NAIL062 V&P Logika: 7. sada příkladů – Vlastnosti struktur a teorií

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojmům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladě
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestrojit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

Příklady na cvičení

Příklad 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}; +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?
(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

Řešení. *(a) Ano, lze ověřit, že $\underline{\mathbb{Z}_4}$ splňuje všechny axiomy teorie grup ($+$ je asociativní, 0 je neutrální vůči $+$, $-x$ je inverzní prvek k x vůči $+$ a 0).*
(b) $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 0\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0\}$ *(*triviální grupa*),* $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 1\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4}\langle 3\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4}$, $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 2\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0, 2\}$ *(dvouprvková grupa* izomorfní *grupě* $\underline{\mathbb{Z}_2}$*).*
(c) Ne, jakmile máme prvek 1 nebo 3, generovaná podstruktura už je celá $\underline{\mathbb{Z}_4}$.
(d) Ano, teorie grup je otevřená*, proto podstruktury modelů (grup) jsou také modely (*podgrupy*).*
(e) Ne, jazyk teorie grup je s rovností, konečná velikost modelu lze popsat sentencí, tedy různě velké konečné modely nemohou být elementárně ekvivalentní. Rovnost ale nepotřebujeme, platilo by i v jazyce bez rovnosti, např. sentence $(\forall x)x = 0$ odliší triviální grupu $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0\}$ od dvouprvkové grupy $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0, 2\}$ i od $\underline{\mathbb{Z}_4}$, a např. $(\forall x)x + x = 0$ platí v $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0, 2\}$ ale ne v $\underline{\mathbb{Z}_4}$.

Příklad 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Označme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

Řešení. *(a) Ano, $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, 0\rangle$.*
(b) Ne, prvek 1 (interpretace symbolu 0 z jazyka teorie grup) není neutrální prvek vzhledem k operaci $\cdot$ (interpretaci symbolu $+$), protože $1 \cdot 0 = 0 \neq 1$.
(c) Ano, např. $\underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ *(*okruh celých čísel*), neplatí v něm existence inverzních prvků vůči násobení pro všechny nenulové prvky, tj. sentence $(\forall x)(\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)x \cdot y = 1)$ (např. číslo 2 nemá v celých číslech inverz, ale v racionálních ano, $\frac{1}{2}$). (Z toho plyne, že teorie těles nemůže být otevřeně axiomatizova[tel]ná, jinak by podstruktura tělesa musela být také tělesem.)*
(d) Ano, tzv. teorie struktury *je vždy kompletní: Pro každou sentenci ψ platí, že $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \psi \Leftrightarrow \underline{\mathbb{Q}} \models \psi$, pokud to neplatí, máme $\underline{\mathbb{Q}} \models \neg\psi$ (je to* sentence*) tedy $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \neg\psi$.*

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T kompletní?
(b) Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
(c) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \lor x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Řešení. *Teorie říká, že každý prvek je jednou ze tří konstant. Ty ale nemusí být různé. Nejprve najděme všechny modely až na izomorfismus, je jich pět (nakreslete si je):*

- $\mathcal{A}_1 = \langle\{0\}; 0, 0, 0\rangle$ *(jednoprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_1} = c_2^{\mathcal{A}_1} = c_3^{\mathcal{A}_1} = 0$*)*
- $\mathcal{A}_2 = \langle\{0, 1\}; 0, 0, 1\rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_2} = c_2^{\mathcal{A}_2} \neq c_3^{\mathcal{A}_2}$*)*
- $\mathcal{A}_3 = \langle\{0, 1\}; 0, 1, 1\rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_3} \neq c_2^{\mathcal{A}_3} = c_3^{\mathcal{A}_3}$*)*
- $\mathcal{A}_4 = \langle\{0, 1\}; 0, 1, 0\rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_4} = c_3^{\mathcal{A}_4} \neq c_2^{\mathcal{A}_4}$*)*
- $\mathcal{A}_5 = \langle\{0, 1, 2\}; 0, 1, 2\rangle$ *(trojprvkový model, konstanty jsou různé)*

(a) Není kompletní, např. sentence $c_1 = c_2$ *je v* T *nezávislá (platí v* $\mathcal{A}_1$*, neplatí v* $\mathcal{A}_3$*. (Neboli, dle sémantického kritéria, modely* $\mathcal{A}_1$ *a* $\mathcal{A}_3$ *nejsou elementárně ekvivalentní).*

(b) Jednoduché extenze odpovídají podmnožinám $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}$*, je jich 32, kompletní odpovídají jednoprvkovým podmnožinám, je jich 5.*

Kompletní extenze, které nejsou jednoduché:

- T — *modely* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$
- $T \cup \{x = y \lor x = z\}$ — *modely* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$
- $T \cup \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y\}$ — *modely* $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$

(Pozor: $(\exists x)(\exists y)\neg x = y \sim \neg(\forall x)(\forall y) x = y \not\sim \neg x = y \sim (\forall x)(\forall y)\neg x = y$*.)*

$\vdots$

- $\{x = x \land \neg x = x\}$ — *sporná teorie, nemá model*

Jednoduché kompletní extenze:

- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_1) \sim \{x = y\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_2) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, c_1 = c_2, \neg c_2 = c_3\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_3) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, \neg c_1 = c_2, c_2 = c_3\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_4) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, c_1 = c_3, \neg c_1 = c_2\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_4) \sim \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3, \neg(c_1 = c_2 \lor c_1 = c_3 \lor c_2 = c_3)\}$

(c) Teorie navíc říká, že každý prvek je buď interpretací symbolu c_1 *nebo* c_4*. Modely tedy mají nejvýše dva prvky, až na izomorfismus jsou to:*

- $\mathcal{A}'_1 = \langle\{0\}; 0, 0, 0, 0\rangle$
- $\mathcal{A}'_2 = \langle\{0, 1\}; 0, 0, 1, 1\rangle$
- $\mathcal{A}'_3 = \langle\{0, 1\}; 0, 1, 1, 1\rangle$
- $\mathcal{A}'_4 = \langle\{0, 1\}; 0, 1, 0, 1\rangle$

Teorie T' *je extenzí* T*, platí v ní všechny důsledky teorie* T*, sémanticky: restrikce modelů* T' *na původní jazyk* L *jsou modely* T *(např. restrikcí modelu* $\mathcal{A}'_1$ *na* L *je* $\mathcal{A}_1$*). Není to jednoduchá extenze, zvětšili jsme jazyk.*

Není to ani konzervativní extenze, např. sentence $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \lor x = z)$ *je sentence původního jazyka* L*, platí v* T' *ale neplatila v* T*. Sémanticky: (tříprvkový) model* $\mathcal{A}_5$ *teorie* T *nelze expandovat do jazyka* L' *na model teorie* T'*, neboli restrikcí modelů* T' *na původní jazyk* L *nedostaneme všechny modely* T*.*

Příklad 4. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.
(a) $(-x) + x = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Řešení. *Všimněte si, že axiomy teorie vyjadřují existenci a jednoznačnost pro definici funkčního symbolu $-$, jde tedy o korektní extenzi o definice. Postupujeme dle (důkazu) tvrzení z přednášky:*

(a) $(\exists z)(x + z = 0 \wedge z + x = 0)$ *(Podformule $x + z = 0$ říká, že ‘z je $-x$’ a druhá, že ‘$(-x) + x = 0$’.)*

(b) Nejprve nahradíme definicí term $-y$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z < x)$$

Nyní relační symbol $<$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z \leq z \wedge \neg(x + z = z))$$

(c) $(\exists u)(\exists v)((x + y) + u = 0 \wedge x + v = 0 \wedge u \leq v \wedge \neg u = v)$ *(Kde ‘u je $-(x + y)$’ a ‘v je $-x$’.)*

Příklad 5. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel
(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$
(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$
(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

Řešení. *(a)* $(\exists y)F(y, y) = x \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ *(Číslo x je čtverec, a není to nula.)*

(b) $(\exists z)(F(x, y) = z \wedge (\forall u)F(z, u) = u)$ *(Součin je roven jedné.)*

(c) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = y$ *(Kdykoliv je množina sjednocením dvou množin, je rovna jedné z nich. A není prázdná.)*

(d) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ *(Kdykoliv je součin dvou čísel roven prvočíslu, je jedno z nich rovno prvočíslu, a prvočíslo není nula.)*

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Buď $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že “existují právě čtyři prvky”.

(a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.
(b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdůvodněte.

Příklad 7. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.

(a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. *(3b)*

(b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

Příklad 8. Mějme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d\rangle$ s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad P(x,y) \leftrightarrow R(x,y) \wedge \neg x = y \\ \psi: &\quad P(x,y) \rightarrow P(x, f(x,y)) \wedge P(f(x,y), y) \end{aligned}$$

Uvažme následující L-teorii:

$$\begin{aligned} T = \{&\varphi,\ \psi,\ \neg c = d, \\ &R(x,x), \\ &R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y, \\ &R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z), \\ &R(x,y) \vee R(y,x)\} \end{aligned}$$

(a) Nalezněte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ do jazyka L na model teorie T.
(b) Je sentence $(\forall x)R(c,x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
(c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
(d) Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d\rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uveďte zdůvodnění.

K zamyšlení

Příklad 9. Nechť $T_n = \{\neg c_i = c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \dots, c_n\rangle$ s rovností, kde $c_1, \dots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konečné $k \geq 1$ určete počet k-prvkových modelů teorie T_n až na izomorfismus.
(b) Určete počet spočetných modelů teorie T_n až na izomorfismus.
(c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.