

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům syntaxe výrokové logiky (jazyk, prvovýrok, výrok, strom výroku, podvýrok, teorie), umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům model, důsledek teorie, umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí formalizovat daný systém (slovní/výpočetní úlohu, apod.) ve výrokové logice
- umí najít modely dané teorie
- umí rozhodnout, zda je daný výrok důsledkem dané teorie
- má zkušenost s použitím (s pomocí instruktora) tablo metody a rezoluční metody k důkazu vlastností daného systému (např. k řešení slovní úlohy)

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře: červené, modré, a zelené. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “Cesta ven je za těmito dveřmi.”
- Modré dveře: “Cesta ven není za těmito dveřmi.”
- Zelené dveře: “Cesta ven není za modrými dveřmi.”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Kudy vede cesta ven?

- Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků)  $\mathbb{P}$ .
- Formalizujte všechny znalosti jako teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . (Pozor: Axiomy nejsou nápisy na dveřích, ty nemusí být pravdivé.)
- Najděte všechny modely teorie  $T$ .
- Formalizujte tvrzení “Cesta ven je za červenými/modrými/zelenými dveřmi” jako výroky  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nad  $\mathbb{P}$ . Je některý z těchto výroků důsledkem  $T$ ?
- Vyzkoušejte si použití tablo metody: Zkonstruuje tablo z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi_i$  v kořeni, budou všechny větve sporné? (Pokuste se vymyslet správné kroky konstrukce tabla, inspirujte se příkladem z přednášky.)
- Vyzkoušejte si použití rezoluční metody: Převeďte axiomy teorie  $T$ , a také výrok  $\neg\varphi_i$ , do konjunktivní normální formy (CNF). Pokuste se sestavit rezoluční zamítnutí, zakreslete ho ve formě rezolučního stromu. (Pozor: Nezapomeňte znegovat dokazovaný výrok  $\varphi_i$ .)

**Řešení.** (a) Přirozenou volbou je jazyk  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ , kde  $p_i$  znamená ‘za  $i$ -tými dveřmi je cesta ven’, kde dveře vezmeme v pořadí červené, modré, zelené jako v zadání. (Také bychom mohli použít ‘za  $i$ -tými dveřmi je drak’ nebo ‘nápis na  $i$ -tých dveřích je pravdivý’. Důležité je, aby zvolený jazyk byl co nejmenší. Máme-li  $p_i$ , můžeme např. ‘za  $i$ -tými dveřmi je drak’ vyjádřit jako ‘ $\neg p_i$ ’, nepotřebujeme další prvovýrok. Dále chceme, aby šlo vlastnosti ze zadání formalizovat co nejsnáze.)

- Ze zadání chápeme, že ‘je drak’ znamená totéž, co ‘není cesta ven’. To, že cesta ven je za právě jedněmi dveřmi, vyjádříme tak, že řekneme, že je za alespoň jedněmi dveřmi, a pro každou dvojici dveří alespoň za jedněmi není:

$$\alpha_1 = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

Nyní k nápisům na dveřích, nejprve formalizujeme jejich význam:

- Červené dveře: “ $p_1$ ”
- Modré dveře: “ $\neg p_2$ ”
- Zelené dveře: “ $\neg p_3$ ”

Alespoň jeden z těchto nápisů je pravdivý:  $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_2$ , zjednodušíme na

$$\alpha_2 = p_1 \vee \neg p_2$$

Podobně to, že alespoň jeden z nápisů je lživý, formalizujeme jako  $\neg p_1 \vee \neg \neg p_2 \vee \neg \neg p_2$ , po zjednodušení (rozmyslete si, proč jde o ekvivalentní výrok):

$$\alpha_3 = \neg p_1 \vee p_2$$

Výsledná teorie je tedy:

$$\begin{aligned} T &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ &= \{(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3), p_1 \vee \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\} \end{aligned}$$

- (c) Později se naučíme hledat modely pomocí tablo metody, zatím ale ‘neefektivní’ postup: Nejprve najdeme modely jednoho z axiomů. Protože první axiom je poměrně složitý, možná bude lepší začít axiomem  $\alpha_2$ . (V principu bychom mohli vyzkoušet postupně všech 8 modelů jazyka  $\mathbb{P}$ , a pro každý z nich spočítat pravdivostní hodnotu  $\alpha_2$ .) Dostáváme:

$$M_{\mathbb{P}}(\alpha_2) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

Nyní zjistíme, ve kterých z těchto modelů platí axiom  $\alpha_3$ :

$$M_{\mathbb{P}}(\alpha_2, \alpha_3) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

A nakonec ověříme platnost  $\alpha_1$  v každém z těchto 4 modelů:

$$M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{(0, 0, 1)\}$$

- (d) Při naší volbě jazyka  $\mathbb{P}$  je formalizace jednoduchá:  $\varphi_1 = p_1$ ,  $\varphi_2 = p_2$ ,  $\varphi_3 = p_3$ . Být důsledkem teorie  $T$  znamená platit v každém modelu  $T$  (pozor, v každém, ne ‘v nějakém modelu’, to je častá chyba). V našem případě má  $T$  jen jeden model, ihned vidíme, že v něm platí  $\varphi_3$  a neplatí  $\varphi_1$  ani  $\varphi_2$ . Důsledkem  $T$  je tedy z těchto tří jen  $\varphi_3$ .
- (e) Při použití tablo metody postupujeme stejně jako v úvodní kapitole skript (Sekce 1.1.5). Abychom dokázali, že v  $T$  platí  $\varphi_3$ , sestrojíme tablo z teorie  $T$ , kde do kořene dáme předpoklad  $Fp_3$ , neboť dokazujeme sporem ( $F$  znamená ‘False’,  $T$  znamená ‘True’).

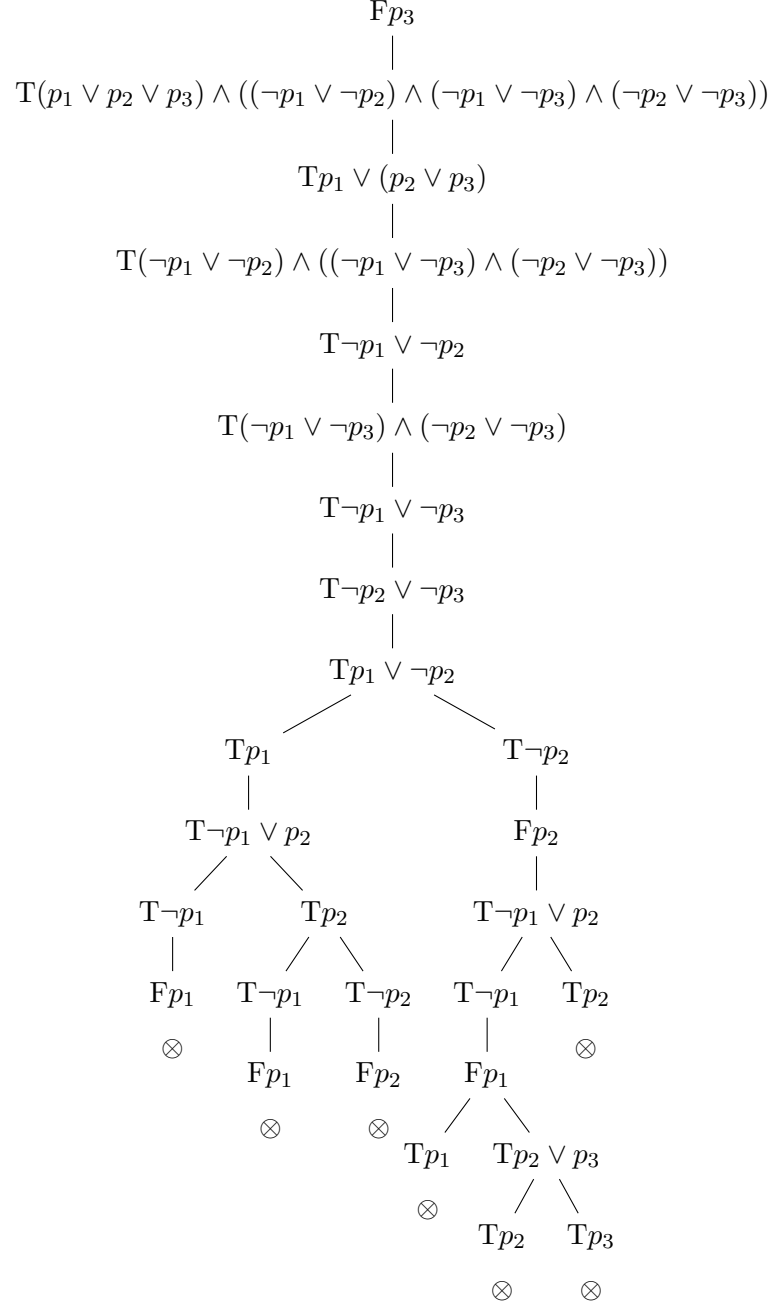
Připomeňme, že tablo rozvíjíme připojováním předpokladů o platnosti axiomů  $T\alpha_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) a redukcí položek (připojením příslušných atomických tabel). Pořadí, v jakém to děláme, může značně ovlivnit velikost výsledného tablo důkazu. Dobré je nejprve redukovat položky, jejichž atomická tabla se nevětví, nebo větví, ale některá z větví se ihned stane spornou. Axiomy připojujeme až když jsou potřeba. Často je dobré si rozmyslet, jak bychom v důkazu postupovali my, a podle toho budovat i tablo.

