XIAMEN UNIVERSITY

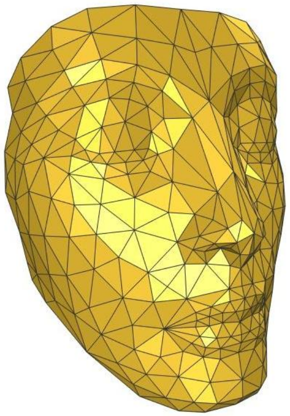
COMPUTER GRAPHICS

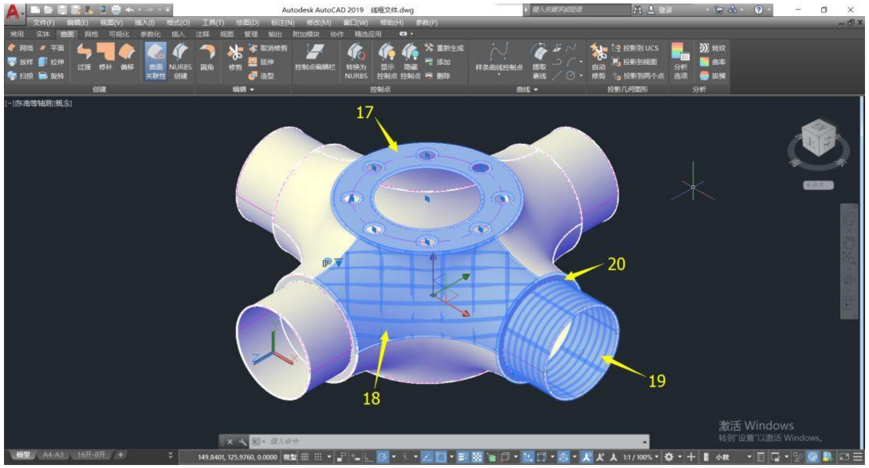
第十一章 参数曲面

陈中贵
厦门大学信息学院
http://graphics.xmu.edu.cn

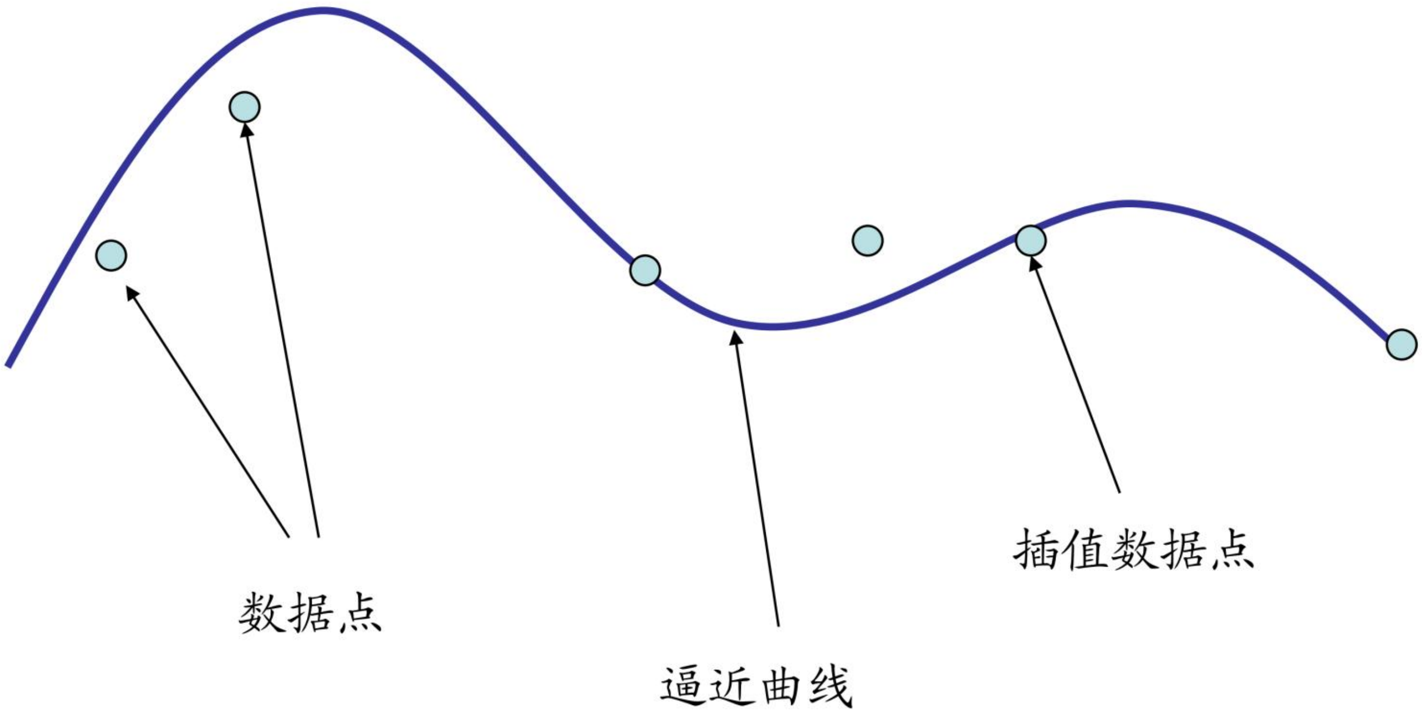
不止平面

- 直到现在为止我们一直是应用平面元素进行建模
  - – 非常适合于图形系统硬件
  - – 数学上相当简单
- 但世界并不只是由平面元素构成的
  - – 精确建模需要用到曲线和曲面
  - –显示时通过用平面元素进行逼近





用曲线建模



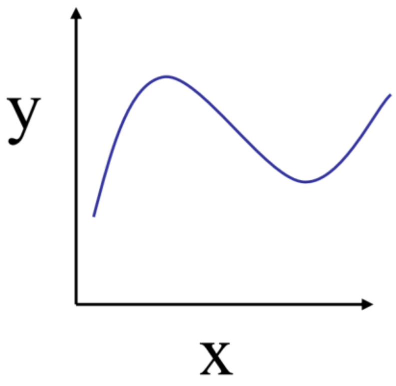
如何给出好的表示?

- 有许多方法表示曲线和曲面
- 我们需要一种方法，它具有性质
  - 稳定
  - 光滑
  - 容易求值
  - 是否一定要插值或者只是靠近数据?
  - 是否需要导数?

显式表示

- 二维空间中最熟悉的曲线形式为显式表示

$$y = f(x)$$



  – 不能表示所有的曲线

- 直线的斜截式表示 $y = mx + h$

  – 不能表示竖直线

- 使用显式形式只能表示半圆：

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

这里，$0 \le |x| \le r$

显式表示

- 三维空间中，曲线显式表示形式需要两个因变量

$$y = f(x), z = g(x)$$

- 曲面表示需要两个自变量

$$z = f(x,y)$$

- 同样地，不能表示所有的曲线或曲面
  - 方程$y = ax + b, z = cx + d$表示三维直线，但不能表示x为常数平面上的直线
  - 方程$z = f(x,y)$不能表示整球面

隐式表示

- 隐式曲线是二元函数的零点集

$$f(x,y) = 0$$

- 更稳定，能表示任意的直线和圆
  - 直线： $ax + by + c = 0$
  - 圆： $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- 三元函数的零点集 $f(x,y,z) = 0$ 定义一张曲面
  - 平面： $ax + by + cz + d = 0$
  - 球面： $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$
  - 三维曲线可表示为曲面交线 $f(x,y,z)=g(x,y,z)=0$

代数曲面

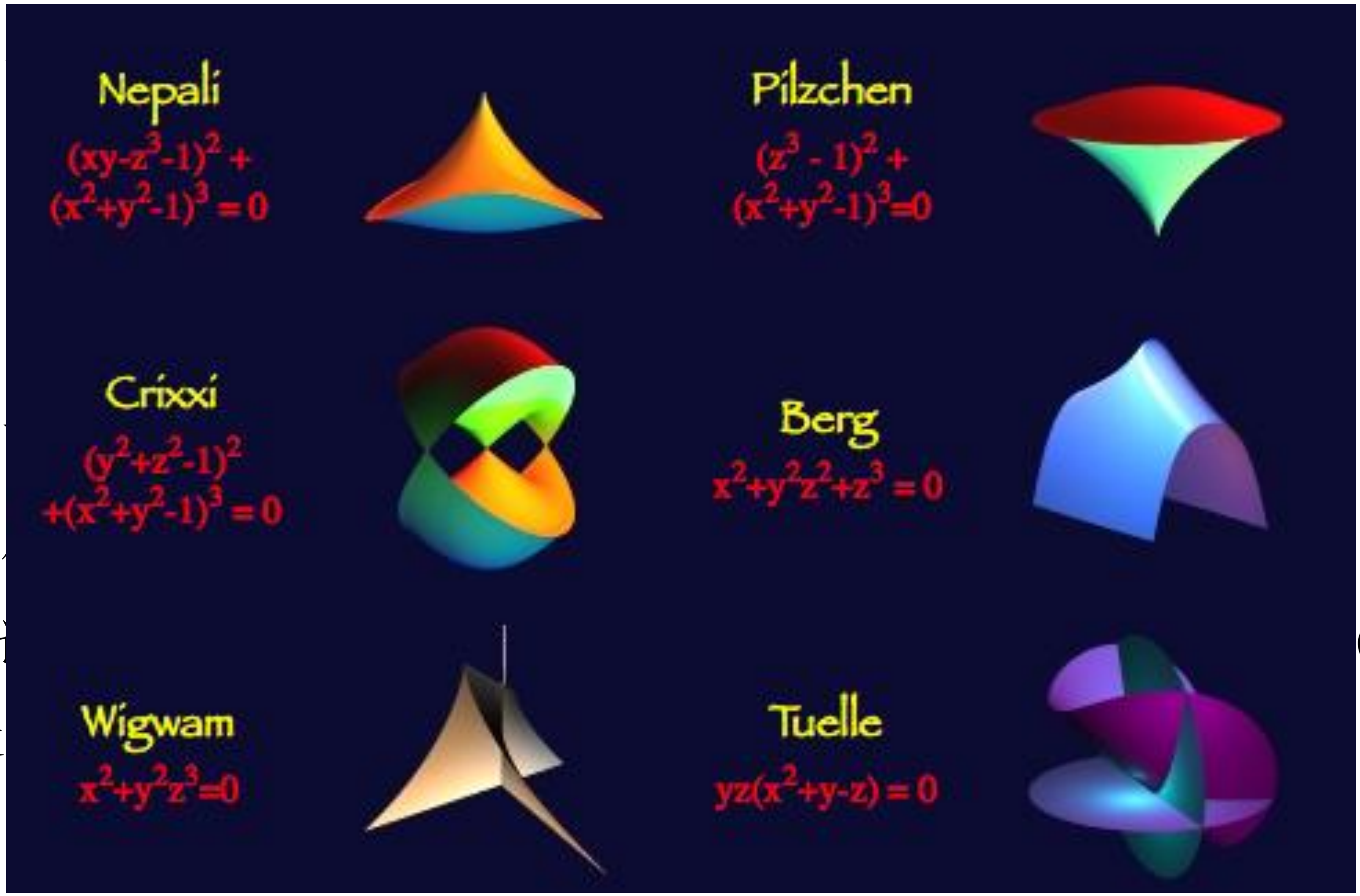
- 隐式表示中的函数f是3个变量的多项式之和

$$f(x, y, z) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

- 对二次曲面, $0 \le i + j + k \le 2$ 最多10项
- 实用的曲面，如球面、圆柱面和圆锥面都是二次曲面
  - 计算光线与二次曲面的交点，可以简化为求解一个二次方程（即，最多产生2个交点）

