# NAIL062 P&P Logic: Worksheet 8 – The tableau method in predicate logic

**Cíle výuky:** Po absolvování cvienĺ student

- rozumí tomu, jak se lií tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formáln definovat vechny potebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich pouití
- umí sestrojit dokonené tablo pro danou poloku z dané (i nekonené) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokonenou bezespornou vtev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metod pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých píkladech
- zná vtu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

## Píklady na cvienĺ

**Problem 1.** Pedpokládejme, e:

- *Vichni viníci jsou lhái.*
- *Alespo jeden z obvinných je také svdkem.*
- *ádný svdek nele.*

Dokate tablo metodou, e: *Ne vichni obvinní jsou viníci.* Konkrétn:

(a) Zvolte vhodný jazyk $\mathcal{L}$. Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
(b) Formalizujte nae znalosti a dokazované tvrzení jako sentence $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$ v jazyce $\mathcal{L}$.
(c) Sestrojte tablo dkaz sentence $\varphi$ z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

**Problem 2.** Uvate následující tvrzení:

*(i) Nula je malé íslo.*
*(ii) íslo je malé, práv kdy je blízko nuly.*
*(iii) Souet dvou malých ísel je malé íslo.*
*(iv) Je-li $x$ blízko $y$, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, e platí: *(v) Jsou-li $x$ a $y$ malá ísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0\rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokonené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s polokou $F\varphi_5$ v koeni. Rozhodnte, zda platí $T \models \varphi_5$.
(c) Pokud existují, uvete alespo dv kompletní jednoduché extenze teorie $T$.

**Problem 3.** Uvame jazyk $L = \langle c\rangle$ s rovností, kde $c$ je konstantní symbol. Tablo metodou dokate, e v teorii $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$ platí formule $x = c$.

**Problem 4.** Bu $L$ jazyk s rovností obsahující binární relaní symbol $\leq$ a $T$ teorie v tomto jazyce taková, e $T$ má nekonený model a platí v ní axiomy lineárního uspoádání. Pomocí vty o kompaktnosti ukate, e $T$ má model $\mathcal{A}$ s *nekoneným klesajícím etzcem*; tj. e v $A$ existují prvky $c_i$ pro kadé $i \in \mathbb{N}$ takové, e: $\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0$. (Z toho plyne, e pojem *dobrého uspoádání* není definovatelný v logice prvního ádu.)

## Dalí píklady k procvienĺ

**Problem 5.** Uvate následující tvrzení:

*(i) Kadý docent napsal alespo jednu uebnici.*
*(ii) Kadou uebnici napsal njaký docent.*

*(iii) U kadého docenta nkdo studuje.*
*(iv) Kadý, kdo studuje u njakého docenta, peetl vechny uebnice od tohoto docenta.*
*(v) Kadou uebnici nkdo peetl.*

(a) Formalizujte *(i)–(v)* jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti.
(b) Sestrojte dokonené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s polokou $F\varphi_5$ v koeni.
(c) Je sentence $\varphi_5$ pravdivá v teorii $T$? Je livá v $T$? Je nezávislá v $T$? Zdvodnte.
(d) Má teorie $T$ kompletní konzervativní extenzi? Zdvodnte.

**Problem 6.** Tablo metodou dokate následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátor, kde $\varphi(x)$ je formule s jedinou volnou promnnou $x$, a $\psi$ je sentence.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$
(c) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x)\varphi(x) \to \psi)$

**Problem 7.** Nech $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z $x$ do $y$"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z $x$ do $y$"*. Pedpokládejme, e z Prahy lze lett do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paíe, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

Dokate tablo metodou, e existuje spojení z Bratislavy do Paíe.

**Problem 8.** Bu $T$ následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d \rangle$ s rovností, kde $R$ je binární relaní symbol, $f$ unární funkní symbol, a $c, d$ konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y, R(f(x), x)\}$$

Oznarme jako $T'$ generální uzávr $T$. Nech $\varphi$ a $\psi$ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \qquad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo dkaz formule $\psi$ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednoduení mete krom axiom rovnosti v tablu pímo pouívat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x)$, co je jejich dsledek.)
(b) Ukate, e $\psi$ není dsledek teorie $T$, tím e najdete model $T$, ve kterém $\psi$ neplatí.
(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (a na $\sim$) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uvete dv.
(d) Nech $S$ je následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností. Je $T$ konzervativní extenzí $S$?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y\}$$

## K ZAMYLENÍ

**Problem 9.** Dokate syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) *Vtu o konstantách*: Bu $\varphi$ formule v jazyce $L$ s volnými promnnými $x_1, \ldots, x_n$ a $T$ teorie v $L$. Oznarme $L'$ extenzi $L$ o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a $T'$ teorii $T$ v $L'$. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi$ práv kdy $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$
(b) *Vtu o dedukci*: Pro kadou teorii $T$ (v uzavené form) a sentence $\varphi$, $\psi$ platí: $T \vdash \varphi \to \psi$ práv kdy $T, \varphi \vdash \psi$

**Problem 10.** Mjme teorii $T^*$ s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukate, e:

(a) $T^* \models x = y \;\to\; y = x$ (symetrie)
(b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\to\; x = z$ (tranzitivita)

*Hint:* Pro (a) pouijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) pouijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.