

Cíle výuky: Po absolvování student umí

- formulovat a dokázat Pumping Lemma
- použít Pumping Lemma k důkazu neregularity daného jazyka
- formulovat a dokázat Myhill-Nerodovu větu
- použít Myhill-Nerodovu větu k důkazu regularity, ke konstrukci DFA
- použít Myhill-Nerodovu větu k důkazu neregularity

PŘÍKLADY NA Cvičení

Příklad 1 (Pumping Lemma: formulace). (a) Zformulujte Pumping Lemma pro regulární jazyky (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(b) Jak souvisí n z lemmatu s automatem rozpoznávajícím daný jazyk?

(c) Dokažte je (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(d) Demonstrujte pumpování na jazyce $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje } abba \text{ jako podslovo}\}$.

Příklad 2 (Pumping Lemma: aplikace). Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.)

(a) $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(b) $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(c) $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

(d) $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$, kde w^R je w napsané pozpátku

Příklad 3 (Myhill–Nerodeova věta: formulace). (a) Zformulujte Myhill–Nerodeovu větu a připomeňte si myšlenku důkazu (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(b) Ukažte, že když zapomeneme libovolnou z podmínek na ekvivalenci \sim , výsledné tvrzení neplatí.

Příklad 4 (Myhill–Nerodeova věta: aplikace). Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvráťte, že je jazyk regulární.

(a) $L = \{aa, ab, ba\}$

(b) $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(c) $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(d) $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$, kde w^R je w napsané pozpátku

(e) $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

K PROCVIČENÍ A K ZAMYŠLENÍ

Příklad 5. Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.)

- (a) $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
- (b) $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- (c) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Příklad 6. Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvráťte, že je jazyk regulární.

- (a) $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
- (b) $L_k = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq k\}$ pro pevně dané $k \in \mathbb{N}$
- (c) $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- (d) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Příklad 7 (Pumping Lemma: zobecnění). (a) Můžeme podmínku $|uv| \leq n$ v Pumping Lemmatu nahradit za $|vw| \leq n$, tedy *iterovat blízko konce*? Dokažte nebo vyvráťte.

- (b) Můžeme iterovat blízko předem zvoleného místa ve slově? Jak zformulovat (a dokázat) takové zesílení?

Příklad 8 (Ekvivalence na slovech). Uveďte příklad ekvivalence \sim na Σ^* , která:

- (a) je pravá a levá kongruence
- (b) je pravá, ale ne levá kongruence
- (c) je konečného indexu