

**Teaching goals:** After completing, the student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestavit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestavit nespílitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluční, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

#### IN-CLASS PROBLEMS

**Problem 1.** Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe. Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe. Formalizujte v predikátové logice a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

**Problem 2.** Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

- (i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovčí, nebo naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
- (ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: (iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena. Konkrétně:

- (a) Vyjádřete sentencemi  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  v jazyce  $L = \langle P, K \rangle$  bez rovnosti ( $P$  je binární,  $K$  unární relační symbol,  $P(x, y)$  znamená ‘ovce  $x$  porodila ovci  $y$ ’,  $K(x)$  ‘ovce  $x$  byla naklonována’).
- (b) S využitím skolemizace těchto sentencí nebo jejich negací sestavte množinu klauzulí  $S$  (může být ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$ .
- (c) Najděte rezoluční zamítnutí  $S$ , nakreslete rezoluční strom s použitými unifikacemi.
- (d) Má  $S$  LI-zamítnutí?

**Problem 3.** Necht  $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti.

- (a) Skolemizací naleznete k  $T$  otevřenou ekvivalentní teorii  $T'$ .
- (b) Převeďte  $T'$  na ekvivalentní teorii  $S$  v CNF. Zapište  $S$  v množinové reprezentaci.
- (c) Naleznete rezoluční zamítnutí teorie  $S$ . U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (d) Naleznete nespílitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z  $S$ . *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

#### EXTRA PRACTICE

**Problem 4.** Najděte rezoluční zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}, \{\neg H(v, a)\}, \\ \{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}, \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

**Problem 5.** Mějme jazyk  $L = \langle <, j, h, s \rangle$  bez rovnosti, kde  $j, h, q$  jsou konstantní symboly (‘jablka/hrušky/švestky’) a  $x < y$  vyjadřuje, že “ovoce  $y$  je lepší než ovoce  $x$ ”. Víme, že:

- (i) Relace “být lepší” je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
- (ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Dokažte rezolucí, že (iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

- Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete jako otevřené formule v jazyce  $L$ .
- Pomocí těchto formulí najděte CNF formuli  $S$ , která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište  $S$  v množinové reprezentaci.
- Rezolucí dokažte, že  $S$  není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
- Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $S$ , která je nesplnitelná.
- Je  $S$  zamítnutelná LI-rezolucí?

**Problem 6.** Buď  $T = \{\varphi\}$  teorie jazyka  $L = \langle U, c \rangle$  s rovnostmi, kde  $U$  je unární relační symbol,  $c$  konstantní symbol, a axiom  $\varphi$  vyjadřuje “Existuje alespoň 5 prvků, pro které platí  $U(x)$ .”

- Najděte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze  $T$ .
- Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

**Problem 7.** Necht  $T = \{U(x) \rightarrow U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle U, f \rangle$  s rovnostmi, kde  $U$  je unární relační symbol,  $f$  je unární funkční symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují maximálně 4 prvky”.

- Je teorie  $T$  extenzí teorie  $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$  v jazyce  $L' = \langle U \rangle$ ? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
- Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

**Problem 8.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovnostmi, kde  $S$  je unární funkční symbol.

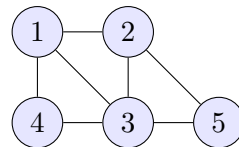
- Nalezněte extenzi  $T'$  teorie  $T$  o definici nového unárního funkčního symbolu  $P$  takovou, že  $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$ .
- Je teorie  $T'$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

**Problem 9.** Necht  $T$  je extenze teorie  $DeLO^-$  (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom  $c \leq d$  v jazyce  $L = \langle \leq, c, d \rangle$  s rovnostmi, kde  $c, d$  jsou nové konstantní symboly.

- Jsou sentence  $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$  a  $(\forall x)(x \leq d)$  pravdivé / lživé / nezávislé v  $T$ ?
- Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$ .

**Problem 10.** Mějme následující graf.

- Najděte všechny automorfismy.
- Které podmnožiny množiny vrcholů  $V$  jsou definovatelné? Uveďte definující formule. (*Nápověda: Využijte (a).*)
- Které binární relace na  $V$  jsou definovatelné?



FOR FURTHER THOUGHT

**Problem 11.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovnostmi, kde  $S$  je unární funkční symbol.

- Buď  $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$ , kde  $S(r) = r+1$  pro  $r \in \mathbb{R}$ . Pro která  $r \in \mathbb{R}$  je množina  $\{r\}$  definovatelná v  $\mathcal{R}$  z parametru 0?
- Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
- Je extenze  $T'$  teorie  $T$  o axiom  $S(x) = x$   $\omega$ -kategorická teorie? Je  $T'$  kompletní?
- Pro která  $0 < n \in \mathbb{N}$  existuje  $L$ -struktura  $\mathcal{B}$  velikosti  $n$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ? Existuje spočetná struktura  $\mathcal{B}$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ?