NAIL062 P&P Logic: Worksheet 6 – Basics of predicate logic

Cíle výuky: Po absolvování cvieni student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formáln definovat a uvést píklady
- rozumí pojmm syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná promnná, otevená formule, sentence, instance, varianta) umí je formáln definovat a uvést píklady
- rozumí pojmm sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [pi ohodnocení], model, pravdivost/livost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], dsledek teorie) umí je formáln definovat a uvést píklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na píklad
- zná základní píklady teorií (teorie graf, uspoádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

Píklady na cvieni

Problem 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Solution. *Oznamе $\psi = (x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$, formule je tedy $(\forall x)\psi$.*

(a) Ne, z není substituovatelná za x do ψ: vznikl by nový vázaný výskyt.
(b) Ne, y má volný výskyt v ψ.
(c) Ano, u je nová promnná: v takovém pípad lze variantu udlat vdy.

Problem 2. Mjme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relaním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?
II. Pro kadou z nich najdte strukturu $\mathcal{B}$ (existuje-li) takovou, e $\mathcal{B} \models \varphi$ práv kdy $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(a) $x \rhd y$
(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \rightarrow (x \rhd x))$
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Solution. *Struktury si meme pedstavit jako orientované hrany.*

(a) I. Ne, intuitivn formule vyjaduje, e relace $\rhd^{\mathcal{A}}$ obsahuje vechny dvojice (hrany), z definice $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(x \rhd y)[e] = 0$ *nap. pro $e(x) = a$, $e(y) = a$.*
II. Nap. $\mathcal{B}_0 = (\{0\}; \rhd^{\mathcal{B}_0})$ s $\rhd^{\mathcal{B}_0} = \{(0, 0)\}$.

(b) I. Ne, intuitivn graf nemá stok, z definice: $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \max_{u \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall y)(y \rhd x))[e(x/u)] = \max_{u \in A} \min_{v \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(y \rhd x)[e(x/u, y/v)] = 0$*, nap. pro $u = a$ meme vzít $v = a$.*
II. Nap. $\mathcal{B}_0$ jako výe.

(c) I. Ano (x ohodnote nap. prvkem a), antecedent není splnn pro ádné ohodnocení y, tedy implikace je vdy splnna.
II. Nap. $\mathcal{B}_1 = (\{0, 1\}; \rhd^{\mathcal{B}_1})$ s $\rhd^{\mathcal{B}_1} = \{(0, 1)\}$.

(d) I. Ne, II: Nap. $\mathcal{B}_0$.

(e) I. Ne, II: Nap. $\mathcal{B}_0$.

Problem 3. Dokate (sémanticky) nebo najdte protipíklad: Pro kadou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Platí to i pro kadou formuli ψ s volnou promnnou x? A pro kadou formuli ψ ve které x není volná?

Solution. *(a) Bylo by jednoduí vyuít tablo metodu, ale chceme procviit sémantický dkaz. Intuitivn, protoe je ψ sentence, ohodnocení x nehraje roli pi výpotu pravdivostní hodnoty ψ, tedy ekvivalence platí. Poítejme z definic: $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi)$ platí práv kdy to platí pi kadém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$. Poítejme pravdivostní hodnotu. Vyuijeme faktu, e $f_\to(a,b) = \max(1-a,b)$:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to (\exists x)\varphi)[e]\\
=&f_\to(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e])\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e])\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A}\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])
\end{aligned}$$

Podobn pro formuli na pravé stran:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(\psi \to \varphi))[e]\\
=&\max_{a\in A}\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to \varphi)[e(x/a)]\\
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}$$

Protoe ψ je sentence, neobsahuje volný výskyt promnné x, tedy $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)] = \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e]$. Z toho vidíme, e:

$$\begin{aligned}
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}$$

Ob pravdivostní hodnoty jsou stejné, tedy ekvivalence platí. Pro tento argument staí, aby x nebyla volná v ψ.

