NAIL062 P&P Logic: Worksheet 1 – Intro to propositional logic

Teaching goals: The student is able to

- understand the notions of propositional logic syntax (language, atomic proposition, proposition, tree of a proposition, subproposition, theory), formally define them and give examples
- understand the notions of model, consequence of a theory, formally define them and give examples
- formalize a given system (word/computational problem, etc.) in propositional logic
- find models of a given theory
- decide whether a given proposition is a consequence of a given theory
- has experience applying (with instructor assistance) the tableau method and resolution method to prove properties of a given system (e.g., to solve a word problem)

In-class problems

Problem 1. Ztratili jsme se v labyrintu a ped námi jsou troje dvee: ervené, modré, a zelené. Víme, e za práv jednmi dvemi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveích jsou nápisy:

- ervené dvee: *"Cesta ven je za tmito dvemi."*
- Modré dvee: *"Cesta ven není za tmito dvemi."*
- Zelené dvee: *"Cesta ven není za modrými dvemi."*

Víme, e alespo jeden z nápis je pravdivý a alespo jeden je livý. Kudy vede cesta ven?

(a) Zvolte vhodný jazyk (mnoinu prvovýrok) $\mathbb{P}$.
(b) Formalizujte vechny znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$. (Pozor: Axiomy nejsou nápisy na dveích, ty nemusí být pravdivé.)
(c) Najdte vechny modely teorie T.
(d) Formalizujte tvrzení "Cesta ven je za ervenými/modrými/zelenými dvemi" jako výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad $\mathbb{P}$. Je nkterý z tchto výrok dsledkem T?
(e) Vyzkouejte si pouití tablo metody: Zkonstruujte tablo z teorie T s polokou $F\varphi_i$ v koeni, budou vechny vtve sporné? (Pokuste se vymyslet správné kroky konstrukce tabla, inspirujte se píkladem z pednáky.)
(f) Vyzkouejte si pouití rezoluní metody: Pevete axiomy teorie T, a také výrok $\neg\varphi_i$, do konjunktivní normální formy (CNF). Pokuste se sestrojit rezoluní zamítnutí, zakreslete ho ve form rezoluního stromu. (Pozor: Nezapomete znegovat dokazovaný výrok φ_i.)

Solution. *(a) Pirozenou volbou je jazyk $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, kde p_i znamená 'za i-tými dvemi je cesta ven', kde dvee vezmme v poadí ervené, modré, zelené jako v zadání. (Také bychom mohli pouít 'za i-tými dvemi je drak' nebo 'nápis na i-tých dveích je pravdivý'. Dleité je, aby zvolený jazyk byl co nejmení. Máme-li p_i, meme nap. 'za i-tými dvemi je drak' vyjádit jako '$\neg p_i$', nepotebujeme dalí prvovýrok. Dále chceme, aby lo vlastnosti ze zadání formalizovat co nejsnáze.)*

(b) Ze zadání chápeme, e 'je drak' znamená toté, co 'není cesta ven'. To, e cesta ven je za práv jednmi dvemi, vyjádíme tak, e ekneme, e je za alespo jednmi dvemi, a pro kadou dvojici dveí alespo za jednmi není:

$$\alpha_1 = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

Nyní k nápism na dveích, nejprve formalizujeme jejich význam:

- *ervené dvee: "p_1"*

- *Modré dvee: "*$\neg p_2$*"*
- *Zelené dvee: "*$\neg p_2$*"*

Alespo jeden z tchto nápis je pravdivý: $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_2$*, zjednoduíme na*

$$\alpha_2 = p_1 \vee \neg p_2$$

Podobn to, e alespo jeden z nápis je livý, formalizujeme jako $\neg p_1 \vee \neg\neg p_2 \vee \neg\neg p_2$*, po zjednoduení (rozmyslete si, pro jde o ekvivalentní výrok):*

$$\alpha_3 = \neg p_1 \vee p_2$$

Výsledná teorie je tedy:

$$\begin{aligned} T &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ &= \{(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3), p_1 \vee \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\} \end{aligned}$$

(c) *Pozdji se nauíme hledat modely pomocí tablo metody, zatím ale 'neefektivní' postup: Nejprve najdeme modely jednoho z axiom. Protoe první axiom je pomrn sloitý, moná bude lepí zaít axiomem* α_2*. (V principu bychom mohli vyzkouet postupn vech 8 model jazyka* $\mathbb{P}$*, a pro kadý z nich spoíst pravdivostní hodnotu* α_2*.) Dostáváme:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_2) = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

