

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí tomu, jak se liší tablo metoda v predikátové logice od výrokové logiky, umí formálně definovat všechny potřebné pojmy
- zná atomická tabla pro kvantifikátory, rozumí jejich použití
- umí sestavit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- zná axiomy rovnosti a rozumí jejich souvislosti s pojmy kongruence, faktorstruktura
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- rozumí tablo metodě pro jazyky s rovností, umí aplikovat na jednoduchých příkladech
- zná větu o kompaktnosti predikátové logiky, umí ji aplikovat

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.* Konkrétně:

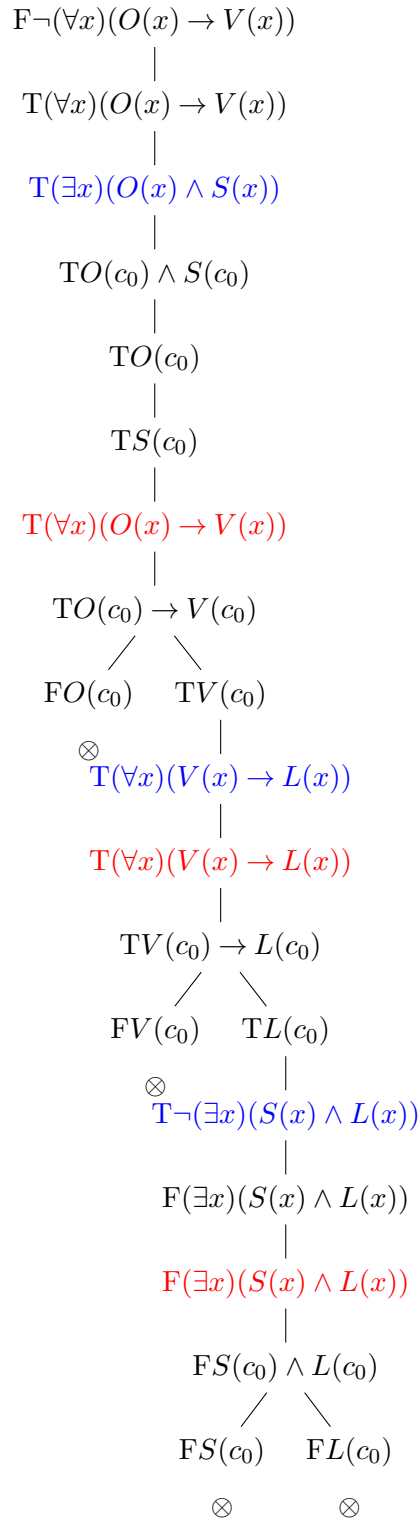
- Zvolte vhodný jazyk  $\mathcal{L}$ . Bude s rovností, nebo bez rovnosti?
- Formalizujte naše znalosti a dokazované tvrzení jako sentence  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$  v jazyce  $\mathcal{L}$ .
- Sestrojte tablo důkaz sentence  $\varphi$  z teorie  $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ .

**Řešení.** (a) Zvolme jazyk  $\mathcal{L} = \langle V, L, O, S \rangle$  bez rovnosti, kde  $V, L, O$  a  $S$  jsou unární relační symboly o významu “být viníkem/lhářem/obviněným/svědkem”.

(b)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\forall x)(V(x) \rightarrow L(x)) \\ \alpha_2 &= (\exists x)(O(x) \wedge S(x)) \\ \alpha_3 &= \neg(\exists x)(S(x) \wedge L(x)) \\ \varphi &= \neg(\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))\end{aligned}$$

- (c) Sestrojíme dokončené tablo z teorie  $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni. Uvidíme, že všechny větve budou sporné, půjde tedy o tablo důkaz. (Modře je vyznačeno připojení axiomů, červeně jsou kořeny atomických tabel položek typu ‘všichni’, které bychom mohli nekreslit, kdyby nám to konvence dovolila.)



**Příklad 2.** Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

- (ii) Číslo je malé, právě když je blízko nuly.  
 (iii) Součet dvou malých čísel je malé číslo.  
 (iv) Je-li  $x$  blízko  $y$ , potom  $f(x)$  je blízko  $f(y)$ .

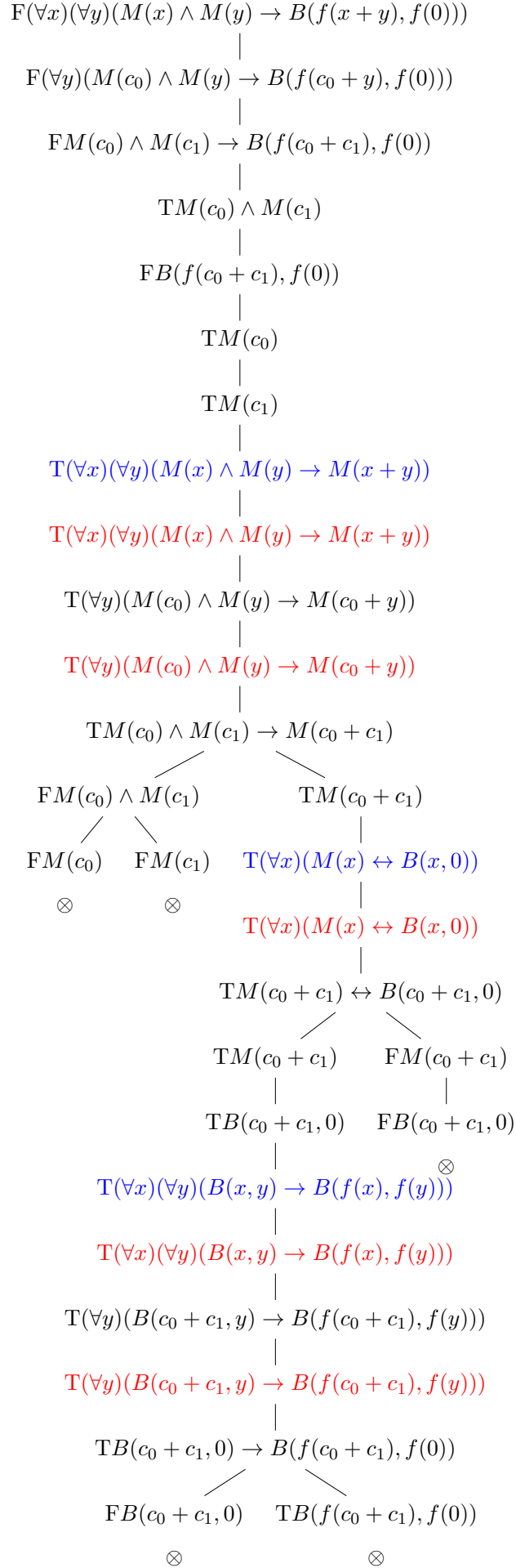
Chceme dokázat, že platí: (v) Jsou-li  $x$  a  $y$  malá čísla, potom  $f(x + y)$  je blízko  $f(0)$ .

- (a) Formalizujte tvrzení jako sentence  $\varphi_1, \dots, \varphi_5$  v jazyce  $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$  bez rovnosti.  
 (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie  $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  s položkou  $F\varphi_5$  v kořeni. Rozhodněte, zda platí  $T \models \varphi_5$ .  
 (c) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie  $T$ .

**Řešení.** (a)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= M(0) \\ \varphi_2 &= (\forall x)(M(x) \leftrightarrow B(x, 0)) \\ \varphi_3 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow M(x + y)) \\ \varphi_4 &= (\forall x)(\forall y)(B(x, y) \rightarrow B(f(x), f(y))) \\ \varphi_5 &= (\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \rightarrow B(f(x + y), f(0)))\end{aligned}$$

- (b) Tablo vyjde sporné, máme tedy  $T \not\models \varphi_5$  a z úplnosti  $T \models \varphi_5$ . Všimněte si, že axiom  $\varphi_1 = M(0)$  není potřeba:



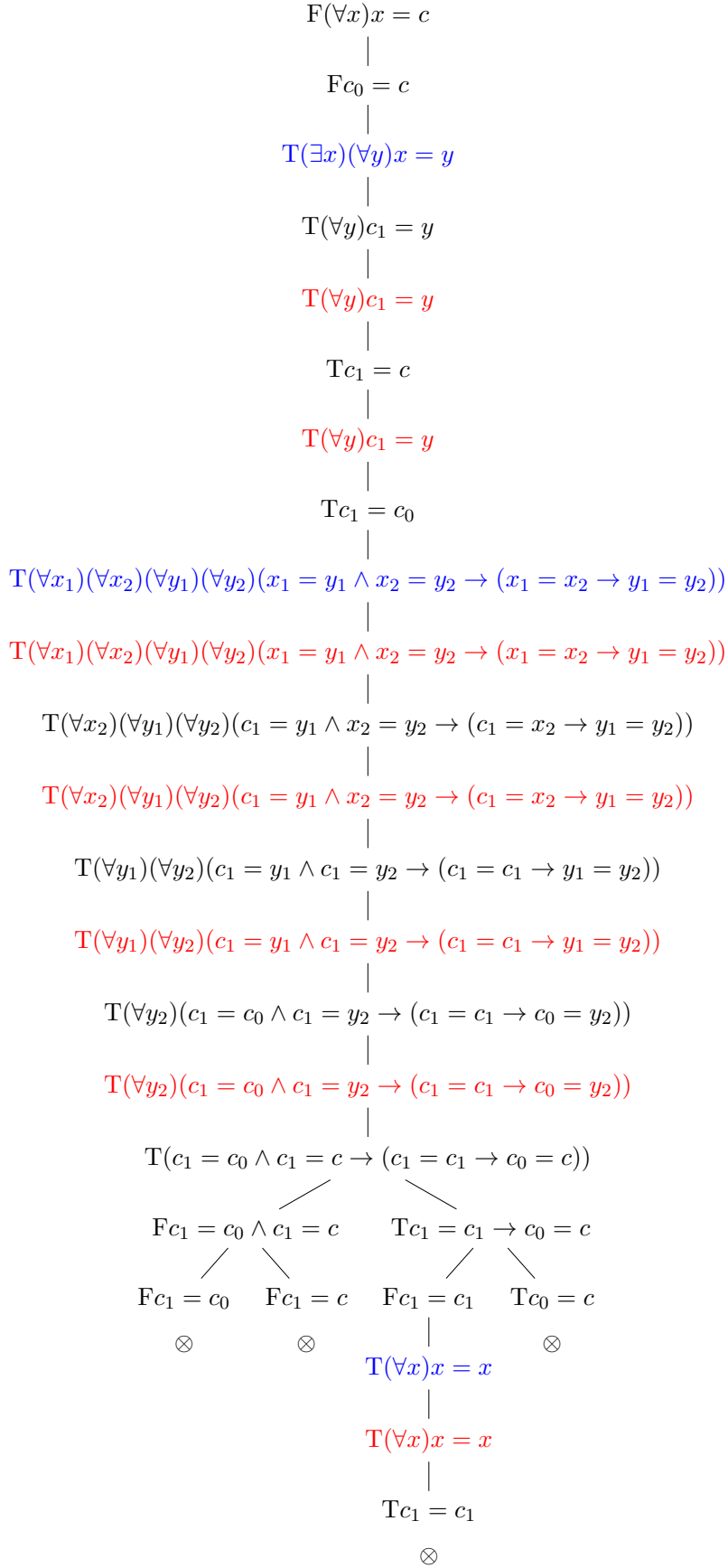
(c) Najdeme dva elementárně neekvivalentní modely  $T$ :

- $\mathcal{A} = \langle \{0\}; M^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$  kde  $M^{\mathcal{A}} = \{0\}$ ,  $B^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$ ,  $f^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$ ,  $+^{\mathcal{A}} = \{((0, 0), 0)\}$ , a  $0^{\mathcal{A}} = 0$
- $\mathcal{B} = \langle \{0, 1\}; M^{\mathcal{B}}, B^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, +^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}} \rangle$  kde  $M^{\mathcal{B}} = \{0\}$ ,  $B^{\mathcal{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$ ,  $f^{\mathcal{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$ ,  $+^{\mathcal{B}} = \{((0, 0), 0), ((0, 1), 1), ((1, 0), 1), ((1, 1), 0)\}$ , a  $0^{\mathcal{B}} = 0$

Kompletní jednoduché extenze jsou potom  $\text{Th}(\mathcal{A})$  a  $\text{Th}(\mathcal{B})$  (tj. všechny  $L$ -sentence, které platí v  $\mathcal{A}$  resp.  $\mathcal{B}$ ). Teorie struktury je vždy kompletní teorie. Nejsou ekvivalentní například proto, že  $(\forall x)M(x)$  platí v  $\mathcal{A}$  ale ne v  $\mathcal{B}$ . (Uvědomte si, že jazyk je bez rovnosti, potřebujeme tedy sentenci bez rovnosti.)

**Příklad 3.** Uvažme jazyk  $L = \langle c \rangle$  s rovností, kde  $c$  je konstantní symbol. Tablo metodou dokažte, že v teorii  $T = \{(\exists x)(\forall y)x = y\}$  platí formule  $x = c$ .

**Řešení.** Sestrojíme dokončené tablo z teorie  $T$  s položkou  $F(\forall x)x = c$  v kořeni (formule v položkách tabla musí být sentence). Protože je jazyk s rovností, můžeme v tablu používat i axiomy rovnosti pro jazyk  $L$ , resp. jejich generální uzávěry:  $(\forall x)x = x$  a  $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2))$ .



**Příklad 4.** Buď  $L$  jazyk s rovností obsahující binární relační symbol  $\leq$  a  $T$  teorie v tomto jazyce taková, že  $T$  má nekonečný model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že  $T$  má model  $\mathcal{A}$  s nekonečným klesajícím řetězcem; tj. že v  $\mathcal{A}$  existují prvky  $c_i$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  takové, že:  $\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0$ . (Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

**Řešení.** Z předpokladu víme, že  $T$  má nekonečný model  $\mathcal{B}$ , tj. nekonečné lineární uspořádání. To by ale mohlo být např.  $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$ , které žádný nekonečný řetězec nemá. Potřebujeme model s nekonečným klesajícím řetězcem, ten získáme z Věty o kompaktnosti (verze pro predikátovou logiku):

Jazyk  $L$  rozšíříme přidáním spočetně mnoha nových konstantních symbolů  $c_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Označme rozšířený jazyk  $L'$ . Uvažme následující  $L'$ teorii  $T'$ :

$$T' = T \cup \{c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Stačí ukázat, že  $T'$  má model. Ten zřejmě musí být nekonečný a jeho redukt na jazyk  $L$  je hledaný model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$ , který má nekonečný klesající řetězec  $\dots < c_{n+1}^{\mathcal{A}} < c_n^{\mathcal{A}} < \dots < c_0^{\mathcal{A}}$ .

Z věty o kompaktnosti víme, že  $T'$  má model, právě když každá konečná podmnožina  $T'$  má model. Máme-li konečnou podteorii  $S \subseteq T'$ , ta obsahuje jen konečně mnoho formulí  $c_{i+1} \leq c_i \wedge \neg c_{i+1} = c_i$ , pro nějakou konečnou množinu indexů  $I \subseteq \mathbb{N}$ . Označme jako  $\mathcal{B}$  nekonečný model  $T$ , který máme z předpokladu. (Tento model nemusí mít nekonečný klesající řetězec! Mohl by to být např.  $\langle \mathbb{N}; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$ ) V něm stačí vybrat libovolný konečný klesající řetězec délky  $|I|$  jako interpretace konstantních symbolů  $c_i$  pro  $i \in I$  (symboly  $c_j \notin I$  interpretujeme libovolně), a dostáváme model  $S$ .

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 5.** Uvažte následující tvrzení:

- (i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.
  - (ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.
  - (iii) U každého docenta někdo studuje.
  - (iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.
  - (v) Každou učebnici někdo přečetl.
- (a) Formalizujte (i)–(v) jako sentence  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$  v  $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$  bez rovnosti.  
 (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie  $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  s položkou  $F\varphi_5$  v kořeni.  
 (c) Je sentence  $\varphi_5$  pravdivá v teorii  $T$ ? Je lživá v  $T$ ? Je nezávislá v  $T$ ? Zdůvodněte.  
 (d) Má teorie  $T$  kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte.

**Příklad 6.** Tablo metodou dokažte následující pravidla ‘vytýkání’ kvantifikátorů, kde  $\varphi(x)$  je formule s jedinou volnou proměnnou  $x$ , a  $\psi$  je sentence.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$ | (c) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ |
| (b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$ | (d) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ |

**Příklad 7.** Nechť  $L(x, y)$  reprezentuje “existuje let z  $x$  do  $y$ ” a  $S(x, y)$  reprezentuje “existuje spojení z  $x$  do  $y$ ”. Předpokládejme, že z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže, a platí

- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$ ,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$ ,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$ .

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

**Příklad 8.** Buď  $T$  následující teorie v jazyce  $L = \langle R, f, c, d \rangle$  s rovnostmi, kde  $R$  je binární relační symbol,  $f$  unární funkční symbol, a  $c, d$  konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako  $T'$  generální uzávěr  $T$ . Necht  $\varphi$  a  $\psi$  jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \quad \psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

- Sestrojte tablo důkaz formule  $\psi$  z teorie  $T' \cup \{\varphi\}$ . (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom  $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$ , což je jejich důsledek.)
- Ukažte, že  $\psi$  není důsledek teorie  $T$ , tím že najdete model  $T$ , ve kterém  $\psi$  neplatí.
- Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na  $\sim$ ) má teorie  $T \cup \{\varphi\}$ ? Uveďte dvě.
- Necht  $S$  je následující teorie v jazyce  $L' = \langle R \rangle$  s rovnostmi. Je  $T$  konzervativní extenzí  $S$ ?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

#### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

- Větu o konstantách:* Buď  $\varphi$  formule v jazyce  $L$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$  a  $T$  teorie v  $L$ . Označme  $L'$  extenzi  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a  $T'$  teorii  $T$  v  $L'$ . Potom platí:  $T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi$  právě když  $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$
- Větu o dedukci:* Pro každou teorii  $T$  (v uzavřené formě) a sentence  $\varphi, \psi$  platí:  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$  právě když  $T, \varphi \vdash \psi$

**Příklad 10.** Mějme teorii  $T^*$  s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

- $T^* \models x = y \rightarrow y = x$  (symetrie)
- $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$  (tranzitivita)

*Hint:* Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro  $x_1 = x, x_2 = x, y_1 = y$  a  $y_2 = x$ , na (b) použijte (iii) pro  $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = x$  a  $y_2 = z$ .