

Druhá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2025

Program

- sémantika výrokové logiky (pokračování)
- normální formy
- vlastnosti a důsledky teorií
- extenze teorií
- algebra výroků

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 2.2.5-2.5 z Kapitoly 2

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý, tautologie, platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(Být **lživý** není totéž, co nebýt **pravdivý**!)

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

výroky φ, ψ (ve stejném jazyce) jsou **(logicky) ekvivalentní**, $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely, tj. $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

výroky φ, ψ (ve stejném jazyce) jsou **(logicky) ekvivalentní**, $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely, tj. $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$

- pravdivé: \top , $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- lživé: \perp , $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$
- nezávislé, splnitelné: p , $p \wedge q$
- ekvivalentní: $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$, $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q) \sim \top$

Sémantické pojmy vzhledem k teorii

relativně k dané teorii T (omezíme se na její modely):

- pravdivý/platí v T , důsledek T , $T \models \varphi$ je-li $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý/sporný v T pokud $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$.
- nezávislý v T pokud $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$,
- splnitelný v T , konzistentní s T pokud $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$

relativně k dané teorii T (omezíme se na její modely):

- pravdivý/platí v T , důsledek T , $T \models \varphi$ je-li $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý/sporný v T pokud $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$.
- nezávislý v T pokud $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$,
- splnitelný v T , konzistentní s T pokud $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$
- φ a ψ jsou ekvivalentní v T , T -ekvivalentní, $\varphi \sim_T \psi$ platí-li v týchž modelech T , tj. $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T, \psi)$

Sémantické pojmy vzhledem k teorii

relativně k dané teorii T (omezíme se na její modely):

- pravdivý/platí v T , důsledek T , $T \models \varphi$ je-li $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý/sporný v T pokud $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$.
- nezávislý v T pokud $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$,
- splnitelný v T , konzistentní s T pokud $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$
- φ a ψ jsou ekvivalentní v T , T -ekvivalentní, $\varphi \sim_T \psi$ platí-li v týchž modelech T , tj. $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T, \psi)$

např. $T = \{p \vee q, \neg r\}$:

- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ je v T pravdivý
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ je v T lživý
- $p \leftrightarrow q, p \wedge q$ jsou v T nezávislé, splnitelné
- platí $p \sim_T p \vee r$ (ale $p \not\sim_T p \vee r$)

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

Tvrzení: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

Tvrzení: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Další zajímavé logické spojky:

- **Shefferova spojka** (NAND, \uparrow) $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q),$
- **Pierceova spojka** (NOR, \downarrow) $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q),$
- **Exclusive-OR** (XOR, \oplus) $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

Tvrzení: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Další zajímavé logické spojky:

- **Shefferova spojka** (NAND, \uparrow) $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q),$
- **Pierceova spojka** (NOR, \downarrow) $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q),$
- **Exclusive-OR** (XOR, \oplus) $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

např. $\{\uparrow\}$ je univerzální, $\{\wedge, \vee\}$ není

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v =$ 'musím být model v '

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v =$ 'musím být model v '

- příklad: $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně: $v = (v_1, \dots, v_n)$, použijeme značení $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v =$ 'musím být model v '

- příklad: $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně: $v = (v_1, \dots, v_n)$, použijeme značení $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Pro více modelů: 'musím být alespoň jeden z modelů z M '

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v = \text{'musím být model } v\text{'}$

- příklad: $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně: $v = (v_1, \dots, v_n)$, použijeme značení $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Pro více modelů: $\text{'musím být alespoň jeden z modelů z } M\text{'}$

$$\varphi_M = \bigvee_{v \in M} \varphi_v = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v = \text{'musím být model } v\text{'}$

- příklad: $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně: $v = (v_1, \dots, v_n)$, použijeme značení $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Pro více modelů: $\text{'musím být alespoň jeden z modelů z } M\text{'}$

$$\varphi_M = \bigvee_{v \in M} \varphi_v = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Zřejmě $M(\varphi_M) = M$ neboli $f_{\varphi_M, \mathbb{P}} = f$, a φ_M používá jen $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Protože $p \wedge q \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$ a $p \vee q \sim \neg p \rightarrow q$, mohli bychom φ_M ekvivalentně vyjádřit i pomocí $\{\neg, \rightarrow\}$. \square

