NAIL062 P&P Logic: Worksheet 4 – The tableaux method

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- zná potebné pojmy z tablo metody (poloka, tablo, tablo dkaz/zamítnutí, dokonená/sporná vtev, kanonický model), umí je formáln definovat, uvést píklady
- zná vechna atomická tabla, a umí vytvoit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokonené tablo pro danou poloku z dané (i nekonené) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokonenou bezespornou vtev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná vtu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

Píklady na cviení

Problem 1. Aladin nael v jeskyni dv truhly, A a B. Ví, e kadá truhla obsahuje bu poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespo jedna z tchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, e bu jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba livé.

(a) Vyjádete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodn zvolenou mnoinou výrokových promnných $\mathbb{P}$. (Vysvtlete význam jednotlivých výrokových promnných v $\mathbb{P}$.)
(b) Pokuste se sestrojit tablo dkazy, z teorie T, výrok o významu "Poklad je v truhle A" a "Poklad je v truhle B".
(c) Je-li nkteré z tchto dokonených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro nkterou z jeho bezesporných vtví.
(d) Jaký závr z toho meme uinit?

Problem 2. Uvame nekonenou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najdte vechny modely T. Je kadý model T kanonickým modelem pro nkterou z vtví tohoto tabla?

Problem 3. Navrhnte vhodná atomická tabla pro logickou spojku $\oplus$ (XOR) a ukate, e souhlasí-li model s koenem vaich atomických tabel, souhlasí i s nkterou vtví.

Problem 4. Pomocí vty o kompaktnosti ukate, e kadé spoetné ástené uspoádání lze rozíit na úplné (lineární) uspoádání.

Dalí píklady k procviení

Problem 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, pi výslechu bylo zjitno následující:

(i) *Alespo jeden z vyslýchaných íká pravdu a alespo jeden le.*
(ii) *Adam íká:* "Barbora nebo Cyril lou"
(iii) *Barbora íká:* "Cyril le"
(iv) *Cyril íká:* "Adam nebo Barbora lou"

(a) Zapite tvrzení (i) a (iv) jako výroky φ_1 a φ_4 nad mnoinou prvovýrok $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, piem a, b, c znamená (po ad), e *"Adam/Barbora/Cyril íká pravdu"*.
(b) Pomocí tablo metody dokate, e z teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ plyne, e Adam íká pravdu.
(c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdvodnte.

Problem 6. Pomocí tablo metody dokate, e následující výroky jsou tautologie:

(a) $(p \to (q \to q))$
(b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

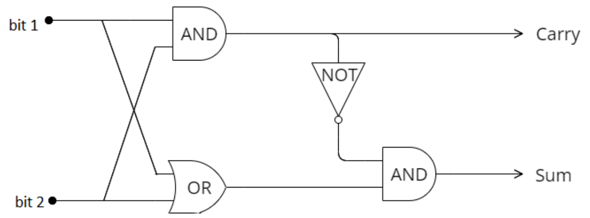
Problem 7. Pomocí tablo metody dokate nebo najdte protipíklad ve form *kanonického* modelu pro bezespornou vtev.
(a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$
(b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$
(c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$

Problem 8. Pomocí tablo metody urete vechny modely následujících teorií:
(a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)\}$
(b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
(c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$

Problem 9. Navrhnte vhodná atomická tabla a ukate, e souhlasí-li model s koenem vaich atomických tabel, souhlasí i s nkterou vtví:

- pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR),
- pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND),
- pro $\oplus$ (XOR),
- pro ternární operátor "if p then q else r" (IFTE).

Problem 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvma výstupními bity (carry, sum) znázornný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétn, vyjádete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové promnné znamenají po ad "bit 1", "bit 2", "carry" a "sum", a formule φ, ψ neobsahují promnné c, s.
(b) Dokate tablo metodou, e $T \models c \to \neg s$.

Problem 11. Pomocí vty o kompaktnosti dokate, e kadý spoetný rovinný graf je obarvitelný tymi barvami. Mete vyuít Vtu o tyech barvách (pro konené grafy).

K zamylení

Problem 12. Dokate pímo (transformací tabel) *vtu o dedukci*, tj. e pro kadou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \to \psi \text{ práv kdy } T, \varphi \vdash \psi$$

Problem 13. Mjme dv neprázdné teorie A, B v tém jazyce. Nech platí, e kadý model teorie A spluje alespo jeden axiom teorie B. Ukate, e existují konené mnoiny axiom $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, e $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \to \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$ je tautologie.