

# Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

## Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

## **6.6 Podstruktura, expanze, redukt**

---

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je **(indukovaná) podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každý relační symbol  $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$  pro každý funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$ , tj.  $f^{\mathcal{B}}$  je restrikce  $f^{\mathcal{A}}$  na množinu  $B$ , a výstupy jsou všechny z  $B$

speciálně, pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$  máme  $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ , můžeme psát:  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou obou těchto struktur, platí:  $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$
- Množina  $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$  není univerzem podstruktury  $\underline{\mathbb{Z}}$  ani  $\underline{\mathbb{Q}}$ , není uzavřená na násobení.

# Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow B$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa  $\mathbb{Q}$  na množině  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$ , není těleso. (Je to tzv. okruh.)

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$  je podstruktura  $\underline{\mathbb{N}}$  na množině všech sudých čísel

Pokud  $\mathcal{A}$  nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a  $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \upharpoonright X$ .

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  je její redukt
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  (**okruh** celých čísel) je její expanze
- Mějme graf  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ . Potom **expanze**  $\mathcal{G}$  o **jména prvků** (z množiny  $G$ ) je struktura  $\langle G, E^{\mathcal{G}}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$  v jazyce  $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$ , kde  $c_v^{\mathcal{G}} = v$  pro všechny vrcholy  $v \in G$ .



## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

⇒ **Víme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . **Chceme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . Mějme model  $\mathcal{A}' \models T'$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A'$  a ukažme, že  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

## Pokračování důkazu

Buď  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Buď  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ . Dle předpokladu platí  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$  pro všechna ohodnocení  $e'$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ , což znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$  ( $e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$ ), z toho plyne  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$ .

Formule  $\varphi$  neobsahuje  $c$  (je nový), máme tedy i  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ . □

## 6.7 Estenze teorií

---

Stejně jako ve výrokové logice, je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$ :

- **extenze:**  $T'$  v jazyce  $L' \supseteq L$  splňující  $\text{Csq}_L(T) \subseteq \text{Csq}_{L'}(T')$
- **jednoduchá:**  $L' = L$
- **konzervativní:**  $\text{Csq}_L(T) = \text{Csq}_L(T') = \text{Csq}_{L'}(T') \cap \text{Fm}_L$
- **ekvivalentní:**  $T'$  extenzí  $T$  a  $T$  extenzí  $T'$  (obě v témž jazyce)

Jsou-li  $T, T'$  ve stejném jazyce  $L$ :

- $T'$  je extenze  $T$ , právě když  $M_L(T') \subseteq M_L(T)$
- $T'$  je ekvivalentní s  $T$ , právě když  $M_L(T') = M_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- **ve výrokové logice:** přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- **v predikátové logice:** expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

## Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -teorii  $T$  a  $L'$ -teorii  $T'$ :

- (i)  $T'$  je **extenzí**  $T \Leftrightarrow L$ -redukt každého modelu  $T'$  je model  $T$
- (ii)  $T'$  je **konzervativní extenzí**  $T \Leftrightarrow T'$  je extenzí  $T$ , a každý model  $T$  lze expandovat do  $L'$  na nějaký model  $T'$

**Poznámka:** Důkaz (ii)  $\Rightarrow$  vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat  $\rightsquigarrow L$ -sentence platná v  $T$  ale ne v  $T'$ )

**Důkaz:** (i)  $\Rightarrow$  Buď  $\mathcal{A}'$  model  $T'$ ,  $\mathcal{A}$  jeho  $L$ -redukt. Protože  $T'$  je extenzí, platí v ní, tedy i v  $\mathcal{A}'$ , každý axiom  $\varphi \in T$ . Ten ale obsahuje jen symboly z  $L$ , tedy platí i v  $\mathcal{A}$ .

(i)  $\Leftarrow$  **Mějme:**  $L$ -sentenci  $\varphi$ ,  $T \models \varphi$ . **Chceme:**  $T' \models \varphi$ . Pro lib. model  $\mathcal{A}' \in M_{L'}(T')$  víme, že jeho  $L$ -redukt  $\mathcal{A}$  je modelem  $T$ , tedy  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Z toho plyne i  $\mathcal{A}' \models \varphi$  (opět  $\varphi$  je v  $L$ ).

(ii)  $\Leftarrow$  **Mějme:**  $L$ -sentenci  $\varphi$ ,  $T' \models \varphi$ . **Chceme:**  $T \models \varphi$ . Každý  $\mathcal{A} \in M_L(T)$  lze expandovat na nějaký  $\mathcal{A}' \in M_{L'}(T')$ . Víme, že  $\mathcal{A}' \models \varphi$ , takže i  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Tím jsme dokázali  $T \models \varphi$ . □

## Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný **definující formulí** (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit **existenci** a **jednoznačnost** funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze **jednoznačně** expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

# Definice relačního symbolu

nový  $n$ -ární relační symbol  $R$  lze definovat lib. formulí  $\psi(x_1, \dots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol  $\neq$  definovaný formulí  $\neg x_1 = x_2$ ; tj. požadujeme, aby:  $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o  $<$  definovaný formulí  $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$ ; tj. platí:  $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést  $\leq$  takto:  $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát  $\text{Leaf}(x)$ :  
 $\text{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii  $T$  a formuli  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  v jazyce  $L$ . Označme jako  $L'$  rozšíření jazyka  $L$  o nový  $n$ -ární relační symbol  $R$ . **Extenze teorie  $T$  o definici  $R$  formulí  $\psi$**  je  $L'$ -teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)\}$$

# Definice relačního symbolu: vlastnosti

## Tvrzení:

- (i)  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ .
- (ii) Pro každou  $L'$ -formuli  $\varphi'$  existuje  $L$ -formule  $\varphi$  taková, že  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz:** (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model  $T$  lze **jednoznačně** expandovat na model  $T'$

(ii) atomickou podformulí s novým symbolem  $R$ , tj. tvaru  $R(t_1, \dots, t_n)$ , nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$$

kde  $\psi'$  je **varianta  $\psi$  zaručující substituovatelnost** všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné  $\psi$  na zcela nové)  $\square$



## Definice funkčního symbolu: příklady

vztah  $f(x_1, \dots, x_n) = y$  definujeme formulí  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ ; pro každý vstup  $(x_1, \dots, x_n)$  musí **existovat jednoznačný** výstup  $y$

1. **Teorie grup**: binární funkční symbol  $-_b$  pomocí  $+$  a unárního  $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \leftrightarrow x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá  $x, y$  **existuje jednoznačné**  $z$  splňující definici

2. **Teorie lineárních uspořádání**: binární funkční symbol **min**

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě ( $x \leq y \vee y \leq x$ )
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici:  
 $\min^A(a_1, a_2)$  nemusí existovat

## Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii  $T$  a formuli  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  v jazyce  $L$ . Označme  $L'$  rozšíření  $L$  o nový  $n$ -ární funkční symbol  $f$ . Necht' platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  (existence)
- $T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z$  (jednoznačnost)

Potom **extenze teorie  $T$  o definici  $f$  formulí  $\psi$**  je  $L'$ -teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)\}$$

- $\psi$  definuje v modelu  $(n+1)$ -ární relaci, ta **musí být funkcí**
- je-li  $\psi$  tvaru  $t(x_1, \dots, x_n) = y$  pro term  $t$ , vždy to platí

### Tvrzení:

- (i)  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ .
- (ii) Pro každou  $L'$ -formuli  $\varphi'$  existuje  $L$ -formule  $\varphi$  taková, že  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz:** (i) modely  $T$  lze **jednoznačně** expandovat na modely  $T'$

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu  $f$ , jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů  $f(\dots f(\dots) \dots)$ , potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term  $f(t_1, \dots, t_n)$  novou proměnnou  $z$ : výsledek  $\varphi^*$
2.  $\varphi$  zkonstruujeme takto:  $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$   
(kde  $\psi'$  je varianta  $\psi$  zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model  $\mathcal{A} \models T'$  a ohodnocení  $e$  platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme  $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$ . Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy:  $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$  □

# Definice konstantního symbolu

- **speciální případ**: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu  $c$  formulí  $\psi(y)$ :

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit  $T \models (\exists y)\psi(y)$  a  $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí  $\psi(y)$  tvaru  $y = S(0)$ , přidáme tedy axiom  $1 = y \leftrightarrow y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol  $\frac{1}{2}$ , definice formulí  $y \cdot (1 + 1) = 1$ , tj. přidáním  $\frac{1}{2} = y \leftrightarrow y \cdot (1 + 1) = 1$  ?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese **charakteristiky 2**, např.  $\mathbb{Z}_2$ , nemá rovnice  $y \cdot (1 + 1) = 1$  řešení
- ale v teorii těles **charakteristiky různé od 2**, tj. přidáme-li axiom  $\neg(1 + 1 = 0)$ , už ano; např. v  $\mathbb{Z}_3$  máme  $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

## Extenze o definice

$L'$ -teorie  $T'$  je **extenzí**  $L$ -teorie  $T$  **o definice**, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

**Tvrzení:** (snadno indukcí)

- Každý model  $T$  lze jednoznačně expandovat na model  $T'$ .
- $T'$  je konzervativní extenze  $T$ .
- Pro  $L'$ -formuli  $\varphi'$  existuje  $L$ -formule  $\varphi$ , že  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

Příklad:  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$   
 $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností, zavedeme  $<$  a unární  $-$  přidáním axiomů:

$$\begin{aligned} T' &= T \cup \{-x = y \leftrightarrow x + y = 0, \\ &\quad x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)\} \end{aligned}$$

Formule  $-x < y$  v jazyce  $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$  s rovností je v  $T'$  ekvivalentní formuli:  $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

## **6.8 Definovatelnost ve struktuře**

---

# Definovatelné množiny

- formule  $\varphi$  s jednou volnou proměnnou  $x \dots$  “vlastnost” prvků
- ve struktuře **definuje** množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků  $a$  takových, že  $\varphi$  platí při ohodnocení kde  $e(x) = a$ )
- $\varphi(x, y)$  definuje binární relaci, atp.

Množina **definovaná**  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$  (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme:  $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule  $\neg(\exists y)E(x, y)$  definuje **v daném grafu** množinu všech **izolovaných** vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$  definuje **v tělese  $\mathbb{R}$**  množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \wedge \neg(x = y)$  definuje v **uspořádané množině  $\langle S, \leq^S \rangle$**  relaci **ostrého uspořádání**  $<^S$

# Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako **parametry**
- zápis  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ : volné proměnné  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$

Mějme  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  (kde  $|\bar{x}| = n$ ,  $|\bar{y}| = k$ ), strukturu  $\mathcal{A}$  (v témž jazyce),  $\bar{b} \in A^k$ . Množina **definovaná**  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  **s parametry**  $\bar{b}$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$ :

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro  $B \subseteq A$  označíme  $\text{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  množinu všech množin definovatelných v  $\mathcal{A}$  s parametry pocházejícími z  $B$ .

**Pozorování:**  $\text{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje  $\emptyset$  a  $A^n$ : je to **podalgebra potenční algebry**  $\mathcal{P}(A^n)$ .

Např. pro  $\varphi(x, y) = E(x, y)$  a vrchol  $v \in V(\mathcal{G})$  je  $\varphi^{\mathcal{G}, v}(x, y)$  množina všech sousedů vrcholu  $v$ .



# Aplikace: databázové dotazy

- **relační databáze**: jedna nebo více **tabulek**, také **relace**
- řádky tabulky jsou **záznamy (records)**, také **tice (tuples)**
- struktura v čistě relačním jazyce

## Movies

title	director	actor
Forrest Gump	R. Zemeckis	T. Hanks
Philadelphia	J. Demme	T. Hanks
Batman Returns	T. Burton	M. Keaton
⋮	⋮	⋮

## Program

cinema	title	time
Atlas	Forrest Gump	20:00
Lucerna	Forrest Gump	21:00
Lucerna	Philadelphia	18:30
⋮	⋮	⋮

## Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. **agregační funkce**)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

“Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?”

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where  
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina  $\varphi^{\text{Database}, 'T. Hanks'}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$
- definovaná ve struktuře **Database** =  $\langle D, \text{Program}, \text{Movies} \rangle$
- jejíž doména je  $D = \{ \text{'Atlas'}, \text{'Lucerna'}, \dots, \text{'M. Keaton'} \}$
- s parametrem **'T. Hanks'**,
- definující formule  $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$ :

$$(\exists y_{\text{title}})(\exists y_{\text{director}})(\text{Program}(x_{\text{cinema}}, y_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \wedge \\ \text{Movies}(y_{\text{title}}, y_{\text{director}}, y_{\text{actor}}))$$

## 6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

---

- **asociativita**  $\wedge$  a  $\vee$ :

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

- **komutativita**  $\wedge$  a  $\vee$ :

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

- **distributivita**  $\wedge$  vůči  $\vee$ ,  $\vee$  vůči  $\wedge$ :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- **absorpce**:

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

- **komplementace**:

$$x \wedge (-x) = \perp$$

$$x \vee (-x) = \top$$

- **netrivialita**:

$$-(\perp = \top)$$

- dualita: záměnou  $\wedge$  s  $\vee$  a  $\perp$  s  $\top$  získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: **2-prvková B. algebra**  $\langle \{0, 1\}, f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na **izomorfismus** ( $f^n$  je  $f$  po složkách):  
$$\langle \{0, 1\}^n, f_{\neg}^n, f_{\wedge}^n, f_{\vee}^n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$$
- jsou izomorfní **potenčním algebrám**  $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$  pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

- výrokovou logiku lze 'simulovat' v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou **Booleovské termy**, konstanty  $\perp$ ,  $\top$  představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, **algebra výroků** daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

- máme-li **otevřenou** formuli  $\varphi$  (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické formule pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí  $\varphi$
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. **Skolemizace**
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme **nulární relace**
- $A^0 = \{\emptyset\}$ , tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace  $R^A \subseteq A^0$ :  $R^A = \emptyset = 0$  a  $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$