Šestá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Šestá přednáška

Program

- sémantika predikátové logiky
- vlastnosti teorií
- podstruktura, expanze, redukt

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.4-6.6 z Kapitoly 6

6.4 Sémantika

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- hodnoty termů (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- hodnoty termů (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme pravdivostní hodnoty atomických formulí: je výsledná n-tice v relaci (interpretující daný relační symbol)?

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- hodnoty termů (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme pravdivostní hodnoty atomických formulí: je výsledná n-tice v relaci (interpretující daný relační symbol)?
- hodnoty složených formulí vyhodnocujeme také podle jejich stromu, přičemž $(\forall x)$ hraje roli 'konjunkce přes všechny prvky' a $(\exists y)$ hraje roli 'disjunkce přes všechny prvky' z domény struktury

Modely jazyka

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L.

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří:

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří:

- částečně uspořádané množiny $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří:

- částečně uspořádané množiny $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy teorie uspořádání

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, 'množina všech množin' neexistuje; třída je 'soubor' všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří:

- částečně uspořádané množiny $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy teorie uspořádání
- $\langle \mathbb{C}, R^{\mathbb{C}} \rangle$ kde $(z_1, z_2) \in R^{\mathbb{C}}$ právě když $|z_1| = |z_2|$ (není č. usp.)

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.
Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.
Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v t

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.
Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v t
- obecně, term t reprezentuje termovou funkci $f_t^{\mathcal{A}} \colon A^k \to A$, kde k je počet proměnných v t

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.
Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v t
- obecně, term t reprezentuje termovou funkci $f_t^{\mathcal{A}} \colon A^k \to A$, kde k je počet proměnných v t
- speciálně, hodnota konstantního termu na ohodnocení nezávisí, konstantní termy reprezentují konstantní funkce

Hodnota termu: příklady

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \bot) \wedge y$ v Booleově algebře $\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})}$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0, 1\}$
- $e(y) = \{1, 2\}$

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \perp) \wedge y$ v Booleově algebře $\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0,1,2\})}$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0,1\}$
- $e(y) = \{1,2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \bot) \wedge y$ v Booleově algebře $\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0,1,2\})}$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0,1\}$
- $e(y) = \{1,2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ jazyka $L = \langle +, 1 \rangle$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = 2$

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \bot) \wedge y$ v Booleově algebře $\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0,1,2\})}$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0,1\}$
- $e(y) = \{1,2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ jazyka $L = \langle +, 1 \rangle$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = 2$

$$(x+1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$$

Pravdivostní hodnota formule

Pravdivostní hodnota formule

Buď φ v jazyce L, $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L$, $e : \mathrm{Var} \to A$ ohodnocení proměnných.

Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

Pravdivostní hodnota formule

Buď φ v jazyce L, $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L$, $e : \mathrm{Var} \to A$ ohodnocení proměnných.
Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

- pro atomickou formuli $R(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \ldots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pravdivostní hodnota formule

Buď φ v jazyce L, $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L$, $e : \mathrm{Var} \to A$ ohodnocení proměnných. Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

- pro atomickou formuli $R(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \ldots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formuli tvaru $(\neg\varphi)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

Pravdivostní hodnota formule

Buď φ v jazyce L, $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L$, $e : \mathrm{Var} \to A$ ohodnocení proměnných.
Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

- pro atomickou formuli $R(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \ldots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formuli tvaru $(\neg\varphi)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

- pro formuli tvaru $(\varphi \,\square\, \psi)$ kde $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi \,\square\, \psi)[e] = f_{\square}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$
$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

  kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pozorování: Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a\in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$
$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a\in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

  kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pozorování: Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných. Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- tedy v ohodnocení e nastavíme hodnotu proměnné x postupně na všechny prvky $a \in A$ a požadujeme, aby PH byla jedna vždy (v případě $\forall$) nebo alespoň jednou (v případě $\exists$)

