

# Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

## Program

- korektnost a úplnost, kanonický model
- věta o kompaktnosti, Löwenheim-Skolemova věta
- hilbertovský kalkulus

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 7.4-7.6 z Kapitoly 7 (+ Sekce 4.8)

## 7.4 Korektnost a úplnost

---



Stejně jako ve výrokové logice:

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$  (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$  (úplnost) “co platí, lze dokázat”

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$  (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$  (úplnost) “co platí, lze dokázat”

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)





## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = \text{T}\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = \text{F}\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:**

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$
- $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$  a  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanzí  $\mathcal{A}_i$



## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$
- $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$  a  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanzí  $\mathcal{A}_i$

Hledaná větev v  $\tau$  je  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ ,  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}$  je 'limita'  $\mathcal{A}_i$ : vyskytuje-li se  $c \in C$  na  $V_i$ , interpretuj jako v  $\mathcal{A}_i$ , jinak libovolně.

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$
- $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$  a  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanzí  $\mathcal{A}_i$

Hledaná větev v  $\tau$  je  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ ,  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}$  je 'limita'  $\mathcal{A}_i$ : vyskytuje-li se  $c \in C$  na  $V_i$ , interpretuj jako v  $\mathcal{A}_i$ , jinak libovolně.

**Báze:**  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$  se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou)  $V_0$  v  $\tau_0$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

- **logická spojka:**  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme  $V_i$  na  $V_{i+1}$

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

- **logická spojka:**  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme  $V_i$  na  $V_{i+1}$
- **typ “svědek”:** SÚNO  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ :  $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$ , tedy existuje  $a \in A$ , že  $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$ .  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o nově přidanou  $T\varphi(x/c)$ ,  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanze  $\mathcal{A}_i$  o  $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$ .



## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

- **logická spojka:**  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme  $V_i$  na  $V_{i+1}$
- **typ “svědek”:** SÚNO  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ :  $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$ , tedy existuje  $a \in A$ , že  $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$ .  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o nově přidanou  $T\varphi(x/c)$ ,  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanze  $\mathcal{A}_i$  o  $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$ .
- **typ “všichni”:**  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o atomické tablo. SÚNO nová položka  $T\varphi(x/t)$  pro nějaký  $L_C$ -term  $t$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

- **logická spojka:**  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme  $V_i$  na  $V_{i+1}$
- **typ “svědek”:** SÚNO  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ :  $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$ , tedy existuje  $a \in A$ , že  $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$ .  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o nově přidanou  $T\varphi(x/c)$ ,  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanze  $\mathcal{A}_i$  o  $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$ .
- **typ “všichni”:**  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o atomické tablo. SÚNO nová položka  $T\varphi(x/t)$  pro nějaký  $L_C$ -term  $t$ . Model  $\mathcal{A}_{i+1}$  je libovolná expanze  $\mathcal{A}_i$  o nové symboly z  $t$ .  $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$ , tedy se shoduje.  $\square$

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:**

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:** Sporem, nechtě  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$ , že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

## Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:** Sporem, necht'  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$ , že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

Protože  $T \vdash \varphi$ , existuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ , což je sporné tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.



# Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:** Sporem, nechť  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$ , že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

Protože  $T \vdash \varphi$ , existuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ , což je sporné tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s kořenem  $F\varphi$ , tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly  $c \in C$  tak, že se výsledná  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}'$  shoduje s nějakou větví  $V$ .

# Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:** Sporem, necht'  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$ , že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

Protože  $T \vdash \varphi$ , existuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ , což je sporné tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s kořenem  $F\varphi$ , tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly  $c \in C$  tak, že se výsledná  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}'$  shoduje s nějakou větví  $V$ . Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s  $T\psi$  a zároveň  $F\psi$  pro nějakou  $L_C$ -sentenci  $\psi$ .  $\square$



## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů
- pro  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } TR(s_1, \dots, s_n)$$



## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů
- pro  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů
- pro  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

- speciálně, pro konstantní symbol  $c$  máme  $c^{\mathcal{A}} = "c"$

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů
- pro  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

- speciálně, pro konstantní symbol  $c$  máme  $c^{\mathcal{A}} = "c"$

(funkce  $f^{\mathcal{A}}$  je "vytvoření" termu ze symbolu  $f$  a vstupních termů)



## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$



## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$ .

