

Teaching goals: After completing, the student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

IN-CLASS PROBLEMS

Problem 1. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

- $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
- $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
- $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

Problem 2. Převeďte na ekvivalentní CNF formuli, запиšte v množinové reprezentaci.

- $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$
- $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

Problem 3. Necht $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvivalentní s T . Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S запиšte v množinové reprezentaci.

Problem 4. Necht $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (\exists y)R(y, x) \\ \varphi_2 &= (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))\end{aligned}$$

- Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvivalentní s T .
- Bud $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^A \rangle$, kde $(n, m) \in R^A$ právě když n dělí m . Nalezněte expanzi \mathcal{A}' L -struktury \mathcal{A} do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. (Množina všech přirozených čísel \mathbb{N} obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

Problem 5. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (c, d jsou konstantní symboly v daném jazyce).

- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
- $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

EXTRA PRACTICE

Problem 6. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ obsahuje jeden axiom φ , který není otevřený: $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

- Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .
- Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S . Platí φ v T' ?
- Lze každý model T jednoznačně rozšířit na model T' ?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

- (d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?
- (e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ .
- (f) Je T'' ekvivalentní teorii T' ?
- (g) Najděte L -formuli, která je v T'' -ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Problem 7. Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: “*Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.*”. Sestrojte příslušnou CNF formuli S , a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

FOR FURTHER THOUGHT

Problem 8. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:

- (a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$