

Cíle výuky: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu struktura, signatura, umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům syntaxe predikátové logiky (jazyk, term, atomická formule, formule, teorie, volná proměnná, otevřená formule, sentence, instance, varianta) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům sémantiky predikátové logiky (hodnota termu, pravdivostní hodnota, platnost [při ohodnocení], model, pravdivost/lživost v modelu/v teorii, nezávislost [v teorii], důsledek teorie) umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu kompletní teorie a jeho souvislosti s elementární ekvivalencí struktur, umí obojí definovat, aplikovat na příkladech
- zná základní příklady teorií (teorie grafů, uspořádání, algebraické teorie)
- umí popsat modely dané teorie

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

- (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
- (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
- (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Řešení. Označme $\psi = (x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$, formule je tedy $(\forall x)\psi$.

- (a) Ne, z není substituovatelná za x do ψ : vznikl by nový vázaný výskyt.
- (b) Ne, y má volný výskyt v ψ .
- (c) Ano, u je nová proměnná: v takovém případě lze variantu udělat vždy.

Příklad 2. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; \triangleright^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem \triangleright , kde $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$.

I. Které z následujících formulí jsou pravdivé v \mathcal{A} ?

II. Pro každou z nich najděte strukturu \mathcal{B} (existuje-li) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

- (a) $x \triangleright y$
- (b) $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$
- (c) $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
- (e) $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

Řešení. Struktury si můžeme představit jako orientované hrany.

- (a) I. Ne, intuitivně formule vyjadřuje, že relace \triangleright^A obsahuje všechny dvojice (hrany), z definice $\text{PH}^A(x \triangleright y)[e] = 0$ např. pro $e(x) = a, e(y) = a$.
II. Např. $\mathcal{B}_0 = (\{0\}; \triangleright^{\mathcal{B}_0})$ s $\triangleright^{\mathcal{B}_0} = \{(0, 0)\}$.
- (b) I. Ne, intuitivně graf nemá stok, z definice: $\text{PH}^A(\varphi) = \max_{u \in A} \text{PH}^A((\forall y)(y \triangleright x))[e(x/u)] = \max_{u \in A} \min_{v \in A} \text{PH}^A(y \triangleright x)[e(x/u, y/v)] = 0$, např. pro $u = a$ můžeme vzít $v = a$.
II. Např. \mathcal{B}_0 jako výše.
- (c) I. Ano (x ohodnotte např. prvkem a), antecedent není splněn pro žádné ohodnocení y , tedy implikace je vždy splněna.
II. Např. $\mathcal{B}_1 = (\{0, 1\}; \triangleright^{\mathcal{B}_1})$ s $\triangleright^{\mathcal{B}_1} = \{(0, 1)\}$.
- (d) I. Ne, II: Např. \mathcal{B}_0 .

(e) I. Ne, II: Např. \mathcal{B}_0 .

Příklad 3. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu \mathcal{A} , formuli φ , a sentenci ψ ,

- (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
- (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
- (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x ? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Řešení. (a) Bylo by jednodušší využít tablo metodu, ale chceme procvičit sémantický důkaz. Intuitivně, protože je ψ sentence, ohodnocení x nehraje roli při výpočtu pravdivostní hodnoty ψ , tedy ekvivalence platí. Počítejme z definic: $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi)$ platí právě když to platí při každém ohodnocení $e : \text{Var} \rightarrow \mathcal{A}$. Počítejme pravdivostní hodnotu. Využijeme faktu, že $f_{\rightarrow}(a, b) = \max(1 - a, b)$:

$$\begin{aligned} & \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \rightarrow (\exists x)\varphi)[e] \\ &= f_{\rightarrow}(\text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e]) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a \in A} \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)]) \end{aligned}$$

Podobně pro formuli na pravé straně:

$$\begin{aligned} & \text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(\psi \rightarrow \varphi))[e] \\ &= \max_{a \in A} \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi \rightarrow \varphi)[e(x/a)] \\ &= \max_{a \in A} (\max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \end{aligned}$$

Protože ψ je sentence, neobsahuje volný výskyt proměnné x , tedy $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e(x/a)] = \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e]$. Z toho vidíme, že:

$$\begin{aligned} &= \max_{a \in A} (\max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \\ &= \max(1 - \text{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e], \max_{a \in A} (\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])) \end{aligned}$$

Obě pravdivostní hodnoty jsou stejné, tedy ekvivalence platí. Pro tento argument stačí, aby x nebyla volná v ψ .

