NAIL062 V&P Logika: 6. sada příkladů – Základy predikátové logiky

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladě
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

Příklady na cvičení

Příklad 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Řešení. *Označme $\psi = (x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$, formule je tedy $(\forall x)\psi$.*
(a) Ne, z není substituovatelná za x do ψ: vznikl by nový vázaný výskyt.
(b) Ne, y má volný výskyt v ψ.
(c) Ano, u je nová proměnná: v takovém případě lze variantu udělat vždy.

Příklad 2. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?
II. Pro každou z nich najděte strukturu $\mathcal{B}$ (existuje-li) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(a) $x \rhd y$
(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Řešení. *Struktury si můžeme představit jako orientované grafy.*

(a) I. Ne, intuitivně formule vyjadřuje, že relace $\rhd^{\mathcal{A}}$ obsahuje všechny dvojice (hrany), z definice $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(x \rhd y)[e] = 0$ např. pro $e(x) = a$, $e(y) = a$.
II. Např. $\mathcal{B}_0 = (\{0\}; \rhd^{\mathcal{B}_0})$ s $\rhd^{\mathcal{B}_0} = \{(0, 0)\}$.

(b) I. Ne, intuitivně graf nemá vrchol, do kterého by vedly hrany ze všech vrcholů, z definice: $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = \max_{u \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall y)(y \rhd x))[e(x/u)] = \max_{u \in A} \min_{v \in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(y \rhd x)[e(x/u, y/v)] = 0$, např. pro $u = a$ můžeme vzít $v = a$.
II. Např. $\mathcal{B}_0$ jako výše.

(c) I. Ano (x ohodnoťte např. prvkem a), antecedent není splněn pro žádné ohodnocení y, tedy implikace je vždy splněna. (Intuitivně, formule říká, že existuje vrchol, který buď má smyčku, nebo do něj nevede žádná hrana.)
II. Např. $\mathcal{B}_1 = (\{0, 1\}; \rhd^{\mathcal{B}_1})$ kde $\rhd^{\mathcal{B}_1} = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

(d) I. Ne, II: Např. $\mathcal{B}_0$.
(e) I. Ne, II: Např. $\mathcal{B}_0$.

Příklad 3. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,
(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$
Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Řešení. *(a) Bylo by jednodušší využít tablo metodu, ale chceme procvičit sémantický důkaz. Intuitivně, protože je ψ sentence, ohodnocení x nehraje roli při výpočtu pravdivostní hodnoty ψ, tedy ekvivalence platí. Počítejme z definic: $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi)$ platí právě když to platí při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$. Počítejme pravdivostní hodnotu. Využijeme faktu, že $f_\to(a,b) = \max(1-a,b)$:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to (\exists x)\varphi)[e] \\
=&f_\to(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])
\end{aligned}$$

Podobně pro formuli na pravé straně:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(\psi \to \varphi))[e] \\
=&\max_{a\in A} \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \to \varphi)[e(x/a)] \\
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}$$

Protože ψ je sentence, neobsahuje volný výskyt proměnné x, tedy $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)] = \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e]$. Z toho vidíme, že:

$$\begin{aligned}
=&\max_{a\in A}(\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \\
=&\max(1-\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a\in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]))
\end{aligned}$$

Obě pravdivostní hodnoty jsou stejné, tedy ekvivalence platí. Pro tento argument stačí, aby x nebyla volná v ψ.

Pokud je x volná v ψ, tak ekvivalence neplatí. Např. v jazyce $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol:

- *φ je $\neg x = x$,*
- *ψ je $x = c$,*
- *$\mathcal{A} = (\{0,1\}; 0)$ (tj. $c^{\mathcal{A}} = 0$).*

Máme $\mathcal{A} \not\models (x = c \to (\exists x)\neg x = x)$, protože to neplatí při ohodnocení $e(x) = 0$. Ale $\mathcal{A} \models (\exists x)(x = c \to \neg x = x)$, protože x lze ohodnotit prvkem 1, a antecendent není splněn.

(b), (c), (d) se vyřeší obdobně.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

(a) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(b) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(c) $T = \{U(f(x)),\ \neg x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$
(d) $T = \{U(f(x)),\ \neg(\forall x)x = f(x),\ \neg(\forall x)(\forall y)x = y,\ x = y \vee x = z \vee y = z\}$

Řešení. *(a) Pozor, tato teorie je sporná. Uvědomte si, že $\neg x = y$ je spor: neplatí v žádném modelu, protože neplatí při ohodnocení $e(x) = a, e(y) = a$ pro libovolný prvek $a \in A$. (Je ekvivalentní svému generálnímu uzávěru $(\forall x)(\forall y)\neg x = y$.) Sporná teorie není kompletní, z definice, a všechny její extenze jsou také sporné, tedy nemá žádnou kompletní jednoduchou extenzi.*

(b) Není kompletní. Neformálně, T říká, že model má právě dva prvky, a výstupy $f^{\mathcal{A}}$ musí být uvnitř $U^{\mathcal{A}}$. Z toho víme, že $U^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Je-li jednoprvková, máme jediný model (až na izomorfismus), je-li dvouprvková, máme celkem tři navzájem neizomorfní (a také navzájem elementárně neekvivalentní) modely (kde $f^{\mathcal{A}}$ nemá pevný bod, má jeden pevný bod, nebo má dva pevné body, tj. je to identita):

- $\mathcal{A}_1 = (\{0,1\}; U_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}})$ *kde* $U_1^{\mathcal{A}} = \{0\}$ *a* $f_1^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(1,0)\}$, *tj.* $f_1^{\mathcal{A}}(0) = 0$, $f_1^{\mathcal{A}}(1) = 0$
- $\mathcal{A}_2 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,1),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_3 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,0)\})$,
- $\mathcal{A}_4 = (\{0,1\}; \{0,1\}, \{(0,0),(1,1)\})$.

(Nakreslete si obrázky!) Odpovídající kompletní jednoduché extenze lze zapsat jako $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, *kde* $i = 1,2,3,4$. *Nebo:*

- $T_1 = T \cup \{\neg(\forall x)U(x)\}$,
- $T_2 = T \cup \{U(x), \neg f(x) = x\}$,
- $T_3 = T \cup \{U(x), (\exists x)f(x) = x, (\exists x)\neg f(x) = x\}$,
- $T_4 = T \cup \{U(x), f(x) = x\}$.

(c) Obdobně, vyjadřuje, že model má právě dva prvky, a f nemá žádný pevný bod. Je kompletní, jediný model až na izomorfismus je $\mathcal{A}_2$.

(d) Model má právě dva prvky, a f má alespoň jeden pevný bod. Není kompletní, její modely jsou až na izomorfismus $\mathcal{A}_3$ a $\mathcal{A}_4$.

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$
(b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
(c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Příklad 6. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
(b) term z za proměnnou y, term $g(f(y), w)$ za proměnnou y,
(c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

Příklad 7. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
(e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

K zamyšlení

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T. Zdůvodněte.

(a) $x + y = y + x$
(b) $x + y = x \;\to\; y = 0$
(c) $x + y = 0 \;\to\; y = -x$
(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$