Nyní zjistíme, ve kterých z tchto model platí axiom α_3*:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_2, \alpha_3) = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

A nakonec ovíme platnost α_1 *v kadém z tchto 4 model:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{(0,0,1)\}$$

(d) *Pi naí volb jazyka* $\mathbb{P}$ *je formalizace jednoduchá:* $\varphi_1 = p_1$*,* $\varphi_2 = p_2$*,* $\varphi_3 = p_3$*. Být dsledkem teorie* T *znamená platit v kadém modelu* T *(pozor, v kadém, ne 'v njakém modelu', to je astá chyba). V naem pípad má* T *jen jeden model, ihned vidíme, e v nm platí* φ_3 *a neplatí* φ_1 *ani* φ_2*. Dsledkem* T *je tedy z tchto tí jen* φ_3*.*

(e) *Pi pouití tablo metody postupujeme stejn jako v úvodní kapitole skript (Sekce 1.1.5). Abychom dokázali, e v* T *platí* φ_3*, sestrojíme tablo z teorie* T*, kde do koene dáme pedpoklad* $\mathrm{F}p_3$*, nebo dokazujeme sporem (*F *znamená 'False',* T *znamená 'True').*

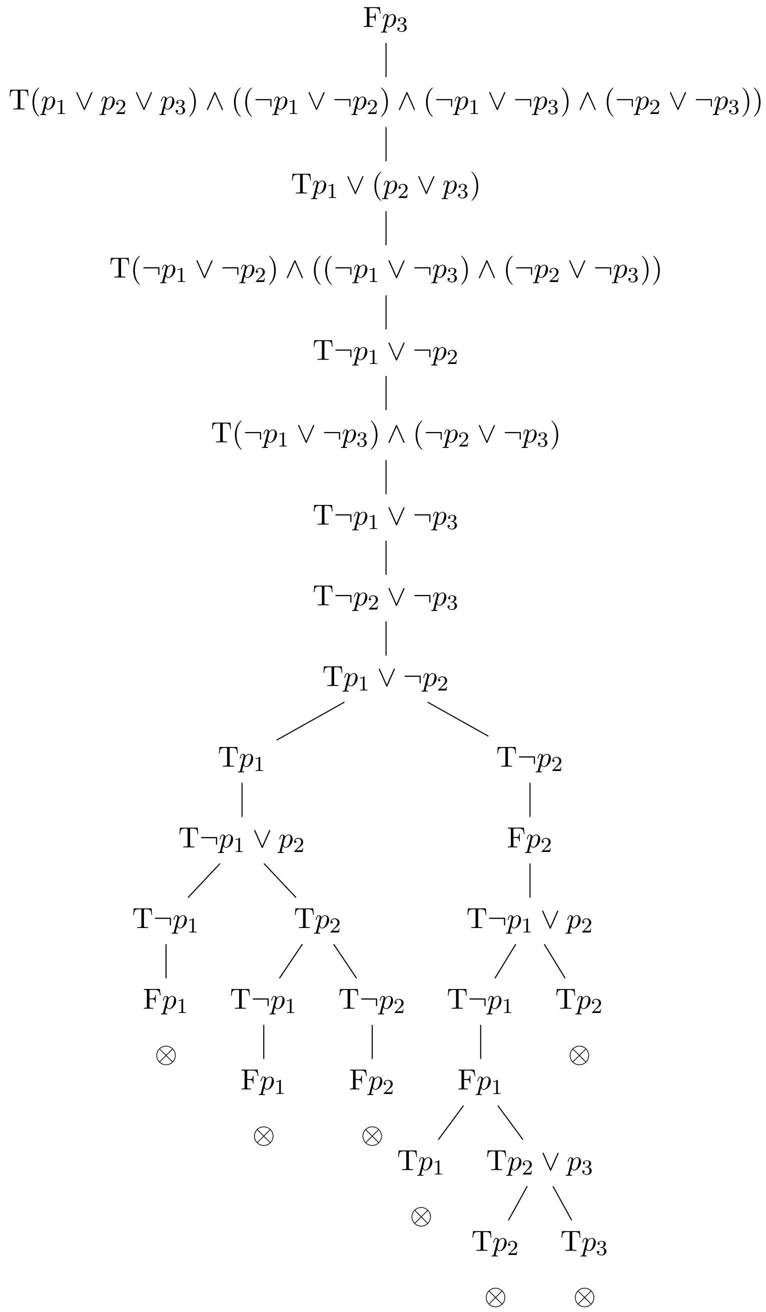
Pipomeme, e tablo rozvíjíme pipojováním pedpoklad o platnosti axiom $\mathrm{T}\alpha_i$ *(*$i \in \{1,2,3\}$*) a redukcí poloek (pipojením písluných atomických tabel). Poadí, v jakém to dláme, me znan ovlivnit velikost výsledného tablo dkazu. Dobré je nejprve redukovat poloky, jejich atomická tabla se nevtví, nebo vtví, ale nkterá z vtví se ihned stane spornou. Axiomy pipojujeme a kdy jsou poteba. asto je dobré si rozmyslet, jak bychom v dkazu postupovali my, a podle toho budovat i tablo.*

Vimnte si také, e nedefinujeme atomická tabla pro konjunkce resp. disjunkce tí a více výrok. (Chceme, aby kroky algoritmu byly co nejjednoduí.) Proto nap. v $\mathrm{T}p_1 \vee p_2 \vee p_3$ *si nejprve pedstavíme vynechané závorky,* $\mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$*, a potom redukujeme ve dvou krocích pipojením* $\mathrm{T}p_1$ *a* $\mathrm{T}p_2 \vee p_3$*:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3) & & \\
 & / & & \backslash & \\
\mathrm{T}p_1 & & & & \mathrm{T}p_2 \vee p_3 \\
 & & & / & & \backslash \\
 & & & \mathrm{T}p_2 & & \mathrm{T}p_3
\end{array}$$

(Jet poznamenáme, e z hlediska tablo metody by bylo trochu lepí mít místo axiomu α_1 *tyi samostatné výroky, jich je konjunkcí. Tím by se konstrukce tabla zkrátila. Algoritmus si ale poradí s jakkoliv sloitými axiomy.)*

Zde je jeden z moných tablo dkaz ($\oplus$ *oznauje spornou vtev,* ✓ *dokonenou bezespornou). Na první pohled me vypadat sloit, ve skutenosti ale provádíme jednoduchý algoritmus. Rozmyslete si, odkud se vzaly jednotlivé poloky, a kde vidíme atomická tabla:*



Co kdybychom zkusili z teorie T dokázat p_1, nebo p_2? Ukáeme pro p_1 (pro p_2 si zkuste sami). Do koene dáme poloku $\mathrm{F}p_1$. Postupujeme obdobn, ale alespo jedna z vtví bude i po dokonení (pipojení vech axiom a redukce vech poloek) bezesporná. Z bezesporných vtví lze potom vyíst protipíklad (model teorie T, ve kterém p_1 neplatí).

Níe je sestrojené dokonené tablo. Ovte, e jsou pouity vechny axiomy a zredukovány vechny poloky. Dostáváme dv dokonené bezesporné vtve. Podíváme se na pedpoklady o prvovýrocích, které na nich najdeme: Pro ob jsou to $\mathrm{F}p_1$, $\mathrm{F}p_2$, $\mathrm{T}p_3$. To odpovídá modelu $(0,0,1)$, co je opravdu protipíklad: model teorie T, ve kterém neplatí p_1.

$\mathrm{F}p_1$

$\mathrm{T}p_1 \vee \neg p_2$

$\mathrm{T}p_1 \qquad \mathrm{T}\neg p_2$

$\otimes$

$\mathrm{F}p_2$

$\mathrm{T}(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3))$

$\mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$

$\mathrm{T}(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge ((\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3))$

$\mathrm{T}p_1 \qquad \mathrm{T}p_2 \vee p_3$

$\otimes \qquad \mathrm{T}p_2 \qquad \mathrm{T}p_3$

$\otimes$

$\mathrm{T}\neg p_1 \vee \neg p_2$

$\mathrm{T}(\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$

$\mathrm{T}\neg p_1 \vee \neg p_3$

$\mathrm{T}\neg p_2 \vee \neg p_3$

$\mathrm{T}\neg p_1 \qquad \mathrm{T}\neg p_3$

$\mathrm{F}p_1 \qquad \mathrm{F}p_3$

$\mathrm{T}\neg p_2 \qquad \mathrm{T}\neg p_3 \qquad \otimes$

$\mathrm{F}p_2 \qquad \mathrm{F}p_3$

$\otimes$

$\mathrm{T}\neg p_1 \vee p_2$

$\mathrm{T}\neg p_1 \qquad \mathrm{T}p_2$

$\mathrm{F}p_1 \qquad \otimes$

$\mathrm{T}\neg p_1 \qquad \mathrm{T}\neg p_2$

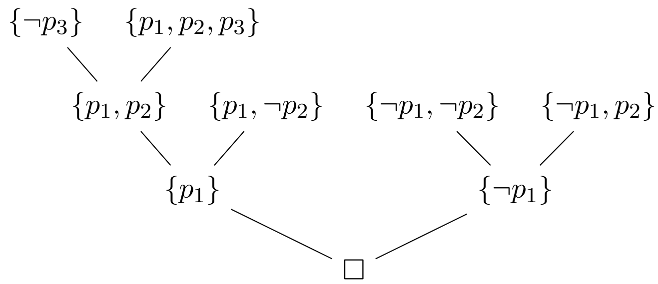
$\mathrm{F}p_1 \qquad \mathrm{F}p_2$

$\checkmark \qquad \checkmark$

(f) *Pi pouití rezoluní metody postupujeme stejn jako v úvodní kapitole skript, v Sekci 1.1.6. Abychom dokázali, e v T platí p_3, pidáme k teorii T jako axiom výrok $\neg p_3$. Máme tedy $T' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg p_3\}$. Pomocí ekvivalentních úprav pevedeme do CNF (vyjádíme jako konjunkci klauzulí, tj. disjunkcí literál), v naem pípad vechny axiomy u v CNF jsou (α_1 je konjunkce tí klauzulí, ostatní jsou klauzulemi). Výsledná CNF formule v mnoinovém zápisu (pro pehlednost je dobré zapisovat literály v pevném poadí):*

$$S = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_3\}, \{\neg p_2, \neg p_3\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_3\}\}$$

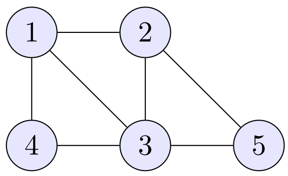
Nyní sestrojíme rezoluní zamítnutí. Jak vybírat jednotlivé rezoluní kroky? Dobrou heuristikou je fakt, e kratí klauzule obsahuje více informací. Snaíme se tedy zaít od nejkratích klauzulí, zde $\{\neg p_3\}$, a sledujeme, kde bychom mohli pouít nov odvozené ('nauené') klauzule. Klauzule je asto poteba pouít opakovan. Zde je jedno z moných rezoluních zamítnutí, zakreslené ve form rezoluního stromu:



Ovte, e vechny listy jsou klauzule z S a vechny vnitní vrcholy vznikly rezolucí ze svých syn. Rezoluní dkaz budeme definovat jako posloupnost klauzulí (kde klauzule jsou bu axiomy, nebo rezolventy pedchozích). Takových posloupností odpovídajících naemu stromu je více, zde je jedna z moných:

$$\{\neg p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1\}, \square$$

Problem 2. Uvame *vrcholové pokrytí* (vertex cover) následujícího grafu:



Chceme pro dané $k > 0$ zjistit, zda má tento graf nejvýe k-prvkové vrcholové pokrytí.

(a) Zvolte vhodný jazyk (mnoinu prvovýrok) $\mathbb{P}$.
(b) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýe k-prvkové vrcholové pokrytí, pro pevn zvolené k. Ozname výslednou teorii jako VC_k.
(c) Ukate, e VC_2 nemá ádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
(d) Umli byste k tomu vyuít tablo metodu? Rozmyslete si postup.
(e) Umli byste k tomu vyuít rezoluní metodu? Rozmyslete si postup.
(f) Najdte vechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

Solution. *Vrcholové pokrytí je mnoina vrchol C obsahující alespo jeden vrchol z kadé hrany.*

(a) *Pirozenou volbou je jeden prvovýrok p_v pro kadý vrchol $v \in V$, který popisuje, zda je $v \in C$. Máme tedy $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$.*

(b) *Nejprve formalizujeme, e jde o vrcholové pokrytí (libovolné velikosti). Pro kadou hranu* $\{u, v\} \in E$ *vyjádíme, e* u *nebo* v *musí být v* C. *Máme tedy teorii popisující vechna vrcholová pokrytí:*

$$VC = \{p_u \vee p_v \mid \{u, v\} \in E, u < v\}$$

Zbývá vyjádit, e platí nejvýe k *prvovýrok, co zapíeme jako disjunkce negací pes vechny* $k+1$*-prvkové podmnoiny vrchol:*

$$S_{\leq k} = \{\bigvee_{v \in I} \neg p_v \mid I \subseteq V, |I| = k+1\}$$

Výsledná teorie tedy bude $VC_k = VC \cup S_{\leq k}$.