2.3 Normální formy

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ
(pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
- $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
- φ_v je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ (pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)
- **klauzule** je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$ (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je \perp)

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
- $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
- φ_v je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

CNF a DNF

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ (pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)
- **klauzule** je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$ (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je \perp)
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je \top)

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
- $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
- φ_V je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ (pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)
 - **klauzule** je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$ (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je \perp)
 - výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je \top)
 - **elementární konjunkce** je konjunkce literálů $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$ (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je \top)
-
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
 - $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
 - φ_V je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ (pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)
 - **klauzule** je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$ (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je \perp)
 - výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je \top)
 - **elementární konjunkce** je konjunkce literálů $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$ (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je \top)
 - výrok je v **disjunktivní normální formě (DNF)** je-li disjunkcí elementárních konjunkcí (prázdný DNF výrok je \perp)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
 - $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
 - φ_V je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

zaměníme-li $0 \leftrightarrow 1$, negace zůstává stejná, $z \wedge$ se stává \vee a naopak

zaměníme-li $0 \leftrightarrow 1$, negace zůstává stejná, \wedge se stává \vee a naopak

- φ nad $\{\neg, \wedge, \vee\}$, zaměníme-li \wedge, \vee a znegujeme-li prvovýroky:
duální $\psi \sim \neg\varphi$, modely φ jsou nemodely ψ , $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- pravdivost je duální k nesplnitelnosti

zaměníme-li $0 \leftrightarrow 1$, negace zůstává stejná, \wedge se stává \vee a naopak

- φ nad $\{\neg, \wedge, \vee\}$, zaměníme-li \wedge, \vee a znegujeme-li prvovýroky: **duální** $\psi \sim \neg\varphi$, modely φ jsou nemodely ψ , $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- **pravdivost** je duální k **nesplnitelnosti**

Pozorování: Výrok v CNF je **pravdivý**, právě když každá klauzule má dvojici opačných literálů.

zaměníme-li $0 \leftrightarrow 1$, negace zůstává stejná, \wedge se stává \vee a naopak

- φ nad $\{\neg, \wedge, \vee\}$, zaměníme-li \wedge, \vee a znegujeme-li prvovýroky:
duální $\psi \sim \neg\varphi$, modely φ jsou nemodely ψ , $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- **pravdivost** je duální k **nesplnitelnosti**

Pozorování: Výrok v CNF je **pravdivý**, právě když každá klauzule má dvojici opačných literálů.

Duálně: Výrok v DNF je **nesplnitelný**, právě když každá elementární konjunkce má dvojici opačných literálů.

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní φ

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní φ

konstrukce DNF: každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní φ

konstrukce DNF: každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

konstrukce CNF: potřebujeme **nemodely**

$$\overline{M} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní φ

konstrukce DNF: každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

konstrukce CNF: potřebujeme **nemodely**

$$\overline{M} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

každá klauzule zakáže jeden nemodel:

$$\varphi_{\text{CNF}} = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Bud' \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Buď \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Buď \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz: $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$ říká 'jsem jeden z modelů z M '

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Buď \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz: $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$ říká 'jsem jeden z modelů z M '

φ_{CNF} říká 'nejsem žádný z nemodelů z M ', je duální k $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$ pro doplněk M , nebo přímo: modely klauzule $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$ jsou $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$, tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel \square

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Buď \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz: $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$ říká 'jsem jeden z modelů z M '

φ_{CNF} říká 'nejsem žádný z nemodelů z M ', je duální k $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$ pro doplněk M , nebo přímo: modely klauzule $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$ jsou $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$, tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel \square

Důsledek: Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce \mathbb{P}) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Bud' \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz: $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$ říká 'jsem jeden z modelů z M '

φ_{CNF} říká 'nejsem žádný z nemodelů z M ', je duální k $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$ pro doplněk M , nebo přímo: modely klauzule $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$ jsou $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$, tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel \square

Důsledek: Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce \mathbb{P}) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

Důkaz: použijeme konečný jazyk $\mathbb{P}' = \text{Var}(\varphi)$, $M = M_{\mathbb{P}'}(\varphi)$ \square

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí ekvivalentních úprav.

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí ekvivalentních úprav.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí \neg, \wedge, \vee

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí \neg, \wedge, \vee
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí \neg, \wedge, \vee
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity \wedge a \vee

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí \neg, \wedge, \vee
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity \wedge a \vee
4. případně zjednoduš (odstranění duplicit, tautologií apod.)

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

- do CNF (+ seřadíme prvovýroky v klauzulích)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

- do CNF (+ seřadíme prvovýroky v klauzulích)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

- do DNF (+ zjednodušení)

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

- Implikace a ekvivalence:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi)$$

- Negace:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg \neg \varphi \sim \varphi$$

- Konjunkce (převod do DNF):

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \sim (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$

- Disjunkce (převod do CNF):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \sim (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

2.4 Vlastnosti a důsledky teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
- **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé axiomatizace týchž vlastností)

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé *axiomatizace* týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé *axiomatizace* týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé *axiomatizace* týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$ (různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, např. $p \wedge q$ je v ní nezávislý

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, např. $p \wedge q$ je v ní nezávislý: platí v modelu $(1, 1, 1)$, neplatí v $(1, 0, 1)$

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$ (různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, např. $p \wedge q$ je v ní nezávislý: platí v modelu $(1, 1, 1)$, neplatí v $(1, 0, 1)$
 - $T_2 \cup \{\neg p\}$ je kompletní, jediným modelem je $(0, 1, 1)$.

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
 - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
 - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
 - **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$ (různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
 - $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, např. $p \wedge q$ je v ní nezávislý: platí v modelu $(1, 1, 1)$, neplatí v $(1, 0, 1)$
 - $T_2 \cup \{\neg p\}$ je kompletní, jediným modelem je $(0, 1, 1)$.
 - ekvivalentní teorie: $\{p \rightarrow q, r\} \sim \{(\neg p \vee q) \wedge r\}$

Důsledky teorií

Bud' T teorie v jazyce \mathbb{P} . Množina všech důsledků T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

Důsledky teorií

Bud' T teorie v jazyce \mathbb{P} . Množina všech důsledků T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

Důsledky teorií

Bud' T teorie v jazyce \mathbb{P} . Množina všech důsledků T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

Tvrzení: Jsou-li T, T' teorie a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ výroky v jazyce \mathbb{P} :

- (i) $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii) $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud $T \subseteq T'$, potom $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$

Důsledky teorií

Bud' T teorie v jazyce \mathbb{P} . Množina všech důsledků T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

Tvrzení: Jsou-li T, T' teorie a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ výroky v jazyce \mathbb{P} :

- (i) $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii) $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud $T \subseteq T'$, potom $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$
- (iv) $\varphi \in \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ právě když $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

Důsledky teorií

Bud' T teorie v jazyce \mathbb{P} . Množina všech důsledků T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

Tvrzení: Jsou-li T, T' teorie a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ výroky v jazyce \mathbb{P} :

- (i) $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii) $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud $T \subseteq T'$, potom $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$
- (iv) $\varphi \in \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ právě když $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

Důkaz: snadný, použijte následující:

- $M(\text{Csq}(T)) = M(T)$
- je-li $T \subseteq T'$ potom $M(T) \supseteq M(T')$
- $\models \psi \rightarrow \varphi$ právě když $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$

□

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: jednoduchá extenze

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

- T_3 (úplná obarvení s hranovou podmínkou) je jednoduchou extenzí teorie T_1 (částečná obarvení bez ohledu na hrany)

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

- T_3 (úplná obarvení s hranovou podmínkou) je jednoduchou extenzí teorie T_1 (částečná obarvení bez ohledu na hrany)
- T'_3 (přidání nového vrcholu) je konzervativní, ale ne jednoduchou extenzí T_3

