

**Teaching goals:** After completing, the student

- zná potřebné pojmy z rezoluční metody (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí pracovat s výroky v CNF a jejich modely v množinové reprezentaci
- umí sestavit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom
- zná pojem stromu dosazení, umí ho formálně definovat a pro konkrétní CNF formuli sestavit
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Označme jako  $\varphi$  výrok  $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ . Ukažte, že  $\varphi$  je tautologie:

- Převeďte  $\neg\varphi$  do CNF a запиšte výsledný výrok jako formuli  $S$  v množinové reprezentaci.
- Najděte rezoluční zamítnutí  $S$ .

**Problem 2.** Dokažte rezolucí, že v  $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$  platí výrok  $s$ .

**Problem 3.** Necht' prvovýroky  $r, s, t$  reprezentují (po řadě), že "*Radka / Sára / Tom je ve škole*" a označme  $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$ . Víme, že:

- *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
- *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

- Formalizujte naše znalosti jako teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ .
- Rezoluční metodou dokažte, že z  $T$  vyplývá, že *Tom je ve škole*: Napište formuli  $S$  v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když to platí, a najděte rezoluční zamítnutí  $S$ . Nakreslete rezoluční strom.
- Určete množinu modelů teorie  $T$ .

**Problem 4.** Zkonstruujte *strom dosazení* pro následující formuli. Na základě tohoto stromu sestavte rezoluční zamítnutí, dle postupu z důkazu Věty o úplnosti rezoluce.

$$S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$$

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 5.** Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

- $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$
- $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$

**Problem 6.** Tonia a Fabio nám popisují svůj nejnovější recept na nejlepší pizzu na světě.

- Tonia řekla: "Do receptu patří ančovičky nebo bazalka nebo česnek."
- Tonia také řekla: "Jestli tam nepatří dušená šunka, nepatří tam ani bazalka."
- Fabio řekl: "Do receptu patří dušená šunka."
- Fabio dále řekl: "Nepatří tam ančovičky ani bazalka, ale patří tam česnek."

Víme, že Tonia vždy mluví pravdu, zatímco Fabio vždy lže.

- Vyjádřete naše znalosti jako výrokovou teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{a, b, c, d\}$ , kde výrokové proměnné mají po řadě význam "do receptu patří ančovičky/bazalka/česnek/dušená šunka".

- (b) Pomocí rezoluční metody dokažte, že z teorie  $T$  vyplývá, že “do receptu patří ančovičky”. Nakreslete rezoluční strom.

**Problem 7.** Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskretních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

- (i) *Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno sousední číslo nemocné (v předchozím čase).*
  - (ii) *Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).*
  - (iii) *V čase 0 bylo nemocné číslo 0, ostatní čísla byla zdravá.*
- (a) Napište teorie  $T_1, T_2, T_3$  vyjadřující (po řadě) tvrzení (i), (ii), (iii) nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$ , kde prvovýrok  $p_i^t$  vyjadřuje, že “číslo  $i$  je v čase  $t$  nemocné.”
- (b) Převeďte axiomy z  $T_1, T_2, T_3$  do CNF a napište teorii  $S$  v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když  $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$ , tj.: “Číslo 1 je zdravé v čase 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z  $T_1, T_2, T_3$ , ze kterých plyne  $\neg p_1^2$ , a do  $S$  uvést jen příslušné klauzule.)
- (c) Rezolucí dokažte, že  $S$  je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

#### FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 8.** Dokažte podrobně, že je-li  $S = \{C_1, C_2\}$  splnitelná a  $C$  je rezolventa  $C_1$  a  $C_2$ , potom je i  $C$  splnitelná.