

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

- (a) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
 (b) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
 (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

Řešení. (a) Volné proměnné jsou x, z . (Můžete si nakreslit strom formule.) Nejprve nahradíme formuli variantou, kde přejmenujeme vázané proměnné aby byly různé, a různé od volných. Dostáváme ekvivalentní formuli:

$$(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2))$$

Nyní postupujeme aplikací pravidel pro převod do PNF, podle stromu formule (posouváme kvantifikátory nahoru). Pořadí vytýkání volíme tak, že nejprve vytkneme ty kvantifikátory, které nakonec (až budou v kvantifikátorovém prefixu, tj. nahoře u kořene stromu) budou existenční, a teprve potom ty, které budou univerzální (abychom zbytečně nevytvořili ‘závislost’ ve Skolemově variantě). Dostáváme:

$$\begin{aligned} & (\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2)) \\ & \sim (\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\exists y_2)(\forall x_2)(R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2)) \\ & \sim (\exists y_2)((\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (\forall x_2)(R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2))) \\ & \sim (\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2))) \end{aligned}$$

(Pozor na pravidla pro implikaci: při vytknutí z antecedentu se mění kvantifikátor, alternativně lze nejprve přepsat implikaci $\varphi \rightarrow \psi$ jako $\neg\varphi \vee \psi$. Budte také opatrní, aby proměnná ve vytknutém kvantifikátoru nebyla volná v druhé části formule, tomu jsme ale zajistili přejmenováním.)

Nezapomeňte, že pro skolemizaci potřebujeme sentenci, tj. generální uzávěr formule:

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, y_2) \vee Q(x_2, y_2)))$$

Skolemova varianta je potom:

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, f(x, z)) \vee Q(x, f(x, z))))$$

Zde f je nový, binární funkční symbol. (Pozor, skolemizujeme-li teorii, všechny funkční symboly použité při skolemizaci všech axiomů musí být nové, navzájem různé.)

Skolemova varianta je z definice sentence, ale i její otevřené jádro $(P(x_1, y_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge (R(x_2, f(x, z)) \vee Q(x, f(x, z)))$ je ekvivalentní (ale typicky ne ekvivalentní!) s původní formulí.

(b) Postupujeme stejně jako v (a), ale ekvivalenci nejprve přepíšeme na dvojici implikací:

$$\begin{aligned}
& (\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y) \\
& \sim ((\exists x)R(x, y) \rightarrow (\forall y)P(x, y)) \wedge ((\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)R(x, y)) \\
& \sim ((\exists x_1)R(x_1, y) \rightarrow (\forall y_1)P(x, y_1)) \wedge ((\forall y_2)P(x, y_2) \rightarrow (\exists x_2)R(x_2, y)) \\
& \sim (\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, y_2) \rightarrow R(x_2, y))) \\
& \sim (\forall x)(\forall y)(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, y_2) \rightarrow R(x_2, y)))
\end{aligned}$$

Skolemova varianta (f, g jsou nové, binární funkční symboly):

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1, y) \rightarrow P(x, y_1)) \wedge (P(x, g(x, y)) \rightarrow R(f(x, y), y)))$$

(c) Všimněte si, že formule je sentence. Obdobným postupem:

$$\begin{aligned}
& \neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y) \\
& \sim \neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x')(\exists y')R(x', y')) \wedge (\forall x'')\neg(\exists y'')Q(x'', y'') \\
& \sim (\forall x)(\exists y)(\forall x')(\forall y')(\forall x'')(\forall y'')(\neg(P(x, y) \rightarrow R(x', y')) \wedge \neg Q(x'', y''))
\end{aligned}$$

Příklad 2. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.

- (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (c) $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

Řešení. Nejprve vytvoříme Skolemovu variantu (viz předchozí příklad), poté vezmeme její otevřené jádro, a převeďme do CNF pomocí ekvivalentních úprav (stejně jako ve výrokové logice):

- (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$ už je sentence v PNF, Skolemova varianta: $(\forall y)(P(f(y), y))$ (f nový, unární funkční symbol). Otevřené jádro: $P(f(y), y)$, CNF v množinové reprezentaci:

$$S = \{\{P(f(y), y)\}\}$$

- (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y) \sim (\exists y)(\forall x)\neg P(x, y)$, Skolemova varianta $(\forall x)\neg P(x, c)$ (c nový konstantní symbol), CNF: $S = \{\{\neg P(x, c)\}\}$
- (c) Symboly c, d chápějme jako konstantní symboly, ne proměnné (dle konvence), jde tedy už o sentenci. Převod do PNF je snadný:

$$\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d))) \sim (\forall x)\neg((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$$

