

Teaching goals: After completing, the student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větve, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestavit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: “*Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.*”
- Na truhle B je nápis: “*V truhle A je smrtonosná past.*”

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

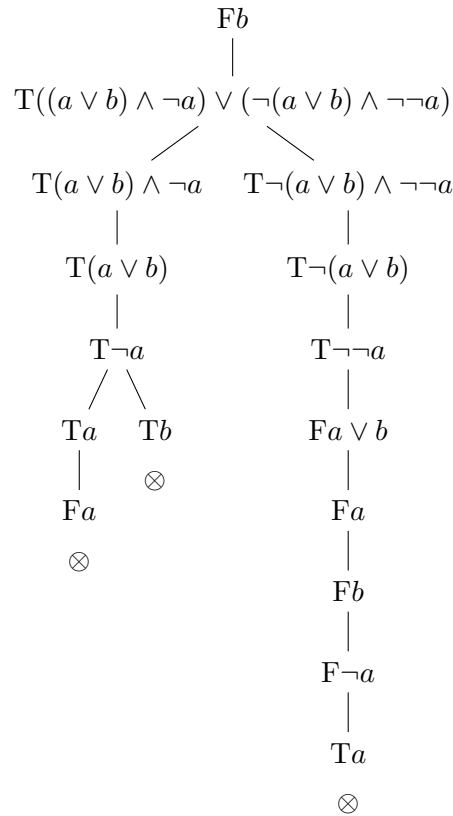
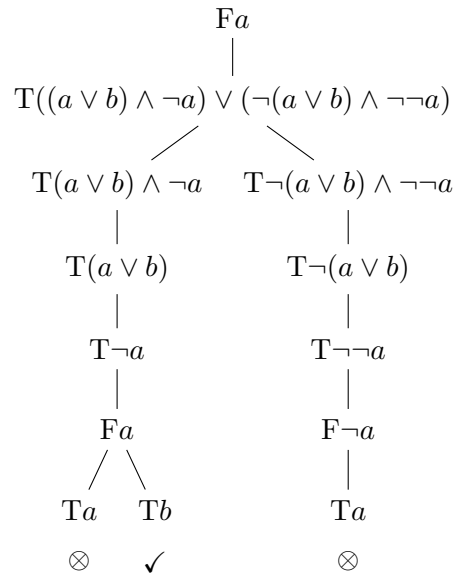
- Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných \mathbb{P} . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v \mathbb{P} .)
- Pokuste se sestavit tablo důkazy, z teorie T , výroků o významu “Poklad je v truhle A” a “Poklad je v truhle B”.
- Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestavte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
- Jaký závěr z toho můžeme učinit?

Solution. (a) Z kontextu poznáme, že ‘*buď, ... nebo*’ je *exkluzivní* (truhla nemůže obsahovat zároveň poklad i smrtonosnou past). Zvolíme jazyk $\mathbb{P} = \{a, b\}$, kde a znamená ‘truhla A obsahuje poklad’, podobně pro b . Nápis na truhlách formalizujeme jako výroky $a \vee b, \neg a$. Teorie T vyjadřuje, že jsou oba pravdivé nebo oba lživé:

$$T = \{((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (\neg(a \vee b) \wedge \neg \neg a)\}$$

(Alternativně bychom mohli formalizovat jako $T = \{(a \vee b) \leftrightarrow \neg a\}$, tj. nahlédnout, že “oba pravdivé nebo oba lživé” znamená ekvivalenci. Tabla by byla trochu menší, ale jinak podobná—vyzkoušejte si!)

- Tabla budou mít v kořeni položky Fa resp. Fb (dokazujeme ‘sporem’):

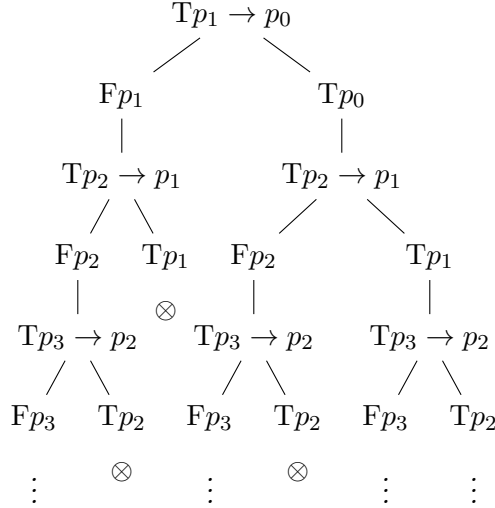


- (c) První tablo je dokončené, ale bezesporné. Bezesporná větev obsahuje položky Fa , Tb , kanonický model pro tuto větev je $v = (0, 1)$. Je to model teorie T (všechny jeho větve jsou sporné), ve kterém v truhle A není poklad, tedy protipříklad k tvrzení, že v truhle A je poklad.
- (d) Druhé tablo je sporné, jde tedy o tablo důkaz a víme, že v truhle B je poklad.

Problem 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T . Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

Solution. Sestrojíme tablo z teorie T , do kořene dáme položku Tp_0 , kde α_0 je první axiom T . Ukážeme jen začátek konstrukce, potřebujete-li, zkonstruuje více.

