NAIL062 P&P Logic: Worksheet 10 – Resolution in predicate logic

Cíle výuky: Po absolvování cvieni student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádt Unifikaní algoritmus
- zná potebné pojmy z rezoluní metody v predikátové logice (rezoluní pravidlo, rezolventa, rezoluní dkaz/zamítnutí, rezoluní strom), umí je formáln definovat, uvést píklady, vysvtlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluní metodu k eení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést vechny potebné kroky (pevod do PNF, skolemizace, pevod do CNF)
- umí sestrojit rezoluní zamítnutí dané (i nekonené) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit písluný rezoluní strom, vetn uvedení pouitých unifikací
- z rezoluního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiom
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie model

Píklady na cvieni

Problem 1. *Kadý holi holí vechny, kdo neholí sami sebe. ádný holi neholí nikoho, kdo holí sám sebe.* Formalizujte v predikátové logice a dokate rezolucí, e: *Neexistují ádní holii.*

Problem 2. Jsou dána následující tvrzení o probhlém genetickém experimentu:

(i) Kadá ovce byla bu porozena jinou ovcí, nebo naklonována (avak nikoli oboje zárove).
(ii) ádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, e pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétn:

(a) Vyjádete sentencemi φ_1, φ_2, φ_3 v jazyce $L = \langle P, K \rangle$ bez rovnosti (P je binární, K unární relaní symbol, $P(x, y)$ znamená 'ovce x porodila ovci y', $K(x)$ 'ovce x byla naklonována').
(b) S vyuitím skolemizace tchto sentencí nebo jejich negací sestrojte mnoinu klauzulí S (me být ve vtím jazyce), která je nesplnitelná, práv kdy $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.
(c) Najdte rezoluní zamítnutí S, nakreslete rezoluní strom s pouitými unifikacemi.
(d) Má S LI-zamítnutí?

Problem 3. Nech $T = \{\neg(\exists x)R(x),\ (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)),\ (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)),\ (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací naleznte k T otevenou ekvisplnitelnou teorii T'.
(b) Pevete T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapite S v mnoinové reprezentaci.
(c) Naleznte rezoluní zamítnutí teorie S. U kadého kroku uvete pouitou unifikaci.
(d) Naleznte nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z S. *Nápovda: vyuijte unifikace z (c).*

Dalí píklady k procvieni

Problem 4. Najdte rezoluní zamítnutí:

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\},\ \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\},\ \{\neg H(v, a)\},$$
$$\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\},\ \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}\}$$

Problem 5. Mjme jazyk $L = \langle <, j, h, s \rangle$ bez rovnosti, kde j, h, q jsou konstantní symboly ('jablka/hruky/vestky') a $x < y$ vyjaduje, e *"ovoce y je lepí ne ovoce x"*. Víme, e:

(i) Relace "být lepí" je ostré ástené uspoádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní).
(ii) Hruky jsou lepí ne jablka.

Dokate rezolucí, e *(iii) Jsou-li vestky lepí ne hruky, nejsou jablka lepí ne vestky.*

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádete jako otevené formule v jazyce L.
(b) Pomocí tchto formulí najdte CNF formuli S, která je nesplnitelná, práv kdy z (i), (ii) vyplývá (iii). Napite S v mnoinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokate, e S není splnitelná. Rezoluní zamítnutí znázornte rezoluním stromem. U kadého kroku uvete pouitou unifikaci. *Nápovda: staí tyi rezoluní kroky.*
(d) Naleznte konjunkci základních instancí axiom S, která je nesplnitelná.
(e) Je S zamítnutelná LI-rezolucí?

Problem 6. Bu $T = \{\varphi\}$ teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde U je unární relaní symbol, c konstantní symbol, a axiom φ vyjaduje *"Existuje alespo* 5 *prvk, pro které platí* $U(x)$*."*

(a) Najdte dv neekvivalentní jednoduché kompletní extenze T.
(b) Je teorie T oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.

Problem 7. Nech $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relaní symbol, f je unární funkní symbol a φ vyjaduje, e "existují maximáln 4 prvky".

(a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdvodnte.
(b) Je teorie T oteven axiomatizovatelná? Zdvodnte.

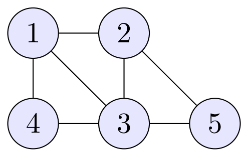
Problem 8. Bu $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkní symbol.

(a) Naleznte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkního symbolu P takovou, e $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
(b) Je teorie T' oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.

Problem 9. Nech T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspoádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.

(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / livé / nezávislé v T?
(b) Napite dv neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

Problem 10. Mjme následující graf.



(a) Najdte vechny automorfismy.
(b) Které podmnoiny mnoiny vrchol V jsou definovatelné? Uvete definující formule. *(Nápovda: Vyuijte (a).)*
(c) Které binární relace na V jsou definovatelné?

K zamylení

Problem 11. Bu $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkní symbol.

(a) Bu $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Pro která $r \in \mathbb{R}$ je mnoina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0?
(b) Je teorie T oteven axiomatizovatelná? Uvete zdvodnní.
(c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní?
(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárn ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spoetná struktura $\mathcal{B}$ elementárn ekvivalentní s $\mathcal{R}$?