NAIL062 P&P Logic: Worksheet 7 – Properties of structures and theories

Cíle výuky: Po absolvování cvienί student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formáln definovat, uvést píklady
- rozumí pojmm [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i píslusné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na píklad
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formáln definovat, uvést píklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestrojit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktue, umí najít definovatelné podmnoiny/relace

Píklady na cvienί

Problem 1. Uvame $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}; +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Urete vechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované njakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ jet njaké dalí podstruktury?
(d) Je kadá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je kadá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárn ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

Problem 2. Bu $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ tleso racionálních ísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozíit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárn ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Oznáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ mnoinu vech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

Problem 3. Mjme teorii $T = \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T kompletní?
(b) Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, a na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napite vechny kompletní a alespo ti nekompletní.
(c) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \lor x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Problem 4. Bu T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \land (x + z = 0) \to y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq\rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \land \ \neg(x = y)$$

Najdte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.
(a) $(-x) + x = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Problem 5. Mjme jazyk $L = \langle F\rangle$ s rovností, kde F je binární funkní symbol. Najdte formule definující následující mnoiny (bez parametr):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných ísel
(b) mnoina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktue $\mathcal{A}$
(c) mnoina vech nejvýe jednoprvkových podmnoin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup\rangle$
(d) mnoina vech prvoísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot\rangle$

Dalí píklady k procviení

Problem 6. Bu $T = \{\neg E(x,x), E(x,y) \to E(y,x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relaní symbol a φ vyjaduje, e "existují práv tyi prvky".

(a) Uvame rozíení $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Urete poet (a na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.
(b) Má T njakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdvodnte.

Problem 7. Nech $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkní, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjaduje, e "existují práv 3 prvky".

(a) Urete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napite dv z nich. *(3b)*
(b) Nech $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výe. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uvete zdvodnní. *(2b)*

Problem 8. Mjme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$ s rovností a následující dv formule:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad P(x,y) \leftrightarrow R(x,y) \wedge \neg x = y \\ \psi: &\quad P(x,y) \to P(x, f(x,y)) \wedge P(f(x,y), y) \end{aligned}$$

Uvame následující L-teorii:

$$\begin{aligned} T = \{&\varphi,\ \psi,\ \neg c = d, \\ &R(x,x), \\ &R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y, \\ &R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z), \\ &R(x,y) \vee R(y,x)\} \end{aligned}$$

(a) Naleznte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T.
(b) Je sentence $(\forall x) R(c,x)$ pravdivá/livá/nezávislá v T? Zdvodnte vechny ti odpovdi.
(c) Naleznte dv neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdvodnte, pro neexistují.
(d) Nech $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uvete zdvodnní.

K zamylení

Problem 9. Nech $T_n = \{\neg c_i = c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ oznauje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ s rovností, kde $c_1, \dots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konené $k \geq 1$ urete poet k-prvkových model teorie T_n a na izomorfismus.
(b) Urete poet spoetných model teorie T_n a na izomorfismus.
(c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdvodnte.