

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladě
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestavit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

#### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Uvažme  $\underline{\mathbb{Z}}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}; +, -, 0 \rangle$  kde  $+$  je binární sčítání modulo 4 a  $-$  je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek  $+$  vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- Je  $\underline{\mathbb{Z}}_4$  model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- Určete všechny podstruktury  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle a \rangle$  generované nějakým  $a \in \underline{\mathbb{Z}}_4$ .
- Obsahuje  $\underline{\mathbb{Z}}_4$  ještě nějaké další podstruktury?
- Je každá podstruktura  $\underline{\mathbb{Z}}_4$  modelem teorie grup?
- Je každá podstruktura  $\underline{\mathbb{Z}}_4$  elementárně ekvivalentní  $\underline{\mathbb{Z}}_4$ ?

**Řešení.** (a) *Ano, lze ověřit, že  $\underline{\mathbb{Z}}_4$  splňuje všechny axiomy teorie grup ( $+$  je asociativní, 0 je neutrální vůči  $+$ ,  $-x$  je inverzní prvek k  $x$  vůči  $+$  a 0).*

(b)  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 0 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0\}$  (triviální grupa),  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 1 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 3 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4$ ,  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \langle 2 \rangle = \underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$  (dvoupvková grupa izomorfní grupě  $\underline{\mathbb{Z}}_4$ ).

(c) *Ne, jakmile máme prvek 1 nebo 3, generovaná podstruktura už je celá  $\underline{\mathbb{Z}}_4$ .*

(d) *Ano, teorie grup je otevřená, proto podstruktury modelů (grup) jsou také modely (podgrupy).*

(e) *Ne, jazyk teorie grup je s rovností, konečná velikost modelu lze popsat sentencí, tedy různě velké konečné modely nemohou být elementárně ekvivalentní. Rovnost ale nepotřebujeme, platilo by i v jazyce bez rovnosti, např. sentence  $(\forall x)x = 0$  odliší triviální grupu  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0\}$  od dvoupvkové grupy  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$  i od  $\underline{\mathbb{Z}}_4$ , a např.  $(\forall x)x + x = 0$  platí v  $\underline{\mathbb{Z}}_4 \upharpoonright \{0, 2\}$  ale ne v  $\underline{\mathbb{Z}}_4$ .*

**Příklad 2.** Buď  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- Existuje redukt  $\underline{\mathbb{Q}}$ , který je modelem teorie grup?
- Lze redukt  $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$  rozšířit na model teorie grup?
- Obsahuje  $\underline{\mathbb{Q}}$  podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní  $\underline{\mathbb{Q}}$ ?
- Označme  $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$  množinu všech sentencí pravdivých v  $\underline{\mathbb{Q}}$ . Je  $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}})$  kompletní teorie?

**Řešení.** (a) *Ano,  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}; +, -, 0 \rangle$ .*

(b) *Ne, prvek 1 (interpretace symbolu 0 z jazyka teorie grup) není neutrální prvek vzhledem k operaci  $\cdot$  (interpretaci symbolu  $+$ ), protože  $1 \cdot 0 = 0 \neq 1$ .*

(c) *Ano, např.  $\underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  (okruh celých čísel), neplatí v něm existence inverzních prvků vůči násobení pro všechny nenulové prvky, tj. sentence  $(\forall x)(\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)x \cdot y = 1)$  (např. číslo 2 nemá v celých číslech inverz, ale v racionálních ano,  $\frac{1}{2}$ ). (Z toho plyne, že teorie těles nemůže být otevřeně axiomatizovatelná, jinak by podstruktura tělesa musela být také tělesem.)*

(d) *Ano, tzv. teorie struktury je vždy kompletní: Pro každou sentenci  $\psi$  platí, že  $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \psi \Leftrightarrow \underline{\mathbb{Q}} \models \psi$ , pokud to neplatí, máme  $\underline{\mathbb{Q}} \models \neg\psi$  (je to sentence) tedy  $\text{Th}(\underline{\mathbb{Q}}) \models \neg\psi$ .*

**Příklad 3.** Mějme teorii  $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$  v jazyce  $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$  s rovností.

- (a) Je  $T$  kompletní?
- (b) Kolik má teorie  $T$  jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
- (c) Je teorie  $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$  v jazyce  $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$  extenzí  $T$ ? Je  $T'$  jednoduchá extenze  $T$ ? Je  $T'$  konzervativní extenze  $T$ ?

**Řešení.** Teorie říká, že každý prvek je jednou ze tří konstant. Ty ale nemusí být různé. Nejprve najděme všechny modely až na izomorfismus, je jich pět (nakreslete si je):

- $\mathcal{A}_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0 \rangle$  (jednoduchý model,  $c_1^{\mathcal{A}_1} = c_2^{\mathcal{A}_1} = c_3^{\mathcal{A}_1} = 0$ )
- $\mathcal{A}_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1 \rangle$  (dvoupřvkový model,  $c_1^{\mathcal{A}_2} = c_2^{\mathcal{A}_2} \neq c_3^{\mathcal{A}_2}$ )
- $\mathcal{A}_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1 \rangle$  (dvoupřvkový model,  $c_1^{\mathcal{A}_3} \neq c_2^{\mathcal{A}_3} = c_3^{\mathcal{A}_3}$ )
- $\mathcal{A}_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0 \rangle$  (dvoupřvkový model,  $c_1^{\mathcal{A}_4} = c_3^{\mathcal{A}_4} \neq c_2^{\mathcal{A}_4}$ )
- $\mathcal{A}_5 = \langle \{0, 1, 2\}; 0, 1, 2 \rangle$  (trojprvkový model, konstanty jsou různé)

- (a) Není kompletní, např. sentence  $c_1 = c_2$  je v  $T$  nezávislá: platí v  $\mathcal{A}_1$ , neplatí v  $\mathcal{A}_3$ . (Neboli, dle sémantického kritéria, modely  $\mathcal{A}_1$  a  $\mathcal{A}_3$  nejsou elementárně ekvivalentní).
- (b) Jednoduché extenze odpovídají podmnožinám  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}$ , je jich 32, kompletní odpovídají jednoduchým podmnožinám, je jich 5.

Jednoduché extenze, které nejsou kompletní:

- $T$  modely  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$
- $T \cup \{x = y \vee x = z\}$  modely  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$
- $T \cup \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y\}$  modely  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$

(Pozor:  $(\exists x)(\exists y)\neg x = y \sim \neg(\forall x)(\forall y)x = y \not\sim \neg x = y \sim (\forall x)(\forall y)\neg x = y$ .)

⋮

- $\{x = x \wedge \neg x = x\}$  sporná teorie, nemá model

Jednoduché kompletní extenze:

- $\text{Th}(\mathcal{A}_1) \sim \{x = y\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_2) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, c_1 = c_2, \neg c_2 = c_3\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_3) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, \neg c_1 = c_2, c_2 = c_3\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_4) \sim \{(\exists x)(\exists y)\neg x = y, x = y \vee x = z, c_1 = c_3, \neg c_1 = c_2\}$
- $\text{Th}(\mathcal{A}_5) \sim \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3, \neg(c_1 = c_2 \vee c_1 = c_3 \vee c_2 = c_3)\}$

- (c) Teorie navíc říká, že každý prvek je buď interpretací symbolu  $c_1$  nebo  $c_4$ . Modely tedy mají nejvýše dva prvky, až na izomorfismus jsou to:

- $\mathcal{A}'_1 = \langle \{0\}; 0, 0, 0, 0 \rangle$
- $\mathcal{A}'_2 = \langle \{0, 1\}; 0, 0, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_3 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 1, 1 \rangle$
- $\mathcal{A}'_4 = \langle \{0, 1\}; 0, 1, 0, 1 \rangle$

Teorie  $T'$  je extenzí  $T$ , platí v ní všechny důsledky teorie  $T$ , sémanticky: restrikce modelů  $T'$  na původní jazyk  $L$  jsou modely  $T$  (např. restrikcí modelu  $\mathcal{A}'_1$  na  $L$  je  $\mathcal{A}_1$ ). Není to jednoduchá extenze, zvětšili jsme jazyk.

Není to ani konzervativní extenze, např. sentence  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z)$  je sentence původního jazyka  $L$ , platí v  $T'$  ale neplatila v  $T$ . Sémanticky: (tříprvkový) model  $\mathcal{A}_5$  teorie  $T$  nelze expandovat do jazyka  $L'$  na model teorie  $T'$ , neboli restrikcí modelů  $T'$  na původní jazyk  $L$  nedostaneme všechny modely  $T$ .

**Příklad 4.** Buď  $T'$  extenze teorie  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  v jazyce  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností o definice  $<$  a unárního  $-$  s axiomu

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce  $L$ , které jsou ekvivalentní v  $T'$  s následujícími formulemi.