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pozorování: Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných. Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- tedy v ohodnocení e nastavíme hodnotu proměnné x postupně na všechny prvky $a \in A$ a požadujeme, aby PH byla jedna vždy (v případě $\forall$) nebo alespoň jednou (v případě $\exists$)
- speciálně, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(t_1 = t_2)[e] = 1 \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[e], t_2^{\mathcal{A}}[e]) \in =^{\mathcal{A}}$ (identita na A), tj. $t_1^{\mathcal{A}}[e] = t_2^{\mathcal{A}}[e]$ (je to stejný prvek A)

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \land \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence)

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence)

Ale pro strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ máme:

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence)

Ale pro strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ máme:

- $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 0$

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \mathsf{Var} \to A$

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to A$
- φ je lživá v $\mathcal{A}$, pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě $\mathcal{A} \models \neg\varphi$)

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to A$
- φ je lživá v $\mathcal{A}$, pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě $\mathcal{A} \models \neg\varphi$)
- pozor, lživá není totéž, co není pravdivá (neplatí)!
  (je to pravda jen pro sentence)

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to A$
- φ je lživá v $\mathcal{A}$, pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě $\mathcal{A} \models \neg\varphi$)
- pozor, lživá není totéž, co není pravdivá (neplatí)!
  (je to pravda jen pro sentence)
- platnost je klíčový pojem sémantiky a celé logiky

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře při ohodnocení

- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$ právě když platí: jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ potom $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$ právě když platí: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
- $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$
- je-li term t substituovatelný za proměnnou x do φ, potom:
  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro $a = t^{\mathcal{A}}[e]$
- je-li ψ varianta φ, potom $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře

- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace
- $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$
- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \psi$, potom $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace.
- $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
- speciálně, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když v $\mathcal{A}$ platí její generální uzávěr, tj. sentence $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

6.5 Vlastnosti teorií

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathsf{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathsf{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

- pravdivá (platí) v T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$)

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

- pravdivá (platí) v T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$)
- lživá v T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi) = \emptyset$)

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

- pravdivá (platí) v T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$)
- lživá v T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi) = \emptyset$)
- nezávislá v T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

- pravdivá (platí) v T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$)
- lživá v T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi) = \emptyset$)
- nezávislá v T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T
- je-li $T = \emptyset$ (tj. $\mathrm{M}(T) = \mathrm{M}_L$), píšeme jen $\models \varphi$, a říkáme, že φ je pravdivá (v logice), (logicky) platí, je tautologie, apod.

Další sémantické pojmy o teorii

- T je sporná, pokud v ní platí spor $\perp$ (definujeme jako $R(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \ldots, x_n)$, kde R je lib. relační symbol)

Další sémantické pojmy o teorii

- T je sporná, pokud v ní platí spor $\perp$ (definujeme jako $R(x_1, \ldots, x_n) \land \neg R(x_1, \ldots, x_n)$, kde R je lib. relační symbol)
- T je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je bezesporná (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)

Další sémantické pojmy o teorii

- T je sporná, pokud v ní platí spor $\perp$ (definujeme jako $R(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots, x_n)$, kde R je lib. relační symbol)
- T je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je bezesporná (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)
- důsledky T jsou sentence pravdivé v T, množina všech důsledků T v jazyce L je

$$\mathrm{Csq}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.

Příklad: uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.

Příklad: uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

- nejsou izomorfní, $\mathbb{Q}$ je spočetná a $\mathbb{R}$ nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná bijekce mezi doménami

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.

Příklad: uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

- nejsou izomorfní, $\mathbb{Q}$ je spočetná a $\mathbb{R}$ nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná bijekce mezi doménami
- ale $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: indukcí dle struktury sentence φ lze ukázat $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$; netriviální případ je $\exists$, klíčová je hustota

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,
- právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T,

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,
- právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T,
- právě když φ platí v každém modelu T (φ je sentence!). $\square$

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,
- právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T,
- právě když φ platí v každém modelu T (φ je sentence!). $\square$

NB: Předpoklad, že φ je sentence, je nutný: pro $T = \{P(c)\}$ a formuli $\varphi = P(x)$ je $P(c) \not\models P(x)$ ale $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model.