代数曲面

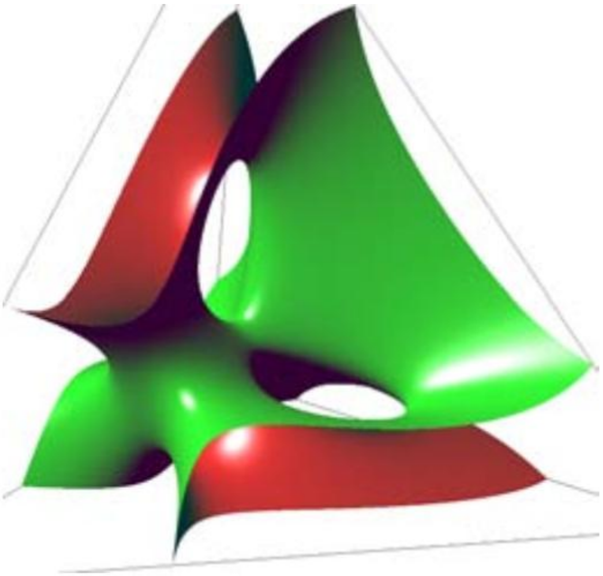
- 隐

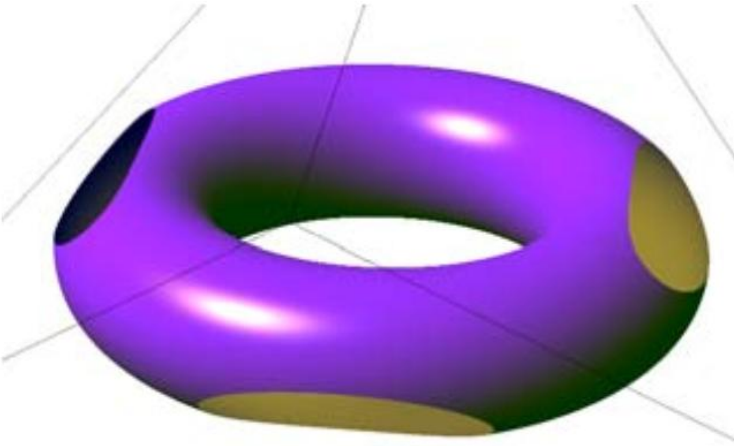

Nepali
(xy-z3-1)2 + (x2+y2-1)3 = 0
Pilzchen
(z3 - 1)2 + (x2+y2-1)3=0
Crixxi
(y2+z2-1)2 +(x2+y2-1)3 = 0
Berg
x2+y2z2+z3 = 0
Wigwam
x2+y2z3=0
Tuelle
yz(x2+y-z) = 0

