

**Teaching goals:** After completing, the student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

- (a)  $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$   
 (b)  $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$   
 (c)  $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

**Solution.** (a) Volné proměnné jsou  $x, z$ . (Můžete si nakreslit strom formule.) Nejprve nahradíme formuli variantou, kde přejmenujeme vázané proměnné aby byly různé, a různé od volných. Dostáváme ekvivalentní formuli:

$$(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2))$$

Nyní postupujeme aplikací pravidel pro převod do PNF, podle stromu formule (posouváme kvantifikátory nahoru). Pořadí vytýkání volíme tak, že nejprve vytkneme ty kvantifikátory, které nakonec (až budou v kvantifikátorovém prefixu, tj. nahoře u kořene stromu) budou existenční, a teprve potom ty, které budou univerzální (abychom zbytečně nevytvořili ‘závislost’ ve Skolemově variantě). Dostáváme:

$$\begin{aligned} & (\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2)) \\ & \sim (\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)(\forall x_2)(R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2)) \\ & \sim (\exists y_2)((\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\forall x_2)(R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2))) \\ & \sim (\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2))) \end{aligned}$$

(Pozor na pravidla pro implikaci: při vytknutí z antecedentu se mění kvantifikátor, alternativně lze nejprve přepsat implikaci  $\varphi \rightarrow \psi$  jako  $\neg\varphi \vee \psi$ . Budte také opatrní, aby proměnná ve vytknutém kvantifikátoru nebyla volná v druhé části formule, tomu jsme ale zajistili přejmenováním.)

Nezapomeňte, že pro skolemizaci potřebujeme sentenci, tj. generální uzávěr formule:

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, y_2) \vee Q(x, y_2)))$$

Skolemova varianta je potom:

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, f(x, z)) \vee Q(x, f(x, z))))$$

Zde  $f$  je nový, binární funkční symbol. (Pozor, skolemizujeme-li teorii, všechny funkční symboly použité při skolemizaci všech axiomů musí být nové, navzájem různé.)

Skolemova varianta je z definice sentence, ale i její otevřené jádro  $(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, f(x, z)) \vee Q(x, f(x, z)))$  je ekvisplnitelné (ale typicky ne ekvivalentní!) s původní formulí.

(b) Postupujeme stejně jako v (a), ale ekvivalenci nejprve přepíšeme na dvojici implikací:

$$\begin{aligned}
& (\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y) \\
& \sim ((\exists x)R(x, y) \rightarrow (\forall y)P(x, y)) \wedge ((\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)R(x, y)) \\
& \sim ((\exists x_1)R(x_1, y) \rightarrow (\forall y_1)P(x, y_1)) \wedge ((\forall y_2)P(x, y_2) \rightarrow (\exists x_2)R(x_2, y)) \\
& \sim (\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, y_2) \rightarrow R(x_2, y))) \\
& \sim (\forall x)(\forall y)(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, y_2) \rightarrow R(x_2, y)))
\end{aligned}$$

Skolemova varianta ( $f, g$  jsou nové, binární funkční symboly):

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, g(x, y)) \rightarrow R(f(x, y), y)))$$

(c) Všimněte si, že formule je sentence. Obdobným postupem:

$$\begin{aligned}
& \neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y) \\
& \sim \neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x')(\exists y')R(x', y')) \wedge (\forall x'')\neg(\exists y'')Q(x'', y'') \\
& \sim (\forall x)(\exists y)(\forall x')(\forall y')(\forall x'')(\forall y'')(\neg(P(x, y) \rightarrow R(x', y')) \wedge \neg Q(x'', y''))
\end{aligned}$$

**Problem 2.** Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, запиšte v množinové reprezentaci.

- (a)  $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (b)  $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (c)  $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$
- (d)  $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

**Solution.** Nejprve vytvoříme Skolemovu variantu (viz předchozí příklad), poté vezmeme její otevřené jádro, a převeďme do CNF pomocí ekvivalentních úprav (stejně jako ve výrokové logice):

