NAIL062 V&P Logika: 9. sada příkladů – Příprava na rezoluci v PL

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

Příklady na cvičení

Příklad 1. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$
(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$
(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Řešení. *(a) Volné proměnné jsou x, z. (Můžete si nakreslit strom formule.) Nejprve nahradíme formuli variantou, kde přejmenujeme vázané proměnné aby byly různé, a různé od volných. Dostáváme ekvivalentní formuli:*

$$(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))$$

Nyní postupujeme aplikací pravidel pro převod do PNF, podle stromu formule (posouváme kvantifikátory nahoru). Pořadí vytýkání volíme tak, že nejprve vytkneme ty kvanfitikátory, které nakonec (až budou v kvantifikátorovém prefixu, tj. nahoře u kořene stromu) budou existenční, a teprve potom ty, které budou univerzální (abychom zbytečně nevytvořili 'závislost' ve Skolemově variantě). Dostáváme:

$$\begin{aligned}
&(\forall y_1)((\exists x_1)P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)((\forall x_2)R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))\\
\sim\ &(\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\exists y_2)(\forall x_2)(R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2))\\
\sim\ &(\exists y_2)((\forall y_1)(\forall x_1)(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (\forall x_2)(R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))\\
\sim\ &(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))
\end{aligned}$$

(Pozor na pravidla pro implikaci: při vytknutí z antecedentu se mění kvantifikátor, alternativně lze nejprve přepsat implikaci $\varphi \to \psi$ jako $\neg\varphi \vee \psi$. Buďte také opatrní, aby proměnná ve vytknutém kvantifikátoru nebyla volná v druhé části formule, tomu jsme ale zajistili přejmenováním.)

Nezapomeňte, že pro skolemizaci potřebujeme sentenci, tj. generální uzávěr formule:

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y_2)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee Q(x,y_2)))$$

Skolemova varianta je potom:

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)((P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,f(x,z)) \vee Q(x,f(x,z))))$$

Zde f je nový, binární funkční symbol. (Pozor, skolemizujeme-li teorii, všechny funkční symboly použité při skolemizaci všech axiomů musí být nové, navzájem různé.)

Skolemova varianta je z definice sentence, ale i její otevřené jádro $(P(x_1,y_1) \to Q(y_1,z)) \wedge (R(x_2,f(x,z)) \vee Q(x,f(x,z)))$ je ekvisplnitelné (ale typicky ne ekvivalentní!) s původní formulí.

(b) Postupujeme stejně jako v (a), ale ekvivalenci nejprve přepíšeme na dvojici implikací:

$$\begin{aligned}
&(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)\\
\sim\ &((\exists x)R(x,y) \to (\forall y)P(x,y)) \wedge ((\forall y)P(x,y) \to (\exists x)R(x,y))\\
\sim\ &((\exists x_1)R(x_1,y) \to (\forall y_1)P(x,y_1)) \wedge ((\forall y_2)P(x,y_2) \to (\exists x_2)R(x_2,y))\\
\sim\ &(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,y_2) \to R(x_2,y)))\\
\sim\ &(\forall x)(\forall y)(\exists x_2)(\exists y_2)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,y_2) \to R(x_2,y)))
\end{aligned}$$

Skolemova varianta (f, g jsou nové, binární funkční symboly):

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x_1)(\forall y_1)((R(x_1,y) \to P(x,y_1)) \wedge (P(x,g(x,y)) \to R(f(x,y),y)))$$

(c) Všimněte si, že formule je sentence. Obdobným postupem:

$$\begin{aligned}
&\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)\\
\sim\ &\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x')(\exists y')R(x',y')) \wedge (\forall x'')\neg(\exists y'')Q(x'',y'')\\
\sim\ &(\exists x'')(\exists y'')(\forall x)(\exists y)(\forall x')(\forall y')(\neg(P(x,y) \to R(x',y')) \wedge \neg Q(x'',y''))
\end{aligned}$$

Příklad 2. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d)))$
(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \to R(x,y))$

Řešení. *Nejprve vytvoříme Skolemovu variantu (viz předchozí příklad), poté vezmeme její otevřené jádro, a převedeme do CNF pomocí ekvivalentních úprav (stejně jako ve výrokové logice):*

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$ už je sentence v PNF, Skolemova varianta: $(\forall y)(P(f(y),y))$ (f nový, unární funkční symbol). Otevřené jádro: $P(f(y),y)$, CNF v množinové reprezentaci:

$$S = \{\{P(f(y),y)\}\}$$

(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y) \sim (\exists y)(\forall x)\neg P(x,y)$, Skolemova varianta $(\forall x)\neg P(x,c)$ (c nový konstantní symbol), CNF: $S = \{\{\neg P(x,c)\}\}$

(c) Symboly c, d chápejme jako konstantní symboly, ne proměnné (dle konvence), jde tedy už o sentenci. Převod do PNF je snadný:

$$\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d))) \sim (\forall x)\neg((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d)))$$

To už je univerzální sentence, skolemizace není potřeba (je sama svojí skolemovou variantou). Odstraníme $(\forall x)$ a převedeme do CNF: $(P(x) \vee P(x)) \wedge (P(x) \vee \neg P(d)) \wedge (\neg P(c) \vee P(x)) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, po zjednodušení $P(x) \wedge (\neg P(c) \vee \neg P(d))$, množinová reprezentace: $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(c), \neg P(d)\}\}$

(d) Skolemova varianta: $(\forall y)(P(c,f(y)) \wedge P(f(y),y) \to R(c,y))$, CNF v množinové reprezentaci: $S = \{\{\neg P(c,f(y)), \neg P(f(y),y), R(c,y)\}\}$.

Příklad 3. Nechť $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x,y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T. Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S zapište v množinové reprezentaci.

Řešení. *Axiomy už jsou v PNF, ale pro skolemizaci potřebujeme sentence (generální uzávěry):* $T \sim \{(\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$*. Skolemizujeme (všechny symboly musí být nové):* $\{R(c), (\forall x)\neg P(x, f(x)), (\forall x)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(g(y), z))\}$*. Odstraníme univerzální kvanfitikátory:*

$$T' = \{R(c), \neg P(x, f(x)), \neg R(x) \vee P(g(y), z)\}$$

Ta už je v CNF, množinový zápis: $S = \{\{R(c)\}, \{\neg P(x, f(x))\}, \{\neg R(x), P(g(y), z)\}\}$

Všimněte si, že S je nesplnitelná: to vidíme 'na úrovni výrokové logiky', substitujeme-li do druhé klauzule $\{x/g(c)\}$ a do třetí klauzule $\{x/c, y/c, z/f(g(c))\}$, dostáváme základní instance:

$$S' = \{\{R(c)\}, \{\neg P(g(c), f(g(c)))\}, \{\neg R(c), P(g(c), f(g(c)))\}\}$$

Díky ekvisplnitelnosti s S je tedy nesplinitelná i původní teorie T.

Příklad 4. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = &\quad (\exists y)R(y,x) \\ \varphi_2 = &\quad (\exists z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (\forall w)(R(w,x) \wedge R(w,y) \rightarrow R(w,z))) \end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T.
(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^A \rangle$, kde $(n,m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. (Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ obsahuje nulu, viz ISO 80000-2:2019.)

Řešení. *(a) Nejprve skolemizujeme:*

- $\varphi_1 \sim (\forall x)(\exists y)R(y,x)$*, Skolemova varianta:* $(\forall x)R(f(x),x)$
- $\varphi_2 \sim (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (R(w,x) \wedge R(w,y) \rightarrow R(w,z)))$*, Skolemova varianta:* $(\forall x)(\forall y)(\forall w)(R(g(x,y),x) \wedge R(g(x,y),y) \wedge (R(w,x) \wedge R(w,y) \rightarrow R(w, g(x,y))))$

Nakonec odstraníme kvantifikátorové prefixy, a třetí axiom ve formě konjunkce pro přehlednost rozdělíme:

$$T' = \{R(f(x),x), R(g(x,y),x), R(g(x,y),y), R(w,x) \wedge R(w,y) \rightarrow R(w, g(x,y))\}$$

(b) Uvědomíme si význam axiomů: první říká, že každé číslo má nějakého dělitele, a druhý vyjadřuje existenci největšího společného dělitele. Potřebujeme odpovídajícím způsobem interpretovat funkční symboly, např.:

- $f^{\mathcal{A}'}(n) = n$ *(pro všechna $n \in \mathbb{N}$)*
- $g^{\mathcal{A}'}(n,m) = \mathrm{gcd}(n,m)$ *(pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$),*

Dostáváme tedy strukturu $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}'}, g^{\mathcal{A}'} \rangle$ v jazyce $L' = \langle R, f, g \rangle$ s rovností, kde $R^{\mathcal{A}}$ je relace dělitelnosti jako výše.

Všimněte si, že tato $\mathcal{A}'$ není jediná možná. Mohli bychom také zvolit $f^{\mathcal{A}'}(n) = 1$. To je důvod, proč skolemizací dostaneme ekvisplnitelnou, ale typicky ne ekvivalentní teorii.

Příklad 5. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (c, d jsou konstantní symboly v daném jazyce).

(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, d), P(c)\}$
(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, d), P(c)\}$
(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x,y)\}$

Řešení. *(a) T je sporná. Nesplnitelná je následující konjunkce základních instancí axiomů:*

$$(\neg P(c) \vee Q(f(c), d)) \wedge \neg Q(f(c), d) \wedge P(c)$$

To lze snadno ověřit rezolucí 'na úrovni výrokové logiky', tj. každou atomickou formuli chápeme jako prvovýrok: označíme-li $P(c)$ jako p a $Q(f(c), d)$ jako q, máme $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p$.

Jak můžeme tyto základní instance axiomů najít? Herbrandova věta dává návod: sestrojíme (konečný) tablo důkaz sporu z teorie T_{ground} sestávající ze všech základních instancí axiomů T. Alternativně, použijeme stejný postup jako při hledání modelů: sestrojíme tablo zamítnutí *některého z axiomů $\varphi_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$, tj. sporné tablo z teorie T_{ground} s položkou* $\mathrm{T}\varphi_{\text{ground}}$ *v kořeni. Při vhodné volbě axiomů dojdeme ke spornému tablu snadno:*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{T}P(c) & \\
 & | & \\
 & \mathrm{T}\neg Q(f(c), d) & \\
 & | & \\
 & \mathrm{F}Q(f(c), d) & \\
 & | & \\
 & \mathrm{T}\neg P(c) \vee Q(f(c), d) & \\
 / & & \backslash \\
\mathrm{T}\neg P(c) & & \mathrm{T}Q(f(c), d) \\
| & & \otimes \\
\mathrm{F}P(c) & & \\
\otimes & &
\end{array}$$

Axiomy T_{ground} (tj. základní instance axiomů T), teré jsme v tablo zamítnutí použili (modře), patří do nesplnitelné konjunkce výše.

V příští sadě příkladů si ale ukážeme lepší postup: nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů můžeme také získat z rezolučního zamítnutí *S (vzniklého převodem T do CNF).*

(b) Tato teorie není sporná, má tedy Herbrandův model (model, jehož univerzum tvoří všechny konstantní termy jazyka, a kde interpretace funkčních symbolů odpovídají "vytvoření termu" aplikací daného symbolu).

V takto jednoduchém případě můžeme Herbrandův model zkonstruovat sami:

$$\mathcal{H} = \langle H; P^{\mathcal{H}}, Q^{\mathcal{H}}, f^{\mathcal{H}}, c^{\mathcal{H}}, d^{\mathcal{H}} \rangle$$

- $\mathcal{H} = \{$*"c", "d", "f(c)", "f(d)", "f(f(c))", "f(f(d))"*$, \ldots\}$
- $c^{\mathcal{H}} =$ *"c"*, $d^{\mathcal{H}} =$ *"d"*
- $f^{\mathcal{H}}($*"t"*$) =$ *"f(t)"*
- $P^{\mathcal{H}} = H$
- $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$

Relace $P^{\mathcal{H}} = H$ a $Q^{\mathcal{H}} = H \times H$ jsme zvolili jako úplnou unární resp. binární relaci, aby bylo snadno vidět, že všechny axiomy jsou splněny. Zbytek je dán z definice Herbrandova modelu.

Vysvětlíme si také postup daný důkazem Herbrandovy věty. Podobně jako výše bychom zkonstruovali dokončené tablo z T_{ground} *pro položku* $\mathrm{T}P(c)$ *(například), ale tentokrát tablo nebude sporné (teorie* T_{ground} *není sporná). Herbrandův model získáme z libovolné (dokončené) bezesporné větve, a to stejným postupem jako kanonický model, s tím rozdílem, že do jazyka nepřidáváme pomocné konstantní symboly* $c_0, c_1, \ldots$ *jako jsme to dělali v tablo metodě. Všimněte si, že nejsou potřeba: protože je teorie* T otevřená, *nejsou v ní ani v* T_{ground} *žádné kvantifikátory, tedy nemusíme redukovat žádné položky typu "svědek". (Můžete si zkusit kousek tabla zkonstruovat, ale vyjde poměrně složité.)*

(c) Není sporná, v Herbrandově modelu lze zvolit např. $P^{\mathcal{H}} = H \times \{\text{“}f(t)\text{”} \mid t \in H\}$, *tj. v relaci jsou takové dvojice termů, kde druhý začíná funkčním symbolem* f.

(d) Teorie je sporná. V axiomech nevidíme žádný konstantní symbol, proto si musíme jeden do jazyka přidat, buďme tedy v jazyce $L = \langle P, f, g, c\rangle$ *(bez rovnosti). Sporná, nesplnitelná konjunkce základních instancí axiomů je např.:*

$$P(g(c), f(g(c))) \wedge \neg P(c, g(c)) \wedge (P(g(c), f(g(c))) \rightarrow P(c, g(c)))$$

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený: $x \neq 0 \ \rightarrow\ (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models\ (x \neq 0 \ \wedge\ x \cdot y = 1 \ \wedge\ x \cdot z = 1) \ \rightarrow\ y = z$.

(a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.
(b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?
(c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T'?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y?
(e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.
(f) Je T'' ekvivalentní teorii T'?
(g) Najděte L-formuli, která je v T''-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 7. Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: *"Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi."*. Sestrojte příslušnou CNF formuli S, a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

K zamyšlení

Příklad 8. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:

(a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$