

Třetí přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Program

- problém splnitelnosti, SAT solvery
- 2-SAT a implikační graf
- Horn-SAT a jednotková propagace
- algoritmus DPLL
- úvod do tablo metody

Materiály

Zápisky z přednášky, Kapitola 3, Sekce 4.1-4.2 z Kapitoly 4

KAPITOLA 3: PROBLÉM SPLNITELNOSTI

Problém splnitelnosti Booleovských formulí

Problém SAT:

- vstup: výrok φ v CNF
- otázka: je φ splnitelný?

univerzální problém: každou teorii nad konečným jazykem lze převést do CNF

Cook-Levinova věta: SAT je NP-úplný (důkaz: formalizuj výpočet nedeterministického Turingova stroje ve výrokové logice)

ale některé *fragmenty* jsou v P, efektivně řešitelné, např. 2-SAT a Horn-SAT (viz Sekce 3.2 a 3.3)

praktický problém: moderní *SAT solvery* (viz Sekce 3.1) se používají v řadě odvětví aplikované informatiky, poradí si s obrovskými instancemi

3.1 SAT solvery

- existují od 60. let 20. století, v 21. století dramatický rozvoj dnes až 10^8 proměnných, viz www.satcompetition.org.
- nejčastěji založeny na jednoduchém **algoritmu DPLL** (viz Sekce 3.4), umí i najít řešení (model)
- různá rozšíření, zejména **Conflict-driven clause learning (CDCL)**
- řada technologií pro efektivnější řešení instancí pocházejících z různých aplikačních domén, heuristiky pro řízení prohledávání (za použití ML, NN) — desítky tisíc řádků kódu

Praktická ukázka: boardomino

Lze pokrýt šachovnici s chybějícími dvěma protilehlými rohy perfektně pokrýt kostkami domina?

těžká instance SATu (proč?), jak zakódovat?

řešič **Glucose**, formát vstupu: **DIMACS CNF**

3.2 2-SAT a implikační graf

2-SAT vs. 3-SAT

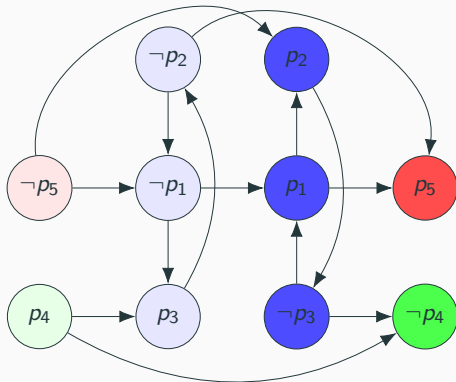
- **k -CNF**: CNF a každá klauzule nejvýše k literálů
- **k -SAT**: je daný k -CNF výrok splnitelný?
- k -SAT je NP-úplný pro $k \geq 3$ (ke každému výroku lze sestrojit **ekvisplnitelný** 3-CNF výrok)
- ale 2-SAT je v P, dokonce řešitelný v lineárním čase
- algoritmus využívá tzv. **implikační graf**:
 - 2-klauzule $p \vee q$ je ekvivalentní $\neg p \rightarrow q$ a také $\neg q \rightarrow p$
 - $p \sim p \vee p$ je ekvivalentní $\neg p \rightarrow p$
 - vrcholy jsou literály
 - hrany dané implikacemi
 - **myšlenka**: ohodnotíme-li vrchol 1, všude kam se dostaneme po hranách (**komponenta** silné souvislosti) musí být také 1

Implikační graf

$$V(\mathcal{G}_\varphi) = \{p, \neg p \mid p \in \text{Var}(\varphi)\},$$

$$E(\mathcal{G}_\varphi) = \{(\overline{\ell_1}, \ell_2), (\overline{\ell_2}, \ell_1) \mid \ell_1 \vee \ell_2 \text{ je klauzule } \varphi\} \cup \\ \{(\overline{\ell}, \ell) \mid \ell \text{ je jednotková klauzule } \varphi\}$$

$$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_5) \wedge (p_2 \vee p_5) \wedge p_1 \wedge \neg p_4$$

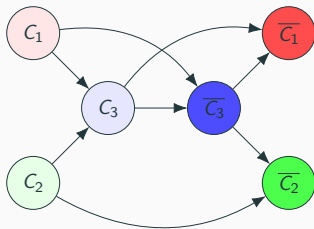


- najdeme komponenty silné souvislosti
- literály v komponentě musí být ohodnoceny stejně (jinak “ $1 \rightarrow 0$ ”)
- pokud má nějaká komponenta opačné literály, je φ nesplnitelný
- jinak sestrojíme model

