Prostorová složitost, Shrnutí

Jakub Bulín

Adapted from the Czech lecture slides by Marta Vomlelová.
Translation, minor modifications, and any errors are mine.

S303

Organizační záležitosti

- Přednáška:
  - moodle https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5119
    - login jako do SIS
  - video nahrávky přednášek z roku 2019 https://is.mff.cuni.cz/prednasky/prednaska/NTIN071/1
    - login jako do SIS
    - poslední dvě přednášky jsou nové, nejsou tam.
- Cvičení:
  - vyzkoušíte si prakticky sestrojit automaty a gramatiky
  - zažijete příklady, což je něco jiného, než je přečíst,
  - potřebujete zápočet, který udělují **výhradně** cvičící.
- Zkouška:
  - **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce** (kromě předtermínů).
  - Písemná příprava a ústní část
  - Porozumění látce + schopnost formalizace
    - Orientace v Chomského hierarchii, automatech, gramatikách, (ne)determinizmu,
    - Napište definici, formulujte větu, popište ideu důkazu, algoritmus,
    - zařaďte jazyk do Chomského hierarchie a svou odpověď dokažte.
- Komunikace v konzultačních hodinách: Úterý 14:00 v S303.
  - Jindy bez záruky. Na maily se snažím odpovídat, na dotazy po přednášce také.

Požadavky ke zkoušce

- **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce**.
- Zkouška sestává z písemné přípravy a ústní části.
- **Písemná příprava** bude sestávat ze dvou až tří otázek, které korespondují sylabu přednášky, ověřují schopnosti získané na cvičení a znalost definic, vět a algoritmů z přednášky.

! Po dobu písemné přípravy musí být veškeré přinesené poznámky, přípravy, mobily, počítače apod. uloženy v uzavřeném batohu. V případě opomenutí poznámek na židli, stole, otevřeném batohu apod. je zkouška okamžitě hodnocena 'nevyhověl' a student v ní dále nepokračuje.

- **Požadavky ústní části** Ústní část bude vycházet z písemné přípravy, zpravidla budete dotázáni na vysvětlení-zdůvodnění-příklady k tvrzením v písemné části. Ústní část může být doplněna otázkou v rozsahu sylabu přednášky s písemnou přípravou nesouvisející.

- J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley
- M. Sipser: Introduction to the Theory of Computation, Cengage Learning, 2013
- M. Chytil: *Automaty a gramatiky, SNTL Praha, 1984*

⇒ moodle https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5119

  - kde jsou tyto slajdy
  - ⇒ kde je dotazník k textové verzi slajdů
  - moodle testy (které ale netestují zdůvodnění a důkazy).

⇒ cvičení.

Pohled do historie

- Počátky
  - první formalizace pojmu algoritmus Ada, Countess of Lovelace 1852
  - intenzivněji až s rozvojem počítačů ve druhé čtvrtině 20. století
  - co stroje umí a co ne?
  - Church, Turing, Kleene, Post, Markov
- Polovina 20. století
  - neuronové sítě (1943)
  - konečné automaty (Finite Automata) (Kleene 1956 neuronové sítě $\approx$ FA)
- 60. léta 20. století
  - gramatiky (Chomsky)
  - zásobníkové automaty
  - formální teorie konečných automatů.
- 80. léta 20. století
  - popularita tříd časové a prostorové složitosti.

- Osvojit si abstraktní model výpočetních zařízení,
- vnímat, jak drobné změny v definici vedou k velmi odlišným třídám,
- zažít skutečnost algoritmicky nerozhodnutelných problémů,
- rychlý úvod do složitosti $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$.

Automaty a gramatiky – dva způsoby popisu

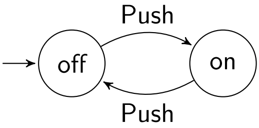
Turingovy stroje Vícepáskové, nedeterministické	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_0}$	gramatiky Typu 0
zásobníkové automaty	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty DFA, NFA, ϵNFA	$\xleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$	regulární gramatiky

Praktické využití

- Zamyšlení nad korektností programu, algoritmu, překladače,
- zpracování přirozeného jazyka,
- překladače:
  - lexikální analýza,
  - syntaktická analýza,
- návrh, popis, verifikace hardware
  - integrované obvody
  - stroje
  - automaty
- realizace pomocí software
  - hledání výskytu slova v textu (grep)
  - verifikace systémů s konečně stavy.

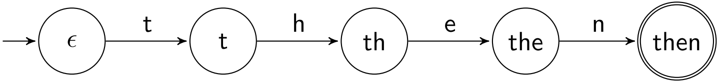
- Návrh a verifikace integrovaných obvodů.

Konečný automat modelující spínač on/off .



- Lexikální analýza

Konečný automat rozpoznávající slovo `then`.



