

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestavit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestavit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluční, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe. Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: Neexistují žádní holiči.

Solution. Nejprve zvolíme vhodný jazyk. V textu identifikujeme vlastnost objektů “ x je holič” a vztah dvou objektů “(kdo) x holí (koho) y ”. Použijeme jazyk $L = \langle B, S \rangle$ bez rovnosti, kde B je unární relační symbol, $B(x)$ má význam “ x je holič (barber)”, S je binární relační symbol, $S(x, y)$ znamená “ x holí (shaves) y ”.

V tomto jazyce formalizujeme tvrzení ze zadání:

- Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe:

$$\varphi_1 = (\forall x)(B(x) \rightarrow (\forall y)(\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)))$$

- Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe:

$$\varphi_2 = \neg(\exists x)(B(x) \wedge (\exists y)(S(x, y) \wedge S(y, y)))$$

- Neexistují žádní holiči:

$$\psi = \neg(\exists x)B(x)$$

Naším cílem je ukázat, že v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ platí sentence ψ . Dokazujeme sporem, vyjdeme tedy z teorie $T \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$. Pomocí skolemizace k ní najdeme ekvisplnitelnou CNF formuli S . Najdeme rezoluční zamítnutí S , čímž ukážeme, že S a tedy i $T \cup \{\neg\psi\}$ je nesplnitelná.

Převědeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, a převedeme do CNF:

- $\varphi_1 \rightsquigarrow B(x) \rightarrow (\neg S(y, y) \rightarrow S(x, y)) \sim \neg B(x) \vee S(y, y) \vee S(x, y)$
- $\varphi_2 \rightsquigarrow \neg(B(x) \wedge S(x, y) \wedge S(y, y)) \sim \neg B(x) \vee \neg S(x, y) \vee \neg S(y, y)$
- $\neg\psi \rightsquigarrow B(c)$ (kde c je nový konstantní symbol)

Před skolemizací se ujistěte, že máte sentence. A nezapomeňte, že musíme skolemizovat sentenci $\neg\psi$, ne ψ . (Negace skolemovy varianty není ekvisplnitelná s negací původní formule! Skolemizací $\neg\exists B(x)$ bychom dostali $\neg B(x)$, čehož negace je $B(x)$, tj. ‘všichni jsou holiči’ zatímco správným postupem dostaneme ‘(svědek) c je holič’).

V množinovém zápisu tedy máme:

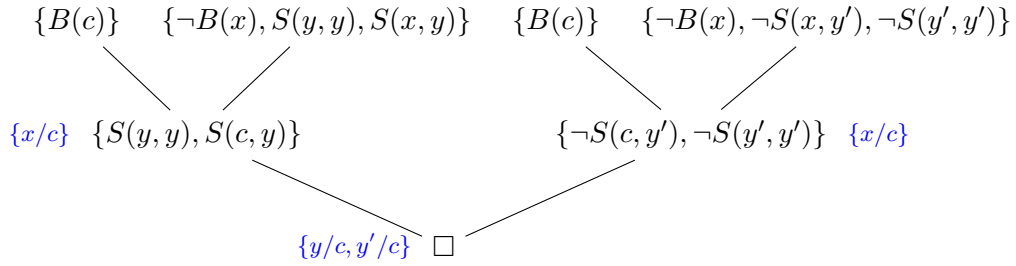
$$S = \{\{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y), \neg S(y, y)\}, \{B(c)\}\}$$

Rezoluční zamítnutí:

$$\{B(c)\}, \{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{S(y, y), S(c, y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x, y'), \neg S(y', y')\}, \\ \{\neg S(c, y'), \neg S(y', y')\}, \square$$

První dvě klauzule jsou z S , třetí jejich rezolventa za použití unifikace $\{x/c\}$. Čtvrtá klauzule je variantou klauzule z S , proměnnou y jsme přejmenovali na y' , abychom dodrželi technickou podmínku o disjunktích množinách proměnných v rezolvovaných klauzulích. Pátá klauzule je rezolventou první a čtvrté za použití unifikace $\{x/c\}$. Poslední, prázdná klauzule \square je rezolventou z 3. a 5. klauzule, unifikace $\{y/c, y'/c\}$.

Typicky ale zamítnutí zakreslíme pouze rezolučním stromem, naznačíme i použité unifikace:



Problem 2. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

- (i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovčí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
- (ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: (iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena. Konkrétně:

- (a) Vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle P, K \rangle$ bez rovnosti (P je binární, K unární relační symbol, $P(x, y)$ znamená 'ovce x porodila ovci y ', $K(x)$ 'ovce x byla naklonována').
- (b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
- (c) Najděte rezoluční zamítnutí S , nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
- (d) Má S LI-zamítnutí?