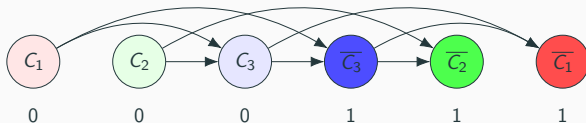
Konstrukce modelu

Všimněte si: stačí, aby z žádné komponenty ohodnocené 1 nevedla hrana do komponenty ohodnocené 0

provedeme **kontrakci komponent**, výsledný graf \mathcal{G}_φ^* je **acyklický**



najdeme nějaké **topologické uspořádání**; v něm najdeme nejlevější dosud neohodnocenou komponentu, ohodnotíme ji 0, opačnou komponentu ohodnotíme 1, a opakujeme



Tvrzení: φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v \mathcal{G}_φ neobsahuje dvojici opačných literálů.

Důkaz: \Rightarrow literály v komponentě musí být ohodnoceny stejně

\Leftarrow ohodnocení zkonstruované výše je model φ :

- **jednotková** klauzule ℓ platí kvůli hraně $\bar{\ell} \rightarrow \ell$, komponenta s $\bar{\ell}$ byla ohodnocena dříve, a to 0, takže $v(\ell) = 1$
- podobně pro **2-klauzuli** $\ell_1 \vee \ell_2$, máme hrany $\bar{\ell}_1 \rightarrow \ell_2$, $\bar{\ell}_2 \rightarrow \ell_1$ pokud jsme ℓ_1 ohodnotili dříve než ℓ_2 , museli jsme jako první narazit na komponentu s $\bar{\ell}_1$ a ohodnotit ji 0, tedy ℓ_1 platí; v opačném případě symetricky platí ℓ_2 □

Důsledek: 2-SAT je řešitelný v lineárním čase, včetně konstrukce modelu (pokud existuje).

Důkaz: Komponenty silné souvislosti i topologické uspořádání najdeme v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, stačí je projít jednou □

3.3 Horn-SAT a jednotková propagace

- **hornovská klauzule**: nejvýše jeden **pozitivní** literál

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

základ logického programování (Prolog $q:-p_1,p_2,\dots,pn.$)

- **Horn-SAT**, tj. splnitelnost **hornovského** výroku (konjunkce hornovských klauzulí) je opět v P, v lineárním čase
- algoritmus využívá tzv. **jednotkovou propagaci**:
 - jednotková klauzule vynucuje hodnotu výrokové proměnné
 - tím můžeme výrok zjednodušit, např. pro $\neg p$ ($p = 0$):
odstraníme klauzule s literálem $\neg p$, už jsou splněné
odstraníme literál p (nemůže být splněný)
 - žádná jednotková klauzule \Rightarrow každá klauzule má **aspoň jeden negativní literál** \Rightarrow vše nastavíme na 0

Jednotková propagace

$$\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_4) \wedge p_4$$

- nastav $v(p_4) = 1$, odstraň klauzule obsahující literál p_4 , z ostatních klauzulí odstraň $\neg p_4$

$$\varphi^{p_4} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \neg p_5$$

- nastav $v(p_5) = 0$, proved' jednotkovou propagaci $\neg p_5$

$$(\varphi^{p_4})^{\neg p_5} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

- už žádná jednotková klauzule, v každé klauzuli alespoň dva literály ale **nejvýše jeden pozitivní, tj. alespoň jeden negativní**:
 $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, model $v = (0, 0, 0, 1, 0)$

$$\varphi^\ell = \{C \setminus \{\bar{\ell}\} \mid C \in \varphi, \ell \notin C\} \quad (\text{množinový zápis})$$

Pozorování: φ^ℓ neobsahuje ℓ ani $\bar{\ell}$, modely = modely φ splňující ℓ

$\psi = p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$ je nespílitelný, co se stane?

Algoritmus pro Horn-SAT

vstup: výrok φ v Hornově tvaru,

výstup: model φ nebo informace, že φ není splnitelný

1. Pokud φ obsahuje dvojici opačných jednotkových klauzulí $\ell, \bar{\ell}$, není splnitelný.
2. Pokud φ neobsahuje žádnou jednotkovou klauzuli, je splnitelný, ohodnoť všechny zbývající proměnné 0.
3. Pokud φ obsahuje jednotkovou klauzuli ℓ , ohodnoť literál ℓ hodnotou 1, proveď jednotkovou propagaci, nahraď φ výrokem φ^ℓ , a vrať se na začátek.

Tvrzení: Algoritmus je korektní.

Důsledek: Horn-SAT lze řešit v lineárním čase.

Důkaz: Korektnost plyne z pozorování a z diskuze. V každém kroku stačí projít, výrok zkrátíme (kvadratický horní odhad, ale při vhodné implementaci lineární)



3.4 Algorithmus DPLL

Algoritmus DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland, 1961)

myšlenka: čistý výskyt p buď jen v pozitivních nebo jen v negativních literálech \Rightarrow lze mu nastavit příslušnou hodnotu!

DPLL = jednotková propagace + čistý výskyt + větvení (rekurze)

vstup: výrok φ v CNF,

výstup: model φ nebo informace, že φ není splnitelný

1. Dokud φ obsahuje jednotkovou klauzuli ℓ , ohodnoť literál ℓ hodnotou 1, proved' **jednotkovou propagaci**, nahraď φ výrokem φ^ℓ .
2. Dokud existuje literál ℓ , který má ve φ **čistý výskyt**, ohodnoť ℓ hodnotou 1, a odstraň klauzule obsahující ℓ .
3. Pokud φ neobsahuje žádnou klauzuli, je splnitelný.
4. Pokud φ obsahuje prázdnou klauzuli, není splnitelný.
5. Jinak zvol dosud neohodnocenou výrokovou proměnnou p , a **zavolej algoritmus rekurzivně** na $\varphi \wedge p$ a na $\varphi \wedge \neg p$.

Ukázkový běh

$$\begin{aligned} &(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge \\ &(q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \end{aligned}$$

žádná jednotková klauzule, $\neg r$ má **čistý výskyt**: nastav $v(r) = 0$ a odstraň klauzule obsahující $\neg r$:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$$

už žádný čistý výskyt, rekursivně zavolej na:

1. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge p$
2. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge \neg p$

a pokračuj dále v obou větvích výpočtu

\vdots

1. větev dává $(1, 0, 0, 1)$ a $(1, 1, 0, 0)$, 2. je sporná. Modelem je také $(1, 1, 1, 0)$, ten ztratíme nastavením $v(r) = 0$. **Odstranění čistého výskytu zachová splnitelnost, ne všechny modely.**

KAPITOLA 4: METODA ANALYTICKÉHO TABLA

4.1 Formální dokazovací systémy

Formální dokazovací systém

chceme zjistit, zda výrok platí $[T \models \varphi]$, a to čistě syntakticky, aniž bychom se zabývali sémantikou: najít **(formální) důkaz** $[T \vdash \varphi]$

důkaz je konečný syntaktický objekt vycházející z φ a axiomů T
dokazování lze dělat **algoritmicky** (pokud máme algoritmický přístup k axiomům T , která může být nekonečná), a lze rychle algoritmicky **ověřit**, zda je daný objekt opravdu korektní důkaz

- **korektnost**: “co dokážu, platí”

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$$

- **úplnost**: “dokážu vše, co platí”

$$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

(korektnost je nutná, úplnost ne: rychlý dokazovací systém může být praktický i když není úplný)

ukážeme si: *tablo metodu*, *hilbertovský kalkulus*, *rezoluční metodu*

nutný předpoklad: **jazyk musí být spočetný** (potom i T je spočetná)

4.2 Úvod do tablo metody

Tablo metoda neformálně

nejprve případ $T = \emptyset$, tedy dokazujeme, že φ platí v *logice*

tablo je strom představující **hledání protipříkladu** (modelu $v \models \varphi$),
když všechny větve **selžou**, máme důkaz (sporem)

labels: **položky** $T\psi, F\psi$ (určují, zda na dané větvi platí výrok ψ)

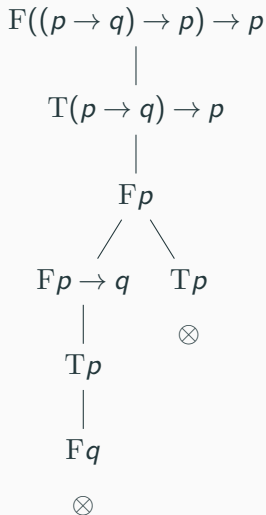
kořen $F\varphi$, dále rozvíjíme **redukcí** položek (podle struktury výroků v nich), aby platil **invariant**:

Každý model, který se *shoduje* s položkou v kořeni (tj. ve kterém neplatí φ), se musí *shodovat* i s některou větví tabla (tj. splňovat všechny požadavky vyjádřené položkami na této větvi).

je-li na větvi $T\psi$ a zároveň $F\psi$, potom **selhala** (je **sporná**), pokud všechny větve selhaly, je tablo **sporné**, je to **důkaz** $T \vdash \varphi$

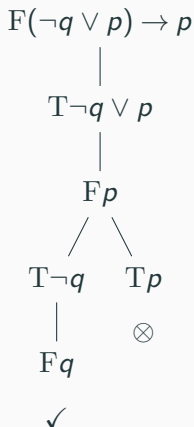
pokud nějaká větev neselhala a je **dokončená** (vše na ní zredukováno), lze z ní zkonstruovat model, ve kterém φ neplatí

Příklad: tablo důkaz $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$



- **důkaz sporem**: v kořeni příznak F
- redukuje položku tvaru $F\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$:
- pokud $v \not\models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, nutně $v \models \varphi_1$ a zároveň $v \not\models \varphi_2$
- proto na větev připojíme položky $T(p \rightarrow q) \rightarrow p$ a Fp , invariant platí
- redukce položky $T(p \rightarrow q) \rightarrow p$: model se shoduje s $F(p \rightarrow q)$ nebo s Tp , **rozvětví!**
- redukce $F(p \rightarrow q)$: připoj Tp a Fq
- všechny větve sporné, protipříklad neexistuje, tedy máme tablo důkaz, píšeme: $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Příklad: tablo pro $F(\neg q \vee p) \rightarrow p$



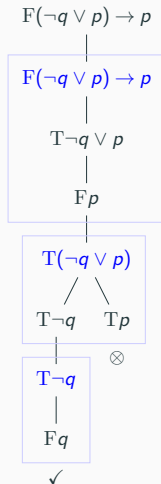
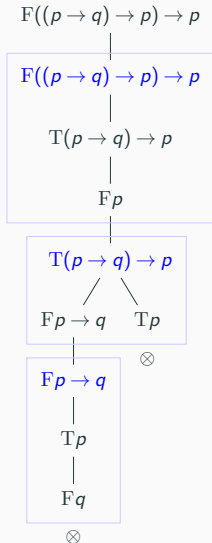
- tablo je dokončené, ale není sporné
- tedy nejde o důkaz
- levá větev dává protipříklad: model $v = (0, 0)$ ve kterém výrok neplatí
- invariant říká, že existuje-li protipříklad, shoduje se s některou větví
- tato větev nemůže být sporná
- tak se dokáže **korektnost** tablo metody

- Jak redukuje položky?
 - Připojíme příslušné **atomické tablo** (viz následující slide) na konec všech bezesporných větví procházejících vrcholem.
- Co když dokazujeme v nějaké teorii T ?
 - Připojíme položky $T\alpha$ pro (všechny) axiomy $\alpha \in T$.
- Co když je T nekonečná?
 - Tablo může být nekonečné.
 - Ale vyjde-li sporné, lze sestavit jiné, které je konečné a také sporné. (“Existuje-li důkaz, existuje konečný důkaz.”)

Atomická tabla

	\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
True	$\begin{array}{c} T\neg\varphi \\ \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} T\varphi \wedge \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \vee \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \rightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ T\psi & F\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F\neg\varphi \\ \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \wedge \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \vee \psi \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \rightarrow \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ F\psi & T\psi \end{array}$

Konstrukce tabel z příkladů



konvence: kořeny atomických tabel (**modře**) nezakresluje

- **strom** je $T \neq \emptyset$ s částečným uspořádáním $<_T$, které má nejmenší prvek (**kořen**) a množina předků libovolného vrcholu je **dobře uspořádaná** (každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek, to zakáže nekonečné klesající řetězce předků)
- **větev** je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T .
- **uspořádaný strom** má navíc lineární uspořádání $<_L$ množiny synů každého vrcholu (říkáme mu **pravolevé**, $<_T$ je **stromové**)
- **označkový strom** má navíc funkci label: $T \rightarrow \text{Labels}$

Königovo lemma: Nekonečný, konečně větvící strom má nekonečnou větev.