

Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Program

- korektnost a úplnost, kanonický model
- věta o kompaktnosti, Löwenheim-Skolemova věta
- hilbertovský kalkulus

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.4-7.6 z Kapitoly 7 (+ Sekce 4.8)

7.4 Korektnost a úplnost

Stejně jako ve výrokové logice:

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ (úplnost) “co platí, lze dokázat”

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ (úplnost) “co platí, lze dokázat”

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = \text{T}\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = \text{F}\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz:

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větví, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i
- V_{i+1} je prodloužením V_i a \mathcal{A}_{i+1} je expanzí \mathcal{A}_i

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i
- V_{i+1} je prodloužením V_i a \mathcal{A}_{i+1} je expanzí \mathcal{A}_i

Hledaná větev v τ je $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$, L_C -expanze \mathcal{A} je 'limita' \mathcal{A}_i : vyskytuje-li se $c \in C$ na V_i , interpretuj jako v \mathcal{A}_i , jinak libovolně.

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i
- V_{i+1} je prodloužením V_i a \mathcal{A}_{i+1} je expanzí \mathcal{A}_i

Hledaná větev v τ je $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$, L_C -expanze \mathcal{A} je 'limita' \mathcal{A}_i : vyskytuje-li se $c \in C$ na V_i , interpretuj jako v \mathcal{A}_i , jinak libovolně.

Báze: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou) V_0 v τ_0 .

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ “svědek”:** SÚNO $P = T(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $T\varphi(x/c)$, \mathcal{A}_{i+1} je expanze \mathcal{A}_i o $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ “svědek”:** SÚNO $P = T(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $T\varphi(x/c)$, \mathcal{A}_{i+1} je expanze \mathcal{A}_i o $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$.
- **typ “všichni”:** V_{i+1} je prodloužení V_i o atomické tablo. SÚNO nová položka $T\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C -term t .

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ “svědek”:** SÚNO $P = T(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $T\varphi(x/c)$, \mathcal{A}_{i+1} je expanze \mathcal{A}_i o $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$.
- **typ “všichni”:** V_{i+1} je prodloužení V_i o atomické tablo. SÚNO nová položka $T\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C -term t . Model \mathcal{A}_{i+1} je libovolná expanze \mathcal{A}_i o nové symboly z t . $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$, tedy se shoduje. \square

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz:

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, necht' $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, necht' $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T , což je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, nechť $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T , což je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

Model \mathcal{A} se shoduje s kořenem $F\varphi$, tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly $c \in C$ tak, že se výsledná L_C -expanze \mathcal{A}' shoduje s nějakou větví V .

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, nechť $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T , což je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

Model \mathcal{A} se shoduje s kořenem $F\varphi$, tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly $c \in C$ tak, že se výsledná L_C -expanze \mathcal{A}' shoduje s nějakou větví V . Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s $T\psi$ a zároveň $F\psi$ pro nějakou L_C -sentenci ψ . \square

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C -termů

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C -termů
- pro n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } TR(s_1, \dots, s_n)$$

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C -termů
- pro n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C -termů
- pro n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

- speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = "c"$

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve V (tabla z T) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C -termů
- pro n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a " s_1 ", ..., " s_n " z A :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

- speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = "c"$

(funkce $f^{\mathcal{A}}$ je "vytvoření" termu ze symbolu f a vstupních termů)

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
 - $d^{\mathcal{A}} = “d”$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
 - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
 - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
 - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
 - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
 - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
 - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
 - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
 - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$
 - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$.