- 对
- 实
  – i (即，
  最

分片代数曲面

- 具有更强的造型能力，每片的次数较低
- 容易构造复杂形体
- 与代数曲面一样，具有多分支性



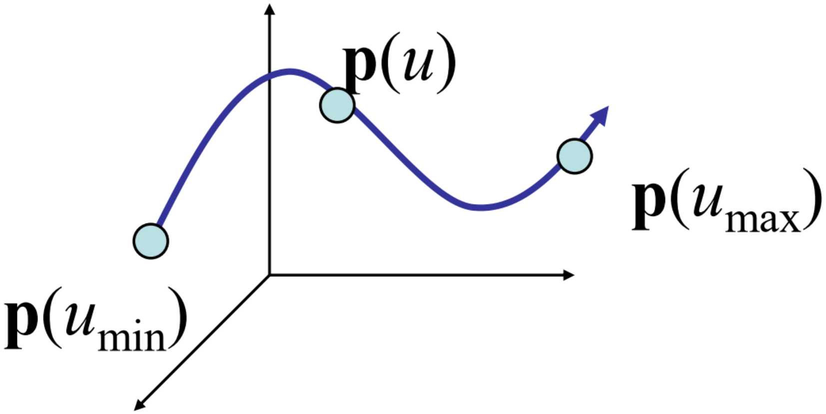


参数曲线

- 每个空间变量具有单独的方程

$$x = x(u)$$
$$y = y(u)$$
$$z = z(u)$$

$$\mathbf{p}(u)=[x(u), y(u), z(u)]^T$$



- 对于 $u_{min} \le u \le u_{max}$，可以得到二维或三维空间中的一条曲线
  - 在二维和三维空间中形式一致

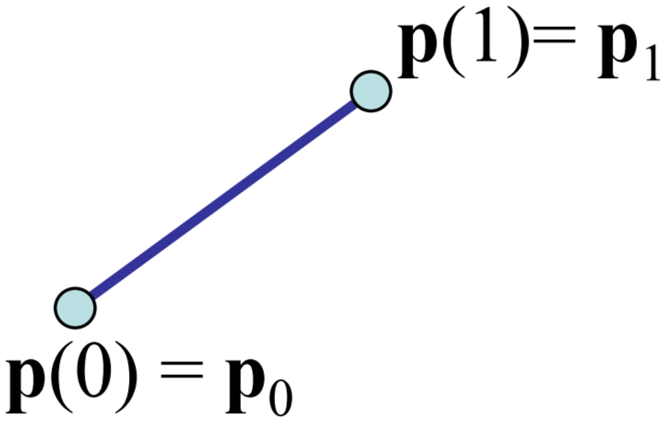
函数选取

- 通常我们可以选择出“好”的函数
  - 对给定的空间曲线，表示它的函数是不唯一的
  - 逼近或插值已知数据
  - 函数容易求值
  - 函数容易求导
    - 计算法向
    - 连接曲线段
  - 函数是光滑的

参数直线

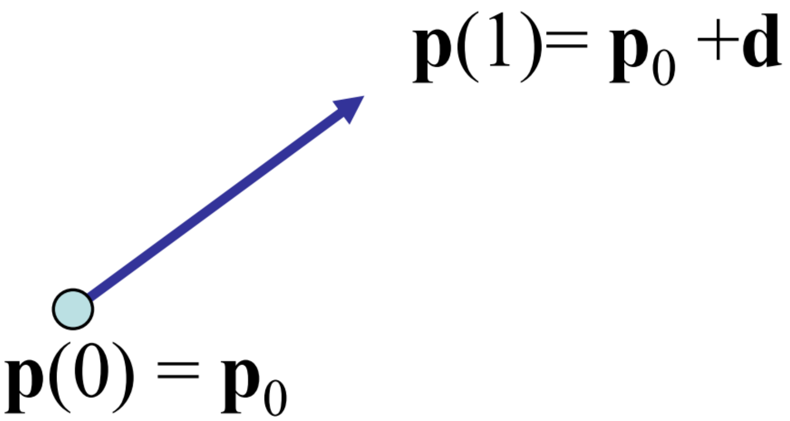
- 可以把参数u规范化到区间[0,1]内
- 连接两点$\mathbf{p}_0$ 和 $\mathbf{p}_1$的直线

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)\,\mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{p}_1$$



