NTIN071 Automata and grammars

Jakub Bulín

Adapted from the Czech lecture slides by Marta Vomlelová.
Translation, minor modifications, and any errors are mine.

Contents

Zkouška, Literatura

1 Úvod, Mihyll-Nerodova věta

Požadavky ke zkoušce

- **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce**.
- Zkouška sestává z písemné přípravy a ústní části.
- **Písemná příprava** bude sestávat ze dvou až tří otázek, které korespondují sylabu přednášky, ověřují schopnosti získané na cvičení a znalost definic, vět a algoritmů z přednášky.

! Po dobu písemné přípravy musí být veškeré přinesené poznámky, přípravy, mobily, počítače apod. uloženy v uzavřeném batohu. V případě opomenutí poznámek na židli, stole, otevřeném batohu apod. je zkouška okamžitě hodnocena 'nevyhověl' a student v ní dále nepokračuje.

- **Požadavky ústní části** Ústní část bude vycházet z písemné přípravy, zpravidla budete dotázáni na vysvětlení-zdůvodnění-příklady k tvrzením v písemné části. Ústní část může být doplněna otázkou v rozsahu sylabu přednášky s písemnou přípravou nesouvisející.

Zdroje a literatura

- J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley
- M. Sipser: Introduction to the Theory of Computation, Cengage Learning, 2013
- M. Chytil: *Automaty a gramatiky, SNTL Praha, 1984*

⇒ moodle https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5119

  - kde jsou tyto slajdy

  ⇒ kde je dotazník k textové verzi slajdů

  - moodle testy (které ale netestují zdůvodnění a důkazy).

⇒ cvičení.

1.1 Cíl přednášky

- Osvojit si abstraktní model výpočetních zařízení,
- vnímat, jak drobné změny v definici vedou k velmi odlišným třídám,
- zažít skutečnost algoritmicky nerozhodnutelných problémů,
- rychlý úvod do složitosti $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$.

Obrázek shrnuje výpočetní modely - automaty v levém sloupci, gramatiky v pravém, propojuje je stejná třída přijímaných jazyků. Čím níže, tím jednodušší a přijímající menší třídu jazyků.

Automaty a gramatiky – dva způsoby popisu

Turingovy stroje Vícepáskové, nedeterministické	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_0}$	gramatiky Typu 0
zásobníkové automaty	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty DFA, NFA, ϵNFA	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$	regulární gramatiky

1.2 Definice základních pojmů

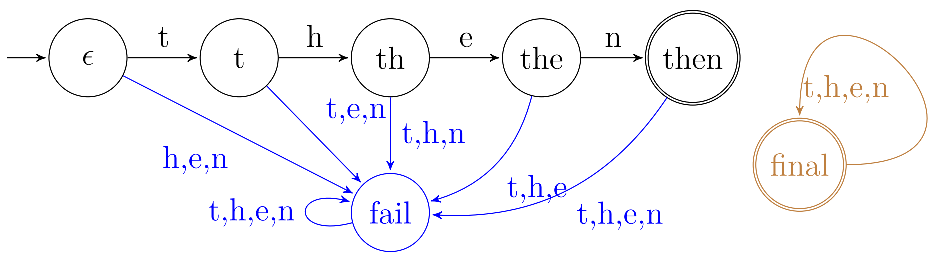
Definice 1.1: Deterministický konečný automat

Deterministický konečný automat (DFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, značíme Σ
3. **přechodové funkce**, zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$, značíme δ, která bude reprezentovaná hranami grafu (na hraně seznam $\subset \Sigma$) nebo tabulkou
4. **počátečního stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud',
5. a **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

Úmluva: Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav $fail$ a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do $fail$.

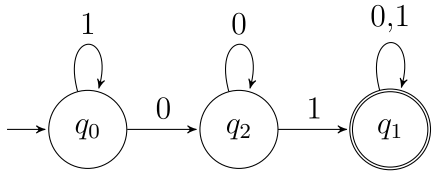
<all> Pokud je množina F prázdná, a je vyžadovaná neprázdná, přidáme do ní i Q nový stav $final$ do kterého vedou jen přechody z něj samého $\forall s \in \Sigma$: $\delta(final, s) = final$.



Konečný automat popisujeme většinou grafem (uzly jsou stavy, hrany anotované písmeny $\in \Sigma$ přechody, počáteční stav je značen šipkou dovnitř, přijímající stavy dvojitým kruhem (nebo šipkou ven). Jiný zápis atomatu je tabulka, sloupce nadepsané znaky abecedy, řádky stavy, koncové stavy značené hvězdičkou, v políčkách nový stav dle přechodové funkce δ.

Example 1.1. Automat A přijímající $L = \{x01y : x, y \in \{0,1\}^*\}$.

- Stavový diagram (graf) Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$.



tabulka

- – řádky: stavy + přechody
  – sloupce: písmena vstupní abecedy

δ	0	1
$\to q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Následuje několik definic základních pojmů.

Abeceda, slova, jazyky

Definice 1.2: Slovo, ϵ,λ,Σ^*,Σ^+,jazyk

Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ.

- **Slovo, řetězec** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí ϵ nebo λ.

- **Množinu všech slov v abecedě Σ** značíme Σ^*,

- množinu všech neprázdných slov v značíme Σ^+.
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ.

Definice 1.3: operace zřetězení, mocnina, délka slova

Nad slovy Σ^* definujeme operace:

- **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
- **mocnina** (počet opakování) u^n ($u^0 = \epsilon$, $u^1 = u$, $u^{n+1} = u^n.u$)
- **délka slova** $|u|$ ($|\epsilon| = 0$, $|auto| = 4$).
- **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s$ ($|zmrzlina|_z = 2$).

Rozšířená přechodová funkce

Funkce δ je definovaná na znacích, proto ji rozšíříme na slova.

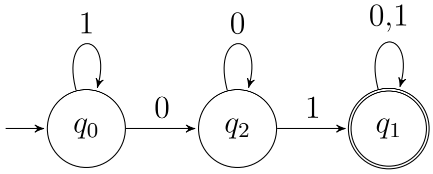
Definice 1.4: rozšířená přechodová funkce

Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
Rozšířenou přechodovou funkci δ^*: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr δ) definujeme induktivně:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Pozn. Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^*.

$\delta^*(q_0, 1100) = q_2$, $\delta^*(q_0, 1100111111111001) = q_1$



Jazyky rozpoznatelné konečnými automaty

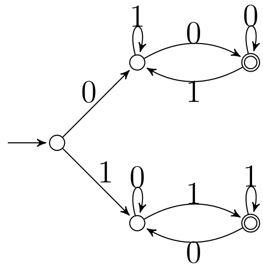
Definice 1.5: jazyky rozpoznatelné DFA, regulární jazyky

- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \;\&\; \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Slovo w je **přijímáno** automatem A, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

Příklady regulárních (a neregulárních) jazyků

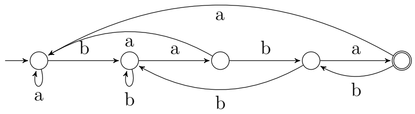
Example 1.2. <5->[regulární jazyk]

- $L = \{w \mid w = xux, w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}, u \in \{0,1\}^*\}$.



Example 1.3 (regulární jazyk).

- $L = \{w \mid w = ubaba,\ w \in \{a,b\}^*,\ u \in \{a,b\}^*\}$.

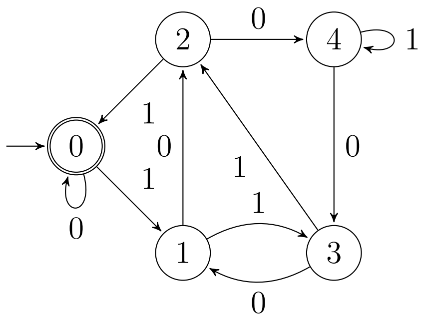


Example 1.4 (regulární jazyk).

- $L = \{w|w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného 5$\}$.

Example 1.5 (**!**NEregulární jazyk).

- $L = \{0^n 1^n | w \in \{0,1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$ NENÍ regulání jazyk.



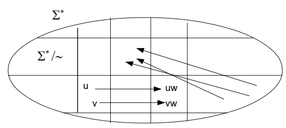
1.3 Myhill–Nerodova věta

Myhill-Nerodova věta nám dává návod, jak konstruovat konečný automat, i jak dokázat, že konečný automat zkonstruovat nelze. Nejdřív ale potřebujeme termín pravá kongruence.

Definice 1.6: kongruence

Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalence $\sim$ na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

- $\sim$ je **pravá kongruence**, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*) u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.
- je **konečného indexu**, jestliže rozklad $\Sigma^*/\sim$ má konečný počet tříd.
- Třídu kongruence $\sim$ obsahující slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.



Example 1.6 (Pravá kongruence).

- Relace $\sim_{end}$ 'končí stejným písmenem' je pravá kongruence,
  - pokud $ux \sim_{end} vx$, pak i $uxw \sim_{end} vxw$.
- Relace $\sim_{fl}$ 'končí stejně jako začíná' je ekvivalence, $aa \sim_{fl} bb$, ale $aaa \not\sim_{fl} bba$, tedy není pravá kongruence.
- Relace $\sim_{||}$ 'mají stejný počet znaků' není konečného indexu.

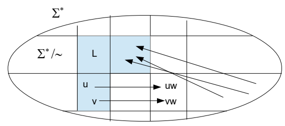
Myhill–Nerodova věta

Věta 1.1: Myhill–Nerodova věta

Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) L je rozpoznatelný konečným automatem,

b) existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.



Důkaz: Důkaz Myhill–Nerodovy věty $\Rightarrow$

a)$\Rightarrow$b); tj. automat $\Rightarrow$ pravá kongruence konečného indexu

- definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.
- je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w|\delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q\in F} \{w|\delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q\in F} [w|\delta^*(q_0, w) = q]_\sim .$$

$\square$

Důkaz: Důkaz Myhill–Nerodovy věty $\Leftarrow$

b)$\Rightarrow$a); tj. pravá kongruence konečného indexu $\Rightarrow$ automat

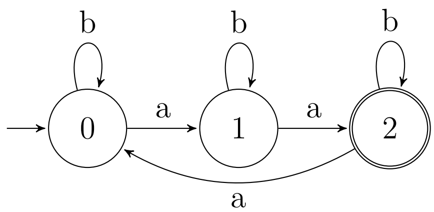
- abeceda automatu vezmeme Σ
- za stavy Q volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
- počáteční stav $q_0 \equiv [\epsilon]$
- koncové stavy $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$ $w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \ldots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \ldots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$ $\delta^*([\epsilon], w) = [w]$

$\square$

Použití Myhill–Nerodovy věty: Konstrukce automatů

Example 1.7. Sestrojte automat přijímající jazyk $L = \{w|w \in \{a, b\}^* \& |w|_a = 3k+2\}$, tj. obsahuje $3k+2$ symbolů a.

- $|u|_x$ značí počet symbolů x ve slově u
- definujme $u \sim v \equiv (|u|_a mod\ 3 = |v|_a mod\ 3)$
- třídy ekvivalence 0,1,2
- L odpovídá třídě 2
- a – přechody do následující třídy
- b – přechody zachovávají třídu.



Ne-regulární jazyk

Example 1.8 (Ne–regulární jazyk). Jazyk $L_{a^+b^ic^i} = \{u|u = a^+b^ic^i \vee u = b^ic^j, + \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární (Myhill–Nerodova věta).

Důkaz: Jazyk $L_{a^+b^ic^i}$ není regulární

- Důkaz sporem: Předpokládejme, že L je regulární

$\Rightarrow$ pak existuje pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu m, L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$

- vezmeme množinu řetězců $S = \{ab, abb, abbb, \dots, ab^{m+1}\}$
- existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

  $i \neq j$ — $ab^i \sim ab^j$

  přidáme c^i — $ab^ic^i \sim ab^jc^i$ — $\sim$ je kongruence

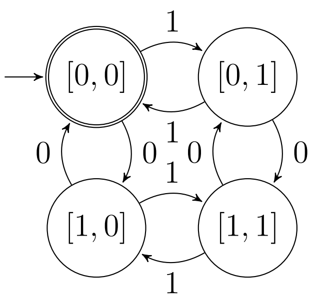
  spor — $ab^ic^i \in L$ & $ab^jc^i \notin L$ — s 'L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$ '.

$\square$

Příklad - 'součin' automatů

Example 1.9. $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_0 = 2k \& |w|_1 = 2\ell, k, \ell \in \mathbb{N}_0\}$, tj.

- sudý počet 0
- a zároveň sudý počet 1.



δ	0	1
$* \rightarrow [0,0]$	$[1,0]$	$[0,1]$
$[0,1]$	$[1,1]$	$[0,0]$
$[1,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$[1,1]$	$[0,1]$	$[1,1]$

Příklad (špatného) protokolu pro elektronický převod peněz

- Tři zúčastnění: zákazník, obchod, banka.
- Pro jednoduchost jen jedna platba (soubor 'money').

  Example 1.10. Zákazník poskytne obchodu číslo kreditní karty, obchod si vyžádá peníze od banky a pošle zboží zákazníkovi. Zákazník má možnost zablokovat kartu a žádat zrušení transakce.

  Pět událostí:

  - Zákazník může zadat číslo karty **pay**.
  - Zákazník může kartu zablokovat **cancel**.
  - Obchod může poslat **ship** zboží zákazníkovi.
  - Obchod může vyžádat **redeem** peníze od banky.
  - Banka může převést **transfer** peníze obchodu.

(Neúplný) konečný automat pro bankovní příklad

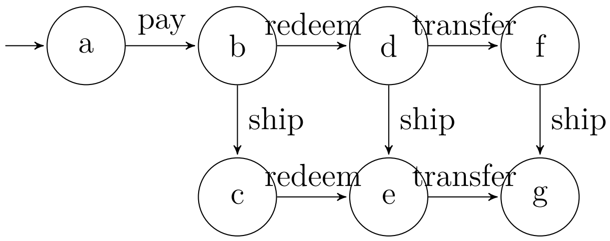


Figure 1: Obchod

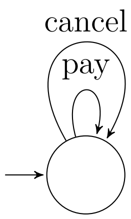


Figure 2: Zákazník

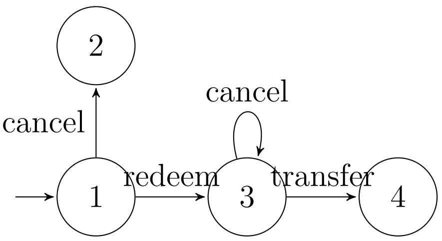


Figure 3: Banka

Hrana pro každý vstup

- Můžeme vyžadovat, aby automat provedl akci pro každý vstup. Obchod přidá hranu pro každý stav do sebe samého označenou *cancel*.
- Zákazník by neměl shodit bankovní automat opětovným zaplacením *pay*, proto přidáme smyčku *pay*. Podobně s ostatními akcemi.

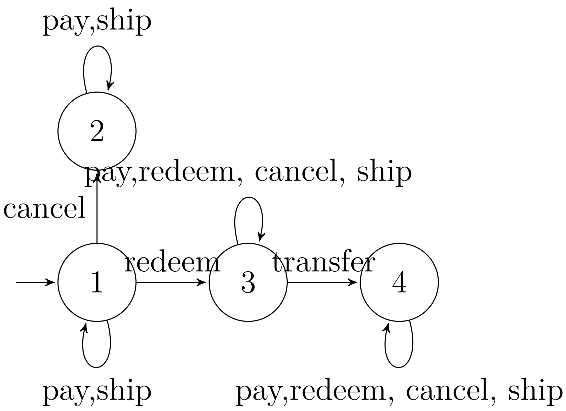
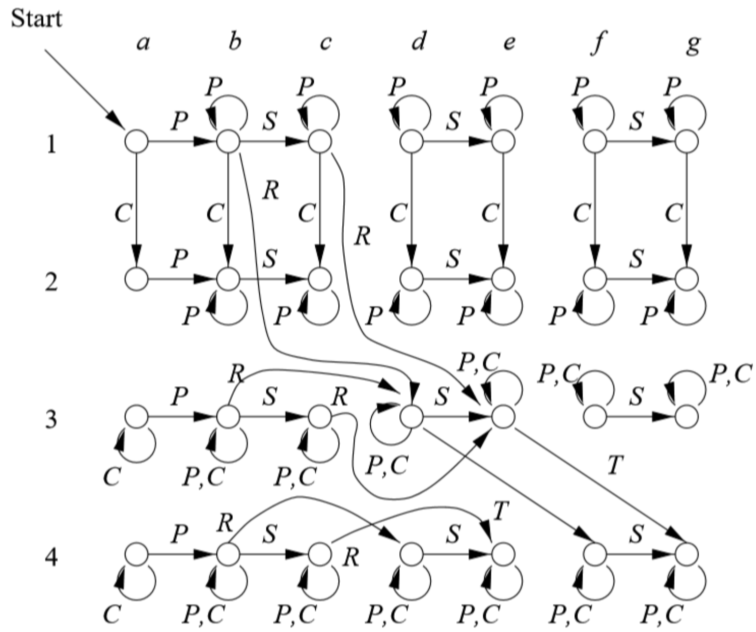


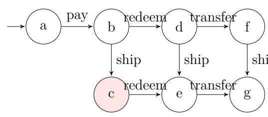
Figure 4: Úplnější automat pro banku.

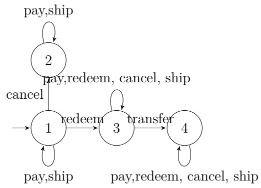
Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley



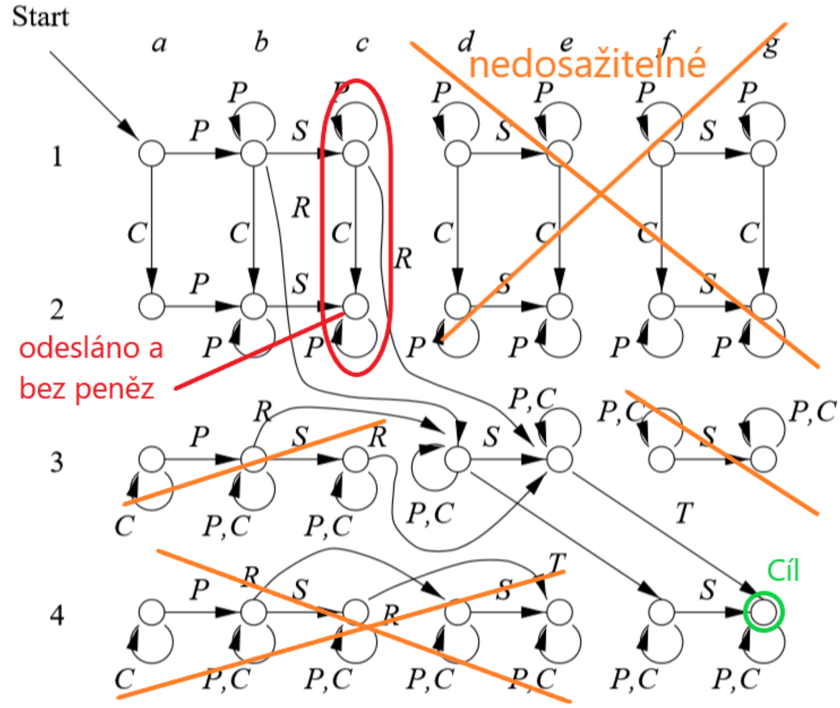


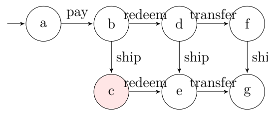


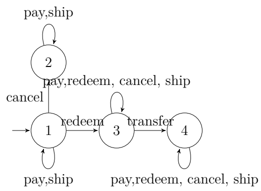
Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley







Dnes jsme probrali

- Definice
  - deterministického konečného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - jazyka $L \subseteq \Sigma^*$
  - jazyka rozpoznávaného konečným automatem $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$
- Myhill–Nerodova věta
- příklad důkazu ne–regulárnosti jazyka ($\{ab^ic^i|i \in \mathbb{N}\}$, $\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}\}$)
- příklady regulárních jazyků

2 Iterační lemma pro reg. jazyky, Redukovaný DFA

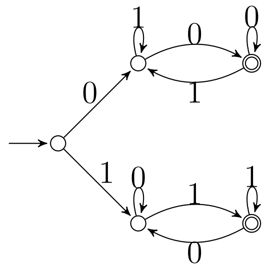
Konečné automaty, Regulární jazyky

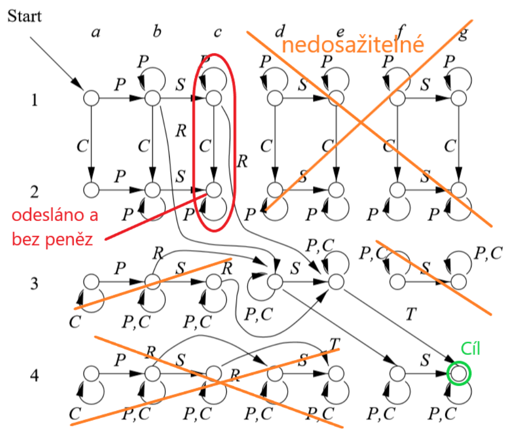
- **Deterministický konečný automat (DFA)** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w | w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

- Jazyk L je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.

- Třídu jazyků rozpoznatelných deterministickými konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.





- Dnes budeme zkoumat:
  - Dá se do každého stavu dojít?
  - Je v přechodové funkci cyklus?
  - Jak automat redukovat?
  - Může být nedeterministický?

2.1 Dosažitelné stavy

Definice 2.1: Dosažitelné stavy

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav q je **dosažitelný**, jestliže existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\delta^*(q_0, w) = q$.

Algoritmus 2.1: Hledání dosažitelných stavů

Dosažitelné stavy hledáme iterativně.

- Začátek: $M_0 = \{q_0\}$.
- Opakuj: $M_{i+1} = M_i \cup \{q | q \in Q, (\exists p \in M_i,\ \exists x \in \Sigma)\ \delta(p, x) = q\}$
- opakuj dokud $M_{i+1} \neq M_i$.

Důkaz: Korektnost a úplnost

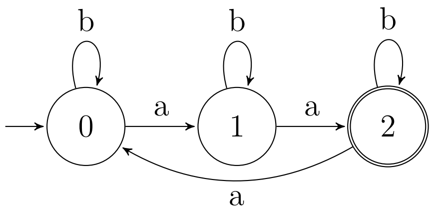
- Korektnost: $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq Q$ a každé M_i obsahuje pouze dosažitelné stavy.
- Úplnost:
  - nechť q je dosažitelný, tj. $(\exists w \in \Sigma^*)\delta^*(q_0, w) = q$
  - vezměme nejkratší takové $w = x_1 \ldots x_n$ tž. $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) = q$
  - zřejmě $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_i) \in M_i$ (dokonce $M_i \setminus M_{i-1}$)
  - tedy $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) \in M_n$, tedy $q \in M_n$.

$\square$

2.2 Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky

Projde automat cyklus?

Automat A



Example 2.1. Projde automat výše cyklus při čtení slova:

- $abbbba$?
- $abbbba = a(b)bbba; \forall i \geq 0; a(b)^i bbba \in L(A)$.
- $aaaaba$?
- $aaaaba = (aaa)aba; \forall i \geq 0; (aaa)^i aba \in L(A)$.
- aa ?
- aa neprojde cyklus, ale délka $|aa| <$ počet stavů.

Věta 2.1: !Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky

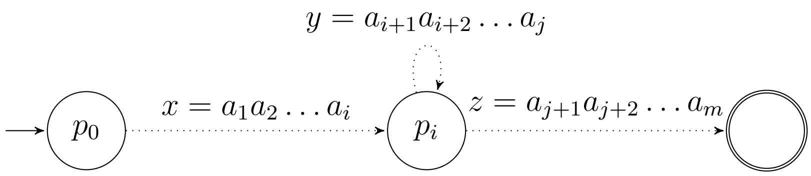
Mějme regulární jazyk L. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:

- $y \neq \epsilon$
- $|xy| \leq n$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$, slovo $xy^k z$ je také v L.

Důkaz iteračního lematu pro regulární jazyky

Důkaz: iteračního lematu pro regulární jazyky

- Mějme regulární jazyk L, pak existuje DFA A s n stavy, že $L = L(A)$.
- Vezměme libovolné slovo $a_1 a_2 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n$, $a_i \in \Sigma$.
- Definujme: $\forall i\ p_i = \delta^*(q_0, a_1 a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.
- Máme $n+1$ p_i a n stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, tj. $(\exists i,j)(0 \leq i < j \leq n\ \&\ p_i = p_j)$.
- Definujme: $x = a_1 a_2 \dots a_i$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$, $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$, tj. $w = xyz$, $y \neq \epsilon$,



$|xy| \leq n$.

- Smyčka nad p_i se může opakovat libovolně krát a vstup je také akceptovaný.

□

Použití pumping lemmatu

Example 2.2 (Pumping lemma jako hra s oponentem). Jazyk $L_{eq} = \{w; |w|_0 = |w|_1\}$ slov se stejným počtem 0 a 1 není regulární.

Důkaz: Jazyk L_{eq} není regulární.

- Předpokládejme že L_{eq} je regulární. Vezměme n z pumping lemmatu.
- Zvolme $w = 0^n 1^n \in L_{eq}$.
- Rozdělme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$.
- Protože $|xy| \leq n$ je na začátku w, obsahuje jen 0.
- Z pumping lemmatu: $xz \in L_{eq}$ (pro $k = 0$). To má ale méně 0 než 1, takže nemůže být v L_{eq}.

□

Example 2.3. <6-> Jazyk $L = \{0^i 1^i; i \geq 0\}$ není regulární.

Aplikace pumping lemmatu 2

Example 2.4. Jazyk L_{pr} slov 1^p kde p je prvočíslo není regulární.

Důkaz: L_{pr} slov 1^p kde p je prvočíslo není regulární.

- Předpokládejme že L_{pr} je regulární. Vezměme n z pumping lemmatu. Zvolme prvočíslo $p \geq n+2$, označme $w = 1^p$.
- Rozložme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, nechť $|y| = m$. Pak $|xz| = p - m$.
- $xy^{p-m}z \in L_{pr}$ z pumping lemmatu, ale $|xy^{p-m}z| = |xz| + (p-m)|y| = p - m + (p-m)m = (m+1)(p-m)$ není prvočíslo (žádný z činitelů není 1).

□

'Pumpovatelný' ne-regulární jazyk

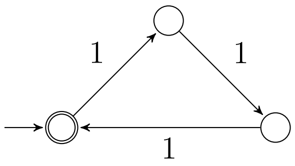
Example 2.5 (Ne–regulární jazyk, který lze pumpovat). Jazyk $L = \{u | u = a^+ b^i c^i \vee u = b^i c^j, + \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární (Myhill–Nerodova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

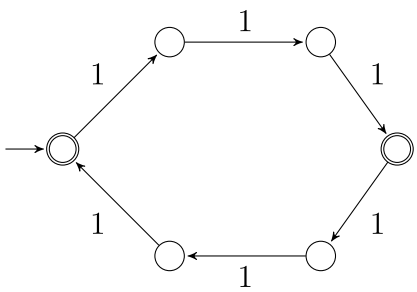
2.3 Ekvivalentní stavy, Redukce automatu

Nejednoznačnost

Automat přijímající daný jazyk není určen jednoznačně.

- Jazyk $L = \{w | w \in \{1\}^* \& |w| = 3k\}$.





Definice 2.2: Ekvivalence stavů

Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu A jsou **ekvivalentní** pokud:

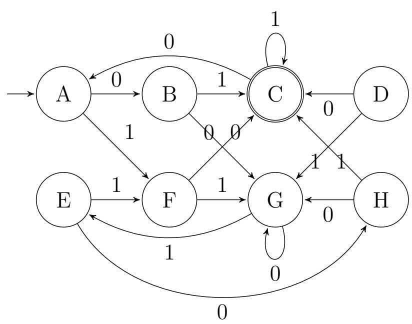
- Pro všechny řetězce $w \in \Sigma^*$; $\delta^*(p, w) \in F$ iff $\delta^*(q, w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme, že jsou **rozlišitelné**.

Příklad rozlišitelných stavů

Example 2.6. Automat na obrázku:

- C a G nejsou ekvivalentní, $\delta^*(C, \epsilon) \in F$ a $\delta^*(G, \epsilon) \notin F$.
- A,G: $\delta^*(A, 01) = C$ je přijímající, $\delta^*(G, 01) = E$ není.
- A,E jsou ekvivalentní – ϵ, $1*$ zřejmé, 0 vede do ne–přijímajících stavů, 01 a 00 se sejdou ve stejném stavu.

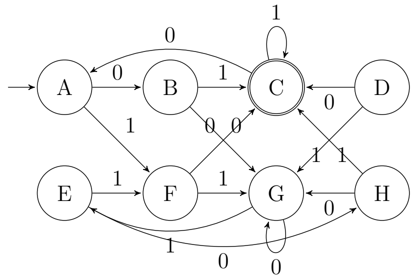


Lemma. Ekvivalence na stavech je tranzitivní.

Algoritmus 2.2: **!**Algoritmus hledání rozlišitelných stavů v DFA

Následující algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

- Základ: Pokud $p \in F$ (přijímající) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p, q\}$ rozlišitelná.
- Indukce: Nechť $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$ a o dvojici $r, s; r = \delta(p, a)$ a $s = \delta(q, a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p, q\}$ jsou rozlišitelné.
  - opakuj dokud existuje nová trojice $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$.



	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

Křížek značí rozlišitelné dvojice. C je rozlišitelné hned, ostatní kromě $\{A, G\}, \{E, G\}$ také. Vidíme tři ekvivalentní dvojice stavů.

Algoritmus hledání rozlišitelných stavů

Přijímající vs. nepřijímající stavy

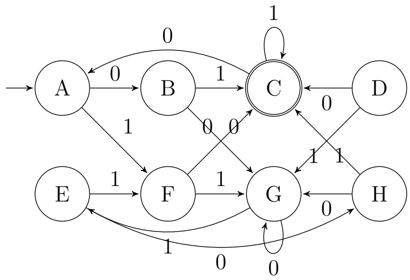
	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	x	x					
D			x				
E			x				
F			x				
G			x				
H			x				

1.krok1: $\delta(q, 1) \in F$ pro $q \in \{B, C, H\}$

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D		x	x				
E		x	x				
F		x	x				
G		x	x				
H	x		x	x	x	x	x

1.krok0: $\delta(q, 0) \in F$ pro $q \in \{D, F\}$

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G		x	x	x		x	
H	x		x	x	x	x	x



B a G jsou rozlišitelné, $\delta(A, 0) = B$, $\delta(G, 0) = G$, tj. A,G jsou rozlišitelné. Obdobně pro E,G vedoucí $\delta(*, 0)$ do rozlišitelných stavů H,G.

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

Zůstávají tři ekvivalentní dvojice stavů.

Věta 2.2: 1

Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchozím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.

Důkaz: Koreknost algoritmu

- Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
- Vezměme z nich pár p, q rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \dots a_n$.
- Stavy $r = \delta(p, a_1)$ a $s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \dots a_n$ takže pár není mezi špatnými.
  Tedy jsou 'vykřížkované' algoritmem.
- Tedy v příštím kroku algoritmus rozliší i p, q.

□

Čas výpočtu je polynomiální vzhledem k počtu stavů.

- V jednom kole uvažujeme všechny páry, tj. $O(n^2)$.
- Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
- Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a následováním těchto seznamů 'zpátky'.

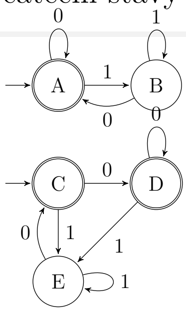
Testování rovnosti regulárních jazyků

Algoritmus 2.3: **!**Testování rovnost regulárních jazyků

Rovnost (ekvivalenci) regulárních jazyků L, M testujeme následovně:

- Najdeme DFA A_L, A_M rozpoznávající $L(A_L) = L, L(A_M) = M$, $Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
- Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cup \delta_M, q_L, F_L \cup F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
- Jazyky jsou stejné právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

Example 2.7. Uvažujme jazyk $\{\epsilon\} \cup \{0,1\}^*0$ přijímající prázdné slovo a slova končící 0. Vpravo obrázek dvou DFA a tabulku rozlišitelných stavů.



B	x			
C		x		
D		x		
E	x		x	x
	A	B	C	D

Minimalizace DFA

Definice 2.3: redukovaný DFA, redukt

Deterministický konečný automat je **redukovaný**, pokud

- nemá nedosažitelné stavy a
- žádné dva stavy nejsou ekvivalentní
- δ je totální.

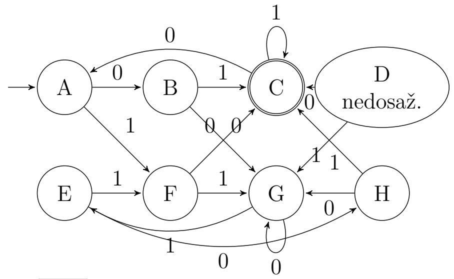
Konečný automat B je **reduktem** automatu A, jestliže:

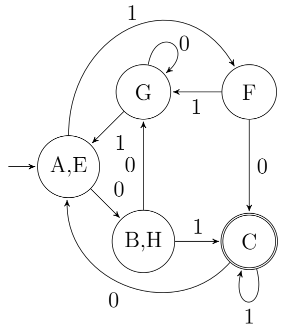
- B je redukovaný a
- A a B jsou ekvivalentní.

Algoritmus 2.4: **!**Algoritmus nalezení reduktu DFA A

- Ze vstupního DFA A eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.
- Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.
- Konstruujeme DFA B na třídách ekvivalence jakožto stavech. Přechodovou funkci B označíme γ, mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$, označíme T třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechny $q \in S$.
- Počáteční stav B je třída obsahující počáteční stav A.
- Množina přijímajících stavů B jsou bloky odpovídající přijímajícím stavům A.

Příklad redukovaného DFA





B	x					
C	x	x				
E		x	x			
F	x	x	x	x		
G	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x
	A	B	C	E	F	G

Třídy ekvivalence:

$$\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{F\}, \{G\}$$

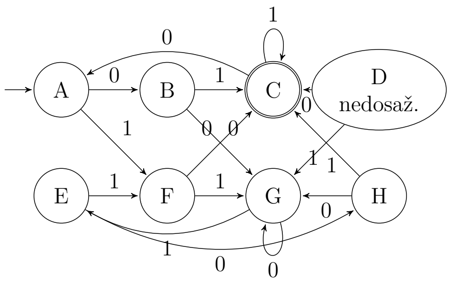
Automatový homomorfizmus

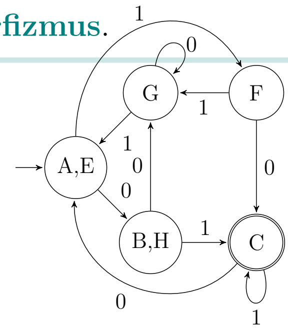
Definice 2.4: automatový homomorfizmus

Nechť A_1, A_2 jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \to Q_2$ Q_1 na Q_2 je **automatovým homomorfizmem**, jestliže:

	$h(q_{0_1}) = q_{0_2}$	'stejné' počáteční stavy
<article>	$h(\delta_1(q, x)) = \delta_2(h(q), x)$	'stejné' přechodové funkce
	$q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2$	'stejné' koncové stavy.

Homomorfizmus prostý a na nazýváme **isomorfizmus**.





Ekvivalence automatů a homomorfizmus

Definice 2.5: Ekvivalence automatů!

Dva konečné automaty A, B nad stejnou abecedou Σ jsou **ekvivalentní**, jestli že rozpoznávají stejný jazyk, tj. $L(A) = L(B)$.

Věta 2.3: Věta o ekvivalenci automatů

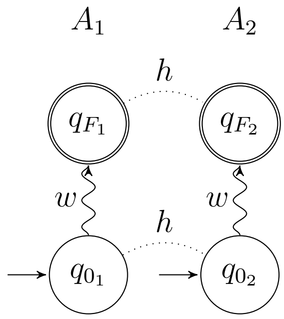
Existuje-li homomorfizmus konečných automatů A_1 do A_2, pak jsou A_1 a A_2 ekvivalentní.

Důkaz:

- Pro libovolný řetězec $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací
  - $h(\delta_1^*(q,w)) = \delta_2^*(h(q),w)$
- dále:

$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1},w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1},w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1}),w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2},w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_2) \end{aligned}$$

□



Redukty a jejich ekvivalence

Lemma. Každé dva ekvivalentní redukované automaty jsou izomorfní.

Proof.
- Každý stav $q \in Q_1$ je dosažitelný. Najdeme pro něj slovo $q = \delta_1^*(q_{0_1}, w)$
- a definujeme $h(q) = \delta_2^*(q_{0_2}, w)$.
- Lze dokázat, že je h korektně definovaná funkce, zachovává vlastnosti homomorfizmu (q_0, F, δ) a jde o bijekci, tj. je to isomorfizmus.

□

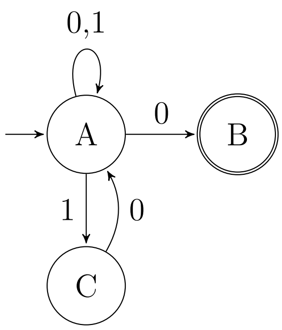
Lemma. Pro každý deterministický konečný automat A, který přijímá alespoň jedno slovo, existuje redukovaný DFA, který je s ním ekvivalentní.

Definice 2.6: Redukt

Reduktem DFA A nazýváme redukovaný automat s A ekvivalentní.
Z předchozí věty plyne, že všechny redukty automatu A jsou izomorfní.

Pro nedeterministické FA to tak snadné není

Example 2.8. Nedeterministický FA na obrázku můžeme redukovat vypuštěním stavu C.
Stavy $\{A, C\}$ jsou rozlišitelné vstupem 0, takže algoritmus pro DFA redukci nenajde.
Mohli bychom hledat exhauzivním výpočtem.



3 Nedeterministické ϵ–NFA, Operace zachovávající regularitu

Nedeterministické konečné automaty s ϵ přechody (ϵ-NFA)

Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost ’uhodnout’ něco o vstupu.

Figure 5: NFA přijímající všechna slova končící 01.

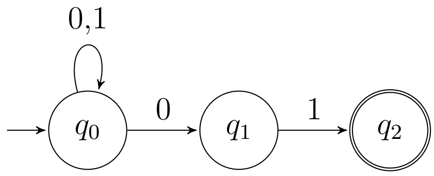
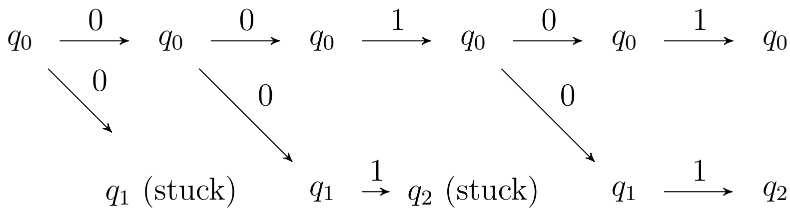


Figure 6: NFA zpracovává vstup 00101.



Definice 3.1: Nedeterministický konečný automat s ϵ přechody (ϵ-NFA)

Nedeterministický konečný automat s ϵ přechody (ϵ-NFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné množiny **vstupních symbolů**, značíme Σ
3. **přechodové funkce**, zobrazení $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ vracející podmnožinu Q.
4. **počáteční ho stavu**[a] $q_0 \in Q$,
5. a **množiny koncových (přijímajících) stavů** $F \subseteq Q$.

[a]alternativa: množiny počátečních stavů $S_0 \subseteq Q$

Example 3.1. Tabulka pro ϵ-NFA z předchozího slajdu $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ je:

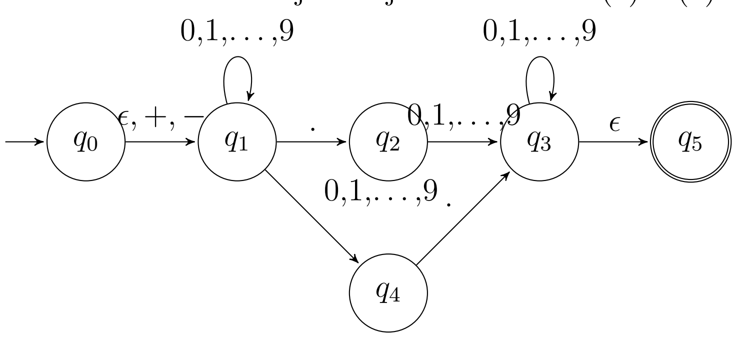
δ	ϵ	0	1
$\to q_0$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

.

Konečné automaty s ϵ přechody

- ϵ-přechod znamená přechod bez přečtení vstupního symbolu.

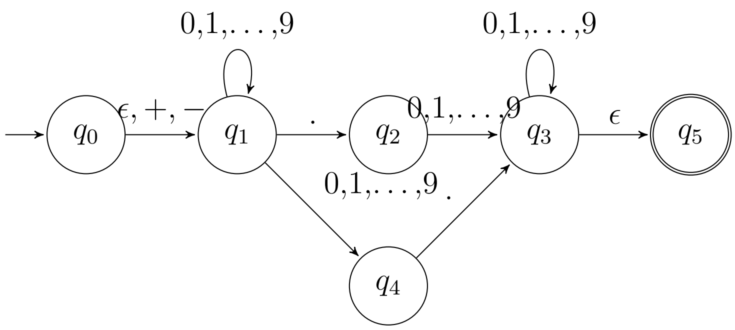
Example 3.2 (ϵ-NFA, silně nedeterministická δ). (1) Volitelně znaménko + nebo - ,
(2) řetězec číslic,
(3) desetinná tečka a
(4) další řetězec číslic. Nejméně jeden z řetězců (2) a (4) musí být neprázdný.



Example 3.3 (Přechodová funkce v tabulce)*.* Předešlý ϵ-NFA je: $E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{$

s δ:

δ	ϵ	+,-	.	0,1,...,9
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$*q_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



ϵ–uzávěr

Definice 3.2: ϵ–uzávěr

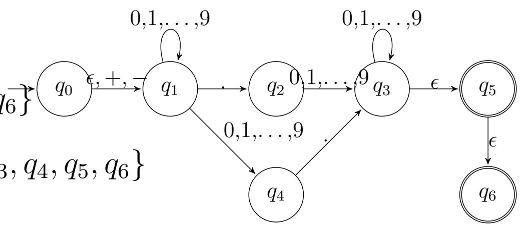
Pro $q \in Q$ definujeme **ϵ–uzávěr** $\epsilon closure(q)$ rekurzivně:

- Stav q je v $\epsilon closure(q)$.
- Je–li $p \in \epsilon closure(q)$ a $r \in \delta(p, \epsilon)$ pak i $r \in \epsilon closure(q)$.

Pro množinu stavů $S \subseteq Q$ definujeme $\epsilon closure(S) = \bigcup_{q \in S} \epsilon closure(q)$.

Example 3.4 (ϵ uzávěr)*.*

- $\epsilon closure(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\epsilon closure(q_1) = \{q_1\}$
- $\epsilon closure(q_3) = \{q_3, q_5, q_6\}$
- $\epsilon closure(\{q_3, q_4\}) = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$



Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný ϵ-NFA

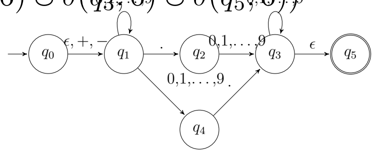
Definice 3.3: δ^* pro ϵNFA

Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je ϵ–NFA. Rozšířenou přechodovou funkci δ^* definujeme následovně:

- $\delta^*(q, \epsilon) = \epsilon closure(q)$.
- Indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \epsilon closure\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)\right).$$

Example 3.5.
$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0,\epsilon) &= \epsilon closure(q_0) &&= \{q_0,q_1\}\\
\delta^*(q_0,5) &= \epsilon closure(\textstyle\bigcup_{q\in\delta^*(q_0,\epsilon)}\delta(q,5)) = \epsilon closure(\delta(q_0,5)\cup\delta(q_1,5)) &&= \{q_1,q_4\}\\
\delta^*(q_0,5.) &= \epsilon closure(\delta(q_1,.)\cup\delta(q_4,.)) &&= \{q_2,q_3,q_5,q_6\}\\
\delta^*(q_0,5.6) &= \epsilon closure(\delta(q_2,6)\cup\delta(q_3,6)\cup\delta(q_5,6)) &&= \{q_3,q_5,q_6\}
\end{aligned}$$



Jazyk přijímaný ϵNFA

Definice 3.4: Jazyk přijímaný ϵNFA

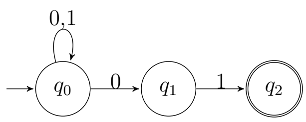
Mějme nedeterministický konečný automat ϵNFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, pak

$$L(A) = \{w|\ \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

je jazyk přijímaný automatem A.
Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímající stav.

Example 3.6. Automat z předchozího slajdu přijímá jazyk $L = \{w|w$ končí na $01, w \in \{0,1\}^*\}$. Důkaz indukcí konjunkce tvrzení:

- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_0 pro každé slovo w.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_1 iff w končí 0.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_2 iff w končí 01.



Konfigurace automatu, Výpočetní graf

Definice 3.5: Konfigurace DFA, ϵNFA

Mějme ϵNFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $q \in Q$, $v \in \Sigma^*$, pak dvojice (q, v) označuje **konfiguraci** konečného automatu, nacházejícího se ve stavu q s nepřečteným vstupem v.

Definice 3.6: Výpočetní strom, graf ϵNFA

Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a vstupní slovo $w \in \Sigma^*$. Uzly **výpočetního grafu** jsou konfigurace A nad slovem w, orientované hrany značí možný přechod mezi konfiguracemi, tj. z (p, au) vede hrana do (q, u) právě když $q \in \delta(p, a)$.

$$(q_0,00101)\xrightarrow{0}(q_0,0101)\xrightarrow{0}(q_0,101)\xrightarrow{1}(q_0,01)\xrightarrow{0}(q_0,1)\xrightarrow{1}(q_0,\epsilon)$$

$$(q_0,0101)\xrightarrow{0}(q_1,101)\xrightarrow{1}(q_2,01)\ \text{(stuck)}\qquad (q_0,01)\xrightarrow{0}(q_1,1)\xrightarrow{1}(q_2,\epsilon)$$

$$(q_0,00101)\xrightarrow{0}(q_1,0101)\ \text{(stuck)}$$

3.1 Podmnožinová konstrukce

Věta 3.1: Podmnožinová konstrukce (s ϵ–přechody)

Jazyk L je rozpoznatelný ϵ-NFA právě když je L regulární.

Algoritmus 3.1: !Podmnožinová konstrukce (s ϵ–přechody)

Pro libovolný ϵ-NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{D_0}, F_D)$ přijímající stejný jazyk jako N.

- Nové stavy jsou ϵ-uzavřené podmnožiny Q_N.

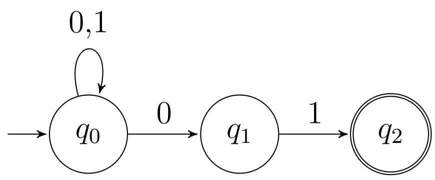
  $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_N)$, $\forall S \subseteq Q_N : \epsilon closure(S) \in Q_D$. V Q_D může být i $\emptyset$.
- Počáteční stav je ϵ-uzávěr q_0.

  $q_D = \epsilon closure(q_0)$.
- Přijímací stavy jsou všechny množiny obsahující nějaký přijímající stav.

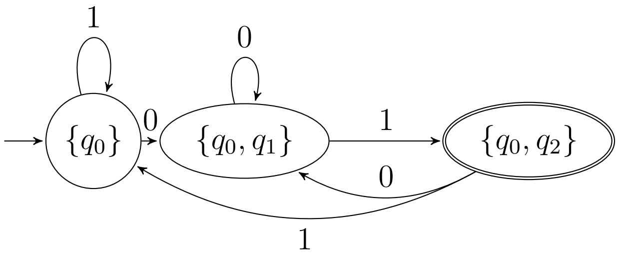
  $F_D = \{S | S \in Q_D \ \& \ S \cap F_N \neq \emptyset\}$.
- Přechodová funkce sjednotí předchody z jednotlivých stavů a uzavře ϵclosure.

  Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \epsilon closure(\bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a))$.

Příklad podmnožinové konstrukce pro $\{w.01 | w \in \{0, 1\}\}$



	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

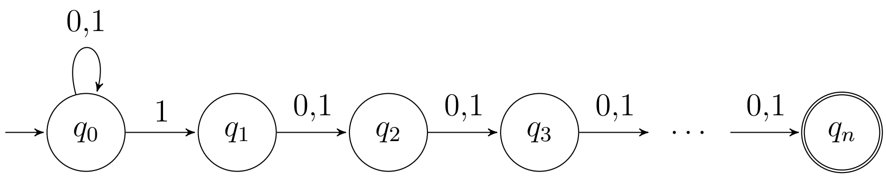


Věta 3.2: Převod ϵ-NFA na DFA

Pro DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{D_0}, F_D)$ vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ platí $L(N) = L(D)$.

Proof. Indukcí dokážeme: $\delta^*_D(q_0, w) = \delta^*_N(q_{D_0}, w)$. □

Example 3.7 ('Těžký' případ pro podmnožinovou konstrukci). Jazyk $L(N)$ slov 0's a 1's takových, že n–tý symbol od konce je 1. Intuitivně si DFA musí pamatovat n posledních přečtených symbolů.



- Aplikace hledání v textu

3.2 Množinové operace nad jazyky

Definice 3.7: Množinové operace nad jazyky

Mějme dva jazyky L, M. Definujme následující operace:
(1) binární **sjednocení** $L \cup M = \{w | w \in L \vee w \in M\}$

- Příklad: jazyk obsahuje slova začínající a^i nebo tvaru $b^j c^j$.

(2) **průnik** $L \cap M = \{w | w \in L \ \& \ w \in M\}$

- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končící na 'baa'.

(3) **rozdíl** $L - M = \{w | w \in L \ \& \ w \notin M\}$

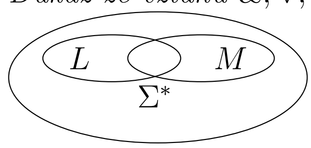
- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky nekončící na 'baa'.

(4) **doplněk (komplement)** $\bar{L} = -L = \{w | w \notin L\} = \Sigma^* - L$

- Příklad: jazyk obsahuje slova nekončící na 'a'.

Theorem (de Morganova pravidla). *Platí:*
$L \cap M = \overline{\bar{L} \cup \overline{M}}$
$L \cup M = \overline{\bar{L} \cap \overline{M}}$
$L - M = L \cap \overline{M}$.

Důkaz ze vztahů $\&, \vee, \neg$.



□

3.3 Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

Věta 3.3: Uzavřenost na množinové operace

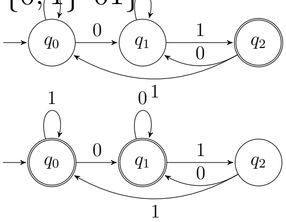
Mějme regulární jazyky L, M. Pak jsou následující jazyky také regulární:
(1) sjednocení $L \cup M$,
(2) průnik $L \cap M$,
(3) rozdíl $L - M$,
(4) doplněk $\bar{L} = \Sigma^* - L$.

Důkaz: Uzavřenost RJ na doplněk

- Pokud δ není pro některé dvojice q, a definovaná, přidáme nový nepřijímající stav q_{fail} a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q_{fail}, a) = q_{fail}$.
- Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajícího deterministického FA, tj. $F_{complement} = Q_A - F_A$.

□

Example 3.8. Jazyk $\{w;\ w \in \{0,1\}^*01\}$



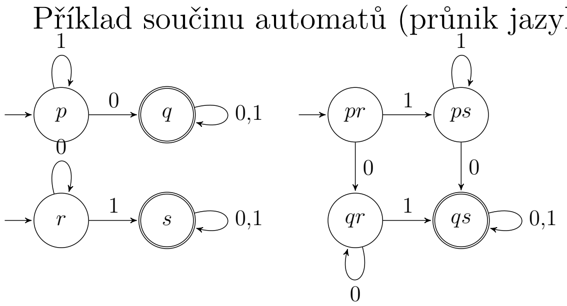
Konstrukce součinu automatů

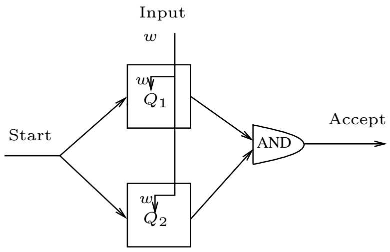
Důkaz: Průnik, sjednocení, rozdíl

- Pro sjednocení a rozdíl doplníme funkci δ na totální.
- Zkonstruujeme součinový automat, $Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta([p_1, p_2], x) = [\delta_1(p_1, x), \delta_2(p_2, x)], [q_{0_1}, q_{0_2}], F)$
- průnik: $F = F_1 \times F_2$
- sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
- rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

$\square$

Příklad součinu automatů (průnik jazyků). Slova obsahující 0,1, oboje.





Příklady na uzávěrové vlastnosti

Example 3.9. Konstruujeme konečný automat přijímající slova, která obsahují $3k + 2$ symbolů 1 a neobsahují posloupnost 11.

- Přímá konstrukce je komplikovaná.
- $L_1 = \{w|w \in \{0,1\}^* \& |w|_1 = 3k + 2\}$
- $L_2 = \{w|u, v \in \{0,1\}^* \& w = u11v\}$
- $L = L_1 - L_2$.

Example 3.10. Jazyk M slov s různým počtem 0 a 1 není regulární.

- Je–li M regulární, $\overline{M} = \Sigma^* - M$ je také regulární.
- O $\overline{M}$ víme, že regulární není (pumping lemma).

Ještě jeden příklad

Example 3.11. Jazyk $L_{0\neq1} = \{0^i1^j : i \neq j, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární.

- Jazyk $L_{01} = \{0^i1^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je regulární, umíme sestrojit konečný automat.
- $L_{01} - L_{0\neq1} = \{0^i1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$
- Z uzávěrových vlastností víme, že rozdíl regulárních jazyků je regulární.

- Jazyk L_{01} regulární je.
- Předpokládejme, že $L_{0\neq 1}$ je regulární. Pak by i $\{0^i 1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ musel být regulární, což není - SPOR.

Řetězcové operace nad jazyky

Definice 3.8: Řetězcové operace nad jazyky

Nad jazyky L, M definujeme následující operace:

	zřetězení jazyků	$L.M = \{uv \mid u \in L \ \& \ v \in M\}$
		$L.x = L.\{x\}$ a $x.L = \{x\}.L$ pro $x \in \Sigma$
	mocniny jazyka	$L^0 = \{\epsilon\}$
		$L^{i+1} = L^i.L$
	pozitivní iterace	$L^+ = L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i\geq 1} L^i$
	obecná iterace	$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i\geq 0} L^i$
<article>		tedy $L^* = L^+ \cup \{\epsilon\}$
	otočení jazyka	$L^R = \{u^R \mid u \in L\}$
	(=zrcadlový obraz,reverze)	$(x_1 x_2 \ldots x_n)^R = x_n x \ldots x_2 x_1$
	levý kvocient L podle M	$M \setminus L = \{v \mid uv \in L \ \& \ u \in M\}$
	levá derivace L podle w	$\partial_w L = \{w\} \setminus L$ (pozn. derivace bude i v jiném významu)
	pravý kvocient L podle M	$L/M = \{u \mid uv \in L \ \& \ v \in M\}$
	pravá derivace L podle w	$\partial^R_w L = L/\{w\}$.

Věta 3.4: Uzavřenost reg. jazyků na řetězcové operace

Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M$, L^*, L^+, L^R, $M \setminus L$ a L/M.

Lemma ($L.M$). Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M$.

Důkaz:

Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$. Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:

$Q = Q_1 \cup Q_2$ předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme
končíme až po přečtení slova z L_2

$\delta(q_0, \epsilon)$	$= \{q_1, q_2\}$	pro $q_1 \in F_1$	tj. $\epsilon \in L(A_1)$
$\delta(q_0, \epsilon)$	$= \{q_1\}$	pro $q_1 \notin F_1$	tj. $\epsilon \notin L(A_1)$
$\delta(q_0, x)$	$= \emptyset$	pro $x \in \Sigma$	
$\delta(q, x)$	$= \{\delta_1(q, x)\}$	pro $q \in Q_1$ & $\delta_1(q, x) \notin F_1$	počítáme v A_1
	$= \{\delta_1(q, x), q_2\}$	pro $q \in Q_1$ & $\delta_1(q, x) \in F_1$	nedet. přechod z A_1 do A_2
	$= \{\delta_2(q, x)\}$	pro $q \in Q_2$	počítáme v A_2.

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$. □

Uzavřenost iterace

Lemma (L^*, L^+). Je–li L regulární jazyk, je regulární i L^*, L^+.

- Idea: opakovaný výpočet automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart

- speciální stav pro příjem $\epsilon \in L^0$ (pro L^+ vynecháme či $\notin F$).

Důkaz: Důkaz pro L^*

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme NFA automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, F \cup \{q_B\})$ kde:
$\delta_B(q_B, \epsilon) = \{q_0\}$ nový stav q_B pro příjem ϵ, přejdeme do q_0 $\delta_B(q, x)$ $= \{\delta(q, x)\}$ pokud $q \in Q$ &
$\delta_B(q_B, x) = \emptyset$ pro $x \in \Sigma$ $= \{\delta(q, x), q_0\}$ pokud $q \in Q$ &
Pak $L(B) = L(A)^*$ $(q_B \in F_B)$, $L(B) = L(A)^+$ $(q_B \notin F_B)$. □

Uzavřenost reverze

Lemma (L^R). Je–li L regulární jazyk, je regulární i L^R.

- Zřejmě $(L^R)^R = L$ a tedy stačí ukázat jeden směr.
- idea: obrátíme šipky ve stavovém diagramu; nederministický FA

Důkaz:

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, \{q_0\})$ kde:

- $\delta_B(q, x) = \{p | \delta(p, x) = q\}$ pro $q \in Q$
- $\delta_B(q_B, \epsilon) = F$, $\delta_B(q_B, x) = \emptyset$.
- Pro libovolné slovo $w = x_1 x_2 \dots x_n$
  - $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ je přijímající výpočet pro w v A

  $\Leftrightarrow$
  - $q_B, q_n, q_{n-1}, \dots, , q_2, q_1, q_0$ je přijímající výpočet pro w^R v B.

□

Pozn. Někdy L nebo L^R má výrazně jednodušší přijímající automat.

Uzavřenost kvocientu

Lemma ($M \setminus L$ a L/M). Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $M \setminus L$ a L/M.

- Idea: A_L, budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem z M.

Důkaz:

- Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
  Definujeme nedeterministický NFA $B = (Q \cup \{q_\epsilon\}, \Sigma, \delta, q_\epsilon, F)$ kde:
- a přidáme přechod $\delta(q_\epsilon, \epsilon) = \{q | q \in Q \ \& \ (\exists u \in M) \ q = \delta^*(q_0, u)\}$ do stavů, kam lze dojit slovem z M.
  - lze nalézt algoritmicky $(\{q;\ L(A_q) \cap M \neq \emptyset$ kde $A_q = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q\})\})$
- $v \in M \setminus L$

  $\Leftrightarrow (\exists u \in M) \ uv \in L$

  $\Leftrightarrow (\exists u \in M, \exists q \in Q) \ \delta(q_0, u) = q \ \& \ \delta(q, v) \in F$

  $\Leftrightarrow \exists q \in \delta(q_\epsilon, \epsilon) \ \& \ \delta(q, v) \in F$

  $\Leftrightarrow v \in L(B)$.

$L/M = (M^R \setminus L^R)^R$. □

4 Regulární výrazy, Kleeneova věta, Substituce, Homomorfizmus

Definice 4.1: Regulární výrazy (Regular Expression) (RegE), hodnota RegE $L(\alpha)$

Regulární výrazy $\alpha, \beta \in RegE(\Sigma)$ nad konečnou neprázdnou abecedou $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ jsou definovány induktivně:

- Základ:

výraz α	pro	hodnota $L(\alpha) \equiv [\alpha]$
ϵ	prázdný řetězec	$L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
$\emptyset$	prázdný výraz	$L(\emptyset) = \{\} \equiv \emptyset$
$\mathbf{a}$	$a \in \Sigma$	$L(\mathbf{a}) = \{a\}$.

- Indukce:

výraz	hodnota	poznámka
$\alpha + \beta$	$L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$	v grep, re |
$\alpha\beta$	$L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$	můžeme značit ., ale plete se s UNIX grep. Každý
α^*	$L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$	
(α)	$L((\alpha)) = L(\alpha)$	závorky nemění hodnotu.

  regulární výraz dostaneme indukcí výše, tj. třída $RegE(\Sigma)$ je nejmenší třída uzavřená na uvedené operace.

Lemma 4.1. Jazyk $L(\epsilon) = \{\epsilon\} = \emptyset^*$, v definici jen pro význam symbolu $L(\epsilon)$.

Příklady reguláních výrazů, priorita

Definice 4.2: priorita

Nejvyšší prioritu má iterace $*$, nižší konkatenace (zřetězení), nejnižší sjednocení $+$.

Example 4.1 (Regulární výrazy). Jazyk střídajících se nul a jedniček lze zapsat:

- $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^*$
- $(\epsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\epsilon + \mathbf{0})$.

Jazyk $L((\mathbf{0}^*\mathbf{1}\mathbf{0}^*\mathbf{1}\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*\mathbf{0}^*) = \{w | w \in \{0,1\}^*, |w|_1 = 3k, k \geq 0\}$.

4.1 Kleeneho věta

Věta 4.1: !varianta Kleeneho věty

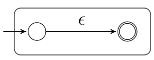
1. Každý jazyk reprezentovaný konečným automatem lze zapsat jako regulární výraz.
2. Každý jazyk popsaný regulárním výrazem můžeme zapsat jako ϵ-NFA (a tedy i DFA).

Převod RegE výrazu na ϵ–NFA automat

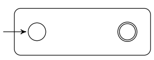
Převod RegE výrazu na ϵ–NFA automat. Důkaz indukcí dle struktury R. V každém kroku zkonstruujeme ϵ-NFA E rozpoznávající stejný jazyk $L(R) = L(E)$ se třemi dalšími vlastnostmi:

1. Právě jeden přijímající stav.
2. Žádné hrany do počátečního stavu.
3. Žádné hrany z koncového stavu.

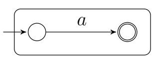
Základ:



Prázdný řetězec ϵ



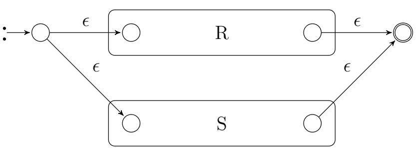
Prázdná množina $\emptyset$



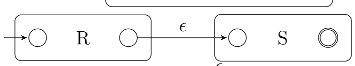
$a \in \Sigma$: výraz **a**

INDUKCE:

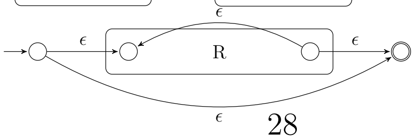
Součet $R + S$:



Zřetězení RS:



Iterace R^*:



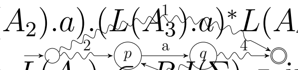
□

Neefektivní důkaz Kleeneovy věty

Důkaz: Rozpoznatelný FA ⇒ RJ

Máme automat DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ který přijímá jazyk $L(A)$. Indukcí podle počtu hran A dokážeme $L(A) \in RJ(\Sigma)$.

- žádná hrana – pouze jazyky $\emptyset$ a $\{\epsilon\}$, z definice a $\emptyset^*$.
- $(n+1)$ hran
  - vybereme jednu hranu $p \to^a q$, tj. $q \in \delta(p, a)$
  - sestrojíme čtyři automaty bez tého hrany ($\delta^| = \delta$, jen $\delta^|(p, a) = \delta(p, a) - \{q\}$)
    - $A_1 = (Q, \Sigma, \delta^|, q_0, F)$
    - $A_2 = (Q, \Sigma, \delta^|, q_0, \{p\})$
    - $A_3 = (Q, \Sigma, \delta^|, q, \{p\})$
    - $A_4 = (Q, \Sigma, \delta^|, q, F)$
  - Potom $L(A) = L(A_1) \cup (L(A_2).a).(L(A_3).a)^*L(A_4)$,



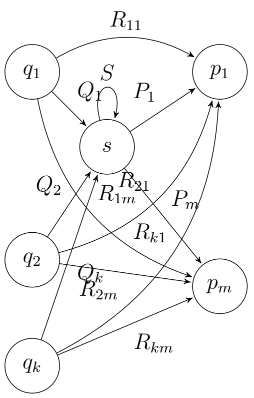
  - jazyky $L(A_1), L(A_2), L(A_3), L(A_4) \in RJ(\Sigma)$ z indukčního předpokladu (n hran), označně α_i jejich regulární výrazy.
  - $L(A) = L(\alpha_1 + \alpha_2.a).(\alpha_3.a)^*.\alpha_4)$

□

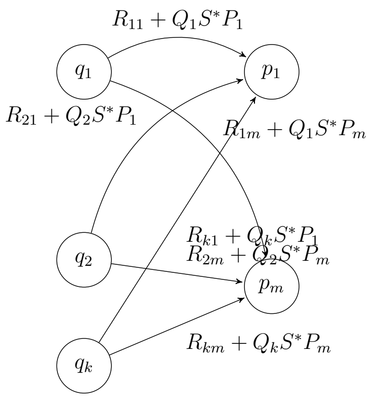
Konverze NFA na RegE eliminací stavů

- Efektivnější algoritmus na tvoření regulárního výrazu z automatu.
- Dovolíme regulární výrazy jako popisky na hranách grafu (transformovaného automatu).
- Iterativně eliminujeme uzly. Při eliminaci s, spojíme každého rodiče s každým dítětem s a anotujeme hranu.

Stav s vybrán k eliminaci



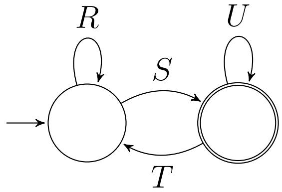
Výsledek eliminace s z předchozího grafu.

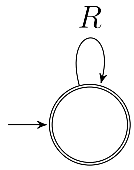


Konstrukce regulárního výrazu RegE z NFA

1. Pro každý cílový stav $q \in F$ aplikujeme předchozí redukci na všechny $p \in Q \setminus \{q, q_0\}$.
2. Pro $q \neq q_0$ vezmeme

$$RegE(q) = (R + SU^*T)^*SU^*.$$

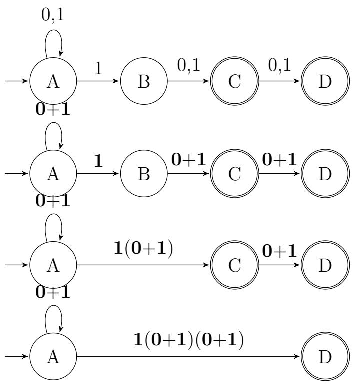


3. Pro $q = q_0$ vezmeme
$$RegE(q) = R^*.$$


4. Sečteme výrazy (jazyky sjednotíme) přes všechny přijímající stavy; $RegE(NFA) = \oplus_{q \in F} RegE(q)$.

Příklad

Example 4.2. NFA přijímající slova s 1 na 2. nebo 3. pozici od konce.



A máme RegE výraz: $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1}) + (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1})$.

Nejdřív eliminujeme uzly ne–cílové a ne–startovní $q \notin F, q \neq q_0$.

Zjednodušení regulárních výrazů (netřeba znát)

Lemma (Další vlastnosti bez důkazu).

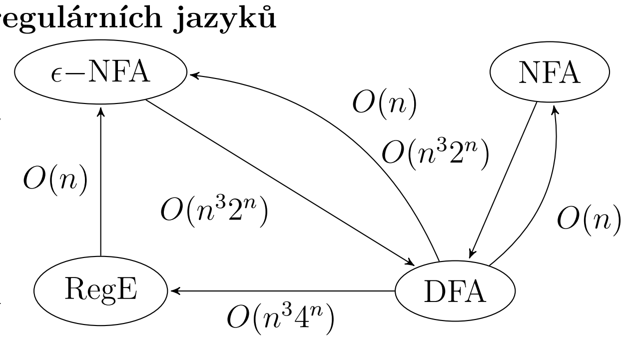
- Zjednodušení návrhu automatů

$$\begin{aligned}
L.\emptyset = \emptyset.L &= \emptyset \\
\{\epsilon\}.L = L.\{\epsilon\} &= L \\
(L^*)^* &= L^* \\
(L_1 \cup L_2)^* &= L_1^*(L_2.L_1^*)^* = L_2^*(L_1.L_2^*)^* \\
(L_1.L_2)^R &= L_2^R.L_1^R \\
\partial_w(L_1 \cup L_2) &= \partial_w(L_1) \cup \partial_w(L_2) \\
\partial_w(\Sigma^* - L) &= \Sigma^* - \partial_w L.
\end{aligned}$$

Shrnutí převodů mezi reprezentacemi regulárních jazyků

Převod NFA na DFA

- ϵ uzávěr v $O(n^3)$ – prohledává n stavů násobeno n^2 hran pro ϵ přechody.
- Podmnožinová konstrukce, DFA s až 2^n stavy. Pro každý stav, $O(n^3)$ času na výpočet přechodové funkce.



Převod DFA na ϵ-NFA

- Přidat množinové závorky k přechodové funkci a přechody pro ϵ u ϵ−NFA.

Převod automatu DFA an RegE regulární výraz

- $O(n^3 4^n)$

RegE výraz na automat

- V čase $O(n)$ vytvoříme ϵ−NFA.

4.2 Substituce a homomorfizmus jazyků

Definice 4.3: Substituce jazyků

Mějme konečnou abecedu Σ. Pro každé $x \in \Sigma$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě Y_x. Dále položme

$$\sigma(\epsilon) = \{\epsilon\}$$

$$\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$$

- Zobrazení $\sigma : \Sigma^* \to \mathcal{P}(Y^*)$, kde $Y = \bigcup_{x\in\Sigma} Y_x$ se nazývá **substituce**.
- Pro jazyk L definujeme: $\sigma(L) = \bigcup_{w\in L} \sigma(w)$, podobně sjednocení.
- **nevypouštějící substituce** je substituce, kde žádné $\sigma(x)$ neobstahuje ϵ.

Example 4.3 (substituce). 1) $\Sigma = \{k, p, m, c, t\}$, $L = (kmp)(ckmp)^*t$,

k slovník křestních jmen, p slovník příjmení, m mezera, c čárka, t tečka.

2) Pokud $\sigma(0) = \{a^i b^j, i, j \geq 0\}, \sigma(1) = \{cd\}$

tak $\sigma(010) = \{a^i b^j cd a^k b^l, i, j, k, l \geq 0\}$.

Homomorfizmus a inverzní homomorfizmus jazyků

Definice 4.4: homomorfizmus (jazyků), inverzní homomorfizmus

Homomorfizmus h je speciální případ substituce, kde obraz je vždy jen jednoslovný jazyk (vynecháváme u něj závorky), tj. $(\forall x \in \Sigma)\ h(x) = w_x$.
Pokud $\forall x : w_x \neq \epsilon$, jde o **nevypouštějící homomorfizmus**.
Inverzní homomorfizmus $h^{-1}(L) = \{w | h(w) \in L\}$.

Pozn. Inverzní homomorfizmus obecně není homomorfizmus, jedno slovo $h(w)$ může mít více 'rodičů' w.

Example 4.4 (homomorfizmus).

- Znaky nahradíme TEXzápisem, $h(\mu) = \backslash mu$ a podobně.
- Homomorfizmus h definujeme: $h(0) = ab$, a $h(1) = \epsilon$. Pak $h(0011) = abab$.
  Pro $L = \mathbf{10^*1}$ je $h(L) = (ab)^*$.

Věta 4.2: uzavřenost na homomorfizmus

Je–li jazyk L i $\forall x \in \Sigma$ jazyk $\sigma(x), h(x)$ regulární, pak je regulární i $\sigma(L), h(L)$.

Uzavřenost na substituci, homomorfizmus.

- Strukturální indukcí 'probublááváním' algebraickým popisem jazyka základních, sjednocení, zřetězení a iterace. Pro sjednocení a zřetězení z definice substituce a uzavřenosti regulárních jazyků na sjednocení a zřetězení.

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(\alpha+\beta) &= \sigma(L(\alpha)) \cup \sigma(L(\beta)) \\ \underline{\sigma}(\alpha\beta) &= \{w | \exists u \in L(\alpha) \exists v \in L(\beta) : \sigma(u)\sigma(v) = w\}\end{aligned}$$

- Podtržení $\underline{\sigma}$ je technický detail pro ty, kteří rozliší σ aplikované na jazyk od $\underline{\sigma}$ aplikovaného na regulární výraz.

- Pro iteraci rozložíme na nekonečné sjednocení, pro každý konkrétní počet iterací σ aplikované na konečné zřetězení.

$$
\begin{aligned}
\sigma(L(\alpha)^*) &= \sigma(L(\alpha)^0) \cup \sigma(L(\alpha)^1) \cup \ldots \cup \sigma(L(\alpha)^n) \cup \ldots \\
&= \underline{\sigma}(\alpha)^0 \cup \underline{\sigma}(\alpha)^1 \cup \ldots \cup \underline{\sigma}(\alpha)^n \cup \ldots \\
&= L(\underline{\sigma}(\alpha)^*).
\end{aligned}
$$

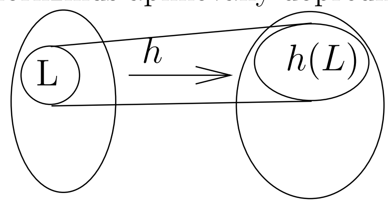
□

Inverzní homomorfizmus

Opakování definice: (4.4) Inverzní homomorfizmus

Nechť h je homomorfizmus abecedy T do slov nad abecedou Σ. Pak $h^{-1}(L)$ *'h inverze L'* je množina řetězců $h^{-1}(L) = \{w | w \in T^*;\ h(w) \in L\}$.

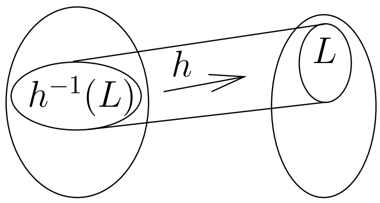
Homomorfizmus aplikovaný dopředně a zpětně.



Example 4.5. Nechť $L = (\{00\} \cup \{1\})^*$, $h(a) = 01$ a $h(b) = 10$.
Pak $h^{-1}(L) = (\{ba\})^*$.

Důkaz: $h((\{ba\})^*) \in L$ snadno.
Ostatní w generují izolované 0 (rozbor případů).

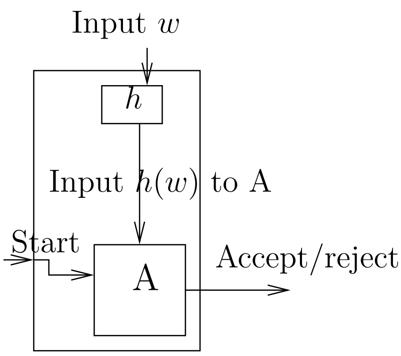
<all>



Inverzní homomorfizmus DFA

Věta 4.3: 1

Je–li h homomorfizmus abecedy T do abecedy Σ a L je regulární jazyk abecedy Σ, pak $h^{-1}(L)$ je také regulární jazyk.



Důkaz:

- pro L máme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $h : T \to \Sigma^*$
- definujeme ϵ-NFA $B = (Q', T, \delta', [q_0, \epsilon], F \times \{\epsilon\})$ kde

$$
\begin{array}{lll}
Q' = \{[q,u] \,|\, q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists(a \in T)\exists(v \in \Sigma^*) h(a) = vu\} & & u \text{ je buffer} \\
\delta'([q,\epsilon], a) & = [q, h(a)] & \text{naplňuje buffer} \\
\delta'([q,bv], \epsilon) & = [p, v] \text{ kde } \delta(q,b) = p & \text{čte buffer.}
\end{array}
$$

□

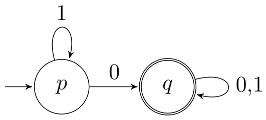
Příklad: Navštiv všechny stavy (Letos vynechán)

Example 4.6. Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Definujme jazyk $L = \{w \in \Sigma^*;\ \delta^*(q_0, w) \in F$ a pro každý stav $q \in Q$ existuje prefix x_q slova w tak, že $\delta^*(q_0, x_q) = q\}$.

Tento jazyk L je regulání.

M Označme $M = L(A)$.

- T Definujeme novou abecedu T trojic $\{[paq]; p,q \in Q, a \in \Sigma, \delta(p,a) = q\}$.
- h Definujeme homomorfizmus $(\forall\ p,q,a)\ h([paq]) = a$.
- L_1 Jazyk $L_1 = h^{-1}(M)$ je regulární, protože M je regulární (DFA inverzní homomorfizmus).
- $h^{-1}(101)$ obsahuje $2^3 = 8$ řetězců, např. $[p1p][q0q][p1p] \in \{[p1p],[q1q]\}\{[p0q],[q0q]\}\{[p1p],[q1q]\}$.
- Dále zkonstruujeme L z L_1 (další slide).



- L_2 Vynutíme začátek q_0. Definujeme $E_1 = \bigcup_{a\in\Sigma, q\in Q}\{[q_0 a q]\} = E_1 = \{[q_0 a_1 q_0], [q_0 a_2 q_1], \dots, [q_0 a_m q_n]\}$. Pak $L_2 = L_1 \cap L(E_1.T^*)$.
- L_3 Vynutíme stejné sousedící stavy. Definujeme ne–odpovídající dvojice $E_2 = \bigcup_{q\neq r, p,q,r,s\in Q, a,b\in\Sigma}\{[paq][rbs]\}$.

  Definujeme $L_3 = L_2 - L(T^*.E_2.T^*)$,
- Končí v přijímajícím stavu, protože jsme začali z jazyku M přijímaném DFA A.
- L_4 Všechny stavy. $\forall\ q \in Q$ definujeme E_q jako regulární výraz sjednocení všech symbolů T takových, že q není ani na první, ani na poslední pozici. Odečteme $L(E_q^*)$ od L_3. $L_4 = L_3 - \bigcup_{q\in Q}\{E_q^*\}$.
- L Odstraníme stavy, necháme symboly. $L = h(L_4)$. Tedy L je regulární.

Přehled:

- M $= L(A)$
  Inverzní homom.
- L_1 $h^{-1}(M) \subseteq \{[qap]\}^*$
  průnik RJ
- L_2 $+\ q_0$
  rozdíl RJ
- L_3 + sousední stavy rovny
  rozdíl RJ
- L_4 + všechny stavy
  homomorfismus
- L $h([qap]) = a$

Rozhodovací problémy pro regulární jazyky!

Lemma (Test ne–prázdnosti regulárního jazyka). Lze algoritmicky rozhodnout, zda jazyk přijímaný DFA, NFA, ϵ-NFA je prázdný.

Jazyk je prázdný právě když žádný z koncových stavů není dosažitelný. Dosažitelnost lze testovat $O(|Q|^2)$.

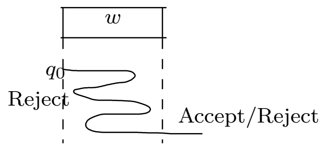
Lemma (Test náležení do regulárního jazyka). Pro daný řetězec w; $|w| = n$ a regulární jazyk L. Lze algoritmicky rozhodnout, zda je $w \in L$.

- DFA: Spusť automat; pokud $|w| = n$, při dobré reprezentaci a konstatním čase přechodu $O(n)$.
- NFA o s stavech: čas $O(ns^2)$. Každý vstupní symbol aplikujeme na všechny stavy předchozího kroku, kterých je nejvýš s.
- ϵ–NFA - nejdříve určíme ϵ–uzávěr. Pak aplikujeme přechodovou funkci a ϵ–uzávěr na výsledek.

4.3 Dvousměrné FA, Automaty s výstupem (nezkouší se)

Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty

- Konečný automat provádí následující činnosti:
  - přečte písmeno
  - změní stav vnitřní jednotky
  - posune čtecí hlavu doprava



- Čtecí hlava se nesmí vracet.

Definice 4.5: Deterministické Dvousměrné konečné automaty

Deterministickým dvousměrným konečným automatem nazýváme pětici $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

1. Q je konečná množina stavů,
2. Σ je konečná množina vstupních symbolů
3. přechodové funkce δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q \times \{-1, 1\}$ *rozšířené o pohyb hlavy*
4. $q_0 \in Q$ počáteční stav
5. množina přijímajících stavů $F \subseteq Q$.

Pozn.: Je deterministický, nedeterministický $\delta_N : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q \times \{-1, 1\})$. Pozn.2: Nulový pohyb hlavy lze, jen trochu zkomplikuje důkaz dále.

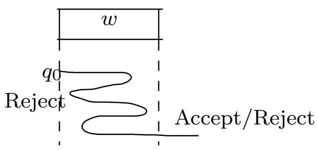
- Reprezentujeme opět stavovým diagramem, tabulkou.

Výpočet dvousměrného automatu

Definice 4.6: Výpočet dvousměrného automatu

Slovo w je **přijato dvousměrným konečným automatem**, pokud:

- výpočet začal na prvním písmenu slova w vlevo v počátečním stavu
- čtecí hlava poprvé opustila slovo w vpravo v některém přijímajícím stavu
- mimo čtené slovo není výpočet definován (výpočet zde končí a slovo není přijato).



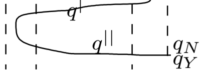
- Ke slovům si můžeme přidat speciální koncové znaky $\# \notin \Sigma$
- funkce $\partial_\#$ odstraní # zleva, $\partial_\#^R$ zprava.

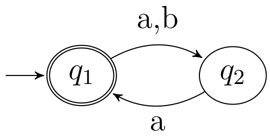
Lemma. Je–li $L(A) = \{\#w\# | w \in L \subseteq \Sigma^*\}$ regulární, potom je regulární i $L = \partial_\# \partial_\#^R(L(A) \cap \#\Sigma^*\#)$.

Příklad dvousměrného automatu

Example 4.7 (Příklad dvousměrného automatu). Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$. Dvousměrný konečný automat $B = (Q \cup Q^{|} \cup Q^{||} \cup \{q_0, q_N, q_Y\}, \Sigma \cup \{\#\}, \delta^{|}, q_0, \{q_Y\})$ přijímající jazyk $L(B) = \{\#u\# | uu \in L(A)\}$ (toto NENÍ levý ani pravý kvocient!) definujeme následovně:

$\delta^{|}$	$x \in \Sigma$	$\#$	poznámka
q_0	$q_N, -1$	$q_1, +1$	q_1 je počátek A
q	$p, +1$	$q^{|}, -1$	$p = \delta(q, x)$
$q^{|}$	$q^{|}, -1$	$q^{||}, +1$	
$q^{||}$	$p^{||}, +1$	$q_Y, +1$	$q \in F, p = \delta(q, x)$
$q^{||}$	$p^{||}, +1$	$q_N, +1$	$q \notin F, p = \delta(q, x)$
q_N	$q_N, +1$	$q_N, +1$	
q_Y	$q_N, +1$	$q_N, +1$	





Dvousměrné a jednosměrné konečné automaty

Věta 4.4: 1

Jazyky přijímané dvousměrnými konečnými automaty jsou právě regulární jazyky.

Důkaz: konečný automat → dvousměrný automat

- Konečný automat předeveme na dvousměrný přidáním posunu hlavy vpravo
- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \to 2A = (Q, \Sigma, \delta^{|}, q_0, F)$, kde $\delta^{|}(q, x) = (\delta(q, x), +1)$.

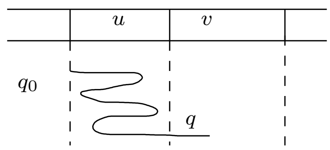
$\square$

- Možnost pohybovat čtecí hlavou po pásce nezvětšila sílu konečného automatu (dokud na pásku nic nepíšeme!).
- Pro důkaz potřebujeme přípravu.

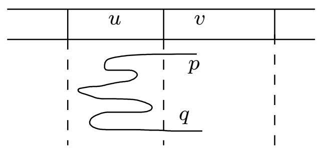
Funkce f_u popisující výpočet 2DFA nad slovem u

Algoritmus 4.1: Funkce f_u popisující výpočet 2DFA nad slovem u

Definujeme funkci $f_u : Q \cup \{q_0^{|}\} \to Q \cup \{0\}$



- $f_u(q_0^{|})$ popisuje v jakém stavu poprvé odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vlevo v počátečním stavu q_0,
- symbol 0 značí, že daná situace nenastane (odejdeme vlevo nebo cyklus),



- $f_u(p); p \in Q$ v jakém stavu opět odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vpravo v p
- Definujeme ekvivalenci slov následovně: $u \sim w \Leftrightarrow_{def} f_u = f_w$,
  - tj. slova jsou ekvivalentní pokud mají stejné 'výpočtové' funkce.

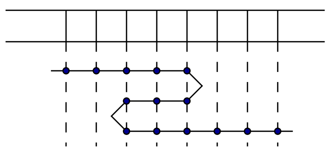
Regulárnost 2DFA

Ekvivalence $\sim$ je ekvivalence, má konečný index, je to pravá kongruence, jazyk 2DFA odpovídá sjednocení tříd $f_w(q_0^{|}) \in F$.

Podle Myhill–Nerodovy věty je $L(A)$ regulární jazyk.

Konstruktivní důkaz věty o 2DFA

- Potřebujeme převést návraty na lineární výpočet.
- Zajímají nás jen přijímající výpočty
- Díváme se na řezy mezi symboly (v jakém stavu přechází na další políčko)



Pozorování:

- stavy se v přechodu řezu střídají (doprava, doleva)
- první stav jde doprava, poslední také doprava
- v deterministických přijímajících výpočtech nejsou cykly
- první a poslední řez obsahují jediný stav.

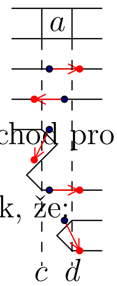
Algoritmus 4.2: 2DFA → NFA

- Najdeme všechny možné řezy – posloupnosti stavů (je jich konečně mnoho).
- Mezi řezy definujeme nedeterministické přechody podle čteného symbolu.
- Rekonstruujeme výpočet skládáním řezů jako puzzle.

Algoritmus 4.3: Formální převod 2DFA na NFA

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvousměrný (deterministický) konečný automat. Definujeme ekvivalentní nedeterministický automat $B = (Q^{|}, \Sigma, \delta^{|}, (q_0), F^{|})$ kde:

- $Q^{|}$ jsou všechny korektní přechodové posloupnosti
  - posloupnosti stavů $(q^1, \ldots, q^k); q^i \in Q$
  - délka posloupnosti je lichá ($k = 2m + 1$)
  - žádný stav se neopakuje na liché ani na sudé pozici $(\forall i \neq j)\ (q^{2i} \neq q^{2j})$ & $(\forall i \neq j)(q^{2i+1} \neq q^{2j+1})$



- $F^{|} = \{(q) | q \in F\}$ posloupnosti délky 1
- $\delta^{|}(c, a) = \{d | d \in Q^{|} \& c \xrightarrow{a} d$ je lokálně konzistentní přechod pro $a\}$
  - existuje bijekce: $h : c_{odd} \cup d_{even} \to c_{even} \cup d_{odd}$, tak, že:
  - zachovává uspořádání
  - pro $h(q) \in c_{even}$ je $(h(q), -1) = \delta(q, a)$
  - pro $h(q) \in d_{odd}$ je $(h(q), +1) = \delta(q, a)$.

$L(A) = L(B)$
Trajektorie 2DFA A odpovídá řezům v FA B, odtud $L(A) = L(B)$.

Příklad převodu 2DFA na NKA

- Mějme následující dvousměrný konečný automat:

	a	b
$\to p$	p,+1	q,+1
$*q$	q,+1	r,-1
r	p,+1	r,-1

Možné řezy a jejich přechody

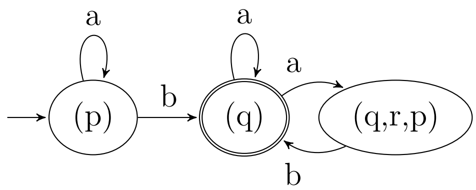
- Doleva jedině r – všechny sudé pozice r, tj. jediná sudá
- možné řezy: $(p), (q), (p, r, q), (q, r, p)$.

	a	b
$\to (p)$	(p)	(q)
$*(q)$	(q),(q,r,p)	
(p,r,q)		
(q,r,p)		(q)

Ukázka (zacykleného, nepřijímajícího) výpočtu:

	a		a		b		a		a		b		a		a		b		b	
p		p		p		q		q		q										
									r											
										p		q		q		q				
															r					
																p		q		
															r		r			
																p		q		
																.		.		

Výsledný NFA:



Konečný automat

- redukovaný deterministický automat (lze definovat i jednoznačný)
- nedeterminismus ϵ–NFA, 2^n, (dvousměrný FA n^n)

Regulární výrazy

Automaty a jazyky

- regulární jazyky
- uzavřenost na množinové operace
- uzavřenost na řetězcové operace
- uzavřenost na substituci, homomorfizmus a inverzní homomorfizmus,
- automaty výše i regulární výrazy popisují stejnou třídu jazyků.

Charakteristika regulárních jazyků

- Mihyll–Nerodova věta (kongruence)
- Kleeneova věta (elementární jazyky a operace)
- Iterační (pumping) lemma (iterace podslov, jen nutná podmínka).

Dvousměrný automat, pokud nesmí psát na pásku, přijímá jen regulární jazyky.

- Dvousměrné automaty a automaty s výstupem se nezkouší.

Dnešní plán

- Kleenova věta - regulární výrazy reprezentují právě jazyky přijímané konečnými automaty.
- Substituce, homomorfizmus, inverzní homomorfizmus,
- Dvousměrné konečné automaty (nezkouší se).
- Automaty s výstupem jedině na cvičeních.

Automaty s výstupem (motivace)

- Dosud jediná zpráva z automatu: 'Jsme v přijímajícím stavu'.
- Můžeme z FA získat více informací? Můžeme zaznamenat trasu výpočtu?

Moore: indikace stavů (všech, nejen koncových)

- v každé chvíli víme, kde se automat nachází
- Příklad: různé (regulární) čítače

Mealy: indikace přechodů

- po přečtení každého symbolu víme, co automat dělal
- Příklad: regulární překlad slov

Automat už není tak docela černá skříňka.

Mooreův stroj

Definice 4.7: Mooreův stroj

Mooreovým (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu)$, kde

Q je konečná neprázdná množina stavů

Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)

Y je konečná neprázdná množina symbolů (**výstupní abeceda**)

δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)

μ je zobrazení $Q \to Y$ (**značkovací funkce**)

$q_0 \in Q$ (počáteční stav)

- Někdy nás nezajímá počáteční stav, ale jen práce automatu
- značkovací funkce umožňuje suplovat roli koncových stavů
  - $F \subseteq Q$ nahradíme značkovací funkcí $\mu : Q \to \{0, 1\}$ takto:
    $\mu(q) = 0$ pokud $q \notin F$,
    $\mu(q) = 1$ pokud $q \in F$.

Příklad Mooreova stroje

Example 4.8 (Tenisový set). Mooreův stroj pro počítání tenisového skóre.

- Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod
- Výstupní abeceda & stavy: skóre (tj. $Q = Y$ a $\mu(q) = q$)

Stav/výstup	A	B
00:00	15:00	00:15
15:00	30:00	15:15
15:15	30:15	15:30
00:15	15:15	00:30
30:00	40:00	30:15
30:15	40:15	30:30
30:30	40:30	30:40
15:30	30:30	15:40
00:30	15:30	00:40
40:00	A	40:15
40:15	A	40:30
40:30	A	shoda
30:40	shoda	B
15:40	30:40	B
00:40	15:00	B
shoda	A:40	40:B
A:40	A	shoda
40:B	shoda	B
A	15:00	00:15
B	15:00	00:15

Mealyho stroj

Definice 4.8: Mealyho stroj

Mealyho (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M)$, kde

Q je konečná neprázdná množina stavů

Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)

Y je konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)

δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)

λ_M je zobrazení $Q \times \Sigma \to Y$ (**výstupní funkce**)

$q_0 \in Q$ (počáteční stav)

- Výstup je určen stavem a vstupním symbolem
  - Mealyho stroj je obecnějším prostředkem než stroj Mooreův
  - Značkovací funkci $\mu : Q \to Y$ lze nahradit výstupní funkcí $\lambda_M : Q \times \Sigma \to Y$ například takto:

    $\forall x \in \Sigma\ \lambda_M(q, x) = \mu(q)$

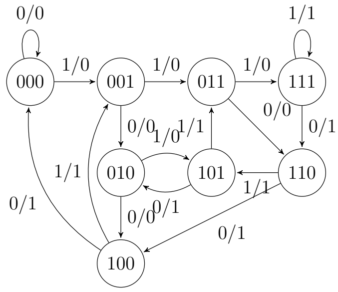
    nebo $\forall x \in \Sigma\ \lambda_M(q, x) = \mu(\delta(q, x))$

Příklad Mealyho stroje

Example 4.9 (Mealyho stroj). Automat, který dělí vstupní slovo v bináním tvaru číslem 8 (celočíselně).

- Posun o tři bity doprava
- potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů
- vlastně tříbitová dynamická paměť

Stav\symbol	0	1
000	000/0	001/0
001	010/0	011/0
010	100/0	101/0
011	110/0	111/0
100	000/1	001/1
101	010/1	011/1
110	100/1	101/1
111	110/1	111/1



- I když nevíme, kde automat startuje, po třech symbolech začne počítat správně.

Výstup sekvenčních strojů

slovo ve vstupní abecedě → slovo ve výstupní abecedě

Mooreův stroj

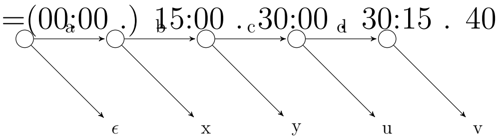
značkovací funkce $\mu : Q \to Y$

$\mu^* : Q \times \Sigma^* \to Y^*$

$\mu^*(q, \epsilon) = \epsilon$ (někdy $\mu^*(q, \epsilon) = q$)

$\mu^*(q, wx) = \mu^*(q, w).\mu(\delta^*(q, wx))$

Příklad: μ^*(00:00,AABA)=(00:00 .) 15:00 . 30:00 30:15 . 40:15



Mealyho stroj

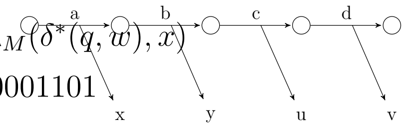
výstupní funkce $\lambda_M : Q \times \Sigma \to Y$

$\lambda_M^* : Q \times \Sigma^* \to Y^*$

$\lambda_M^*(q, \epsilon) = \epsilon$

$\lambda_M^*(q, wx) = \lambda_M^*(q, w).\lambda_M(\delta^*(q, w), x)$

Příklad: λ_M^*(000,1101010)=0001101



4.4 Konečné automaty – shrnutí

Konečný automat

- redukovaný deterministický automat (lze definovat i jednoznačný)
- nedeterminismus ϵ–NFA, 2^n, (dvousměrný FA n^n)

Regulární výrazy

Automaty a jazyky

- regulární jazyky
- uzavřenost na množinové operace
- uzavřenost na řetězcové operace
- uzavřenost na substituci, homomorfizmus a inverzní homomorfizmus,
- automaty výše i regulární výrazy popisují stejnou třídu jazyků.

Charakteristika regulárních jazyků

– Mihyll–Nerodova věta (kongruence)
– Kleeneova věta (elementární jazyky a operace)
– Iterační (pumping) lemma (iterace podslov, jen nutná podmínka).

Dvousměrný automat, pokud nesmí psát na pásku, přijímá jen regulární jazyky.

– Dvousměrné automaty a automaty s výstupem se nezkouší.

5 Gramatiky

Palindromy

Opakování definice: palindrom

Palindrom je řetězec w stejný při čtení zepředu i zedadu, tj. $w = w^R$.

- Příklady: `'otto'`; `'Madam, I'm Adam'`.

Example 5.1 (Gramatika). $G = (\{S\}, \{o, t\}, P, S)$, $P =$
1. $S \to \epsilon$
2. $S \to o$
3. $S \to t$
4. $S \to oSo$
5. $S \to tSt$

Lemma. Jazyk $L_{pal} = \{w | w = w^R, w \in \Sigma^*\}$ není regulární.

Důkaz:

- Důkaz sporem. Předpokládejme L_{pal} je regulární, nechť n je konstanta z pumping lemma, uvažujme slovo: $w = o^n t o^n$.
- z pumping lemmatu lze rozložit na $w = xyz$, y obsahuje jednu nebo více z prvních n o-ček. Tedy xz má být v L_{pal} ale má méně o-ček vlevo od 't' než vpravo, tedy není palindrom. Iterační lemma pro jazyk L_{pal} nedokáže najít n, proto L_{pal} není regulární.

□

5.1 Definice gramatik, jejich typy

Formální (generativní) gramatiky, Bezkontextové gramatiky

Definice 5.1: Formální (generativní) gramatika

Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

- konečné množiny **neterminálů** (variables) V
- neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů** (**terminálů**) T
- **počáteční symbol** $S \in V$.
- konečné množiny **pravidel** (**produkcí**) P reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar:
  – $\beta A \gamma \to \omega$, $A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup T)^*$
  tj. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

Opakování definice: Bezkontextová gramatika CFG

Bezkontextová gramatika (CFG) je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru

$A \to \omega,\ A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$.

Chomského hierarchie

Definice 5.2: Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel

- **gramatiky typu 0** (**rekurzivně spočetné jazyky** $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \omega,\ \alpha, \omega \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál

- **gramatiky typu 1** (**kontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$

    $A \in V, \gamma, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$**!**
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \epsilon$, potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla

- **gramatiky typu 2** (**bezkontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$

- **gramatiky typu 3** (regulární/**pravé lineární gramatiky**, regulární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$.

Uspořádanost Chomského hierarchie

- Chomského hierarchie definuje uspořádání tříd jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$$

- dokonce vlastní podmnožiny (později)

  $\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1$ rekurzivně spočetné jazyky zahrnují kontextové jazyky

  pravidla $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$ obsahují vlevo neterminál A

  $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$ bezkontextové jazyky zahrnují regulární jazyky

  pravidla $A \to \omega B, A \to \omega$ obsahují vpravo řetězec $(V \cup T)^*$

  $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2$ kontextové jazyky zahrnují bezkontextové jazyky

  problém je s pravidly typu $A \to \epsilon$, ale ta umíme eliminovat.

Example 5.2 (Notace).

$a, b, c, 1, *, ($	terminály
A, B, C	neterminály, proměnné
w, z	řetězec terminálů
X, Y	buď terminál nebo neterminál
α, β, γ	řetězec $(T \cup V)^*$
$A \to \alpha \vert \beta$	$\{A \to \alpha, A \to \beta\}$, OR, kompaktní zápis více pravidel.

Definice 5.3: Derivace $\Rightarrow^*$

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

- Říkáme, že α se **přímo přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže

$$\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta \beta \nu,\ \omega = \eta \gamma \nu \text{ a } (\beta \to \gamma) \in P.$$

- Říkáme, že α se **přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže

$$\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_n = \omega,$$

tj. také $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.

- Posloupnost $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nazýváme **derivací (odvozením)**.

- Pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o **minimálním odvození**.

- Libovolný řetězec $\omega \in (T \cup V)^*$ odvoditelný z počátečního symbolu nazýváme **sentenciální forma**.

Definice 5.4: Jazyk generovaný gramatikou G

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Jazyk neterminálu $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* | A \Rightarrow_G^* w\}$.

5.2 Gramatiky typu 3 a regulární jazyky

Opakování definice: Gramatika typu 3, pravá lineární

Gramatika G je **pravá lineární, tj. regulární, Typu 3**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $A \to wB, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

Example 5.3 (Příklad derivace gramatiky typu 3). $P = \{S \to 0S|1A|\epsilon,\ A \to 0A|1B,\ B \to 0B|1S\}$

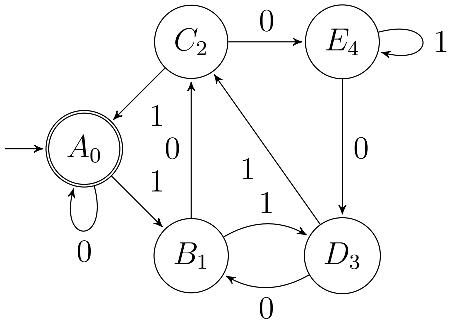
$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$$

- Pozorování:
  - každá sentenciální forma derivace obsahuje právě jeden neterminál
  - tento neterminál je vždy umístěn zcela vpravo
  - aplikací pravidla $A \to w$ se derivace uzavírá
  - krok derivace generuje symboly a změní neterminál
- Idea vztahu gramatiky a konečného automatu
- neterminál = stav konečného automatu
- pravidla = přechodová funkce.

Příklad převodu FA na gramatiku

Example 5.4 (G, FA binární zápis čísla dělitelného 5). $L = \{w | w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného 5$\}$

$$\begin{array}{lcl} A & \to & 1B|0A|\epsilon \\ B & \to & 0C|1D \\ C & \to & 0E|1A \\ D & \to & 0B|1C \\ E & \to & 0D|1E \end{array}$$



Příklady derivací

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow 0A \Rightarrow 0 & (0) \\ A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 101 & (5) \\ A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 1010A \Rightarrow 1010 & (10) \\ A \Rightarrow 1B \Rightarrow 11D \Rightarrow 111C \Rightarrow 1111A \Rightarrow 1111 & (15) \end{array}$$

Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

Věta 5.1: $L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$

Pro každý jazyk rozpoznávaný konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.

Důkaz: Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

- $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- definujme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla P mají tvar

  $p \to aq$, když $\delta(p, a) = q$
  $p \to \epsilon$, když $p \in F$
- je $L(A) = L(G)$?
  - $\epsilon \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow \epsilon \in L(G)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \dots, q_n \in Q$ tž. $\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F$

    $\Leftrightarrow (q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \dots a_1 \dots a_n q_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$ je derivace pro $a_1 \dots a_n$

    $\Leftrightarrow a_1 \dots a_n \in L(G)$

$\square$

Příprava převodu gramatiky typu 3 na FA

- Opačný směr
  - pravidla $A \to aB$ kódujeme do přechodové funkce
  - pravidla $A \to \epsilon$ určují koncové stavy
  - pravidla $A \to a_1 \dots a_n B, A \to a_1 \dots a_n$ s více neterminály rozepíšeme
    * zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$
    * vytvoříme pravidla $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \dots, Y_n \to a_n B$
    * resp. $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$
  - pravidla $A \to B$ odpovídají ϵ přechodům
    * zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
    * nebo musíme tranzitivně uzavřít $S \to B$ pro hledání $S \to \epsilon$.

Lemma. Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon,\ A, B \in V, a \in T$.

Standardizace gramatiky typu 3

Lemma. Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon,\ A, B \in V, a \in T$.

Proof. Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n$ a definujeme

P	$P^\|$
$A \to aB$ $A \to \epsilon$ $A \to a_1 \ldots a_n B$ $Z \to a_1 \ldots a_n$	$A \to aB$ $A \to \epsilon$ $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \ldots Y_n \to a_n B$ $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$
odstraníme i pravidla: $A \to B$	tranzitivní uzávěr $U(A) = \{B \| B \in V \& A \Rightarrow^* B\}$ $A \to \gamma$ pro všechna $Z \in U(A)$ a $(Z \to \gamma) \in P^\|$

□

Pouze pravidla $A \to aB, A \to \epsilon$

Example 5.5.

P	$P^\|$
$B \to a_1$	$B \to a_1 H_1, H_1 \to \epsilon$
	$U(A) = \{A, B\}$, proto
$A \to B$ $A \to a_2$	$A \to a_1 H_2, H_2 \to \epsilon$ $A \to a_2 H_3, H_3 \to \epsilon$

Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

Věta 5.2: ϵ–NFA pro gramatiku typu 3 rozpoznávající stejný jazyk

Pro každý jazyk L generovaný gramatikou typu 3 existuje ϵ–NFA rozpoznávající L.

Důkaz: Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

- Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsahující jen pravidla tvaru $A \to aB$, $A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$ generující L (předchozí lemma)
- definujeme nedeterministický ϵ–NFA $A = (V, T, \delta, S, F)$, kde:

  $F = \{A | (A \to \epsilon) \in P\}$

  $\delta(A, a) = \{B | (A \to aB) \in P\}$

- $L(G) = L(A)$
  - $\epsilon \in L(G) \Leftrightarrow (S \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \epsilon \in L(A)$
  - $a_1 \ldots a_n \in L(G) \Leftrightarrow$ existuje derivace $(S \Rightarrow a_1 H_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 \ldots a_n H_n \Rightarrow a_1 \ldots a_n)$

  $\Leftrightarrow \exists H_0, \ldots, H_n \in V$ tak že $H_0 = S, H_n \in F$ $H_{i+1} \in \delta(H_i, a_k)$ pro krok $a_1 \ldots a_{k-1} H_i \Rightarrow a_1 \ldots a_{k-1} a_k H_{i+1}$

  $\Leftrightarrow a_1 \ldots a_n \in L(A)$

□

Levé (a pravé) lineání gramatiky

Definice 5.5: Levé (a pravé) lineání gramatiky

Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo).

Gramatika G je **levá lineání**, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \to Bw, A \to w, A, B \in V, w \in$

T^*.

Lemma. Jazyky generované levou lineání gramatikou jsou právě regulární jazyky.

