NAIL062 V&P Logika: 8. sada příkladů – Tablo metoda v predikátové logice

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí tomu, jak se liší tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formálně definovat všechny potřebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich použití
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metodě pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých příkladech
- zná větu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

Příklady na cvičení

Příklad 1. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.* Konkrétně:

(a) Zvolte vhodný jazyk $\mathcal{L}$. Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
(b) Formalizujte naše znalosti a dokazované tvrzení jako sentence $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$ v jazyce $\mathcal{L}$.
(c) Sestrojte tablo důkaz sentence φ z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Řešení. *(a) Zvolme jazyk $\mathcal{L} = \langle V, L, O, S\rangle$ bez rovnosti, kde V, L, O a S jsou unární relační symboly o významu "být viníkem/lhářem/obviněným/svědkem".*
(b)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\forall x)(V(x) \to L(x))\\
\alpha_2 &= (\exists x)(O(x) \wedge S(x))\\
\alpha_3 &= \neg(\exists x)(S(x) \wedge L(x))\\
\varphi &= \neg(\forall x)(O(x) \to V(x))
\end{aligned}$$

(c) Sestrojíme dokončené tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ s položkou $F\varphi$ v kořeni. Uvidíme, že všechny větve budou sporné, půjde tedy o tablo důkaz. (Modře je vyznačeno připojení axiomů, červeně jsou kořeny atomických tabel položek typu 'všichni', které bychom mohli nekreslit, kdyby nám to konvence dovolila.)

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)(O(x) \to V(x)) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)(O(x) \to V(x)) \\
| \\
\color{blue}{\mathrm{T}(\exists x)(O(x) \wedge S(x))} \\
| \\
\mathrm{T}O(c_0) \wedge S(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}O(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}S(c_0) \\
| \\
\color{red}{\mathrm{T}(\forall x)(O(x) \to V(x))} \\
| \\
\mathrm{T}O(c_0) \to V(c_0) \\
\diagup \qquad \diagdown
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{F}O(c_0) & \mathrm{T}V(c_0) \\
\otimes & | \\
 & \color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)(V(x) \to L(x))} \\
 & | \\
 & \color{red}{\mathrm{T}(\forall x)(V(x) \to L(x))} \\
 & | \\
 & \mathrm{T}V(c_0) \to L(c_0) \\
 & \diagup \qquad \diagdown
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{F}V(c_0) & \mathrm{T}L(c_0) \\
\otimes & | \\
 & \color{blue}{\mathrm{T}\neg(\exists x)(S(x) \wedge L(x))} \\
 & | \\
 & \mathrm{F}(\exists x)(S(x) \wedge L(x)) \\
 & | \\
 & \color{red}{\mathrm{F}(\exists x)(S(x) \wedge L(x))} \\
 & | \\
 & \mathrm{F}S(c_0) \wedge L(c_0) \\
 & \diagup \qquad \diagdown
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{F}S(c_0) & \mathrm{F}L(c_0) \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

Příklad 2. Uvažte následující tvrzení:

(i) Nula je malé číslo.

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*
(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*
(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$.
(c) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Řešení. *(a)*

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= M(0) \\
\varphi_2 &= (\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x, 0)) \\
\varphi_3 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow M(x + y)) \\
\varphi_4 &= (\forall x)(\forall y)(B(x, y) \rightarrow B(f(x), f(y))) \\
\varphi_5 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow B(f(x + y), f(0)))
\end{aligned}
$$