(c) *Pro pehlednost zde vypíeme vechny axiomy teorie* VC_2 *(by to dlat nemusíme):*

$$\begin{aligned}VC_2 = \{&p_1 \vee p_2, p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_4, p_3 \vee p_5,\\ &\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5,\\ &\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5\}\end{aligned}$$

Pouijeme-li 'neefektivní' postup, meme si napíklad vimnout, e:

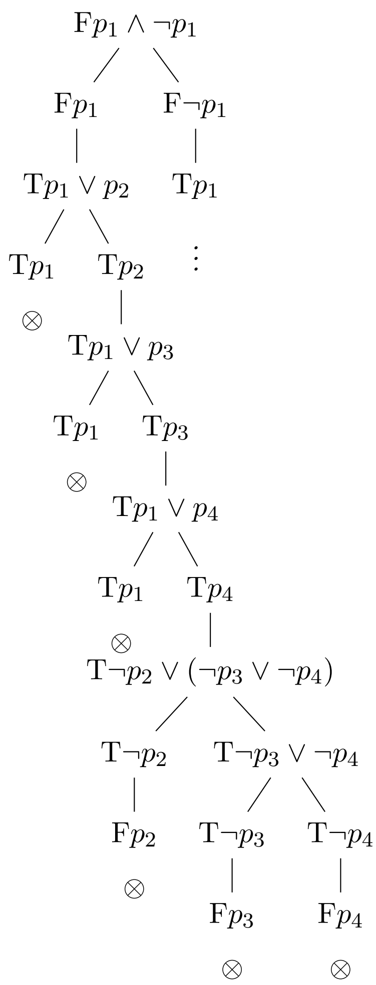
$$\mathrm{M}(p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_3 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) = \{(0, a, 1, 1, b), (1, a, 0, 1, b), (1, a, 1, 0, b) \mid a, b \in \{0, 1\}\}$$
$$\mathrm{M}(p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) = \{(a, 0, 1, b, 1), (a, 1, 0, b, 1), (a, 1, 1, b, 0) \mid a, b \in \{0, 1\}\}$$

Jde o 2-prvková vrcholová pokrytí podgraf $\{1, 3, 4\}$ *a* $\{2, 3, 5\}$. *Prnik tchto mnoin je*

$$\{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0)\}$$

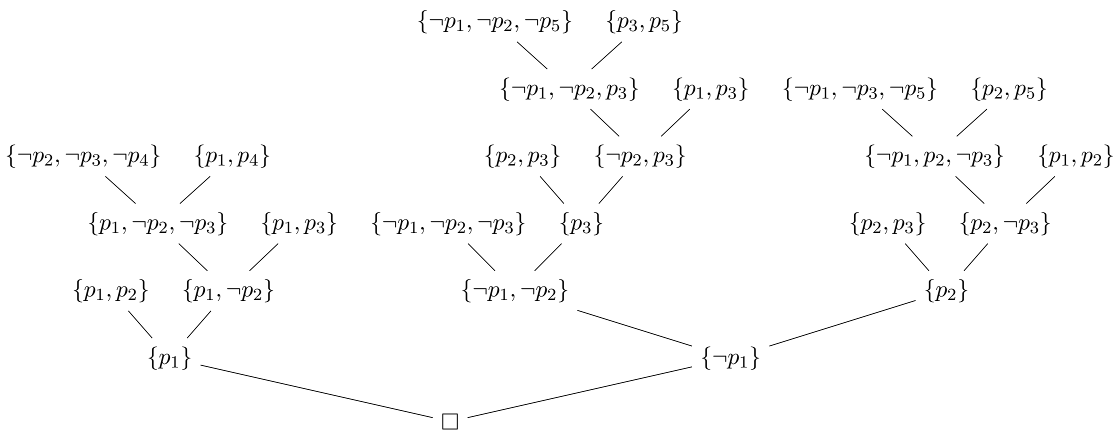
ádný z tchto model ale nespluje ostatní axiomy, nap. v prvním neplatí $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$.

