Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Sedmá přednáška

Program

- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky
- tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.7-6.9 z Kapitoly 6, Sekce 7.1-7.3 z Kapitoly 7

6.7 Extenze teorií

Extenze teorie

Stejně jako ve výrokové logice, je-li T teorie v jazyce L:

- extenze: T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$
- jednoduchá: $L' = L$
- konzervativní: $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$
- ekvivalentní: T' extenzí T a T extenzí T' (obě v témž jazyce)

Jsou-li T, T' ve stejném jazyce L:

- T' je extenze T, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$
- T' je ekvivalentní s T, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- ve výrokové logice: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- v predikátové logice: expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L-teorii T a L'-teorii T':

(i) T' je extenzí T $\Leftrightarrow$ L-redukt každého modelu T' je model T

(ii) T' je konzervativní extenzí T $\Leftrightarrow$ T' je extenzí T, a každý model T lze expandovat do L' na nějaký model T'

Poznámka: Důkaz (ii) $\Rightarrow$ vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat $\rightsquigarrow$ L-sentence platná v T ale ne v T')

Důkaz:(i) $\Rightarrow$ Buď $\mathcal{A}'$ model T', $\mathcal{A}$ jeho L-redukt. Protože T' je extenzí, platí v ní, tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z L, tedy platí i v $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho L-redukt $\mathcal{A}$ je modelem T, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět φ je v L).

(ii) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ lze expandovat na nějaký $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali $T \models \varphi$. $\square$

Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný definující formulí (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit existenci a jednoznačnost funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze jednoznačně expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

Definice relačního symbolu

nový n-ární relační symbol R lze definovat lib. formulí $\psi(x_1, \ldots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol $\neq$ definovaný formulí $\neg x_1 = x_2$; tj. požadujeme, aby: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$; tj. platí: $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést $\leq$ takto: $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát $\mathrm{Leaf}(x)$: $\mathrm{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ v jazyce L. Označme jako L' rozšíření jazyka L o nový n-ární relační symbol R. Extenze teorie T o definici R formulí ψ je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \ldots, x_n) \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Definice relačního symbolu: vlastnosti

Tvrzení:

(i) T' je konzervativní extenze T.

(ii) Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'

(ii) atomickou podformuli s novým symbolem R, tj. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$$

kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné ψ na zcela nové) $\square$

Definice funkčního symbolu: příklady

vztah $f(x_1, \dots, x_n) = y$ definujeme formulí $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$; pro každý vstup $(x_1, \dots, x_n)$ musí existovat jednoznačný výstup y

1. Teorie grup: binární funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \;\leftrightarrow\; x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá x, y existuje jednoznačné z splňující definici

2. Teorie lineárních uspořádání: binární funkční symbol min

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě $(x \leq y \vee y \leq x)$
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici: $\min^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)$ nemusí existovat

Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ v jazyce L. Označme L' rozšíření L o nový n-ární funkční symbol f. Nechť platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ (existence)
- $T \models \psi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z$ (jednoznačnost)

Potom extenze teorie T o definici f formulí ψ je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) = y \;\leftrightarrow\; \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\}$$

- ψ definuje v modelu $(n+1)$-ární relaci, ta musí být funkcí
- je-li ψ tvaru $t(x_1, \ldots, x_n) = y$ pro term t, vždy to platí

Tvrzení:

(i) T' je konzervativní extenze T.

(ii) Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) modely T lze jednoznačně expandovat na modely T'

Pokračování důkazu

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu f, jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů $f(\dots f(\dots)\dots)$, potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term $f(t_1, \dots, t_n)$ novou proměnnou z: výsledek φ^*
2. φ zkonstruujeme takto: $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$ (kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení e platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy: $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ $\square$

Definice konstantního symbolu

- speciální případ: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu c formulí $\psi(y)$:

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \ \leftrightarrow \ y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol $\frac{1}{2}$, definice formulí $y \cdot (1 + 1) = 1$, tj. přidáním $\frac{1}{2} = y \ \leftrightarrow \ y \cdot (1 + 1) = 1$?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese charakteristiky 2, např. $\mathbb{Z}_2$, nemá rovnice $y \cdot (1 + 1) = 1$ řešení
- ale v teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li axiom $\neg(1 + 1 = 0)$, už ano; např. v $\mathbb{Z}_3$ máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

