NAIL062 P&P Logika: Worksheet 3 – Algebra of propositions, SAT

Cíle výuky: Po absolvování cviení student

- rozumí souvislosti výrok/teorií a na [T-]ekvivalenci a mnoin model (tzv. algebra výrok), umí aplikovat v konkrétních píkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkuenost s pouitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro eení 2-SAT pomocí implikaního grafu (vetn nalezení vech model), umí aplikovat na píklad
- rozumí algoritmu pro eení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace , umí aplikovat na píklad
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na píklad

Píklady na cviení

Problem 1. Nech $|\mathbb{P}| = n$ a mjme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, e $|M(\varphi)| = k$. Urete poet a na ekvivalenci:

(a) výrok ψ takových, e $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(c) kompletních teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, e $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvame navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spotte a na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, e $\varphi \vee \psi \models \chi$,
(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Solution. *(a) Podmínku vyjádíme pomocí mnoin model:* $\mathrm{M}(\varphi) \subseteq \mathrm{M}(\psi)$ *nebo* $\mathrm{M}(\psi) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$. *Víme, e vech model je* 2^n, *a* $|\mathrm{M}(\varphi)| = k$. *Chceme spoítat, kolik je moných mnoin* $\mathrm{M}(\psi)$. *Podmínku* $\mathrm{M}(\varphi) \subseteq \mathrm{M}(\psi)$ *spluje* 2^{2^n-k} *mnoin (tj. tolik je nadmnoin dané k-prvkové mnoiny uvnit* 2^n*-prvkové mnoiny), podmínku* $\mathrm{M}(\psi) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$ *spluje* 2^k *mnoin. Musíme ale být opatrní, abychom pípad* $\mathrm{M}(\psi) = \mathrm{M}(\varphi)$ *nezapoítali dvakrát. Celkem máme* $2^{2^n-k}+2^k-1$ *moných mnoin model, tedy výrok* ψ *a na ekvivalenci.*

(b) $T \models \varphi$ *práv kdy* $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$*, takových mnoin* $\mathrm{M}(T)$ *je* 2^k

(c) Navíc máme podmínku $|\mathrm{M}(T)| = 1$*, 1-prvkových podmnoin k-prvkové mnoiny je k.*

(d) Peloeno do ei model, podmínka íká, e $\mathrm{M}(T \cup \{\varphi\}) \neq \emptyset$*. Máme* $\mathrm{M}(T \cup \{\varphi\}) = \mathrm{M}(T, \varphi) = \mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi)$ *(jde o modely, ve kterých platí zárove* T *a* φ*). Poítáme tedy kolik moných mnoin* $\mathrm{M}(T)$ *má neprázdný prnik s k-prvkovou mnoinou* $\mathrm{M}(\varphi)$*. To lze vyjádit nap. jako* $(2^k-1)\cdot(2^{2^n-k})$*, kde* 2^k-1 *je poet moných (neprázdných) "prnik"* $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi)$*, a* 2^{2^n-k} *znamená, e pro modely, ve kterých neplatí* φ*, si meme libovoln zvolit, zda budou v naí mnoin.*

(e) Protoe $\{\varphi, \psi\}$ *je sporná, víme, e* $\emptyset = \mathrm{M}(\varphi, \psi) = \mathrm{M}(\varphi) \cap \mathrm{M}(\psi)$*. Poítáme mnoiny* $\mathrm{M}(\chi)$ *takové, e* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi) \subseteq \mathrm{M}(\chi)$*. Díky Lindenbaum-Tarského algebe víme, e* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{M}(\varphi) \cup \mathrm{M}(\psi)$*. Z disjunktnosti máme* $|\mathrm{M}(\varphi) \cup \mathrm{M}(\psi)| = k+p$*, snadno spoítáme, e mnoných mnoin model* $\mathrm{M}(\chi)$ *je* $2^{2^n-(k+p)}$.

(f) $\mathrm{M}(T)$ *musí být podmnoinou* $(k+p)$*-prvkové* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi)$*, je jich tedy* 2^{k+p}.

Problem 2. Sestrojte implikaní graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najdte njaké eení: (a) výrok φ níe, (b) $\varphi \wedge \neg p_1$, (c) $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$.

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Solution. *(a) Sestrojíme implikaní graf. Zjistíme, e má dv komponenty silné souvislosti: $C = \{p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ a $\overline{C} = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, p_5\}$, nevede mezi nimi ádná hrana. Po kontrakci komponent tedy máme dvouvrcholový graf $\mathcal{G}^*$ bez hran, ten má dv topologická uspoádání: $(C, \overline{C})$ a $(\overline{C}, C)$, která odpovídají modelm $(0, 0, 1, 0, 1)$ a $(1, 1, 0, 1, 0)$.*

(b) Komponenty jsou stejné, ale do $\mathcal{G}^*$ pibude hrana $C \to \overline{C}$, tedy jediné topologické uspoádání je $(C, \overline{C})$, co odpovídá modelu $(0, 0, 1, 0, 1)$.

(c) Implikaní graf je nyní siln souvislý, tedy jeho jediná komponenta obsahuje (vechny) dvojice opaných literál. To znamená, e výrok je nesplnitelný.

Problem 3. Pomocí jednotkové propagace zjistte, zda je následující Hornv výrok splnitelný. Pokud ano, najdte njaké splující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Solution. *Provádíme postupn jednotkovou propagaci pes literály $p_1, p_2, p_3, \neg p_4$, zbývá výrok $\neg p_5 \vee \neg p_6$. Ten staí ohodnotit tak, aby alespo jedna z výrokových promnných p_5, p_6 byla ohodnocená nulou. Modely výroku jsou tedy: $\{(1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 1)\}$*

Problem 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodnte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Solution. *Výrok neobsahuje jednotkovou klauzuli ani literál s istým výskytem, musíme tedy vtvit, nap. pes p_1:*

- *Z $\varphi \wedge p_1$ dostáváme po jednotkové propagaci $\neg p_2 \wedge p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$, po jednotkové propagaci pes $\neg p_2$ dostáváme $\square \wedge \neg p_3$, co obsahuje prázdnou klauzuli $\square$, tedy je nesplnitelné.*
- *Z $\varphi \wedge \neg p_1$ dostáváme po jednotkové propagaci $\neg p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_3$, po jednotkové propagaci pes $\neg p_2$ dostáváme $\neg p_3 \wedge p_3$, po jednotkové propagaci pes $\neg p_3$ dostáváme prázdnou klauzuli $\square$, tedy opt je nesplnitelné.*

V obou (vech) vtvích výpotu jsme dokázali nesplnitelnost, výrok je tedy nesplnitelný.

Problem 5. Mjme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt njaké jeho topologické uspoádání. Zakódujte tento problém do SAT.

Solution. *eení jen naznaíme. Jako jazyk zvolme $\mathbb{P} = \{p_{uv} \mid u, v \in V\}$, kde p_{uv} bude znamenat, e vrchol u je v topologickém uspoádání (oste) ped v. To, e jde o ostré uspoádání, vyjádíme pomocí následujících axiom:*

- *$\neg p_{vv}$ pro vechna $v \in V$*
- *$p_{uv} \to \neg p_{vu}$ pro vechna $u, v \in V$*
- *$p_{uv} \wedge p_{vw} \to p_{uw}$ pro vechna $u, v, w \in V$*

Zbývá vyjádit, e vechny grafové hrany vedou v topologickém uspoádání dopedu:

- *p_{uv} pro vechny hrany $(u, v) \in E$*

Nakonec axiomy výe pevedeme do CNF, v mnoinovém zápisu dostáváme:

$$S = \{\{\neg p_{vv}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vu}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vw}, \neg p_{uw}\} \mid u, v, w \in V\} \cup \{\{p_{uv}\} \mid (u, v) \in E\}$$

Dalí píklady k procviení

Problem 6. Uvame následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Urete poet (a na ekvivalenci) výrok χ nad $\mathbb{P}$ takových, e $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Urete poet (a na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, e $T \models \varphi \wedge \psi$.
(c) Najdte njakou axiomatizaci pro kadou (a na ekvivalenci) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, e $T \models \varphi \wedge \psi$.

Problem 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najdte vechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Problem 8. ete pomocí implikaního grafu jako v Píkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Píkladu 4:

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
(b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

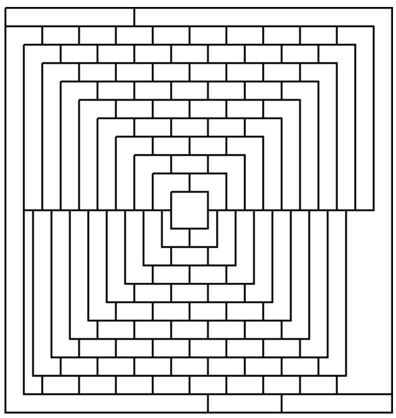
Problem 9. Lze obarvit ísla od 1 do n dvma barvami tak, e neexistuje monochromatické eení rovnice $a + b = c$ pro ádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, práv kdy to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

Zkuste si doma: Napite skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Pouijte SAT solver k nalezení nejmeního n pro které takové obarvení neexistuje (tj. kadé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, e $a + b = c$).

Problem 10. Vta o tyech barvách íká, e následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, e ádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najdte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa kraj eska

(b) Tí instance



K zamylení

Problem 11. Pro danou formuli φ v CNF najdte a 3-CNF formuli φ' takovou, e φ' je splnitelná, práv kdy φ je splnitelná. Popite efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. *redukci* z problému SAT do problému 3-SAT).

Problem 12. Zakódujte problém setídní dané n-tice celých ísel do SAT.

Problem 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmái, který potebuje pepravit pes eku vlka, kozu, a hlávku zelí.