(d) *Tablo metodu pouijeme k dkazu, e v teorii* VC_2 *platí spor, tj. výrok* $p_1 \wedge \neg p_1$. *Ten vloíme do koene s píznakem* F *('False'), tj. dokazujeme spor, sporem. Ukáeme jen ást konstrukce (levou vtev).*



(Alternativn bychom mohli pouít tablo metodu adaptovanou pímo na hledání model, do koene dát platnost prvního axiomu, a rozvíjet tablo za pidávání pedpoklad platnosti ostatních axiom: kadý model musí souhlasit s nkterou vtví, vechny nám ale vyjdou sporné.)

(e) *Vechny axiomy u jsou v CNF. Staí najít rezoluní zamítnutí teorie VC_2 (tedy rezoluní dkaz prázdné klauzule $\square$), z toho plyne, e VC_2 neme mít model. Nakreslíme jen (jeden moný) rezoluní strom:*



(f) *Zde uveme jen správnou odpov:* $\mathrm{M}(VC_3) = \{(0,1,1,1,0),(1,0,1,0,1),(1,1,1,0,0)\}$ *co odpovídá mnoinám vrchol* $\{2,3,4\},\{1,3,5\},\{1,2,3\}$. *Pouití tablo metody by bylo trochu pracnjí, mete si ale zkusit dokázat (tablo metodou nebo rezolucí), e v pokrytí musí vdy být vrchol 3.*

Extra practice

Problem 3. Uvame následující tvrzení:

(i) *Ten, kdo je dobrý bec a má dobrou kondici, ubhne maraton.*
(ii) *Ten, kdo nemá tstí a nemá dobrou kondici, neubhne maraton.*
(iii) *Ten, kdo ubhne maraton, je dobrý bec.*
(iv) *Budu-li mít tstí, ubhnu maraton.*
(v) *Mám dobrou kondici.*

Podobn jako v prvním píkladu popite situaci pomocí výrokové logiky:

(a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii T nad vhodnou mnoinou prvovýrok.
(b) Najdte vechny modely teorie T.
(c) Pokuste se vyuít k hledání model také *tablo metodu.*
(d) Napite nkolik rzných dsledk teorie T.
(e) Najdte CNF teorii ekvivalentní teorii T.

Problem 4. Mjme ti bratry, kadý z nich bu vdy íká pravdu anebo vdy le.

(i) Nejstarí íká: *"Oba mí brati jsou lhái."*
(ii) Prostední íká: *"Nejmladí je lhá."*
(iii) Nejmladí íká: *"Nejstarí je lhá."*

Pomocí výrokové logiky ukate, e nejmladí bratr je pravdomluvný.

Problem 5. Mjme pevn dané Sudoku. Popite, jak vytvoit teorii (ve výrokové logice), její modely jednoznan odpovídají validním eením.

Problem 6. Formalizujte následující tvrzení ve výrokové logice:

(a) Králíci v oblasti nebyli pozorováni a procházení po cest je bezpené, ale borvky podél cesty jsou zralé.
(b) Pokud jsou borvky podél cesty zralé, pak je procházení po cest bezpené pouze tehdy, pokud králíci nebyli v oblasti pozorováni.

(c) *Procházet se podél cesty není bezpené, ale v oblasti nebyli pozorováni králíci a borvky podél cesty jsou zralé.*
(d) *Aby bylo procházení po cest bezpené, je nezbytné, ale nedostaující, aby borvky podél cesty nebyly zralé a králíci nebyli v oblasti pozorováni.*
(e) *Procházení po cest není bezpené, kdykoli jsou borvky podél cesty jsou zralé a v oblasti byli pozorováni králíci.*

Problem 7. Formalizujte následující vlastnosti matematických objekt ve výrokové logice:
(a) Pro pevn daný (konený) graf G, e má perfektní párování.
(b) Pro pevn danou ásten uspoádanou mnoinu, e je totáln (lineárn) uspoádaná.
(c) Pro pevn danou ásten uspoádanou mnoinu, e má nejmení prvek.

Problem 8. Pro následující výroky nakreslete strom výroku, a najdte mnoinu model:
(a) $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \land \neg q)$ (b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \lor q) \to (p \land q))$

K zamylení

Problem 9. Pipomete si definici *stromu výroku.*
(a) Dokate podrobn, e kadý výrok má jednoznan urený strom.
(b) Platilo by to, i kdybychom v definici výroku nahradili symboly '(', ')' symbolem '|'?
(c) Co by se stalo, pokud bychom závorky vbec nepsali?