Jedenáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Jedenáctá přednáška

Program

- LI-rezoluce a Prolog
- elementární ekvivalence
- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- ω-kategoricita a úplnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 8.7 z Kapitoly 8, Sekce 9.1-9.3 z Kapitoly 9

8.7 LI-rezoluce (více podrobností ve skriptech, VL v Sekci 5.4)

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,

  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,

  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

  kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,
  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S

Lineární důkaz a LI-důkaz

- **Lineární důkaz** klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

  kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,
  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- **Lineární zamítnutí** S je lineární důkaz $\square$ z S
- **LI-důkaz** je lin. důkaz, kde vš. B_i jsou varianty klauzulí z S

Lineární důkaz a LI-důkaz

- **Lineární důkaz** klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

  kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,
  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- **Lineární zamítnutí** S je lineární důkaz $\square$ z S
- **LI-důkaz** je lin. důkaz, kde vš. B_i jsou varianty klauzulí z S
- C **LI-dokazatelná** z S, $S \vdash_{LI} C$, pokud existuje LI-důkaz

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

  kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,
  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S
- LI-důkaz je lin. důkaz, kde vš. B_i jsou varianty klauzulí z S
- C LI-dokazatelná z S, $S \vdash_{LI} C$, pokud existuje LI-důkaz
- S je LI-zamítnutelná, pokud $S \vdash_{LI} \square$

Lineární důkaz a LI-důkaz

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

  kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S, $C_{n+1} = C$,
  - C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
  - B_i varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S
- LI-důkaz je lin. důkaz, kde vš. B_i jsou varianty klauzulí z S
- C LI-dokazatelná z S, $S \vdash_{LI} C$, pokud existuje LI-důkaz
- S je LI-zamítnutelná, pokud $S \vdash_{LI} \square$
- korektnost (lineární i LI-rezoluce) je zřejmá

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz:

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz:

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál
- Pravidlo: klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál
- Pravidlo: klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- Fakt: pozitivní jednotková klauzule

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál
- Pravidlo: klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- Fakt: pozitivní jednotková klauzule
- Cíl: neprázdná klauzule bez pozitivního literálu

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál
- Pravidlo: klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- Fakt: pozitivní jednotková klauzule
- Cíl: neprázdná klauzule bez pozitivního literálu
- Programové klauzule: pravidla a fakta

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S, právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) $\square$

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma $\square$

- Hornova formule: množina Hornových klauzulí
- Hornova klauzule: nejvýše jeden pozitivní literál
- Pravidlo: klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- Fakt: pozitivní jednotková klauzule
- Cíl: neprázdná klauzule bez pozitivního literálu
- Programové klauzule: pravidla a fakta
- Program: Hornova formule obsahující jen programové klauzule

Program v Prologu

```
son(X,Y):-father(Y,X),man(X).
son(X,Y):-mother(Y,X),man(X).
man(charlie).
father(bob,charlie).
mother(alice,charlie).

?-son(charlie,X).
```

$\{son(X,Y), \neg father(Y,X), \neg man(X)\}$

$\{son(X,Y), \neg mother(Y,X), \neg man(X)\}$

$\{man(charlie)\}$

$\{father(bob, charlie)\}$

$\{mother(alice, charlie)\}$

$\{\neg son(charlie, X)\}$

LI-rezoluce v Prologu

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X) son(charlie, X)$?

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X) son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X) son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \dots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \land \cdots \land A_k)$

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X) son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \dots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$ má LI-zamítnutí začínající G

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X)son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \ldots (\exists X_n)(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$ má LI-zamítnutí začínající G

Důkaz:

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X) son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \dots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$ má LI-zamítnutí začínající G

Důkaz: Plyne z Důkazu sporem a Úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule (Program je vždy splnitelný). $\square$

LI-rezoluce v Prologu

Platí v programu daný existenční dotaz, $P \models (\exists X)son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$ v proměnných $X_1, \dots, X_n$ jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$ má LI-zamítnutí začínající G

Důkaz: Plyne z Důkazu sporem a Úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule (Program je vždy splnitelný). $\square$

Je-li odpověď na dotaz kladná, chceme znát i výstupní substituci σ, tj. složení unifikací z rez. kroků, zúžené na proměnné v G. Platí:

$$P \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_k)\sigma$$

Příklady

Příklady

```
?-son(charlie,X).
```

Příklady

```
?-son(charlie,X).
```

$\{\neg son(c,X)\}$	$\{\neg father(X,c), \neg man(c)\}$	$\{\neg father(X,c)\}$	$\square$
$\{son(X',Y'), \neg father(Y',X'), \neg man(X')\}$	$\{man(c)\}$	$\{father(b,c)\}$	
$\{X'/c, Y'/X\}$	$\emptyset$	$\{X/b\}$	

Příklady

`?-son(charlie,X).`

$\{\neg son(c,X)\}$ — $\{\neg father(X,c), \neg man(c)\}$ – $\{\neg father(X,c)\}$ – $\square$

$\{son(X',Y'), \neg father(Y',X'), \neg man(X')\}$ $\qquad$ $\{man(c)\}$ $\qquad$ $\{father(b,c)\}$

$\{X'/c, Y'/X\}$ $\qquad$ $\emptyset$ $\qquad$ $\{X/b\}$

`X=bob` výstupní substituce $\sigma = \{X/b\}$

Příklady

`?-son(charlie,X).`

$\{\neg son(c, X)\}$ — $\{\neg father(X, c), \neg man(c)\}$ – $\{\neg father(X, c)\}$ – $\square$

$\{son(X', Y'), \neg father(Y', X'), \neg man(X')\}$ $\quad$ $\{man(c)\}$ $\quad$ $\{father(b, c)\}$

$\{X'/c, Y'/X\}$ $\quad$ $\emptyset$ $\quad$ $\{X/b\}$

`X=bob` výstupní substituce $\sigma = \{X/b\}$

$\{\neg son(c, X)\}$ — $\{\neg mother(X, c), \neg man(c)\}$ - $\{\neg mother(X, c)\}$ - $\square$

$\{son(X', Y'), \neg mother(Y', X'), \neg man(X')\}$ $\quad$ $\{man(c)\}$ $\quad$ $\{mother(a, c)\}$

$\{X'/c, Y'/X\}$ $\quad$ $\emptyset$ $\quad$ $\{X/a\}$

Příklady

`?-son(charlie,X).`

$$\begin{array}{cccc}
\{\neg son(c,X)\} & \{\neg father(X,c), \neg man(c)\} & \{\neg father(X,c)\} & \square \\
\{son(X',Y'), \neg father(Y',X'), \neg man(X')\} & \{man(c)\} & \{father(b,c)\} & \\
\{X'/c, Y'/X\} & \emptyset & \{X/b\} &
\end{array}$$

`X=bob` výstupní substituce $\sigma = \{X/b\}$

$$\begin{array}{cccc}
\{\neg son(c,X)\} & \{\neg mother(X,c), \neg man(c)\} & \{\neg mother(X,c)\} & \square \\
\{son(X',Y'), \neg mother(Y',X'), \neg man(X')\} & \{man(c)\} & \{mother(a,c)\} & \\
\{X'/c, Y'/X\} & \emptyset & \{X/a\} &
\end{array}$$

`X=alice` výstupní substituce $\sigma = \{X/a\}$

ČÁST III – POKROČILÉ PARTIE

Kapitola 9: Teorie modelů

Teorie modelů

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů

Teorie modelů

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
- bližší matematice než informatice a aplikacím

Teorie modelů

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
- bližší matematice než informatice a aplikacím
- jen několik vybraných dostupných výsledků

Teorie modelů

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
- bližší matematice než informatice a aplikacím
- jen několik vybraných dostupných výsledků

\+ co je třeba pro Gödelovy věty (Kapitola 10)

Teorie modelů

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
- bližší matematice než informatice a aplikacím
- jen několik vybraných dostupných výsledků

+ co je třeba pro Gödelovy věty (Kapitola 10)
+ co se nevešlo jinam

9.1 Elementární ekvivalence

Teorie struktury

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Pozorování: Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Pozorování: Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.

- $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní teorie

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Pozorování: Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.

- $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní teorie
- $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T) \Rightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze T

Teorie struktury

Teorie struktury $\mathcal{A}$ (v jazyce L):

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Pozorování: Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.

- $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní teorie
- $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T) \Rightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze T
- $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$, T kompletní $\Rightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Csq}_L(T) \sim T$

Elementární ekvivalence

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$:

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$:

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí hustoty

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí hustoty
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$:

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí hustoty
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$:

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí hustoty
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$: v $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ne, tedy $\varphi \in \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle) \setminus \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$ pro následující sentenci:

Elementární ekvivalence

L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí hustoty
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$: v $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ne, tedy $\varphi \in \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle) \setminus \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$ pro následující sentenci:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \land \neg x = y \land (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \lor y \leq z))$$

Kompletní jednoduché extenze

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Motivace: ukážeme, že lze-li efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze efektivně dané teorie, potom je rozhodnutelná.

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Motivace: ukážeme, že lze-li efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze efektivně dané teorie, potom je rozhodnutelná.

- algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše j-tý axiom i-té kompletní jednoduché extenze (v nějakém očíslování)

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Motivace: ukážeme, že lze-li efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze efektivně dané teorie, potom je rozhodnutelná.

- algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše j-tý axiom i-té kompletní jednoduché extenze (v nějakém očíslování)
- algoritmus, který postupně vygeneruje všechny axiomy teorie

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je kompletní, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T, ty jsou tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Motivace: ukážeme, že lze-li efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze efektivně dané teorie, potom je rozhodnutelná.

- algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše j-tý axiom i-té kompletní jednoduché extenze (v nějakém očíslování)
- algoritmus, který postupně vygeneruje všechny axiomy teorie

Schopnost efektivně popsat kompletní jedn. extenze je vzácná, vyžaduje silné předpoklady, ale u mnoha důležitých teorií to lze.

Příklad: DeLO*

Příklad: DeLO*

Teorie hustého lin. uspořádání (DeLO*) je extenze teorie uspořádání o linearitu (dichotomii), hustotu, a někdy se přidává netrivialita:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- $x \leq y \wedge \neg\, x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg\, z = x \wedge \neg\, z = y)$
- $(\exists x)(\exists y)(\neg\, x = y)$

Příklad: DeLO*

Teorie hustého lin. uspořádání (DeLO*) je extenze teorie uspořádání o linearitu (dichotomii), hustotu, a někdy se přidává netrivialita:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- $x \leq y \wedge \neg\, x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg\, z = x \wedge \neg\, z = y)$
- $(\exists x)(\exists y)(\neg\, x = y)$

Tvrzení: Buď $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Následující jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze DeLO* (až na ekvivalenci):

- $\mathrm{DeLO} = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^+ = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^- = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^\pm = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Příklad: DeLO*

Teorie hustého lin. uspořádání (DeLO*) je extenze teorie uspořádání o linearitu (dichotomii), hustotu, a někdy se přidává netrivialita:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- $x \leq y \wedge \neg\, x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg\, z = x \wedge \neg\, z = y)$
- $(\exists x)(\exists y)(\neg\, x = y)$

Tvrzení: Buď $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Následující jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze DeLO* (až na ekvivalenci):

- $\text{DeLO} = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^+ = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\text{DeLO}^- = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^\pm = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze DeLO* nemůže existovat.

Jak ukážeme, kompletnost plyne z faktu, že jsou ω-kategorické, tj. mají jediný spočetný model až na izomorfismus.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

Důsledek: Je-li L spočetný bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

Důsledek: Je-li L spočetný bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model $\mathcal{A}$), tedy dle L.-S. věty má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, to znamená $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. $\square$

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

Důsledek: Je-li L spočetný bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model $\mathcal{A}$), tedy dle L.-S. věty má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, to znamená $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. $\square$

Bez rovnosti tedy nelze vyjádřit např. 'model má právě 42 prvků'.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\perp$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^{A}$:

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\bot$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^A$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\bot$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^{A}$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\bot$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^A$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek: Je-li L spočetný s rovností, ke každé nekonečné L-struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\perp$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^A$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek: Je-li L spočetný s rovností, ke každé nekonečné L-struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: Mějme nekonečnou L-strukturu $\mathcal{A}$. Podobně jako v důkazu Důsledku bez rovnosti najdeme spočetnou $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $\mathrm{F}\bot$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^{\mathcal{A}}$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek: Je-li L spočetný s rovností, ke každé nekonečné L-struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: Mějme nekonečnou L-strukturu $\mathcal{A}$. Podobně jako v důkazu Důsledku bez rovnosti najdeme spočetnou $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí pro kažné $n \in \mathbb{N}$ sentence vyjadřující ‘existuje alespoň n prvků’ (což lze pomocí rovnosti snadno zapsat), platí i v $\mathcal{B}$, tedy $\mathcal{B}$ musí být nekonečná. $\square$

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n, pro $n > 0$:

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n, pro $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n, pro $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \ldots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \ \cdots \ \cdot y$

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n, pro $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \ \cdots \ \cdot y$

Důsledek: Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$ není, $x^2 - 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen
- $\mathbb{R}$ není, $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen
- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n, pro $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \ \cdots \ \cdot y$

Důsledek: Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.

Důkaz: Dle Důsledku L.S. věty (s rovností) existuje spočetně nekonečná $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}$. Protože $\mathbb{C}$ je těleso a splňuje ψ_n pro všechna $n > 0$, je i $\mathcal{A}$ algebraicky uzavřené těleso. $\square$

9.2 Izomorfismus struktur

Definice izomorfismu

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:
$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$
- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \ \text{ právě když } \ R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).

Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).

Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \ \text{ právě když } \ R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$,

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \ \text{ právě když } \ R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$, je izomorfní s $\underline{2^n} = \langle \{0,1\}^n, -_n, \wedge_n, \vee_n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$ (operace po složkách) via $h(A) = \chi_A$ (charakt. vektor $A \subseteq X$)

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz:

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \ldots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \ldots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \ldots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důsledek Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.

Důkaz $\equiv\ \Rightarrow\ \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.

Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a',

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$. Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$. Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[e(x/b)]$.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme: $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}'$ že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b\rangle \models \varphi(x/c_a)$, z toho $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$. $\square$

Definovatelnost a automorfismy

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení:

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\})$.

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\}$). Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\})$. Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Potom pro každé $\overline{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\})$. Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Potom pro každé $\overline{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}
\overline{a} \in D \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/h(\overline{b}))] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; h(\overline{a}) \in D.
\end{aligned}$$

$\square$

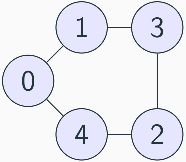
Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:



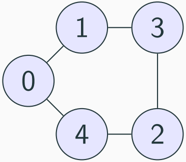
Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i)$ mod 5, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:



- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$

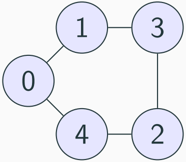
Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1,4\}$, a $\{2,3\}$.

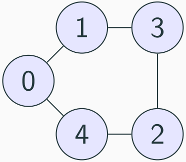
Tyto množiny jsou definovatelné:



- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G},\{0\}} = \{0\}$
- $\{1,4\}$ lze definovat pomocí $E(x,y)$

Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?



Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$

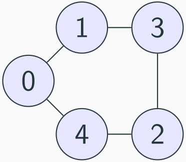
Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1,4\}$, a $\{2,3\}$.

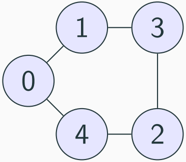
Tyto množiny jsou definovatelné:



- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G},\{0\}} = \{0\}$
- $\{1,4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2,3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$

$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje $\emptyset$ a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h. Dostáváme:

Příklad



Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G},\{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$

$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje $\emptyset$ a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h. Dostáváme:

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

9.3 ω-kategorické teorie

ω-kategorické teorie

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.
T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. $\square$

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. $\square$

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \ldots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. $\square$

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \restriction (0,1),\ \mathbb{Q} \restriction (0,1],\ \mathbb{Q} \restriction [0,1),\ \mathbb{Q} \restriction [0,1]$$

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.
T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. □

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \restriction (0,1),\ \mathbb{Q} \restriction (0,1],\ \mathbb{Q} \restriction [0,1),\ \mathbb{Q} \restriction [0,1]$$

Důkaz: Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum. □

ω-kategorické kritérium kompletnosti

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:(i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:(i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii)

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:(i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. $\square$

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:(i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. □

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, a DeLO$^\pm$ jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze $DeLO^*$.

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz:(i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. □

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, a DeLO$^\pm$ jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze $DeLO^*$.

Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω.