

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na  $[T]$ -ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace, umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladech

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Necht  $|\mathbb{P}| = n$  a mějme výrok  $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$  takový, že  $|M(\varphi)| = k$ . Určete počet až na ekvivalenci:

- výroků  $\psi$  takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ,
- teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- kompletních teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \cup \{\varphi\}$  je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii  $\{\varphi, \psi\}$  kde  $|M(\psi)| = p$ . Spočítejte až na ekvivalenci:

- výroky  $\chi$  takové, že  $\varphi \vee \psi \models \chi$ ,
- teorie, ve kterých platí  $\varphi \vee \psi$ .

**Řešení.** (a) Podmínku vyjádříme pomocí množin modelů:  $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$  nebo  $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$ .

Víme, že všech modelů je  $2^n$ , a  $|M(\varphi)| = k$ . Chceme spočítat, kolik je možných množin  $M(\psi)$ . Podmínku  $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$  splňuje  $2^{2^n-k}$  množin (tj. tolik je nadmnožin dané  $k$ -prvkové množiny uvnitř  $2^n$ -prvkové množiny), podmínku  $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$  splňuje  $2^k$  množin. Musíme ale být opatrní, abychom případ  $M(\psi) = M(\varphi)$  nezapočítali dvakrát. Celkem máme  $2^{2^n-k} + 2^k - 1$  možných množin modelů, tedy výroků  $\psi$  až na ekvivalenci.

- $T \models \varphi$  právě když  $M(T) \subseteq M(\varphi)$ , takových množin  $M(T)$  je  $2^k$
- Navíc máme podmínku  $|M(T)| = 1$ , 1-prvkových podmnožin  $k$ -prvkové množiny je  $k$ .
- Přeloženo do řeči modelů, podmínka říká, že  $M(T \cup \{\varphi\}) \neq \emptyset$ . Máme  $M(T \cup \{\varphi\}) = M(T, \varphi) = M(T) \cap M(\varphi)$  (jde o modely, ve kterých platí zároveň  $T$  a  $\varphi$ ). Počítáme tedy kolik možných množin  $M(T)$  má neprázdný průnik s  $k$ -prvkovou množinou  $M(\varphi)$ . To lze vyjádřit např. jako  $(2^k - 1) \cdot (2^{2^n-k})$ , kde  $2^k - 1$  je počet možných (neprázdných) “průniků”  $M(T) \cap M(\varphi)$ , a  $2^{2^n-k}$  znamená, že pro modely, ve kterých neplatí  $\varphi$ , si můžeme libovolně zvolit, zda budou v naší množině.
- Protože  $\{\varphi, \psi\}$  je sporná, víme, že  $\emptyset = M(\varphi, \psi) = M(\varphi) \cap M(\psi)$ . Počítáme množiny  $M(\chi)$  takové, že  $M(\varphi \vee \psi) \subseteq M(\chi)$ . Díky Lindenbaum-Tarského algebře víme, že  $M(\varphi \vee \psi) = M(\varphi) \cup M(\psi)$ . Z disjunktnosti máme  $|M(\varphi) \cup M(\psi)| = k + p$ , snadno spočítáme, že množných množin modelů  $M(\chi)$  je  $2^{2^n-(k+p)}$ .
- $M(T)$  musí být podmnožinou  $(k+p)$ -prvkové  $M(\varphi \vee \psi)$ , je jich tedy  $2^{k+p}$ .

**Příklad 2.** Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení: (a) výrok  $\varphi$  níže, (b)  $\varphi \wedge \neg p_1$ , (c)  $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$ .

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

**Řešení.** (a) Sestrojíme implikační graf. Zjistíme, že má dvě komponenty silné souvislosti:  $C = \{p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$  a  $\bar{C} = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, p_5\}$ , nevede mezi nimi žádná hrana. Po kontrakci komponent tedy máme dvouvrcholový graf  $\mathcal{G}^*$  bez hran, ten má dvě topologická uspořádání:  $(C, \bar{C})$  a  $(\bar{C}, C)$ , která odpovídají modelům  $(0, 0, 1, 0, 1)$  a  $(1, 1, 0, 1, 0)$ .

(b) Komponenty jsou stejné, ale do  $\mathcal{G}^*$  přibude hrana  $C \rightarrow \bar{C}$ , tedy jediné topologické uspořádání je  $(C, \bar{C})$ , což odpovídá modelu  $(0, 0, 1, 0, 1)$ .

(c) Implikační graf je nyní silně souvislý, tedy jeho jediná komponenta obsahuje (všechny) dvojice opačných literálů. To znamená, že výrok je nesplnitelný.

**Příklad 3.** Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$\begin{aligned} &(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ &(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \end{aligned}$$

**Řešení.** Provádíme postupně jednotkovou propagaci přes literály  $p_1, p_2, p_3, \neg p_4$ , zbývá výrok  $\neg p_5 \vee \neg p_6$ . Ten stačí ohodnotit tak, aby alespoň jedna z výrokových proměnných  $p_5, p_6$  byla ohodnocená nulou. Modely výroku jsou tedy:  $\{(1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 1)\}$

**Příklad 4.** Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

**Řešení.** Výrok neobsahuje jednotkovou klauzuli ani literál s čistým výskytem, musíme tedy větvit, např. přes  $p_1$ :

- $Z \varphi \wedge p_1$  dostáváme po jednotkové propagaci  $\neg p_2 \wedge p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$ , po jednotkové propagaci přes  $\neg p_2$  dostáváme  $\square \wedge \neg p_3$ , což obsahuje prázdnou klauzuli  $\square$ , tedy je nesplnitelné.
- $Z \varphi \wedge \neg p_1$  dostáváme po jednotkové propagaci  $\neg p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_3$ , po jednotkové propagaci přes  $\neg p_2$  dostáváme  $\neg p_3 \wedge p_3$ , po jednotkové propagaci přes  $\neg p_3$  dostáváme prázdnou klauzuli  $\square$ , tedy opět je nesplnitelné.

V obou (všech) větvích výpočtu jsme dokázali nesplnitelnost, výrok je tedy nesplnitelný.

**Příklad 5.** Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

**Řešení.** Řešení jen naznačíme. Jako jazyk zvolme  $\mathbb{P} = \{p_{uv} \mid u, v \in V\}$ , kde  $p_{uv}$  bude znamenat, že vrchol  $u$  je v topologickém uspořádání (ostře) před  $v$ . To, že jde o ostré uspořádání, vyjádříme pomocí následujících axiomů:

- $\neg p_{vv}$  pro všechna  $v \in V$
- $p_{uv} \rightarrow \neg p_{vu}$  pro všechna  $u, v \in V$
- $p_{uv} \wedge p_{vw} \rightarrow p_{uw}$  pro všechna  $u, v, w \in V$

Zbývá vyjádřit, že všechny grafové hrany vedou v topologickém uspořádání dopředu:

- $p_{uv}$  pro všechny hrany  $(u, v) \in E$

Nakonec axiomy výše převedeme do CNF, v množinovém zápisu dostáváme:

$$S = \{\{\neg p_{vv}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vu}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vw}, \neg p_{uw}\} \mid u, v, w \in V\} \cup \{\{p_{uv}\} \mid (u, v) \in E\}$$

## DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Uvažme následující výroky  $\varphi$  a  $\psi$  nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$ :

$$\varphi = (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$\psi = s \rightarrow q$$

- (a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků  $\chi$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $\varphi \wedge \psi \models \chi$ .
- (b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .
- (c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takovou, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .

**Příklad 7.** Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$\begin{aligned} &(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge \\ &(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e) \end{aligned}$$

**Příklad 8.** Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu 4:

- (a)  $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
- (b)  $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

**Příklad 9.** Lze obarvit čísla od 1 do  $n$  dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice  $a + b = c$  pro žádná  $1 \leq a < b < c \leq n$ ? Sestrojte výrokovou formuli  $\varphi_n$  v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve  $n = 8$ .

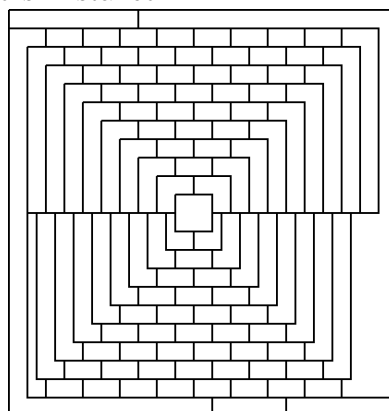
Zkuste si doma: Napište skript generující  $\varphi_n$  v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího  $n$  pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici  $a < b < c$  takovou, že  $a + b = c$ ).

**Příklad 10.** Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa krajů Česka



(b) Těžší instance



## K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 11.** Pro danou formuli  $\varphi$  v CNF najděte a 3-CNF formuli  $\varphi'$  takovou, že  $\varphi'$  je splnitelná, právě když  $\varphi$  je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce  $\varphi'$  je-li dána  $\varphi$  (tj. *redukcí* z problému SAT do problému 3-SAT).

**Příklad 12.** Zakódujte problém setřídění dané  $n$ -tice celých čísel do SAT.

**Příklad 13.** Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.