

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na  $[T]$ -ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace, umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladech

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Necht  $|\mathbb{P}| = n$  a mějme výrok  $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$  takový, že  $|M(\varphi)| = k$ . Určete počet až na ekvivalenci:

- výroků  $\psi$  takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ,
- teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- kompletních teorií nad  $\mathbb{P}$ , ve kterých platí  $\varphi$ ,
- teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \cup \{\varphi\}$  je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii  $\{\varphi, \psi\}$  kde  $|M(\psi)| = p$ . Spočtěte až na ekvivalenci:

- výroky  $\chi$  takové, že  $\varphi \vee \psi \models \chi$ ,
- teorie, ve kterých platí  $\varphi \vee \psi$ .

**Příklad 2.** Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení: (a) výrok  $\varphi$  níže, (b)  $\varphi \wedge \neg p_1$ , (c)  $\varphi \wedge \neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$ .

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

**Příklad 3.** Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$\begin{aligned} &(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ &(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \end{aligned}$$

**Příklad 4.** Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

**Příklad 5.** Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Uvažme následující výroky  $\varphi$  a  $\psi$  nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r) \\ \psi &= s \rightarrow q \end{aligned}$$

- Určete počet (až na ekvivalenci) výroků  $\chi$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $\varphi \wedge \psi \models \chi$ .
- Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .

- (c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takovou, že  $T \models \varphi \wedge \psi$ .

**Příklad 7.** Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge \\ (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

**Příklad 8.** Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu 4:

- (a)  $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$   
 (b)  $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

**Příklad 9.** Lze obarvit čísla od 1 do  $n$  dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice  $a + b = c$  pro žádná  $1 \leq a < b < c \leq n$ ? Sestrojte výrokovou formuli  $\varphi_n$  v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve  $n = 8$ .

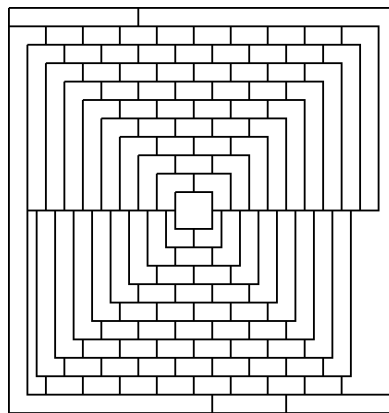
Zkuste si doma: Napište skript generující  $\varphi_n$  v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího  $n$  pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici  $a < b < c$  takovou, že  $a + b = c$ ).

**Příklad 10.** Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

- (a) Mapa krajů Česka



- (b) Těžší instance



## K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 11.** Pro danou formuli  $\varphi$  v CNF najděte a 3-CNF formuli  $\varphi'$  takovou, že  $\varphi'$  je splnitelná, právě když  $\varphi$  je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce  $\varphi'$  je-li dána  $\varphi$  (tj. redukci z problému SAT do problému 3-SAT).

**Příklad 12.** Zakódujte problém setřídění dané  $n$ -tice celých čísel do SAT.

**Příklad 13.** Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.