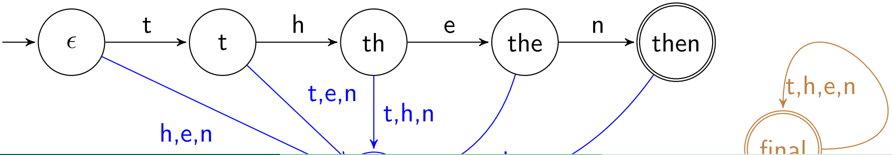
Definice 1.1: Deterministický konečný automat

Deterministický konečný automat (DFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, značíme Σ
3. **přechodové funkce**, zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$, značíme δ, která bude reprezentovaná hranami grafu (na hraně seznam $\subset \Sigma$) nebo tabulkou
4. **počátečního stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud',
5. a **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

Úmluva: Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav *fail* a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do *fail*.

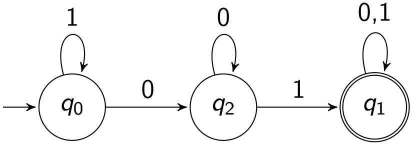
Pokud je množina F prázdná, a je vyžadovaná neprázdná, přidáme do ní i Q nový stav *final* do kterého vedou jen přechody z něj samého $\forall s \in \Sigma$: $\delta(\mathit{final}, s) = \mathit{final}$.



Example 1.1

Automat A přijímající $L = \{x01y : x, y \in \{0,1\}^*\}$.

- Stavový diagram (graf) Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$.



- tabulka
  - řádky: stavy + přechody
  - sloupce: písmena vstupní abecedy

δ	0	1
$\to q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Abeceda, slova, jazyky

Definice 1.2: Slovo, ϵ,λ,Σ^*,Σ^+,jazyk

Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ.

- **Slovo, řetězec** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí ϵ nebo λ.
- **Množinu všech slov v abecedě Σ** značíme Σ^*,
- množinu všech neprázdných slov v značíme Σ^+.
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ.

Definice 1.3: operace zřetězení, mocnina, délka slova

Nad slovy Σ^* definujeme operace:

- **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
- **mocnina** (počet opakování) u^n ($u^0 = \epsilon$, $u^1 = u$, $u^{n+1} = u^n.u$)
- **délka slova** $|u|$ ($|\epsilon| = 0$, $|auto| = 4$).
- **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s$ ($|zmrzlina|_z = 2$).

Rozšířená přechodová funkce

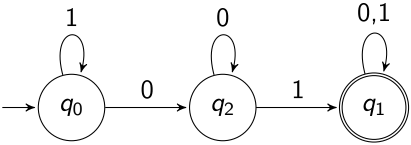
Definice 1.4: rozšířená přechodová funkce

Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
Rozšířenou přechodovou funkci δ^*: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr δ) definujeme induktivně:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Pozn. Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^*.

$\delta^*(q_0, 1100) = q_2$, $\delta^*(q_0, 1100111111111001) = q_1$

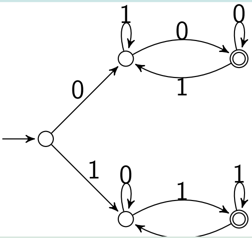


Definice 1.5: jazyky rozpoznatelné DFA, regulární jazyky

- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Slovo w je **přijímáno** automatem A, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

Example 1.2 (regulární jazyk)

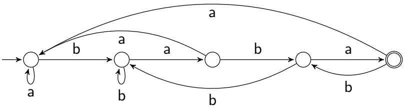
- $L = \{w \mid w = xux, w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}, u \in \{0,1\}^*\}$.



Příklady regulárních jazyků

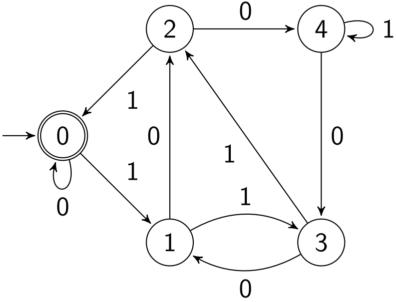
Example 1.3 (regulární jazyk)

- $L = \{w \mid w = ubaba,$
  $w \in \{a,b\}^*,\ u \in \{a,b\}^*\}$.



Example 1.4 (regulární jazyk)

- $L = \{w | w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného $5\}$.



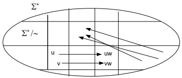
Example 1.5 (!NEregulární jazyk)

- $L = \{0^n 1^n | w \in \{0,1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$
  NENÍ regulání jazyk.

Definice 1.6: kongruence

Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalence $\sim$ na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

- $\sim$ je **pravá kongruence**, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*) u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.
- je **konečného indexu**, jestliže rozklad $\Sigma^* / \sim$ má konečný počet tříd.
- Třídu kongruence $\sim$ obsahující slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.



