

**Teaching goals:** After completing, the student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladech
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Jsou následující formule variantami formule  $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$ ?

- (a)  $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
- (b)  $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
- (c)  $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

**Solution.** Označme  $\psi = (x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$ , formule je tedy  $(\forall x)\psi$ .

- (a) Ne,  $z$  není substituovatelná za  $x$  do  $\psi$ : vznikl by nový vázaný výskyt.
- (b) Ne,  $y$  má volný výskyt v  $\psi$ .
- (c) Ano,  $u$  je nová proměnná: v takovém případě lze variantu udělat vždy.

**Problem 2.** Mějme strukturu  $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \triangleright^A)$  v jazyce s jediným binárním relačním symbolem  $\triangleright$ , kde  $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$ .

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v  $\mathcal{A}$ ?

II. Pro každou z nich najděte strukturu  $\mathcal{B}$  (existuje-li) takovou, že  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

- (a)  $x \triangleright y$
- (b)  $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$
- (c)  $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
- (d)  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
- (e)  $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

**Solution.** Struktury si můžeme představit jako orientované hrany.

- (a) I. Ne, intuitivně formule vyjadřuje, že relace  $\triangleright^A$  obsahuje všechny dvojice (hrany), z definice  $\text{PH}^A(x \triangleright y)[e] = 0$  např. pro  $e(x) = a, e(y) = a$ .  
II. Např.  $\mathcal{B}_0 = (\{0\}; \triangleright^{\mathcal{B}_0})$  s  $\triangleright^{\mathcal{B}_0} = \{(0, 0)\}$ .

- (b) I. Ne, intuitivně graf nemá stok, z definice:  $\text{PH}^A(\varphi) = \max_{u \in A} \text{PH}^A((\forall y)(y \triangleright x))[e(x/u)] = \max_{u \in A} \min_{v \in A} \text{PH}^A(y \triangleright x)[e(x/u, y/v)] = 0$ , např. pro  $u = a$  můžeme vzít  $v = a$ .  
II. Např.  $\mathcal{B}_0$  jako výše.

- (c) I. Ano ( $x$  ohodnotte např. prvkem  $a$ ), antecedent není splněn pro žádné ohodnocení  $y$ , tedy implikace je vždy splněna.

II. Např.  $\mathcal{B}_1 = (\{0, 1\}; \triangleright^{\mathcal{B}_1})$  s  $\triangleright^{\mathcal{B}_1} = \{(0, 1)\}$ .

- (d) I. Ne, II: Např.  $\mathcal{B}_0$ .

(e) I. Ne, II: Např.  $\mathcal{B}_0$ .

**Problem 3.** Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu  $\mathcal{A}$ , formuli  $\varphi$ , a sentenci  $\psi$ ,

- (a)  $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (b)  $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (c)  $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
- (d)  $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí to i pro každou formuli  $\psi$  s volnou proměnnou  $x$ ? A pro každou formuli  $\psi$  ve které  $x$  není volná?

**Solution.** (a) Bylo by jednodušší využít tablo metodu, ale chceme procvičit sémantický důkaz. Intuitivně, protože je  $\psi$  sentence, ohodnocení  $x$  nehraje roli při výpočtu pravdivostní hodnoty  $\psi$ , tedy ekvivalence platí. Počítejme z definic:  $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi)$  platí právě když to platí při každém ohodnocení  $e : \text{Var} \rightarrow \mathcal{A}$ . Počítejme pravdivostní hodnotu. Využijeme faktu, že  $f_{\rightarrow}(a, b) = \max(1 - a, b)$ :

$$\begin{aligned} & \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \rightarrow (\exists x)\varphi)[e] \\ &= f_{\rightarrow}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a \in A} \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]) \end{aligned}$$

Podobně pro formuli na pravé straně:

$$\begin{aligned} & \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(\psi \rightarrow \varphi))[e] \\ &= \max_{a \in A} \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \rightarrow \varphi)[e(x/a)] \\ &= \max_{a \in A} (\max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \end{aligned}$$

Protože  $\psi$  je sentence, neobsahuje volný výskyt proměnné  $x$ , tedy  $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)] = \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e]$ . Z toho vidíme, že:

$$\begin{aligned} &= \max_{a \in A} (\max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a \in A} (\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \end{aligned}$$

Obě pravdivostní hodnoty jsou stejné, tedy ekvivalence platí. Pro tento argument stačí, aby  $x$  nebyla volná v  $\psi$ .

Pokud je  $x$  volná v  $\psi$ , tak ekvivalence neplatí. Např. v jazyce  $L = \langle c \rangle$  s rovností, kde  $c$  je konstantní symbol:

- $\varphi$  je  $\neg x = x$ ,
- $\psi$  je  $x = c$ ,
- $\mathcal{A} = (\{0, 1\}; 0)$  (tj.  $c^{\mathcal{A}} = 0$ ).

Máme  $\mathcal{A} \not\models (x = c \rightarrow (\exists x)\neg x = x)$ , protože to neplatí při ohodnocení  $e(x) = 0$ . Ale  $\mathcal{A} \models (\exists x)(x = c \rightarrow \neg x = x)$ , protože  $x$  lze ohodnotit prvkem 1, a antecedent není splněn.

(b), (c), (d) se vyřeší obdobně.

**Problem 4.** Rozhodněte, zda je  $T$  (v jazyce  $L = \langle U, f \rangle$  s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

- (a)  $T = \{U(f(x)), \neg x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (b)  $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (c)  $T = \{U(f(x)), \neg x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (d)  $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$

**Solution.** (a) Pozor, tato teorie je sporná. Uvědomte si, že  $\neg x = y$  je spor: neplatí v žádném modelu, protože neplatí při ohodnocení  $e(x) = a, e(y) = a$  pro libovolný prvek  $a \in A$ . (Je ekvivalentní svému generálnímu uzávěru  $(\forall x)(\forall y)\neg x = y$ .) Sporná teorie není kompletní, z definice, a všechny její extenze jsou také sporné, tedy nemá žádnou kompletní jednoduchou extenzi.

(b) Není kompletní. Neformálně,  $T$  říká, že model má právě dva prvky, a výstupy  $f^A$  musí být uvnitř  $U^A$ . Z toho víme, že  $U^A \neq \emptyset$ . Je-li jednoprvková, máme jediný model (až na izomorfismus), je-li dvouprvková, máme celkem tři navzájem neizomorfní (a také navzájem elementárně neekvivalentní) modely (kde  $f^A$  nemá pevný bod, má jeden pevný bod, nebo má dva pevné body, tj. je to identita):

- $\mathcal{A}_1 = (\{0, 1\}; U_1^A, f_1^A)$  kde  $U_1^A = \{0\}$  a  $f_1^A = \{(0, 0), (1, 0)\}$ , tj.  $f_1^A(0) = 0, f_1^A(1) = 0$
- $\mathcal{A}_2 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0)\})$ ,
- $\mathcal{A}_3 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 0)\})$ ,
- $\mathcal{A}_4 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1)\})$ .

(Nakreslete si obrázky!) Odpovídající kompletní jednoduché extenze lze zapsat jako  $\text{Th}(\mathcal{A}_i)$ , kde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Nebo:

- $T_1 = T \cup \{\neg(\forall x)U(x)\}$ ,
- $T_2 = T \cup \{U(x), \neg f(x) = x\}$ ,
- $T_3 = T \cup \{U(x), (\exists x)f(x) = x, (\exists x)\neg f(x) = x\}$ ,
- $T_4 = T \cup \{U(x), f(x) = x\}$ .

(c) Obdobně, vyjadřuje, že model má právě dva prvky, a  $f$  nemá žádný pevný bod. Je kompletní, jediný model až na izomorfismus je  $\mathcal{A}_2$ .

(d) Model má právě dva prvky, a  $f$  má alespoň jeden pevný bod. Není kompletní, její modely jsou až na izomorfismus  $\mathcal{A}_3$  a  $\mathcal{A}_4$ .

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 5.** Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převedte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a)  $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
- (b)  $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
- (c)  $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

**Problem 6.** Označme  $\varphi$  formulí  $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$ . Které z následujících termů jsou substituovatelné do  $\varphi$ ?

- (a) term  $z$  za proměnnou  $x$ , term  $y$  za proměnnou  $x$ ,
- (b) term  $z$  za proměnnou  $y$ , term  $g(f(y), w)$  za proměnnou  $y$ ,
- (c) term  $x$  za proměnnou  $z$ , term  $y$  za proměnnou  $z$ ,

**Problem 7.** Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

- (a)  $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

- (b)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
- (c)  $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
- (d)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
- (e)  $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

**Problem 8.** Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli  $\varphi$ . Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

- (a)  $\varphi \models (\forall x)\varphi$
- (b)  $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
- (c)  $\varphi \models (\exists x)\varphi$
- (d)  $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

#### FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 9.** Buď  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup  $T$  sestává z těchto axiomů:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ 0 + x &= x = x + 0 \\ x + (-x) &= 0 = (-x) + x \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v  $T$ . Zdůvodněte.

- (a)  $x + y = y + x$
- (b)  $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c)  $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d)  $-(x + y) = (-y) + (-x)$