NAIL062 P&P Logic: Worksheet 6 – Basics of predicate logic

Teaching goals: After completing, the student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladě
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

In-class problems

Problem 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Problem 2. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?
II. Pro každou z nich najděte strukturu $\mathcal{B}$ (existuje-li) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(a) $x \rhd y$
(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Problem 3. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Problem 4. Rozhodněte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

(a) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(b) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(c) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(d) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$

Extra practice

Problem 5. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
(b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
(c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Problem 6. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
(b) term z za proměnnou y, term $g(f(y), w)$ za proměnnou y,
(c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

Problem 7. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
(e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \to (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

Problem 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

For further thought

Problem 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T. Zdůvodněte.

(a) $x + y = y + x$
(b) $x + y = x \ \to \ y = 0$
(c) $x + y = 0 \ \to \ y = -x$
(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$