Všimněte si také, že nedefinujeme atomická tabla pro konjunkce resp. disjunkce tří a více výroků. (Chceme, aby kroky algoritmu byly co nejjednodušší.) Proto např. v  $Tp_1 \vee p_2 \vee p_3$  si nejprve představíme vynechané závorky,  $Tp_1 \vee (p_2 \vee p_3)$ , a potom redukuje ve dvou krocích připojením  $Tp_1$  a  $Tp_2 \vee p_3$ :

$$\begin{array}{ccc} & Tp_1 \vee (p_2 \vee p_3) & \\ / & & \backslash \\ Tp_1 & & Tp_2 \vee p_3 \\ & / & \backslash \\ & Tp_2 & Tp_3 \end{array}$$

(Ještě poznamenejme, že z hlediska tablo metody by bylo trochu lepší mít místo axiomu  $\alpha_1$  čtyři samostatné výroky, jichž je konjunkcí. Tím by se konstrukce tabla zkrátila. Algoritmus si ale poradí s jakkoliv složitými axiomy.)

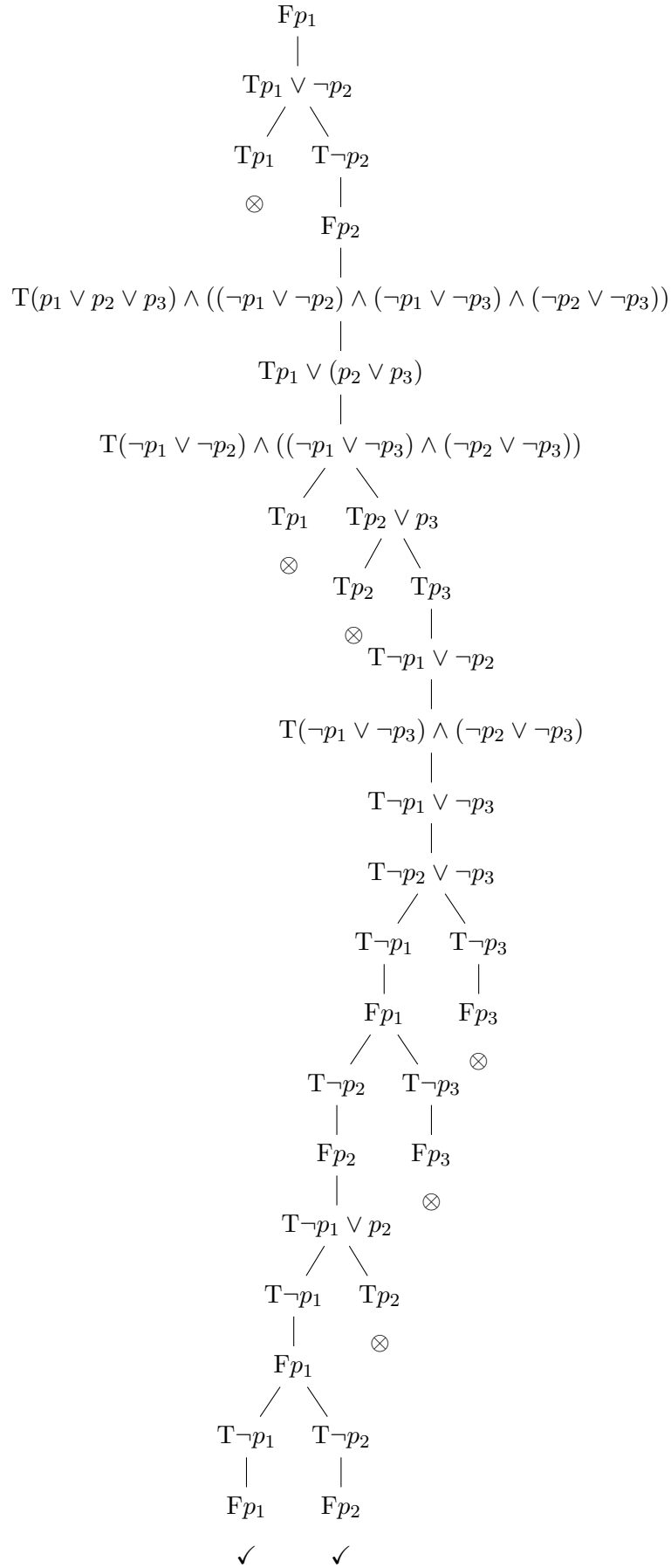
Zde je jeden z možných tablo důkazů ( $\oplus$  označuje spornou větev,  $\checkmark$  dokončenou bezespornou). Na první pohled může vypadat složitě, ve skutečnosti ale provádíme jednoduchý algoritmus. Rozmyslete si, odkud se vzaly jednotlivé položky, a kde vidíme atomická tabla:



Co kdybychom zkusili z teorie  $T$  dokázat  $p_1$ , nebo  $p_2$ ? Ukážeme pro  $p_1$  (pro  $p_2$  si zkuste sami). Do kořene dáme položku  $Fp_1$ . Postupujeme obdobně, ale alespoň jedna z větví bude i

po dokončení (připojení všech axiomů a redukce všech položek) bezesporná. Z bezesporných větví lze potom vyčíst protipříklad (model teorie  $T$ , ve kterém  $p_1$  neplatí).

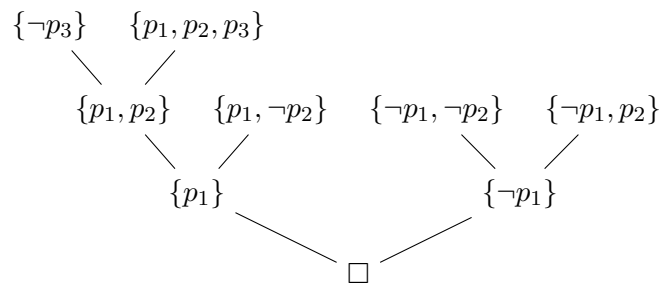
Níže je sestavené dokončené tablo. Ověřte, že jsou použity všechny axiomy a zredukovány všechny položky. Dostáváme dvě dokončené bezesporné větve. Podíváme se na předpoklady o prvovýrocích, které na nich najdeme: Pro obě jsou to  $Fp_1, Fp_2, Tp_3$ . To odpovídá modelu  $(0, 0, 1)$ , což je opravdu protipříklad: model teorie  $T$ , ve kterém neplatí  $p_1$ .



- (f) Při použití rezoluční metody postupujeme stejně jako v úvodní kapitole skript, v Sekci 1.1.6. Abychom dokázali, že v  $T$  platí  $p_3$ , přidáme k teorii  $T$  jako axiom výrok  $\neg p_3$ . Máme tedy  $T' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg p_3\}$ . Pomocí ekvivalentních úprav převedeme do CNF (vyjádříme jako konjunktci klauzulí, tj. disjunkcí literálů), v našem případě všechny axiomy už v CNF jsou ( $\alpha_1$  je konjunktce tří klauzulí, ostatní jsou klauzulemi). Výsledná CNF formule v množinovém zápisu (pro přehlednost je dobré zapisovat literály v pevném pořadí):

$$S = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_3\}, \{\neg p_2, \neg p_3\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_3\}\}$$

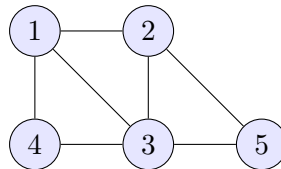
Nyní sestojíme rezoluční zamítnutí. Jak vybírat jednotlivé rezoluční kroky? Dobrou heuristikou je fakt, že kratší klauzule obsahuje více informací. Snažíme se tedy začít od nejkratších klauzulí, zde  $\{\neg p_3\}$ , a sledujeme, kde bychom mohli použít nově odvozené ('naučené') klauzule. Klauzule je často potřeba použít opakovaně. Zde je jedno z možných rezolučních zamítnutí, zakreslené ve formě rezolučního stromu:



Ověřte, že všechny listy jsou klauzule z  $S$  a všechny vnitřní vrcholy vznikly rezolucí ze svých synů. Rezoluční důkaz budeme definovat jako posloupnost klauzulí (kde klauzule jsou buď axiomy, nebo rezolventy předchozích). Takových posloupností odpovídajících našemu stromu je více, zde je jedna z možných:

$$\{\neg p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1\}, \square$$

**Příklad 2.** Uvažme vrcholové pokrytí (vertex cover) následujícího grafu:



Chceme pro dané  $k > 0$  zjistit, zda má tento graf nejvýše  $k$ -prvkové vrcholové pokrytí.

- Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků)  $\mathbb{P}$ .
- Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše  $k$ -prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené  $k$ . Označme výslednou teorii jako  $VC_k$ .
- Ukažte, že  $VC_2$  nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
- Uměli byste k tomu využít tablo metodu? Rozmyslete si postup.
- Uměli byste k tomu využít rezoluční metodu? Rozmyslete si postup.
- Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

**Řešení.** Vrcholové pokrytí je množina vrcholů  $C$  obsahující alespoň jeden vrchol z každé hrany.

- (a) Přírozenou volbou je jeden prvovýrok  $p_v$  pro každý vrchol  $v \in V$ , který popisuje, zda je  $v \in C$ . Máme tedy  $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ .

- (b) Nejprve formalizujeme, že jde o vrcholové pokrytí (libovolné velikosti). Pro každou hranu  $\{u, v\} \in E$  vyjádříme, že  $u$  nebo  $v$  musí být v  $C$ . Máme tedy teorii popisující všechna vrcholová pokrytí:

$$VC = \{p_u \vee p_v \mid \{u, v\} \in E, u < v\}$$

Zbývá vyjádřit, že platí nejvýše  $k$  prvovýroků, což zapíšeme jako disjunkce negací přes všechny  $k + 1$ -prvkové podmnožiny vrcholů:

$$S_{\leq k} = \left\{ \bigvee_{v \in I} \neg p_v \mid I \subseteq V, |I| = k + 1 \right\}$$

Výsledná teorie tedy bude  $VC_k = VC \cup S_{\leq k}$ .

- (c) Pro přehlednost zde vypíšeme všechny axiomy teorie  $VC_2$  (byť to dělat nemusíme):

$$\begin{aligned} VC_2 = & \{p_1 \vee p_2, p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_4, p_3 \vee p_5, \\ & \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \\ & \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5\} \end{aligned}$$

Použijeme-li ‘neefektivní’ postup, můžeme si například všimnout, že:

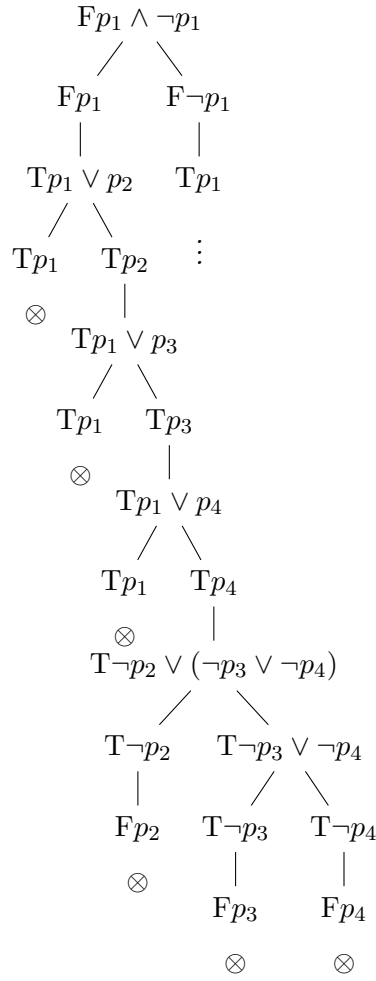
$$\begin{aligned} M(p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_3 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) &= \{(0, a, 1, 1, b), (1, a, 0, 1, b), (1, a, 1, 0, b) \mid a, b \in \{0, 1\}\} \\ M(p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) &= \{(a, 0, 1, b, 1), (a, 1, 0, b, 1), (a, 1, 1, b, 0) \mid a, b \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

Jde o 2-prvková vrcholová pokrytí podgrafů  $\{1, 3, 4\}$  a  $\{2, 3, 5\}$ . Průnik těchto množin je

$$\{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0)\}$$

Žádný z těchto modelů ale nesplňuje ostatní axiomy, např. v prvním neplatí  $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$ .

- (d) Tablo metodu použijeme k důkazu, že v teorii  $VC_2$  platí spor, tj. výrok  $p_1 \wedge \neg p_1$ . Ten vložíme do kořene s příznakem F (‘False’), tj. dokazujeme spor, sporem. Ukážeme jen část konstrukce (levou větev).



(Alternativně bychom mohli použít tablo metodu adaptovanou přímo na hledání modelů, do kořene dát platnost prvního axiomu, a rozvíjet tablo za přidávání předpokladů platnosti ostatních axiomů: každý model musí souhlasit s některou větví, všechny nám ale vyjdou sporné.)

- (e) Všechny axiomy už jsou v CNF. Stačí najít rezoluční zamítnutí teorie  $VC_2$  (tedy rezoluční důkaz prázdné klauzule  $\square$ ), z toho plyne, že  $VC_2$  nemůže mít model. Nakreslíme jen (jeden možný) rezoluční strom:





- (c) *Procházet se podél cesty není bezpečné, ale v oblasti nebyli pozorováni králíčky a borůvky podél cesty jsou zralé.*
- (d) *Aby bylo procházení po cestě bezpečné, je nezbytné, ale nedostačující, aby borůvky podél cesty nebyly zralé a králíčky nebyli v oblasti pozorováni.*
- (e) *Procházení po cestě není bezpečné, kdykoli jsou borůvky podél cesty jsou zralé a v oblasti byli pozorováni králíčky.*

**Příklad 7.** Formalizujte následující vlastnosti matematických objektů ve výrokové logice:

- (a) Pro pevně daný (konečný) graf  $G$ , že má perfektní párování.
- (b) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že je totálně (lineárně) uspořádaná.
- (c) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že má nejmenší prvek.

**Příklad 8.** Pro následující výroky nakreslete strom výroku, a najděte množinu modelů:

- (a)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- (b)  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$

#### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Připomeňte si definici *stromu výroku*.

- (a) Dokažte podrobně, že každý výrok má jednoznačně určený strom.
- (b) Platilo by to, i kdybychom v definici výroku nahradili symboly ‘(’, ‘)’ symbolem ‘|’?
- (c) Co by se stalo, pokud bychom závorky vůbec nepsali?