NAIL062 V&P Logika: 7. sada příkladů – Vlastnosti struktur a teorií

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojmům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladě
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestrojit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

Příklady na cvičení

Příklad 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}; +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?
(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

Příklad 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Označme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T kompletní?
(b) Kolik má teorie T jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
(c) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Příklad 4. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \to y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq\rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$-x = y \quad\leftrightarrow\quad x + y = 0$$
$$x < y \quad\leftrightarrow\quad x \leq y \ \wedge\ \neg(x = y)$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

(a) $(-x) + x = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Příklad 5. Mějme jazyk $L = \langle F\rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel
(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$
(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup\rangle$
(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot\rangle$

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Buď $T = \{\neg E(x,x), E(x,y) \to E(y,x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

(a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.

(b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdůvodněte.

Příklad 7. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

(a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. *(3b)*

(b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

Příklad 8. Mějme jazyk $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$ s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned} \varphi :& \quad P(x,y) \leftrightarrow R(x,y) \wedge \neg x = y \\ \psi :& \quad P(x,y) \to P(x, f(x,y)) \wedge P(f(x,y), y) \end{aligned}$$

Uvažme následující L-teorii:

$$\begin{aligned} T = \{&\varphi,\ \psi,\ \neg c = d, \\ &R(x,x), \\ &R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y, \\ &R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z), \\ &R(x,y) \vee R(y,x)\} \end{aligned}$$

(a) Nalezněte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T.

(b) Je sentence $(\forall x)R(c,x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.

(c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.

(d) Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je teorie v jazyce $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uveďte zdůvodnění.

K zamyšlení

Příklad 9. Nechť $T_n = \{\neg c_i = c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ s rovností, kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konečné $k \geq 1$ určete počet k-prvkových modelů teorie T_n až na izomorfismus.

(b) Určete počet spočetných modelů teorie T_n až na izomorfismus.

(c) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.