Example 1.6 (Pravá kongruence)

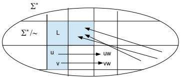
- Relace $\sim_{end}$ 'končí stejným písmenem' je pravá kongruence,
  - pokud $ux \sim_{end} vx$, pak i $uxw \sim_{end} vxw$.
- Relace $\sim_{fl}$ 'končí stejně jako začíná' je ekvivalence, $aa \sim_{fl} bb$, ale $aaa \not\sim_{fl} bba$, tedy není pravá kongruence.
- Relace $\sim_{||}$ 'mají stejný počet znaků' není konečného indexu.

Věta 1.1: Myhill–Nerodova věta

Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) L je rozpoznatelný konečným automatem,

b) existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.



Důkaz: Důkaz Myhill–Nerodovy věty $\Rightarrow$

a)$\Rightarrow$b); tj. automat $\Rightarrow$ pravá kongruence konečného indexu

- definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.
- je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w|\delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q \in F} \{w|\delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q \in F} [w|\delta^*(q_0, w) = q]_\sim.$$

Theorem (Myhill–Nerodova věta - 'kopie')

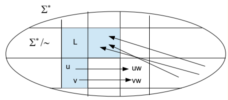
Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) *L je rozpoznatelný konečným automatem,*

b) *existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.*

Důkaz: Důkaz Myhill–Nerodovy věty $\Leftarrow$

b)$\Rightarrow$a); tj. pravá kongruence konečného indexu $\Rightarrow$ automat



- abeceda automatu vezmeme Σ
- za stavy Q volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
- počáteční stav $q_0 \equiv [\epsilon]$
- koncové stavy $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$

  $w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \ldots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \ldots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$

  $\delta^*([\epsilon], w) = [w]$

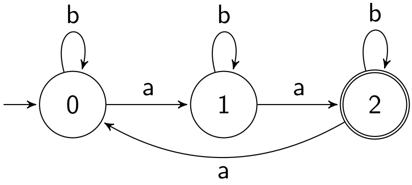
$\square$

Použití Myhill–Nerodovy věty: Konstrukce automatů

Example 1.7

Sestrojte automat přijímající jazyk
$L = \{w | w \in \{a, b\}^* \& \ |w|_a = 3k + 2\}$, tj. obsahuje $3k + 2$ symbolů a.

- $|u|_x$ značí počet symbolů x ve slově u
- definujme $u \sim v \equiv (|u|_a mod\ 3 = |v|_a mod\ 3)$
- třídy ekvivalence 0,1,2
- L odpovídá třídě 2
- a – přechody do následující třídy
- b – přechody zachovávají třídu.



Ne-regulární jazyk

Example 1.8 (Ne–regulární jazyk)

Jazyk $L_{a^+b^ic^i} = \{u | u = a^+b^ic^i \vee u = b^ic^j, + \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární (Myhill–Nerodova věta).

Důkaz: Jazyk $L_{a^+b^ic^i}$ není regulární

- Důkaz sporem: Předpokládejme, že L je regulární

$\Rightarrow$ pak existuje pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu m, L je sjednocení některých tříd $\Sigma^* / \sim_L$

- vezmeme množinu řetězců $S = \{ab, abb, abbb, \ldots, ab^{m+1}\}$
- existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

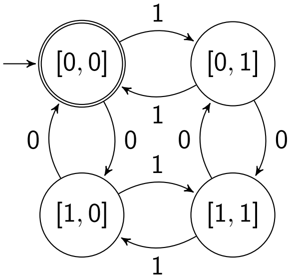
$i \neq j$	$ab^i \sim ab^j$	
přidáme c^i	$ab^ic^i \sim ab^jc^i$	$\sim$ je kongruence
spor	$ab^ic^i \in L$ & $ab^jc^i \notin L$	s 'L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/$

Příklad - 'součin' automatů

Example 1.9

$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_0 = 2k \& |w|_1 = 2\ell, k, \ell \in \mathbb{N}_0\}$, tj.

- sudý počet 0
- a zároveň sudý počet 1.



δ	0	1
$* \rightarrow [0,0]$	$[1,0]$	$[0,1]$
$[0,1]$	$[1,1]$	$[0,0]$
$[1,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$[1,1]$	$[0,1]$	$[1,1]$

Příklad (špatného) protokolu pro elektronický převod peněz

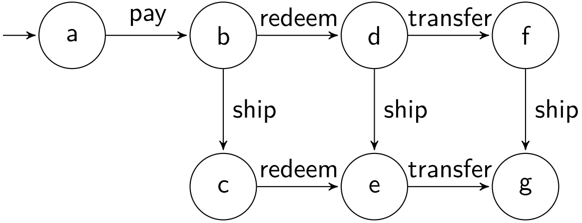
- Tři zúčastnění: zákazník, obchod, banka.
- Pro jednoduchost jen jedna platba (soubor 'money').