Důkaz:

$\Rightarrow$ 'otočením' pravidel levé lineární gramatiky dostaneme pravou lineární

$A \rightarrow Bw, A \rightarrow w$ převedeme na $A \rightarrow w^R B, A \rightarrow w^R$

- získaná gramatika generuje jazyk L^R, najdeme automat
- víme, že regulární jazyky jsou uzavřené na reverzi,

  L^R je regulární, tudíž i $L = (L^R)^R$ je regulární

$\Leftarrow$ takto lze získat všechny regulární jazyky

- (FA$\Rightarrow$reverze$\Rightarrow$ pravá lineární gramatika$\Rightarrow$ levá lineární gramatika)

$\square$

5.3 Lineární gramatiky (a jazyky)

- Levá a pravá lineární pravidla dohromady jsou už silnější.

Definice 5.6: lineární gramatika, jazyk

Gramatika je lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \rightarrow uBw, A \rightarrow w, A, B \in V, u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maximálně jeden neterminál).

Lineární jazyky jsou právě jazyky generované lineámi gramatikami.

- Zřejmě platí: regulární jazyky $\subseteq$ lineární jazyky.
- Jde o vlastní podmnožinu $\subsetneq$.

Example 5.6 (lineární, neregulární jazyk). Jazyk $L = \{0^i 1^i | i \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \rightarrow 0S1|01$.

Pozorování:

- lineární pravidla lze rozložit na levě a pravě lineání pravidla: $S \rightarrow 0A, A \rightarrow S1$.

5.4 Bezkontextové gramatiky, derivační stromy

Bezkontextová gramatika pro jednoduché výrazy

Opakování definice: Bezkontextová gramatika

Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \rightarrow \omega, \omega \in (V \cup T)^*$.

Example 5.7 (CFG pro jednoduché výrazy). Gramatika pro jednoduché výrazy $G = (\{E, I\}, \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}, P, E)$, P jsou pravidla vypsaná vpravo.

- Pravidla 1–4 definují výraz.
- Pravidla 5–10 definují identifikátor I, odpovídající regulárnímu výrazu $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*$.

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \rightarrow I$
2. $E \rightarrow E + E$
3. $E \rightarrow E * E$
4. $E \rightarrow (E)$

5. $I \rightarrow a$
6. $I \rightarrow b$
7. $I \rightarrow Ia$
8. $I \rightarrow Ib$
9. $I \rightarrow I0$
10. $I \rightarrow I1$

Derivační strom

Definice 5.7: Derivační strom

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. **Derivační strom** pro G je strom, kde:

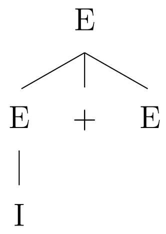
- Kořen (kreslíme nahoře) je označen startovním symbolem S,
- každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem V.
- Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \{\epsilon\}$.
- Je–li uzel ohodnocen ϵ, je jediným dítětem svého rodiče.
- Je–li A ohodnocení vrcholu a jeho děti *zleva pořadě* jsou ohodnoceny $X_1, \ldots, X_k$, pak $(A \to X_1 \ldots X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

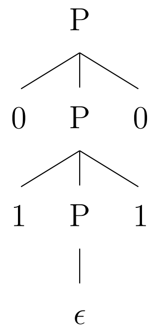
Notation 1 (Terminologie stromů)*.* Uzly, rodiče, děti, kořen, vnitřní uzly, listy, následníci, předci.

- Stromová struktura reprezentuje zdrojový program v překladači. Struktura usnadňuje překlad do strojového kódu.

Příklady stromů, Strom dává sentenciální formu, slovo

Derivační strom $E \Rightarrow^* I + E$. Derivační strom $P \Rightarrow^* 0110$.





Definice 5.8: Strom dává slovo (yield)

Říkáme, že **derivanční strom dává sentenciální formu α (slovo w)**, jestliže je α (w) zřetězení listů bráno zleva doprava.

Levá a pravá derivace

Definice 5.9: Levá a pravá derivace

Levá derivace (leftmost) $\Rightarrow_{lm}$, $\Rightarrow^*_{lm}$ v každém kroku přepisuje nejlevnější neterminál.
Pravá derivace (rightmost) $\Rightarrow_{rm}$, $\Rightarrow^*_{rm}$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

Example 5.8 (levá derivace)*.* $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E \Rightarrow_{lm} a*(E) \Rightarrow_{lm} a*(E+E) \Rightarrow_{lm} a*(I+E) \Rightarrow_{lm}$ $\Rightarrow_{lm} a*(a+E) \Rightarrow_{lm} a*(a+I) \Rightarrow_{lm} a*(a+I0) \Rightarrow_{lm} a*(a+I00) \Rightarrow_{lm} a*(a+b00)$

Pravá derivace používá stejné přepisy, jen je provádí v jiném pořadí.

Example 5.9 (rightmost derivation)*.* $E \Rightarrow_{rm} E*E \Rightarrow_{rm} E*(E) \Rightarrow_{rm} E*(E+E) \Rightarrow_{rm} E*(E+I) \Rightarrow_{rm}$ $\Rightarrow_{rm} E*(E+I0) \Rightarrow_{rm} E*(E+I00) \Rightarrow_{rm} E*(E+b00) \Rightarrow_{rm} \Rightarrow_{rm} E*(I+b00) \Rightarrow_{rm} E*(a+b00) \Rightarrow_{rm}$ $I*(a+b00) \Rightarrow_{rm} a*(a+b00)$

Derivace a derivační stromy

Věta 5.3: 1

Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $A \Rightarrow^*_{lm} w$.
2. $A \Rightarrow^* w$.
3. Existuje derivační strom s kořenem A dávající slovo w.

$1 \Rightarrow 2$ Levá derivace je derivace, druhý bod z prvního plyne triviálně.

$2 \Rightarrow 3$ Z derivace vytvoříme strom tak, že kořen ohodnotíme počátečním neterminálem a každé pravidlo v derivaci 'zavěsíme' pod uzel odpovídající přepisovanému neterminálu.

$3 \Rightarrow 1$ Pro důkaz ekvivalence zbývá pro libovolný derivační strom najít levou derivaci.

Od stromů k derivaci

Lemma. Mějme CFG $G = (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem A dávající slovo $w \in T^*$. Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow^*_{lm} w$ v G.

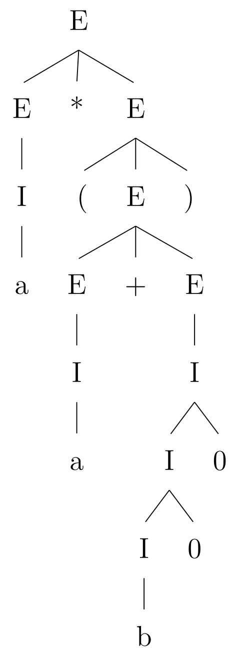
Příprava důkazu: 'obalení derivace'
Mějme následující derivaci:

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E\beta \Rightarrow \alpha I\beta \Rightarrow \alpha Ib\beta \Rightarrow \alpha ab\beta.$$

Příklad levé derivace z derivačního stromu



Je příjemnější zachytit derivaci stromem.

- Kořen: $E \Rightarrow_{lm} E*E$
- Levé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} I \Rightarrow_{lm} a$
- Kořen a levé dítě: $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E$
- Pravé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} (E) \Rightarrow_{lm} (E+E) \Rightarrow_{lm} (I+E) \Rightarrow_{lm} (a+E) \Rightarrow_{lm} (a+I) \Rightarrow_{lm} (a+I0) \Rightarrow_{lm} (a+I00) \Rightarrow_{lm} (a+b00)$
- Plná derivace:

  $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(E) \Rightarrow_{lm} a*(E+E) \Rightarrow_{lm} a*(I+E) \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(a+E) \Rightarrow_{lm} a*(a+I) \Rightarrow_{lm} a*(a+I0) \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(a+I00) \Rightarrow_{lm} a*(a+b00)$.

Důkaz: $\exists$ derivační strom pak existuje levá derivace $\Rightarrow_{lm}$

Indukcí podle výšky stomu.

- Základ: výška 1: Kořen A s dětmi dávajícími w. Je to derivační strom, proto, $A \to w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
- Indukce: výška $n > 1$. Kořen A s dětmi $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
  - Je–li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
  - Je–li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.

  Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \ldots, k$ složíme $A \Rightarrow^*_{lm} w_1 w_2 \ldots w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$.
  - Pro $X_i \in T$ jen zvedneme čítač $i++$.
  - Pro $X_i \in V$ přepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \ldots \Rightarrow_{lm} w_i$ na

$$\begin{aligned} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k &\Rightarrow_{lm} \\ w_1 w_2 \ldots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k &\Rightarrow_{lm} \\ &\ldots \\ \Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k&. \end{aligned}$$

  Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci w z A.

$\square$

Ekvivalence gramatik

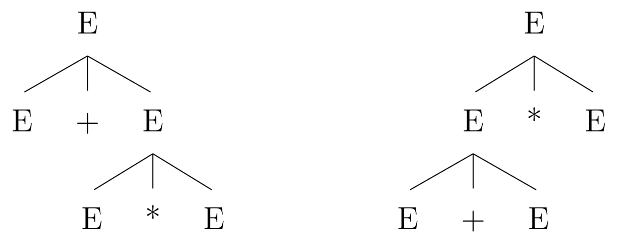
Definice 5.10: ekvivalence gramatik

Gramatiky G_1, G_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(G_1) = L(G_2)$, tj. generují stejný jazyk.

5.5 Víceznačnost bezkontextových gramatik

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \quad E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$$

Dvě derivace téhož výrazu:



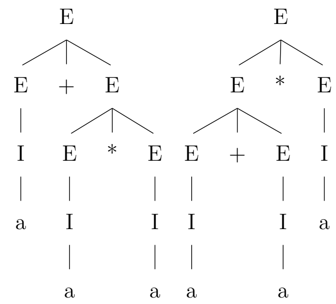
- Rozdíl je důležitý, vlevo $1 + (2 * 3) = 7$, vpravo $(1 + 2) * 3 = 9$.
- Tato gramatika může být modifikovaná na jednoznačnou.

Example 5.10. Různé derivace mohou reprezentovat stejný derivační strom, pak není problém.
1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$
2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$.

Definice 5.11: Jednoznačnost a víceznačnost CFG

- Bezkontextová gramatika $G = (V, T, P, S)$ je **víceznačná** pokud existuje aspoň jeden řetězec $w \in T^*$ pro který můžeme najít dva různé derivační stromy, oba s kořenem S dávající slovo w.
- V opačném případě nazýváme gramatiku **jednoznačnou**.
- Bezkontextový jazyk L je **jednoznačný**, jestliže existuje jednoznačná CFG G tak, že $L = L(G)$.
- **Bezkontextový jazyk L je (podstatně) nejednoznačný**, jestliže každá CFG G taková, že $L = L(G)$, je nejednoznačná. Takovému jazyku říkáme i **víceznačný**.

Example 5.11 (nejednoznačnost CFG). Dva derivační stromy dávající $a+a*a$ ukazující víceznačnost gramatiky.



Příklad víceznačného jazyka

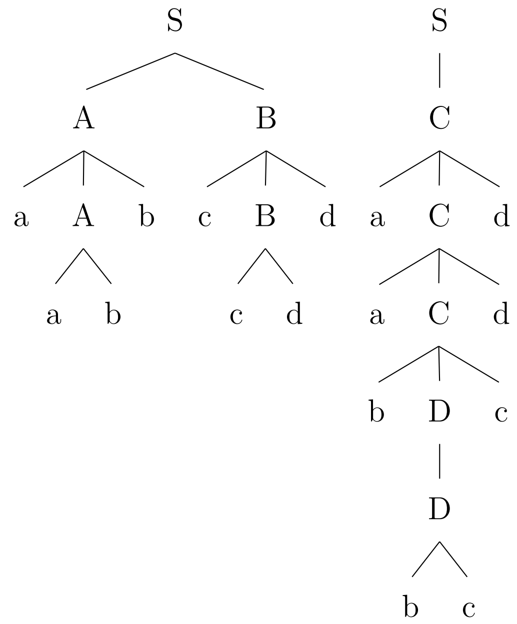
Example 5.12 (Víceznačný jazyk). Příklad víceznačného jazyka:

$$L = \{a^n b^n c^m d^m | n \geq 1, m \geq 1\} \cup \cup\{a^n b^m c^m d^n | n \geq 1, m \geq 1\}.$$

1. $S \to AB|C$
2. $A \to aAb|ab$
3. $B \to cBd|cd$
4. $C \to aCd|aDd$
5. $D \to bDc|bc.$

Jakákoli gramatika pro daný jazyk bude generovat pro některá slova typu $a^n b^n c^n d^n$ dva různé derivační stromy.

Dva derivační stromy pro *aabbccdd*.



Odstanění víceznačnosti gramatiky

- Neexistuje algoritmus, který nám řekne, zda je daná gramatika víceznačná.
- Existují bezkontextové jazyky, pro které neexistuje jednoznačná bezkontextová gramatika, pouze víceznačné CFG.
- Existují určitá doporučení pro odstranění víceznačnosti.

Víceznačnost má různé příčiny:

- Není respektovaná priorita operátorů.
- Posloupnost identických operátorů lze shlukovat zleva i zprava.
- $S \to$ if then S else $S|$ if then $S|\epsilon$

  slovo 'if then if then else' má dva významy 'if then (if then else)' nebo 'if then (if then) else'

Řešení:

- syntaktická chyba (Algol 60)
- else patří k bližšímu if (preference pořadí pavidel)
- závorky begin-end,odsazení v Python (asi nejčistší řešení).

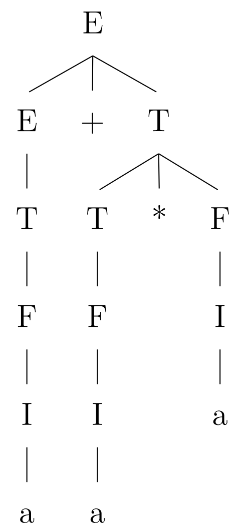
Vynucení priority

Řešením je zavést více různých proměnných, každou pro jednu úroveň 'priority'.
Konkrétně:

- **Faktor** je výraz který nesmí rozdělit žádný operátor.
  - identifikátory
  - výraz v závorkách
- **Term** je výraz, který nemůže rozdělit operátor $+$.
- **Výraz** může být rozdělen $*$ i $+$.

Jednoznačná gramatika pro výrazy:
1. $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
2. $F \to I|(E)$
3. $T \to F|T * F$
4. $E \to T|E + T$.

Jediný derivační strom pro $a + a * a$.



Jednoznačnost a kompilátory

Kompilace výrazu (zásobník na mezivýsledky + dva registry):

(1) $E \to E + T$ ... pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2
(2) $E \to T$
(3) $T \to T * F$ ... pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2
(4) $T \to F$
(5) $F \to (E)$
(6) $F \to a$ ... push a

- 'a+a*a' získáme postupnou aplikací pravidel 1,2,4,6,3,4,6,6
- posloupnost obrátíme a vybereme pouze pravidla generující kód

  6,6,3,6,1
- nyní nahradíme pravidla příslušným kódem

  push a; push a; pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2; push a; pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2

Shrnutí

- Gramatiky
  - obecné
  - kontextové
  - bezkontextové
  - regulární, pravé lineární

- jazyk gramatiky, derivace, derivace dává slovo, derivační strom (pro bezkontextové gramatiky), ekvivalentní gramatiky
- ne každá lineární gramatika má ekvivalentní pravou lineární
- bezkontextové gramatiky
- jednoznačné a (podstatně) víceznačné gramatiky.

6 Chomského NF, Pumping Lemma pro CFL,Zásobníkové automaty

6.1 Bezkontextové gramatiky (CFG) v Chomského NF

- Chomského normální forma bezkontextové gramatiky:
  - neobsahuje zbytečné symboly (S není nikdy zbytečný)
  - všechna pravidla tvaru $A \to BC$ nebo $A \to a$, A, B, C jsou neterminály, a terminál,

    nebo $S \to \epsilon$ pro startovní symbol S, který se pak nesmí vyskytovat na pravé straně žádného pravidla.
  - Pro každý bezkontextový jazyk L existuje gramatika v Chomského normálním tvaru, která generuje L.

Postupně provedeme zjednodušení gramatiky, nejdřív:

- Eliminace *zbytečných symbolů*
- eliminace *ϵ–pravidel* $A \to \epsilon$; $A \in V$
- eliminace *jednotkových pravidel* $A \to B$ pro $A, B \in V$.

- To vše potřebujeme k formulaci iteračního lemmatu pro bezkontextové jazyky.
- A ověření, zda zadaný řetězec patří do jazyka gramatiky pomocí Cocke-Younger-Kasami algoritmu.

Eliminace zbytečných symbolů

Definice 6.1: zbytečný, užitečný, generující, dosažitelný symbol

- Symbol X je **užitečný** v gramatice $G = (V, T, P, S)$ pokud existuje derivace tvaru $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$ kde $w \in T^*, X \in (V \cup T)$, $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.
- Startovní symbol S je užitečný vždy (i když negeneruje žádné $w \in T^*$).
- Pokud X není užitečný, říkáme, že je **zbytečný**.
- X je **generující** pokud $X \Rightarrow^* w$ pro nějaké slovo $w \in T^*$. Vždy $w \Rightarrow^* w$ v nula krocích.
- X je **dosažitelný** pokud $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$ pro nějaká $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Chceme eliminovat ne–generující a ne–dosažitelné symboly.

Example 6.1. Uvažujme gramatiku: $S \to AB|a \;\; A \to b$ Eliminujeme B (ne–generující): $S \to a \;\; A \to b$. Eliminujeme A (nedosažitelný): $S \to a$.

Lemma 6.1 (Eliminace zbytečných symbolů). Nechť $G = (V, T, P, S)$ je CFG, předpokládejme $L(G) \neq \emptyset$. Zkonstruujeme $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S)$ následovně:

- Eliminujeme ne–generující symboly a pravidla je obsahující
- poté eliminujeme všechny nedosažitelné symboly

Pak G_1 nemá zbytečné symboly a $L(G_1) = L(G)$.

Algoritmus 6.1: Generující symboly

Základ Každý $a \in T$ je generující.

Indukce Pro každé pravidlo $A \to \alpha$, kde každý symbol v α je generující. Pak i A je generující. (Včetně $A \to \epsilon$).

Algoritmus 6.2: Dosažitelné symboly

Základ S je dosažitelný.

Indukce Je–li A dosažitelný, pro všechna pravidla $A \to \alpha$ jsou všechny symboly v α dosažitelné.

Lemma 6.2 (generující/dosažitelné symboly). Výše uvedené algoritmy najdou právě všechny generující / dosažitelné symboly.

Eliminace ϵ pravidel

Definice 6.2: nulovatelný neterminál

Neterminál A je **nulovatelný** pokud $A \Rightarrow^* \epsilon$.

Pro nulovatelné neterminály na pravé straně pravidla $B \to CAD$, vytvoříme dvě verze pravidla – s a bez nulovatelného neterminálu.

Algoritmus 6.3: Nalezení nulovatelných symbolů v G

Základ Pokud $A \to \epsilon$ je pravidlo G, pak A je nulovatelné.

Indukce Pokud $B \to C_1 \dots C_k$, kde jsou všechna C_i nulovatelná, je i B nulovatelné (terminály nejsou nulovatelné nikdy).

Algoritmus 6.4: Konstrukce gramatiky bez ϵ–pravidel z G

- Najdi nulovatelné symboly
- Pro každé pravidlo $A \to X_1 \dots X_k \in P, k \geq 1$, nechť m z X_i je nulovatelných. Nová gramatika G_1 bude mít 2^m verzí tohoto pravidla s/bez každého nulovatelného symbolu kromě ϵ v případě $m = k$.

Příklad eliminace ϵ–pravidel

Algoritmus 6.5: $S \to \epsilon$

Pokud S je startovní symbol a gramatika obsahuje pravidlo $S \to \epsilon$, zavedeme nový počáteční symbol S_1, přidáme $S_1 \to S|\epsilon$, toto pravidlo necháváme a s $S \to \epsilon$ eliminujeme.

Example 6.2. Mějme gramatiku $(\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$: $P = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to AA|B|\epsilon \\ B \to bBB|\epsilon \end{array} \right\}$.

- Pro každé pravidlo přidáme verze s/bez nulovatelných symbolů

$$\begin{Bmatrix} S \to AB|A|B \\ A \to AA|A|A|B \\ B \to bBB|bB|bB|b \end{Bmatrix}.$$

- Výsledná gramatika:

$$\begin{Bmatrix} S \to AB|A|B \\ A \to AA|A|B \\ B \to bBB|bB|b \end{Bmatrix}.$$

Eliminace jednotkových pravidel

Definice 6.3: jednotkové pravidlo

Jednotkové pravidlo je $A \to B \in P$ kde A, B jsou oba neterminály.

Example 6.3. $\begin{Bmatrix} I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ F \to I|(E) \\ T \to F|T*F \\ E \to T|E+T \end{Bmatrix}$ Expanze T v $E \to T$, $E \to F|T*F$, Expanze $E \to F$, $E \to I|(E)$, Expanze $E \to I$, $E \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$

Dohromady: $E \to a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T*F|E+T$.

Dále se musíme vyhnout možným cyklům.

Definice 6.4: jednotkový pár

Dvojici $A, B \in V$ takovou, že $A \Rightarrow^* B$ pouze jednotkovými pravidly nazýváme **jednotkový pár** (jednotková dvojice).

Algoritmus 6.6: Nalezení jednotkových párů

Základ (A, A) pro každý $A \in V$ je jednotkový pár.

Indukce Je–li (A, B) jednotkový pár a $(B \to C) \in P$, pak (A, C) je jednotkový pár.

Example 6.4 (Jednotkové páry z předchozí gramatiky). $(E,E), (T,T), (F,F), (I,I), (E,T), (E,F), (E,I), (T,F),$

Algoritmus 6.7: Eliminace jednotkových pravidel z G

- najdi všechny jednotkové páry v G
- pro každý jednotkový pár (A, B) dáme do nové gramatiky všechna pravidla $A \to \alpha$ kde $B \to \alpha \in P$ a $B \to \alpha$ není jednotkové pravidlo.

Example 6.5. $\begin{Bmatrix} I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ F \to I|(E) \\ T \to F|T*F \\ E \to T|E+T \end{Bmatrix}$ převedeme $\begin{Bmatrix} I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ F \to (E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ T \to T*F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ E \to E+T|T*F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \end{Bmatrix}$

Gramatiky v normálním tvaru

Lemma 6.3 (Gramatika v normálním tvaru, redukovaná). Mějme bezkontextovou gramatiku G,pak existuje CFG G_1 taková že $L(G_1) = L(G)$ a G_1 neobsahuje ϵ–pravidla kromě $S \to \epsilon$, neobsahuje jednotková pravidla ani zbytečné symboly. Gramatika G_1 se nazývá **redukovaná**.

Redukce bezkontextové gramatiky. Idea důkazu:

- Začneme eliminací ϵ–pravidel.
- Eliminujeme jednotková pravidla. Tím nepřidáme ϵ–pravidla.
- Eliminujeme zbytečné symboly. Tím nepřidáme žádná pravidla.
  - Nejdříve negenerující (kromě počátečního symbolu S),
  - pak nedosažitelné.

□

Definice 6.5: Chomského normální tvar

O bezkontextové gramatice $G = (V, T, P, S)$ bez zbytečných symbolů kde jsou všechna pravidla v jednom ze tří tvarů

- $A \to BC$, $A, B, C \in V$,
- $A \to a$, $A \in V$, $a \in T$,
- případně $S \to \epsilon$, pak S není na pravé straně žádného pravidla,

říkáme, že je v **Chomského normálním tvaru (ChNF)**.

Potřebujeme dva další kroky:

- pravé strany délky 2 a více předělat na samé neterminály
- rozdělit pravé strany délky 3 a více neterminálů na více pravidel

Algoritmus 6.8: neterminály

- Pro každý terminál a vytvoříme nový neterminál, řekněme A,
- přidáme pravidlo $A \to a$,
- použijeme A místo a na pravé straně pravidel délky 2 a více.

Algoritmus 6.9: rozdělení pravidel

- Pro pravidlo $A \to B_1 \dots B_k$ zavedeme $k-2$ neterminálů C_i
- Přidáme pravidla $A \to B_1C_1$,$C_1 \to B_2C_2$, …,$C_{k-2} \to B_{k-1}B_k$.

Věta 6.1: Chomského normální tvar bezkontextové gramatiky

Mějme bezkontextovou gramatiku G.Pak existuje CFG G_1 v Chomského normálním tvaru taková, že $L(G_1) = L(G)$.

Example 6.6. $\left\{I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1, F \to I|(E), T \to F|T * F, E \to T|E + T\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} I \to a|b|IA|IB|IZ|IU \\ F \to LER|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ T \to TMF|LER|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ E \to EPT|TMF|LER|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ A \to a \\ B \to b \\ Z \to 0 \\ U \to 1 \\ P \to + \\ M \to * \\ L \to (\\ R \to) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} F \to LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ T \to TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ E \to EC_1|TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU \\ C_1 \to PT \\ C_2 \to MF \\ C_3 \to ER \\ I, A, B, Z, U, P, M, L, R \text{ jako předchozí} \end{array}\right\}$$

6.2 Lemma o vkládání (iterační lema) pro bezkontextové jazyky

Příprava na (pumping) lemma o vkládání

Lemma (Velikost derivačního stromu gramatiky v CNF). Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normálním tvaru, který dává slovo w. Je–li délka nejdelší cesty n, pak $|w| \leq 2^{n-1}$.

Proof. Indukcí podle n,

Základ $|a| = 1 = 2^0$

Indukce $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

□

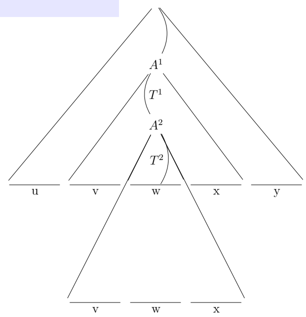
Lemma (Důsledek). Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normální formě, který dává slovo w, $|w| > p = 2^{n-1}$. Pak ve stromě existuje cesta delší než n.

Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky

Věta 6.2: !!Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky

Mějme bezkontextový jazyk L. Pak existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že každé $z \in L, |z| > n$ lze rozložit na $z = uvwxy$ kde:

- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \epsilon$
- $\forall i \geq 0,\ uv^iwx^iy \in L$.



Idea důkazu:

- vezmeme derivační strom pro z
- najdeme nejdelší cestu
- na ní dva stejné neterminály
- tyto neterminály určí dva podstromy
- podstromy definují rozklad slova
- nyní můžeme větší podstrom posunout ($i > 1$)
- nebo nahradit menším podstromem ($i = 0$)

Důkaz: $|z| > n : z = uvwxy, |vwx| \le n, vx \ne \epsilon, \forall i \ge 0 uv^iwx^iy \in L$

- vezmeme gramatiku v Chomského NF (pro $L = \{\epsilon\}$ a $\emptyset$ zvol $n = 1$).
- Nechť $|V| = k$. Položíme $n = 2^k$.
- Pro $z \in L$,$|z| > 2^k$, má v derivačním stromu z cestu délky $> k$
- vezmeme cestu maximální délky; terminál kam vede označíme t
- Aspoň dva z posledních $(k+1)$ neterminálů na cestě do t jsou stejné
- vezmeme dvojici A^1, A^2 nejblíže k t (určuje podstromy T^1, T^2)
- cesta z A^1 do t je nejdelší v podstromu T^1 a má délku maximálně $(k+1)$

  tedy slovo dané stromem T^1 není delší než 2^k (tedy $|vwx| \le n$)
- z A^1 vedou dvě cesty (ChNF), jedna do T^2 druhá do zbytku vx

  ChNF je nevypouštějící, tedy $vx \ne \epsilon$
- derivace slova ($A^1 \Rightarrow^* vA^2x, A^2 \Rightarrow^* w$)

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^2xy \Rightarrow^* uvwxy$
- posuneme–li A^2 do A^1 $(i = 0)$

  $S \Rightarrow^* uA^2y \Rightarrow^* uwy$
- posuneme–li A^1 do A^2 $(i = 2, 3, \ldots)$

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^1xy \Rightarrow^* uvvA^2xxy \Rightarrow^* uvvwxxy$. □

Použití lemma o vkládání

Example 6.7 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i1^i2^i | i \ge 1\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n1^n2^n| > n$

\# žádné dělení nesplňuje PL neboť

- pumpovací slovo $|vwx| \le n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
- $vx \ne \epsilon$, iterací se slovo změní
- poruší se rovnost počtu symbolů – SPOR.

Example 6.8 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i1^j2^k | 0 \le i \le j \le k\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n1^n2^n| > n$

\# žádné dělení nesplňuje PL neboť

- pumpovací slovo $|vwx| \le n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
  - pokud 0 (nebo 1), pumpujeme nahoru – SPOR $i \le j$ (nebo $j \le k$)
  - pokud 2 (nebo 1), pumpujeme dolů – SPOR $j \le k$ (nebo $i \le j$)

Použití lemma o vkládání

Example 6.9 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^j 2^i 3^j | i, j \geq 1\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n 3^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se rovnost počtu symbolů 0 a 2 nebo 1 a 3 – SPOR.

Example 6.10 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{ww | w \in \{0,1\}^*\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 0^n 1^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se buď rovnost nul či jedniček
  - rozeberete 4 případy, vx obsahuje znak z prvních nul, prvních jedniček, druhých nul, druhých jedniček.

Kdy lemma o vkládání nezabere

- Lemma o vkládání je pouze implikace!

Example 6.11 (pumpovatelný, ne–bezkontextový jazyk). $L = \{a^i b^j c^k d^l | i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový jazyk, přesto lze pumpovat.

$i = 0 : b^j c^k d^l$ lze pumpovat v libovolném písmenu
$i > 0 : a^i b^n c^n d^n$ lze pumpovat v části obsahující a

Co s tím?

- zobecnění pumping lemmatu (Ogdenovo lemma)
  - pumpování vyznačených symbolů
- uzávěrové vlastnosti.

Zásobníkové automaty

Zásobníkové automaty

- Zásobníkové automaty jsou rozšířením $\epsilon-$NFA nedeterministických konečných automatů s ϵ přechody.
- Přidanou věcí je **zásobník**. Má vlastní abecedu Γ.
- V každém kroku vidíme horní písmeno zásobníku (zde X), můžeme dát navrch libovolný konečný počet znaků $\gamma \in \Gamma^*$.
- Může si pamatovat neomezené množství informace.
- Deterministické zásobníkové automaty přijímají jen vlastní podmnožinu bezkontextových jazyků.

6.3 Definice zásobníkového automatu (PDA)

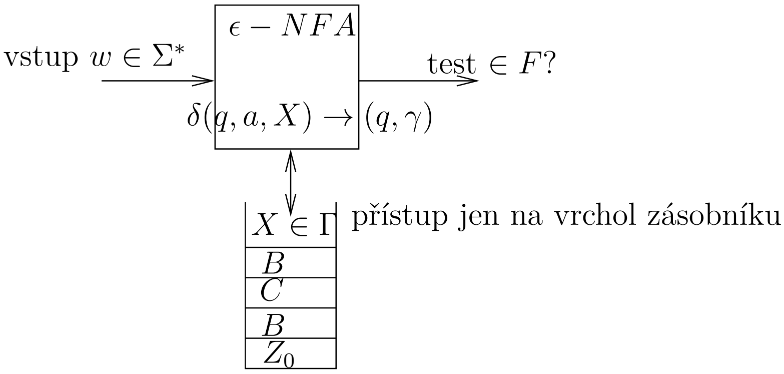


Figure 7: Zásobníkový automat.

Definice 6.6: Zásobníkový automat (PDA)

Zásobníkový automat (PDA) je $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

Q konečná množina stavů

Σ neprázdná konečná množina vstupních symbolů

Γ neprázdná konečná zásobníková abeceda

δ přechodová funkce $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_{FIN}(Q \times \Gamma^*)$, $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$

> kde q je nový stav a γ je řetězec zásobníkových symbolů, který nahradí X na vrcholu zásobníku
>
> pro $\gamma = ABC$ jde C nejníže, A bude na vrchu zásobníku

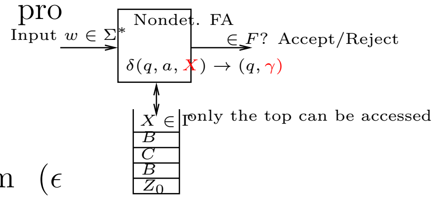
$q_0 \in Q$ počáteční stav

$Z_0 \in \Gamma$ Počáteční zásobníkový symbol. Víc na začátku na zásobníku není.

F Množina přijímajících (koncových) stavů; může být nedefinovaná.

V jednom časovém kroku zásobníkový automat:

- Přečte na vstupu žádný nebo jeden symbol. (ϵ přechody pro prázdný vstup.)
- Přejde do nového stavu.
- Nahradí symbol na vrchu zásobníku libovolným řetězcem (ϵ odpovídá samotnému pop, jinak následuje push jednoho nebo více symbolů).



Example 6.12. Zásobníkový automat pro jazyk: $L_{wwr} = \{ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$.

PDA přijímající L_{wwr}:

- Start q_0 reprezentuje odhad, že ještě nejsme uprostřed.
- V každém kroku nedeterministicky hádáme;
  - Zůstat q_0 (ještě nejsme uprostřed).
  - Přejít ϵ přechodem do q_1 (už jsme viděli střed).
- V q_0, přečte vstupní symbol a dá (push) ho na zásobník

- V q_1, srovná vstupní symbol s vrcholem zásobníku

  pokud se shodují, přečte vstupní symbol a umaže (pop) vrchol zásobníku
- Když vyprázdníme zásobník, přijmeme vstup, který jsme doteď přečetli.

PDA pro L_{wwr}

Example 6.13 (PDA pro L_{wwr}). PDA pro L_{wwr} můžeme popsat $P_{da} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\}$

kde δ je definovaná:

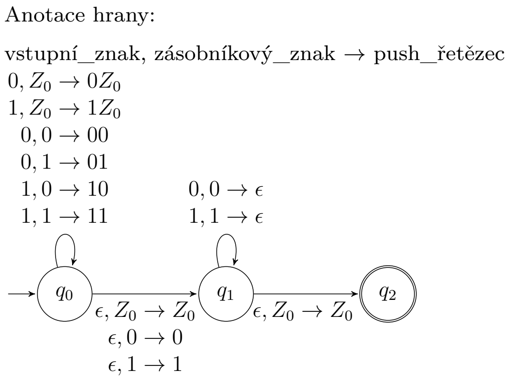
$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$	Ulož vstup na zásobník, startovní symbol tam nech
$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$ $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$ $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$ $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$	Zůstaň v q_0, přečti vstup a dej ho na zásobník
$\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$ $\delta(q_0, \epsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$ $\delta(q_0, \epsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$	ϵ přechod q_1 bez změny zásobníku (a vstupu)
$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \epsilon)\}$ $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \epsilon)\}$	stav q_1 srovná vstupní symbol a vrchol zásobníku
$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$	našli jsme ww^R a jdeme do přijímajícího stavu

Grafická notace PDA's

Definice 6.7: Přechodový diagram pro zásobníkový automat

Přechodový diagram pro zásobníkový automat obsahuje:

- Uzly, které odpovídají stavům PDA.
- Šipka 'odnikud' ukazuje počáteční stav, dvojité kruhy označují přijímající stavy.
- hrana odpovídá přechodu PDA. Hrana označená $a, X \to \alpha$ ze stavu p do q znamená $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$
- Konvence je, že počáteční symbol zásobníku značíme Z_0.



Notace zásobníkových automatů

Example 6.14 (Notace).

$a, b, c, *, +, 1, (,)$	symboly vstupní abecedy
p, q, r	stavy
u, v, w, x, y, z	řetězce vstupní abecedy
X, Y, E, I, S	zásobníkové symboly
α, β, γ	řetězce zásobníkových symbolů

- Narozdíl od gramatik může vstupní a zásobníková abeceda obsahovat stejné symboly.
- Vyhýbáme se stejným názvům stavů jako jsou písmena kterékoli z abeced.

Definice 6.8: Konfigurace zásobníkového automatu

Konfiguraci zásobníkového automatu reprezentujeme trojicí (q, w, γ), kde

q je stav

w je zbývající vstup a

γ je obsah zásobníku (vrch zásobníku je vlevo).

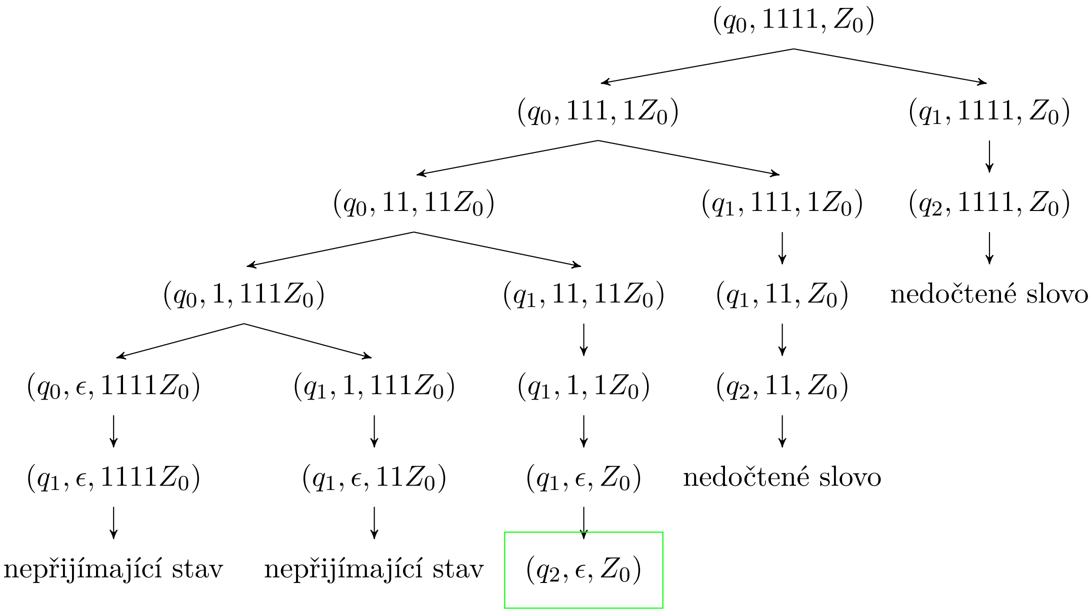
konfiguraci značíme zkratkou (ID) z anglického 'instantaneous description (ID)'.

Definice 6.9: $\vdash, \vdash^*$ posloupnosti konfigurací

Mějme PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Mějme stavy $p, q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\}), X \in \Gamma, \alpha \in \Gamma^*$ a instrukci $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$. Pak říkáme, že

- konfigurace $(p, aw, X\beta)$ **bezprostředně vede** na konfiguraci $(q, w, \alpha\beta)$,
  - Značíme $(p, aw, X\beta) \vdash (q, w, \alpha\beta)$.
- **konfigurace I vede na konfiguraci J** $I \vdash^*_P J$ a $I \vdash^* J$ používáme na označení nuly a více kroků zásobníkového automatu, t.j.
  - $I \vdash^* I$ pro každou konfiguraci I
  - $I \vdash^* J$ pokud existuje konfigurace K tak že $I \vdash K$ a $K \vdash^* J$.

konfigurace zásobníkového automatu na vstup 1111



6.4 Přijímání stavem, prázdným zásobníkem, převoditelnost

Definice 6.10: Jazyk přijímaný koncovým stavem, prázdným zásobníkem

Mějme zásobníkový automat $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Pak $L(P_{da})$, **jazyk přijímaný (akceptovaný) koncovým stavem** je

$$L(P_{da}) = \{w | (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_{da}} (q, \epsilon, \alpha) \text{ pro nějaké } q \in F \text{ a libovolný řetězec } \alpha \in \Gamma^*; w \in \Sigma^*\}.$$

jazyk přijímaný prázdným zásobníkem $N(P_{da})$ definujeme

$$N(P_{da}) = \{w | (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_{da}} (q, \epsilon, \epsilon) \text{ pro libovolné } q \in Q; w \in \Sigma^*\}.$$

– Protože je množina přijímajících stavů F nerelevantní, může se vynechat a PDA je šestice $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

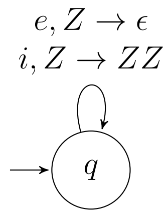
Example 6.15. Zásobníkový automat z předchozího příkladu přijímá L_{wwr} koncovným stavem.

Example 6.16. $P'_{da} \equiv P_{da}$ z předchozího příkladu, jen změníme instrukci, aby umazala poslední symbol $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ nahradíme $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, \epsilon)\}$ Nyní $L(P'_{da}) = N(P'_{da}) = L_{wwr}$.

Příklad If-Else

Example 6.17 (If-else příjímané prázdným zásobníkem). Následující zásobníkový automat zastaví při první chybě na if (i) a else (e), máme–li více else než if.

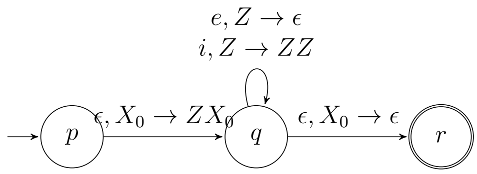
$P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ kde



- $\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ pop

Example 6.18 (Přijímání koncovým stavem). $P_F = (\{p, q, r\}, \{i, e\}, \{Z, X_0\}, \delta_F, p, X_0, \{r\})$ kde

- $\delta_F(p, \epsilon, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$ start
- $\delta_F(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_F(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ pop
- $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(r, \epsilon)\}$ přijmi



Nečtený vstup a dno zásobníku P neovlivní výpočet

Lemma 6.4. Mějme PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$. Potom pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ and $\gamma \in \Gamma^*$ platí: $(p, uw, \alpha\gamma) \vdash^*_{P_{da}} (q, vw, \beta\gamma)$.

Specielně pro $\gamma = \epsilon$ a/nebo $w = \epsilon$.

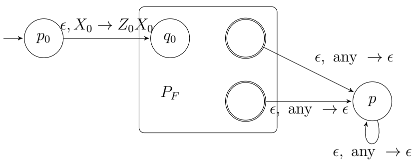
Proof. Indukcí podle počtu konfigurací mezi $(p, uw, \alpha\gamma)$ a $(q, vw, \beta\gamma)$. Každý krok $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$ je určen bez w a/nebo γ. Proto je možný i se symboly na konci vstupu / dně zásobníku. □

Lemma 6.5. Pro PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, uw, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, vw, \beta)$ platí $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$.

Remark Pro zásobník ale obdoba neplatí. PDA může zásobníkové symboly γ použít a zase je tam naskládat (push). $L = \{0^i 1^i 0^j 1^j\}$, konfigurace $(p, 0^{i-j} 1^i 0^j 1^j, 0^j Z_0) \vdash^* (q, 1^j, 0^j Z_0)$, mezitím vyčištíme zásobník k Z_0.

Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku

Lemma 6.6 (Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku). Mějme $L = L(P_F)$ pro nějaký PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$. Pak existuje PDA P_N takový, že $L = N(P_N)$.



Důkaz:

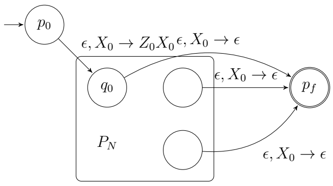
Nechť $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$, kde

- $\delta_N(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ start
- $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Y \in \Gamma)$ $\delta_N(q, a, Y) = \delta_F(q, a, Y)$ simulujeme
- $\forall (q \in F, Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(q, \epsilon, Y) \ni (p, \epsilon)$ přijmout pokud P_F přijímá,
- $\forall (Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(p, \epsilon, Y) = \{(p, \epsilon)\}$ vyprázdnit zásobník.

Pak $w \in N(P_N)$ iff $w \in L(P_F)$. □

Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu

Lemma 6.7 (Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu). Pokud $L = N(P_N)$ pro nějaký PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, pak existuje PDA P_F takový, že $L = L(P_F)$.



Důkaz:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

kde δ_F je

- $\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ (start).
- $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Y \in \Gamma)$, $\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$.
- Navíc, $\delta_F(q, \epsilon, X_0) \ni (p_f, \epsilon)$ pro každý $q \in Q$.

Chceme ukázat $w \in N(P_N)$ iff $w \in L(P_F)$.

- (If) P_F přijímá následovně: $(p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_F = N_F} (q, \epsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \epsilon, \epsilon)$.
- (Only if) Do p_f nelze dojít jinak než předchozím bodem. □

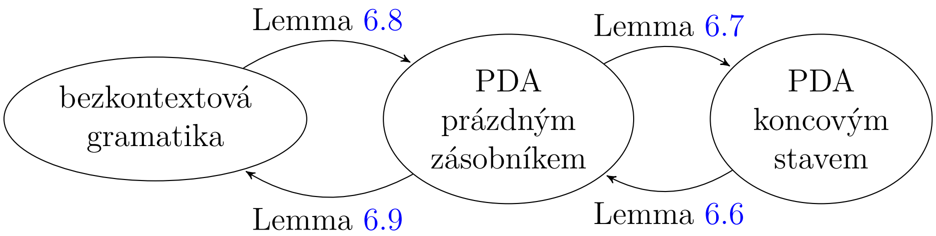
6.5 Ekvivalence jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty a bezkontextových jazyků

Věta 6.3: !L(CFG), L(PDA), N(PDA)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Jazyk L je bezkontextový, tj. generovaný bezkontextovou gramatikou.
- Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem koncovým stavem.
- Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.

Důkaz bude veden směry dle následujícího obrázku.



Od bezkontextové gramatiky k zásobníkovému automatu

Algoritmus 6.10: Konstrukce PDA z CFG G

Mějme CFG gramatiku $G = (V, T, P, S)$.
Konstruujeme PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$.

(1) Pro neterminály $A \in V$, $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) | A \to \beta$ je pravidlo $G\}$.

(2) pro každý terminál $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$.

Example 6.19. Konvertujme gramatiku: $G = (\{E, I\}, \{a, b, 0, 1, (,), +, *\}, \{I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1,\ E \to I|E * E|E + E|(E)\}, E)$.[0.2cm] Množina vstupních symbolů PDA je $\Sigma = \{a, b, 0, 1, (,), +, *\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{I, E\}$, přechodová funkce δ:

- $\delta(q, \epsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$.
- $\delta(q, \epsilon, E) = \{(q, I), (q, E * E), (q, E + E), (q, (E))\}$.
- $\forall s \in \Sigma$ je $\delta(q, s, s) = \{(q, \epsilon)\}$, např. $\delta(q, +, +) = \{(q, \epsilon)\}$.

Jinak je δ prázdná.

CFG a PDA

Lemma 6.8 (Přijímání prázdným zásobníkem ze CFG). Pro PDA P_{da} konstruovaný z CFG G algoritmem výše je $N(P) = L(G)$.

(1) Pro neterminály $A \in V$, $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) | A \to \beta$ je pravidlo $G\}$.

(2) pro každý terminál $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$.

- Levá derivace: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * I \Rightarrow a * b$
- Posloupnost konfigurací: $(q, a * b, E) \vdash (q, a * b, E * E) \vdash (q, a * b, I * E) \vdash (q, a * b, a * E) \vdash (q, *b, *E) \vdash (q, b, E) \vdash (q, b, I) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$

Pozorování:

- Kroky derivace simuluje PDA ϵ přepisy zásobníku
- odmazávaný vstup u PDA v derivaci zůstává až do konce
- až PDA vymaže terminály, pokračuje v přepisech.

CFG a PDA

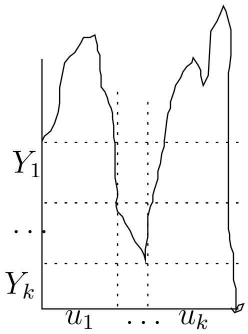
$w \in N(P_{da}) \Leftarrow w \in L(G)$. Nechť $w \in L(G)$, w má levou derivaci $S = \gamma_1 \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_2 \underset{lm}{\Rightarrow} \dots \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_n = w$.
Indukcí podle i dokážeme $(q, w, S) \underset{P}{\vdash^*} (q, v_i, \alpha_i)$, kde $\gamma_i = u_i \alpha_i$ je levá sentenciální forma a $u_i v_i = w$.

- Pokud γ_i obsahuje pouze terminály, $\gamma_i = u_i \alpha_i = w = u_i v_i$, tedy $\alpha_i = v_i$ a pravidly typu (2) vyprázdníme vstup i zásobník.
- Každá nekoncová sentenciální forma γ_i může být zapsaná $u_i A \alpha_i$,

  A nejlevější neterminál, u_i řetězec terminálů
- indukční předpoklad nás dovedl do konfigurace $(q, v_i, A\alpha_i)$, $w = u_i v_i$
- Pro $\gamma_i \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_{i+1}$ bylo použilo pravilo $(A \to \beta) \in P$
- PDA nahradí A na zásobníku β, přejde na konfiguraci $(q, v_i, \beta\alpha_i)$.
- odstraňme všechny terminály $v \in \Sigma^*$ zleva $\beta\alpha$ porovnáváním se vstupem
  - $v_i = v v_{i+1}$ a zároveň $\beta\alpha = v\alpha_{i+1}$
- přešli jsme do nové konfigurace $(q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ a iterujeme.

$\square$

Důkaz: $w \in N(P_{da}) \Rightarrow w \in L(G)$



Dokazujeme: Pokud $(q, u, A) \underset{P}{\vdash^*} (q, \epsilon, \epsilon)$, tak $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u$.
Indukcí podle počtu kroků P_{da}.

- $n = 1$ kroků:
  - $a \in \Sigma$, přechod $\delta(q, a, a) \ni (q, \epsilon)$, v derivaci žádný krok,
  - $A \in \Gamma$, přechod $\delta(q, \epsilon, A) \ni (q, \epsilon)$ pro pravidlo gramatiky $(A \to \epsilon) \in G$.
- $n > 1$ kroků;
  - První krok typu (2) – terminály, nerozšiřujeme derivaci.
  - První krok typu (1), A nahrazeno $Y_1Y_2 \dots Y_k$ z pravidla $A \to Y_1Y_2 \dots Y_k$.
    Rozdělíme $u = u_1u_2 \dots u_k$:
    * čtením symbolu Y_i skončilo slovo u_{i-1} a začíná u_i.

    Použijeme indukční hypotézu na každé $i = 1, \dots, k$: $(q, u_iu_{i+1} \dots u_k, Y_i) \vdash^* (q, u_{i+1} \dots u_k, \epsilon)$ a dostaneme $Y_i \Rightarrow^* u_i$.

    Dohromady $A \Rightarrow Y_1Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* u_1Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* u_1u_2 \dots u_k$.

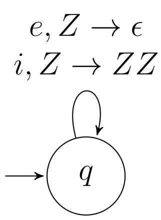
$\square$

Příklad: Od zásobníkového automatu ke gramatice

Example 6.20. Převeďme PDA $P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ na obrázku na gramatiku.

- Neterminály gramatiky budou $V = \{S, [qZq]\}$ nový start a jediná trojice P_N.
- Pravidla:
  - $S \to [qZq]$.
  - $[qZq] \to e$
  - $[qZq] \to i[qZq][qZq]$.

  Můžeme nahradit trojici $[qZq]$ symbolem A a dostaneme: $S \to A$ $A \to iAA|e$. Protože A a S odvozují přesně stejné řetězce, můžeme je ztotožnit: $G = (\{S\}, \{i, e\}, \{S \to iSS|e\}, S)$.

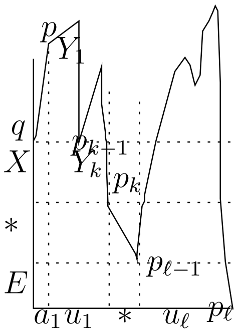


Od zásobníkového automatu ke gramatice CFG

- Zásobní automat bere *jeden* symbol ze zásobníku. Stav před a po kroku může být různý.
- Neterminály gramatiky budou složené symboly $[qXp]$, PDA vyšel z q, vzal X a přešel do p;

  a zavedeme nový počáteční symbol S.

Lemma 6.9 (Gramatika pro PDA). Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$. Pak existuje bezkontextová gramatika G taková, že $L(G) = N(P)$.



Pravidla definujeme:

- $\forall p \in Q$: $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$, tj. uhodni koncový stav a spusť PDA na $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$.
- Pro všechny dvojice $(p, Y_1Y_2 \dots Y_k) \in \delta(q, a_1, X)$, $a_1 \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, \forall p_1, \dots, p_{k-1} \in Q$ vytvoř pravidlo

$$[qXp_k] \rightarrow a_1[pY_1p_1][p_1Y_2p_2] \dots [p_{k-1}Y_kp_k]$$

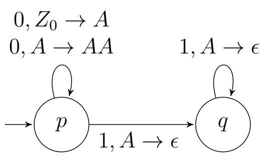
- spec. pro $(p, \epsilon) \in \delta(q, a, A)$ vytvoř $[qAp] \rightarrow a$.

Proof. Pro $w \in \Sigma^*$ dokazujeme $[qXp] \Rightarrow^* w$ právě když $(q, w, X) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$ indukcí v obou směrech (počet kroků PDA, počet kroků derivace.) □

Example 6.21 ($\{0^n1^n; n > 0\}$).

δ	Pravidla	
	$S \rightarrow [pZ_0p] \| [pZ_0q]$	(1)
$\delta(p, 0, Z_0) \ni (p, A)$	$[pZ_0p] \rightarrow 0[pAp]$	(2)
	$[pZ_0q] \rightarrow 0[pAq]$	(3)
$\delta(p, 0, A) \ni (p, AA)$	$[pAp] \rightarrow 0[pAp][pAp]$	(4)
	$[pAp] \rightarrow 0[pAq][qAp]$	(5)
	$[pAq] \rightarrow 0[pAp][pAq]$	(6)
	$[pAq] \rightarrow 0[pAq][qAq]$	(7)
$\delta(p, 1, A) \ni (q, \epsilon)$	$[pAq] \rightarrow 1$	(8)
$\delta(q, 1, A) \ni (q, \epsilon)$	$[qAq] \rightarrow 1$	(9)

<article>



Derivace 0011 $S \Rightarrow^{(1)} [pZ_0q] \Rightarrow^{(3)} 0[pAq] \Rightarrow^{(7)} 00[pAq][qAq] \Rightarrow^{(8)} 001[qAq] \Rightarrow^{(9)} 0011$

Shrnutí

- Zásobníkový automat PDA je ϵ–NFA automat rozšířený o zásobník, potenciálně nekonečnou paměť
  - a zásobníkovou abecedu, počáteční zásobníkový symbol, přechodová funkce čte a píše na zásobník, píše i řetězec
- Přijímání koncovým stavem a prázdným zásobníkem, pro nedeterministiké PDA přijímají stejnou třídu jazyků
- a to bezkontextové jazyky, generované bezkontextovými gramatikami.

6.6 Deterministický zásobníkový automat (DPDA)

Definice 6.11: Deterministický zásobníkový automat (DPDA)

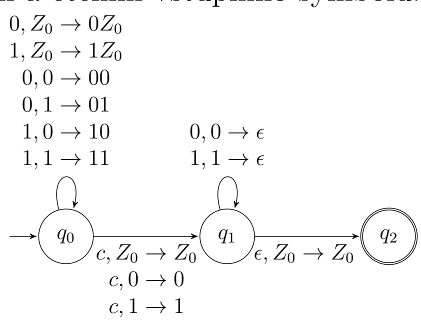
Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je **deterministický** PDA právě když platí zároveň:

- $\delta(q, a, X)$ je nejvýše jednoprvková $\forall(q, a, X) \in Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma$.
- Je–li $\delta(q, a, X)$ neprázdná pro nějaké $a \in \Sigma$, pak $\delta(q, \epsilon, X)$ musí být prázdná.

Druhá podmínka zaručuje, že nebude volba mezi ϵ přechodem a čtením vstupního symbolu.

Example 6.22 (Det. PDA pro L_{wcwr}).

- Jazyk L_{wwr} palindromů je bezkontextový, ale nemá přijímající deterministický zásobníkový automat.
- Vložením středové značky c do $L_{wcwr} = \{wcw^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$ dostaneme jazyk rozpoznatelný DPDA.



Regulární jazyky, DPDA's

$$RL \subsetneq L_{DPDA} \subsetneq L_{PDA} = CFL = N_{PDA} \supsetneq N_{DPDA}.$$

Věta 6.4: 1

Nechť L je regulární jazyk, pak $L = L(P)$ pro nějaký DPDA P.

Proof. DPDA může simulovat deterministický konečný automat a ignorovat zásobník. (nechat tam Z_0). □

Lemma. Jazyk L_{wcwr} je přijímaný DPDA ale není regulární.

Důkaz neregularity z pumping lemmatu na slovo $0^n c 0^n$.

Example 6.23. Jazyk $L_{abb} = \{a^i b^i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^{2i} | i \in \mathbb{N}\}$ je bezkontextový, ale není přijímaný žádným deterministickým zásobníkovým automatem.

Proof.
- SPOREM: Předokládejme, že existuje deterministický PDA M přijímající jazyk L_{abb}.
- Vytvořme dvě kopie, M_1 a M_2, odpovídající si uzly budeme nazývat sourozenci.
- Zkonstuujeme nový automat:
  - Počátečním stavem bude počáteční stav M_1

- koncovými stavy budou koncové stavy M_2
- přechody z koncových stavů M_1 $\delta(p, b, X) = (q, \gamma)$
  - přesměrujeme do sourozenců q v M_2 a přejmenujeme b na c
- v automatu M_2 hrany označené b přeznačíme na c.

- Výsledný automat přijímá $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ protože
  - M je deterministický, nemá jinou cestu, tj. i ve slově $a^i b^{2i}$ musel jít začátek stejně a pak číst b^i, nyní c^i,
- o $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ víme, že není bezkontextový, tj. deterministický M nemůže existovat.

□

Bezprefixové jazyky

Definice 6.12: bezprefixové jazyky

Říkáme, že jazyk $L \subset \Sigma^*$ je **bezprefixový** pokud neexistují slova $u, v \in L$ a $z \in \Sigma^+$ tak, že $u = vz$. Tj. pro žádná slova jazyka $u \neq v$ není v **prefix** u.

Example 6.24.
- Jazyk L_{wcwr} je bezprefixový.
- Jazyk $L = \{0\}^*$ není bezprefixový.

Věta 6.5: $L \in N(P_{DPDA})$ iff L bezprefixový a $L \in L(P'_{DPDA})$

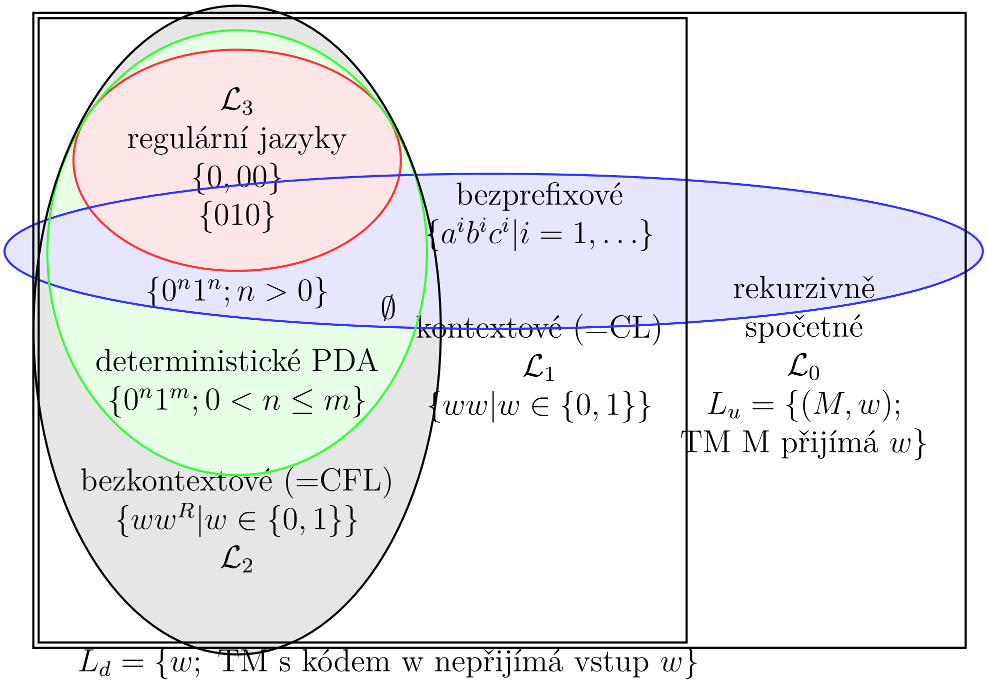
Jazyk L je $N(P)$ pro nějaký DPDA P právě když L je bezprefixový a L je $L(P')$ pro nějaký DPDA P'.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Prefix přijmeme prázdným zásobníkem, pro prázdný zásobník neexistuje instrukce, tj. žádné prodloužení není v $N(P)$.

$\Leftarrow$ Převod $P^|$ na P nepřidá nedeterminismus (první koncový -> smaž hrany z něj, přijmi).

□



6.7 Uzávěrové vlastnosti, Dykovy jazyky

Uzávěrové vlastnosti

Věta 6.6: CFL uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iteraci, reverzi

CFL jsou uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iterace ($*$), positivní iterace ($+$), zrcadlový obraz w^R.

Důkaz:

- Sjednocení:
  - pokud $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ přejmenujeme neterminály,
  - přidáme nový symbol S_{new} a pravidlo $S_{new} \to S_1 | S_2$
- zřetězení (=konkatenace) $L_1.L_2$

  $S_{new} \to S_1 S_2$ (pro $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, jinak přejmenujeme)
- iterace $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

  $S_{new} \to S S_{new} | \epsilon$
- pozitivní iterace $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

  $S_{new} \to S S_{new} | S$
- zrcadlový obraz $L^R = \{w^R | w \in L\}$

  $X \to \omega^R$ obrátíme pravou stranu pravidel.

□

Průnik bezkontextových jazyků

Example 6.25 (**!**CFL **nejsou** uzavřené na průnik). • Jazyk $L = \{0^n1^n2^n | n \geq 1\} = \{0^n1^n2^i | n, i \geq 1\} \cap \{0^i1^n2^n | n, i \geq 1\}$
není CFL, i když oba členy průniku jsou bezkontextové, dokonce deterministické bezkontextové.
$\{0^n1^n2^i | n, i \geq 1\}$ $\{S \to AC, A \to 0A1|01, C \to 2C|2\}$
$\{0^i1^n2^n | n, i \geq 1\}$ $\{S \to AB, A \to 0A|0, B \to 1B2|12\}$

- průnik není CFL z pumping lemmatu.

paralelní běh dvou zásobníkových automatů

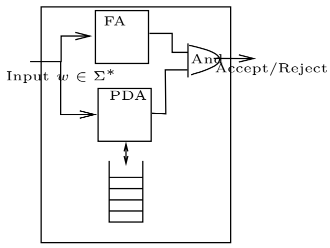
- řídící jednotky umíme spojit (viz konečné automaty)
- čtení umíme spojit (jeden automat může čekat)
- bohužel dva zásobníky nelze obecně spojit do jednoho

dva neomezené zásobníky =Turingův stroj
=rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$

6.8 Průnik bezkontextového a regulárního jazyka

Věta 6.7: CFL i DCFL jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem

- Mějme L bezkontextový jazyk a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je bezkontextový jazyk.
- Mějme L deterministický CFL a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je deterministický CFL.



Důkaz:

- zásobníkový a konečný automat můžeme spojit
  - FA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
  - PDA přijímání stavem $M_1 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- nový automat $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_1 \times F_2)$
  - $((r, s), \alpha) \in \delta((p, q), a, Z)$ právě když
    $a \neq \epsilon$: $r = \delta_1(p, a) \& (s, \alpha) \in \delta_2(q, a, Z)$ ...automaty čtou vstup
    $a = \epsilon$: $(s, \alpha) \in \delta_2(q, \epsilon, Z)$ PDA mění zásobník
    $r = p$ FA stojí
- zřejmě $L(M) = L(A_1) \cap L(M_2)$
  - paralelní běh automatů.

□

Substituce a homomorfizmus

- Opakování definice:

Opakování definice: (5.1,5.2)substituce, homomorfizmus, inverzní homomorfizmus

Mějme jazyk L nad abecedou Σ.
Substituce σ; $\forall a \in \Sigma : \sigma(a) = L_a$ jazyk abecedy Σ_a, tj. $\sigma(a) \subseteq \Sigma_a^*$
převádí slova na jazyky:

- $\sigma(\epsilon) = \{\epsilon\}$,
- $\sigma(a_1 \ldots a_n) = \sigma(a_1). \ldots .\sigma(a_n)$ (konkatenace), tj. $\sigma : \Sigma^* \to P((\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*)$
- $\sigma(L) = \bigcup_{w\in L} \sigma(w)$.

homomorfizmus h, $\forall a \in \Sigma : h(a) \in \Sigma_a^*$
převádí slova na slova

- $h(\epsilon) = \epsilon$,
- $h(a_1 \ldots a_n) = h(a_1). \ldots .h(a_n)$ (konkatenace) tj. $h : \Sigma^* \to (\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*$
- $h(L) = \{h(w) \,|w \in L\}$.

Inverzní homomorfizmus převádí slova zpět

- $h^{-1}(L) = \{w|h(w) \in L\}$.

Příklad: Substituce

Example 6.26. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, (,)\}, \{E \to E + E|(E)|a\}, E)$. Mějme substituci:

- $\sigma(a) = L(G_a)$, $G_a = (\{I\}, \{a, b, 0, 1\}, \{I \to I0|I1|Ia|Ib|a|b\}, I)$,
- $\sigma(+) = \{-, *, :, div, mod\}$,
- $\sigma(() = \{(\}$,
- $\sigma()) = \{)\}$.
- $(a + a) + a \in L(G)$
- v $\sigma(+)$ chybí + pro ukázku, že $(a + a) + a \notin \sigma(L(G))$.
- $(a001 - bba) * b1 \in \sigma((a + a) + a) \subset \sigma(L(G))$

Co se stane, když změníme definici:

- $\sigma(() = \{(, [\}$,
- $\sigma()) = \{),]\}$?

Příklad: Homomorfizmus

Example 6.27. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, [,]\}, \{E \to E + E|[E]|a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

- $h(a) = \epsilon$
- $h(+) = \epsilon,$
- $h([) = left,$
- $h(]) = right.$
- $h([a + a] + a) = leftright,$
- $h^{-1}(leftright) \ni [a + +]a.$

Example 6.28. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, [,]\}, \{E \to a + E|[E]|a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

- $h_2(a) = a$
- $h_2(+) = +,$
- $h([) = \epsilon,$
- $h(]) = \epsilon.$

1 Je jazyk $L(G)$ regulární?

2 Je jazyk $h(L(G))$ regulární?

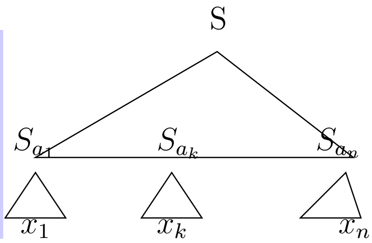
3 Je jazyk $h^{-1}(h(L(G)))$ regulární?

4 Je $h^{-1}(h(L(G))) = L(G)$?

Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

Věta 6.8: CFL jsou uzavřené na substituci

Mějme CFL jazyk L nad Σ a substituci σ na Σ takovou, že $\sigma(a)$ je CFL pro každé $a \in \Sigma$. Pak je i $\sigma(L)$ bezkontextový (CFL).



Důkaz:

- Idea: listy v derivačním stromu generují další stromy.
- Přejmenujeme neterminály na jednoznačné všude v $G = (V, \Sigma, P, S)$, $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a), a \in \Sigma$.
- Vytvoříme novou gramatiku $G = (V', T', P', S)$ pro $\sigma(L)$:
  - $V' = V \cup \bigcup_{a\in\Sigma} V_a$
  - $T' = \bigcup_{a\in\Sigma} T_a$
  - $P' = \bigcup_{a\in\Sigma} P_a \cup \{p \in P$ kde všechna $a \in \Sigma$ nahradíme $S_a\}$.

G' generuje jazyk $\sigma(L)$. □

Substituce bezkontextových jazyků

Example 6.29 (substituce).

$L = \{a^i b^j \mid 0 \le i \le j\}$	$S \to aSb \mid Sb \mid \epsilon$
$\sigma(a) = L_1 = \{c^i d^i \mid i \ge 0\}$	$S_1 \to cS_1d \mid \epsilon$
$\sigma(b) = L_2 = \{c^i \mid i \ge 0\}$	$S_2 \to cS_2 \mid \epsilon$
$\sigma(L)$:	$S \to S_1SS_2 \mid SS_2 \mid \epsilon$, $S_1 \to cS_1d \mid \epsilon$, $S_2 \to cS_2 \mid \epsilon$

Věta 6.9: homomorfismus

Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na homomorfizmus.

Důkaz:

- Přímý důsledek předchozí věty.
- Terminál a v derivačním stromě nahradím slovem $h(a)$.

□

CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfizmus

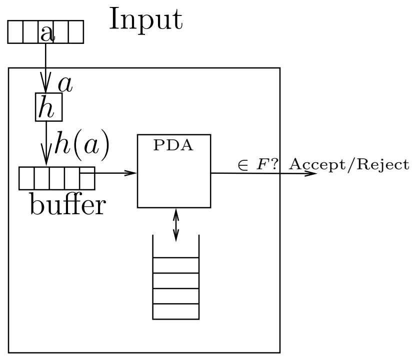
Věta 6.10: CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfizmus

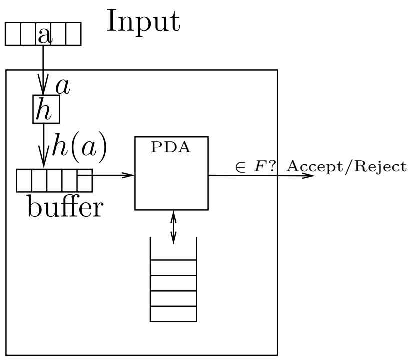
Mějme CFL jazyk L a homomorfizmus h. Pak $h^{-1}(L)$ je bezkontextový jazyk.
Je–li L deterministický CFL, je i $h^{-1}(L)$ deterministický CFL.