Solution. Všimněte si, že všechny objekty, o kterých mluvíme, jsou ovce, nepotřebujeme tedy predikát pro 'býti ovčí'. Postup je stejný jako v předchozím příkladě:

- (a) Možností jak formulovat formule je více, pokud se snažíme co nej přesněji držet textu, dostaneme např.:

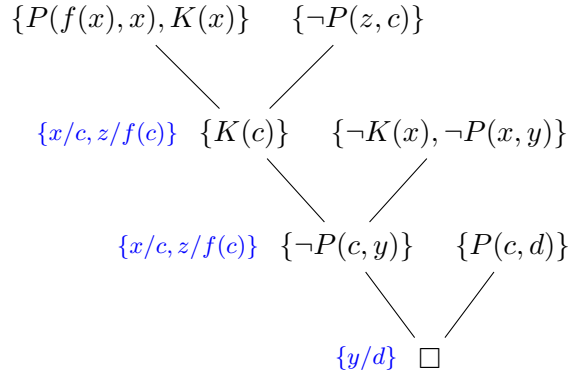
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\forall x)((\exists y)P(y, x) \vee K(x)) \wedge \neg((\exists z)P(z, x) \wedge K(x)) \\ \varphi_2 &= \neg(\exists x)(K(x) \wedge (\exists y)P(x, y)) \\ \varphi_3 &= (\forall x)((\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)P(z, x)) \end{aligned}$$

- (b) Vyjdeme z teorie $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ (dokazujeme sporem). Převědeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, převedeme do CNF, a zapíšeme v množině novém zápisu:

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(y, x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z, x) \wedge K(x))) \rightsquigarrow (P(f(x), x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z, x) \wedge K(x)) \sim \{\{P(f(x), x), K(x)\}, \{\neg P(z, x), \neg K(x)\}\}$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)\neg(K(x) \wedge P(x, y)) \sim \{\{\neg K(x), \neg P(x, y)\}\}$
- $\neg\varphi_3 \sim (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(P(x, y) \rightarrow P(z, x)) \rightsquigarrow \neg(P(c, d) \rightarrow P(z, c)) \sim \{\{P(c, d)\}, \{\neg P(z, c)\}\}$

$$S = \{\{P(f(x), x), K(x)\}, \{\neg P(z, x), \neg K(x)\}, \{\neg K(x), \neg P(x, y)\}, \{P(c, d)\}, \{\neg P(z, c)\}\}$$

(c) Rezoluční strom pro rezoluční zamítnutí $S \vdash_R \square$:



(d) Ano, v (c) se nám podařilo sestavit LI-zamítnutí. I kdyby ne, existence LI-zamítnutí plyne z Věty o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule, naše CNF formule S je Hornova.

Problem 3. Necht $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti.

- (a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvivalentní teorii T' .
- (b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
- (c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S . U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (d) Nalezněte nespílitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S . *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

Solution. (a) Skolemizací dostáváme:

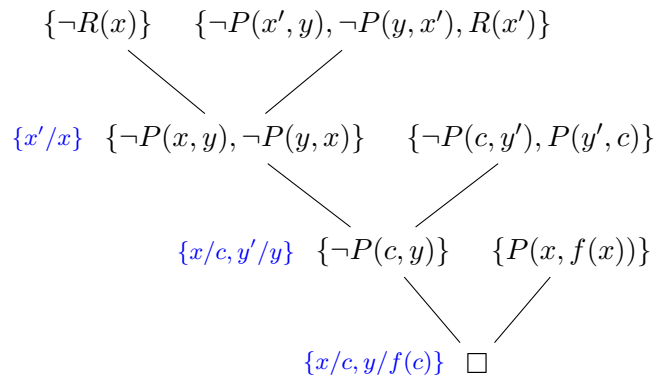
$$T' = \{\neg R(x), P(c, y) \rightarrow P(y, c), P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow R(x), P(x, f(x))\}$$

(Pozor u třetího axiomu: $(\exists y)$ vytýkáme z antecedentu implikace, změní se na $(\forall y)$).

(b) Snadno převedeme do CNF:

$$S = \{\{\neg R(x)\}, \{\neg P(c, y), P(y, c)\}, \{\neg P(x, y), \neg P(y, x), R(x)\}, \{P(x, f(x))\}\}$$

(c) Rezoluční strom pro $S \vdash_R \square$:



(Všimněte si, kde potřebujeme přejmenovat proměnné, aby rezolované klauzule měly disjunktční množiny proměnných.)

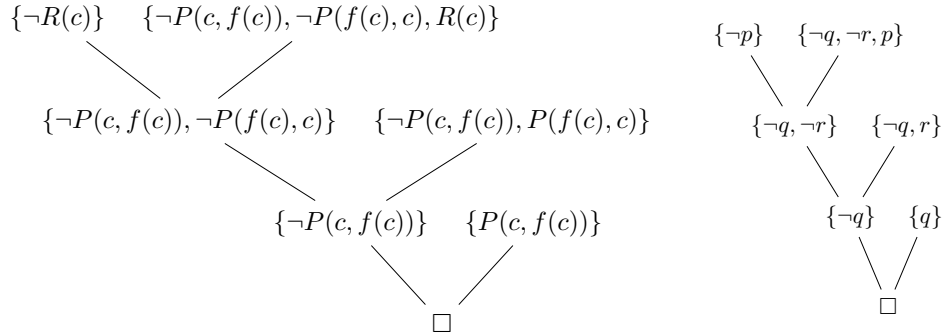
(d) K nalezení konjunkce základních instancí axiomů můžeme použít sestrojené rezoluční zamítnutí. Pro každý list rezolučního stromu, který je označovaný klauzulí C (až na přejmenování je to klauzule z S), aplikujeme na C postupně všechny unifikace na cestě od tohoto listu až ke kořeni:

- $\neg R(x) \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg R(c)$
- $\neg P(x', y) \vee \neg P(y, x') \vee R(x') \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)$
- $\neg P(c, y') \vee P(y', c) \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)$
- $P(x, f(x)) \cdot \{x/c, y/f(c)\} = P(c, f(c))$

Pokud by v některých klauzulích zůstaly proměnné, substituujeme za ně libovolný konstantní term. Dostáváme nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S :

$$\neg R(c) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)) \wedge P(c, f(c))$$

Její rezoluční zamítnutí ‘na úrovni výrokové logiky’ má stejnou strukturu jako rezoluční zamítnutí S :



Pokud bychom chtěli základní instance původní teorie T , musíme se podívat, ze kterých axiomů T vznikly naše klauzule, a aplikovat stejné unifikace, výsledkem by bylo:

$$\neg R(c) \wedge (P(c, f(c)) \rightarrow P(f(c), c)) \wedge (P(c, f(c)) \wedge P(f(c), c) \rightarrow R(c)) \wedge P(c, f(c))$$

EXTRA PRACTICE

Problem 4. Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \{ \neg Q(h(b), w), H(w, a) \}, \{ \neg H(v, a) \}, \\ \{ \neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a) \}, \{ P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b) \}\}$$

Problem 5. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s \rangle$ bez rovnosti, kde j, h, q jsou konstantní symboly (‘jablka/hrušky/švestky’) a $x < y$ vyjadřuje, že “ovoce y je lepší než ovoce x ”. Víme, že:

- (i) Relace “být lepší” je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
- (ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že (iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

- (a) Tvzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce L .
- (b) Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli S , která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište S v množinové reprezentaci.
- (c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S , která je nesplnitelná.
- (e) Je S zamítnutelná LI-rezolucí?

Problem 6. Buď $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, c konstantní symbol, a axiom φ vyjadřuje “*Existuje alespoň 5 prvků, pro které platí $U(x)$.*”

- (a) Najděte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze T .
- (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Problem 7. Nechť $T = \{U(x) \rightarrow U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že “existují maximálně 4 prvky”.

- (a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U \rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
- (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

Problem 8. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

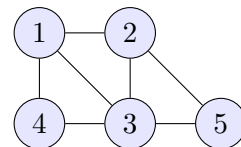
- (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
- (b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Problem 9. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d \rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.

- (a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T ?
- (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T .

Problem 10. Mějme následující graf.

- (a) Najděte všechny automorfismy.
- (b) Které podmnožiny množiny vrcholů V jsou definovatelné? Uveďte definující formule. (*Nápověda: Využijte (a).*)
- (c) Které binární relace na V jsou definovatelné?



FOR FURTHER THOUGHT

Problem 11. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

- (a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$, kde $S(r) = r+1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v \mathcal{R} z parametru 0?
- (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
- (c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω -kategorická teorie? Je T' kompletní?
- (d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L -struktura \mathcal{B} velikosti n elementárně ekvivalentní s \mathcal{R} ? Existuje spočetná struktura \mathcal{B} elementárně ekvivalentní s \mathcal{R} ?