NAIL062 V&P Logika: 3. sada příkladů – Algebra výroků, Problém SAT

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na $[T$-$]$ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace , umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladě

Příklady na cvičení

Příklad 1. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = k$. Určete počet až na ekvivalenci:

(a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(c) kompletních teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočtěte až na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,
(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Příklad 2. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení: (a) výrok φ níže, (b) $\varphi \wedge \neg p_1$, (c) $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$.

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Příklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Příklad 5. Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Příklad 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Příklad 8. Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu **??**, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu **??**:

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$

(b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

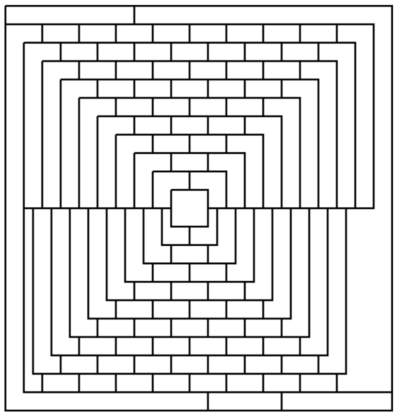
Příklad 9. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ pro žádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

Příklad 10. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa krajů Česka

(b) Těžší instance



K zamyšlení

Příklad 11. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. *redukci* z problému SAT do problému 3-SAT).

Příklad 12. Zakódujte problém setřídění dané n-tice celých čísel do SAT.

Příklad 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.