NAIL062 V&P Logika: 6. sada příkladů – Základy predikátové logiky

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladě
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

Příklady na cvičení

Příklad 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Řešení. *Označme $\psi = (x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$, formule je tedy $(\forall x)\psi$.*

(a) Ne, z není substituovatelná za x do ψ: vznikl by nový vázaný výskyt.
(b) Ne, y má volný výskyt v ψ.
(c) Ano, u je nová proměnná: v takovém případě lze variantu udělat vždy.

Příklad 2. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?
II. Pro každou z nich najděte strukturu $\mathcal{B}$ (existuje-li) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(a) $x \rhd y$
(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Řešení. *Struktury si můžeme představit jako orientované hrany.*

(a) I. Ne, intuitivně formule vyjadřuje, že relace $\rhd^{\mathcal{A}}$ obsahuje všechny dvojice (hrany), z definice $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(x \rhd y)[e] = 0$ např. pro $e(x) = a$, $e(y) = a$.
II. Např. $\mathcal{B}_0 = (\{0\}; \rhd^{\mathcal{B}_0})$ s $\rhd^{\mathcal{B}_0} = \{(0, 0)\}$.
(b) I. Ne, intuitivně graf nemá stok, z definice: $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \max_{u \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall y)(y \rhd x))[e(x/u)] = \max_{u \in A} \min_{v \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(y \rhd x)[e(x/u, y/v)]$, např. pro $u = a$ můžeme vzít $v = a$.
II. Např. $\mathcal{B}_0$ jako výše.
(c) I. Ano (x ohodnoťte např. prvkem a), antecedent není splněn pro žádné ohodnocení y, tedy implikace je vždy splněna.
II. Např. $\mathcal{B}_1 = (\{0, 1\}; \rhd^{\mathcal{B}_1})$ s $\rhd^{\mathcal{B}_1} = \{(0, 1)\}$.
(d) I. Ne, II: Např. $\mathcal{B}_0$.

(e) I. Ne, II: Např. $\mathcal{B}_0$.

Příklad 3. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Řešení. *(a) Bylo by jednodušší využít tablo metodu, ale chceme procvičit sémantický důkaz. Intuitivně, protože je ψ sentence, ohodnocení x nehraje roli při výpočtu pravdivostní hodnoty ψ, tedy ekvivalence platí. Počítejme z definic: $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi)$ platí právě když to platí při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$. Počítejme pravdivostní hodnotu. Využijeme faktu, že $f_\to(a,b) = \max(1-a,b)$:*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to (\exists x)\varphi)[e]\\
=&f_\to(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e])\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e])\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A}\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])
\end{aligned}
$$

Podobně pro formuli na levé straně:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(\psi \to \varphi))[e]\\
=&\max_{a\in A}\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to \varphi)[e(x/a)]\\
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}
$$

Protože ψ je sentence, neobsahuje volný výskyt proměnné x, tedy $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)] = \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e]$. Z toho vidíme, že:

$$
\begin{aligned}
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))\\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}
$$

Obě pravdivostní hodnoty jsou stejné, tedy ekvivalence platí. Pro tento argument stačí, aby x nebyla volná v ψ.

Pokud je x volná v ψ, tak ekvivalence neplatí. Např. v jazyce $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol:

- *φ je $\neg x = x$,*
- *ψ je $x = c$,*
- *$\mathcal{A} = (\{0,1\}; 0)$ (tj. $c^{\mathcal{A}} = 0$).*

Máme $\mathcal{A} \not\models (x = c \to (\exists x)\neg x = x)$, protože to neplatí při ohodnocení $e(x) = 0$. Ale $\mathcal{A} \models (\exists x)(x = c \to \neg x = x)$, protože x lze ohodnotit prvkem 1, a antecendent není splněn.

(b), (c), (d) se vyřeší obdobně.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f \rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

(a) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = y,\ x = y \lor y = z\}$
(b) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \lor y = z\}$
(c) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \lor y = z\}$
(d) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \lor y = z\}$

Řešení. *(a) Pozor, tato teorie je sporná. Uvědomte si, že $\neg x = y$ je spor: neplatí v žádném modelu, protože neplatí při ohodnocení $e(x) = a, e(y) = a$ pro libovolný prvek $a \in A$. (Je ekvivalentní svému generálnímu uzávěru $(\forall x)(\forall y)\neg x = y$.) Sporná teorie není kompletní, z definice, a všechny její extenze jsou také sporné, tedy nemá žádnou kompletní jednoduchou extenzi.*

(b) Není kompletní. Neformálně, T říká, že model má právě dva prvky, a výstupy $f^{\mathcal{A}}$ musí být uvnitř $U^{\mathcal{A}}$. Z toho víme, že $U^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Je-li jednoprvková, máme jediný model (až na izomorfismus), je-li dvouprvková, máme celkem tři navzájem neizomorfní (a také navzájem elementárně neekvivalentní) modely (kde $f^{\mathcal{A}}$ nemá pevný bod, má jeden pevný bod, nebo má dva pevné body, tj. je to identita):

- $\mathcal{A}_1 = (\{0,1\}; U_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}})$ *kde* $U_1^{\mathcal{A}} = \{0\}$ *a* $f_1^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(1,0)\}$, *tj.* $f_1^{\mathcal{A}}(0) = 0$, $f_1^{\mathcal{A}}(1) = 0$
- $\mathcal{A}_2 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,1),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_3 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_4 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,1)\})$.

(Nakreslete si obrázky!) Odpovídající kompletní jednoduché extenze lze zapsat jako $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, *kde* $i = 1,2,3,4$. *Nebo:*

- $T_1 = T \cup \{\neg(\forall x)U(x)\}$,
- $T_2 = T \cup \{U(x), \neg f(x) = x\}$,
- $T_3 = T \cup \{U(x), (\exists x)f(x) = x, (\exists x)\neg f(x) = x\}$,
- $T_4 = T \cup \{U(x), f(x) = x\}$.

(c) Obdobně, vyjadřuje, že model má alespoň dva prvky, a f nemá žádný pevný bod. Je kompletní, jediný model až na izomorfismus je $\mathcal{A}_2$.

(d) Model má alespoň dva prvky, a f má alespoň jeden pevný bod. Není kompletní, její modely jsou až na izomorfismus $\mathcal{A}_3$ a $\mathcal{A}_4$.

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \lor (y = 0)$
(b) $(\exists x)(P(x) \land (\forall x)Q(x)) \lor (x = 0)$
(c) $(\exists x)(x > y) \land (\exists y)(y > x)$

Příklad 6. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \lor (\exists y)(f(x) = y) \lor (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
(b) term z za proměnnou y, term $g(f(y), w)$ za proměnnou y,
(c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

Příklad 7. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \lor \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \land (\forall x)P(x) \land (\exists x)\neg Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x))$
(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
(e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \to (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

K zamyšlení

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T. Zdůvodněte.

(a) $x + y = y + x$
(b) $x + y = x \;\to\; y = 0$
(c) $x + y = 0 \;\to\; y = -x$
(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$