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathbb{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- **kanon. model:** L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
 - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
 - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
 - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$
 - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$.
- redukt na původní jazyk L : $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} a $=^A$ je identita na A

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$“s_1” =^B “s_2” \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} a $=^A$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$
(symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v \mathcal{B} a jako identitu v \mathcal{A})

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} a $=^A$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$
(symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v \mathcal{B} a jako identitu v \mathcal{A})

Všimněte si:

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} a $=^A$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$
(symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v \mathcal{B} a jako identitu v \mathcal{A})

Všimněte si:

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model \mathcal{B} pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} a $=^A$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$
(symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v \mathcal{B} a jako identitu v \mathcal{A})

Všimněte si:

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný
- v jazyce s rovností může být i konečný

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\mathcal{F} \neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=^{\mathcal{B}}} = \{[“d”]_{=^{\mathcal{B}}}, [“f(d)”]_{=^{\mathcal{B}}}, [“c_0”]_{=^{\mathcal{B}}}, [“f(c_0)”]_{=^{\mathcal{B}}}, [“c_1”]_{=^{\mathcal{B}}}, [“f(c_1)”]_{=^{\mathcal{B}}}, \dots\}$$

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^{\mathcal{B}} s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$\mathcal{B}/_{=^{\mathcal{B}}} = \{[d]_{=^{\mathcal{B}}}, [f(d)]_{=^{\mathcal{B}}}, [c_0]_{=^{\mathcal{B}}}, [f(c_0)]_{=^{\mathcal{B}}}, [c_1]_{=^{\mathcal{B}}}, [f(c_1)]_{=^{\mathcal{B}}}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^{\mathcal{B}}} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
 - $A = B/_{=B}$, $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo \mathcal{T}^* pro $\mathcal{F} \neg R(d)$ má jedinou, bezespornou \mathcal{V}
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
 - $A = B/_{=B}$, $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
 - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$,
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo \mathcal{T}^* pro $\mathcal{F} \neg R(d)$ má jedinou, bezespornou \mathcal{V}
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
 - $A = B/_{=B}$, $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
 - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$,
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$
 - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=B}$.

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovností
opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$
nebo $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
 - $A = B/_{=B}$, $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
 - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$,
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$
 - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=B}$.
- redukt na původní jazyk L : $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz:

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ”

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ” $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = \mathbb{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ” $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = \mathsf{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $\mathsf{T}\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ” $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:** $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$, na V jsou i položky $\mathsf{T}\varphi(x/t)$ pro každý konstantní L_C -term, tj. pro každý prvek “ t ” $\in A$;

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = \mathsf{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $\mathsf{T}\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ” $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:** $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$, na V jsou i položky $\mathsf{T}\varphi(x/t)$ pro každý konstantní L_C -term, tj. pro každý prvek “ t ” $\in A$; z ind. předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“t”)]$ pro každé “ t ” $\in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V .

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:** $P = T(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké “ c ” $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:** $P = T(\forall x)\varphi(x)$, na V jsou i položky $T\varphi(x/t)$ pro každý konstantní L_C -term, tj. pro každý prvek “ t ” $\in A$; z ind. předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“t”)]$ pro každé “ t ” $\in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Jazyk s rovností: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B}$, pro \mathcal{B} máme, zbytek z Pozorování \square

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz:

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z T s $\mathbb{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z T s $F\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev V , a dle Lemmatu se kanonický model \mathcal{A} s větví V shoduje.

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z T s $F\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev V , a dle Lemmatu se kanonický model \mathcal{A} s větví V shoduje.

Bud' \mathcal{A}' redukt \mathcal{A} na jazyk teorie T (zapomeň pomocné symboly).

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z T s $\mathbb{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev V , a dle Lemmatu se kanonický model \mathcal{A} s větví V shoduje.

Bud' \mathcal{A}' redukt \mathcal{A} na jazyk teorie T (zapomeň pomocné symboly).

Protože je V dokončená, obsahuje $\mathbb{T}\alpha$ pro všechny axiomy T . Model \mathcal{A} , tedy i \mathcal{A}' , splňuje všechny axiomy a máme $\mathcal{A}' \models T$.

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T , potom je tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z T s $\mathbb{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev V , a dle Lemmatu se kanonický model \mathcal{A} s větví V shoduje.

Bud' \mathcal{A}' redukt \mathcal{A} na jazyk teorie T (zapomeň pomocné symboly).

Protože je V dokončená, obsahuje $\mathbb{T}\alpha$ pro všechny axiomy T . Model \mathcal{A} , tedy i \mathcal{A}' , splňuje všechny axiomy a máme $\mathcal{A}' \models T$.

Protože se ale \mathcal{A} , tedy i \mathcal{A}' , shoduje i s položkou $\mathbb{F}\varphi$ v kořeni, máme $\mathcal{A}' \not\models \varphi$, což dává protipříklad, a máme $T \not\models \varphi$, spor. \square

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

$$\vdash = \models$$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií důsledků jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- T je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \perp$)
- T je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- T je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \perp$)
- T je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- T je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \perp$)
- T je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$. To je snadné. \square

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $F \perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L -redukt kanonického modelu pro tuto větev. \square

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $F \perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L -redukt kanonického modelu pro tuto větev. \square

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $F \perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L -redukt kanonického modelu pro tuto větev. \square

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $F \perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L -redukt kanonického modelu pro tuto větev. \square

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud T nemá model, je sporná, tedy $T \vdash \perp$. Vezměme nějaký **konečný** tablo důkaz \perp z T . K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů T , ty tvoří konečnou podteorii $T' \subseteq T$, která nemá model. \square

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

- každá konečná část T má model

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme \mathcal{A})

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme \mathcal{A})
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme \mathcal{A})
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$, který je větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tzn. větší než hodnota termu \underline{n} v nestandardním modelu \mathcal{A})

Hilbertovský kalkulus

- jiný, původní dokazovací systém

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
- schémata logických axiomů (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
- **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
- **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
 - používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
 - **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- v predikátové logice navíc:

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
 - používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
 - **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- v predikátové logice navíc:
- (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
- **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)

(i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

v predikátové logice navíc:

(iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ

(v) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
 - používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
 - **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- v predikátové logice navíc:
- (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ
 - (v) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ
 - (vi) **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky \neg , \rightarrow
- **schémata logických axiomů** (φ, ψ, χ jsou lib. výroky/formule)
 - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

v predikátové logice navíc:

 - (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ
 - (v) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ
 - (vi) **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností- **odvozovací pravidla:** v predikátové logice navíc:
 - $$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)}$$
 - $$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$$

- **hilbertovský důkaz** výroku φ z teorie T je **konečná** posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:

- **hilbertovský důkaz** výroku φ z teorie T je **konečná** posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
 - φ_i je **logický axiom**, nebo

- **hilbertovský důkaz** výroku φ z teorie T je **konečná** posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
 - φ_i je **logický axiom**, nebo
 - φ_i je **axiom teorie** ($\varphi_i \in T$), nebo

- **hilbertovský důkaz** výroku φ z teorie T je **konečná** posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
 - φ_i je **logický axiom**, nebo
 - φ_i je **axiom teorie** ($\varphi_i \in T$), nebo
 - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí **odvozovacího pravidla**

- **hilbertovský důkaz** výroku φ z teorie T je **konečná** posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
 - φ_i je **logický axiom**, nebo
 - φ_i je **axiom teorie** ($\varphi_i \in T$), nebo
 - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí **odvozovacího pravidla**
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme: $T \vdash_H \varphi$

Příklad (jen ve výrokové logice)

Příklad (jen ve výrokové logice)

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

Příklad (jen ve výrokové logice)

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

Hilbertovský důkaz:

1. $\neg\varphi$ *axiom teorie*
2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ *logický axiom (i)*
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ *modus ponens na 1. a 2.*
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ *logický axiom (iii)*
5. $\varphi \rightarrow \psi$ *modus ponens na 3. a 4.*

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
 - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, potom $T \models \psi$

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
 - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, potom $T \models \psi$
 - je-li $T \models \varphi$, potom $T \models (\forall x)\varphi$

□

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
 - axiomy z T jistě v T také platí
 - modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
 - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, potom $T \models \psi$
 - je-li $T \models \varphi$, potom $T \models (\forall x)\varphi$
-

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.