

Vyřešte nejprve 1ab, 2, 3a, 4a-f (zbytek je na procvičení).

Příklad 1 (Regulární jazyky a množinové operace). Mějme dva regulární jazyky, L, L' nad stejnou abecedou. Ukažte, že platí následující:

- (a) $\Sigma^* \setminus L$ je regulární jazyk
- (b) $L \cup L'$ je regulární jazyk
- (c) $L \cap L'$ je regulární jazyk
- (d) Co když mají L a L' různé abecedy (které ale mohou sdílet některé symboly)?
- (e) Uměli byste ukázat, že L^R (tj. slova z L napsaná pozpátku) je také regulární jazyk?

Příklad 2 (Pumping lemma: formulace). (a) Zformulujte pumping lemma pro regulární jazyky (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

- (b) Jak souvisí n z lemmatu s automatem rozpoznávajícím daný jazyk?
- (c) Dokažte je (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

Příklad 3 (Pumping lemma: zobecnění). (a) Můžeme podmínku $|uv| \leq n$ v Pumping lemmatu nahradit za $|vw| \leq n$, tedy *iterovat blízko konce*? Dokažte nebo vyvráťte.

- (b) Můžeme iterovat blízko předem zvoleného místa ve slově? Jak zformulovat (a dokázat) takové zesílení?

Příklad 4 (Pumping lemma: aplikace). Určete, které z následujících jazyků nejsou regulární. Dokažte to pomocí pumping lemmatu. (Jazyky jsou nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.)

- (a) $L = \{aa, ab, ba\}$
- (b) $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
- (c) $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$
- (d) $L_k = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq k\}$ pro dané $k \in \mathbb{N}$
- (e) $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- (f) $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$, kde w^R označuje slovo w napsané pozpátku

2

(g) $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

(h) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$