Pokud je x volná v ψ, tak ekvivalence neplatí. Nap. v jazyce $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol:

- *φ je $\neg x = x$,*
- *ψ je $x = c$,*
- *$\mathcal{A} = (\{0,1\}; 0)$ (tj. $c^{\mathcal{A}} = 0$).*

Máme $\mathcal{A} \not\models (x = c \to (\exists x)\neg x = x)$, protoe to neplatí pi ohodnocení $e(x) = 0$. Ale $\mathcal{A} \models (\exists x)(x = c \to \neg x = x)$, protoe x lze ohodnotit prvkem 1, a antecendent není splnn.

(b), (c), (d) se vyeí obdobn.

Problem 4. Rozhodnte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napite dva elementárn neekvivalentní modely, a dv neekviv. kompletní jednoduché extenze:

(a) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(b) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(c) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(d) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$

Solution. *(a) Pozor, tato teorie je sporná. Uvdomte si, e* $\neg x = y$ *je spor: neplatí v ádném modelu, protoe neplatí pi ohodnocení* $e(x) = a, e(y) = a$ *pro libovolný prvek* $a \in A$. *(Je ekvivalentní svému generálnímu uzávru* $(\forall x)(\forall y)\neg x = y$.*) Sporná teorie není kompletní, z definice, a vechny její extenze jsou také sporné, tedy nemá ádnou kompletní jednoduchou extenzi.*

(b) Není kompletní. Neformáln, T *íká, e model má práv dva prvky, a výstupy* $f^{\mathcal{A}}$ *musí být uvnit* $U^{\mathcal{A}}$. *Z toho víme, e* $U^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. *Je-li jednoprvková, máme jediný model (a na izomorfismus), je-li dvouprvková, máme celkem ti navzájem neizomorfní (a také navzájem elementárn neekvivalentní) modely (kde* $f^{\mathcal{A}}$ *nemá pevný bod, má jeden pevný bod, nebo má dva pevné body, tj. je to identita):*

- $\mathcal{A}_1 = (\{0,1\}; U_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}})$ *kde* $U_1^{\mathcal{A}} = \{0\}$ *a* $f_1^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(1,0)\}$, *tj.* $f_1^{\mathcal{A}}(0) = 0$, $f_1^{\mathcal{A}}(1) = 0$
- $\mathcal{A}_2 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,1),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_3 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_4 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,1)\})$.

(Nakreslete si obrázky!) Odpovídající kompletní jednoduché extenze lze zapsat jako $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, *kde* $i = 1,2,3,4$. *Nebo:*

- $T_1 = T \cup \{\neg(\forall x)U(x)\}$,
- $T_2 = T \cup \{U(x), \neg f(x) = x\}$,
- $T_3 = T \cup \{U(x), (\exists x)f(x) = x, (\exists x)\neg f(x) = x\}$,
- $T_4 = T \cup \{U(x), f(x) = x\}$.

(c) Obdobn, vyjaduje, e model má práv dva prvky, a f *nemá ádný pevný bod. Je kompletní, jediný model a na izomorfismus je* $\mathcal{A}_2$.

(d) Model má práv dva prvky, a f *má alespo jeden pevný bod. Není kompletní, její modely jsou a na izomorfismus* $\mathcal{A}_3$ *a* $\mathcal{A}_4$.

Dalí píklady k procviení

Problem 5. Urete volné a vázané výskyty promnných v následujících formulích. Poté je pevete na varianty, ve kterých nebudou promnné s volným i vázaným výskytem zárove.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$
(b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
(c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Problem 6. Oznacme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících term jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za promnnou x, term y za promnnou x,
(b) term z za promnnou y, term $g(f(y), w)$ za promnnou y,
(c) term x za promnnou z, term y za promnnou z,

Problem 7. Jsou následující sentence pravdivé / livé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
(e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Problem 8. Rozhodnte, zda následující platí pro kadou formuli φ. Dokate (sémanticky, z definic) nebo najdte protipíklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

K zamylení

Problem 9. Bu $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z tchto axiom:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

Rozhodnte, zda jsou následující formule pravdivé / livé / nezávislé v T. Zdvodnte.

(a) $x + y = y + x$
(b) $x + y = x \ \to \ y = 0$
(c) $x + y = 0 \ \to \ y = -x$
(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$