NAIL062 P&P Logic: Worksheet 8 – The tableau method in predicate logic

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí tomu, jak se liší tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formálně definovat všechny potřebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich použití
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metodě pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých příkladech
- zná větu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

In-class problems

Problem 1. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.* Konkrétně:

(a) Zvolte vhodný jazyk $\mathcal{L}$. Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
(b) Formalizujte naše znalosti a dokazované tvrzení jako sentence $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$ v jazyce $\mathcal{L}$.
(c) Sestrojte tablo důkaz sentence φ z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Problem 2. Uvažte následující tvrzení:

(i) Nula je malé číslo.
(ii) Číslo je malé, právě když je blízko nuly.
(iii) Součet dvou malých čísel je malé číslo.
(iv) Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0\rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$.
(c) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Problem 3. Uvažme jazyk $L = \langle c\rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol. Tablo metodou dokažte, že v teorii $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$ platí formule $x = c$.

Problem 4. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekončený model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*; tj. že v A existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ takové, že: $\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0$. (Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Extra practice

Problem 5. Uvažte následující tvrzení:

(i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.
(ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.

(iii) U každého docenta někdo studuje.
(iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.
(v) Každou učebnici někdo přečetl.

(a) Formalizujte *(i)–(v)* jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v $L = \langle N, S, P, D, U\rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.
(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte.
(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte.

Problem 6. Tablo metodou dokažte následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátorů, kde $\varphi(x)$ je formule s jedinou volnou proměnnou x, a ψ je sentence.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$
(c) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$

Problem 7. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Problem 8. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \qquad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)
(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.
(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na $\sim$) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.
(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

For further thought

Problem 9. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) *Větu o konstantách*: Buď φ formule v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$
(b) *Větu o dedukci*: Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Problem 10. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \;\rightarrow\; y = x$ (symetrie)
(b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\rightarrow\; x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.