NAIL062 P&P Logic: Worksheet 9 – Prep for resolution in predicate logic

**Cíle výuky:** Po absolvování cvienı́ student

- umí pevádt formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí pevést danou otevenou teorii do CNF, zapsat v mnoinové reprezentaci
- zná Herbrandovu vtu, umí ji demonstrovat na píklad, popsat Herbrandv model

## Píklady na cvienı́

**Problem 1.** Pevete následující formule do PNF. Poté najdte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$
(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$
(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

**Solution.** *(a) Volné promnné jsou $x, z$. (Mete si nakreslit strom formule.) Nejprve nahradíme formuli variantou, kde pejmenujeme vázané promnné aby byly rzné, a rzné od volných. Dostáváme ekvivalentní formuli:*

$$(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))$$

*Nyní postupujeme aplikací pravidel pro pevod do PNF, podle stromu formule (posouváme kvantifikátory nahoru). Poadí vytýkání volíme tak, e nejprve vytkneme ty kvanfitikátory, které nakonec (a budou v kvantifikátorovém prefixu, tj. nahoe u koene stromu) budou existenní, a teprve potom ty, které budou univerzální (abychom zbyten nevytvoili 'závislost' ve Skolemov variant). Dostáváme:*

$$\begin{aligned}
&(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))\\
\sim\ &(\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)(\forall x_2)(R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))\\
\sim\ &(\exists y_2)((\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\forall x_2)(R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))\\
\sim\ &(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))
\end{aligned}$$

*(Pozor na pravidla pro implikaci: pi vytknutí z antecedentu se mní kvantifikátor, alternativn lze nejprve pepsat implikaci $\varphi \to \psi$ jako $\neg\varphi \vee \psi$. Bute také opatrní, aby promnná ve vytknutém kvantifikátoru nebyla volná v druhé ásti formule, tomu jsme ale zajistili pejmenováním.)*

*Nezapomete, e pro skolemizaci potebujeme sentenci, tj. generální uzávr formule:*

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))$$

*Skolemova varianta je potom:*

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,f(x,z)) \vee Q(x,f(x,z))))$$

*Zde $f$ je nový, binární funkní symbol. (Pozor, skolemizujeme-li teorii, vechny funkní symboly pouité pi skolemizaci vech axiom musí být nové, navzájem rzné.)*

*Skolemova varianta je z definice sentence, ale i její otevené jádro $(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,f(x,z)) \vee Q(x,f(x,z)))$ je ekvisplnitelné (ale typicky ne ekvivalentní!) s pvodní formuli.*

*(b) Postupujeme stejn jako v (a), ale ekvivalenci nejprve pepíeme na dvojici implikací:*

$$\begin{aligned}
&(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)\\
\sim\ &((\exists x)R(x,y) \to (\forall y)P(x,y)) \wedge ((\forall y)P(x,y) \to (\exists x)R(x,y))\\
\sim\ &((\exists x_1)R(x_1,y) \to (\forall y_1)P(x,y_1)) \wedge ((\forall y_2)P(x,y_2) \to (\exists x_2)R(x_2,y))\\
\sim\ &(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,y_2) \to R(x_2,y)))\\
\sim\ &(\forall x)(\forall y)(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,y_2) \to R(x_2,y)))
\end{aligned}$$

*Skolemova varianta ($f, g$ jsou nové, binární funkní symboly):*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,g(x,y)) \to R(f(x,y),y)))$$

*(c) Vimnte si, e formule je sentence. Obdobným postupem:*

$$\begin{aligned}
&\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)\\
\sim\ &\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x')(\exists y')R(x',y')) \wedge (\forall x'')\neg(\exists y'')Q(x'',y'')\\
\sim\ &(\forall x)(\exists y)(\forall x')(\forall y')(\forall x'')(\forall y'')(\neg(P(x,y) \to R(x',y')) \wedge \neg Q(x'',y''))
\end{aligned}$$

**Problem 2.** Pevete na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapite v mnoinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d)))$
(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \to R(x,y))$

**Solution.** *Nejprve vytvoíme Skolemovu variantu (viz pedchozí píklad), poté vezmeme její otevené jádro, a pevedeme do CNF pomocí ekvivalentních úprav (stejn jako ve výrokové logice):*

*(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$ u je sentence v PNF, Skolemova varianta: $(\forall y)(P(f(y),y))$ ($f$ nový, unární funkní symbol). Otevené jádro: $P(f(y),y)$, CNF v mnoinové reprezentaci:*

$$S = \{\{P(f(y),y)\}\}$$

*(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y) \sim (\exists y)(\forall x)\neg P(x,y)$, Skolemova varianta $(\forall x)\neg P(x,c)$ ($c$ nový konstantní symbol), CNF: $S = \{\{\neg P(x,c)\}\}$*

*(c) Symboly $c, d$ chápejme jako konstantní symboly, ne promnné (dle konvence), jde tedy u o sentenci. Pevod do PNF je snadný:*

$$\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d))) \sim (\forall x)\neg((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d)))$$

*To u je univerzální sentence, skolemizace není poteba (je sama svojí skolemovou variantou). Odstraníme $(\forall x)$ a pevedeme do CNF: $(P(x) \vee P(x)) \wedge (P(x) \vee \neg P(d)) \wedge (\neg P(c) \vee P(x)) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, po zjednoduení $P(x) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, mnoinová reprezentace: $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(c), \neg P(d)\}\}$*

*(d) Skolemova varianta: $(\forall y)(P(c,f(y)) \wedge P(f(y),y) \to R(c,y))$, CNF v mnoinové reprezentaci: $S = \{\{\neg P(c,f(y)), \neg P(f(y),y), R(c,y)\}\}$.*

**Problem 3.** Nech $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x,y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti. Najdte otevenou teorii $T'$ ekvisplnitelnou s $T$. Pevete $T'$ do CNF a výslednou formuli $S$ zapite v mnoinové reprezentaci.

**Solution.** *Axiomy u jsou v PNF, ale pro skolemizaci potebujeme sentence (generální uzávry): $T \sim \{(\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$. Skolemizujeme (vechny* *symboly musí být nové):* $\{R(c), (\forall x)\neg P(x, f(x)), (\forall x)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(g(y), z))\}$. *Odstraníme univerzální kvanfitikátory:*

$$T' = \{R(c), \neg P(x, f(x)), \neg R(x) \vee P(g(y), z)\}$$

*Ta u je v CNF, mnoinový zápis:* $S = \{\{R(c)\}, \{\neg P(x, f(x))\}, \{\neg R(x), P(g(y), z)\}\}$

*Vimnte si, e S je nesplnitelná: to vidíme 'na úrovni výrokové logiky', substitujeme-li do druhé klauzule* $\{x/g(c)\}$ *a do tetí klauzule* $\{x/c, y/c, z/f(g(c))\}$*, dostáváme základní instance:*

$$S' = \{\{R(c)\}, \{\neg P(g(c), f(g(c)))\}, \{\neg R(c), P(g(c), f(g(c)))\}\}$$

*Díky ekvisplnitelnosti s S je tedy nesplinitelná i pvodní teorie T.*

**Problem 4.** Nech $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\varphi_1 = \quad (\exists y)R(y, x)$$
$$\varphi_2 = \quad (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte oteven axiomatizovanou teorii $T'$ (pípadn v irím jazyce $L'$) ekvisplnitelnou s $T$.
(b) Bu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^A \rangle$, kde $(n, m) \in R^A$ práv kdy $n$ dlí $m$. Naleznte expanzi $\mathcal{A}'$ $L$-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka $L'$ takovou, e $\mathcal{A}' \models T'$. (Mnoina vech pirozených ísel $\mathbb{N}$ obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