Example 1.10

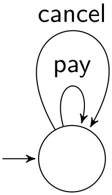
Zákazník poskytne obchodu číslo kreditní karty, obchod si vyžádá peníze od banky a pošle zboží zákazníkovi. Zákazník má možnost zablokovat kartu a žádat zrušení transakce.
Pět událostí:

- Zákazník může zadat číslo karty **pay**.
- Zákazník může kartu zablokovat **cancel**.
- Obchod může poslat **ship** zboží zákazníkovi.
- Obchod může vyžádat **redeem** peníze od banky.
- Banka může převést **transfer** peníze obchodu.

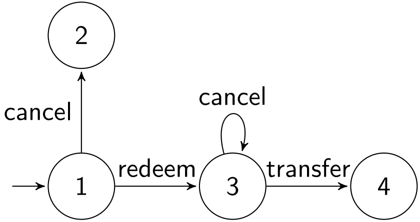
(Neúplný) konečný automat pro bankovní příklad



Obchod



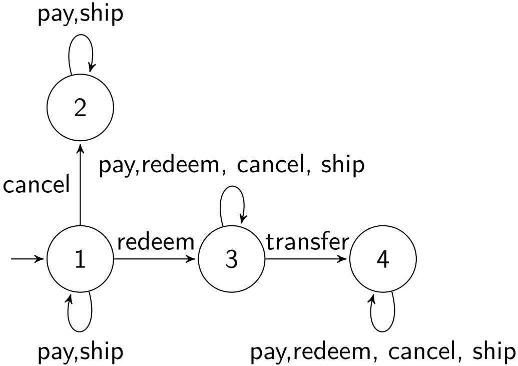
Zákazník



Banka

Hrana pro každý vstup

- Můžeme vyžadovat, aby automat provedl akci pro každý vstup. Obchod přidá hranu pro každý stav do sebe samého označenou *cancel*.
- Zákazník by neměl shodit bankovní automat opětovným zaplacením *pay*, proto přidáme smyčku *pay*. Podobně s ostatními akcemi.

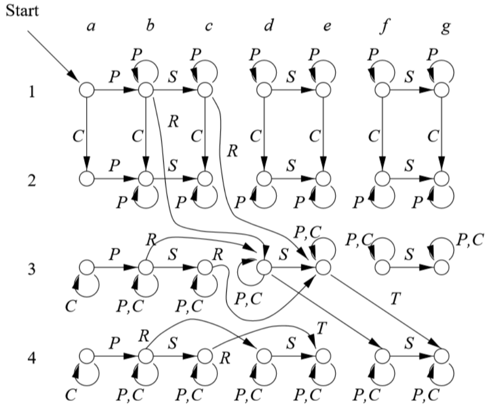


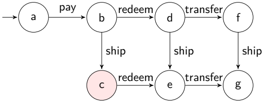
Úplnější automat pro banku.

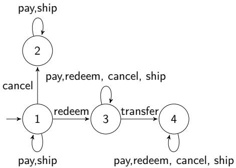
Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley



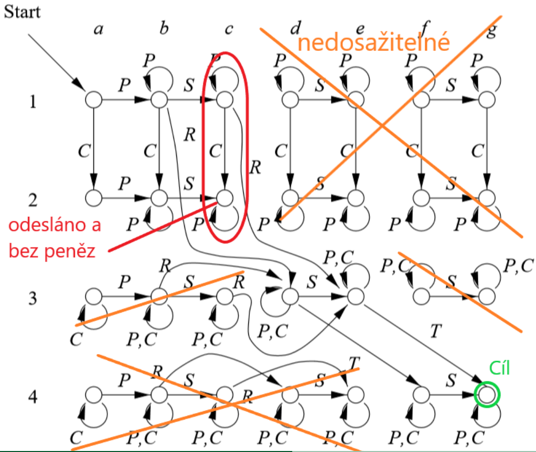


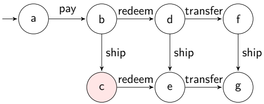


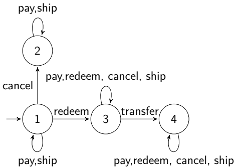
Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley







Dnes jsme probrali

- Definice
  - deterministického konečného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - jazyka $L \subseteq \Sigma^*$
  - jazyka rozpoznávaného konečným automatem
    $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \;\&\; \delta^*(q_0, w) \in F\}$
- Myhill–Nerodova věta
- příklad důkazu ne–regulárnosti jazyka ($\{ab^ic^i|i \in \mathbb{N}\}$, $\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}\}$)
- příklady regulárních jazyků

Chtěli bychom dokázat, že L_u není rekurzivní. K tomu se nám bude hodit Postova věta, která má i daleko širší uplatnění.