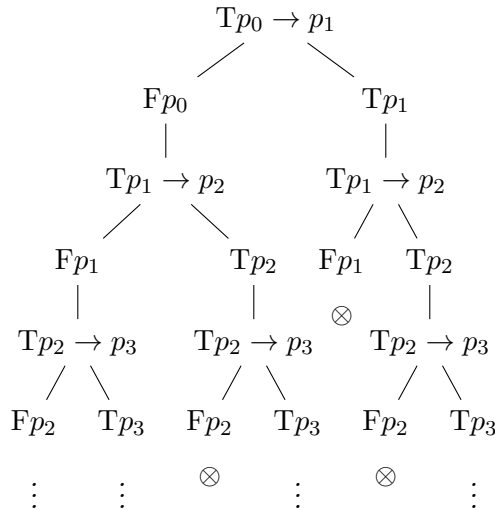
Nejprve vyřešme (a):



Každý model T se shoduje s některou (bezespornou) větví tohoto (dokončeného) tabla. (Zde dokonce platí, že každý model T je kanonickým modelem pro některou z větví. Obecně to ale neplatí.) Modely jsou: $M(T) = \{v_{<k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{all}\}$ kde $v_{all}(p_i) = 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, a

$$v_{<k}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k, \\ 0 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

Nyní (b):



Opět není těžké nahlédnout, že každý model se shoduje s některou z větví. Máme $M(T) = \{v_{none}\} \cap \{v_{\geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ kde $v_{none}(p_i) = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, a

$$v_{\geq k}(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i < k, \\ 1 & \text{if } i \geq k. \end{cases}$$

Problem 3. Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku \oplus (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

Solution. Potřebujeme dvě atomická tabla, pro položky tvaru $T\varphi \oplus \psi$ a $F\varphi \oplus \psi$. Mohou vypadat například následovně, podmínku si ověřte sami (snadno sémanticky):



Problem 4. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Solution. Pro konečná částečná uspořádání se dokáže snadno (podobně jako topologické uspořádání acyklického orientovaného grafu).

Mějme spočetně nekonečnou částečně uspořádanou množinu $\langle X; \leq^X \rangle$. Sestrojíme výrokovou teorii T takovou, aby její modely popisovaly lineární uspořádání na X rozšiřující \leq^X . Bude sestávat z následujících množin výroků:

- p_{xx} pro všechna $x \in X$ (reflexivita)
- $p_{xy} \rightarrow \neg p_{yx}$ pro všechna $x \neq y \in X$ (antisymetrie)
- $p_{xy} \wedge p_{yz} \rightarrow p_{xz}$ pro všechna $x, y, z \in X$ (tranzitivita)
- $p_{xy} \vee p_{yx}$ pro všechna $x, y \in X$ (linearita)
- p_{xy} pro všechna x, y taková, že $x \leq^X y$ (jde o rozšíření \leq^X)

(Reflexivitu lze vynechat, plyne už z toho, že jde o rozšíření reflexivní relace \leq^X .)

Dokazujeme: $\langle X; \leq^X \rangle$ má lineární rozšíření, právě když T má model, to je z věty o kompaktnosti právě když každá konečná část T má model. Vezměme libovolnou konečnou $T' \subseteq T$. Stačí tedy ukázat, že T' má model. Označme jako X' množinu všech $x \in X$, o kterých mluví T' , tj.:

$$X' = \{x \in X \mid p_{xy} \in \text{Var}(T') \text{ nebo } p_{yx} \in \text{Var}(T') \text{ pro nějaké } y \in X\}$$

Protože T' je konečná, je i X' konečná množina. Buď $\leq^{X'}$ restrikce \leq^X na množinu X' , neboli $\leq^{X'} = \leq^X \cap (X' \times X')$. Toto konečné částečné uspořádání lze rozšířit na lineární uspořádání $\leq_L^{X'}$, což nám dává model teorie T' (kde $v(p_{xy}) = 1$ právě když $x \leq_L^{X'} y$).

EXTRA PRACTICE

Problem 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

- (i) Alespoň jeden z vyslýchanych říká pravdu a alespoň jeden lže.
- (ii) Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”
- (iii) Barbora říká: “Cyril lže”

(iv) Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”

- (a) Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyrl říká pravdu”.
 (b) Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ plyne, že Adam říká pravdu.
 (c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdůvodněte.

Problem 6. Pomocí tablo metody dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

- (a) $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$
 (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
 (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
 (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Problem 7. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezspornou větev.

- (a) $\{\neg q, p \vee q\} \models p$
 (b) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$
 (c) $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

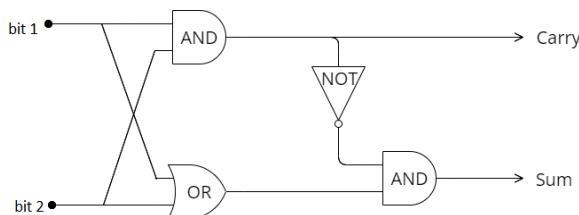
Problem 8. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

- (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$
 (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
 (c) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

Problem 9. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku \downarrow (NOR),
- pro Shefferovu spojku \uparrow (NAND),
- pro \oplus (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Problem 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- (a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s .
 (b) Dokažte tablo metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$.

Problem 11. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami. Můžete využít Větu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 12. Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi$$

Problem 13. Mějme dvě neprázdné teorie A, B v témž jazyce. Necht platí, že každý model teorie A splňuje alespoň jeden axiom teorie B . Ukažte, že existují konečné množiny axiomů $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, že $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rightarrow \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ je tautologie.