Pokud je x volná v ψ , tak ekvivalence neplatí. Např. v jazyce $L = \langle c \rangle$ s rovností, kde c je konstantní symbol:

- φ je $\neg x = x$,
- ψ je $x = c$,
- $\mathcal{A} = (\{0, 1\}; 0)$ (tj. $c^{\mathcal{A}} = 0$).

Máme $\mathcal{A} \not\models (x = c \rightarrow (\exists x)\neg x = x)$, protože to neplatí při ohodnocení $e(x) = 0$. Ale $\mathcal{A} \models (\exists x)(x = c \rightarrow \neg x = x)$, protože x lze ohodnotit prvkem 1, a antecedent není splněn.

(b), (c), (d) se vyřeší obdobně.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je T (v jazyce $L = \langle U, f \rangle$ s rovností) kompletní. Existují-li, napište dva elementárně neekvivalentní modely, a dvě neekviv. kompletní jednoduché extenze:

- (a) $T = \{U(f(x)), \neg x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (b) $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (c) $T = \{U(f(x)), \neg x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$
- (d) $T = \{U(f(x)), \neg(\forall x)x = f(x), \neg(\forall x)(\forall y)x = y, x = y \vee x = z \vee y = z\}$

Řešení. (a) *Pozor, tato teorie je sporná. Uvědomte si, že $\neg x = y$ je spor: neplatí v žádném modelu, protože neplatí při ohodnocení $e(x) = a, e(y) = a$ pro libovolný prvek $a \in A$. (Je ekvivalentní svému generálnímu uzávěru $(\forall x)(\forall y)\neg x = y$.) Sporná teorie není kompletní, z definice, a všechny její extenze jsou také sporné, tedy nemá žádnou kompletní jednoduchou extenzi.*

(b) *Není kompletní. Neformálně, T říká, že model má právě dva prvky, a výstupy f^A musí být uvnitř U^A . Z toho víme, že $U^A \neq \emptyset$. Je-li jednoprvková, máme jediný model (až na izomorfismus), je-li dvouprvková, máme celkem tři navzájem neizomorfní (a také navzájem elementárně neekvivalentní) modely (kde f^A nemá pevný bod, má jeden pevný bod, nebo má dva pevné body, tj. je to identita):*

- $\mathcal{A}_1 = (\{0, 1\}; U_1^A, f_1^A)$ kde $U_1^A = \{0\}$ a $f_1^A = \{(0, 0), (1, 0)\}$, tj. $f_1^A(0) = 0, f_1^A(1) = 0$
- $\mathcal{A}_2 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0)\})$,
- $\mathcal{A}_3 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 0)\})$,
- $\mathcal{A}_4 = (\{0, 1\}; \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1)\})$.

(Nakreslete si obrázky!) Odpovídající kompletní jednoduché extenze lze zapsat jako $\text{Th}(\mathcal{A}_i)$, kde $i = 1, 2, 3, 4$. Nebo:

- $T_1 = T \cup \{\neg(\forall x)U(x)\}$,
- $T_2 = T \cup \{U(x), \neg f(x) = x\}$,
- $T_3 = T \cup \{U(x), (\exists x)f(x) = x, (\exists x)\neg f(x) = x\}$,
- $T_4 = T \cup \{U(x), f(x) = x\}$.

(c) *Obdobně, vyjadřuje, že model má právě dva prvky, a f nemá žádný pevný bod. Je kompletní, jediný model až na izomorfismus je \mathcal{A}_2 .*

(d) *Model má právě dva prvky, a f má alespoň jeden pevný bod. Není kompletní, její modely jsou až na izomorfismus \mathcal{A}_3 a \mathcal{A}_4 .*

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 5. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
- (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
- (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Příklad 6. Označme φ formulí $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ ?

- (a) term z za proměnnou x , term y za proměnnou x ,
- (b) term z za proměnnou y , term $g(f(y), w)$ za proměnnou y ,
- (c) term x za proměnnou z , term y za proměnnou z ,

Příklad 7. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

- (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

- (b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
- (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
- (d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
- (e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ . Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

- (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
- (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
- (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
- (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

K ZAMYŠLENÍ

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ 0 + x &= x = x + 0 \\ x + (-x) &= 0 = (-x) + x \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T . Zdůvodněte.

- (a) $x + y = y + x$
- (b) $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$