

## NTIN071 A&G: Cvičení 2 – Pumping Lemma

**Cíle výuky:** Po absolvování je student schopen

- formulovat a dokázat Pumping Lemma
- použít Pumping Lemma k důkazu neregularity daného jazyka
- formulovat a dokázat Myhill-Nerodovu větu
- použít Myhill-Nerodovu větu k důkazu regularity, ke konstrukci DFA
- použít Myhill-Nerodovu větu k důkazu neregularity

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1** (Pumping Lemma: formulace). (a) Zformulujte Pumping Lemma pro regulární jazyky (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(b) Jak souvisí  $n$  z lemmatu s automatem rozpoznávajícím daný jazyk?

(c) Dokažte je (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(d) Demonstrujte pumpování na jazyce  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \text{ dělí } |w|_a \text{ nebo } 3 \text{ dělí } |w|_b\}$ .

**Příklad 2** (Pumping Lemma: aplikace). Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou  $\Sigma = \{a, b\}$ .)

(a)  $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(b)  $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(c)  $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

(d)  $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$ , kde  $w^R$  je  $w$  napsané pozpátku

**Příklad 3** (Myhill–Nerodeova věta: formulace). Zformuluje Myhill–Nerodeovu větu a připomeňte si myšlenku důkazu (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

**Příklad 4** (Myhill–Nerodeova věta: aplikace). Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvrátte, že je jazyk regulární.

(a)  $L = \{aa, ab, ba\}$

(b)  $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(c)  $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(d)  $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$ , kde  $w^R$  je  $w$  napsané pozpátku

(e)  $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

## K PROCVIČENÍ A K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 5.** Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou  $\Sigma = \{a, b\}$ .)

- (a)  $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
- (b)  $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- (c)  $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

**Příklad 6.** Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvráťte, že je jazyk regulární.

- (a)  $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
- (b)  $L_k = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq k\}$  pro pevně dané  $k \in \mathbb{N}$
- (c)  $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- (d)  $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

**Příklad 7** (Pumping Lemma: zobecnění). (a) Můžeme podmínku  $|uv| \leq n$  v Pumping Lemmatu nahradit za  $|vw| \leq n$ , tedy *iterovat blízko konce*? Dokažte nebo vyvráťte.

- (b) Můžeme iterovat blízko předem zvoleného místa ve slově? Jak zformulovat (a dokázat) takové zesílení?

**Příklad 8** (Ekvivalence na slovech). Uveďte příklad ekvivalence  $\sim$  na  $\Sigma^*$ , která:

- (a) je pravá a levá kongruence
- (b) je pravá, ale ne levá kongruence
- (c) je konečného indexu