NAIL062 V&P Logika: 10. sada příkladů – Rezoluční metoda v PL

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

Příklady na cvičení

Příklad 1. *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.* Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Řešení. *Nejprve zvolíme vhodný jazyk. V textu identifikujeme vlastnost objektů "x je holič" a vztah dvou objektů "(kdo) x holí (koho) y". Použijeme jazyk $L = \langle B, S\rangle$ bez rovnosti, kde B je unární relační symbol, $B(x)$ má význam "x je holič (barber)", S je binární relační symbol, $S(x,y)$ znamená "x holí (shaves) y".*

V tomto jazyce formalizujeme tvrzení ze zadání:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe:*
$$\varphi_1 \;=\; (\forall x)(B(x) \to (\forall y)(\neg S(y,y) \to S(x,y)))$$
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe:*
$$\varphi_2 \;=\; \neg(\exists x)(B(x) \wedge (\exists y)(S(x,y) \wedge S(y,y)))$$
- *Neexistují žádní holiči:*
$$\psi \;=\; \neg(\exists x)B(x)$$

Naším cílem je ukázat, že v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ platí sentence ψ. Dokazujeme sporem, vyjdeme tedy z teorie $T \cup \{\neg\psi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$. Pomocí skolemizace k ní najdeme ekvisplnitelnou CNF formuli S. Najdeme rezoluční zamítnutí S, čímž ukážemem že S a tedy i $T \cup \{\neg\psi\}$ je nesplnitelná.

Převedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, a převedeme do CNF:

- $\varphi_1 \;\rightsquigarrow\; B(x) \to (\neg S(y,y) \to S(x,y)) \;\sim\; \neg B(x) \vee S(y,y) \vee S(x,y)$
- $\varphi_1 \;\rightsquigarrow\; \neg(B(x) \wedge S(x,y) \wedge S(y,y)) \;\sim\; \neg B(x) \vee \neg S(x,y) \vee \neg S(y,y)$
- $\neg\psi \rightsquigarrow B(c)$ *(kde c je nový konstantní symbol)*

Před skolemizací se ujistěte, že máte sentence. A nezapomeňte, že musíme skolemizovat sentenci $\neg\psi$, ne ψ. (Negace skolemovy varianty není ekvisplnitelná s negací původní formule! Skolemizací $\neg(\exists x)B(x)$ bychom dostali $\neg B(x)$, čehož negace je ekvivalentní $B(x)$, tj. 'všichni jsou holiči' zatímco správným postupem dostaneme '(svědek) c je holič'.).

V množinovém zápisu tedy máme:

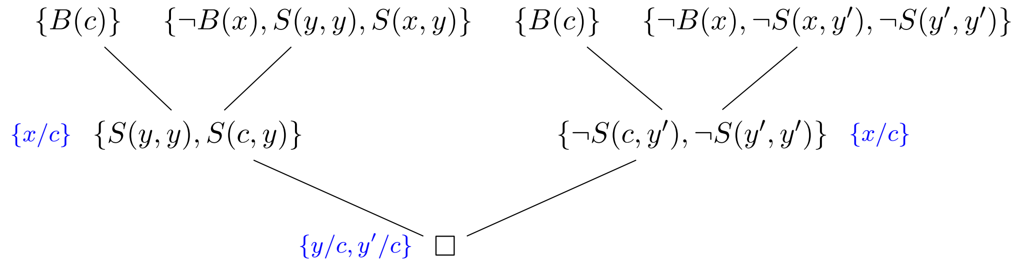
$$S = \{\{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x,y), \neg S(y,y)\}, \{B(c)\}\}$$

Rezoluční zamítnutí:

$$\{B(c)\}, \{\neg B(x), S(y,y), S(x,y)\}, \{S(y,y), S(c,y)\}, \{\neg B(x), \neg S(x,y'), \neg S(y',y')\},$$
$$\{\neg S(c,y'), \neg S(y',y')\}, \square$$

První dvě klauzule jsou z S, třetí jejich rezolventa za použití unifikace $\{x/c\}$. Čtvrtá klauzule je variantou klauzule z S, proměnnou y jsme přejmenovali na y', abychom dodrželi technickou podmínku o disjunktních množinách proměnných v rezolvovaných klauzulích. Pátá klauzule je rezolventou první a čtvrté za použití unifikace $\{x/c\}$. Poslední, prázdná klauzule $\square$ je rezolventou z 3. a 5. klauzule, unifikace $\{y/c, y'/c\}$.

Typicky ale zamítnutí zakreslíme pouze rezolučním stromem, naznačíme i použité unifikace:



Příklad 2. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

(i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
(ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

(a) Vyjádřete sentencemi φ_1, φ_2, φ_3 v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti (P je binární, K unární relační symbol, $P(x,y)$ znamená 'ovce x porodila ovci y', $K(x)$ 'ovce x byla naklonována').
(b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
(c) Najděte rezoluční zamítnutí S, nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
(d) Má S LI-zamítnutí?

Řešení. *Všimněte si, že všechny objekty, o kterých mluvíme, jsou ovce, nepotřebujeme tedy predikát pro 'býti ovcí'. Postup je stejný jako v předchozím příkladě:*

(a) Možností jak formulovat formule je více, pokud se snažíme co nejpřesněji držet textu, dostaneme např.:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\forall x)(((\exists y)P(y,x) \vee K(x)) \wedge \neg((\exists z)P(z,x) \wedge K(x)))\\
\varphi_2 &= \neg(\exists x)(K(x) \wedge (\exists y)P(x,y))\\
\varphi_3 &= (\forall x)((\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists z)P(z,x))
\end{aligned}$$

(b) Vyjdeme z teorie $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ (dokazujeme sporem). Převedeme do PNF, skolemizujeme, odstraníme univerzální kvantifikátory, převedeme do CNF, a zapíšeme v množinovém zápisu:

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(y,x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z,x) \wedge K(x))) \rightsquigarrow (P(f(x),x) \vee K(x)) \wedge \neg(P(z,x) \wedge K(x)) \sim \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}\}$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)\neg(K(x) \wedge P(x,y)) \sim \{\{\neg K(x), \neg P(x,y)\}\}$
- $\neg\varphi_3 \sim (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(P(x,y) \rightarrow P(z,x)) \rightsquigarrow \neg(P(c,d) \rightarrow P(z,c)) \sim \{\{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

$S = \{\{P(f(x),x), K(x)\}, \{\neg P(z,x), \neg K(x)\}, \{\neg K(x), \neg P(x,y)\}, \{P(c,d)\}, \{\neg P(z,c)\}\}$

(c) *Rezoluční strom pro rezoluční zamítnutí $S \vdash_R \square$:*

$$\{P(f(x),x),K(x)\} \qquad \{\neg P(z,c)\}$$

$$\{x/c, z/f(c)\} \quad \{K(c)\} \qquad \{\neg K(x), \neg P(x,y)\}$$

$$\{x/c, z/f(c)\} \quad \{\neg P(c,y)\} \qquad \{P(c,d)\}$$

$$\{y/d\} \quad \square$$

(d) *Ano, v (c) se nám podařilo sestrojit LI-zamítnutí. I kdyby ne, existenci LI-zamítnutí lze nahlédnout z Věty o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule: naše CNF formule S sice není Hornova, ale byla by Hornova pokud bychom zaměnili K za jeho negaci (tj. formalizovali "ovce je nenaklonovaná").*

Příklad 3. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x),\ (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x)),\ (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,x)) \to R(x)),\ (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvisplnitelnou teorii T'.
(b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
(c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
(d) Nalezněte nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

Řešení. *(a) Skolemizací dostáváme:*

$$T' = \{\neg R(x),\ P(c,y) \to P(y,c),\ P(x,y) \wedge P(y,x) \to R(x),\ P(x, f(x))\}$$

(Pozor u třetího axiomu: $(\exists y)$ vytýkáme z antecedentu implikace, změní se na $(\forall y)$).

(b) *Snadno převedeme do CNF:*

$$S = \{\{\neg R(x)\}, \{\neg P(c,y), P(y,c)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,x), R(x)\}, \{P(x, f(x))\}\}$$

(c) *Rezoluční strom pro $S \vdash_R \square$:*

$$\{\neg R(x)\} \qquad \{\neg P(x',y), \neg P(y,x'), R(x')\}$$

$$\{x'/x\} \quad \{\neg P(x,y), \neg P(y,x)\} \qquad \{\neg P(c,y'), P(y',c)\}$$

$$\{x/c, y'/y\} \quad \{\neg P(c,y)\} \qquad \{P(x, f(x))\}$$

$$\{x/c, y/f(c)\} \quad \square$$

(Všimněte si, kde potřebujeme přejmenovat proměnné, aby rezolvované klauzule měly disjunktní množiny proměnných.)

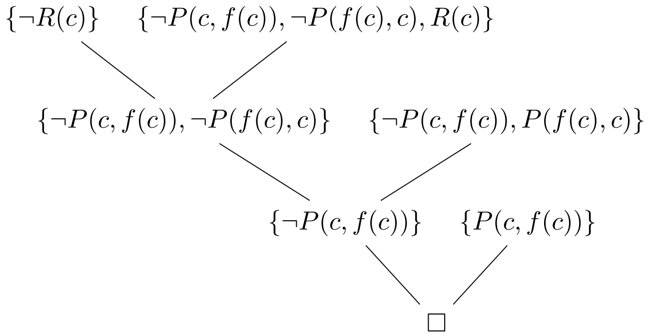
(d) *K nalezení konjunkce základních instancí axiomů můžeme použít sestrojené rezoluční zamítnutí. Pro každý list rezolučního stromu, který je označkovaný klauzulí C (až na přejmenování je to klauzule z S), aplikujeme na C postupně všechny unifikace na cestě od tohoto listu až ke kořeni:*

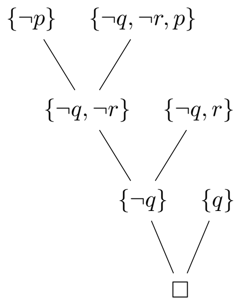
- $\neg R(x) \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg R(c)$
- $\neg P(x', y) \vee \neg P(y, x') \vee R(x') \cdot \{x'/x\} \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)$
- $\neg P(c, y') \vee P(y', c) \cdot \{x/c, y'/y\} \cdot \{x/c, y/f(c)\} = \neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)$
- $P(x, f(x)) \cdot \{x/c, y/f(c)\} = P(c, f(c))$

Pokud by v některých klauzulích zůstaly proměnné, substituujeme za ně libovolný konstantní term. Dostáváme nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S:

$$\neg R(c) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee \neg P(f(c), c) \vee R(c)) \wedge (\neg P(c, f(c)) \vee P(f(c), c)) \wedge P(c, f(c))$$

Její rezoluční zamítnutí 'na úrovni výrokové logiky' má stejnou strukturu jako rezoluční zamítnutí S:





Pokud bychom chtěli základní instance původní teorie T, musíme se podívat, ze kterých axiomů T vznikly naše klauzule, a aplikovat stejné unifikace, výsledkem by bylo:

$$\neg R(c) \wedge (P(c, f(c)) \rightarrow P(f(c), c)) \wedge (P(c, f(c)) \wedge P(f(c), c) \rightarrow R(c)) \wedge P(c, f(c))$$

Další příklady k procvičení

Příklad 4. Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\},\ \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\},\ \{\neg H(v, a)\},$$
$$\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\},\ \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

Příklad 5. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s \rangle$ bez rovnosti, kde j, h, q jsou konstantní symboly ('jablka/hrušky/švestky') a $x < y$ vyjadřuje, že *"ovoce y je lepší než ovoce x"*. Víme, že:

(i) Relace "být lepší" je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
(ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že *(iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.*

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce L.
(b) Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli S, která je nesplnitelná, právě když z (i) a (ii) vyplývá (iii). Napište S v množinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S, která je nesplnitelná.
(e) Je S zamítnutelná LI-rezolucí?

Příklad 6. Buď $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, c konstantní symbol, a axiom φ vyjadřuje *“Existuje alespoň* 5 *prvků, pro které platí* $U(x)$*.”*

(a) Najděte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 7. Nechť $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že “existují maximálně 4 prvky”.

(a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

Příklad 8. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

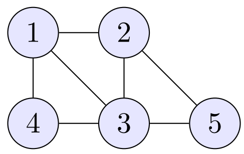
(a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
(b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 9. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle\leq, c, d\rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.

(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T?
(b) Napište dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 10. Mějme následující graf.

(a) Najděte všechny automorfismy.
(b) Které podmnožiny množiny vrcholů V jsou definovatelné? Uveďte definující formule. *(Nápověda: Využijte (a).)*
(c) Které binární relace na V jsou definovatelné?



K zamyšlení

Příklad 11. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

(a) Buď $\mathcal{R} = \langle\mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r+1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0?
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
(c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní?
(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spočetná struktura $\mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$?