To už je univerzální sentence, skolemizace není potřeba (je sama svojí skolemovou variantou). Odstraníme $(\forall x)$ a převeďme do CNF: $(P(x) \vee P(x)) \wedge (P(x) \vee \neg P(d)) \wedge (\neg P(c) \vee P(x)) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, po zjednodušení $P(x) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, množinová reprezentace: $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(c), \neg P(d)\}\}$

- (d) Skolemova varianta: $(\forall y)(P(c, f(y)) \wedge P(f(y), y) \rightarrow R(c, y))$, CNF v množinové reprezentaci: $S = \{\{\neg P(c, f(y)), \neg P(f(y), y), R(c, y)\}\}$.

Příklad 3. Necht $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T . Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S zapište v množinové reprezentaci.

Řešení. Axiomy už jsou v PNF, ale pro skolemizaci potřebujeme sentence (generální uzávěry): $T \sim \{(\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$. Skolemizujeme (všechny symboly musí být nové): $\{R(c), (\forall x)\neg P(x, f(x)), (\forall x)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(g(y), z))\}$. Odstraníme univerzální kvantifikátory:

$$T' = \{R(c), \neg P(x, f(x)), \neg R(x) \vee P(g(y), z)\}$$

Ta už je v CNF, množinový zápis: $S = \{\{R(c)\}, \{\neg P(x, f(x))\}, \{\neg R(x), P(g(y), z)\}\}$

Všimněte si, že S je nespelnitelná: to vidíme ‘na úrovni výrokové logiky’, substituujeme-li do druhé klauzule $\{x/g(c)\}$ a do třetí klauzule $\{x/c, y/c, z/f(g(c))\}$, dostáváme základní instance:

$$S' = \{\{R(c)\}, \{\neg P(g(c), f(g(c)))\}, \{\neg R(c), P(g(c), f(g(c)))\}\}$$

Díky ekvisplnitelnosti s S je tedy nespelnitelná i původní teorie T .

Příklad 4. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovnostmi, kde:

$$\varphi_1 = (\exists y)R(y, x)$$

$$\varphi_2 = (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$$

- Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T .
- Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}} \rangle$, kde $(n, m) \in R^{\mathcal{A}}$ právě když n dělí m . Nalezněte expanzi \mathcal{A}' L -struktury \mathcal{A} do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. (Množina všech přirozených čísel \mathbb{N} obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

Řešení. (a) Nejprve skolemizujeme:

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)R(y, x)$, Skolemova varianta: $(\forall x)R(f(x), x)$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))$, Skolemova varianta: $(\forall x)(\forall y)(\forall w)(R(g(x, y), x) \wedge R(g(x, y), y) \wedge (R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))))$

Nakonec odstraníme kvantifikátorové prefixy, a třetí axiom ve formě konjunkce pro přehlednost rozdělíme:

$$T' = \{R(f(x), x), R(g(x, y), x), R(g(x, y), y), R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, g(x, y))\}$$

- Uvědomíme si význam axiomů: první říká, že každé číslo má nějakého dělitele, a druhý vyjadřuje existenci největšího společného dělitele. Potřebujeme odpovídajícím způsobem interpretovat funkční symboly, např.:

- $f^{\mathcal{A}'}(n) = n$ (pro všechna $n \in \mathbb{N}$)
- $g^{\mathcal{A}'}(n, m) = \gcd(n, m)$ (pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$),

Dostáváme tedy strukturu $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}'}, g^{\mathcal{A}'} \rangle$ v jazyce $L' = \langle R, f, g \rangle$ s rovnostmi, kde $R^{\mathcal{A}}$ je relace dělitelnosti jako výše.

Všimněte si, že tato \mathcal{A}' není jediná možná. Mohli bychom také zvolit $f^{\mathcal{A}'}(n) = 1$. To je důvod, proč skolemizací dostaneme ekvisplnitelnou, ale typicky ne ekvivalentní teorii.

Příklad 5. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nespelnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (c, d jsou konstantní symboly v daném jazyce).

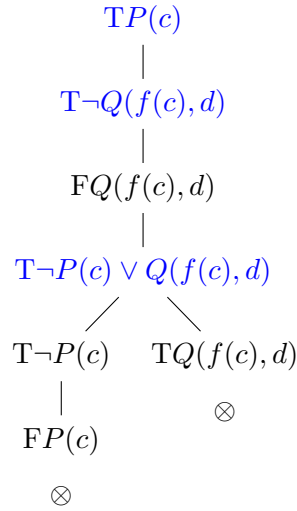
- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

Řešení. (a) T je sporná. Nesplnitelná je následující konjunkce základních instancí axiomů:

$$(\neg P(c) \vee Q(f(c), d)) \wedge \neg Q(f(c), d) \wedge P(c)$$

To lze snadno ověřit rezolucí ‘na úrovni výrokové logiky’, tj. každou atomickou formuli chápeme jako prvovýrok: označíme-li $P(c)$ jako p a $Q(f(c), d)$ jako q , máme $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p$.

Jak můžeme tyto základní instance axiomů najít? Herbrandova věta dává návod: sestojíme (konečný) tablo důkaz sporu z teorie T_{ground} sestávající ze všech základních instancí axiomů T . Alternativně, použijeme stejný postup jako při hledání modelů: sestojíme tablo zamítnutí některého z axiomů $\varphi_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$, tj. sporné tablo z teorie T_{ground} s položkou $T\varphi_{\text{ground}}$ v kořeni. Při vhodné volbě axiomů dojdeme ke spornému tablu snadno:



Axiomy T_{ground} (tj. základní instance axiomů T), které jsme v tablo zamítnutí použili (modře), patří do nesplnitelné konjunkce výše.

V příští sadě příkladů si ale ukážeme lepší postup: nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů můžeme také získat z rezolučního zamítnutí S (vzniklého převodem T do CNF).

- (b) Tato teorie není sporná, má tedy Herbrandův model (model, jehož univerzum tvoří všechny konstantní termy jazyka, a kde interpretace funkčních symbolů odpovídají “vytvoření termu” aplikací daného symbolu).

V takto jednoduchém případě můžeme Herbrandův model zkonstruovat sami:

$$\mathcal{H} = \langle H; P^{\mathcal{H}}, Q^{\mathcal{H}}, f^{\mathcal{H}}, c^{\mathcal{H}}, d^{\mathcal{H}} \rangle$$

- $\mathcal{H} = \{“c”, “d”, “f(c)”, “f(d)”, “f(f(c))”, “f(f(d))”, \dots\}$
- $c^{\mathcal{H}} = “c”, d^{\mathcal{H}} = “d”$
- $f^{\mathcal{H}}(“t”) = “f(t)”$
- $P^{\mathcal{H}} = H$
- $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$

Relace $P^{\mathcal{H}} = H$ a $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$ jsme zvolili jako úplnou unární resp. binární relaci, aby bylo snadno vidět, že všechny axiomy jsou splněny. Zbytek je dán z definice Herbrandova modelu.

Vysvětlíme si také postup daný důkazem Herbrandovy věty. Podobně jako výše bychom zkonstruovali dokončené tablo z T_{ground} pro položku $TP(c)$ (například), ale tentokrát tablo nebude sporné (teorie T_{ground} není sporná). Herbrandův model získáme z libovolné (dokončené) bezesporné větve, a to stejným postupem jako kanonický model, s tím rozdílem, že do jazyka nepřidáváme pomocné konstantní symboly c_0, c_1, \dots jako jsme to dělali v tablo metodě. Všimněte si, že nejsou potřeba: protože je teorie T otevřená, nejsou v ní ani v T_{ground} žádné kvantifikátory, tedy nemusíme redukovat žádné položky typu “svědek”. (Můžete si zkusit kousek tabla zkonstruovat, ale vyjde poměrně složité.)

- (c) Není sporná, v Herbrandově modelu lze zvolit např. $P^{\mathcal{H}} = H \times \{“f(t)” \mid t \in H\}$, tj. v relaci jsou takové dvojice termů, kde druhý začíná funkčním symbolem f .
- (d) Teorie je sporná. V axiomech nevidíme žádný konstantní symbol, proto si musíme jeden do jazyka přidat, budme tedy v jazyce $L = \langle P, f, g, c \rangle$ (bez rovnosti). Sporná, nesplnitelná konjunkce základních instancí axiomů je např.:

$$P(g(c), f(g(c))) \wedge \neg P(c, g(c)) \wedge (P(g(c), f(g(c))) \rightarrow P(c, g(c)))$$

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 6. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ obsahuje jeden axiom φ , který není otevřený: $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

- (a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .
- (b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S . Platí φ v T' ?
- (c) Lze každý model T jednoznačně rozšířit na model T' ?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

- (d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?
- (e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ .
- (f) Je T'' ekvivalentní teorii T' ?
- (g) Najděte L -formuli, která je v T'' -ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 7. Víme, že platí následující:

- Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.
- Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.
- Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: “Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.”. Sestrojte příslušnou CNF formuli S , a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

K ZAMYŠLENÍ

Příklad 8. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formulí, ověřte, že platí:

- (a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$