Idea

- přečteme písmeno a a do vnitřního bufferu dáme $h(a)$
- simulujeme výpočet M, kdy vstup bereme z bufferu
- po vyprázdnění bufferu načteme další písmeno ze vstupu
- slovo je přijato, když je buffer prázdný a M je v koncovém stavu

! buffer je konečný, můžeme ho tedy modelovat ve stavu





Důkaz:

- pro L máme PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (koncovým stavem)
- $h : T \to \Sigma^*$
- definujeme PDA $M' = (Q', T, \Gamma, \delta', [q_0, \epsilon], Z_0, F \times \{\epsilon\})$ kde

$$\begin{array}{lll} Q' = \{[q,u]\,|q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists(a \in T)\exists(v \in \Sigma^*)h(a) = vu\} & & u \text{ je buffer} \\ \delta'([q,\epsilon], a, Z) & = \{([q, h(a)], Z)\} & \text{naplňuje buffer} \\ \delta'([q,u], \epsilon, Z) & = \{([p,u], \gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q, \epsilon, Z)\} & \\ & \cup\{([p,v], \gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q, x, Z), u = xv\} & \text{čte buffer, } x \in \Sigma \end{array}$$

Pro deterministický PDA M je i M' deterministický.

□

Použití uzavřenosti průniku CFL a RL

Example 6.30. Jazyk $L = \{0^i1^j2^k3^l | i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový.

Důkaz: Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že L je bezkontextový jazyk
- $L_1 = \{01^j2^k3^l | j,k,l \geq 0\}$ je regulární jazyk
  - $\{S \to 0B, B \to 1B|C, C \to 2C|D, D \to 3D|\epsilon\}$
- $L \cap L_1 = \{01^i2^i3^i | i \geq 0\}$ není bezkontextový $\Rightarrow$ SPOR s uzavřeností na průnik s regulárním jazykem.

□

L je kontextový jazyk

$S \to \epsilon|0|0A|B_1|C_1|D_1$
$B_1 \to 1|1B_1|C_1$, $C_1 \to 2|2C_1|D_1$, $D_1 \to 3|3D_1$
$A \to 0|0A|P$
$P \to 1PCD|1CD$
$DC \to CD$ přepíšeme $\{DC \to XC, XC \to XY, XY \to CY, CY \to CD\}$
$1C \to 12$, $2C \to 22$, $2D \to 23$, $3D \to 33$.

Rozdíl a doplněk

Věta 6.11: Odečtení regulárního jazyka

Mějme bezkontextový jazyk L a regulární jazyk R. Pak:

- $L - R$ je CFL.

Proof. $L - R = L \cap \overline{R}$, $\overline{R}$ je regulární. □

Věta 6.12: CFL nejsou uzavřené na doplněk ani rozdíl

Třída bezkontextových jazyků není uzavřená na doplněk ani na rozdíl.

CFL **nejsou** *uzavřené na doplněk ani rozdíl.* Mějme bezkontextové jazyky L, L_1, L_2, regulární jazyk R. Pak:

- $\overline{L}$ nemusí být CFL. $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
- $L_1 - L_2$ nemusí být CFL. $\Sigma^* - L$ není vždy CFL.

□

- V PDA nestačí prohodit koncové a nekoncové stavy – nedeterminizmus.

Uzávěrové vlastnosti deterministických CFL

- Rozumné programovací jazyky jsou deterministické CFL.
- Deterministické bezkontextové jazyky
  - nejsou uzavřené na průnik
  - jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem

– jsou uzavřené na inverzní homomorfizmus.

Lemma. Doplněk deterministického CFL je opět deterministický CFL.

Důkaz:

- idea: prohodíme koncové a nekoncové stavy
- nedefinované kroky ošetříme 'podložkou' na zásobníku
- cyklus odhalíme pomocí čítače
- až po přečtení slova prochází koncové a nekoncové stavy

  stačí si pamatovat, zda prošel koncovým stavem.

□

Ne–uzavřenost deterministických CFL

Example 6.31 (DCFL nejsou uzavřené na sjednocení). Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | i \neq j \vee j \neq k \vee i \neq k\}$ je CFL, ale není DCFL.

Proof. Vzhledem k uzavřenosti DCFL na doplněk by byl DCFL i $\overline{L} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$, o kterém víme, že není CFL (pumping lemma) □

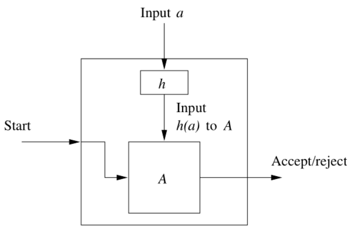
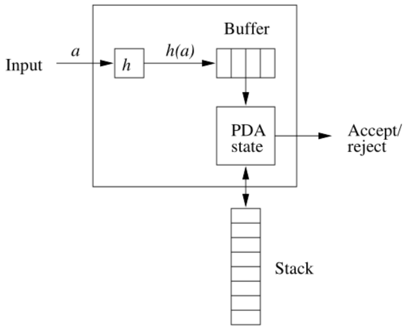
Example 6.32 (DCFL nejsou uzavřené na homomorfizmus). Jazyky $L_1 = \{a^i b^j c^k | i \neq j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k | j \neq k\}$, $L_3 = \{a^i b^j c^k | i \neq k\}$ jsou deterministické bezkontextové.

- Jazyk $0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3$ je deterministický bezkontextový
- Jazyk $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ není deterministický bezkontextový položme $h(0) = \epsilon,\ h(1) = \epsilon,,\ h(2) = \epsilon$
  $h(x) = x$ pro ostatní symboly
  - $h(0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,
  - doplněk $\overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$.

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	ANO	ANO	NE
průnik	ANO	NE	NE
∩ s RL	ANO	ANO	ANO
doplněk	ANO	NE	ANO
homomorfizmus	ANO	ANO	NE
inverzní hom.	ANO	ANO	ANO

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	$F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$	$S \to S_1 \mid S_2$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
průnik	$F = F_1 \times F_2$	$L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0^n 1^n 2^i \mid n, i \geq 1\} \\ \cap \{0^i 1^n 2^n \mid n, i \geq 1\} \end{array} \right\}$	
$\cap$ s RL	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$
doplněk	$F = Q_1 - F_1$, δ tot.	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$	$F = Q_1 - F_1$, Z_0, cykly, tot.
homom.	Kleene + RegExp + uz.	a nahraď S_a	$h(0) = h(1) = 0$ cca. $\cup$
inverzní hom.			

Dyckovy jazyky

Definice 6.13: Dyckův jazyk

Dyckův jazyk D_n je definován nad abecedou $Z_n = \{a_1, a_1^|, \ldots, a_n, a_n^|\}$ následující gramatikou: $S \to \epsilon | SS | a_1 S a_1^| | \ldots | a_n S a_n^|$.

Úvodní pozorování:

- jedná se zřejmě o jazyk bezkontextový
- Dyckův jazyk D_n popisuje správně uzávorkované výrazy s n druhy závorek
- tímto jazykem lze popisovat výpočty libovolného zásobníkového automatu

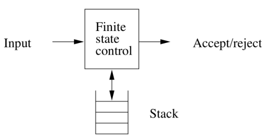
$$L = h(D \cap R)$$

R regulární jazyk; popisuje všechny kroky výpočtu

D Dyckův jazyk; vybírá pouze korektní výpočty

h homomorfizmus; čistí pomocné symboly

Jak charakterizovat bezkontextové jazyky?



- Pokud do zásobníku pouze přidáváme

  potom si stačí pamatovat poslední symbol

- stačí konečná paměť → konečný automat.

- potřebujeme ze zásobníku také odebírat (čtení symbolu)

  takový proces nelze zaznamenat v konečné struktuře

- přidávání a odebírání není zcela libovolné

  jedná se o zásobník, tj. LIFO (last in, first out) strukturu

- roztáhněme si výpočet se zásobníkem do lineární struktury

X symbol přidán do zásobníku

X^{-1} symbol odebrán do zásobníku

- přidávaný a odebíraný symbol tvoří pár $\underbrace{ZZ^{-1}}\,\underbrace{B\,\underbrace{AA^{-1}}\,\underbrace{CC^{-1}}\,B^{-1}}$

  který se v celé posloupnosti chová jako závorka

Věta 6.13: Dyckovy jazyky

Pro každý bezkontextový jazyk L existuje regulární jazyk R tak, že $L = h(D \cap R)$ pro vhodný Dyckův jazyk D a homomorfismus h.

Důkaz:

- máme PDA přijímající L prázdným zásobníkem
- převedeme na instrukce tvaru $\delta(q, a, Z) \in (p, w), |w| \leq 2$
  - delší psaní na zásobník rozdělíme zavedením nových stavů
- nechť $R^{|}$ obsahuje všechny výrazy
  - $q^{-1}aa^{-1}Z^{-1}BAp$ pro instrukci $\delta(q, a, Z) \ni (p, AB)$
  - podobně pro instrukce $\delta(q, a, Z) \in (p, A), \delta(q, a, Z) \in (p, \epsilon)$
  - je–li $a = \epsilon$, potom dvojici aa^{-1} nezařazujeme
- definujeme R takto: $Z_0 q_0 (R^{|})^* Q^{-1}$
- Dyckův jazyk je definován nad abecedou $\Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup Q \cup Q^{-1} \cup \Gamma \cup \Gamma^{-1}$
- $D \cap Z_0 q_0 (R^{|})^* Q^{-1}$ popisuje korektní výpočty $\underbrace{Z_0\,\overbrace{q_0 q_0^{-1}}\,aa^{-1}Z_0^{-1}}\,\underbrace{B\,\underbrace{A\,\overbrace{pp^{-1}}\,bb^{-1}A^{-1}}\,\overbrace{qq^{-1}}\,cc^{-1}B^{-1}}\,\overbrace{rr^{-1}}$
- homomorfismus h vydělí přečtené slovo, tj. $h(a) = a$ pro vstupní (čtené) symboly, $h(y) = \epsilon$ pro ostatní.

$\square$

7 Turingův stroj a jeho varianty

Turingův stroj se jmenuje podle Alana Turinga, který usiloval o formalizaci pojmu algoritmus. Vzorem je matematik, který píše na tabuli, může pokračovat pořád dál a dál i se vracet k přechozímu, mazat a přepisovat. Turingovým strojem lze popsat libovolný algoritmus popsaný vyšším programovacím jazykem.

7.1 Definice Turingova stroje

Definice 7.1: Turingův stroj

Turingův stroj (TM) je sedmice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ se složkami:

Q konečná množina **stavů**

Σ konečná neprázdná množina **vstupních symbolů**

Γ konečná množina všech **symbolů pro pásku**. Vždy $\Gamma \supseteq \Sigma$, $Q \cap \Gamma = \emptyset$.

δ (částečná) **přechodová funkce**. $(Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, v $\delta(q, x) = (p, Y, D)$:

- $q \in (Q - F)$**!** aktuální stav
- $X \in \Gamma$ aktuální symbol na pásce
- p nový stav, $p \in Q$.
- $Y \in \Gamma$ symbol pro zapsání do aktuální buňky, přepíše aktuální obsah.
- $D \in \{L, R\}$ je **směr** pohybu hlavy (doleva, doprava).

$q_0 \in Q$ **počáteční stav**.

$B \in \Gamma - \Sigma$. Blank. Symbol pro prázdné buňky, na začátku všude kromě konečného počtu buněk se vstupem.

$F \subseteq Q$ množina **koncových** neboli **přijímajících** stavů.

Pozn: někdy se nerozlišuje Γ a Σ a neuvádí se prázdný symbol B, tj. pětice.

Přechodový diagram pro Turingův stroj

Definice 7.2: Přechodový diagram pro TM

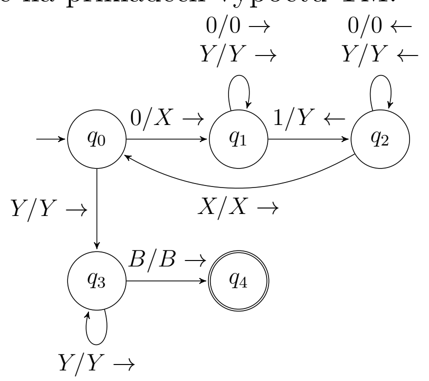
Přechodový diagram pro TM sestává z uzlů odpovídajícím stavům TM. Hrany $q \to p$ jsou označeny seznamem všech dvojic $X/Y D$, kde $\delta(q, X) = (p, Y, D)$, $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$.

Pokud neuvedeme jinak, B značí blank – prázdný symbol.

Konfigurace a jazyk TM bude definovaná dále, neformálně ji uvedeme na příkladech výpočtu TM.

Example 7.1 (Turingův stroj pro jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$).

State	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)	–
q_2	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	–
q_3	–	–	–	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	–	–	–	–	–



Example 7.2 (Výpočet nad slovem 0011).

$$\begin{aligned} q_0 0011 &\vdash X q_1 011 \vdash X 0 q_1 11 \vdash X q_2 0 Y 1 \vdash q_2 X 0 Y 1 \vdash X q_0 0 Y 1 \vdash X X q_1 Y 1 \vdash \\ &\vdash X X Y q_1 1 \vdash X X q_2 Y Y \vdash X q_2 X Y Y \vdash X X q_0 Y Y \vdash X X Y q_3 Y \vdash X X Y Y q_3 B \vdash X X Y Y B q_4 B \end{aligned}$$

Example 7.3 (Výpočet nad slovem 0010).

$$\begin{aligned} q_0 0010 &\vdash X q_1 010 \vdash X 0 q_1 10 \vdash X q_2 0 Y 0 \vdash q_2 X 0 Y 0 \vdash X q_0 0 Y 0 \vdash X X q_1 Y 0 \vdash \\ &\vdash X X Y q_1 0 \vdash X X Y 0 q_1 B \text{ a skončí neúspěchem, protože nemá instrukci.} \end{aligned}$$

Definice 7.3: Konfigurace Turingova stroje

Konfigurace Turingova stroje (Instantaneous Description ID) je řetězec $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n$ kde

- q je stav Turingova stroje
- čtecí hlava je vlevo od i–tého symbolu
- $X_1 \dots X_n$ je část pásky mezi nejlevějším a nejpravějším symbolem různým od prázdného (B). S výjimkou v případě, že je hlava na kraji – pak na tom kraji vkládáme jeden B navíc.

Definice 7.4: Krok Turingova stroje

Kroky Turingova stroje M značíme $\underset{M}{\vdash}, \underset{M}{\vdash^*}, \vdash^*$ jako u zásobníkových automatů. Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$

- $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1 X_2 \dots X_{i-1} \mathbf{Y} p X_{i+1} \dots X_n$.

  Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$

- $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1 X_2 \dots X_{i-2} p X_{i-1} \mathbf{Y} X_{i+1} \dots X_n$

Odvození v konečném počtu kroků $\underset{M}{\vdash^*}$ definuji rekurzivně pro $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ konfigurace Základ: $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{I}$ Rekurze: Pokud $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash} \mathcal{J}$ a $\mathcal{J} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{K}$, tak i $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{K}$.

Definice 7.5: TM přijímá jazyk, rekurzivně spočetný jazyk

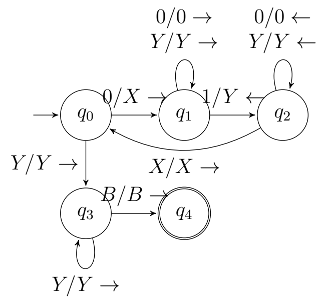
Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ **přijímá jazyk** $L(M) = \{w \in \Sigma^* : q_0 w \underset{M}{\vdash^*} \alpha p \beta, p \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$, tj. množinu slov, po jejichž přečtení se dostane do koncového stavu. Pásku (u nás) nemusí uklízet.

Jazyk nazveme **rekurzivně spočetným**, pokud je přijímán nějakým Turingovým strojem T (tj. $L = L(T)$).

Example 7.4 (TM z příkladu 7.1 přijímá jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$).

Na pásce vždy výraz typu $\mathbf{X}^*\mathbf{0}^*\mathbf{Y}^*\mathbf{1}^*$

- postupně přepisujeme 0 na X a odpovídající 1 na Y
- q_0 přepíše 0 na X a předá řízení q_1
- q_1 najde první 1, přepíše na Y a předá řízení q_2
- q_2 se vrátí k X, nechá ho být a předá řízení q_0
- ...
- pokud q_0 vidí Y, předá řízení q_3
- q_3 dojde zkontrolovat, jestli na konci nezbyly 1
- pokud q_3 našlo B, předá řízení q_4
- q_4 skončí úspěchem (je přijímající)
- ...
- pokud q_3 narazilo na 1, tak skončí neúspěchem
  - nemá instrukci
  - není přijímající.



Example 7.5 (Modifikace konečného automatu na TM).
Jazyk $L = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
přijímá Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$ s δ v tabulce:

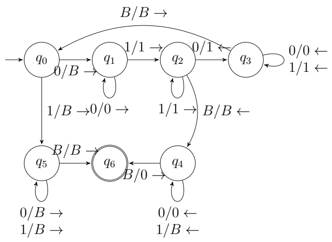
δ	komentář
$\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$	prázdné slovo, konec výpočtu
$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$	zvětší čítač ($2k+1$ symbolů)
$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$	nuluje čítač ($2k$ symbolů).

- Turingův stroj pro regulární jazyk:
  - simuluje konečný automat, pohyb hlavy vždy vpravo,
  - vidí-li B, tj. konec vstupu. Pokud je stav DFA přijímající, přejde do nového přijímajícího stavu q_F.
  - (Z q_F nesmí být instrukce, z přijímajících stavů DFA potřebuje rozlišit B a jiné znaky.)
- Bezkontextové jazyky: nejsnáze s pomocnou páskou simulující zásobník, bude za chvíli.

Example 7.6 (TM s výstupem). Turingův stoj počítající **monus** $m \dot{-} n = max(m-n, 0)$.

- $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_6\})$
- Počáteční páska $0^m 1 0^n$.
- M zastaví s páskou $0^{m \dot{-} n}$ obklopenou prázdnem B.

- Najdi nejlevější 0, přepiš na B.
- Jdi doprava a najdi 1; pokračuj, najdi 0 a přepiš na 1.
- Vrať se doleva.
- Pokud nenajdeš 0 (ukliď):
  - vpravo: přepiš všechny 1 na B.
  - vlevo: $m < n$: přepiš všechny 1 a 0 na B, nech pásku prázdnou.



7.2 Rekurzivní jazyky

Definice 7.6: TM zastaví

TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu q, s čteným symbolem X, a není instrukce pro tuto konfiguraci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Předpokládáme, že v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

Paralela:

- Místo 'zastavit a nepřijmout' můžeme spustit nekonečnou smyčku výpočtu.
- Pak otázka **náležení slova do jazyka** odpovídá otázce **zastavení Turingova stroje**

Definice 7.7: Rekurzivní jazyky

Říkáme, že TM M **rozhoduje jazyk** L, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad w zastaví. Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

7.3 Různé modifikace TM a simulační triky

7.3.1 Více stop na jedné pásce

Na pásce si můžeme myšlenkově psát dva či více řádků pod sebou; jeden znak je pak dvojice znaků. V následujícím příkladu jsou dvojice psané vedle sebe, i když na pásce je spíše píšeme pod sebe, aby bylo zřejmé, že jsou napsané na jednom políčku pásky.

Example 7.7 (Příklad paměti ve stavu TM). Pro jazyk $L(M) = (01^* + 10^*)$ si pamatujeme první znak, stav je dvojice (obecně n–tice). $M = (\{q_0, q_1\} \times \{0, 1, B\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, [q_0, B], B, \{[q_1, B]\})$

δ	0	1	B
$\rightarrow [q_0, B]$	$([q_1, 0], 0, R)$	$([q_1, 1], 1, R)$	
$[q_1, 0]$		$([q_1, 0], 1, R)$	$([q_1, B], B, R)$
$[q_1, 1]$	$([q_1, 1], 0, R)$		$([q_1, B], B, R)$
$*[q_1, B]$			

Example 7.8 (Příprava pomocné stopy). Budeme potřebovat dvě stopy na pásce. Přepíšeme vstup na dvojice, nahoře budeme mít volno na poznámky. V definici δ používám zástupný znak pro vstupní písmeno $a \in \{0, 1\}$.

- $\delta([q_0, B], a) = ([q_0, B], [B, a], R)$
- $\delta([q_0, B], B) = ([q_{-1}, B], [B, B], L)$ jsem na konci, otáčím
- $\delta([q_{-1}, B], [B, a]) = ([q_{-1}, B], [B, a], L)$ jdi vlevo
- $\delta([q_{-1}, B], B) = ([q_1, B], B, R)$ dvě stopy připraveny pro další práci.

Více stop na pásce využívá následující příklad

Example 7.9 (TM pro jazyk $L_{wcw} = \{wcw | w \in \{0,1\}^+\}$).

- $M = (\{q_1, \dots, q_9\} \times \{0, 1, B\}, \{[B, 0], [B, 1], [B, c]\}, \{B, *\} \times \{0, 1, B, c\}, \delta, [q_1, B], [B, B], \{[q_9, B]\})$
- δ je definováno ($a, b \in \{0, 1\}$):
  - $\delta([q_1, B], [B, a]) = ([q_2, a], [*, a], R)$ načti symbol a
  - $\delta([q_2, a], [B, b]) = ([q_2, a], [B, b], R)$ jdi vpravo, hledej střed c,
  - $\delta([q_2, a], [B, c]) = ([q_3, a], [B, c], R)$ pokračuj vpravo ve stavu q_3,
  - $\delta([q_3, a], [*, b]) = ([q_3, a], [*, b], R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_3, a], [B, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$ zkontroluj shodu, vymaž paměť a jdi vlevo,
  - $\delta([q_4, B], [*, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_4, B], [B, c]) = ([q_5, B], [B, c], L)$ c pokračuj za střed ve stavu q_5,
- rozeskok podle toho, jestli je ještě co kontrolovat
  - $\delta([q_5, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$ ještě budeme kontolovat,
  - $\delta([q_6, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_6, B], [*, a]) = ([q_1, B], [*, a], R)$ znovu začni,
  - $\delta([q_5, B], [*, a]) = ([q_7, B], [*, a], R)$ už vše vlevo od c porovnáno, jdi vpravo,
  - $\delta([q_7, B], [B, c]) = ([q_8, B], [B, c], R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8, B], [*, a]) = ([q_8, B], [*, a], R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8, B], [B, B]) = ([q_9, B], [B, B], R)$ přijmi.

7.3.2 Vícepáskový Turingův stroj

Definice 7.8: Vícepáskový Turingův stroj

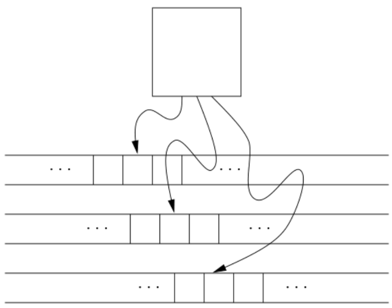
Počáteční pozice

- vstup na první pásce, ostatní zcela prázdné
- první hlava vlevo od vstupu, ostatní libovolně
- hlava v počátečním stavu

Jeden krok vícepáskového TM

- hlava přejde do nového stavu
- na každé pásce napíšeme nový symbol
- každá hlava se nezávisle posune vlevo, zůstane, vpravo.

Vícepáskový TM



Více stop na pásce je pouze naší volbou znaků. Naproti tomu vícepáskový TM má pro každou pásku vlastní hlavu, proto si simulace jednopáskovým TM žádá vlastní větu (a složitost $O(n^2)$ pro n kroků.

Věta 7.1: Vícepáskový TM

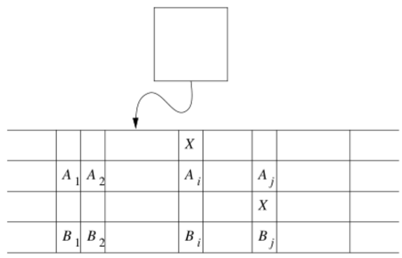
Každý jazyk přijímaný vícepáskovým TM je přijímaný i nějakým (jednopáskovým) Turingovým strojem TM.

Důkaz: vícepáskový TM

- konstruujeme Turingův stroj M
- pásku si představíme, že má $2k$ stop
  - liché stopy: pozice k–té hlavy
  - sudé stopy: znak na k–té pásce
- pro simulaci jednoho kroku navštívíme všechny hlavy
- ve stavu si pamatujeme
  - počet hlav vlevo
  - $\forall k$ symbol pod k–tou hlavou
- pak už umíme provést jeden krok (znovu běhat)

$\square$

Simulace 2–páskového TM na jedné pásce



- Simulaci výpočtu k–páskového stroje o n krocích lze provést v čase $O(n^2)$ (simulace jednoho kroku z prvních n trvá $4n + 2k$, hlavy nejvýš $2n$ daleko, přečíst, zapsat, posunout značky).

7.3.3 Nedeterministické Turingovy stroje

Definice 7.9: Nedeterministický TM

Nedeterministickým Turingovým strojem nazýváme sedmici $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, B, F$ jsou jako u TM a $\delta : (Q - F) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$.

Slovo $w \in \Sigma^*$ **je přijímáno nedeterministickým TM** M, pokud existuje nějaký výpočet $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$, $p \in F$.

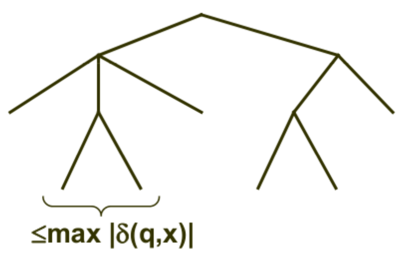
Věta 7.2: Nedeterministický TM

Pro každý M_N nedeterministický TM existuje deterministický TM M_D takový, že $L(M_N) = L(M_D)$.

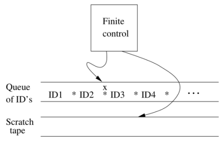
Velmi stručně (příprava)

prohledáváme do šířky možné výpočty M_N

- odvozeno v k krocích
- maximálně m^k konfigurací
  - kde $m = max|\delta(q, x)|$ je max. počet voleb M_N



Důkaz: idea důkazu

- páska nekonečná – nelze použít podmnožinovou konstrukci
- prohledáváme do šířky všechny výpočty M_N
- modelujeme TM se dvěma páskami 

  - první páska: posloupnost konfigurací
    * aktuální označena (křížkem na obrázku)
    * vlevo už prozkoumané, můžeme zapomenout
    * vpravo aktuální a pak další čekající
  - druhá páska: pomocný výpočet
- zpracování jedné konfigurace obnáší
  - přečti stav a symbol aktuální konfigurace ID
  - je–li stav přijímající $\in F$, přijmi a skonči
  - napiš konfiguraci ID na pomocnou pásku
  - pro každý možný krok δ (uložený v hlavě M_D)
    * proveď krok a napiš novou ID na konec první pásky
  - vrať se k označené ID, značku vymaž a posuň o 1 doprava
  - opakuj

□

7.3.4 Jednosměrná páska, ne-psaní B

Věta 7.3: Jednosměrná páska

Pro každý Turingův stroj M_2 existuje Turing. stroj M_1, který přijímá stejný jazyk a

- M_1 nikdy nepíše blank B,
- M_1 nikdy nejde vlevo od počáteční pozice.

X_0	X_1	X_2	...
*	X_{-1}	X_{-2}	...

Důkaz:

- Místo B blank zavedeme nový páskový symbol, B_1.
  - Místo každého psaní B píšeme B_1 a všechny instrukce pro čtení B zkopírujeme též pro čtení B_1.
  - Takto modifikovaný TM nikdy nepíše B (píše B_1).
- Pro jednosměrnou pásku
  - Nejdřív přepíšeme vstup, aby byl v horní stopě dvoustopé pásky.
  - Pod nejlevější symbol dáme nový znak $*$, abychom věděli, že jsme na levém okraji, a máme přepnout z horní stopy do dolní. Ve stavu ('hlavě') si pamatujeme, jestli čteme horní stopu ('normálně') nebo spodní stopu (kde L znamená doprava a R doleva). Pokud vidíme $*$, odpovídající instrukce přepíšeme na změnu stopy (zhora vlevo přepnu na dolů, pokud jsem dole přešla na "*", mám rovnou číst horní symbol a směrovat dle horní pásky).

□

Shrnutí

- **Turingův stroj**: nekonečná oboustranná páska, může číst, psát, pohybovat hlavou.
- **Přijímání TM**: TM přijímá pokud vstoupí do koncového stavu. TM s výstupem: Hlava na prvním písmenu odpovědi, kromě odpovědi B.
- **Rekurzivně spočetné jazyky (RE)**: jazyky přijímané nějakým Turingovým strojem.
- **Konfigurace TM**: Všechny symboly pásky mezi nejlevějším a nejpravějším ne–B. Stav a pozice hlavy hned vlevo od právě čteného symbolu.
- modelovací triky
  - **Paměť v řídící jednotce**
  - **Více stop**
- Rozšíření TM bez rozšíření třídy přijímaných jazyků:
  - **Vícepáskové TM** Samostatný pohyb hlav na páskách (lze simulovat na přidaných stopách).
  - **Nedeterministický TM**: Má instrukce na výběr, na přijetí stačí jeden přijímající výpočet.
  - TM s **Jednostrannou páskou nikdy nepíšící** B se bude hodit v dalších kapitolách. Dokáže simulovat libovolný TM.
- Už se neučí: **Lineárně omezené automaty LBA**
  - Turingovy stroje, kde je vstupní slovo mezi levou a pravou značkou, hlava nesmí za tyto značky ani je přepsat.

8 Univerzální TM, Diagonální jazyk

8.1 Rekurzivní jazyky

Definice 8.1: TM zastaví

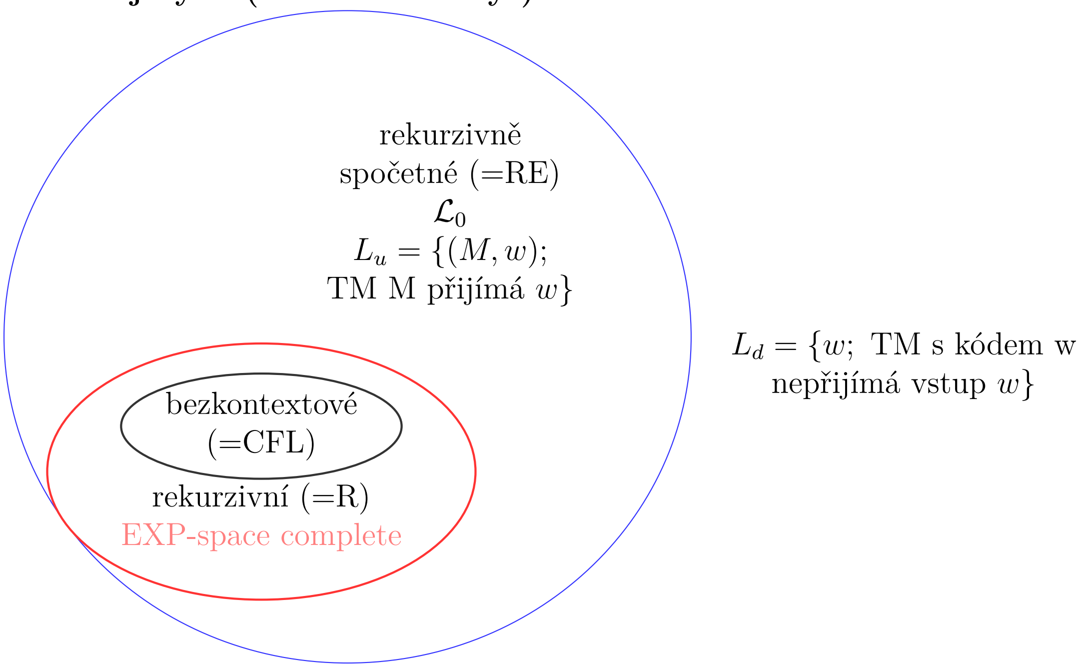
TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu q, s čteným symbolem X, a není instrukce pro tuto konfiguraci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Z definice, v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

Definice 8.2: Rekurzivní jazyky

Říkáme, že TM M **rozhoduje jazyk** L, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad w zastaví.
Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

Hierarchie jazyků (kontextové a výš)



8.2 Diagonální jazyk

Směřujeme k důkazu nerozhodnutelnosti jazyka dvojic (M, w) takových, že:

- M je binárně kódovaný Turingův stroj s abecedou $\{0, 1\}$,
- $w = M \in \{0, 1\}^*$ a
- M nepřijímá vstup w.

Postup:

- Kódování TM binárním kódem pro libovolný počet stavů TM.
- Kód TM vezmeme TM jako binární řetězec.
- Pokud kód nedává smysl, reprezentuje TM bez transakcí. Tedy každý kód reprezentuje nějaký TM.
- **Diagonální jazyk** L_d; $L_d = \{w;$ TM reprezentovaný jako w takový, že **nepřijímá** $w\}$.
- Neexistuje TM přijímající jazyk L_d. Spuštění takového stroje na vlastním kódu by vedlo k paradoxu.

Jazyk L_d není rekurzivně spočetný. Proto $\overline{L_d}$ není rekurzivní. Lze dokázat, že $\overline{L_d}$ je rekurzivně spočetný.

8.2.1 Kódování Turingova stroje

- Pro kódování TM $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_1, B, \{q_2\})$ očíslujeme stavy, symboly a směry L, R.
- Předpokládejme:
  - Počáteční stav je vždy q_1.
  - Stav q_2 je vždy jediný koncový stav (nepotřebujeme víc, TM zastaví).
  - První symbol je vždy 0, druhý 1, třetí B, prázdný symbol. Ostatní symboly pásky očíslujeme libovolně.
  - Směr L je 1, směr R je 2.
- Jeden krok $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ kódujeme: $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. Všechna $i, j, k, l, m \geq 1$ takže se dvě jedničky za sebou nevyskytují.
- Celý TM se skládá z kódů všech přechodů v nějakém pořadí oddělených dvojicemi jedniček 11: $C_1 11 C_2 11 \dots C_{n-1} 11 C_n$.

Example 8.1 (TM a jeho kódování).

$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$

δ	0	1	B
$\rightarrow q_1$		$(q_3, 0, R)$	
$*q_2$			
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	$(q_3, 1, L)$.

- Kód pro transakce:

C_1	C_2	C_3	C_4
0100100010100	0001010100100	00010010010100	0001000100010010

- Kód celého TM: 01001000101001100010101001001100010010010100110001000100010010.

8.2.2 Uspořádání řetězců nul a jedniček

- Řetězce bereme uspořádané podle délky, stejně dlouhé uspořádáme lexikograficky.
- První je ϵ, druhý 0, třetí 1, čtvrtý 00 atd.
- i–tý řetězec označujeme w_i.

8.2.3 Diagonální jazyk

Definice 8.3: Diagonální jazyk

Diagonální jazyk L_d je definovaný

$$L_d = \{w \in \{0,1\}^*; \text{TM reprezentovaný jako } w \text{ který nepřijímá slovo } w\}.$$

Máme uspořádané řetězce $\{0,1\}^*$. Vytvoříme tabulku s řetězci jako indexy řádků a jako indexy sloupců. Index řádku odpovídá kódu TM, index sloupce vstupnímu slovu w. V tabulce uvedeme 1, pokud TM v řádku přijímá stup ve sloupci; jinak uvedeme 0. Na diagonále tedy bude odpověď na otázku: "Přijímá TM v řádku svůj vlastní kód?"

Do jazyka L_d z definice patří takové TM (řádky), které mají na diagonále nulu.

i - kód TM
j - vstup w
1/0 - přijímá/nepřijímá

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
4 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Diagonal

$L_d = \{w; \text{na diagonále je } 0\}$.

