NAIL062 P&P Logic: Worksheet 8 – The tableau method in predicate logic

Cíle výuky: Po absolvování cvieí student

- rozumí tomu, jak se lií tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formáln definovat vechny potebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich pouití
- umí sestrojit dokonené tablo pro danou poloku z dané (i nekonené) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokonenou bezespornou vtev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metod pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých píkladech
- zná vtu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

Píklady na cvieí

Problem 1. Pedpokládejme, e:

- *Vichni viníci jsou lhái.*
- *Alespo jeden z obvinných je také svdkem.*
- *ádný svdek nele.*

Dokate tablo metodou, e: *Ne vichni obvinní jsou viníci.* Konkrétn:

(a) Zvolte vhodný jazyk $\mathcal{L}$. Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
(b) Formalizujte nae znalosti a dokazované tvrzení jako sentence $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$ v jazyce $\mathcal{L}$.
(c) Sestrojte tablo dkaz sentence φ z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Solution. *(a) Zvolme jazyk $\mathcal{L} = \langle V, L, O, S\rangle$ bez rovnosti, kde V, L, O a S jsou unární relaní symboly o významu “být viníkem/lháem/obvinným/svdkem”.*

(b)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\forall x)(V(x) \to L(x))\\
\alpha_2 &= (\exists x)(O(x) \wedge S(x))\\
\alpha_3 &= \neg(\exists x)(S(x) \wedge L(x))\\
\varphi &= \neg(\forall x)(O(x) \to V(x))
\end{aligned}$$

(c) Sestrojíme dokonené tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ s polokou $F\varphi$ v koeni. Uvidíme, e vechny vtve budou sporné, pjde tedy o tablo dkaz. (Mode je vyznaeno pipojení axiom, erven jsou koeny atomických tabel poloek typu ‘vichni’, které bychom mohli nekreslit, kdyby nám to konvence dovolila.)

$$\mathrm{F}\neg(\forall x)(O(x) \to V(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(O(x) \to V(x))$$

$$\mathrm{T}(\exists x)(O(x) \land S(x))$$

$$\mathrm{T}O(c_0) \land S(c_0)$$

$$\mathrm{T}O(c_0)$$

$$\mathrm{T}S(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(O(x) \to V(x))$$

$$\mathrm{T}O(c_0) \to V(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{F}O(c_0) & \mathrm{T}V(c_0) \\ \otimes & \end{array}$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(V(x) \to L(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(V(x) \to L(x))$$

$$\mathrm{T}V(c_0) \to L(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{F}V(c_0) & \mathrm{T}L(c_0) \\ \otimes & \end{array}$$

$$\mathrm{T}\neg(\exists x)(S(x) \land L(x))$$

$$\mathrm{F}(\exists x)(S(x) \land L(x))$$

$$\mathrm{F}(\exists x)(S(x) \land L(x))$$

$$\mathrm{F}S(c_0) \land L(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{F}S(c_0) & \mathrm{F}L(c_0) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Problem 2. Uvate následující tvrzení:

(i) Nula je malé íslo.

(ii) *íslo je malé, práv kdy je blízko nuly.*
(iii) *Souet dvou malých ísel je malé íslo.*
(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, e platí: *(v) Jsou-li x a y malá ísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0\rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokonené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s polokou $F\varphi_5$ v koeni. Rozhodnte, zda platí $T \models \varphi_5$.
(c) Pokud existují, uvete alespo dv kompletní jednoduché extenze teorie T.

Solution. *(a)*

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= M(0)\\
\varphi_2 &= (\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x,0))\\
\varphi_3 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to M(x+y))\\
\varphi_4 &= (\forall x)(\forall y)(B(x,y) \to B(f(x), f(y)))\\
\varphi_5 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to B(f(x+y), f(0)))
\end{aligned}
$$

(b) Tablo vyjde sporné, máme tedy $T \vdash \varphi_5$ a z úplnosti $T \models \varphi_5$. Vimnte si, e axiom $\varphi_1 = M(0)$ není poteba:

$$\mathrm{F}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to B(f(x+y), f(0)))$$

$$\mathrm{F}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to B(f(c_0+y), f(0)))$$

$$\mathrm{F}M(c_0) \wedge M(c_1) \to B(f(c_0+c_1), f(0))$$

$$\mathrm{T}M(c_0) \wedge M(c_1)$$

$$\mathrm{F}B(f(c_0+c_1), f(0))$$

$$\mathrm{T}M(c_0)$$

$$\mathrm{T}M(c_1)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to M(x+y))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \to M(x+y))$$

$$\mathrm{T}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to M(c_0+y))$$

$$\mathrm{T}(\forall y)(M(c_0) \wedge M(y) \to M(c_0+y))$$

$$\mathrm{T}M(c_0) \wedge M(c_1) \to M(c_0+c_1)$$

- $\mathrm{F}M(c_0) \wedge M(c_1)$
  - $\mathrm{F}M(c_0)$
    - $\otimes$
  - $\mathrm{F}M(c_1)$
    - $\otimes$
- $\mathrm{T}M(c_0+c_1)$
  - $\mathrm{T}(\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x,0))$
  - $\mathrm{T}(\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x,0))$
  - $\mathrm{T}M(c_0+c_1) \leftrightarrow B(c_0+c_1, 0)$
    - $\mathrm{T}M(c_0+c_1)$
      - $\mathrm{T}B(c_0+c_1, 0)$
      - $\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(B(x,y) \to B(f(x), f(y)))$
      - $\mathrm{T}(\forall x)(\forall y)(B(x,y) \to B(f(x), f(y)))$
      - $\mathrm{T}(\forall y)(B(c_0+c_1, y) \to B(f(c_0+c_1), f(y)))$
      - $\mathrm{T}(\forall y)(B(c_0+c_1, y) \to B(f(c_0+c_1), f(y)))$
      - $\mathrm{T}B(c_0+c_1, 0) \to B(f(c_0+c_1), f(0))$
        - $\mathrm{F}B(c_0+c_1, 0)$
          - $\otimes$
        - $\mathrm{T}B(f(c_0+c_1), f(0))$
          - $\otimes$
    - $\mathrm{F}M(c_0+c_1)$
      - $\mathrm{F}B(c_0+c_1, 0)$
      - $\otimes$

(c) Najdeme dva elementárn neekvivalentní modely T:

- $\mathcal{A} = \langle \{0\}; M^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$ *kde* $M^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$, $f^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$, $+^{\mathcal{A}} = \{((0,0),0)\}$, *a* $0^{\mathcal{A}} = 0$
- $\mathcal{B} = \langle \{0,1\}; M^{\mathcal{B}}, B^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, +^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}} \rangle$ *kde* $M^{\mathcal{B}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{B}} = \{(0,0),(1,1)\}$, $f^{\mathcal{B}} = \{(0,0),(1,1)\}$, $+^{\mathcal{B}} = \{((0,0),0),((0,1),1),((1,0),1),((1,1),0)\}$, *a* $0^{\mathcal{B}} = 0$

Kompletní jednoduché extenze jsou potom $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *a* $\mathrm{Th}(\mathcal{B})$ *(tj. vechny L-sentence, které platí v $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$). Teorie struktury je vdy kompletní teorie. Nejsou ekvivalentní napíklad proto, e $(\forall x)M(x)$ platí v $\mathcal{A}$ ale ne v $\mathcal{B}$. (Uvdomte si, e jazyk je bez rovnosti, potebujeme tedy sentenci bez rovnosti.)*

Problem 3. Uvame jazyk $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol. Tablo metodou dokate, e v teorii $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$ platí formule $x = c$.

Solution. *Sestrojíme dokonené tablo z teorie T s polokou $\mathrm{F}(\forall x)x = c$ v koeni (formule v polokách tabla musí být sentence). Protoe je jazyk s rovností, meme v tablu pouívat i axiomy rovnosti pro jazyk L, resp. jejich generální uzávry: $(\forall x)x = x$ a $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \land x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$.*

$$\mathrm{F}(\forall x)x = c$$

$$\mathrm{F}c_0 = c$$

$$\mathrm{T}(\exists x)(\forall y)x = y$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}c_1 = c$$

$$\mathrm{T}(\forall y)c_1 = y$$

$$\mathrm{T}c_1 = c_0$$

$$\mathrm{T}(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (c_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \to (c_1 = x_2 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_1)(\forall y_2)(c_1 = y_1 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to y_1 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_2)(c_1 = c_0 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to c_0 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(\forall y_2)(c_1 = c_0 \wedge c_1 = y_2 \to (c_1 = c_1 \to c_0 = y_2))$$

$$\mathrm{T}(c_1 = c_0 \wedge c_1 = c \to (c_1 = c_1 \to c_0 = c))$$

$$\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathrm{F}c_1 = c_0 \wedge c_1 = c} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}c_1 = c_1 \to c_0 = c} \\
\mathrm{F}c_1 = c_0 & \mathrm{F}c_1 = c & \mathrm{F}c_1 = c_1 & \mathrm{T}c_0 = c \\
\otimes & \otimes & \mathrm{T}(\forall x)x = x & \otimes \\
 & & \mathrm{T}(\forall x)x = x & \\
 & & \mathrm{T}c_1 = c_1 & \\
 & & \otimes &
\end{array}$$

Problem 4. Bu L jazyk s rovností obsahující binární relaní symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, e T má nekonený model a platí v ní axiomy lineárního uspoádání. Pomocí vty o kompaktnosti ukate, e T má model $\mathcal{A}$ s *nekoneným klesajícím etzcem*; tj. e v A existují prvky c_i pro kadé $i \in \mathbb{N}$ takové, e: $\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0$. (Z toho plyne, e pojem *dobrého uspoádání* není definovatelný v logice prvního ádu.)

Solution. *Z pedpokladu víme, e T má nekonený model $\mathcal{B}$, tj. nekonené lineární uspoádání. To by ale mohlo být nap. $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$, které ádný nekonený etzec nemá. Potebujeme model s nekoneným klesajícím etzcem, ten získáme z Vty o kompaktnosti (verze pro predikátovou logiku):*

Jazyk L roziíme pidáním spoetn mnoha nových konstantních symbol c_i ($i \in \mathbb{N}$). Oznаme roziený jazyk L'. Uvame následující L'teorii T':

$$T' = T \cup \{c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Staí ukázat, e T' má model. Ten zejm musí být nekonený a jeho redukt na jazyk L je hledaný model $\mathcal{A}$ teorie T, který má nekonený klesající etzec $\cdots < c^{\mathcal{A}}_{n+1} < c^{\mathcal{A}}_n < \cdots < c^{\mathcal{A}}_0$.

Z vty o kompaktnosti víme, e T' má model, práv kdy kadá konená podmnoina T' má model. Máme-li konenou podteorii $S \subseteq T'$, ta obsahuje jen konen mnoho formulí $c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i$, pro njakou konenou mnoinu index $I \subseteq \mathbb{N}$. Oznаme jako $\mathcal{B}$ nekonený model T, který máme z pepokladu. (Tento model nemusí mít nekonený klesající etzec! Mohl by to být nap. $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$) V nm staí vybrat libovolný konený klesající etzec délky $|I|$ jako interpretace konstantních symbol c_i pro $i \in I$ (symboly $c_j \notin I$ interpretujeme libovoln), a dostáváme model S.

Dalí píklady k procviení

Problem 5. Uvate následující tvrzení:

(i) *Kadý docent napsal alespo jednu uebnici.*
(ii) *Kadou uebnici napsal njaký docent.*
(iii) *U kadého docenta nkdo studuje.*
(iv) *Kadý, kdo studuje u njakého docenta, peetl vechny uebnice od tohoto docenta.*
(v) *Kadou uebnici nkdo peetl.*

(a) Formalizujte *(i)–(v)* jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokonené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s polokou $F\varphi_5$ v koeni.
(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je livá v T? Je nezávislá v T? Zdvodnte.
(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdvodnte.

Problem 6. Tablo metodou dokate následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátor, kde $\varphi(x)$ je formule s jedinou volnou promnnou x, a ψ je sentence.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$
(c) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$

Problem 7. Nech $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Pedpokládejme, e z Prahy lze lett do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paíe, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokate tablo metodou, e existuje spojení z Bratislavy do Paíe.

Problem 8. Bu T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relaní symbol, f unární funkní symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Oznme jako T' generální uzávr T. Nech φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \qquad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo dkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednoduení mete krom axiom rovnosti v tablu pímo pouívat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, co je jejich dsledek.)
(b) Ukate, e ψ není dsledek teorie T, tím e najdete model T, ve kterém ψ neplatí.
(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (a na $\sim$) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uvete dv.
(d) Nech S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

K zamylení

Problem 9. Dokate syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) *Vtu o konstantách*: Bu φ formule v jazyce L s volnými promnnými $x_1, \ldots, x_n$ a T teorie v L. Oznme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi$ práv kdy $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$
(b) *Vtu o dedukci*: Pro kadou teorii T (v uzavené form) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ práv kdy $T, \varphi \vdash \psi$

Problem 10. Mjme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukate, e:

(a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie)
(b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) pouijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) pouijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.