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\mathbb{F}\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$ .
- redukt na původní jazyk  $L$ :  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$



## Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:



## Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti

## Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- kanonický model pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- kanonický model pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$
- **Pozorování:** pro lib. formuli  $\varphi$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$   
(symbol  $=$  interpretujeme jako  $=^B$  v  $\mathcal{B}$  a jako identitu v  $\mathcal{A}$ )

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$“s_1” =^B “s_2” \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$
- **Pozorování:** pro lib. formuli  $\varphi$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$   
(symbol  $=$  interpretujeme jako  $=^B$  v  $\mathcal{B}$  a jako identitu v  $\mathcal{A}$ )

**Všimněte si:**

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$“s_1” =^B “s_2” \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$
- **Pozorování:** pro lib. formuli  $\varphi$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$   
(symbol  $=$  interpretujeme jako  $=^B$  v  $\mathcal{B}$  a jako identitu v  $\mathcal{A}$ )

**Všimněte si:**

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný



# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$
- **Pozorování:** pro lib. formuli  $\varphi$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$   
(symbol  $=$  interpretujeme jako  $=^B$  v  $\mathcal{B}$  a jako identitu v  $\mathcal{A}$ )

**Všimněte si:**

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný
- v jazyce s rovností může být i konečný



## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$



$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=\mathcal{B}} = \{[“d”]_{=\mathcal{B}}, [“f(d)”]_{=\mathcal{B}}, [“c_0”]_{=\mathcal{B}}, [“f(c_0)”]_{=\mathcal{B}}, [“c_1”]_{=\mathcal{B}}, [“f(c_1)”]_{=\mathcal{B}}, \dots\}$$

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/{\equiv^{\mathcal{B}}} = \{[d]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, [f(d)]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, [c_0]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, [f(c_0)]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, [c_1]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, [f(c_1)]_{\equiv^{\mathcal{B}}}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/{\equiv^{\mathcal{B}}} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

## Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ 
  - $A = B/_{=B}$ ,  $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$ ,  $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ 
  - $A = B/_{=B}$ ,  $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$ ,  $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
  - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$ ,  
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo  $\mathcal{T}^*$  pro  $\mathcal{F} \neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $\mathcal{V}$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=\mathcal{B}} = \{[“d”]_{=\mathcal{B}}, [“f(d)”]_{=\mathcal{B}}, [“c_0”]_{=\mathcal{B}}, [“f(c_0)”]_{=\mathcal{B}}, [“c_1”]_{=\mathcal{B}}, [“f(c_1)”]_{=\mathcal{B}}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=\mathcal{B}} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ 
  - $A = B/_{=\mathcal{B}}, d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=\mathcal{B}}, c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=\mathcal{B}}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
  - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=\mathcal{B}}) = [“f(d)”]_{=\mathcal{B}},$   
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=\mathcal{B}}) = [“f(f(d))”]_{=\mathcal{B}} = [“d”]_{=\mathcal{B}}, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=\mathcal{B}}.$

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ 
  - $A = B/_{=B}$ ,  $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$ ,  $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
  - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$ ,  
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=B}$ .
- redukt na původní jazyk  $L$ :  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$



## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .



## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:**

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”

## Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$

# Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**



# Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = \mathsf{T}(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $\mathsf{T}\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**  $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$ , na  $V$  jsou i položky  $\mathsf{T}\varphi(x/t)$  pro každý konstantní  $L_C$ -term, tj. pro každý prvek “ $t$ ”  $\in A$ ;

# Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**  $P = T(\forall x)\varphi(x)$ , na  $V$  jsou i položky  $T\varphi(x/t)$  pro každý konstantní  $L_C$ -term, tj. pro každý prvek “ $t$ ”  $\in A$ ; z ind. předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“t”)]$  pro každé “ $t$ ”  $\in A$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

# Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**  $P = T(\forall x)\varphi(x)$ , na  $V$  jsou i položky  $T\varphi(x/t)$  pro každý konstantní  $L_C$ -term, tj. pro každý prvek “ $t$ ”  $\in A$ ; z ind. předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“t”)]$  pro každé “ $t$ ”  $\in A$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Jazyk s rovností:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B}$ , pro  $\mathcal{B}$  máme, zbytek z Pozorování  $\square$



## Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

## Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:**

## Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

# Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se kanonický model  $\mathcal{A}$  s větví  $V$  shoduje.



# Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se kanonický model  $\mathcal{A}$  s větví  $V$  shoduje.

Bud'  $\mathcal{A}'$  redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk teorie  $T$  (zapomeň pomocné symboly).

# Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $\mathbb{F}\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se kanonický model  $\mathcal{A}$  s větví  $V$  shoduje.

Bud'  $\mathcal{A}'$  redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk teorie  $T$  (zapomeň pomocné symboly).

Protože je  $V$  dokončená, obsahuje  $\mathbb{T}\alpha$  pro všechny axiomy  $T$ . Model  $\mathcal{A}$ , tedy i  $\mathcal{A}'$ , splňuje všechny axiomy a máme  $\mathcal{A}' \models T$ .

# Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $\mathbb{F}\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se kanonický model  $\mathcal{A}$  s větví  $V$  shoduje.

Bud'  $\mathcal{A}'$  redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk teorie  $T$  (zapomeň pomocné symboly).

Protože je  $V$  dokončená, obsahuje  $\mathbb{T}\alpha$  pro všechny axiomy  $T$ . Model  $\mathcal{A}$ , tedy i  $\mathcal{A}'$ , splňuje všechny axiomy a máme  $\mathcal{A}' \models T$ .

Protože se ale  $\mathcal{A}$ , tedy i  $\mathcal{A}'$ , shoduje i s položkou  $\mathbb{F}\varphi$  v kořeni, máme  $\mathcal{A}' \not\models \varphi$ , což dává protipříklad, a máme  $T \not\models \varphi$ , spor.  $\square$

## 7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

---

$$\vdash = \models$$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- $T$  je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ )
- $T$  je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ , ale ne obojí (jinak by byla sporná)



$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- $T$  je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ )
- $T$  je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ , ale ne obojí (jinak by byla sporná)

**Věta (O dedukci):**  $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- $T$  je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ )
- $T$  je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ , ale ne obojí (jinak by byla sporná)

**Věta (O dedukci):**  $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**Důkaz:** Stačí dokázat:  $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$ . To je snadné.  $\square$



## Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

## Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.  
(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

# Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

**Důkaz:** V  $T$  není dokazatelný spor. Dokončené tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je  $L$ -redukt kanonického modelu pro tuto větev.  $\square$

# Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

**Důkaz:** V  $T$  není dokazatelný spor. Dokončené tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je  $L$ -redukt kanonického modelu pro tuto větev.  $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

# Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

**Důkaz:** V  $T$  není dokazatelný spor. Dokončené tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je  $L$ -redukt kanonického modelu pro tuto větev.  $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

**Věta (O kompaktnosti):** Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.



# Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

**Důkaz:** V  $T$  není dokazatelný spor. Dokončené tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je  $L$ -redukt kanonického modelu pro tuto větev.  $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

**Věta (O kompaktnosti):** Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

**Důkaz:** Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud  $T$  nemá model, je sporná, tedy  $T \vdash \perp$ . Vezměme nějaký **konečný** tablo důkaz  $\perp$  z  $T$ . K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů  $T$ , ty tvoří konečnou podteorii  $T' \subseteq T$ , která nemá model.  $\square$



## Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel

## Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$

## Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

- každá konečná část  $T$  má model

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část  $T$  má model
- dle věty o kompaktnosti: i  $T$  má model



# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

- každá konečná část  $T$  má model
- dle věty o kompaktnosti: i  $T$  má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme  $\mathcal{A}$ )

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část  $T$  má model
- dle věty o kompaktnosti: i  $T$  má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme  $\mathcal{A}$ )
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část  $T$  má model
- dle věty o kompaktnosti: i  $T$  má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme  $\mathcal{A}$ )
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek  $c^{\mathcal{A}}$ , který je větší než každé  $n \in \mathbb{N}$  (tzn. větší než hodnota termu  $\underline{n}$  v nestandardním modelu  $\mathcal{A}$ )

# Hilbertovský kalkulus

---



- jiný, původní dokazovací systém

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- schémata logických axiomů ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)



# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- schémata logických axiomů ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
  - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
  - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
  - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$v predikátové logice navíc:

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
  - používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
  - **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
    - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
    - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
    - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- v predikátové logice navíc:
- (iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$       je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)

(i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

v predikátové logice navíc:

(iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$

(v)  $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná ve  $\varphi$

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
  - používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
  - **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
    - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
    - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
    - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- v predikátové logice navíc:
- (iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$
  - (v)  $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná ve  $\varphi$
  - (vi) **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností

# Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky  $\neg$ ,  $\rightarrow$
- **schémata logických axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  jsou lib. výroky/formule)
  - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

v predikátové logice navíc:

  - (iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$
  - (v)  $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná ve  $\varphi$
  - (vi) **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností
- **odvozovací pravidla:**
  - v predikátové logice navíc:

$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)}$	$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$
---	---

- **hilbertovský důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , ve které pro každé  $i \leq n$ :



- **hilbertovský důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , ve které pro každé  $i \leq n$ :
  - $\varphi_i$  je **logický axiom**, nebo

- **hilbertovský důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , ve které pro každé  $i \leq n$ :
  - $\varphi_i$  je **logický axiom**, nebo
  - $\varphi_i$  je **axiom teorie** ( $\varphi_i \in T$ ), nebo

- **hilbertovský důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , ve které pro každé  $i \leq n$ :
  - $\varphi_i$  je **logický axiom**, nebo
  - $\varphi_i$  je **axiom teorie** ( $\varphi_i \in T$ ), nebo
  - $\varphi_i$  lze odvodit z předchozích pomocí **odvozovacího pravidla**

- **hilbertovský důkaz** výroku  $\varphi$  z teorie  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , ve které pro každé  $i \leq n$ :
  - $\varphi_i$  je **logický axiom**, nebo
  - $\varphi_i$  je **axiom teorie** ( $\varphi_i \in T$ ), nebo
  - $\varphi_i$  lze odvodit z předchozích pomocí **odvozovacího pravidla**
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme:  **$T \vdash_H \varphi$**

## Příklad (jen ve výrokové logice)

## Příklad (jen ve výrokové logice)

Ukažme, že pro teorii  $T = \{\neg\varphi\}$  a pro libovolný výrok  $\psi$  platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

## Příklad (jen ve výrokové logice)

Ukažme, že pro teorii  $T = \{\neg\varphi\}$  a pro libovolný výrok  $\psi$  platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

Hilbertovský důkaz:

1.  $\neg\varphi$  *axiom teorie*
2.  $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  *logický axiom (i)*
3.  $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  *modus ponens na 1. a 2.*
4.  $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$  *logický axiom (iii)*
5.  $\varphi \rightarrow \psi$  *modus ponens na 3. a 4.*





**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
- axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
- axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
- axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
  - je-li  $T \models \varphi$  a  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ , potom  $T \models \psi$

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
- axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
  - je-li  $T \models \varphi$  a  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ , potom  $T \models \psi$
  - je-li  $T \models \varphi$ , potom  $T \models (\forall x)\varphi$  □

**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
  - axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí
  - modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
    - je-li  $T \models \varphi$  a  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ , potom  $T \models \psi$
    - je-li  $T \models \varphi$ , potom  $T \models (\forall x)\varphi$
- 

**Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.