Extenze o definice

L'-teorie T' je extenzí L-teorie T o definice, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

Tvrzení: (snadno indukcí)

- Každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'.
- T' je konzervativní extenze T.
- Pro L'-formuli φ' existuje L-formule φ, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Příklad: $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$

$L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností, zavedeme $<$ a unární $-$ přidáním axiomů:

$$T' = T \cup \{-x = y \ \leftrightarrow \ x + y = 0,$$
$$x < y \ \leftrightarrow \ x \leq y \wedge \neg(x = y)\}$$

Formule $-x < y$ v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$ s rovností je v T' ekvivalentní formuli: $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

6.8 Definovatelnost ve struktuře

Definovatelné množiny

- formule φ s jednou volnou proměnnou x ... "vlastnost" prvků
- ve struktuře definuje množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků a takových, že φ platí při ohodnocení kde $e(x) = a$)
- $\varphi(x, y)$ definuje binární relaci, atp.

Množina definovaná $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme: $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje v daném grafu množinu všech izolovaných vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$ definuje v tělese $\mathbb{R}$ množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ definuje v uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$ relaci ostrého uspořádání $<^S$

Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako parametry
- zápis $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: volné proměnné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$

Mějme $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$), strukturu $\mathcal{A}$ (v témž jazyce), $\bar{b} \in A^k$. Množina definovaná $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$:

$$\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro $B \subseteq A$ označíme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z B.

Pozorování: $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje $\emptyset$ a A^n: je to podalgebra potenční algebry $\mathcal{P}(A^n)$.

Např. pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a vrchol $v \in V(\mathcal{G})$ je $\varphi^{\mathcal{G},v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu v.

Aplikace: databázové dotazy

- relační databáze: jedna nebo více tabulek, také relace
- řádky tabulky jsou záznamy (records), také tice (tuples)
- struktura v čistě relačním jazyce

Movies

title	director	actor
Forrest Gump	R. Zemeckis	T. Hanks
Philadelphia	J. Demme	T. Hanks
Batman Returns	T. Burton	M. Keaton
⋮	⋮	⋮

Program

cinema	title	time
Atlas	Forrest Gump	20:00
Lucerna	Forrest Gump	21:00
Lucerna	Philadelphia	18:30
⋮	⋮	⋮

Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. agregační funkce)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

"Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?"

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina $\varphi^{\text{Database},\text{'T. Hanks'}}(x_{\mathrm{cinema}}, x_{\mathrm{time}}, y_{\mathrm{actor}})$
- definovaná ve struktuře $\text{Database} = \langle D, \mathrm{Program}, \mathrm{Movies} \rangle$
- jejíž doména je $D = \{\texttt{'Atlas'}, \texttt{'Lucerna'}, \ldots, \texttt{'M. Keaton'}\}$
- s parametrem `'T. Hanks'`,
- definující formule $\varphi(x_{\mathrm{cinema}}, x_{\mathrm{time}}, y_{\mathrm{actor}})$:

$$(\exists y_{\mathrm{title}})(\exists y_{\mathrm{director}})(\mathrm{Program}(x_{\mathrm{cinema}}, y_{\mathrm{title}}, x_{\mathrm{time}}) \wedge \mathrm{Movies}(y_{\mathrm{title}}, y_{\mathrm{director}}, y_{\mathrm{actor}}))$$

6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

Teorie Booleových algeber $L = \langle -, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$ s rovností

- asociativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- komutativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
- distributivita $\wedge$ vůči $\vee$, $\vee$ vůči $\wedge$:
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- absorpce:
$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
- komplementace:
$$x \wedge (-x) = \perp$$
$$x \vee (-x) = \top$$
- netrivialita:
$$-(\perp = \top)$$

- dualita: záměnou $\wedge$ s $\vee$ a $\perp$ s $\top$ získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: 2-prvková B. algebra $\langle \{0,1\}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na izomorfismus (f^n je f po složkách):
$$\langle \{0,1\}^n, f_\neg^n, f_\wedge^n, f_\vee^n, (0,\ldots,0), (1,\ldots,1) \rangle$$
- jsou izomorfní potenčním algebrám $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

Vztah výrokové a predikátové logiky

- výrokovou logiku lze 'simulovat' v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou Booleovské termy, konstanty $\perp, \top$ představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, algebra výroků daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

Na druhou stranu...

