Matemáticas Computacionales

Definiciones, Teoremas y Demostraciones

Cualquier rama de la Matemática y en general de la ciencia, se construye a partir de la siguiente estructura:

- Definiciones
- Axiomas (Postulado, Ley, Propiedad)
- Teoremas (Proposición, Lema, Corolario)

Definición

Las Definiciones son enunciados que especifican de manera clara y precisa los conceptos con los cuales nos interesa empezar trabajar.

Axioma

Los Axiomas son enunciados que desde un inicio se aceptan como verdaderos aún cuando no se tiene una demostración para ello.

Axioma

Propiedad, Ley, Postulado

Los Axiomas son enunciados que desde un inicio se aceptan como verdaderos aún cuando no se tiene una demostración para ello.

Números

$$N = \left\{ 0, 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

$$Z = \left\{ \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : \quad p, q \in Z, \quad q \neq 0 \right\}$$

$$\Re = Q \cup Irracionales$$

Definición de Divisible:

Sean a y b enteros. Se dice que *a es divisible entre b* si existe un entero *c* tal que:

$$a = bc$$

y lo denotamos

$$b \mid a$$

También se dice que *b divide a*; o bien que *b es un factor de a*; o bien que *b es un divisor de a*.

Definición de Número Par:

Un entero se llama par si y sólo si es divisible entre 2.

$$a = 2c$$

Definición de Número Impar:

Un entero a se llama impar si y sólo si existe un entero c tal que

$$a = 2c + 1$$

Definición de Número Primo:

Un entero p se llama primo si y sólo si $p > 1$, y los únicos divisores positivos de p son 1 y p mismo.

Definición de Número Primo:

Un entero p se llama primo si y sólo si $p > 1$, y los únicos divisores positivos de p son 1 y p mismo.

Se excluye el 1 de la definición para que la descomposición de cualquier entero en producto de primos sea única, salvo el orden.

Definición de Número Compuesto:

Un entero positivo a se llama compuesto si existe un entero b tal que

$$1 < b < a$$

y

$$b \mid a$$

Teorema Fundamental de la Aritmética

Cualquier entero positivo mayor que 1 puede escribirse, de manera única, como un producto de números primos, salvo por el orden en que se escriban los factores.

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$2184 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

Teorema

Los Teoremas son enunciados que tienen que deducirse lógicamente de las definiciones, de los axiomas o de otros teoremas. A este proceso se la llama *demostración*.

Un teorema debe ser *verdadero* o *falso*, pero no ambos.

Tipos de Demostraciones

- <u>Demostración Directa</u>
  - Enunciados de la forma $P \Longrightarrow Q$
  - Enunciados de la forma $P \Longleftrightarrow Q$

• Contraejemplo

Se utiliza para demostrar que un enunciado es falso. Por ejemplo, si se desea demostrar que un enunciado de la forma $P \Rightarrow Q$ es falso, hay que encontrar un ejemplo particular donde P sea verdadera y Q falsa.

El Contraejemplo solamente puede utilizarse para demostrar que un teorema es falso, y <u>nunca para demostrar que es verdadero</u>.

• Demostración "Caso por Caso"

Este tipo de demostración es raro que se utilice ya que se aplica únicamente cuando hay una cantidad finita de casos que se concluyen del enunciado del teorema.

Si la cantidad de casos es *pequeña* puede escribirse cada caso utilizando papel y lápiz, de lo contrario puede utilizarse una computadora.

•<u>Demostración "Caso por Caso"</u>

Este tipo de demostración es raro que se utilice ya

Ejemplos serían:

•Teorema de los 4 colores.

•Las *proposiciones lógicas*, ya que involucran una cantidad finita de casos mediante sus tablas de valores de verdad. Por ejemplo, para probar las leyes de De Morgan.

•Demostración por Inducción Matemática

Se utiliza cuando existe una cantidad *infinita numerable* de casos implicados en el enunciado del teorema.

Este tipo de demostraciones las estudiaremos más adelante en el curso.

Inducción matemática

La inducción matemática se aplica a las afirmaciones que dependen de un parámetro que suele tomar valores enteros que comienzan a partir de un valor inicial. Puede considerarse como una máquina que realiza una demostración de una afirmación para cada valor finito del parámetro en cuestión.

1. Demostrar que la afirmación es verdadera para el primer valor del parámetro.
2. *Hipótesis de inducción*: La afirmación es válida para algún valor *m* del parámetro.
3. Demostrar que la afirmación es verdadera para el valor *m*+1 del parámetro.

Inducción Matemática

<u>Definición</u>

Sea el conjunto C = {x $\in$ N| P(x)}. Si se satisface:

- P(1) es verdadero.
- Si se cumple que para un k arbitrario (k $\in$ N):

  De suponer P(k), logramos demostrar P(k+1)

Entonces C = N (C es el conjunto de los Naturales)

Ejemplo: $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• Demostración mediante la Contrapositiva

Se basa en la equivalencia

$$\left(P \Rightarrow Q\right) \equiv \left(\neg Q \Rightarrow \neg P\right)$$

a $\neg Q \Rightarrow \neg P$ se le llama la contrapositiva de $P \Rightarrow Q$

•Demostración mediante la Contrapositiva

Se basa en la equivalencia

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

a $\neg Q \Rightarrow \neg P$ se le llama la contrapositiva de $P \Rightarrow Q$

Capítulo 4 del Scheinerman

•<u>Demostración *por Contradicción* *o Reducción al Absurdo*</u>

Para demostrar que $P \Rightarrow Q$ es verdadero usando el método de *Reducción al Absurdo* seguir los siguientes pasos:

1. Suponer que P es verdadero, es decir, que las hipótesis de la implicación se cumplen.
2. Suponer que $\sim Q$ es verdadero.
3. Mediante razonamientos lógicos mostrar que $\sim P$ también es verdadero.
4. De los pasos 1 y 3 se tiene entonces que P y $\sim P$ son ambos verdaderos. Ya que esto no es posible en Lógica Proposicional, el Paso 2 es Falso, es decir, Q es verdadera y por lo tanto $P \Rightarrow Q$ verdadera.

Demostración por conjuntos

Una **demostración matemática** no es un proceso forzado sino más bien sustentado en definiciones, leyes y axiomas, así como otras propiedades y teoremas que ya han sido demostrados, esto quiere decir, que el desarrollo de una comprobación fluye en la misma medida que existe un sustento teórico que le permite avanzar. Hay métodos de demostración directos (como los que se han venido presentando en publicaciones pasadas) e indirectos (como el contraejemplo, reducción al absurdo). A continuación comencemos con la selección de propiedades o teoremas a verificar:

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$$

Como podemos observar, el teorema presentado es una igualdad de conjuntos, esto indica que debemos aplicar la definición de **Igualdad de Conjuntos** y demostrar la *doble inclusión*.

Procedamos:

Procedamos:

i ¿$[(A \cup B)-C] \subset [(A-C) \cup (B-C)]$?

Procedamos:

i ¿$[(A\cup B)-C]\subset[(A-C)\cup(B-C)]$?

$\forall x\in[(A\cup B)-C]\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\notin C$, por definición de diferencia de conjuntos

Procedamos:

i ¿$[(A \cup B)-C] \subset [(A-C) \cup (B-C)]$?

$\forall x \in [(A \cup B)-C] \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C$,	por definición de diferencia de conjuntos
$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$,	por definición de unión de conjuntos

Procedamos:

i ¿$[(A\cup B)-C]\subset[(A-C)\cup(B-C)]$?

$\forall x\in[(A\cup B)-C]\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\notin C$,	por definición de diferencia de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A \vee x\in B)\wedge x\notin C$,	por definición de unión de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$,	por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

Procedamos:

i ¿$[(A\cup B)-C]\subset[(A-C)\cup(B-C)]$?

$\forall x\in[(A\cup B)-C]\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\notin C$,	por definición de diferencia de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A \vee x\in B)\wedge x\notin C$,	por definición de unión de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$,	por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva
$\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$,	por definición de diferencia de conjuntos

Procedamos:

i $¿[(A \cup B)-C] \subset [(A-C) \cup (B-C)]?$

$\forall x \in [(A \cup B)-C] \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$, por definición de unión de conjuntos

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

$\Rightarrow x \in (A - C) \vee x \in (B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow x \in [(A-C) \cup (B-C)]$, por definición de unión de conjuntos

$\therefore$

Se demuestra que

$[(A \cup B)-C] \subset [(A-C) \cup (B-C)]$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

$\forall x\in[(A-C)\cup(B-C)]\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$, por definición de unión de conjuntos

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

$\forall x\in[(A-C)\cup(B-C)]\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$, por definición de unión de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$, por definición de diferencia de conjuntos

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

$\forall x\in[(A-C)\cup(B-C)]\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$, por definición de unión de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \vee x\in B)\wedge x\notin C$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

$\forall x\in[(A-C)\cup(B-C)]\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$, por definición de unión de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \vee x\in B)\wedge x\notin C$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\notin C$, por definición de unión de conjuntos

ii ¿$[(A-C)\cup(B-C)]\subset[(A\cup B)-C]$?

$\forall x\in[(A-C)\cup(B-C)]\Rightarrow x\in(A-C)\vee x\in(B-C)$,	por definición de unión de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$,	por definición de diferencia de conjuntos
$\Rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin C$,	por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva
$\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\notin C$,	por definición de unión de conjuntos
$\Rightarrow x\in[(A\cup B)-C]$,	por definición de diferencia de conjuntos

$\therefore$

Se demuestra que

[(A-C)∪(B-C)]⊂[(A∪B)-C],

por definición de Inclusión de Conjuntos.

$\therefore$

Por **i y ii** se demuestra que

(A∪B)-C=(A-C)∪(B-C),

por definición de Igualdad de Conjuntos ■

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

i $¿[(A-B)\times C] \subset [(A\times C)-(B\times C)]?$

i ¿$[(A-B)\times C]\subset[(A\times C)-(B\times C)]$?

$\forall(x,y)\in[(A-B)\times C]\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$, por definición de producto cartesiano

i ¿$[(A-B)\times C]\subset[(A\times C)-(B\times C)]$?

$\forall(x,y)\in[(A-B)\times C]\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin B)\wedge y\in C$, por definición de diferencia de conjuntos

i ¿$[(A-B)\times C]\subset[(A\times C)-(B\times C)]$?

$\forall(x,y)\in[(A-B)\times C]\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin B)\wedge y\in C$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow x\in A \wedge (x\notin B\wedge y\in C)$, por ley lógica asociativa de la conjunción i $¿[(A-B)\times C]\subset[(A\times C)-(B\times C)]?$

$\forall(x,y)\in[(A-B)\times C]\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin B)\wedge y\in C$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow x\in A \wedge (x\notin B\wedge y\in C)$, por ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow x\in A \wedge (y\in C\wedge x\notin B)$, por ley lógica conmutativa de la conjunción

i ¿$[(A-B)\times C]\subset[(A\times C)-(B\times C)]$?

$\forall(x,y)\in[(A-B)\times C]\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow(x\in A \wedge x\notin B)\wedge y\in C$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow x\in A \wedge (x\notin B\wedge y\in C)$, por ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow x\in A \wedge (y\in C\wedge x\notin B)$, por ley lógica conmutativa de la conjunción

$\Rightarrow(x\in A \wedge y\in C)\wedge x\notin B$, por ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow(x \in A \wedge y \in C) \wedge(x \notin B \vee y \notin C)$, por ley lógica de adición y ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow (x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$, por ley lógica de adición y ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B\times C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$, por ley lógica de adición y ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B \times C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow (x,y) \in [(A \times C) - (B \times C)]$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$, por ley lógica de adición y ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B \times C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow (x,y) \in [(A \times C) - (B \times C)]$, por definición de diferencia de conjuntos

$\therefore$

Se demuestra que

$[(A-B) \times C] \subset [(A \times C) - (B \times C)]$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

ii ¿$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]$?

ii ¿$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]$?

$\forall(x,y)\in[(A\times C)-(B\times C)]\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

ii ¿$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]$?

$\forall(x,y)\in[(A\times C)-(B\times C)]\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$, por definición de producto cartesiano

ii ¿$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]$?

$\forall(x,y)\in[(A\times C)-(B\times C)]\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow[(x\in A \wedge y\in C)\wedge x\notin B]\vee[(x\in A \wedge y\in C)\wedge y\notin C])$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva ii $¿[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]?$

$\forall(x,y)\in[(A\times C)-(B\times C)]\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow(x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow[(x\in A \wedge y\in C)\wedge x\notin B]\vee[(x\in A \wedge y\in C)\wedge y\notin C])$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

$\Rightarrow[x\in A \wedge (y\in C\wedge x\notin B)]\vee[x\in A \wedge (y\in C\wedge y\notin C)])$, por ley lógica asociativa de la conjunción ii ¿$[(A \times C)-(B \times C)] \subset [(A-B) \times C]$?

$\forall (x,y) \in [(A \times C)-(B \times C)] \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B-C)$, por definición de diferencia de conjuntos

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \wedge x \notin B] \vee [(x \in A \wedge y \in C) \wedge y \notin C])$, por ley lógica distributiva de la conjunción respecto de la disyunción inclusiva

$\Rightarrow [x \in A \wedge (y \in C \wedge x \notin B)] \vee [x \in A \wedge (y \in C \wedge y \notin C)])$, por ley lógica asociativa de la conjunción

$\Rightarrow [(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C] \vee [x \in A \wedge (y \in C \wedge y \in C')])$, por leyes lógicas asociativa y conmutativa de la conjunción y por definición de complemento de un conjunto

$\Rightarrow [x \in (A-B) \wedge y \in C] \vee [x \in A \wedge y \in (C \cap C')]$), por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos

$\Rightarrow [x \in (A-B) \wedge y \in C] \vee [x \in A \wedge y \in (C \cap C')])$, por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos

$\Rightarrow [x \in (A-B) \wedge y \in C] \vee (x \in A \wedge y \in \emptyset)$, por propiedad de la intersección de conjuntos $A \cap A' = \emptyset$

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee[x\in A \wedge y\in(C\cap C')]$), por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee(x\in A \wedge y\in\emptyset)$, por propiedad de la intersección de conjuntos $A\cap A'=\emptyset$

$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in(A\times\emptyset)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee[x\in A \wedge y\in(C\cap C')]$), por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee(x\in A \wedge y\in\emptyset)$, por propiedad de la intersección de conjuntos $A\cap A'=\emptyset$

$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in(A\times\emptyset)$, por definición de producto cartesiano

$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in\emptyset$, por propiedad de producto cartesiano se cumple la existencia del elemento neutro como sigue: $\forall A\subset U, A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee[x\in A \wedge y\in(C\cap C')]),$	por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos
$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee(x\in A \wedge y\in\emptyset),$	por propiedad de la intersección de conjuntos $A\cap A'=\emptyset$
$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in(A\times\emptyset),$	por definición de producto cartesiano
$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in\emptyset,$	por propiedad de producto cartesiano se cumple la existencia del elemento neutro como sigue: $\forall A\subset U, A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$
$\Rightarrow(x,y)\in\{[(A-B)\times C]\cup\emptyset\},$	por definición de unión de conjuntos

$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee[x\in A \wedge y\in(C\cap C')]$),	por definición de diferencia de conjuntos y definición de intersección de conjuntos
$\Rightarrow[x\in(A-B)\wedge y\in C]\vee(x\in A \wedge y\in\emptyset)$,	por propiedad de la intersección de conjuntos $A\cap A'=\emptyset$
$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in(A\times\emptyset)$,	por definición de producto cartesiano
$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]\vee(x,y)\in\emptyset$,	por propiedad de producto cartesiano se cumple la existencia del elemento neutro como sigue: $\forall A\subset U, A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$
$\Rightarrow(x,y)\in\{[(A-B)\times C]\cup\emptyset\}$,	por definición de unión de conjuntos
$\Rightarrow(x,y)\in[(A-B)\times C]$,	por propiedad de unión de conjuntos $\forall A\subset U,\ A\cup\emptyset=\emptyset\cup A=\emptyset$

$\therefore$

Se demuestra que

$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C]$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

$\therefore$

Se demuestra que

$$[(A\times C)-(B\times C)]\subset[(A-B)\times C],$$

por definición de Inclusión de Conjuntos.

$\therefore$

Por i y ii se demuestra que

$$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C),$$

por definición de Igualdad de Conjuntos

$\blacksquare$

- **¡ Teorema Directo**: ¿$A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)$?

- **¡ Teorema Directo**: $¿A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)?$

$¿A \subset (B \cap C)?$

- ¡ **Teorema Directo**: ¿$A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)$?

¿$A \subset (B \cap C)$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,

por hipótesis tenemos que $A \subset B \wedge A \subset C$

- ¡ **Teorema Directo**: ¿$A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)$?

¿$A \subset (B \cap C)$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por hipótesis tenemos que $A \subset B \wedge A \subset C$
$\Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por definición de intersección de conjuntos

- ¡ **Teorema Directo**: $¿A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)?$

$¿A \subset (B \cap C)?$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por hipótesis tenemos que $A \subset B \wedge A \subset C$
$\Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por definición de intersección de conjuntos

$\therefore$

Se demuestra que

$A \subset (B \cap C)$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

ii **Teorema Recíproco**: ¿$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$?

ii **Teorema Recíproco**: ¿$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$?

¿$A \subset B$?

ii **Teorema Recíproco**: ¿$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$?

¿$A \subset B$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,

por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$

ii **Teorema Recíproco**: ¿$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$?

¿$A \subset B$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por definición de intersección de conjuntos

ii **Teorema Recíproco**: ¿$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$?

¿$A \subset B$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por definición de intersección de conjuntos
$\Rightarrow x \in B$,	por ley lógica de simplificación $p \wedge q \equiv p$ (o también $p \wedge q \equiv q$)

$\therefore$

Se demuestra que

$A \subset B$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

$A \subset C$?

$A \subset C$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$, por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$

$A \subset C$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por definición de intersección de conjuntos

$A \subset C$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por definición de intersección de conjuntos
$\Rightarrow x \in C$,	por ley lógica de simplificación $p \wedge q \equiv p$ (o también $p \wedge q \equiv q$)

$A \subset C$?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cap C)$,	por hipótesis tenemos que $A \subset (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$,	por definición de intersección de conjuntos
$\Rightarrow x \in C$,	por ley lógica de simplificación $p \wedge q \equiv p$ (o también $p \wedge q \equiv q$)

$$\therefore$$

Se demuestra que

$A \subset B$,

por definición de Inclusión de Conjuntos.

$\therefore$

Por las demostraciones de los teoremas directo y recíproco se cumple que

$$A \subset B \wedge A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$$

- **Demostraciones Propuestas**
- Con el propósito de ejercitar y/o apoyar el proceso formativo se dejan propuestas las siguientes demostraciones:

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$$

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{B} = \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \emptyset \wedge \boldsymbol{B} = \emptyset$$