NAIL062 V&P Logika: 4. sada příkladů – Tablo metoda

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větev, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

Příklady na cvičení

Příklad 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

(a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných $\mathbb{P}$. (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v $\mathbb{P}$.)
(b) Pokuste se sestrojit tablo důkazy, z teorie T, výroků o významu "Poklad je v truhle A" a "Poklad je v truhle B".
(c) Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
(d) Jaký závěr z toho můžeme učinit?

Řešení. *(a) Z kontextu poznáme, že 'buď, …nebo' je exkluzivní (truhla nemůže obsahovat zároveň poklad i smrtonosnou past). Zvolíme jazyk $\mathbb{P} = \{a, b\}$, kde a znamená 'truhla A obsahuje poklad', podobně pro b. Nápisy na truhlách formalizujeme jako výroky $a \vee b, \neg a$. Teorie T vyjadřuje, že jsou oba pravdivé nebo oba lživé:*

$$T = \{((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a)\}$$

(Alternativně bychom mohli formalizovat jako $T = \{(a \vee b) \leftrightarrow \neg a\}$, tj. nahlédnout, že "oba pravdivé nebo oba lživé" znamená ekvivalenci. Tabla by byla trochu menší, ale jinak podobná—vyzkoušejte si!)

(b) Tabla budou mít v kořeni položky Fa *resp.* Fb *(dokazujeme 'sporem'):*

- $\mathrm{F}a$
- $\mathrm{T}((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a)$
  - $\mathrm{T}(a \vee b) \wedge \neg a$
    - $\mathrm{T}(a \vee b)$
    - $\mathrm{T}\neg a$
    - $\mathrm{F}a$
      - $\mathrm{T}a$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{T}b$
        - $\checkmark$
  - $\mathrm{T}\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a$
    - $\mathrm{T}\neg(a \vee b)$
    - $\mathrm{T}\neg\neg a$
    - $\mathrm{F}\neg a$
    - $\mathrm{T}a$
    - $\otimes$

- $\mathrm{F}b$
- $\mathrm{T}((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a)$
  - $\mathrm{T}(a \vee b) \wedge \neg a$
    - $\mathrm{T}(a \vee b)$
    - $\mathrm{T}\neg a$
      - $\mathrm{T}a$
        - $\mathrm{F}a$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{T}b$
        - $\otimes$
  - $\mathrm{T}\neg(a \vee b) \wedge \neg\neg a$
    - $\mathrm{T}\neg(a \vee b)$
    - $\mathrm{T}\neg\neg a$
    - $\mathrm{F}a \vee b$
    - $\mathrm{F}a$
    - $\mathrm{F}b$
    - $\mathrm{F}\neg a$
    - $\mathrm{T}a$
    - $\otimes$

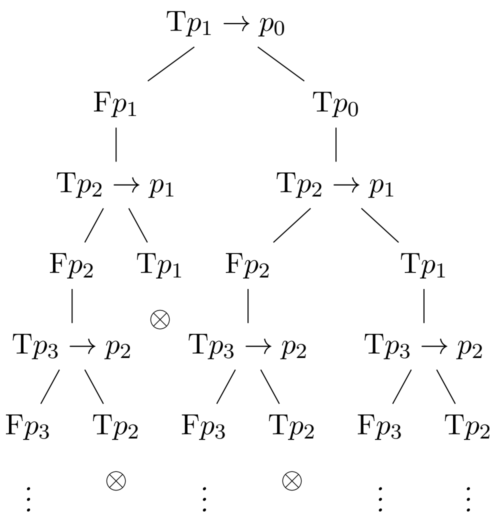
(c) *První tablo je dokončené, ale bezesporné. Bezesporná větev obsahuje položky* $\mathrm{F}a$, $\mathrm{T}b$, *kanonický model pro tuto větev je* $v = (0, 1)$. *Je to model teorie* T, *ve kterém v truhle* A *není poklad, tedy protipříklad k tvrzení, že v truhle* A *je poklad.*

(d) *Druhé tablo je sporné, jde tedy o tablo důkaz a víme, že v truhle* B *je poklad.*

Příklad 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

Řešení. *Sestrojíme tablo z teorie T, do kořene dáme položku $\mathrm{T}\alpha_0$, kde α_0 je první axiom T. Ukážeme jen začátek konstrukce, potřebujete-li, zkonstruujte více.*

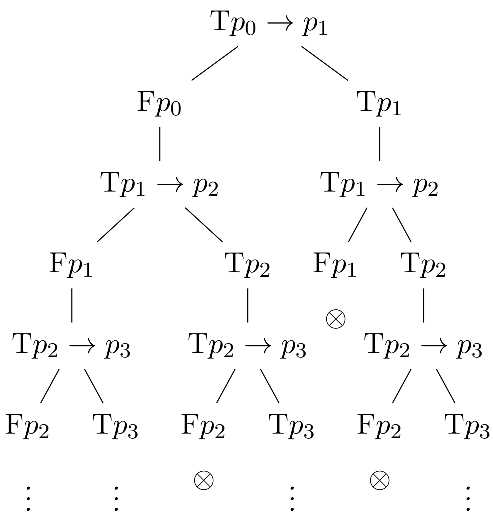
Nejprve vyřešme (a):



Každý model T se shoduje s některou (bezespornou) větví tohoto (dokončeného) tabla. (Zde dokonce platí, že každý model T je kanonickým *modelem pro některou z větví. Obecně to ale neplatí.) Modely jsou:* $\mathrm{M}(T) = \{v_{<k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{all}\}$ *kde* $v_{all}(p_i) = 1$ *pro všechna* $i \in \mathbb{N}$, *a*

$$v_{<k}(p_i) = \begin{cases} 1 & \textit{if } i < k, \\ 0 & \textit{if } i \geq k. \end{cases}$$

Nyní (b):



Opět není těžké nahlédnout, že každý model se shoduje s některou z větví. Máme $\mathrm{M}(T) = \{v_{none}\} \cap \{v_{\geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ *kde* $v_{none}(p_i) = 0$ *pro všechna* $i \in \mathbb{N}$*, a*

$$v_{\geq k}(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i < k, \\ 1 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

Příklad 3. Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku $\oplus$ (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

Řešení. *Potřebujeme dvě atomická tabla, pro položky tvaru* $\mathrm{T}\varphi \oplus \psi$ *a* $\mathrm{F}\varphi \oplus \psi$*. Mohou vypadat například následovně, podmínku si ověřte sami (snadno sémanticky):*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{T}\varphi \oplus \psi & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & & \mathrm{F}\varphi \\ | & & | \\ \mathrm{F}\psi & & \mathrm{T}\psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \mathrm{F}\varphi \oplus \psi & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & & \mathrm{F}\varphi \\ | & & | \\ \mathrm{T}\psi & & \mathrm{F}\psi \end{array}$$

Příklad 4. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Řešení. *Pro konečná částečná uspořádání se dokáže snadno (podobně jako topologické uspořádání acyklického orientovaného grafu).*

Mějme spočetně nekonečnou částečně uspořádanou množinu $\langle X; \leq^X \rangle$*. Sestrojíme výrokovou teorii* T *takovou, aby její modely popisovaly lineární uspořádání na* X *rozšiřující* $\leq^X$*. Bude sestávat z následujících množin výroků:*

- p_{xx} *pro všechna* $x \in X$ *(reflexivita)*
- $p_{xy} \rightarrow \neg p_{yx}$ *pro všechna* $x \neq y \in X$ *(antisymetrie)*
- $p_{xy} \wedge p_{yz} \rightarrow p_{xz}$ *pro všechna* $x, y, z \in X$ *(tranzitivita)*
- $p_{xy} \vee p_{yx}$ *pro všechna* $x, y \in X$ *(linearita)*
- p_{xy} *pro všechna* x, y *taková, že* $x \leq^X y$ *(jde o rozšíření* $\leq^X$*)*

(Reflexivitu lze vynechat, plyne už z toho, že jde o rozšíření reflexivní relace $\leq^X$*.)*

Dokazujme: $\langle X; \leq^X \rangle$ *má lineární rozšíření, právě když* T *má model, to je z věty o kompaktnosti právě když každá konečná část* T *má model. Vezměme libovolnou konečnou* $T' \subseteq T$*. Stačí tedy ukázat, že* T' *má model. Označme jako* X' *množinu všech* $x \in X$*,* o kterých mluví T'*, tj.:*

$$X' = \{x \in X \mid p_{xy} \in \mathrm{Var}(T') \text{ nebo } p_{yx} \in \mathrm{Var}(T') \text{ pro nějaké } y \in X\}$$

Protože T' *je konečná, je i* X' *konečná množina. Buď* $\leq^{X'}$ *restrikce* $\leq^X$ *na množinu* X'*, neboli* $\leq^{X'} = \leq^X \cap (X' \times X')$*. Toto konečné částečné uspořádání lze rozšířit na lineární uspořádání* $\leq_L^{X'}$*, což nám dává model teorie* T' *(kde* $v(p_{xy}) = 1$ *právě když* $x \leq_L^{X'} y$*).*

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

(i) *Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
(ii) *Adam říká:* “Barbora nebo Cyril lžou”
(iii) *Barbora říká:* “Cyril lže”

(iv) Cyril říká: "Adam nebo Barbora lžou"

(a) Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.
(b) Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ plyne, že Adam říká pravdu.
(c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdůvodněte.

Příklad 6. Pomocí tablo metody dokažte, že následující výroky jsou tautologie:
(a) $(p \to (q \to q))$
(b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

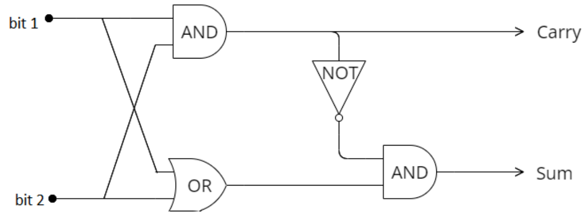
Příklad 7. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.
(a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$
(b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$
(c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$

Příklad 8. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:
(a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)\}$
(b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
(c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$

Příklad 9. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR),
- pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND),
- pro ternární operátor "if p then q else r" (IFTE).

Příklad 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě "bit 1", "bit 2", "carry" a "sum", a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s.
(b) Dokažte tablo metodou, že $T \models c \to \neg s$.

Příklad 11. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami. Můžete využít Větu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

K zamyšlení

Příklad 12. Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \to \psi \ \text{ právě když } \ T, \varphi \vdash \psi$$

Příklad 13. Mějme dvě neprázdné teorie A, B v témž jazyce. Nechť platí, že každý model teorie A splňuje alespoň jeden axiom teorie B. Ukažte, že existují konečné množiny axiomů $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, že $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rightarrow \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$ je tautologie.