NAIL062 P&P Logic: Worksheet 7 – Properties of structures and theories

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formáln definovat, uvést píklady
- rozumí pojmm [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i písluné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na píklad
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formáln definovat, uvést píklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestrojit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktue, umí najít definovatelné podmnoiny/relace

Píklady na cvienÍ

Problem 1. Uvame $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}; +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Urete vechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované njakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ jet njaké dalí podstruktury?
(d) Je kadá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je kadá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárn ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

Solution. *(a) Ano, lze ovit, e $\underline{\mathbb{Z}_4}$ spluje vechny axiomy teorie grup ($+$ je asociativní, 0 je neutrální vi $+$, $-x$ je inverzní prvek k x vi $+$ a 0).*
(b) $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 0\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0\}$ *(*triviální grupa*)*, $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 1\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4}\langle 3\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4}$, $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle 2\rangle = \underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0,2\}$ *(dvouprvková grupa* izomorfní *grup* $\underline{\mathbb{Z}_4}$*).*
(c) Ne, jakmile máme prvek 1 nebo 3, generovaná podstruktura u je celá $\underline{\mathbb{Z}_4}$.
(d) Ano, teorie grup je otevená*, proto podstruktury model (grup) jsou také modely (*podgrupy*).*
(e) Ne, jazyk teorie grup je s rovností, konená velikost modelu lze popsat sentencí, tedy rzn velké konené modely nemohou být elementárn ekvivalentní. Velikost ale nepotebujeme, staí nám "grupové vlasnosti", nap. sentence $(\forall x)x = 0$ odliíí triviální grupu $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0\}$ od dvouprvkové grupy $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0,2\}$ i od $\underline{\mathbb{Z}_4}$, a nap. $(\forall x)x + x = 0$ platí v $\underline{\mathbb{Z}_4} \restriction \{0,2\}$ ale ne v $\underline{\mathbb{Z}_4}$.

Problem 2. Bu $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ tleso racionálních ísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozíit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárn ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Ozname $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ mnoinu vech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

Solution. *(a) Ano, $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, 0\rangle$.*
(b) Ne, prvek 1 (interpretace symbolu 0 z jazyka teorie grup) není neutrální prvek vzhledem k operaci $\cdot$ (interpretaci symbolu $+$), protoe $1 \cdot 0 = 0 \neq 1$.
(c) Ano, nap. $\underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ *(*okruh celých ísel*), neplatí v nm existence inverzních prvk vi násobení pro vechny nenulové prvky, tj. sentence $(\forall x)(\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)x \cdot y = 1)$ (nap. íslo 2 nemá v celých íslech inverz, ale v racionálních ano, $\frac{1}{2}$). (Z toho plyne, e teorie tles neme být oteven axiomatizova[tel]ná, jinak by podstruktura tlesa musela být také tlesem.)*
(d) Ano, tzv. teorie struktury *je vdy kompletní: Pro kadou sentenci ψ platí, e $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \psi \Leftrightarrow \underline{\mathbb{Q}} \models \psi$, pokud to neplatí, máme $\underline{\mathbb{Q}} \models \neg\psi$ (je to* sentence*) tedy $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \neg\psi$.*

Problem 3. Mjme teorii $T = \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

(a) Je T kompletní?
(b) Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, a na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napite vechny kompletní a alespo ti nekompletní.
(c) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \lor x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Solution. *Teorie íká, e kadý prvek je jednou ze tí konstant. Ty ale nemusí být rzné. Nejprve najdme vechny modely a na izomorfismus, je jich pt (nakreslete si je):*

- $\mathcal{A}_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0 \rangle$ *(jednoprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_1} = c_2^{\mathcal{A}_1} = c_3^{\mathcal{A}_1} = 0$*)*
- $\mathcal{A}_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1 \rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_2} = c_2^{\mathcal{A}_2} \neq c_3^{\mathcal{A}_2}$*)*
- $\mathcal{A}_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1 \rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_3} \neq c_2^{\mathcal{A}_3} = c_3^{\mathcal{A}_3}$*)*
- $\mathcal{A}_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0 \rangle$ *(dvouprvkový model,* $c_1^{\mathcal{A}_4} = c_3^{\mathcal{A}_4} \neq c_2^{\mathcal{A}_4}$*)*
- $\mathcal{A}_5 = \langle \{0, 1, 2\}; 0, 1, 2 \rangle$ *(trojprvkový model, konstanty jsou rzné)*

(a) Není kompletní, nap. sentence $c_1 = c_2$ *je v* T *nezávislá: platí v* $\mathcal{A}_1$*, neplatí v* $\mathcal{A}_3$*. (Neboli, dle sémantického kritéria, modely* $\mathcal{A}_1$ *a* $\mathcal{A}_3$ *nejsou elementárn ekvivalentní).*

(b) Jednoduché extenze odpovídají podmnoinám $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}$*, je jich 32, kompletní odpovídají jednoprvkovým podmnoinám, je jich 5.*

Jednoduché extenze, které nejsou kompletní:

- T — *modely* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$
- $T \cup \{x = y \lor x = z\}$ — *modely* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$
- $T \cup \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y\}$ — *modely* $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$

  (Pozor: $(\exists x)(\exists y)\neg x = y \sim \neg(\forall x)(\forall y)x = y \not\sim \neg x = y \sim (\forall x)(\forall y)\neg x = y$*.)*

$\vdots$

- $\{x = x \land \neg x = x\}$ — *sporná teorie, nemá model*

Jednoduché kompletní extenze:

- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_1) \sim \{x = y\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_2) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, c_1 = c_2, \neg c_2 = c_3\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_3) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, \neg c_1 = c_2, c_2 = c_3\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_4) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \lor x = z, c_1 = c_3, \neg c_1 = c_2\}$
- $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_5) \sim \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3, \neg(c_1 = c_2 \lor c_1 = c_3 \lor c_2 = c_3)\}$

(c) Teorie navíc íká, e kadý prvek je bu interpretací symbolu c_1 *nebo* c_4*. Modely tedy mají nejvýe dva prvky, a na izomorfismus jsou to:*

- $\mathcal{A}'_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0, 0 \rangle$
- $\mathcal{A}'_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0, 1 \rangle$

Teorie T' *je extenzí* T*, platí v ní vechny dsledky teorie* T*, sémanticky: restrikce model* T' *na pvodní jazyk* L *jsou modely* T *(nap. restrikcí modelu* $\mathcal{A}'_1$ *na* L *je* $\mathcal{A}_1$*). Není to jednoduchá extenze, zvtili jsme jazyk.*

Není to ani konzervativní extenze, nap. sentence $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \lor x = z)$ *je sentence pvodního jazyka* L*, platí v* T' *ale neplatila v* T*. Sémanticky: (típrvkový) model* $\mathcal{A}_5$ *teorie* T *nelze expandovat do jazyka* L' *na model teorie* T'*, neboli restrikcí model* T' *na pvodní jazyk* L *nedostaneme vechny modely* T*.*

Problem 4. Bu T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Najdte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.
(a) $(-x) + x = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Solution. *Vimnte si, e axiomy teorie vyjadují existenci a jednoznanost pro definici funkního symbolu $-$, jde tedy o korektní extenzi o definice. Postupujeme dle (dkazu) tvrzení z pednáky:*
(a) $(\exists z)(x+z = 0 \wedge z+x = 0)$ *(Podformule $x+z = 0$ íká, e 'z je $-x$' a druhá, e '$(-x)+x = 0$'.)*
(b) Nejprve nahradíme definicí term $-y$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z < x)$$

Nyní relaní symbol $<$:

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z \leq z \wedge \neg(x + z = z))$$

(c) $(\exists u)(\exists v)((x + y) + u = 0 \wedge x + v = 0 \wedge u \leq v \wedge \neg u = v)$ *(Kde 'u je $-(x + y)$' a 'v je $-x$'.)*

Problem 5. Mjme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkní symbol. Najdte formule definující následující mnoiny (bez parametr):
(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných ísel
(b) mnoina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktue $\mathcal{A}$
(c) mnoina vech nejvýe jednoprvkových podmnoin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$
(d) mnoina vech prvoísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

Solution. *(a)* $(\exists y)F(y, y) = x \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ *(íslo x je tverec, a není to nula.)*
(b) $(\exists z)(F(x, y) = z \wedge (\forall u)F(z, u) = u)$ *(Souin je roven jedné.)*
(c) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = y$ *(Kdykoliv je mnoina sjednocením dvou mnoin, je rovna jedné z nich. A není prázdná.)*
(d) $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$ *(Kdykoliv je souin dvou ísel roven prvoíslu, je jedno z nich rovno prvoíslu, a prvoíslo není nula.)*

Dalí píklady k procviení

Problem 6. Bu $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relaní symbol a φ vyjaduje, e "existují práv tyi prvky".
(a) Uvame rozíení $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Urete poet (a na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.
(b) Má T njakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdvodnte.

Problem 7. Nech $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkní, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjaduje, e "existují práv 3 prvky".
(a) Urete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napite dv z nich. *(3b)*
(b) Nech $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výe. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uvete zdvodnní. *(2b)*

Problem 8. Mjme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$ s rovností a následující dv formule:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad P(x,y) \leftrightarrow R(x,y) \wedge \neg x = y \\ \psi: &\quad P(x,y) \rightarrow P(x, f(x,y)) \wedge P(f(x,y), y) \end{aligned}$$

Uvame následující L-teorii:

$$\begin{aligned} T = \{ &\varphi,\ \psi,\ \neg c = d, \\ &R(x,x), \\ &R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y, \\ &R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z), \\ &R(x,y) \vee R(y,x) \} \end{aligned}$$

(a) Naleznte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T.
(b) Je sentence $(\forall x) R(c,x)$ pravdivá/livá/nezávislá v T? Zdvodnte vechny ti odpovdi.
(c) Naleznte dv neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdvodnte, pro neexistují.
(d) Nech $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uvete zdvodnní.

K zamylení

Problem 9. Nech $T_n = \{\neg c_i = c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ oznauje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ s rovností, kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konené $k \geq 1$ urete poet k-prvkových model teorie T_n a na izomorfismus.
(b) Urete poet spoetných model teorie T_n a na izomorfismus.
(c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdvodnte.