

# NTIN071 A&G: Cvičení 11 – Turingovy stroje

**Cíle výuky:** Po absolvování student umí

- vysvětlit formální definici deterministického i nedeterministického Turingova stroje
- popsat graf konfigurací, definovat rozpoznávaný jazyk, počítanou funkci
- provést výpočet daného Turingova stroje na daném vstupu
- rozpoznat, jaký jazyk rozpoznává daný Turingův stroj
- zkonstruovat Turingův stroj rozpoznávající daný jazyk nebo počítající danou funkci
- analyzovat různé varianty a modifikace výpočetního modelu Turingova stroje

## PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1** (Turingův stroj). Uvažme Turingův stroj popsaný následující tabulkou:

	B	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$(q_1, B, L)$	$(q_0, a, R)$	$(q_0, c, R)$	$(q_0, c, R)$
$q_1$	$(q_2, B, R)$	$(q_1, c, L)$		$(q_1, b, L)$
$*q_2$				

- Nakreslete stavový diagram.
- Popište výpočet (posloupností konfigurací) na vstupu  $w = aabca$ .
- Jaký jazyk rozpoznává? Jakou funkci počítá?

**Příklad 2** (Smaž jedničky). Navrhněte Turingův stroj nad abecedou  $\{0, 1\}$ , který ze vstupu smaže všechny 1ky a vrátí se na začátek (např. začne-li v konfiguraci  $q_00011010$ , skončí v  $q_F0000$  pro nějaké  $q_F \in F$ ).

**Příklad 3** (Předchůdce). Sestrojte Turingův stroj  $T$ , který pro dané vstupní přirozené číslo  $x > 0$  v binárním zápisu spočte jeho předchůdce, tj.  $x - 1$ , v binárním zápisu (a vrátí čtecí hlavu na začátek).

- Nakreslete stavový diagram  $T$ .
- Napište posloupnost konfigurací, kterými  $T$  projde při výpočtu pro vstup  $w = 10100$ .

Vytvořte deterministický, jednopáskový, jednostopový stroj (chcete-li např. dvoustopový, musíte jej sami naprogramovat.) Číslo v binárním zápisu nesmí začínat nulou, pokud není rovno 0. Příklady vstupních a výstupních konfigurací:

- z konfigurace  $q_01$  skončíme v  $q_0$  pro nějaké  $q \in F$ ,
- z konfigurace  $q_01001$  skončíme v  $q1000$  pro nějaké  $q' \in F$ ,
- z konfigurace  $q_0100$  skončíme v  $q11$  pro nějaké  $q'' \in F$ .

**Příklad 4** (Jednostranně nekonečná páska). Popište jak převést Turingův stroj s (jednou) oboustranně nekonečnou páskou na stroj, jehož páska je nekonečná jen v jednom směru, doprava. (Můžete předpokládat, že v prvním poli je speciální znak  $\triangleright$ .)

**Příklad 5** (Nedeterministický test neprvočíselnosti). Navrhněte nedeterministický Turingův stroj, který přijme jazyk  $L = \{1^n \mid n \text{ není prvočíslo}\}$ .

## K PROCVIČENÍ A K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 6** (Programování Turingových strojů). Navrhněte Turingův stroj, který přijme jazyk  $L$ . Napište posloupnost konfigurací, která ukazuje, že přijmeme slovo  $w$ .

- |                                                                     |                                                         |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| (a) $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ , $w = 001122$              | (c) $L = \{ucu^R \mid u \in \{0, 1\}^*\}$ , $w = 10c01$ |
| (b) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid  w _0 =  w _1\}$ ,<br>$w = 100110$ | (d) $L = \{ucu \mid u \in \{0, 1\}^*\}$ , $w = 10c10$   |
|                                                                     | (e) $L = \{uu \mid u \in \{0, 1\}^*\}$ , $w = 110110$   |

**Příklad 7** (Zrcadlení). Navrhněte Turingův stroj, který ze zadaného vstupního slova vytvoří jeho zrcadlový obraz.

**Příklad 8** (Paměťové bloky). Navrhněte Turingův stroj, který prohodí obsah dvou paměťových bloků. Konkrétně, počáteční konfiguraci  $q_0 u \# v \# w \# x \# y$  (kde  $u, v, w, x, y \in \Sigma \setminus \{\#\}$ ) převede na  $f u \# x \# w \# v \# y$  pro nějaké  $f \in F$ .

**Příklad 9** (Pohyby hlavy). Uvažte modifikace Turingova stroje, kde jsou povoleny následující pohyby hlavy. Jaké třídy jazyků rozpoznávají?

- |                          |                                      |
|--------------------------|--------------------------------------|
| (a) left (L), right (R)  | (c) stay (N), (L),                   |
| (b) stay (N), right (R), | (d) left (L), right (R), a stay (N). |

**Příklad 10** (Jen dvě akce najednou). Ukažte, že každý jednopáskový Turingův stroj  $M$  lze převést na stroj  $M'$ , který smí provést jen dvě z následujících tří akcí najednou, tj. instrukce může:

- změnit stav a pozici hlavy,
- změnit stav a přepsat symbol na pásce, nebo
- změnit pozici hlavy a přepsat symbol na pásce

ale žádná instrukce nesmí provést všechny tři akce najednou.

**Příklad 11** (Doprava nebo restartuj). Uvažte modifikaci Turingova stroje, kde páska je nekonečná jen v jednom směru (doprava), a hlava může provést dva typy pohybů: right (R) nebo RESTART (návrat na první políčko). Ukažte, jak převést standardní jednopáskový stroj na tento typ stroje.

**Příklad 12** (Přepiš jen jednou). Uvažte jednopáskový Turingův stroj, který smí přepsat každé políčko na pásce nejvýše jednou. Ukažte, že tento výpočetní model je ekvivalentní standardnímu Turingovu stroji.

**Příklad 13** (Nepřepisuj vstup). Vysvětlete, proč zakážeme-li Turingovu stroji měnit políčka obsahující vstup, bude ekvivalentní konečnému automatu. (Takové stroje tedy rozpoznávají jen regulární jazyky.) Stačí popsat myšlenku.

**Příklad 14** (Uzavěrové vlastnosti). Ukažte, že jak *rekurzivní* tak *rekurzivně spočetné* jazyky jsou uzavřené na: (a) *sjednocení*, (b) *průnik*, (c) *konkatenaci*, (d) *iteraci*.

Ukažte, že (e) *rekurzivní jazyky jsou uzavřené na doplněk*, ale (f) *rekurzivně spočetné ne*.