# Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

# Sedmá přednáška

## Program

- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky
- tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 6.7-6.9 z Kapitoly 6, Sekce 7.1-7.3 z Kapitoly 7

# 6.7 Extenze teorií

# Extenze teorie

Stejně jako ve výrokové logice, je-li $T$ teorie v jazyce $L$:

- extenze: $T'$ v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$
- jednoduchá: $L' = L$
- konzervativní: $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$
- ekvivalentní: $T'$ extenzí $T$ a $T$ extenzí $T'$ (obě v témž jazyce)

Jsou-li $T$, $T'$ ve stejném jazyce $L$:

- $T'$ je extenze $T$, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$
- $T'$ je ekvivalentní s $T$, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- ve výrokové logice: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- v predikátové logice: expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

# Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, $L$-teorii $T$ a $L'$-teorii $T'$:

(i) $T'$ je extenzí $T$ $\Leftrightarrow$ $L$-redukt každého modelu $T'$ je model $T$

(ii) $T'$ je konzervativní extenzí $T$ $\Leftrightarrow$ $T'$ je extenzí $T$, a každý model $T$ lze expandovat do $L'$ na nějaký model $T'$

**Poznámka:** Důkaz (ii) $\Rightarrow$ vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat $\rightsquigarrow$ $L$-sentence platná v $T$ ale ne v $T'$)

**Důkaz:**(i) $\Rightarrow$ Buď $\mathcal{A}'$ model $T'$, $\mathcal{A}$ jeho $L$-redukt. Protože $T'$ je extenzí, platí v ní, tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z $L$, tedy platí i v $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftarrow$ **Mějme:** $L$-sentenci $\varphi$, $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho $L$-redukt $\mathcal{A}$ je modelem $T$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět $\varphi$ je v $L$).

(ii) $\Leftarrow$ **Mějme:** $L$-sentenci $\varphi$, $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ lze expandovat na nějaký $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali $T \models \varphi$. $\square$

# Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný definující formulí (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit existenci a jednoznačnost funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze jednoznačně expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

# Definice relačního symbolu

nový $n$-ární relační symbol $R$ lze definovat lib. formulí $\psi(x_1, \ldots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol $\neq$ definovaný formulí $\neg x_1 = x_2$; tj. požadujeme, aby: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$; tj. platí: $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést $\leq$ takto: $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát $\mathrm{Leaf}(x)$: $\mathrm{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii $T$ a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ v jazyce $L$. Označme jako $L'$ rozšíření jazyka $L$ o nový $n$-ární relační symbol $R$. Extenze teorie $T$ o definici $R$ formulí $\psi$ je $L'$-teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \ldots, x_n) \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

# Definice relačního symbolu: vlastnosti

**Tvrzení:**

(i) $T'$ je konzervativní extenze $T$.

(ii) Pro každou $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

**Důkaz:** (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model $T$ lze jednoznačně expandovat na model $T'$

(ii) atomickou podformuli s novým symbolem $R$, tj. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$$

kde $\psi'$ je varianta $\psi$ zaručující substituovatelnost všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné $\psi$ na zcela nové) $\square$

# Definice funkčního symbolu: příklady

vztah $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ definujeme formulí $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$; pro každý vstup $(x_1, \ldots, x_n)$ musí existovat jednoznačný výstup $y$

1. Teorie grup: binární funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \;\leftrightarrow\; x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá $x, y$ existuje jednoznačné $z$ splňující definici

2. Teorie lineárních uspořádání: binární funkční symbol min

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě $(x \leq y \vee y \leq x)$
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici: $\min^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)$ nemusí existovat

# Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii $T$ a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ v jazyce $L$. Označme $L'$ rozšíření $L$ o nový $n$-ární funkční symbol $f$. Nechť platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ (existence)
- $T \models \psi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z$ (jednoznačnost)

Potom extenze teorie $T$ o definici $f$ formulí $\psi$ je $L'$-teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) = y \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\}$$

- $\psi$ definuje v modelu $(n+1)$-ární relaci, ta musí být funkcí
- je-li $\psi$ tvaru $t(x_1, \ldots, x_n) = y$ pro term $t$, vždy to platí

**Tvrzení:**

(i) $T'$ je konzervativní extenze $T$.

(ii) Pro každou $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

**Důkaz:** (i) modely $T$ lze jednoznačně expandovat na modely $T'$

# Pokračování důkazu

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu $f$, jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů $f(\dots f(\dots)\dots)$, potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term $f(t_1, \dots, t_n)$ novou proměnnou $z$: výsledek $\varphi^*$
2. $\varphi$ zkonstruujeme takto: $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$
   (kde $\psi'$ je varianta $\psi$ zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení $e$ platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy: $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ $\square$

# Definice konstantního symbolu

- speciální případ: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu $c$ formulí $\psi(y)$:

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \;\leftrightarrow\; y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol $\frac{1}{2}$, definice formulí $y \cdot (1 + 1) = 1$, tj. přidáním $\frac{1}{2} = y \;\leftrightarrow\; y \cdot (1 + 1) = 1$ ?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese charakteristiky 2, např. $\mathbb{Z}_2$, nemá rovnice $y \cdot (1 + 1) = 1$ řešení
- ale v teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li axiom $\neg(1 + 1 = 0)$, už ano; např. v $\mathbb{Z}_3$ máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

# Extenze o definice

$L'$-teorie $T'$ je extenzí $L$-teorie $T$ o definice, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

**Tvrzení:** (snadno indukcí)

- Každý model $T$ lze jednoznačně expandovat na model $T'$.
- $T'$ je konzervativní extenze $T$.
- Pro $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Příklad: $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$

$L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností, zavedeme $<$ a unární $-$ přidáním axiomů:

$$T' = T \cup \{-x = y \ \leftrightarrow\ x + y = 0,$$

$$x < y \ \leftrightarrow\ x \leq y \wedge \neg(x = y)\}$$

Formule $-x < y$ v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$ s rovností je v $T'$ ekvivalentní formuli: $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

# 6.8 Definovatelnost ve struktuře

# Definovatelné množiny

- formule $\varphi$ s jednou volnou proměnnou $x$ … "vlastnost" prvků
- ve struktuře definuje množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků $a$ takových, že $\varphi$ platí při ohodnocení kde $e(x) = a$)
- $\varphi(x, y)$ definuje binární relaci, atp.

Množina definovaná $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme: $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje v daném grafu množinu všech izolovaných vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$ definuje v tělese $\mathbb{R}$ množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ definuje v uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$ relaci ostrého uspořádání $<^S$

## Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako parametry
- zápis $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: volné proměnné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$

Mějme $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$), strukturu $\mathcal{A}$ (v témž jazyce), $\bar{b} \in A^k$. Množina definovaná $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$:

$$\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro $B \subseteq A$ označíme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z $B$.

**Pozorování:** $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje $\emptyset$ a $A^n$: je to podalgebra potenční algebry $\mathcal{P}(A^n)$.

Např. pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a vrchol $v \in V(\mathcal{G})$ je $\varphi^{\mathcal{G},v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu $v$.

# Aplikace: databázové dotazy

- relační databáze: jedna nebo více tabulek, také relace
- řádky tabulky jsou záznamy (records), také tice (tuples)
- struktura v čistě relačním jazyce

**Movies**

| title | director | actor |
|---|---|---|
| Forrest Gump | R. Zemeckis | T. Hanks |
| Philadelphia | J. Demme | T. Hanks |
| Batman Returns | T. Burton | M. Keaton |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**Program**

| cinema | title | time |
|---|---|---|
| Atlas | Forrest Gump | 20:00 |
| Lucerna | Forrest Gump | 21:00 |
| Lucerna | Philadelphia | 18:30 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

# Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. agregační funkce)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

"Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?"

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina $\varphi^{\text{Database},\text{'T. Hanks'}}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$
- definovaná ve struktuře $\text{Database} = \langle D, \mathrm{Program}, \mathrm{Movies}\rangle$
- jejíž doména je $D = \{\texttt{'Atlas'}, \texttt{'Lucerna'}, \dots, \texttt{'M. Keaton'}\}$
- s parametrem `'T. Hanks'`,
- definující formule $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$:

$$(\exists z_{\text{title}})(\exists z_{\text{director}})(\mathrm{Program}(x_{\text{cinema}}, z_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \land \mathrm{Movies}(z_{\text{title}}, z_{\text{director}}, y_{\text{actor}}))$$

# 6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

# Teorie Booleových algeber $L = \langle -, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$ s rovností

- asociativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- komutativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
- distributivita $\wedge$ vůči $\vee$, $\vee$ vůči $\wedge$:
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- absorpce:
$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
- komplementace:
$$x \wedge (-x) = \perp$$
$$x \vee (-x) = \top$$
- netrivialita:
$$-(\perp = \top)$$

- dualita: záměnou $\wedge$ s $\vee$ a $\perp$ s $\top$ získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: 2-prvková B. algebra $\langle \{0, 1\}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na izomorfismus ($f^n$ je $f$ po složkách):
$$\langle \{0, 1\}^n, f_\neg^n, f_\wedge^n, f_\vee^n, (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1) \rangle$$
- jsou izomorfní potenčním algebrám $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

# Vztah výrokové a predikátové logiky

- výrokovou logiku lze ‘simulovat’ v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou Booleovské termy, konstanty $\perp, \top$ představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, algebra výroků daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

# Na druhou stranu...

- máme-li otevřenou formuli $\varphi$ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické formule pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí $\varphi$
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. Skolemizace
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme nulární relace
- $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$

# Kapitola 7: Tablo metoda v predikátové logice

# 7.1 Neformální úvod

# Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}\neg P(c_0)\\
|\\
\mathrm{F}P(c_0)\\
|\\
\mathrm{T}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}P(c_0)\\
\otimes
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{F}P(c_0)\\
|\\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}\neg P(c_0)\\
|\\
\mathrm{T}P(c_0)\\
\otimes
\end{array}
$$

# Tablo metoda v predikátové logice

- opět vždy předpokládáme, že jazyk $L$ je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být sentence: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít generální uzávěry)
- redukce položek: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde $\varphi, \psi$ jsou sentence), ale čtyři nové případy pro kvantifikátory:
  - typ "svědek": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
  - typ "všichni": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit, $\varphi(x)$ by typicky nebyla sentence
- místo toho za $x$ substituujeme konstantní term $t$: $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky ("svědek" vs. "všichni")

# Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk $L$ rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$, označíme $L_C$
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol $c \in C$
- **typ "svědek":** dosadíme nový $c \in C$ (dosud na větvi není)
  - pro $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$
  - $c$ hraje roli prvku, který položku 'splňuje'
- **typ "všichni":** substituujeme libovolný konstantní $L_C$-term
  - pro $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/t)$
  - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny $t$ ('použijeme vše, co víme')
- **konvence:** kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu "všichni" (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup:** nejprve zredukujeme položky typu "svědek", poté zjistíme, co 'o svědcích říkají' položky typu "všichni"

## 7.2 Formální definice

# Jazyk, položky, atomická tabla

- buď $L$ spočetný jazyk bez rovnosti.
- označme $L_C$ rozšíření $L$ o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních $L_C$-termů: $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou $L$-teorii $T$ a $L$-sentenci $\varphi$
- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde $\varphi$ je $L_C$-sentence
- položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou typu "svědek"
- položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou typu "všichni"
- atomická tabla jsou násl. položkami označkované stromy:

# Atomická tabla pro kvantifikátory

$\varphi$ je libovolná $L_C$-sentence, $x$ proměnná, $t_i$ konstantní $L_C$-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

| | $\forall$ | $\exists$ |
|---|---|---|
| True | $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$<br>$\vert$<br>$\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ | $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$<br>$\vert$<br>$\mathrm{T}\varphi(x/c_i)$ |
| False | $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$<br>$\vert$<br>$\mathrm{F}\varphi(x/c_i)$ | $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$<br>$\vert$<br>$\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ |

# Atomická tabla pro logické spojky

$\varphi$ a $\psi$ jsou libovolné $L_C$-sentence

| | $\neg$ | $\wedge$ | $\vee$ | $\rightarrow$ | $\leftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|
| True | $\begin{array}{c} \mathrm{T}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \end{array}$ | $\begin{array}{c} \mathrm{T}\varphi\wedge\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\vee\psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{T}\psi & \mathrm{F}\psi \end{array}$ |
| False | $\begin{array}{c} \mathrm{F}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\wedge\psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{F}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\vee\psi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{F}\psi & \mathrm{T}\psi \end{array}$ |

# Formální definice tabla

- konečné tablo z teorie $T$ je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie $T$
  - pro libovolnou položku $P$ na libovolné větvi $V$ můžeme na konec větve $V$ připojit atomické tablo pro položku $P$
    je-li $P$ typu "svědek", můžeme použít jen $c_i \in C$, který dosud na $V$ není (pro typ "všichni" lze použít lib. konst. $L_C$-term $t_i$)
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie $T$ je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
  - $\tau_i$ jsou konečná tabla z $T$
  - $\tau_0$ je jednoprvkové tablo
  - $\tau_{i+1}$ vzniklo z $\tau_i$ v jednom kroku
- tablo pro položku $P$ je tablo, které má položku $P$ v kořeni

**konvence:** kořen atom. tabla nezapisujeme není-li $P$ typu "všichni"

# Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou sentenci $\psi$, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka $P$ je redukovaná na větvi $V$ procházející $P$, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}\psi$ resp. $\mathrm{F}\psi$ pro atomickou sentenci, nebo
  - není typu "všichni" a vyskytuje se na $V$ jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na $V$), nebo
  - je typu "všichni" a všechny její výskyty na větvi $V$ jsou na $V$ redukované.

# Kdy je výskyt položky typu “všichni” redukovaný?

Výskyt položky $P$ typu “všichni” na $V$ je $i$-tý, má-li právě $i-1$ předků označených $P$, a $i$-tý výskyt je redukovaný na $V$, pokud

- $P$ má $(i+1)$-ní výskyt na $V$, a zároveň
- na $V$ je položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde $t_i$ je $i$-tý konstantní $L_C$-term (tj., typicky, už jsme za $x$ substituovali $t_i$)

**NB:** je-li položka typu “všichni” na $V$ redukovaná, má na $V$ nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní $L_C$-termy

# Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz sentence $\varphi$ z teorie $T$ je sporné tablo z teorie $T$ s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je $\varphi$ (tablo) dokazatelný z $T$, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je $\varphi$ (tablo) zamítnutelný z $T$, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

# Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{F}(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{F}(\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{F}Q(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{T}P(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{T}P(c_0) \to Q(c_0)$$

$$\mathrm{F}P(c_0) \qquad \mathrm{T}Q(c_0)$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

# Ještě příklad ($\varphi, \psi$ jsou formule s jedinou volnou proměnnou $x$)

- $\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
  - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
    - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
      - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
        - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{F}(\forall x)\psi(x)$
        - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$
  - $\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
    - $\mathrm{F}(\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0))$
      - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$

($c_0$ lze použít jako nový ve všech případech: na dané větvi se dosud nevyskytuje)

# Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu “všichni” dosadit každý $L_C$ term $t_i$

Systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku $R$ je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde $\tau_0$ je jednoprvkové s položkou $R$, a pro $i \geq 0$:

