnoinách promnných v rezolvovaných klauzulích. Pátá klauzule je rezolventou první a tvrté za pouití unifikace $\{x/c\}$. Poslední, prázdná klauzule $\square$ je rezolventou z 3. a 5. klauzule, unifikace $\{y/c, y'/c\}$.*

*Typicky ale zamítnutí zakreslíme pouze rezoluním stromem, naznaíme i pouité unifikace:*

$$\{B(c)\} \qquad \{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\} \qquad \{B(c)\} \qquad \{\neg B(x), \neg S(x,y'), \neg S(y',y')\}$$
$$\{x/c\} \ \ \{S(y,y), S(c,y)\} \qquad\qquad \{\neg S(c,y'), \neg S(y',y')\} \ \ \{x/c\}$$
$$\{y/c, y'/c\} \ \ \square$$

**Problem 2.** Jsou dána následující tvrzení o probhlém genetickém experimentu:

*(i) Kadá ovce byla bu porozena jinou ovcí, nebo naklonována (avak nikoli oboje zárove).*
*(ii) ádná naklonovaná ovce neporodila.*

Chceme ukázat rezolucí, e pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétn:

(a) Vyjádete sentencemi $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti ($P$ je binární, $K$ unární relaní symbol, $P(x,y)$ znamená 'ovce $x$ porodila ovci $y$', $K(x)$ 'ovce $x$ byla naklonována').
(b) S vyuitím skolemizace tchto sentencí nebo jejich negací sestrojte mnoinu klauzulí $S$ (me být ve vtím jazyce), která je nesplnitelná, práv kdy $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
(c) Najdte rezoluní zamítnutí $S$, nakreslete rezoluní strom s pouitými unifikacemi.
(d) Má $S$ LI-zamítnutí?

**Solution.** *Vimnte si, e vechny objekty, o kterých mluvíme, jsou ovce, nepotebujeme tedy predikát pro 'být ovcí'. Postup je stejný jako v pedchozím píklad:*

*(a) Moností jak formulovat formule je více, pokud se snaíme co nejpesnji dret textu, dostaneme nap.:*

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\forall x)(((\exists y)P(y,x) \vee K(x)) \wedge \neg((\exists z)P(z,x) \wedge K(x))) \\
\varphi_2 &= \neg(\exists x)(K(x) \wedge (\exists y)P(x,y)) \\
\varphi_3 &= (\forall x)((\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists z)P(z,x))
\end{aligned}$$

*(b) Vyjdeme z teorie $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ (dokazujeme sporem). Pevedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, pevedeme do CNF, a zapíeme v mnoinovém zápisu:*

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(y,x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z,x) \wedge K(x))) \rightsquigarrow (P(f(x),x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z,x) \wedge K(x)) \sim \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}\}$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)\neg(K(x) \wedge P(x,y)) \sim \{\{\neg K(x), \neg P(x,y)\}\}$
- $\neg\varphi_3 \sim (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(P(x,y) \rightarrow P(z,x)) \rightsquigarrow \neg(P(c,d) \rightarrow P(z,c)) \sim \{\{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

$S = \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}, \{\neg K(x), \neg P(x,y)\}, \{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

*(c) Rezoluní strom pro rezoluní zamítnutí $S \vdash_R \square$:*

$$\{P(f(x),x),K(x)\} \qquad \{\neg P(z,c)\}$$

$$\color{blue}{\{x/c, z/f(c)\}} \ \{K(c)\} \qquad \{\neg K(x), \neg P(x,y)\}$$

$$\color{blue}{\{x/c, z/f(c)\}} \ \{\neg P(c,y)\} \qquad \{P(c,d)\}$$

$$\color{blue}{\{y/d\}} \ \square$$

(d) *Ano, v (c) se nám podailo sestrojit LI-zamítnutí. I kdyby ne, existence LI-zamítnutí plyne z Vty o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule, nae CNF formule $S$ je Hornova.*

**Problem 3.** Nech $T = \{\neg(\exists x)R(x),\ (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x)),\ (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,x)) \to R(x)),\ (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací naleznte k $T$ otevenou ekvisplnitelnou teorii $T'$.
(b) Pevete $T'$ na ekvivalentní teorii $S$ v CNF. Zapite $S$ v mnoinové reprezentaci.
(c) Naleznte rezoluní zamítnutí teorie $S$. U kadého kroku uvete pouitou unifikaci.
(d) Naleznte nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z $S$. *Nápovda: vyuijte unifikace z (c).*

**Solution.** *(a) Skolemizací dostáváme:*

$$T' = \{\neg R(x),\ P(c,y) \to P(y,c),\ P(x,y) \wedge P(y,x) \to R(x),\ P(x,f(x))\}$$

*(Pozor u tetího axiomu: $(\exists y)$ vytýkáme z antecedentu implikace, zmní se na $(\forall y)$).*

*(b) Snadno pevedeme do CNF:*

$$S = \{\{\neg R(x)\}, \{\neg P(c,y), P(y,c)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,x), R(x)\}, \{P(x,f(x))\}\}$$

*(c) Rezoluní strom pro $S \vdash_R \square$:*

$$\{\neg R(x)\} \qquad \{\neg P(x',y), \neg P(y,x'), R(x')\}$$

$$\color{blue}{\{x'/x\}} \ \{\neg P(x,y), \neg P(y,x)\} \qquad \{\neg P(c,y'), P(y',c)\}$$

$$\color{blue}{\{x/c, y'/y\}} \ \{\neg P(c,y)\} \qquad \{P(x,f(x))\}$$

$$\color{blue}{\{x/c, y/f(c)\}} \ \square$$

*(Vimnte si, kde potebujeme pejmenovat promnné, aby rezolvované klauzule mly disjunktní mnoiny promnných.)*

*(d) K nalezení konjunkce základních instancí axiom meme pouít sestrojené rezoluní zamítnutí. Pro kadý list rezoluního stromu, který je oznakovaný klauzulí $C$ (a na pejmenování je to klauzule z $S$), aplikujeme na $C$ postupn vechny unifikace na cest od tohoto listu a ke koeni:*

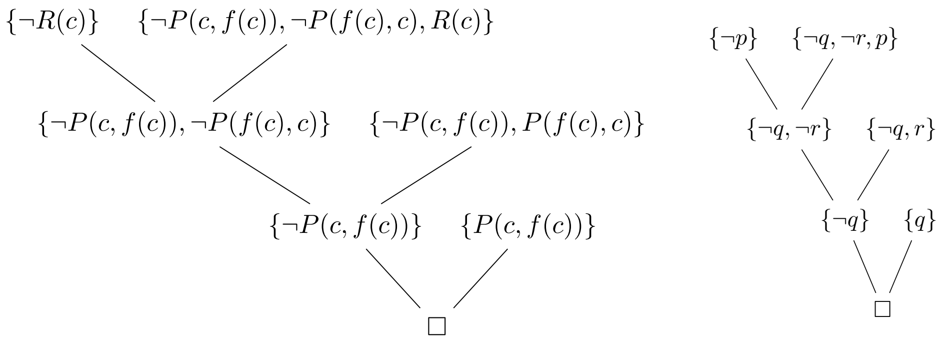
- $\neg R(x) \cdot \color{blue}{\{x'/x\}} \cdot \color{blue}{\{x/c, y'/y\}} \cdot \color{blue}{\{x/c, y/f(c)\}} \color{black}{= \neg R(c)}$

- $\neg P(x', y) \vee \neg P(y, x') \vee R(x') \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)$
- $\neg P(c, y') \vee P(y', c) \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)$
- $P(x, f(x)) \cdot \{x/c, y/f(c)\} = P(c, f(c))$

*Pokud by v nkterých klauzulích zstaly promnné, substituujeme za n libovolný konstantní term. Dostáváme nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z $S$:*

$$\neg R(c) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)) \wedge P(c, f(c))$$