- (a)  $(-x) + x = 0$  (b)  $x + (-y) < x$  (c)  $-(x + y) < -x$

**Řešení.** Všimněte si, že axiomy teorie vyjadřují existenci a jednoznačnost pro definici funkčního symbolu  $-$ , jde tedy o korektní extenzi o definice. Postupujeme dle (důkazu) tvrzení z přednášky:

- (a)  $(\exists z)(x + z = 0 \wedge z + x = 0)$  (Podformule  $x + z = 0$  říká, že ‘ $z$  je  $-x$ ’ a druhá, že ‘ $(-x) + x = 0$ ’.)  
 (b) Nejprve nahradíme definicí term  $-y$ :

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z < x)$$

Nyní relační symbol  $<$ :

$$(\exists z)(y + z = 0 \wedge x + z \leq z \wedge \neg(x + z = z))$$

- (c)  $(\exists u)(\exists v)((x + y) + u = 0 \wedge x + v = 0 \wedge u \leq v \wedge \neg u = v)$  (Kde ‘ $u$  je  $-(x + y)$ ’ a ‘ $v$  je  $-x$ ’.)

**Příklad 5.** Mějme jazyk  $L = \langle F \rangle$  s rovností, kde  $F$  je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- (a) interval  $(0, \infty)$  v  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$  kde  $\cdot$  je násobení reálných čísel  
 (b) množina  $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$  ve stejné struktuře  $\mathcal{A}$   
 (c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin  $\mathbb{N}$  v  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$   
 (d) množina všech prvočísel v  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

- Řešení.** (a)  $(\exists y)F(y, y) = x \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$  (Číslo  $x$  je čtverec, a není to nula.)  
 (b)  $(\exists z)(F(x, y) = z \wedge (\forall u)F(z, u) = u)$  (Součin je roven jedné.)  
 (c)  $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = y$  (Kdykoliv je množina sjednocením dvou množin, je rovna jedné z nich. A není prázdná.)  
 (d)  $(\forall y)(\forall z)(F(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x) \wedge \neg(\forall y)F(x, y) = x$  (Kdykoliv je součin dvou čísel roven prvočíslu, je jedno z nich rovno prvočíslu, a prvočíslo není nula.)

#### DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Buď  $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$  teorie v jazyce  $L = \langle E \rangle$  s rovností, kde  $E$  je binární relační symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě čtyři prvky”.

- (a) Uvažme rozšíření  $L' = \langle E, c \rangle$  jazyka o nový konstantní symbol  $c$ . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií  $T'$  v jazyce  $L'$ , které jsou extenzemi teorie  $T$ .  
 (b) Má  $T$  nějakou konzervativní extenzi v jazyce  $L'$ ? Zdůvodněte.

**Příklad 7.** Necht  $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$  je teorie jazyka  $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$  s rovností, kde  $f$  je unární funkční,  $c_1, c_2$  jsou konstantní symboly a axiom  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.

- (a) Určete, kolik má teorie  $T$  navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. (3b)

- (b) Necht  $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$  je teorie stejného jazyka, axiom  $\varphi$  je stejný jako výše. Je  $T'$  extenze  $T$ ? Je  $T$  extenze  $T'$ ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)

**Příklad 8.** Mějme jazyk  $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$  s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned}\varphi : & P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge \neg x = y \\ \psi : & P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y)\end{aligned}$$

Uvažme následující  $L$ -teorii:

$$\begin{aligned}T = \{ & \varphi, \psi, \neg c = d, \\ & R(x, x), \\ & R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ & R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ & R(x, y) \vee R(y, x)\}\end{aligned}$$

- (a) Nalezněte expanzi struktury  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  do jazyka  $L$  na model teorie  $T$ .  
(b) Je sentence  $(\forall x)R(c, x)$  pravdivá/lživá/nezávislá v  $T$ ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.  
(c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze  $T$  nebo zdůvodněte, proč neexistují.  
(d) Necht  $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$  je teorie v jazyce  $L' = \langle R, f, c, d \rangle$ . Je teorie  $T$  konzervativní extenzí teorie  $T'$ ? Uveďte zdůvodnění.

#### K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Necht  $T_n = \{\neg c_i = c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  označuje teorii jazyka  $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$  s rovností, kde  $c_1, \dots, c_n$  jsou konstantní symboly.

- (a) Pro dané konečné  $k \geq 1$  určete počet  $k$ -prvkových modelů teorie  $T_n$  až na izomorfismus.  
(b) Určete počet spočetných modelů teorie  $T_n$  až na izomorfismus.  
(c) Pro jaké dvojice hodnot  $n$  a  $m$  je  $T_n$  extenzí  $T_m$ ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.