- buď $P$ nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející $P$ (resp. je-li typu “všichni”, její výskyt není redukovaný)
- nejprve definujeme $\tau_i'$ vzniklé z $\tau_i$ připojením atomického tabla pro $P$ na každou bezespornou větev procházející $P$, kde je-li $P$ typu “všichni” a má-li ve vrcholu $k$-tý výskyt, dosadíme $k$-tý $L_C$-term $t_k$, je-li typu “svědek”, substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším $i$, které na větvi zatím není
- pokud taková položka $P$ neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- $\tau_{i+1}$ vznikne z $\tau_i'$ připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$)

## Konečnost a systematičnost důkazů

**Lemma:** Systematické tablo je dokončené.

**Důkaz:** $k$-tý výskyt položky typu "všichni" redukujeme když na něj narazíme: připojíme $(k+1)$-ní výskyt a dosadíme $k$-tý $L_C$-term $t_k$. Zbytek důkazu jako ve výrokové logice. □

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

**Důsledek (Konečnost důkazů):** Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz $\varphi$ z $T$.

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

**Důsledek (Systematičnost důkazů):** Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem $\varphi$ z $T$.

# 7.3 Jazyky s rovností

# Rovnost

$1+0=0+1$? identita celých čísel, výrazů, množin, unifikovatelnost termů (v Prologu), ...

Tablo je čistě syntaktický objekt, ale $=^{\mathcal{A}}$ má být identita na $A$. Jak toho docílit?

Mějme dokončenou bezespornou větev tabla s položkou $\mathrm{T}c_1 = c_2$. V kanonickém modelu musí platit nejen $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$, ale také:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$ právě když $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$

To vynutíme přidáním axiomů rovnosti, $=^{\mathcal{A}}$ bude kongruence $\mathcal{A}$ (ekvivalence, která se chová dobře k funkcím a relacím).

Poté vezmeme faktorstrukturu $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}}$, v ní už je $=^{\mathcal{B}}$ identita.

# Kongruence a faktorstruktura

Buď $\sim$ ekvivalence na $A$, $f : A^n \to A$, $R \subseteq A^n$. Říkáme, že $\sim$ je:

- kongruence pro $f$, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$
- kongruence pro $R$, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $R(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R(b_1, \ldots, b_n)$

Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence na $A$, která je kongruencí pro všechny funkce a relace $\mathcal{A}$.

Faktorstruktura (podílová struktura) $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/_\sim$ v témž jazyce, doména $A/_\sim$ je množina všech rozkladových tříd $A$ podle $\sim$, funkce a relace definujeme pomocí reprezentantů:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\sim$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$

## Axiomy rovnosti

Axiomy rovnosti pro jazyk $L$ s rovností:

(i) $x = x$

(ii) pro každý $n$-ární funkční symbol $f$ jazyka $L$:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

(iii) pro každý $n$-ární relační symbol $R$ jazyka $L$ včetně rovnosti:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

- symetrie a tranzitivita plynou z (iii) pro $=$ (dokažte si)
- z axiomů ($i$) a ($iii$) tedy plyne, že relace $=^{\mathcal{A}}$ je ekvivalence
- axiomy ($ii$) a ($iii$) vyjadřují, že $=^{\mathcal{A}}$ je kongruence

V tablo metodě pro jazyk s rovností implicitně přidáme axiomy rovnosti (přesněji jejich generální uzávěry, potřebujeme sentence).

# Tablo důkaz s rovností

Je-li $T$ teorie v jazyce $L$ s rovností, označme jako $T^*$ rozšíření $T$ o generální uzávěry axiomů rovnosti pro $L$.

- tablo důkaz z teorie $T$ je tablo důkaz z $T^*$
- podobně pro tablo zamítnutí, a obecně jakékoliv tablo z $T$

**Pozorování:**

- Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, potom i $\mathcal{A}/_{=^\mathcal{A}} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=^\mathcal{A}}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita.
- Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

(Použijeme při konstrukci kanonického modelu v důkazu úplnosti.)