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

- T_3 (úplná obarvení s hranovou podmínkou) je jednoduchou extenzí teorie T_1 (částečná obarvení bez ohledu na hrany)
- T'_3 (přidání nového vrcholu) je konzervativní, ale ne jednoduchou extenzí T_3
- T'_3 je extenze T_1 , která není ani jednoduchá, ani konzervativní

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Pozorování:

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Pozorování:

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2. T' je extenze T , právě když $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$. Tj. **restrikce** modelů T' na \mathbb{P} musí být modely T : $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

Extenze teorií: formálně

Buď T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Pozorování:

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2. T' je extenze T , právě když $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$. Tj. **restrikce** modelů T' na \mathbb{P} musí být modely T : $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3. T' je konzervativní extenze T , je-li to extenze a navíc každý model T lze **expandovat** na model T' (tj. každý model T získáme restrikcí nějakého modelu T' na jazyk \mathbb{P}): $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$

Extenze teorií: formálně

Buď T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Pozorování:

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2. T' je extenze T , právě když $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$. Tj. **restrikce** modelů T' na \mathbb{P} musí být modely T : $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3. T' je konzervativní extenze T , je-li to extenze a navíc každý model T lze **expandovat** na model T' (tj. každý model T získáme restrikcí nějakého modelu T' na jazyk \mathbb{P}): $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$
4. T' je extenze T a zároveň T je extenze T' , právě když $T \sim T'$

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

Pozorování:

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2. T' je extenze T , právě když $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$. Tj. **restrikce** modelů T' na \mathbb{P} musí být modely T : $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3. T' je konzervativní extenze T , je-li to extenze a navíc každý model T lze **expandovat** na model T' (tj. každý model T získáme restrikcí nějakého modelu T' na jazyk \mathbb{P}): $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$
4. T' je extenze T a zároveň T je extenze T' , právě když $T \sim T'$
5. **Kompletní jednoduché extenze** T odpovídají modelům T (až na \sim)

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je jednoduchá extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je jednoduchá extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je jednoduchá extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ je extenzí teorie T : $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ a $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$, restrikce modelů T' na \mathbb{P} jsou $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je jednoduchá extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ je extenzí teorie T : $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ a $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$, restrikce modelů T' na \mathbb{P} jsou $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$, každý model T lze rozšířit na model T' , T' je konzervativní extenze T

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je **jednoduchá** extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ je extenzí teorie T : $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ a $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$, restrikce modelů T' na \mathbb{P} jsou $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$, každý model T lze rozšířit na model T' , T' je **konzervativní** extenze T
- každý výrok v jazyce \mathbb{P} platí v T , právě když platí v T' , ale výrok $p \rightarrow r$ je novým důsledkem: platí v T' ale ne v T

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je **jednoduchá** extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ je extenzí teorie T : $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ a $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$, restrikce modelů T' na \mathbb{P} jsou $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$, každý model T lze rozšířit na model T' , T' je **konzervativní** extenze T
- každý výrok v jazyce \mathbb{P} platí v T , právě když platí v T' , ale výrok $p \rightarrow r$ je novým důsledkem: platí v T' ale ne v T
- teorie $T'' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r \vee p\}$ v jazyce \mathbb{P}' je extenze T , ale **není konzervativní**, neboť v ní platí $p \leftrightarrow q$, což neplatí v T (nebo proto, že model $(0, 1)$ teorie T nelze rozšířit na model teorie T'')

2.5 Algebra výroků

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. Až na ekvivalenci? Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. Až na ekvivalenci? Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy: $\forall \mathbb{F}_{\mathbb{P}} / \sim$, např. $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy: $\text{VF}_{\mathbb{P}}/\sim$, např. $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů: $h : \text{VF}_{\mathbb{P}}/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\text{M}_{\mathbb{P}})$ definované $h([\varphi]_{\sim}) = \text{M}(\varphi)$
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy: ${}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim$, např. $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů: $h : {}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$ definované $h([\varphi]_{\sim}) = \mathcal{M}(\varphi)$
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

Na ${}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim$ zavedeme operace \neg, \wedge, \vee **pomocí reprezentantů**:

$$\neg[\varphi]_{\sim} = [\neg\varphi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim} = [\varphi \vee \psi]_{\sim}$$

Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů: $2^{2^3} = 256$.

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy: ${}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim$, např. $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů: $h : {}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$ definované $h([\varphi]_{\sim}) = \mathcal{M}(\varphi)$
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

Na ${}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim$ zavedeme operace \neg, \wedge, \vee **pomocí reprezentantů**:

$$\neg[\varphi]_{\sim} = [\neg\varphi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim} = [\varphi \vee \psi]_{\sim}$$

přidáme konstanty $\perp = [\perp]_{\sim}, \top = [\top]_{\sim}$, máme *Booleovu algebru*:
algebru výroků jazyka \mathbb{P} ; totéž relativně k teorii T (**použijeme \sim_T**)

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

Algebra výroků

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do
potenční algebry $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do potenční algebry $\mathcal{P}(M_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(M_{\mathbb{P}}); -, \cap, \cup, \emptyset, M_{\mathbb{P}} \rangle$ zachovávající operace a konstanty:

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do potenční algebry $\mathcal{P}(M_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(M_{\mathbb{P}}); -, \cap, \cup, \emptyset, M_{\mathbb{P}} \rangle$ zachovávající operace a konstanty: $h(\perp) = \emptyset$, $h(\top) = M_{\mathbb{P}}$, a

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry** $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$ **zachovávající** operace a konstanty: $h(\perp) = \emptyset$, $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$, a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

Algebra výroků

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry** $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$ **zachovávající** operace a konstanty: $h(\perp) = \emptyset$, $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$, a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

tj. je to **homomorfismus** Booleových algeber, a nad konečným jazykem bijekce, tzv. **izomorfismus**;

Algebra výroků

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathcal{V}^{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry** $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$ **zachovávající** operace a konstanty: $h(\perp) = \emptyset$, $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$, a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

tj. je to **homomorfismus** Booleových algeber, a nad konečným jazykem bijekce, tzv. **izomorfismus**; stejně pro algebru výroků teorie

Algebra výroků jazyka \mathbb{P} resp. teorie T :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů h je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry** $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$ **zachovávající** operace a konstanty: $h(\perp) = \emptyset$, $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$, a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

tj. je to **homomorfismus** Booleových algeber, a nad konečným jazykem bijekce, tzv. **izomorfismus**; stejně pro algebru výroků teorie

Důsledek: Pro bezspornou teorii T nad *konečným jazykem* \mathbb{P} je algebra výroků $\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T)$ izomorfní potenční algebře $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}(\mathbf{T}))$ prostřednictvím zobrazení $h([\varphi]_{\sim_T}) = \mathbf{M}(T, \varphi)$.

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje až na ekvivalenci:

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje až na ekvivalenci:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje až na ekvivalenci:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje až na ekvivalenci:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje až na ekvivalenci:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Dále **až na T -ekvivalenci** existuje:

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Dále **až na T -ekvivalenci** existuje:

- 2^k výroků,

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Dále **až na T -ekvivalenci** existuje:

- 2^k výroků,
- 1 výrok pravdivý v T , 1 lživý v T ,

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Dále **až na T -ekvivalenci** existuje:

- 2^k výroků,
- 1 výrok pravdivý v T , 1 lživý v T ,
- $2^k - 2$ výroků nezávislých v T .

Počítání až na ekvivalenci

Tvrzení: Mějme n -prvkový jazyk \mathbb{P} a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce \mathbb{P} existuje **až na ekvivalenci**:

- 2^{2^n} výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$ výroků pravdivých (resp. lživých) v T ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$ výroků nezávislých v T ,
- 2^k jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),
- k kompletních jednoduchých extenzí T .

Dále **až na T -ekvivalenci** existuje:

- 2^k výroků,
- 1 výrok pravdivý v T , 1 lživý v T ,
- $2^k - 2$ výroků nezávislých v T .

Důkaz: stačí spočítat možné množiny modelů