- (a)  $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$  už je sentence v PNF, Skolemova varianta:  $(\forall y)(P(f(y), y))$  ( $f$  nový, unární funkční symbol). Otevřené jádro:  $P(f(y), y)$ , CNF v množinové reprezentaci:

$$S = \{\{P(f(y), y)\}\}$$

- (b)  $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y) \sim (\exists y)(\forall x)\neg P(x, y)$ , Skolemova varianta  $(\forall x)\neg P(x, c)$  ( $c$  nový konstantní symbol), CNF:  $S = \{\{\neg P(x, c)\}\}$
- (c) Symboly  $c, d$  chápeme jako konstantní symboly, ne proměnné (dle konvence), jde tedy už o sentenci. Převod do PNF je snadný:

$$\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d))) \sim (\forall x)\neg((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$$

To už je univerzální sentence, skolemizace není potřeba (je sama svojí skolemovou variantou).

Odstraníme  $(\forall x)$  a převeďme do CNF:  $(P(x) \vee P(x)) \wedge (P(x) \vee \neg P(d)) \wedge (\neg P(c) \vee P(x)) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$ , po zjednodušení  $P(x) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$ , množinová reprezentace:

$$S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(c), \neg P(d)\}\}$$

- (d) Skolemova varianta:  $(\forall y)(P(c, f(y)) \wedge P(f(y), y) \rightarrow R(c, y))$ , CNF v množinové reprezentaci:  $S = \{\{\neg P(c, f(y)), \neg P(f(y), y), R(c, y)\}\}$ .

**Problem 3.** Necht  $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovností. Najděte otevřenou teorii  $T'$  ekvisplnitelnou s  $T$ . Převeďte  $T'$  do CNF a výslednou formuli  $S$  запиšte v množinové reprezentaci.

**Solution.** Axiomy už jsou v PNF, ale pro skolemizaci potřebujeme sentence (generální uzávěry):  $T \sim \{(\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ . Skolemizujeme (všechny symboly musí být nové):  $\{R(c), (\forall x)\neg P(x, f(x)), (\forall x)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(g(y), z))\}$ . Odstraníme univerzální kvantifikátory:

$$T' = \{R(c), \neg P(x, f(x)), \neg R(x) \vee P(g(y), z)\}$$

Ta už je v CNF, množinový zápis:  $S = \{\{R(c)\}, \{\neg P(x, f(x))\}, \{\neg R(x), P(g(y), z)\}\}$

Všimněte si, že  $S$  je nesplnitelná: to vidíme ‘na úrovni výrokové logiky’, substituujeme-li do druhé klauzule  $\{x/g(c)\}$  a do třetí klauzule  $\{x/c, y/c, z/f(g(c))\}$ , dostáváme základní instance:

$$S' = \{\{R(c)\}, \{\neg P(g(c), f(g(c)))\}, \{\neg R(c), P(g(c), f(g(c)))\}\}$$

Díky ekvisplnitelnosti s  $S$  je tedy nesplnitelná i původní teorie  $T$ .

**Problem 4.** Necht  $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle R \rangle$  s rovností, kde:

$$\varphi_1 = (\exists y)R(y, x)$$

$$\varphi_2 = (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$$

- (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii  $T'$  (případně v širším jazyce  $L'$ ) ekvisplnitelnou s  $T$ .
- (b) Buď  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^A \rangle$ , kde  $(n, m) \in R^A$  právě když  $n$  dělí  $m$ . Nalezněte expanzi  $\mathcal{A}'$   $L$ -struktury  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L'$  takovou, že  $\mathcal{A}' \models T'$ . (Množina všech přirozených čísel  $\mathbb{N}$  obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

**Solution.** (a) Nejprve skolemizujeme:

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)R(y, x)$ , Skolemova varianta:  $(\forall x)R(f(x), x)$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$ , Skolemova varianta:  $(\forall x)(\forall y)(\forall w)(R(g(x, y), x) \wedge R(g(x, y), y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))))$

Nakonec odstraníme kvantifikátorové prefixy, a třetí axiom ve formě konjunkce pro přehlednost rozdělíme:

$$T' = \{R(f(x), x), R(g(x, y), x), R(g(x, y), y), R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))\}$$

- (b) Uvědomíme si význam axiomů: první říká, že každé číslo má nějakého dělitele, a druhý vyjadřuje existenci největšího společného dělitele. Potřebujeme odpovídajícím způsobem interpretovat funkční symboly, např.:

- $f^{\mathcal{A}'}(n) = n$  (pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ )
- $g^{\mathcal{A}'}(n, m) = \gcd(n, m)$  (pro všechna  $n, m \in \mathbb{N}$ ),

Dostáváme tedy strukturu  $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{N}, R^A, f^{\mathcal{A}'}, g^{\mathcal{A}'} \rangle$  v jazyce  $L' = \langle R, f, g \rangle$  s rovností, kde  $R^A$  je relace dělitelnosti jako výše.

Všimněte si, že tato  $\mathcal{A}'$  není jediná možná. Mohli bychom také zvolit  $f^{\mathcal{A}'}(n) = 1$ . To je důvod, proč skolemizací dostaneme ekvisplnitelnou, ale typicky ne ekvivalentní teorii.

**Problem 5.** Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů ( $c, d$  jsou konstantní symboly v daném jazyce).

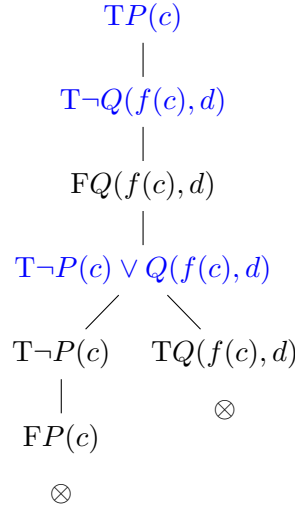
- (a)  $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
- (b)  $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
- (c)  $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
- (d)  $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

**Solution.** (a)  $T$  je sporná. Nesplnitelná je následující konjunkce základních instancí axiomů:

$$(\neg P(c) \vee Q(f(c), d)) \wedge \neg Q(f(c), d) \wedge P(c)$$

To lze snadno ověřit rezolucí ‘na úrovni výrokové logiky’, tj. každou atomickou formuli chápeme jako prvovýrok: označíme-li  $P(c)$  jako  $p$  a  $Q(f(c), d)$  jako  $q$ , máme  $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p$ .

Jak můžeme tyto základní instance axiomů najít? Herbrandova věta dává návod: sestojíme (konečný) tablo důkaz sporu z teorie  $T_{\text{ground}}$  sestávající ze všech základních instancí axiomů  $T$ . Alternativně, použijeme stejný postup jako při hledání modelů: sestojíme tablo zamítnutí některého z axiomů  $\varphi_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$ , tj. sporné tablo z teorie  $T_{\text{ground}}$  s položkou  $T\varphi_{\text{ground}}$  v kořeni. Při vhodné volbě axiomů dojdeme ke spornému tablu snadno:



Axiomy  $T_{\text{ground}}$  (tj. základní instance axiomů  $T$ ), které jsme v tablu zamítnutí použili (modře), patří do nesplnitelné konjunkce výše.

V příští sadě příkladů si ale ukážeme lepší postup: nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů můžeme také získat z rezolučního zamítnutí  $S$  (vzniklého převodem  $T$  do CNF).

- (b) Tato teorie není sporná, má tedy Herbrandův model (model, jehož univerzum tvoří všechny konstantní termy jazyka, a kde interpretace funkčních symbolů odpovídají “vytvoření termu” aplikací daného symbolu).

V takto jednoduchém případě můžeme Herbrandův model zkonstruovat sami:

$$\mathcal{H} = \langle H; P^{\mathcal{H}}, Q^{\mathcal{H}}, f^{\mathcal{H}}, c^{\mathcal{H}}, d^{\mathcal{H}} \rangle$$

- $\mathcal{H} = \{“c”, “d”, “f(c)”, “f(d)”, “f(f(c))”, “f(f(d))”, \dots\}$
- $c^{\mathcal{H}} = “c”, d^{\mathcal{H}} = “d”$
- $f^{\mathcal{H}}(“t”) = “f(t)”$
- $P^{\mathcal{H}} = H$
- $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$

Relace  $P^{\mathcal{H}} = H$  a  $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$  jsme zvolili jako úplnou unární resp. binární relaci, aby bylo snadno vidět, že všechny axiomy jsou splněny. Zbytek je dán z definice Herbrandova modelu.

Vysvětlíme si také postup daný důkazem Herbrandovy věty. Podobně jako výše bychom zkonstruovali dokončené tablo z  $T_{\text{ground}}$  pro položku  $TP(c)$  (například), ale tentokrát tablo nebude sporné (teorie  $T_{\text{ground}}$  není sporná). Herbrandův model získáme z libovolné (dokončené) bezesporné větve, a to stejným postupem jako kanonický model, s tím rozdílem, že do jazyka nepřidáváme pomocné konstantní symboly  $c_0, c_1, \dots$  jako jsme to dělali v tablo metodě. Všimněte si, že nejsou potřeba: protože je teorie  $T$  otevřená, nejsou v ní ani v  $T_{\text{ground}}$  žádné kvantifikátory, tedy nemusíme redukovat žádné položky typu “svědek”. (Můžete si zkusit kousek tabla zkonstruovat, ale vyjde poměrně složité.)

- (c) Není sporná, v Herbrandově modelu lze zvolit např.  $P^{\mathcal{H}} = H \times \{“f(t)” \mid t \in H\}$ , tj. v relaci jsou takové dvojice termů, kde druhý začíná funkčním symbolem  $f$ .
- (d) Teorie je sporná. V axiomech nevidíme žádný konstantní symbol, proto si musíme jeden do jazyka přidat, budme tedy v jazyce  $L = \langle P, f, g, c \rangle$  (bez rovnosti). Sporná, nesplnitelná konjunkce základních instancí axiomů je např.:

$$P(g(c), f(g(c))) \wedge \neg P(c, g(c)) \wedge (P(g(c), f(g(c))) \rightarrow P(c, g(c)))$$

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 6.** Teorie těles  $T$  jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  obsahuje jeden axiom  $\varphi$ , který není otevřený:  $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$ . Víme, že  $T \models 0 \cdot y = 0$  a  $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$ .

- (a) Najděte Skolemovu variantu  $\varphi_S$  formule  $\varphi$  s novým funkčním symbolem  $f$ .
- (b) Uvažme teorii  $T'$  vzniklou z  $T$  nahrazením  $\varphi$  za  $\varphi_S$ . Platí  $\varphi$  v  $T'$ ?
- (c) Lze každý model  $T$  jednoznačně rozšířit na model  $T'$ ?

Nyní uvažme formuli  $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$ .

- (d) Platí v  $T$  axiomy existence a jednoznačnosti pro  $\psi(x, y)$  a proměnnou  $y$ ?
- (e) Sestrojte extenzi  $T''$  teorie  $T$  o definici symbolu  $f$  formulí  $\psi$ .
- (f) Je  $T''$  ekvivalentní teorii  $T'$ ?
- (g) Najděte  $L$ -formuli, která je v  $T''$ -ekvivalentní s formulí:  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

**Problem 7.** Víme, že platí následující:

- Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.
- Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.
- Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: “Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.”. Sestrojte příslušnou CNF formuli  $S$ , a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

#### FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 8.** Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formulí, ověřte, že platí:

- (a)  $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- (b)  $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$