

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na $[T]$ -ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace, umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladech

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Necht $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = k$. Určete počet až na ekvivalenci:

- výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
- teorií nad \mathbb{P} , ve kterých platí φ ,
- kompletních teorií nad \mathbb{P} , ve kterých platí φ ,
- teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočtěte až na ekvivalenci:

- výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,
- teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Problem 2. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení: (a) výrok φ níže, (b) $\varphi \wedge \neg p_1$, (c) $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$.

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Problem 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$\begin{aligned} &(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ &(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \end{aligned}$$

Problem 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Problem 5. Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

EXTRA PRACTICE

Problem 6. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r) \\ \psi &= s \rightarrow q \end{aligned}$$

- Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad \mathbb{P} takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
- Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

- (c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad \mathbb{P} takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Problem 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge \\ (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Problem 8. Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu ??, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu ??:

- (a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
 (b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

Problem 9. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ pro žádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

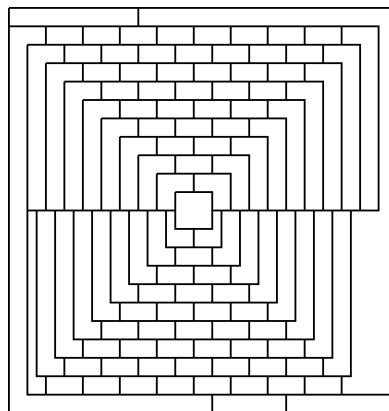
Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

Problem 10. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

- (a) Mapa krajů Česka



- (b) Těžší instance



FOR FURTHER THOUGHT

Problem 11. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. redukci z problému SAT do problému 3-SAT).

Problem 12. Zakódujte problém setřídění dané n -tice celých čísel do SAT.

Problem 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlavku zelí.