*Její rezoluní zamítnutí 'na úrovni výrokové logiky' má stejnou strukturu jako rezoluní zamítnutí $S$:*




*Pokud bychom chtli základní instance pvodní teorie $T$, musíme se podívat, ze kterých axiom $T$ vznikly nae klauzle, a aplikovat stejné unifikace, výsledkem by bylo:*

$$\neg R(c) \wedge (P(c, f(c)) \rightarrow P(f(c), c)) \wedge (P(c, f(c)) \wedge P(f(c), c) \rightarrow R(c)) \wedge P(c, f(c))$$

## Dalí příklady k procvienÍ

**Problem 4.** Najdte rezoluní zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}, \{\neg H(v, a)\},$$
$$\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}, \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

**Problem 5.** Mjme jazyk $L = \langle <, j, h, s\rangle$ bez rovnosti, kde $j, h, q$ jsou konstantní symboly ('jablka/hruky/vestky') a $x < y$ vyjaduje, e *"ovoce $y$ je lepí ne ovoce $x$"*. Víme, e:

*(i) Relace "být lepí" je ostré ástené uspoádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).*
*(ii) Hruky jsou lepí ne jablka.*

Dokate rezolucí, e *(iii) Jsou-li vestky lepí ne hruky, nejsou jablka lepí ne vestky.*

(a) Tvrzení $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ vyjádete jako otevené formule v jazyce $L$.
(b) Pomocí tchto formulí najdte CNF formuli $S$, která je nesplnitelná, práv kdy z $(i)$, $(ii)$ vyplývá $(iii)$. Napite $S$ v mnoinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokate, e $S$ není splnitelná. Rezoluní zamítnutí znázornte rezoluním stromem. U kadého kroku uvete pouitou unifikaci. *Nápovda: staí tyi rezoluní kroky.*
(d) Naleznte konjunkci základních instancí axiom $S$, která je nesplnitelná.
(e) Je $S$ zamítnutelná LI-rezolucí?

**Problem 6.** Bu $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde $U$ je unární relaní symbol, $c$ konstantní symbol, a axiom $\varphi$ vyjaduje *"Existuje alespo* 5 *prvk, pro které platí $U(x)$."*

(a) Najdte dv neekvivalentní jednoduché kompletní extenze $T$.
(b) Je teorie $T$ oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.

**Problem 7.** Nech $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde $U$ je unární relaní symbol, $f$ je unární funkní symbol a $\varphi$ vyjaduje, e "existují maximáln 4 prvky".

(a) Je teorie $T$ extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdvodnte.

(b) Je teorie $T$ oteven axiomatizovatelná? Zdvodnte.

**Problem 8.** Bu $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde $S$ je unární funkní symbol.

(a) Naleznte extenzi $T'$ teorie $T$ o definici nového unárního funkního symbolu $P$ takovou, e $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.

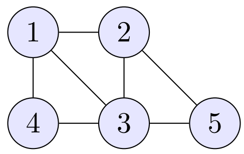
(b) Je teorie $T'$ oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.

**Problem 9.** Nech $T$ je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspoádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde $c$, $d$ jsou nové konstantní symboly.

(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / livé / nezávislé v $T$?

(b) Napite dv neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie $T$.

**Problem 10.** Mjme následující graf.




(a) Najdte vechny automorfismy.

(b) Které podmnoiny mnoiny vrchol $V$ jsou definovatelné? Uvete definující formule. *(Nápovda: Vyuijte (a).)*

(c) Které binární relace na $V$ jsou definovatelné?

## K zamylení

**Problem 11.** Bu $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde $S$ je unární funkní symbol.

(a) Bu $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je mnoina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru $0$?

(b) Je teorie $T$ oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.

(c) Je extenze $T'$ teorie $T$ o axiom $S(x) = x$ $\omega$-kategorická teorie? Je $T'$ kompletní?

(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje $L$-struktura $\mathcal{B}$ velikosti $n$ elementárn ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spoetná struktura $\mathcal{B}$ elementárn ekvivalentní s $\mathcal{R}$?