Příklady teorií: Teorie grafů

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. jednoduché grafy, hranu $\{x, y\}$ reprezentuje dvojice $(x, y), (y, x)$

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. jednoduché grafy, hranu $\{x, y\}$ reprezentuje dvojice $(x,y), (y,x)$

- Formule $\neg x = y \rightarrow E(x,y)$ platí v grafu, právě když je úplný. Je tedy nezávislá v T_{graph}.

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. jednoduché grafy, hranu $\{x,y\}$ reprezentuje dvojice $(x,y), (y,x)$

- Formule $\neg x = y \rightarrow E(x,y)$ platí v grafu, právě když je úplný. Je tedy nezávislá v T_{graph}.
- Formule $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2) \wedge (\forall z)(E(x,z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2)$ vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2.

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. jednoduché grafy, hranu $\{x, y\}$ reprezentuje dvojice $(x, y), (y, x)$

- Formule $\neg x = y \rightarrow E(x,y)$ platí v grafu, právě když je úplný. Je tedy nezávislá v T_{graph}.
- Formule $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2) \wedge (\forall z)(E(x,z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2)$ vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2. Platí tedy právě v grafech, které jsou disjunktní sjednocení kružnic, a je nezávislá v teorii T_{graph}.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (linearita) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$: neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (linearita) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$: neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ψ) je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je také nezávislá v T.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (linearita) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$: neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ψ) je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je také nezávislá v T.
- Formule $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ (označme χ) je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (linearita) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$: neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ψ) je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je také nezávislá v T.
- Formule $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ (označme χ) je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$. Totéž platí pro její generální uzávěr $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\chi$.

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{x + (y + z) &= (x + y) + z, \\ 0 + x &= x,\ x + 0 = x, \\ x + (-x) &= 0,\ (-x) + x = 0\} \end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů: $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ s rovností, navíc neutralita 1 vůči $\cdot$, asociativita $\cdot$, a (levá i pravá) distributivita $\cdot$ vůči $+$

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = x, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů: $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ s rovností, navíc neutralita 1 vůči $\cdot$, asociativita $\cdot$, a (levá i pravá) distributivita $\cdot$ vůči $+$

$$\begin{aligned} T_3 = T_2 \cup \{ & 1 \cdot x = x \cdot 1, \\ & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ & (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \} \end{aligned}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy existence inverzního prvku k $\cdot$ a netriviality:

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy existence inverzního prvku k $\cdot$ a netriviality:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg\, x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1),\ \neg\, 0 = 1\}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy existence inverzního prvku k $\cdot$ a netriviality:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg\, x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1),\ \neg\, 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů kompatibility uspořádání:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy existence inverzního prvku k $\cdot$ a netriviality:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg\, x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1),\ \neg\, 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů kompatibility uspořádání:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Modely jsou tělesa s lineárním (totálním) uspořádáním, které je kompatibilní s tělesovými operacemi.

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

Podstruktura

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a výstupy jsou všechny z B

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a výstupy jsou všechny z B

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \upharpoonright C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme).

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathsf{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa $\mathbb{Q}$ na množině $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \restriction \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud $\mathcal{A}$ nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \restriction X$.

Expanze a redukt

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně.
Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (okruh celých čísel) je její expanze

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (okruh celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom expanze $\mathcal{G}$ o jména prvků (z množiny G) je struktura $\langle G, E^G, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

Věta o konstantách

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

$\Rightarrow$ **Víme:** φ platí v každém modelu T. **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'.

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \ \text{ právě když } \ T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

$\Rightarrow$ **Víme:** φ platí v každém modelu T. **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L (‘zapomeneme’ konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c).

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e'.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e \colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e'. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$, z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$).

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e'. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$, z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$).

Formule φ neobsahuje c (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$