NAIL062 V&P Logika: 3. sada píklad – Algebra výrok, Problém SAT

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- rozumí souvislosti výrok/teorií a na [T-]ekvivalenci a mnoin model (tzv. algebra výrok), umí aplikovat v konkrétních píkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkuenost s pouitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro eení 2-SAT pomocí implikaního grafu (vetn nalezení vech model), umí aplikovat na píklad
- rozumí algoritmu pro eení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace , umí aplikovat na píklad
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na píklad

Píklady na cviení

Píklad 1. Nech $|\mathbb{P}| = n$ a mjme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, e $|M(\varphi)| = k$. Urete poet a na ekvivalenci:

(a) výrok ψ takových, e $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(c) kompletních teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, e $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvame navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spotte a na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, e $\varphi \vee \psi \models \chi$,
(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Píklad 2. Sestrojte implikaní graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najdte njaké eení: (a) výrok φ níe, (b) $\varphi \wedge \neg p_1$, (c) $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$.

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Píklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistte, zda je následující Hornv výrok splnitelný. Pokud ano, najdte njaké splující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Píklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodnte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Píklad 5. Mjme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt njaké jeho topologické uspoádání. Zakódujte tento problém do SAT.

Dalí píklady k procviení

Píklad 6. Uvame následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Urete poet (a na ekvivalenci) výrok χ nad $\mathbb{P}$ takových, e $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Urete poet (a na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, e $T \models \varphi \wedge \psi$.

(c) Najdte njakou axiomatizaci pro kadou (a na ekvivalenci) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, e $T \models \varphi \wedge \psi$.

Píklad 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najdte vechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Píklad 8. ete pomocí implikaního grafu jako v Píkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Píkladu 4:

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$

(b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

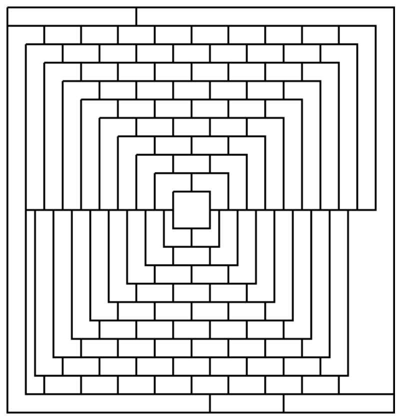
Píklad 9. Lze obarvit ísla od 1 do n dvma barvami tak, e neexistuje monochromatické eení rovnice $a + b = c$ pro ádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, práv kdy to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

Zkuste si doma: Napite skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Pouijte SAT solver k nalezení nejmeního n pro které takové obarvení neexistuje (tj. kadé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, e $a + b = c$).

Píklad 10. Vta o tyech barvách íká, e následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, e ádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najdte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa kraj eska

(b) Tí instance



K zamylení

Píklad 11. Pro danou formuli φ v CNF najdte a 3-CNF formuli φ' takovou, e φ' je splnitelná, práv kdy φ je splnitelná. Popite efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. *redukci* z problému SAT do problému 3-SAT).

Píklad 12. Zakódujte problém setídní dané n-tice celých ísel do SAT.

Píklad 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmái, který potebuje pepravit pes eku vlka, kozu, a hlávku zelí.