- máme-li otevřenou formuli φ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické formule pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí φ
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. Skolemizace
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme nulární relace
- $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$

Kapitola 7: Tablo metoda v predikátové logice

7.1 Neformální úvod

Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
$$

Tablo metoda v predikátové logice

- opět vždy předpokládáme, že jazyk L je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být sentence: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít generální uzávěry)
- redukce položek: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde φ, ψ jsou sentence), ale čtyři nové případy pro kvantifikátory:
  - typ "svědek": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
  - typ "všichni": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit, $\varphi(x)$ by typicky nebyla sentence
- místo toho za x substituujeme konstantní term t: $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky ("svědek" vs. "všichni")

Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk L rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$, označíme L_C
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol $c \in C$
- **typ "svědek":** dosadíme nový $c \in C$ (dosud na větvi není)
  - pro $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$
  - c hraje roli prvku, který položku 'splňuje'
- **typ "všichni":** substituujeme libovolný konstantní L_C-term
  - pro $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/t)$
  - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny t ('použijeme vše, co víme')
- **konvence:** kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu "všichni" (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup:** nejprve zredukujeme položky typu "svědek", poté zjistíme, co 'o svědcích říkají' položky typu "všichni"

7.2 Formální definice

Jazyk, položky, atomická tabla

- buď L spočetný jazyk bez rovnosti.
- označme L_C rozšíření L o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních L_C-termů: $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ
- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je L_C-sentence
- položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou typu "svědek"
- položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou typu "všichni"
- atomická tabla jsou násl. položkami označkované stromy:

Atomická tabla pro kvantifikátory

φ je libovolná L_C-sentence, x proměnná, t_i konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

	$\forall$	$\exists$
True	$\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$	$\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{T}\varphi(x/c_i)$
False	$\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{F}\varphi(x/c_i)$	$\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$

Atomická tabla pro logické spojky

φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence

	$\neg$	$\land$	$\lor$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\varphi\land\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\lor\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{T}\psi & \mathrm{F}\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\land\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\lor\psi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{F}\psi & \mathrm{T}\psi \end{array}$

Formální definice tabla

- konečné tablo z teorie T je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
  - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
    je-li P typu "svědek", můžeme použít jen $c_i \in C$, který dosud na V není (pro typ "všichni" lze použít lib. konst. L_C-term t_i)
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
  - τ_i jsou konečná tabla z T
  - τ_0 je jednoprvkové tablo
  - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni

konvence: kořen atom. tabla nezapisujeme není-li P typu "všichni"

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou sentenci ψ, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející P, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}\psi$ resp. $\mathrm{F}\psi$ pro atomickou sentenci, nebo
  - není typu "všichni" a vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na V), nebo
  - je typu "všichni" a všechny její výskyty na větvi V jsou na V redukované.

Kdy je výskyt položky typu "všichni" redukovaný?

Výskyt položky P typu "všichni" na V je i-tý, má-li právě $i-1$ předků označených P, a i-tý výskyt je redukovaný na V, pokud

- P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň
- na V je položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term (tj., typicky, už jsme za x substituovali t_i)

NB: je-li položka typu "všichni" na V redukovaná, má na V nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní L_C-termy

Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz sentence φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\mathrm{F}(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{F}(\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{F}Q(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

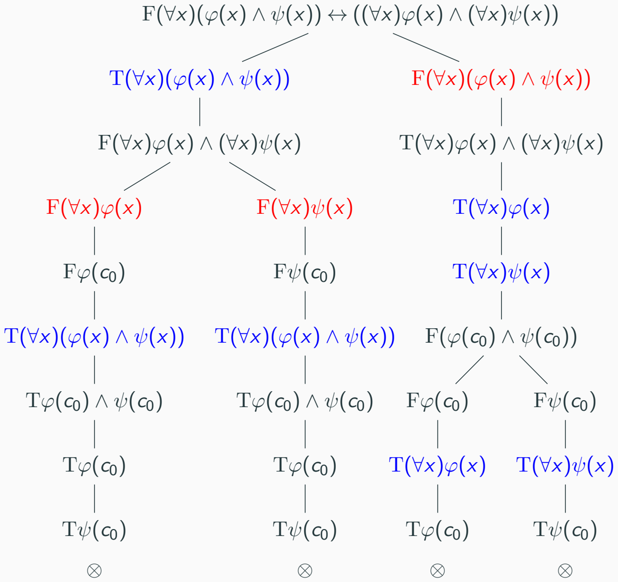
$$\mathrm{T}P(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\mathrm{T}P(c_0) \rightarrow Q(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \mathrm{F}P(c_0) & \mathrm{T}Q(c_0) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Ještě příklad (φ, ψ jsou formule s jedinou volnou proměnnou x)



(c_0 lze použít jako nový ve všech případech: na dané větvi se dosud nevyskytuje)

Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu "všichni" dosadit každý L_C term t_i

Systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové s položkou R, a pro $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. je-li typu "všichni", její výskyt není redukovaný)
- nejprve definujeme τ_i' vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P, kde je-li P typu "všichni" a má-li ve vrcholu k-tý výskyt, dosadíme k-tý L_C-term t_k, je-li typu "svědek", substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším i, které na větvi zatím není
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$)

Konečnost a systematičnost důkazů

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: k-tý výskyt položky typu "všichni" redukujeme když na něj narazíme: připojíme $(k+1)$-ní výskyt a dosadíme k-tý L_C-term t_k. Zbytek důkazu jako ve výrokové logice. $\square$

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T.

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

Důsledek (Systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.

7.3 Jazyky s rovností

Rovnost

$1 + 0 = 0 + 1$? identita celých čísel, výrazů, množin, unifikovatelnost termů (v Prologu), ...

Tablo je čistě syntaktický objekt, ale $=^{\mathcal{A}}$ má být identita na A. Jak toho docílit?

Mějme dokončenou bezespornou větev tabla s položkou $\mathrm{T} c_1 = c_2$. V kanonickém modelu musí platit nejen $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$, ale také:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$ právě když $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$

To vynutíme přidáním axiomů rovnosti, $=^{\mathcal{A}}$ bude kongruence $\mathcal{A}$ (ekvivalence, která se chová dobře k funkcím a relacím).

Poté vezmeme faktorstrukturu $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}}$, v ní už je $=^{\mathcal{B}}$ identita.

Kongruence a faktorstruktura

Buď $\sim$ ekvivalence na A, $f\colon A^n \to A$, $R \subseteq A^n$. Říkáme, že $\sim$ je:

- kongruence pro f, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$
- kongruence pro R, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $R(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R(b_1, \ldots, b_n)$

Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence na A, která je kongruencí pro všechny funkce a relace $\mathcal{A}$.

Faktorstruktura (podílová struktura) $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/_\sim$ v témž jazyce, doména $A/_\sim$ je množina všech rozkladových tříd A podle $\sim$, funkce a relace definujeme pomocí reprezentantů:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\sim$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$

Axiomy rovnosti

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností:

(i) $x = x$

(ii) pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

(iii) pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně rovnosti:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

- symetrie a tranzitivita plynou z (iii) pro $=$ (dokažte si)
- z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace $=^{\mathcal{A}}$ je ekvivalence
- axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že $=^{\mathcal{A}}$ je kongruence

V tablo metodě pro jazyk s rovností implicitně přidáme axiomy rovnosti (přesněji jejich generální uzávěry, potřebujeme sentence).

Tablo důkaz s rovností

Je-li T teorie v jazyce L s rovností, označme jako T^* rozšíření T o generální uzávěry axiomů rovnosti pro L.

- tablo důkaz z teorie T je tablo důkaz z T^*
- podobně pro tablo zamítnutí, a obecně jakékoliv tablo z T

Pozorování:

- Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, potom i $\mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita.
- Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

(Použijeme při konstrukci kanonického modelu v důkazu úplnosti.)