Věta 8.1: L_d není RE

[L_d není rekurzivně spočetný jazyk, tj. neexistuje TM přijímající L_d.

Důkaz: L_d není RE.

- Předpokládejme L_d je RE, $L_d = L(M_d)$ pro nějaký TM M_d.
- Jeho jazyk je $\{0,1\}$, tedy je v seznamu na obrázku: 'Přijímá TM M_i vstupní slovo w_j?'
- Alespoň jeden řetězec ho kóduje, řekněme $code(M_d) = w_d$.
- Je $w_d \in L_d$
  - Pokud 'ano', na diagonále má být 0, tj. $w_d \notin L(M_d) = L_d$, spor.
  - Pokud 'ne', na diagonále má být 1, $w_d \in L(M_d) = L_d$, spor.

Proto takový M_d neexistuje. Tedy L_d není rekurzivně spočetný.

□

8.3 Univerzální Turingův stroj, Univerzální jazyk

Definice 8.4: Univerzální jazyk

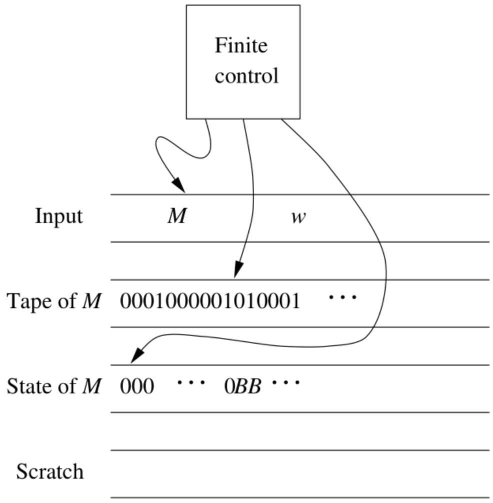
Definujeme **univerzální jazyk** L_u jakožto množinu binárních řetězců které kódují pár (M, w), kde M je TM a $w \in L(M)$, tj. M přijímá slovo w.

$$L_u = \{(M, w) \mid M \text{ je TM a } w \in L(M)\ \}$$

TM přijímající L_u se nazývá **Univerzální Turingův stroj**.

Věta 8.2: Existence Univerzálního Turingova stroje

Existuje Turingův stroj U, pro který $L_u = L(U)$.



Popíšeme U jako vícepáskový Turingův stroj.

- Přechody M jsou napsány na první pásce spolu s řetězcem w.
- Na druhé pásce simulujeme výpočet M, používající formát jako kód M, tj. symboly 0^i oddělené jedničkou 1.
- Třetí páska obsahuje stav M reprezentovaný i nulami.

Operace U jsou následující:

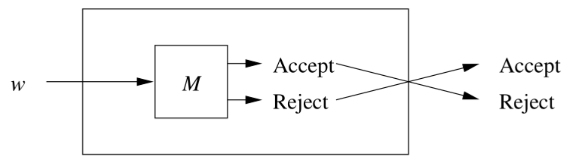
- Otestuj, zda je kód M legitimní; pokud ne, U zastav bez přijetí.
- Inicializuj druhou pásku kódovaným slovem w: 10 pro 0 ve w, 100 pro 1; blank jsou nechané prázdné a nahrazeny 1000 pouze 'v případě potřeby'.
- Napiš 0, počáteční stav M, na třetí pásku. Posuň hlavu druhé pásky na první simulované políčko.
- Simuluj jednotlivé přechody M
  - Najdi na první pásce správnou transakci $0^i10^j10^k10^l10^m$, 0^i na pásce 3, 0^j na pásce 2.
  - Změň obsah pásky 3 na 0^k.
  - Nahraď 0^j na 2. pásce řetězcem 0^l. Použij čtvrtou 'scratch tape' pro správné mezery.
  - Posuň hlavu 2. pásky na pozici vedle 1 vlevo nebo vpravo, podle pohybu m.
- Pokud jsme nenašli instrukci pro M, zastavíme.
- Pokud M přejde do přijímajícího stavu, pak U také přijme. □

Tedy máme TM přijímající $L_u = \{(M, w) \mid w \in L(M)\}$.

8.4 Postova věta

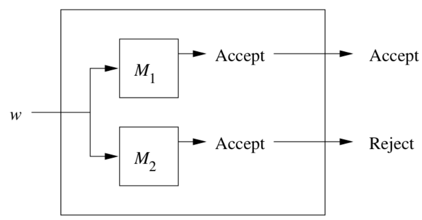
Chtěli bychom dokázat, že L_u není rekurzivní. K tomu se nám bude hodit Postova věta, která má i daleko širší uplatnění.

Lemma. Je–li L rekurzivní jazyk, je rekurzivní i $\bar{L}$.



Věta 8.3: Postova věta

Jazyk L je rekurzivní, právě když L i $\overline{L}$ (doplněk) jsou rekurzivně spočetné.



Důkaz: Postova věta

$\Rightarrow$ Vezmeme TM M pro L, který vždy zastaví a vydá odpověď (existuje, protože L je rekurzivní). Pro test náležení do $\bar{L}$ předložíme vstup M, počkáme na odpověď a odpovíme opak.

$\Leftarrow$ – Máme TM $L = L(M_1)$ a $\overline{L} = L(M_2)$.

- pro dané slovo w naráz simulujeme M_1 i M_2 (dvě pásky, stav se dvěma komponentami).
- Pokud jeden z M_i přijme, M zastaví a odpoví.
- Jazyky jsou komplementární, jeden z M_i vždy zastaví, L je rekurzivní.

□

8.5 Nerozhodnutelnost Univerzálního jazyka

Věta 8.4: Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka

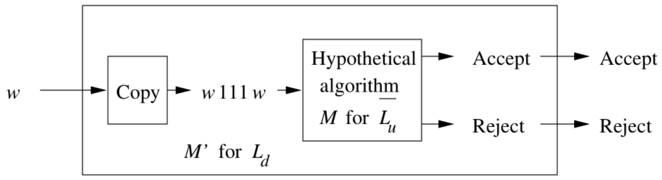
L_u je rekurzivně spočetný, ale není rekurzivní.

Důkaz: Nerozhodnutelnost L_u

- Máme TM přijímající L_u, tj. je RE.
- Předpokládejme, že je L_u rekurzivní.
- Pak $\overline{L_u}$ by byl také rekurzivní.
- Pro TM přijímající $\overline{L_u}$ můžeme zkonstruovat TM přijímající L_d (vpravo).
- Protože víme, že L_d není RE, $\overline{L_u}$ není RE a L_u není rekurzivní.

□

Modifikace TM pro $\overline{L_u}$ na TM pro L_d:



- Řetězec w přepiš na $w111w$ (2–páskový, převeď na 1–páskový).
- Simuluj M na novém vstupu. Přijmi iff M přijme.
- Stroj M' přijímá $\overline{L_u}(w, w)$, tj. případy kdy M_i nepřijímá w_i, tj. jazyk L_d.

8.6 Obecné gramatiky a Turingův stoj

Věta 8.5: Rekurzivně spočetné jsou $\mathcal{L}_0$

Každý rekurzivně spočetný jazyk je typu 0.

Důkaz: Od Turingova stroje ke gramatice

pro Turingův stroj T najdeme gramatiku G, $L(T) = L(G)$

- $G = (\{S, C, D, E\} \cup \{\underline{X}\}_{x \in \Sigma \cup \Gamma} \cup \{Q_i\}_{q_i \in Q}, \Sigma, P, S)$, P je:
- gramatika nejdříve vygeneruje pásku stroje a kopii slova

  $wB^n\underline{W}^R Q_0 B^m$, kde B^i představují volný prostor pro výpočet
- potom simuluje výpočet (stavy jsou součástí slova)
- v koncovém stavu smažeme pásku, necháme pouze kopii slova

1)	$S \to DQ_0E$	
	$D \to xD\underline{X}\vert E$	generuje slovo a jeho revizní kopii pro výpočet
	$E \to BE\vert\epsilon$	generuje volný prostor pro výpočet
2)	$\underline{X}P \to Q\underline{X'}$	pro $\delta(p, x) = (q, x', R)$
	$\underline{X}P\underline{Y} \to \underline{X'}\underline{Y}Q$	pro $\delta(p, x) = (q, x', L)$
3)	$P \to C$	pro $p \in F$
	$C\underline{A} \to C$,$\underline{A}C \to C$	mazání pásky
	$C \to \epsilon$	konec výpočtu

□

Example 8.2 (Gramatika z TM). Mějme turingův stroj pro jazyk $L = \{a^{2n} | n \geq 0\}$,

TM $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_F\}, \{a\}, \{a\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$ s δ v tabulce:

δ	komentář
$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$	první symbol
$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$	nuluje čítač ($2k$ symbolů)
$\delta(q_0, B) = (q_F, B, L)$	přijme a zastaví

Pro tento TM zkonstruujeme gramatiku $G = (\{S, C, D, E, Q_0, Q_1, Q_F, \underline{a}\}, \{a\}, S, P_1 \cup P_2 \cup P_3)$,
Inicializace

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & DQ_0E \\ D & \to & aD\underline{a}|E \\ E & \to & BE|\epsilon \end{array} \right\}$$

Přechodová funkce

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{a}Q_0 & \to & Q_1\underline{a} \\ \underline{a}Q_1 & \to & Q_0\underline{a} \\ BQ_0\underline{a} & \to & B\underline{a}Q_F \end{array} \right\}$$

Mazání

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} Q_F & \to & C \\ C\underline{a} & \to & C \\ \underline{a}C & \to & C \\ BC & \to & C \\ C & \to & \epsilon \end{array} \right\}.$$

Konkrétně pro $aa \in L(M)$ vygeneruji $aaB\underline{a}\underline{a}Q_0$, mezivýsledek $aaB\underline{a}Q_F\underline{a}$ a výsledek aa.

Potřebujeme ověřit, zda $L(T) = L(G)$?

- $w \in L(T)$
  - existuje konečný výpočet stroje T (konečný prostor)
  - gramatika vygeneruje dostatečně velký prostor pro výpočet

- simuluje výpočet a smaže dvojníky.

- $w \in L(G)$
  - pravidla v derivaci nemusí být v pořadí, jakém chceme
  - derivaci můžeme přeuspořádat tak, že pořadí je 1),2),3).
  - podtržené symboly smazány, tj. vygenerován koncový stav.

Example 8.3 (Gramatika pro TM). Mějme Turingův stroj
$M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$
$\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$
$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$
$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$

Gramatika po zjednodušení
$G = (\{S, C, D, E, \underline{a}, Q_0, Q_1\}, \{a\}, P, S)$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \to DQ_0 \\ D \to aD\underline{a}|B \\ BQ_0 \to C \\ \underline{a}Q_0 \to Q_1\underline{a} \\ \underline{a}Q_1 \to Q_0\underline{a} \\ C\underline{a} \to C \\ C \to \epsilon \end{array} \right\}.$$

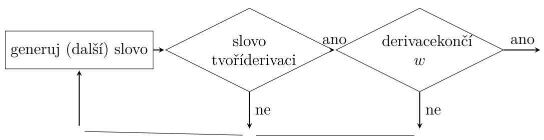
Věta 8.6: $\mathcal{L}_0$ jsou rekurzivně spočetné.

Každý jazyk generovaný gramatikou typu 0 je rekurzivně spočetný.

Důkaz: Každý jazyk generovaný obecnou gramatikou je rekurzivně spočentý.

idea: TM postupně generuje všechny derivace

- derivaci $S \Rightarrow \omega_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega_n = w$ kódujeme jako slovo $\#S\#\omega_1\#\ldots\#w\#$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\alpha\#\beta\#$, kde $\alpha \Rightarrow \beta$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\omega_1\#\ldots\#\omega_k\#$, kde $\omega_1 \Rightarrow^* \omega_k$
- umíme udělat TM postupně generující všechna slova.



□

9 Nerozhodnutelné problémy, Postův korespondenční p.

9.1 Rozhodnutelné problémy

Definice 9.1: Rozhodnutelný problém

- **Problémem** P myslíme matematicky/informaticky definovanou množinu otázek kódovatelnou řetězci nad abecedou Σ s odpověďmi $\in \{ano, ne\}$.

. Pokud problém definuji jakožto množinu, jde o otázku, zda vstup kóduje prvek dané množiny (např. polynom s celočíselným kořenem).

- **Problém je (algoritmicky) rozhodnutelný**, pokud existuje Turingův stroj TM takový, že pro každý vstup $w \in P$ zastaví a navíc přijme právě když $P(w) = ano$ (tj. pro $P(w) = ne$ zastaví v ne–přijímacím stavu).

- Problém který není algoritmicky rozhodnutelný nazýváme **nerozhodnutelný problém**.

'Rozhodnutelný' mluví o problémech, 'rekurzivní' o jazycích, jinak jde o 'totéž'.

Example 9.1 ('Problémy').

(d1) Obsahuje vstupní slovo pět nul?

(d2) Je vstupní slovo korektně definovaným kódem Turingova stroje v kódování jako dříve?

(n1) Zastaví TM kódu M nad slovem w?

(n2) Zastaví TM kódu w nad slovem w?

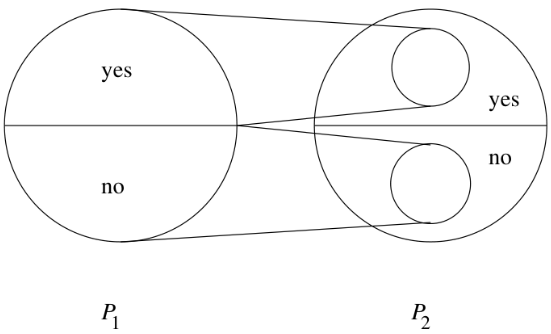
9.2 Redukce problémů (zatím bez časové složitosti)

Pojem redukce budeme zavádět dvakrtát. Tady nás nezajímá složitost, stačí, že je rekurzivní, tedy že se vždy dočkáme výsledného převodu.

Definice 9.2: Redukce

Redukcí problému P_1 na P_2, nazýváme algoritmus R, který pro každou instanci $w \in P_1$ zastaví a vydá $R(w) \in P_2$ tak, že

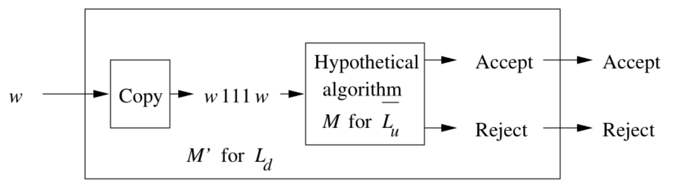
- $P_1(w) = ano$ právě když $P_2(R(w)) = ano$
- tj. i $P_1(w) = ne$ právě když $P_2(R(w)) = ne$.



Pozn: Příště 'převoditelnost v polynomiálním čase'. Redukce='převoditelnost'.

Example 9.2 (Redukce L_d na $\overline{L_u}$.).

Redukce TM pro L_d na TM pro $\overline{L_u}$:

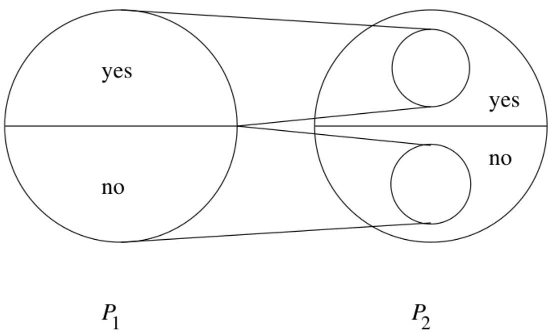


- P_1 = Nepřijímá TM reprezentovaný w vstupní slovo w?
- P_2 = Nepřijímá TM reprezentovaný M vstupní slovo w?

Věta 9.1: Důkaz (ne)rozhodnutelnosti redukcí

Pokud existuje redukce problému P_1 na P_2, pak:

- Pokud P_1 je nerozhodnutelný, pak je nerozhodnutelný i P_2.
- Pokud P_1 není rekurzivně spočetný, pak není RE ani P_2.



Proof.

- Předpokládejme P_1 je nerozhodnutelný. Je–li možné rozhodnout P_2, pak můžeme zkombinovat redukci P_1 na P_2 s algoritmem rozhodujícím P_2 pro konstrukci algoritmu rozhodujícího P_1. Proto je P_2 nerozhodnutelný.
- Předpokládejme P_1 ne–RE, ale P_2 je RE. Podobně jako výše zkombinujeme redukci a výsledek P_2 k důkazu P_1 je RE; SPOR.

□

9.3 Problém zastavení

Definice 9.3: Problém zastavení

Instancí problému zastavení je dvojice řetězců $M, w \in \{0,1\}^*$.
Problém zastavení je najít alogritmus $Halt(M, w)$, který vydá 1 právě když stroj M zastaví na vstupu w, jinak vydá 0.

Věta 9.2: Problém zastavení

Problém zastavení není rozhodnutelný.

Proof.

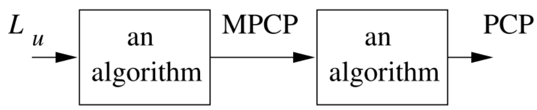
- Redukujeme L_d na $Halt$.
- Předpokládejme, že máme algoritmus (Turingův stroj) který pro každý vstup odpoví ano/ne pro probém $Halt()$.
- Modifikujeme ho na stroj $Halt_{no}(w)$; $w \in \{0,1\}^*$:
  - Pokud $Halt(w, w)$, spustíme nekonečný cyklus
  - jinak zastavíme.
- Otázka $Halt(Halt_{no}, Halt_{no})$ není řešitelná, proto algoritmus $Halt()$ nemůže existovat.

□

9.4 Postův korespondenční problém

Směřujeme k nerozhodnutelným problémům o bezkontextových gramatikách.

- Ne-rozhodnutelnost univerzálního jazyka
- redukujeme na modifikovaný PCP (MPCP)
- což redukujeme na PCP



- což redukujeme na otázku $L(G_1) = L(G_2)$ pro dvě bezkontextové gramatiky
  - a další podobné otázky.

Definice 9.4: Postův korespondenční problém

Instance **Postova korespondenčního problému (PCP)** jsou dva seznamy slov nad abecedou Σ značené $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$ stejné délky k. Pro každé i, dvojice (w_i, x_i) se nazývá **odpovídající** dvojice.

Instance PCP **má řešení**, pokud existuje posloupnost jednoho či více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ tj. dostaneme stejné slovo. V tom případě říkáme, že posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_m$ **je řešení**.

Postův korespondenční problém je: Pro danou instanci PCP, rozhodněte, zda má řešení.

Example 9.3.

	Seznam A	Seznam B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- $\Sigma = \{0, 1\}$, seznamy A,B v tabulce.
- Řešení $2, 1, 1, 3$ vytvoří slovo 101111110.
- Jiné řešení: 2,1,1,3,2,1,1,3.

Definice 9.5: Částečné řešení

Částečným řešením nazýváme posloupnost indexů $i_1, i_2, \ldots, i_r$ taková že jeden z řetězců $w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_r}$ a $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ je prefix druhého (i v případě, že řetězce nejsou totožné).

Lemma. Je–li posloupnost čísel řešením, pak je každý prefix částečným řešením.

Example 9.4.

Pro $\Sigma = \{0, 1\}$ neexistuje řešení PCP pro seznamy:

	List A	List B
i	w_i	x_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011.

Zdůvodnění:

- $i_1 = 1$, jinak by první symbol neodpovídal.
- Máme částečné řešení:
  A: $10\cdots$
  B: $101\cdots$

- $i_2 = 1$, řetězce $\begin{matrix}1010\\101101\end{matrix}$ nesouhlasí na 4.pozici.
- $i_2 = 2$, $\begin{matrix}10011\\10111\end{matrix}$ nesouhlasí na 3.pozici.
- Je možné jen $i_2 = 3$.

A: $10101\cdots$
B: $101011\cdots$

- Jsme ve stejné pozici jako po volbě $i_1 = 1$.
- Nelze dostat oba řetězce na stejnou délku.

Definice 9.6: Modifikovaný Postův korespondenční probém MPCP

Mějme PCP, tj. seznamy $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$. Hledáme seznam 0 nebo více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $\mathbf{w_1}, w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_m} = \mathbf{x_1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. V tom případě říkáme, že PCP **má iniciální řešení**. **Modifikovaný Postův korespondenční problém**: má PCP iniciální řešení?

Example 9.5. Tento PCP nemá iniciální řešení.

	seznam A	seznam B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

Důkaz:

- Částečné instance $\frac{1}{111}, \frac{11}{111111}$ se nikdy nesrovnají na stejnou délku.
- Jiné volby vedou k různým písmenům abecedy.

□

I když ne každý PCP problém má iniciální řešení, dokážeme dotaz na iniciální řešení redukovat na $R(w)$ dotaz na libovolné řešení PCP.

Věta 9.3: MPCP na PCP

Existuje redukce R taková, že $w \in MPCP$ má iniciální řešení, právě když má $R(w)$ řešení.

Example 9.6 (MPCP redukce na PCP.).

	List A	List B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

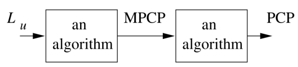
	List C	List D
i	y_i	z_i
0	*1*	*1*1*1
1	1*	*1*1*1
2	1*0*1*1*1*	*1*0
3	1*0*	*0
4	$	*$

Algoritmus 9.1: Převod MPCP na PCP

- Vezměme nové symboly $*, \$ \notin \Sigma$.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ definujeme y_i rozšířením w_i s $*$ za každým písmenem w_i.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ def. z_i rozšířením x_i s $*$ **před** každým písmenem x_i.
- $y_0 = *y_1$, $z_0 = z_1$.
- $y_{k+1} = \$$, $z_{k+1} = *\$$.
- $i_1, i_2, \ldots, i_m$ je iniciální řešení, iff $0, i_1, i_2, \ldots, i_m, (k+1)$ je řešení PCP.

9.5 Nerozhodnutelnost PCP

- Chceme dokázat, že PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.
- Redukovali jsme MPCP na PCP (minulý slajd)
- a redukujeme L_u na MPCP.



Algoritmus 9.2: Redukce L_u na MPCP

Konstruujeme MPCP pro TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který nikdy nepíše B a nejde hlavou doleva od počáteční pozice. Nechť $w \in \Sigma^*$ je vstupní slovo.

seznam A	seznam B	
$\#$	$\#q_0w\#$	
X	X	$\forall\ X \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qX	Yp	pro $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
ZqX	pZY	pro $\delta(q, X) = (p, Y, L)$, $Z \in \Gamma$ symbol pásky
$q\#$	$Yp\#$	pro $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
$Zq\#$	$pZY\#$	pro $\delta(q, B) = (p, Y, L)$, $Z \in \Gamma$ symbol pásky
XqY	q	$q \in F$, přijímající stav
Xq	q	$q \in F$
qY	q	$q \in F$
$q\#\#$	$\#$	$q \in F$.

Example 9.7. Konvertujme TM $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_3\})$

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$	$\delta(q_i, B)$
q_1	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$
q_2	$(q_3, 0, L)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 0, R)$
q_3	–	–	–

a vstupní slovo $w = 01$ na instanci MPCP.

MPCP simulace TM dle algoritmu 9.2

seznam A	seznam B	zdroj
$q_1 0$	$1q_2$	z $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$
$0q_1 1$	$q_2 00$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$1q_1 1$	$q_2 10$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$0q_1\#$	$q_2 01\#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$1q_1\#$	$q_2 11\#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$0q_2 0$	$q_3 00$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$1q_2 0$	$q_3 10$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$q_2 1$	$0q_1$	z $\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$
$q_2\#$	$0q_2\#$	z $\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$

seznam A	seznam B
$\#$	$\#q_1 01\#$
0	0
1	1
$\#$	$\#$
$0q_3 0$	q_3
$0q_3 1$	q_3
$1q_3 0$	q_3
$1q_3 1$	q_3
$0q_3$	q_3
$1q_3$	q_3
$q_3 0$	q_3
$q_3 1$	q_3
$q_3\#\#$	$\#$

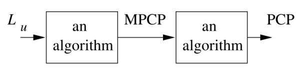
- M přijímá posloupností $q_1 01 \vdash 1q_2 1 \vdash 10q_1 \vdash 1q_2 01 \vdash q_3 101$.

$A:\quad \#q_1 01\#1q_2 1\#10q_1\#1q_2 01\#q_3 101\#q_3 01\#q_3 1\#q_3\#\#$
$B:\quad \#q_1 01\#1q_2 1\#10q_1\#1q_2 01\#q_3 101\#q_3 01\#q_3 1\#q_3\#\#$

PCP je algoritmicky nerozhodnutelný

Věta 9.4: PCP je algoritmicky nerozhodnutelný

Postův korespondenční problém PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.

Proof. 

Předchozí algoritmus redukuje L_u na MPCP. Chceme dokázat:

- M přijímá w právě když zkonstruovaný PCP má iniciální řešení.

$\Rightarrow$ Pokud $w \in L(M)$, začneme iniciálním párem a simulujeme výpočet M na w.

$\Leftarrow$ Máme–li iniciální řešení PCP, odpovídá přijímajícímu výpočtu M nad w.

  - MPCP musí začít první dvojicí.
  - Dokud $q \notin F$, mazací pravidla se nepoužijí.
  - Pokud $q \notin F$, částečné řešení je tvaru: $\begin{array}{l}\text{A:}x\\ \text{B:}xy\end{array}$, t.j. B je delší než A
  - tedy musel skončit v přijímajícím stavu.

□

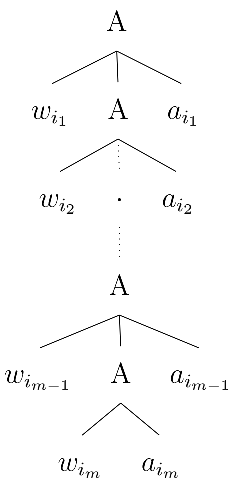
9.6 Rozhodnutelné a nerozhodnutelné otázky o bezkonextových gramatikách

Pro bezkontextové jazyky je algoritmicky rozhodnutelné

- zda dané slovo patří či nepatří do jazyka
  - prázdné slovo zvlášť
  - převést do ChNF a otestovat všechny derivace s $2|w| - 1$ pravidly,
- zda je jazyk prázdný
  - algoritmus redukce gramatiky (ne–nenerujících a nedosažitelných), zjistíme, zda lze z S generovat terminální slovo.

Věta 9.5: Nerozhodnutelnost víceznačnosti bezkontextové gramatiky

Je algoritmicky nerozhodnutelné, zda je bezkontextová gramatika víceznačná (tj. existuje slovo jazyka gramatiky, které má dva různé derivační stomy).



Redukujeme PKP na náš problém.
Mějme instanci PCP ($A = w_1, w_2, \ldots, w_k, B = x_1, x_2, \ldots, x_k$), množinu indexů $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$ a tři gramatiky G_A, G_B, G_{AB}:

$$\begin{array}{lll}
G_A & A \rightarrow & w_1Aa_1|w_2Aa_2|\ldots|w_kAa_k| \\
 & & w_1a_1|w_2a_2|\ldots|w_ka_k \\
G_B & B \rightarrow & x_1Ba_1|x_2Ba_2|\ldots|x_kBa_k| \\
 & & x_1a_1|x_2a_2|\ldots|x_ka_k \\
G_{AB} & \{S \rightarrow & A|B\} \cup G_A \cup G_B.
\end{array}$$

Gramatika G_{AB} je víceznačná právě když instance (A, B) PCP má řešení.

- Každé slovo v G_A má jednoznačnou derivaci (danou a_i vpravo). Podobně pro B.

Věta 9.6: Další nerozhodnutelné problémy o bezkontextových gramatikách

Mějme G_1, G_2 bezkontextové gramatiky, R regulární výraz. Následující problémy jsou algoritmicky nerozhodnutelné:

1 Je $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2 Je $L(G_1) = T^*$ pro nějakou abecedu T?

3 Je $L(G_1) = L(G_2)$?

4 Je $L(G_1) = L(R)$?

5 Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

6 Je $L(R) \subseteq L(G_1)$?

Důkaz: 1 $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Převedeme PKP na (1)

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů
  $$\begin{array}{lll} G_1 & A \to & w_1Aa_1|w_2Aa_2|\ldots|w_kAa_k| \\ & & w_1a_1|w_2a_2|\ldots|w_ka_k \\ G_2 & B \to & x_1Ba_1|x_2Ba_2|\ldots|x_kBa_k| \\ & & x_1a_1|x_2a_2|\ldots|x_ka_k \end{array}$$
- PKP má řešení právě když $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
- první část se musí rovnat, druhá (a_i) zajišťuje stejné pořadí.

□

Důkaz: 2 $L(G) = T^*$

Převedeme PKP na (2):

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů
  $$\begin{array}{lll} G_1 & A \to & w_1Aa_1|w_2Aa_2|\ldots|w_kAa_k| \\ & & w_1a_1|w_2a_2|\ldots|w_ka_k \\ G_2 & B \to & x_1Ba_1|x_2Ba_2|\ldots|x_kBa_k| \\ & & x_1a_1|x_2a_2|\ldots|x_ka_k \end{array}$$
- jazyky $L(G_1), L(G_2)$ jsou deterministické,
- tedy $\overline{L(G_1)}, \overline{L(G_2)}$ jsou deterministické CFL a $\overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$ je CFL
- máme CFG G gramatiku s $L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$
- PKP má řešení $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)} \neq \Sigma^*$.

□

- Poznámka: $L(G) = \emptyset$ je algoritmicky rozhodnutelné.
- CFL nejsou uzavřené na doplněk, pouze deterministické CFL ano.

Důkaz: 3-6

Zbylé algoritmicky nerozhodnutelné problémy.

3 Je $L(G_1) = L(G_2)$?

– Důkaz: ať G_1 generuje Σ^*.

4 Je $L(G_1) = L(R)$?

– Důkaz: za R zvolíme Σ^*.

5 Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

– Důkaz: ať G_1 generuje Σ^*.

6 Je $L(R) \subseteq L(G_1)$?

– Důkaz: za R zvolíme Σ^*.

□

- Poznámka: $L(G) \subseteq L(R)$ je algoritmicky rozhodnutelné

  $L(G) \subseteq L(R) \Leftrightarrow L(G) \cap \overline{L(R)} = \emptyset$ a zároveň $(L(G) \cap \overline{L(R)})$ je CFL (uzavřenost operací)

10 Časová složitost

Definice 10.1: časová složitost

Mějme Turingův stroj M, který zastaví na každém vstupu. **Časová složitost** M je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet kroků výpočtu M nad vstupy délky n.

Definice 10.2: (Asymptotická) horní hranice $O(g(n))$

Mějme funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Říkáme, že $f(n) \in O(g(n))$, pokud existují $c, n_0 \in \mathbb{N}^+$ taková, že:

$$\forall n \geq n_0 \text{ platí } f(n) \leq c \cdot g(n).$$

V takovém případě říkáme, že $g(n)$ je (asymptotická) **horní hranice** pro $f(n)$. (Slovo asymptotická vyjadřující ignorování prvních n_0 i konstanty c se zpravidla vynechává.)

- Reálná čísla jsou tam kvůli logaritmu.
- Např. $f(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) \in O(n^3)$ s $n_0 = 10$, $c = 6$.

Definice 10.3: třída časové složitosti

Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme **třídu časové složitosti** $TIME(t(n))$ jakožto množinu všech jazyků, které jsou rozhodnutelné jednopáskový Turingovým strojem v čase $O(t(n))$ tj. vždy zastaví, pro vstup délky n nejpozději po $O(t(n))$ krocích, a vydá správnou odpověď.

Example 10.1 ($\{0^i1^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n^2)$). Jazyk $\{0^i1^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n^2)$

1. Zkontroluj vstup 0^i1^j, pokud za 1 je 0, nepřijmi (čas $O(n)$)
2. návrat na začátek se schová v konstantě, $O(2n) = O(n)$
3. procházej postupně 0 v čase $O(n^2)$
   (a) přepiš 0 na X
   (b) najdi 1 a přepiš na X
   (c) vrať se na začátek
4. Když už není 0, ověř že není ani 1 a přijmi (s 1 nepřijmi). (čas $O(n)$)

Jde to rychleji?

Example 10.2 ($\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n \log n)$). Jazyk $\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n \log n)$

1. Zkontroluj vstup 0^i1^j, zkontroluj sudou délku (čas $O(n)$)
2. procházej dokud najdeš 0 v čase ($O(n \log n)$)
   (a) přepiš každou druhou 0 na X
   (b) přepiš každou druhou 1 na X
   (c) zkontroluj sudost počtu nul a jedniček dohromady, pokud ne, nepřijmi.
   (d) a vrať se na začátek
3. Když zbývá poslední 0, ověř zbývá právě jedna 1 a přijmi (jinak nepřijmi). (čas $O(n)$)

Regulární jazyky - jen pro zajímavost

- O moc rychleji to nejde.

Opakování definice: $o()$

Mějme funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Říkáme, že $f(n) = o(g(n))$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Tj. pro každé $c > 0$ existuje n_0 takové, že $(\forall n > n_0)$ $(f(n) < cg(n))$.

- Malé o má význam 'ostře menší', velké O menší nebo rovno.

Theorem (just for info)**.** *Každý jazyk rozhodnutelný v čase $o(n \log n)$ na jednopáskovém Turingově stroji je regulární.*

10.1 Třídy P, NP jazyků rozhodnutelných v polynom. čase, verifikátory

Polynomiální problémy P

Definice 10.4: třída P

Definujeme P ($PTIME$) **třídu jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase** jednopáskovým deterministickým Turingovým strojem. Tedy:

$$P = \bigcup_k TIME(n^k).$$

Věta 10.1: $CFL \subseteq P$

Každý bezkontextový jazyk patří to P.

Proof.

- Gramatiku převedeme do ChNF (velikost nezávisí na n),
- CYK algorithmus je polynomiální ($O(n^3)$).

□

Příklady problémů třídy P, NP

Example 10.3 (Nalezení cesty v grafu (s minimální cenou) $\in P$).

- Cesta v grafu $PATH$
  - Dijkstrův algoritmus $O(|V|^2 + |E|)$

Example 10.4 (Jsou x, y nesoudělná? $\in P$).

- Nesoudělná čísla $RELPRIME$
  - Repeat until $y = 0$
  - $x \leftarrow x \mod y$
  - exchange x and y
  - Return x.

Example 10.5 ($HAMPATH \in NP$ (viz později)). Hamiltonovská cesta je taková (orientovaná) cesta, která obsahuje každý vrchol grafu právě jednou.

Kdybychom tu cestu měli, umíme ověřit v polynomiálním čase. Cesta = certifikát.

Verifikátory, třída NP

Definice 10.5: Verifikátor

- **Verifikátor** jazyka L je algoritmus V, kde:

$$L = \{w \mid V \text{ pro nějaký řetězec } c \text{ přijímá } \langle w, c\rangle\}.$$

- Nápověda c pro snadné ověření se nazývá **certifikát**.
- Časová složitost verifikátoru se měří pouze vzhledem k délce w, **polynomiální verifikátor** rozhoduje v čase polynomiálním vzhledem k $|w|$.
- Jazyk L je **polynomiálně verifikovatelný**, pokud má polynomiální verifikátor. Pak i certifikát vždy existuje i polynomiální, delší by verifikátor nestihl ani přečíst.

Definice 10.6: NP

Třída jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase NP je tvořena jazyky s polynomiálním verifikátorem.

Hamiltonovská cesta

Example 10.6.