(b) *Tablo vyjde sporné, máme tedy $T \vdash \varphi_5$ a z úplnosti $T \models \varphi_5$. Všimněte si, že axiom $\varphi_1 = M(0)$ není potřeba:*

$$\mathrm{F}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to B(f(x+y), f(0)))$$

$$\mathrm{F}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to B(f(c_0+y), f(0)))$$

$$\mathrm{F}M(c_0) \wedge M(c_1) \to B(f(c_0+c_1), f(0))$$

$$\mathrm{T}M(c_0) \wedge M(c_1)$$

$$\mathrm{F}B(f(c_0+c_1), f(0))$$

$$\mathrm{T}M(c_0)$$

$$\mathrm{T}M(c_1)$$

$$\color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to M(x+y))}$$

$$\color{red}{\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to M(x+y))}$$

$$\mathrm{T}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to M(c_0+y))$$

$$\color{red}{\mathrm{T}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to M(c_0+y))}$$

$$\mathrm{T}M(c_0) \wedge M(c_1) \to M(c_0+c_1)$$

$$\begin{array}{c|c}
\mathrm{F}M(c_0) \wedge M(c_1) & \mathrm{T}M(c_0+c_1) \\
\begin{array}{cc} \mathrm{F}M(c_0) & \mathrm{F}M(c_1) \\ \otimes & \otimes \end{array} & \color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x,0))} \\
 & \color{red}{\mathrm{T}(\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x,0))} \\
 & \mathrm{T}M(c_0+c_1) \leftrightarrow B(c_0+c_1, 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\mathrm{T}M(c_0+c_1) & \mathrm{F}M(c_0+c_1) \\
\mathrm{T}B(c_0+c_1, 0) & \mathrm{F}B(c_0+c_1, 0) \\
 & \otimes
\end{array}$$

$$\color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(B(x,y) \to B(f(x), f(y)))}$$

$$\color{red}{\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(B(x,y) \to B(f(x), f(y)))}$$

$$\mathrm{T}(\forall y)(B(c_0+c_1, y) \to B(f(c_0+c_1), f(y)))$$

$$\color{red}{\mathrm{T}(\forall y)(B(c_0+c_1, y) \to B(f(c_0+c_1), f(y)))}$$

$$\mathrm{T}B(c_0+c_1, 0) \to B(f(c_0+c_1), f(0))$$

$$\begin{array}{c|c}
\mathrm{F}B(c_0+c_1, 0) & \mathrm{T}B(f(c_0+c_1), f(0)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

(c) *Najdeme dva elementárně neekvivalentní modely T:*

- $\mathcal{A} = \langle\{0\}; M^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}\rangle$ *kde* $M^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$, $f^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$, $+^{\mathcal{A}} = \{((0,0),0)\}$, *a* $0^{\mathcal{A}} = 0$
- $\mathcal{B} = \langle\{0,1\}; M^{\mathcal{B}}, B^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, +^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}}\rangle$ *kde* $M^{\mathcal{B}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{B}} = \{(0,0),(1,1)\}$, $f^{\mathcal{B}} = \{(0,0),(1,1)\}$, $+^{\mathcal{B}} = \{((0,0),0),((0,1),1),((1,0),1),((1,1),0)\}$, *a* $0^{\mathcal{B}} = 0$

Kompletní jednoduché extenze jsou potom $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *a* $\mathrm{Th}(\mathcal{B})$ *(tj. všechny L-sentence, které platí v $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$). Teorie struktury je vždy kompletní teorie. Nejsou ekvivalentní například proto, že $(\forall x)M(x)$ platí v $\mathcal{A}$ ale ne v $\mathcal{B}$. (Uvědomte si, že jazyk je bez rovnosti, potřebujeme tedy sentenci bez rovnosti.)*

Příklad 3. Uvažme jazyk $L = \langle c\rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol. Tablo metodou dokažte, že v teorii $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$ platí formule $x = c$.

Řešení. *Sestrojíme dokončené tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}(\forall x)x = c$ v kořeni (formule v položkách tabla musí být sentence). Protože je jazyk s rovností, můžeme v tablu používat i axiomy rovnosti pro jazyk L, resp. jejich generální uzávěry: $(\forall x)x = x$ a $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2))$.*

$$\mathrm{F}(\forall x)x = c$$

$$\mathrm{F}c_0 = c$$

$$\mathrm{T}(\exists x)(\forall y)x = y$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}c_1 = c$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}c_1 = c_0$$

$$\mathrm{T}(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (c_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (c_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_2)(c_1 = c_0 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to c_0 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_2)(c_1 = c_0 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to c_0 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(c_1 = c_0 \wedge c_1 = c \to (c_1 = c_1 \to c_0 = c))$$

$$\begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}c_1 = c_0 \wedge c_1 = c} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}c_1 = c_1 \to c_0 = c} \\
\mathrm{F}c_1 = c_0 & \mathrm{F}c_1 = c & \mathrm{F}c_1 = c_1 & \mathrm{T}c_0 = c \\
\otimes & \otimes & \mathrm{T}(\forall x)x = x & \otimes \\
 & & \mathrm{T}(\forall x)x = x & \\
 & & \mathrm{T}c_1 = c_1 & \\
 & & \otimes &
\end{array}$$

Příklad 4. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekončený model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*; tj. že v A existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ takové, že: $\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0$. (Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Řešení. *Z předpokladu víme, že T má nekonečný model $\mathcal{B}$, tj. nekonečné lineární uspořádání. To by ale mohlo být např. $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$, které žádný nekonečný řetězec nemá. Potřebujeme model s nekonečným klesajícím řetězcem, ten získáme z Věty o kompaktnosti (verze pro predikátovou logiku):*

Jazyk L rozšíříme přidáním spočetně mnoha nových konstantních symbolů c_i ($i \in \mathbb{N}$). Označme rozšířený jazyk L'. Uvažme následující L'teorii T':

$$T' = T \cup \{c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Stačí ukázat, že T' má model. Ten zřejmě musí být nekonečný a jeho redukt na jazyk L je hledaný model $\mathcal{A}$ teorie T, který má nekonečný klesající řetězec $\cdots < c_{n+1}^{\mathcal{A}} < c_n^{\mathcal{A}} < \cdots < c_0^{\mathcal{A}}$.

Z věty o kompaktnosti víme, že T' má model, právě když každá konečná podmnožina T' má model. Máme-li konečnou podteorii $S \subseteq T'$, ta obsahuje jen konečně mnoho formulí $c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i$, pro nějakou konečnou množinu indexů $I \subseteq \mathbb{N}$. Označme jako $\mathcal{B}$ nekonečný model T, který máme z přepokladu. (Tento model nemusí mít nekonečný klesající řetězec! Mohl by to být např. $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$) V něm stačí vybrat libovolný konečný klesající řetězec délky $|I|$ jako interpretace konstantních symbolů c_i pro $i \in I$ (symboly $c_j \notin I$ interpretujeme libovolně), a dostáváme model S.

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Uvažte následující tvrzení:

(i) *Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.*
(ii) *Každou učebnici napsal nějaký docent.*
(iii) *U každého docenta někdo studuje.*
(iv) *Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.*
(v) *Každou učebnici někdo přečetl.*

(a) Formalizujte *(i)–(v)* jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.
(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte.
(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte.

Příklad 6. Tablo metodou dokažte následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátorů, kde $\varphi(x)$ je formule s jedinou volnou proměnnou x, a ψ je sentence.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$
(c) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$

Příklad 7. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 8. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x,x), R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z), R(x,y) \land R(y,x) \to x = y, R(f(x),x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c,d) \land (\forall x)(x = c \lor x = d) \qquad\qquad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x)$, což je jejich důsledek.)
(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.
(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na $\sim$) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.
(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x,x), R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z), R(x,y) \land R(y,x) \to x = y\}$$

K zamyšlení

Příklad 9. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) *Větu o konstantách*: Buď φ formule v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$
(b) *Větu o dedukci*: Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \to \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Příklad 10. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \ \to \ y = x$ (symetrie)
(b) $T^* \models (x = y \ \land \ y = z) \ \to \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.