**Solution.** *(a) Nejprve skolemizujeme:*

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)R(y, x)$, *Skolemova varianta:* $(\forall x)R(f(x), x)$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$, *Skolemova varianta:* $(\forall x)(\forall y)(\forall w)(R(g(x, y), x) \wedge R(g(x, y), y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))))$

*Nakonec odstraníme kvantifikátorové prefixy, a tetí axiom ve form konjunkce pro pehlednost rozdlíme:*

$$T' = \{R(f(x), x), R(g(x, y), x), R(g(x, y), y), R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))\}$$

*(b) Uvdomíme si význam axiom: první íká, e kadé íslo má njakého dlitele, a druhý vyjaduje existenci nejvtího spoleného dlitele. Potebujeme odpovídajícím zpsobem interpretovat funkní symboly, nap.:*

- $f^{\mathcal{A}'}(n) = n$ *(pro vechna* $n \in \mathbb{N}$*)*
- $g^{\mathcal{A}'}(n, m) = \gcd(n, m)$ *(pro vechna* $n, m \in \mathbb{N}$*),*

*Dostáváme tedy strukturu* $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}'}, g^{\mathcal{A}'} \rangle$ *v jazyce* $L' = \langle R, f, g \rangle$ *s rovností, kde* $R^{\mathcal{A}}$ *je relace dlitelnosti jako výe.*

*Vimnte si, e tato* $\mathcal{A}'$ *není jediná moná. Mohli bychom také zvolit* $f^{\mathcal{A}'}(n) = 1$. *To je dvod, pro skolemizací dostaneme ekvisplnitelnou, ale typicky ne ekvivalentní teorii.*

**Problem 5.** Sestrojte Herbrandv model dané teorie, nebo najdte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiom ($c, d$ jsou konstantní symboly v daném jazyce).

(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

**Solution.** *(a) T je sporná. Nesplnitelná je následující konjunkce základních instancí axiom:*

$$(\neg P(c) \vee Q(f(c), d)) \wedge \neg Q(f(c), d) \wedge P(c)$$

*To lze snadno ovit rezolucí ‘na úrovni výrokové logiky’, tj. kadou atomickou formuli chápeme jako prvovýrok: oznaíme-li* $P(c)$ *jako* $p$ *a* $Q(f(c),d)$ *jako* $q$*, máme* $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p$*.*

*Jak meme tyto základní instance axiom najít? Herbrandova vta dává návod: sestrojíme (konený) tablo dkaz sporu z teorie* $T_{\text{ground}}$ *sestávající ze vech základních instancí axiom* $T$*. Alternativn, pouijeme stejný postup jako pi hledání model: sestrojíme* tablo zamítnutí *nkterého z axiom* $\varphi_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$*, tj. sporné tablo z teorie* $T_{\text{ground}}$ *s polokou* $\mathrm{T}\varphi_{\text{ground}}$ *v koeni. Pi vhodné volb axiom dojdeme ke spornému tablu snadno:*

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{T}P(c) \\
| \\
\mathrm{T}\neg Q(f(c),d) \\
| \\
\mathrm{F}Q(f(c),d) \\
| \\
\mathrm{T}\neg P(c) \vee Q(f(c),d) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\mathrm{T}\neg P(c) & \mathrm{T}Q(f(c),d) \\
| & \otimes \\
\mathrm{F}P(c) & \\
\otimes &
\end{array}
\end{array}
$$

*Axiomy* $T_{\text{ground}}$ *(tj. základní instance axiom* $T$*), teré jsme v tablo zamítnutí pouili (mode), patí do nesplnitelné konjunkce výe.*

*V pítí sad píklad si ale ukáeme lepí postup: nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiom meme také získat z* rezoluního zamítnutí $S$ *(vzniklého pevodem* $T$ *do CNF).*

(b) *Tato teorie není sporná, má tedy Herbrandv model (model, jeho univerzum tvoí vechny konstantní termy jazyka, a kde interpretace funkních symbol odpovídají “vytvoení termu” aplikací daného symbolu).*

*V takto jednoduchém pípad meme Herbrandv model zkonstruovat sami:*

$$\mathcal{H} = \langle H; P^{\mathcal{H}}, Q^{\mathcal{H}}, f^{\mathcal{H}}, c^{\mathcal{H}}, d^{\mathcal{H}} \rangle$$

- $\mathcal{H} = \{$ *“c”, “d”, “f(c)”, “f(d)”, “f(f(c))”, “f(f(d))”*, $\dots\}$
- $c^{\mathcal{H}} =$ *“c”*, $d^{\mathcal{H}} =$ *“d”*
- $f^{\mathcal{H}}($*“t”*$) =$ *“f(t)”*
- $P^{\mathcal{H}} = H$
- $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$

*Relace* $P^{\mathcal{H}} = H$ *a* $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$ *jsme zvolili jako úplnou unární resp. binární relaci, aby bylo snadno vidt, e vechny axiomy jsou splnny. Zbytek je dán z definice Herbrandova modelu.*

*Vysvtlíme si také postup daný dkazem Herbrandovy vty. Podobn jako výe bychom zkonstruovali dokonené tablo z* $T_{\text{ground}}$ *pro poloku* $\mathrm{T}P(c)$ *(napíklad), ale tentokrát tablo nebude sporné (teorie* $T_{\text{ground}}$ *není sporná). Herbrandv model získáme z libovolné (dokonené) bezesporné vtve, a to stejným postupem jako kanonický model, s tím rozdílem, e do jazyka* *nepidáváme pomocné konstantní symboly* $c_0, c_1, \ldots$ *jako jsme to dlali v tablo metod. Vimnte si, e nejsou poteba: protoe je teorie* $T$ otevená, *nejsou v ní ani v* $T_{\text{ground}}$ *ádné kvantifikátory, tedy nemusíme redukovat ádné poloky typu "svdek". (Mete si zkusit kousek tabla zkonstruovat, ale vyjde pomrn sloité.)*

*(c) Není sporná, v Herbrandov modelu lze zvolit nap.* $P^{\mathcal{H}} = H \times \{\text{“}f(t)\text{”} \mid t \in H\}$, *tj. v relaci jsou takové dvojice term, kde druhý zaíná funkním symbolem* $f$.

*(d) Teorie je sporná. V axiomech nevidíme ádný konstantní symbol, proto si musíme jeden do jazyka pidat, bume tedy v jazyce* $L = \langle P, f, g, c\rangle$ *(bez rovnosti). Sporná, nesplnitelná konjunkce základních instancí axiom je nap.:*

$$P(g(c), f(g(c))) \wedge \neg P(c, g(c)) \wedge (P(g(c), f(g(c))) \rightarrow P(c, g(c)))$$

## Dalí píklady k procviení

**Problem 6.** Teorie tles $T$ jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ obsahuje jeden axiom $\varphi$, který není otevený: $x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, e $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z$.

(a) Najdte Skolemovu variantu $\varphi_S$ formule $\varphi$ s novým funkním symbolem $f$.
(b) Uvame teorii $T'$ vzniklou z $T$ nahrazením $\varphi$ za $\varphi_S$. Platí $\varphi$ v $T'$?
(c) Lze kadý model $T$ *jednoznan* roziit na model $T'$?

Nyní uvame formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(d) Platí v $T$ axiomy existence a jednoznanosti pro $\psi(x, y)$ a promnnou $y$?
(e) Sestrojte extenzi $T''$ teorie $T$ o definici symbolu $f$ formulí $\psi$.
(f) Je $T''$ ekvivalentní teorii $T'$?
(g) Najdte $L$-formuli, která je v $T''$-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

**Problem 7.** Víme, e platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Kadá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *ádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: *"Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi."*. Sestrojte píslunou CNF formuli $S$, a pokuste se najít i její rezoluní zamítnutí.

## K zamylení

**Problem 8.** Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní pvodní formuli, ovte, e platí:

(a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$