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle | G \text{ je orientovaný graf s hamiltonovskou cestou z } s \text{ do } t\}.$$

Hamiltonovská cesta je taková (orientovaná) cesta, která obsahuje každý vrchol grafu právě jednou.

- Složitost u grafů bereme vůči počtu uzlů, počet hran je max. kvadratický, tj. polynomiální.
- Náš certifikát je posloupnost vrcholů cesty.
- Algoritmus v polynomiálním čase ověří, že jde o hamiltonovskou cestu.
- Pro $\overline{HAMPATH}$, neznáme verifikátor (jen umíme ověřit v exponenciálním čase).

  ($\overline{HAMPATH}$ je množina (neplatných vstupů $HAMPATH$ a) orientovaných grafů s dvojicí vrcholů s,t, pro které neexistuje hamiltonovská cesta z s do t.)

Třídy $NTIME$

Definice 10.7: NP

Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme třídu

$$NTIME(t(n)) = \{L \mid L \text{ jazyk rozhodnutelný nedeterminist. TM v čase } O(t(n)).\}$$

Opakování definice: definice

Třída jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase (značíme NP) je tvořena jazyky s polynomiálním verifikátorem.

Věta 10.2: Vztah $NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k).$$

- Idea důkazu: převedeme verifikátor na NTM a opačně.
- NTM uhodne certifikát a simuluje verifikátor.
- Verifikátor bere přijímající větev NTM jakožto certifikát.

Důkaz: verif. $\Rightarrow \bigcup$

- Předpokládáme $L \in NP$.
- Hledáme nedeterministický TM M.
- Vezmeme verifikátor V z definice NP. Nechť rozhoduje L v čase n^k.
- M na vstupu w délky n:
  - Nedeterministicky uhodne řetězec c délky nanejvýš n^k.
  - Spustí V na vstupu $\langle w, c \rangle$.
  - Pokud V přijme, M také přijme.

□

Důkaz: $\bigcup \Rightarrow$ verifikátor

- Předpokládáme $L = L(M)$ rozhodnutelný nějakým NTM M v polynomiálním čase.
- Hledáme verifikátor V.
- Certifikát c nám v každém kroku řekne, kterou z možných akcí/větví volit.
- V na vstupu $\langle w, c \rangle$:
  - Simuluje M na vstupu w, v bodech větvení vybere větev podle c.
  - Pokud tato větev NTM přijme, V přijme.
- Pokud všechny větve selhaly, NTM nepřijímá.

□

Example 10.7 ($CLIQUE$ je NP). Problém k-kliky $CLIQUE$ je v daném grafu G určit, jestli existuje klika velikosti k, tj.

$$CLIQUE = \{\langle G, k \rangle | G \text{ je neorientovaný graf s klikou velikosti } k\}.$$

Verifikátor pro $CLIQUE$

```
procedure CLIQUE_VERIFIER( ⟨⟨G, k⟩, c⟩ )
    Otestuj, jestli c je podgraf G o k uzlech.
    Otestuj, jestli je c klika, tj. úplný podgraf, má všechny hrany.
    return Oba předchozí testy TRUE?
end procedure
```

Nedeterministický Turingův stroj pro $CLIQUE$

```
procedure CLIQUE_NTM( ⟨G, k⟩ )
    Nedeterministicky vyber k prvkovou podmnožinu c vrcholů G.
    return Je c klika? tj. úplný podgraf, má všechny hrany.
end procedure
```

Převoditelnost v polynomiálním čase

Definice 10.8: Polynomiální převoditelnost

Funkci $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ nazveme **polynomiálně vyčíslitelnou**, pokud existuje Turingův stroj M, který pro každý vstup w v polynomiálním čase zastaví s $f(w)$ na pásce.

Jazyk A je **převoditelný v polynomiálním čase** na jazyk B, $A \leq_P B$, pokud existuje funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ vyčíslitelná v polynomiálním čase a pro každé $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

Funkci f pak nazýváme **polynomiální redukcí A do B**.

Definice 10.9: SAT, 3SAT

Formuli ϕ nazveme **3-cnf formule**, pokud je formule výrokové logiky v CNF, kde v každé klauzuli jsou nejvýše tři literály.

Formule **je splnitelná**, pokud existuje takové ohodnocení výrokových proměnných, že je hodnota formule TRUE.

Problém **3SAT** je pro každou 3-cnf formuli rozhodnout, zda je splnitelná, tj.

$$3SAT = \{\phi \mid \phi \text{ je splnitelná 3-cnf formule}\}.$$

Problém **SAT** je pro každou booleovskou formuli v rozhodnout, zda je splnitelná

$$SAT = \{\phi \mid \phi \text{ je splnitelná formule}\}.$$

Věta 10.3: 1

$3SAT$ je polynomiálně převoditelný na $CLIQUE$.

Proof.

- Každý výskyt proměnné - uzel grafu.
- Hrany všude, jen ne:
  - mezi uzly z téže klauzule
  - mezi proměnnou a její negací x a $\neg x$.
  - k počet klauzulí, počet vrcholů v klice.

□

10.2 NP úplnost

Definice 10.10: NP úplnost

Jazyk B je **NP úplný**, pokud je NP a každý jazyk $A \in NP$ je na B polynomiálně převeditelný.

Věta 10.4: 1

Pokud B je NP-úplný a $B \in P$, pak $P = NP$.

Proof. Přímý důsledek definice polynomiální převoditelnosti a NP. □

Věta 10.5: 1

Pokud B je NP-úplný a $B \leq_P C$ pro nějaké $C \in NP$, pak C je NP-úplný.

Proof. Převod problému na B dále převedeme na C, stačí polynomiální čas. $\square$

10.3 Cook-Levin-ova věta

Věta 10.6: Cook-Levin-ova věta

SAT je NP-úplný.

- idea důkazu úplnosti: převedeme výpočet nedetrministického Turingova stroje na SAT.

- SAT is NP
  - Nedeterministický TM uhodne správné ohodnocení a v polynomiálním čase ověří, je je pro něj formule pravdivá.
- SAT je NP-úplný
  - Vezmeme libovolný $L \in NP$
  - nechť M je nedeterministický TM který rozhoduje jazyk L v čase $n^k - 3$ pro nějaké k
  - (zde pro jednoduchost NTM s jednostrannou páskou)
  - Vytvoříme tabulku (tableau) $n^k \times n^k$, každý řádek odpovídá konfiguraci M na vstupu w
  - můžeme předpokládat (opatřit) každou konfiguraci ohraničenou zarážkami #.

#	q_0	w_1	w_2	$\dots$	w_n	$\_$	$\_$	$\dots$	#
#									#
# {#}	$\vdots$ $\vdots$								# {#}
#									#

  - Výpočet budeme skládat po okýnkách 2×3.

Algoritmus 10.1: 2×3 okénka pro korektní výpočet

- Vybraná dovolená okénka, $(a, b, c, d \in \Gamma)$

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, L)$

a	q_1	b
q_2	a	c

přenos beze změny

#	a	b
#	a	b

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, R)$

a	q_1	b
a	c	q_2

$\delta(\_, \_) \ni (q_2, \_, L)$

a	b	c
a	b	q_2

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, R)$

d	a	q_1
d	a	c

$\delta(\_, \_) \ni (\_, c, L)$

a	b	d
c	b	d

- Přenos beze změny všude, kde není v okolí stav (hlava)
- přenos beze změny pokud stav je přijímající
- na každém řádku nejvýše jeden stav
- okénko musí být částí povoleného přechodu
- rozbor technický, udělali za nás jiní.
- **Tvrzení:** Pokud je první řádek tabulky počáteční konfigurace a každé okénko je legální, pak každý řádek odpovídá legální konfiguraci dosažitelné jedním krokem z předchozího řádku.
  - V horním řádku není stav, pak se prostřední symbol musí opsat beze změny.
  - V horním řádku stav vprostřed: okénko garantuje korektnost přepisu obou stran.

Algoritmus 10.2: Formule k převodu TM na SAT

- Z tabulky vytvoříme formuli $\phi = \phi_{cell} \,\&\, \phi_{start} \,\&\, \phi_{move} \,\&\, \phi_{accept}$.
- pro každé políčko tabulky (i, j) a písmeno $a \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ vytvoříme výrokovou proměnnou $x_{i,j,a}$

$$\phi_{cell} = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{a \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}} x_{i,j,a} \right) \,\&\, \bigwedge_{s \ne t \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}}) \right] \quad \#\text{právě jedno } a$$

$$\phi_{start} = x_{1,1,\#} \& x_{1,2,q_0} \& x_{1,3,w_1} \& x_{1,4,w_2} \& \dots \& x_{1,n+2,w_n} \& x_{1,n+3,\_} \& \dots \& x_{1,n^k,\#}$$

$\phi_{accept} = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{accept}}$

- Celková formule ϕ_{move} bude konjunkce, že každé okénko s horním středem na pozici i, j je legální

$$\phi_{move} = \bigwedge_{1 \le i < n^k, 1 < j < n^k} \phi_{i,j} \qquad \#\text{ okénko } (i, j) \text{ je legální}$$

- legálnost okénka (i, j) zajistíme disjunkcí legálních okének

$$\phi_{i,j} = \bigvee_{(a_1, \dots, a_6) \in LEGAL} (x_{i,j-1,a_1} \& x_{i,j,a_2} \& x_{i,j+1,a_3} \& x_{i+1,j-1,a_4} \& x_{i+1,j,a_5} \& x_{i+1,j+1,a_6})$$

- **Tvrzení:** Převod má polynomiální složitost, konkrétně $O(n^{2k} \log n)$.

  - $\phi_{cell} \in O(n^{2k} \log n)$, procházíme dvojice indexů do n krát konstanta $|\Gamma|$ indexující buňku
  - $\phi_{start} \in O(n^k \log n)$, procházíme první řádek
  - $\phi_{move}, \phi_{accept} \in O(n^{2k} \log n)$,
    * počet buněk n^{2k}, pro každou konstantní velikost formule.

- $\log n$ se objeví, pokud počítáme i délku pro zápis indexu proměnných, jehož délka závisí na n.

$3SAT$ **je** NP**-úplný.**

Věta 10.7: 1

$3SAT$ je NP-úplný.

Proof.

- Upravíme předchozí převod na formuli $3SAT$.
- V CNF je skoro vše, kromě disjunkce okének pohybu, která jsou konjunkcí,
  - převedeme do CNF
  - stačí polynomiální (konstantní) čas - velikost podformule závisí jen na stroji N, nikoli na délce vstupu
- v krátkých klauzulích zkopírujeme proměnnou
- dlouhé rozdělíme zavedením nových proměnných.

□

Shrnutí

- Definice časové složistosti
- asymptotické složitosti $O()$
- třída P polynomiálně složitých problémů
- třída NP zavedená přes verifikátory
- třída NP odpovídá jazykům rozhodovaným turingovými stroji v polynomiálním čase
  - všechny větve výpočtu zastaví v polynomiálním čase.
- polynomiální převoditelnost
- NP-úplnost
- SAT je NP-úplný.

11 co-NP, Prostorová složitost

Definice 11.1: co-NP

Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ patří do třídy **co-NP** právě když jeho doplněk $\Sigma^* - L$ patří do NP.

- P je částí NP i co-NP.
- Domníváme se, že NP-úplné problémy nejsou v co-NP.
  - pokud $P = NP$, tak jsou.

Definice 11.2: tautologičnost

Problém, zda je daná DNF formule výrokové logiky tautologie, nazýváme **tautologičnost TAUT**.

Věta 11.1: TAUT je co-NP

Problém tautologičnosti TAUT je co-NP.

- Důkaz z pozorování, že doplněk TAUT (do množiny korektních formulí VL) je snadno převoditelný na SAT a SAT je v NP.
- Doplněk SAT je otázka, jestli negace dané formule je tautologie.
- Doplněk SAT je co-NP.
- SAT rozhoduje všechny formule, tedy i jejich negace.

NP ∩ co-NP (nezkouší se)

Example 11.1 (Dělitel menší než). Mějme dvě přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Existuje d dělitel m který je $1 < d \leq n$?

Lemma. Problém existence dělitele m menšího než n je NP i co-NP.

NP Dělitel je certifikátem, vydělíme a zkontrolujeme nulový zbytek v polynomiálním čase, tj. poblém je NP.

co-NP Za certifikát vezmeme seznam prvočíselných dělitelů (faktorů) m větších než n. Vynásobením ověříme rovnost m, AKS (Agrawal–Kayal–Saxena) testem ověříme prvočíselnost dělitelů v polynomiálním čase.

Prostorová složitost

- Podobně jako časovou složitost měříme prostor potřebný k výpočtu.

Definice 11.3: prostorová složitost

- Pro deterministický Turingův stroj M, který zastaví na každém vstupu, je **prostorová složitost** M funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet buněk pásky, které M přečte při jakémkoli vstupu délky n.
- Pro nedeterministický Turingův stroj M, který všechy větve výpočtu zastaví na každém vstupu, je **prostorová složitost** M je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet buněk pásky, které M přečte při jakémkoli vstupu délky n na libovolné větvi výpočtu.

- V takovém případě říkáme, že jazyk $L(M)$ je **rozhodnutelný strojem M v prostoru $f(n)$**.

- Pro logaritmickou složitost musíme modifikovat výpočetní model:
- vstupní páska je pouze na čtení
- pracovní páska na psaní i čtení, na ní měříme prostorovou složitost.

11.1 Třídy prostorové složitosti

Definice 11.4: třídy prostorové složitosti

Mějme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme **třídy prostorové složitosti** $SPACE(f(n))$ a $NSPACE(f(n))$:

- $SPACE(f(n)) = \{L \mid L$ je jazyk rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$ deterministickým TM$\}$,
- $NSPACE(f(n)) = \{L \mid L$ je jazyk rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$ nedeterministickým TM$\}$.

Přijímá NFA vše?

Example 11.2 (Přijímá NFA vše?). Mějme nedeterministický konečný automat NFA. Přijímá všechny řetězce?

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ je } NFA \text{ a } L(A) = \Sigma^*\}.$$

- Označme q počet stavů A. Pokud A nepřijímá nějaký řetězec, musí nepřijímat i nějaký délky nanejvýš 2^q
  - Po přečtení písmene si pamatujeme, v jakých stavech se A může nacházet.
  - pokud se nachází ve stejné podmnožině stavů, v jaké už byl, můžeme 'smyčku' mezi těmito stavy vynechat.
  - počet možných podmnožin stavů A je 2^q.
  - Potřebujeme prostor pro pamatování *ano*/*ne* každého stavu, jestli je dosažitelný aktuálním slovem, a čítač cyklu do 2^q - stačí lineární prostor ($q \le n$, stavy jsou na vstupu).
    - protože čísla zapisujeme v binárním tvaru
  - nedeterministicky ověříme každý řetězec do 2^q délky; pokud při nějakém není *ano* pro žádný z přijímajících stavů, máme svědka $L(A) \neq \Sigma^*$.

Směřujeme k: ALL_{NFA} je $coNSPACE(n)$, $SPACE(n^2)$, tedy i $PSPACE$.

11.2 Savitch-ova věta

Věta 11.2: Savitch-ova věta

Pro libovolnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, pro kterou $f(n) \ge n$ platí:

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

- Kdybychom simulovali NTM přímo:
  - musíme si pamatovat aktuální větev výpočtu
  - větev s $f(n)$ prostorem může běžet $2^{O(f(n))}$ kroků, v každém z nich může mít nedeterministickou volbu.
  - potřebovali bychom $2^{O(f(n))}$ prostor si volby pamatovat.

– Máme dovoleno jen $O(f^2(n)) < 2^{O(f(n))}$ (asymptoticky).

Důkaz Savitch-ovy věta přes $CANYIELD(c_1, c_2, t)$. V kvadratickém čase vyřešíme **problém dosažitelnosti (yieldability)**

- Pro dvě dané konfigurace NTM c_1, c_2 a číslo $t \in \mathbb{N}$,
- Je v NTM z konfigurace c_1 dosažitelná konfigurace c_2 v maximálně t krocích a maximálně používající $f(n)$ prostor?
- Pak c_1 počáteční konfigurace, c_2 přijímající, t maximální počet kroků NTM.

□

Mějme nedeterministický NTM NTM.

dosažitelnost konfigurací NTM

```
procedure CANYIELD( ⟨NTM, c_1, c_2, t⟩ )
    if  t = 1 then
        return c_1 = c_2 nebo dosažitelné NTM v jednom kroku?
    end if
    if t > 1 then
        for každou konfiguraci c_m stroje NTM na prostoru f(n) do
            prvni ← CANYEALD(c_1, c_m, t/2)
            druha ← CANYEALD(c_m, c_2, t/2)
            if (prvni & druha) = TRUE  then
                return Accept
            end if
        end for
        if pokud dosud nepřijato  then
            return Reject
        end if
    end if
end procedure
```

TM M simulující NTM N v kvadratickém prostoru

- Mějme nedeterministický NTM N.
- Modifikujeme ho, aby před přijetím smazal pásku a posunul se na nejlevější políčko (při jednostranné pásce).
- Všechny přijímající stavy sloučíme do jednoho, pak stejně víc nedělá.
- Tím je přijímající konfigurace c_{accept} jednoznačná.
- Najdeme d maximální počet štěpení konfigurace v jednom kroku, tj. horní odhad pro počet konfigurací $2^{d \cdot f(n)}$ (kde $n = |w|$).
- Tím je $2^{d \cdot f(n)}$ i horní odhad času běhu libovolné větve N.

Savitch_Simulace

```
procedure SAVITCH_SIMULACE( ⟨w⟩ )
    return CANYIELD(c_start, c_accept, 2^(d·f(n)))
end procedure
```

Proof. Složitost simulace

- CANYIELD potřebuje ukládat konfigurace a t, tj. $O(f(n))$ prostoru.
- Počet volání CANYIELD je logaritmický vzhledem k $t = 2^{d \cdot f(n)}$
  - Hloubka rekurze je $O(\log(2^{d \cdot f(n)}))$ tedy $O(f(n))$.
- Celkem $O(f(n)) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n))$ prostoru.

- Zamlčeli jsme, že M potřebuje znát $f(n)$
  - buď zkouší postupně $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$
  - nebo přidáme do předpokladu že N rozhoduje jazyk v prostoru $f(n)$.

□

11.3 PSPACE

Definice 11.5: PSPACE

PSPACE je třída jazyků rozhodnutelých v polynomiálním prostoru deterministickým Turingovým strojem, tj.

$$PSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} SPACE(n^k).$$

- **NPSPACE** ani nedefinujeme,
  - protože $NPSPACE = PSPACE$, protože máme Savich-ovu větu a polynom na druhou je také polynom.
- SAT is $SPACE(n)$, tj. $PSPACE$.
- ALL_{NFA} je
  - $\overline{ALL_{NFA}}$ je $NSPACE(n)$
  - dle Savitchovy věty i $SPACE(n^2)$
  - deterministické prostorové třídy jsou uzavřené na doplněk (stroj vždy zastaví - my jen obrátíme odpověď).
  - Proto ALL_{NFA} je $SPACE(n^2)$, tedy $PSPACE$.

11.4 Prostorové a časové třídy

Věta 11.3: 1

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k}).$$

$P \subseteq PSPACE$ Stroj v čase $t(n)$ navštíví maximálně $t(n)$ políček, proto pro $t(n) \geq n$ stačí prostor $t(n)$.

- Podobně $NP \subseteq NPSPACE$.

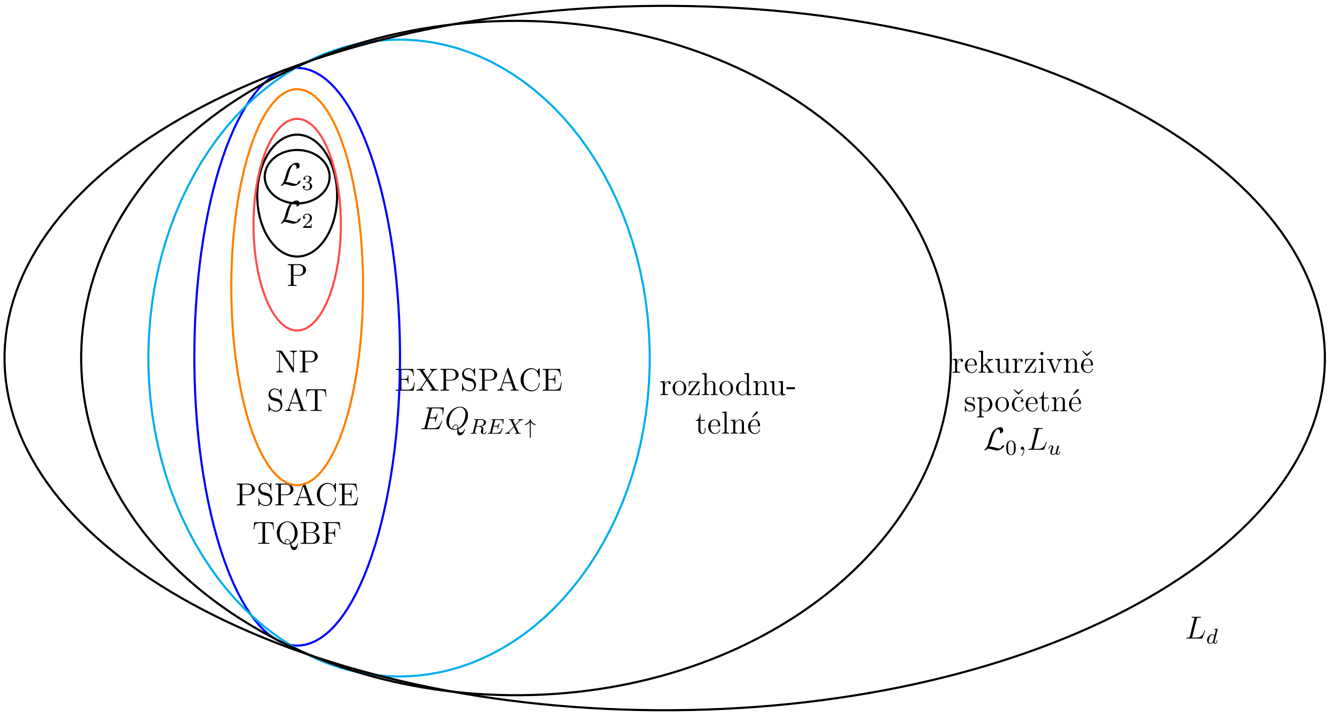
$PSPACE = NPSPACE$ ze Savichovy věty.

$PSPACE \subseteq EXPTIME$ Pro $f(n) \geq n$ dosáhne TM M pracující v prostoru $f(n)$ maximálně $f(n) \cdot 2^{O(f(n))}$ různých konfigurací,

v konečném deterministickém výpočtu se žádná konfigurace neopakuje

proto existuje TM M_2 simulující TM M v čase $f(n) \cdot 2^{O(f(n))}$, tedy $PSPACE \subseteq EXPTIME$.

- Jediná nerovnost, co víme, je $P \neq EXPTIME$.



$PSPACE - complete$
Toto už není třeba ke zkoušce.

Definice 11.6: 1

- Problém je **PSPACE-těžký**, pokud je každý $PSPACE$ problém na něj převoditelný v polynomiálním čase.
- Problém je **PSPACE-úplný**, pokud je PSACE-těžký a zároveň PSPACE.
- Jde o polynomiální časovou převoditelnost, chceme 'jednoduchou'.

Example 11.3. • $TQBF$ **true quantified boolean formulas** Mějme plně kvantifikovanou booleovskou formuli v prenexním tvaru. Rozhodnout její pravdivost je $PSPACE$-úplný problém.

- Booleovská znamená, že univerzum pro proměnné je dvohodnotové $\{TRUE, FALSE\}$.

$$TQBF = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ je pravdivá plně kvantifikovaná booleovská formule}\}$$

$TQBF \in PSPACE$

$TQBF \in PSPACE$

```
procedure TQBF( ⟨φ⟩ )
    if φ neobsahuje kvantifikátory then
        ověř dosazenou formuli vhodně accept/reject
    end if
    if první kvantifikátor je existenční φ = (∃x)ψ then
        if ψ[x/0] je TRUE then
            return accept
        else if ψ[x/1] je TRUE then
            return accept
        else
            return reject
        end if
    end if
    if první kvantifikátor je univerzální φ = (∀x)ψ then
        zkus dosadit 0 i 1, pokud oba TRUE, přijmi
    end if
    return reject
end procedure
```

$TQBF \in PSPACE$**-těžká**

- Jazyk $L(M)$ rozhodovaný TM M v prostoru $f(n) = n^k$ redukujeme na TQBF.
- Vytváříme formule $\phi_{c_1,c_2,t}$ dosažitelnosti konfigurace v čase t.
- Stačí $t \leq 2^{d \cdot f(n)} = 2^{dn^k}$ pro štěpící konstantu d. Pro jednoduchost předpokládáme t je mocnina dvojky.
- Formule pro jeden krok obdobná jako v důkazu Cook-Levin-ovy věty.
- Obecně by byla $\phi_{c_1,c_2,t} \leftarrow \exists m_1[\phi_{c_1,m_1,\frac{t}{2}} \& \phi_{m_1,c_2,\frac{t}{2}}]$ moc dlouhá.
- Formule zdvojnásobí délku, tj. prostor potřebujeme $O(t) = O(2^{df(n)})$.
- Pomůžeme si univerzálním kvantifikátorem:

$$(\exists m_1)\forall(c_3, c_4) \in \{(c_1, m_1), (m_1, c_2)\}\ [\phi_{c_3,c_4,\frac{t}{2}}]$$

- Kde $(\exists m_1)\forall(c_3, c_4) \in \{(c_1, m_1), (m_1, c_2)\}$ je zkratka přes kvantifikaci proměnných reprezentující konfigurace a $c_3 = c_1 \& \ldots \vee \ldots \rightarrow \ldots$.
- Formule zůstává $O(f(n))$, počet vnoření je $O(\log h) = O(\log 2^{df(n)}) = O(f(n))$, potřebný prostor je tedy $O(f^2(n))$.

Hra dvou hráčů

$$FORMULAGAME = \{\langle\phi\rangle \mid \text{ hráč } E \text{ má vyhrávající strategii pro } \phi\}.$$

- $FORMULAGAME$ je $PSPACE$-úplná. Je to převlečená TQBF.
  - Existenční kvantifikátor jsou moje tahy
  - univerzální jsou tahy oponenta.

□

Shrnutí na závěr

Shrnutí - Automaty, gramatiky, jazyky

- L_d, L_u.
- $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k})$.

Automaty a gramatiky – dva způsoby popisu

Turingovy stroje vícepáskové, nedeterministické s jednostrannou páskou	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_0}$	gramatiky Typu 0
zásobníkové automaty	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty DFA, NFA, ϵNFA	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$	regulární gramatiky

Definice

- Jednotlivé typy automatů a jazyky jimi přijímané, gramatik a jazyky jimi generované,jazyk generovaný gramatikou , a definice k tomu nutné.
- regulární výrazy, vztah k regulárním jazykům
- řetězcové operace, substituce, homomorfismus, inverzní homomorfizmus
- bezkontextové gramatiky (CFG, CFL): derivační strom, jednoznačnost/víceznačnost gramatiky a CFL jazyka, Chomského normální tvar gramatiky
- zásobníkové automaty PDA,L(P), N(P), deterministické zásobníkové automaty, bezprefixové jazyky

2025 ne Dvousměrné konečné automaty, Dyckovy jazyky,

- Turingův stroj, rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky, Diagonální jazyk $L_d = \{w;$ TM s kódem w nepřiji
  Univerzální jazyk (Univerzální Turingův stroj)
- SAT, 3SAT, PCPa nerozhodnutelné problémy pro CFG.
- Třídy časové složitosti (TIME,NTIME,) P,verifikátor, NP,

  co-NP, NP-úplnost jazyka, třídy prostorové složitosti $PSPACE$
- Redukce(převoditelnost) a polynomiální převoditelnost rozhodovacích problémů.

Věty

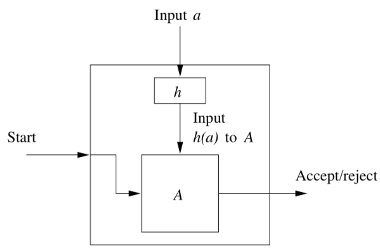
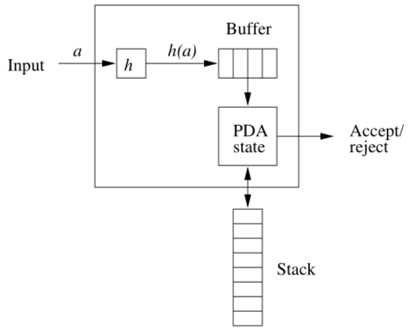
- Mihyll–Nerodova věta, Pumping lemma pro regulární jazyky, Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, Kleeneho věta (algebraická definice regulárních jazyků),
- vztahy pojmů ve Figure Chomského hierarchie, i v rámci rámečku, i různých rámečků,
- nedeterminismus: nutný u zásobníkových automatů a lineárně omezených automatů, u konečných automatů a TM ne,
- Cook-Levin-ova věta (3SAT je NP-úplný), Postova věta

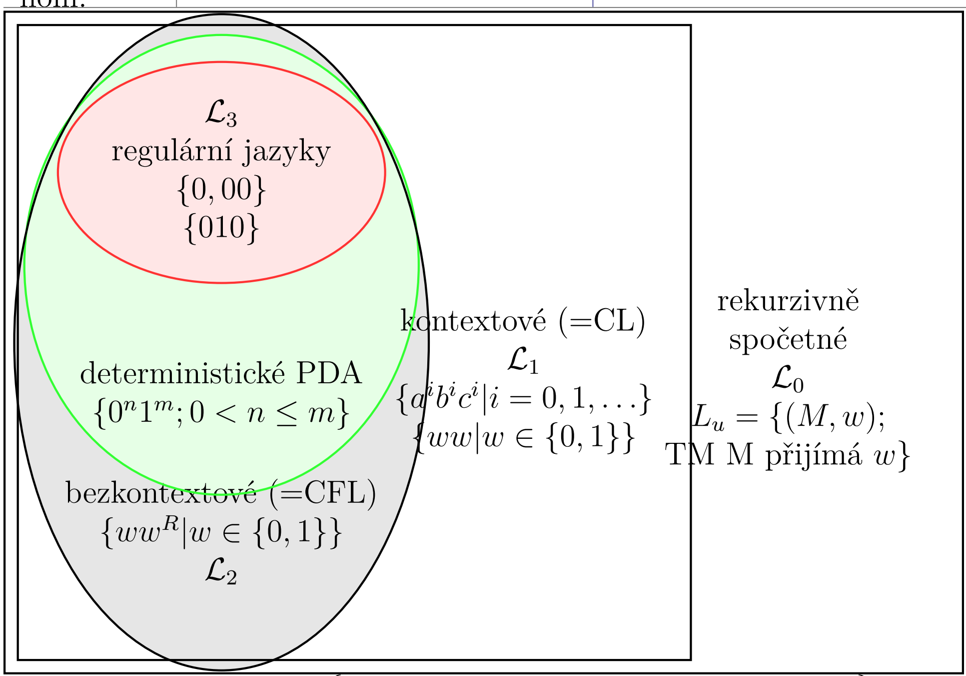
- uzávěrové vlastnosti – důkaz ANO, protipříklad NE k Tabulce níže, uzávěrové vlastnosti regulárních a CFL jazyků na řetězcové operace.

Algoritmy

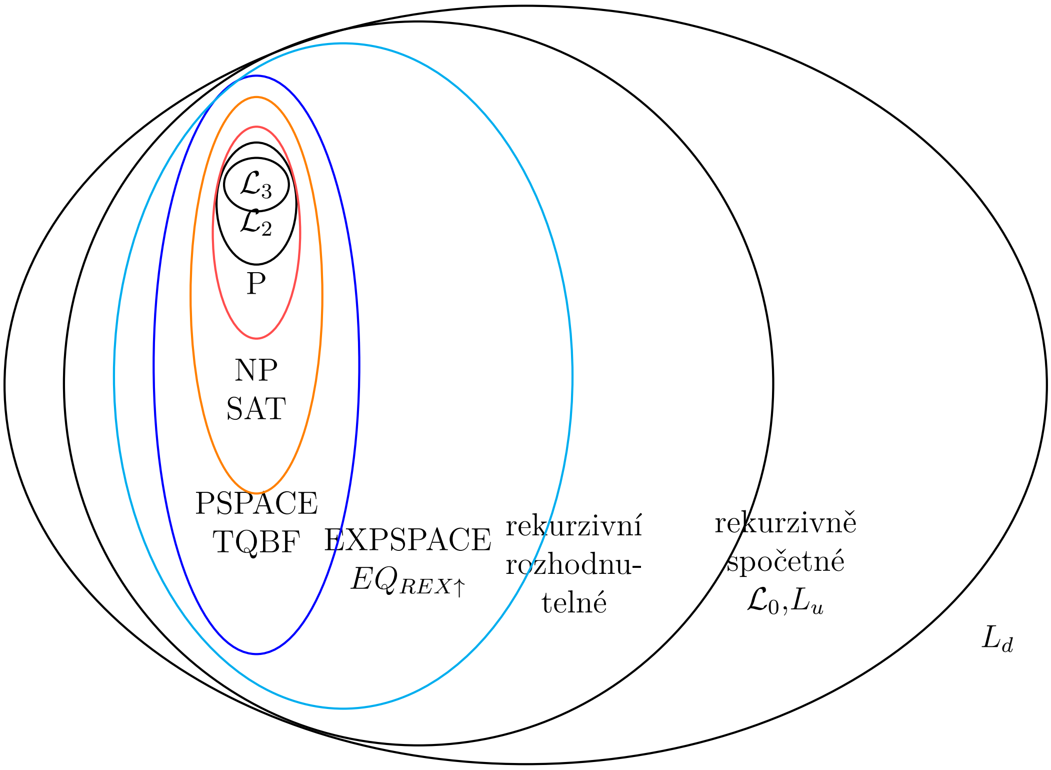
- Nedosažitelné a dosažitelné stavy konečného automatu (FA),
- Rozlišitelné a ekvivalentní stavy FA, Ekvivalence FA,
- Nalezení reduktu DFA,
- Podmnožinová konstrukce DFA z NFA
- Redukce bezkontextové gramatiky Převod CFG na gramatiku v Chomského normální formě, CYK (slovo v CFL).
- Převod CFG na zásobníkový automat, převod PDA na gramatiku.

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	$F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$	$S \to S_1 \vert S_2$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
průnik	$F = F_1 \times F_2$	$L = \{0^n1^n2^n \vert n \geq 1\} = \{0^n1^n2^i \vert n, i \geq 1\} \cap \{0^i1^n2^n \vert n, i \geq 1\}$	
$\cap$ s RL	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$
doplněk	$F = Q_1 - F_1$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$	$F = Q_1 - F_1$, Z_0, cykly
homomorfismus	Kleene + elem. jazyky + uz.	a nahraď S_a	$h(0) = h(1) = 0$ cca. $\cup$
inverzní hom.			



$L_d = \{w;$ TM s kódem w nepřijímá vstup $w\}$


$\mathcal{L}_3$
$\mathcal{L}_2$
P
NP
SAT
PSPACE
TQBF
EXPSPACE
$EQ_{REX\uparrow}$
rekurzivní
rozhodnu-
telné
rekurzivně
spočetné
$\mathcal{L}_0, L_u$
L_d

A Dodatky