- 起点为$\mathbf{p}_0$，方向为$\mathbf{d}$的射线

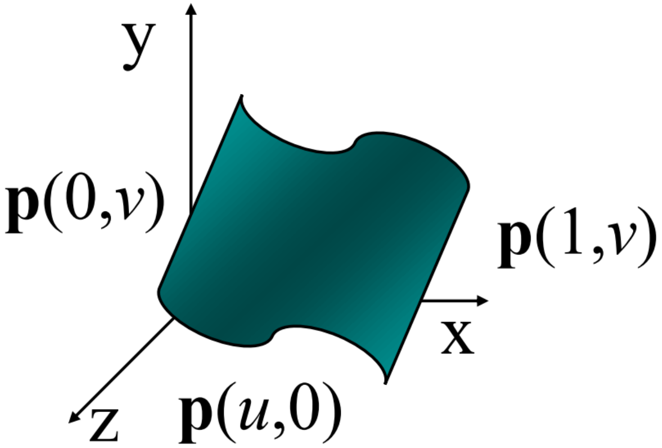
$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{d}$$



参数曲面

- 曲面需要2个参数

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$



$$\mathbf{p}(u,v) = [x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]^T$$

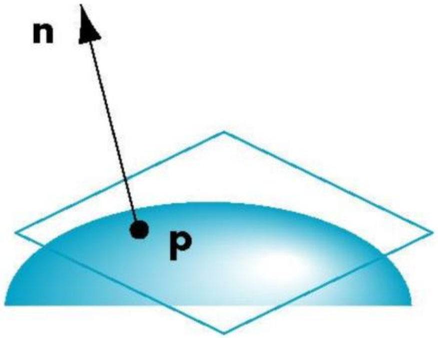
- 希望与曲线具有同样的性质
  - 光滑
  - 可导
  - 容易求值

法向

- 对u和v求偏导可计算出在任意点p处的法向

$$\frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \partial \mathrm{x}(u,v)/\partial u \\ \partial \mathrm{y}(u,v)/\partial u \\ \partial \mathrm{z}(u,v)/\partial u \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v} = \begin{bmatrix} \partial \mathrm{x}(u,v)/\partial v \\ \partial \mathrm{y}(u,v)/\partial v \\ \partial \mathrm{z}(u,v)/\partial v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v}$$



参数平面

- 点向式

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{q} + v\,\mathbf{r}$$

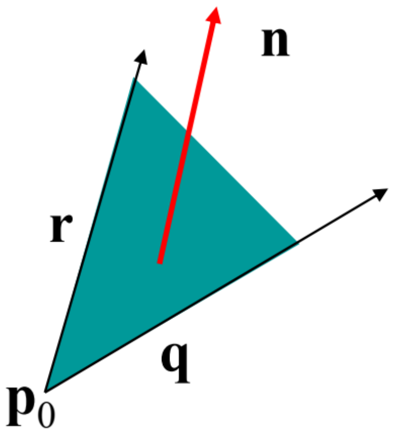
- 法向

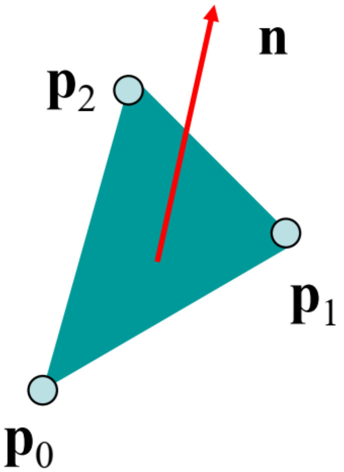
$$\mathbf{n} = \mathbf{q} \times \mathbf{r}$$

- 三点式

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0$$





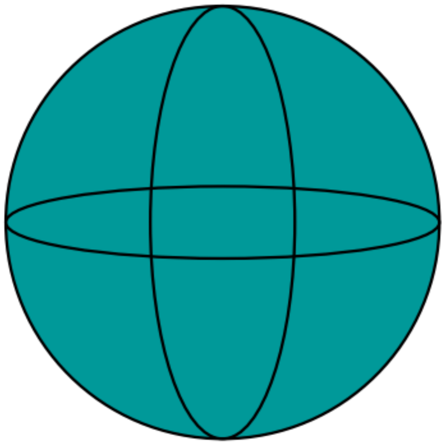
参数球面

$$x(\theta, \phi) = r \cos\theta \sin\phi$$

$$y(\theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z(\theta, \phi) = r \cos\phi$$

$$0 \le \theta \le 360^\circ,\ 0 \le \phi \le 180^\circ$$



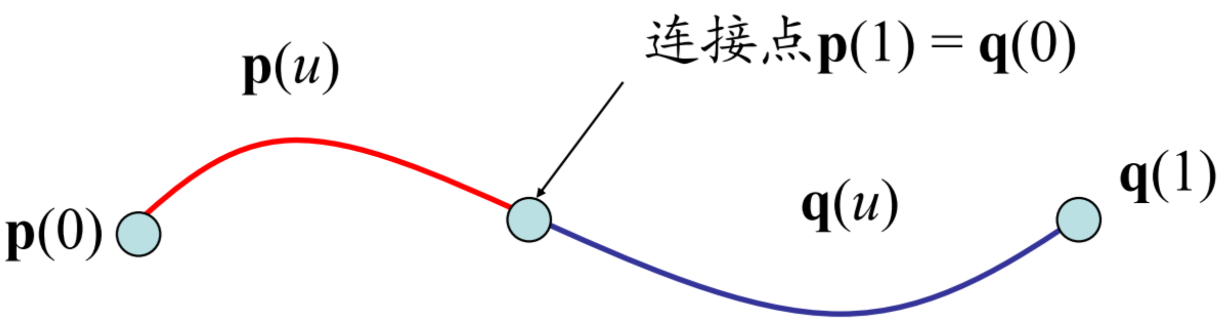
- θ = 常数：经线圆
- ϕ = 常数：纬线圆
- 法向：$\mathbf{n} = \mathbf{p}$

曲线段

- 在对*u*进行规范化后，每条曲线都可以写为

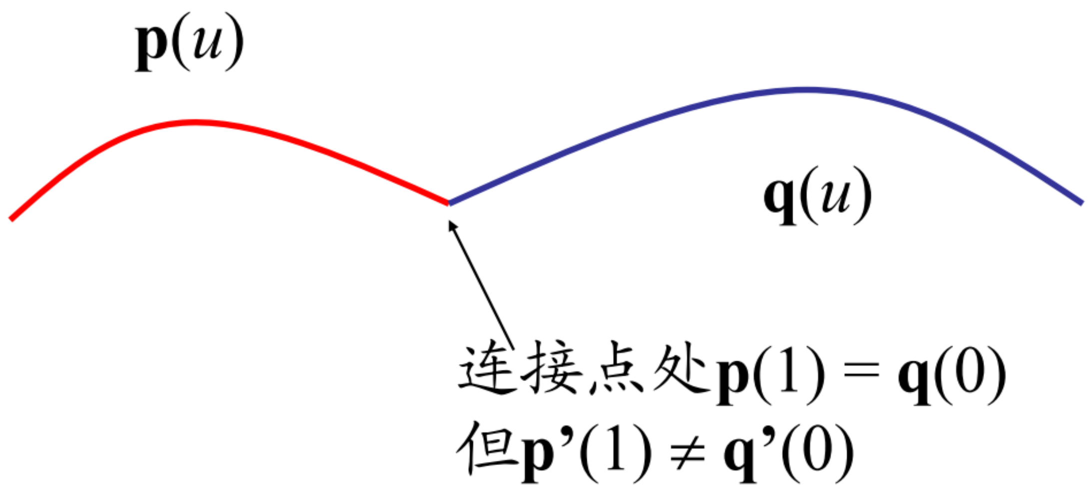
$$\mathrm{p}(u) = [\mathrm{x}(u), \mathrm{y}(u), \mathrm{z}(u)]^{\mathrm{T}}, 0 \le u \le 1$$

- 在经典的数值方法中我们通常是设计单条的整体曲线
- 在计算机图形学和CAD中，通常倾向于设计一些彼此相连的短曲线段

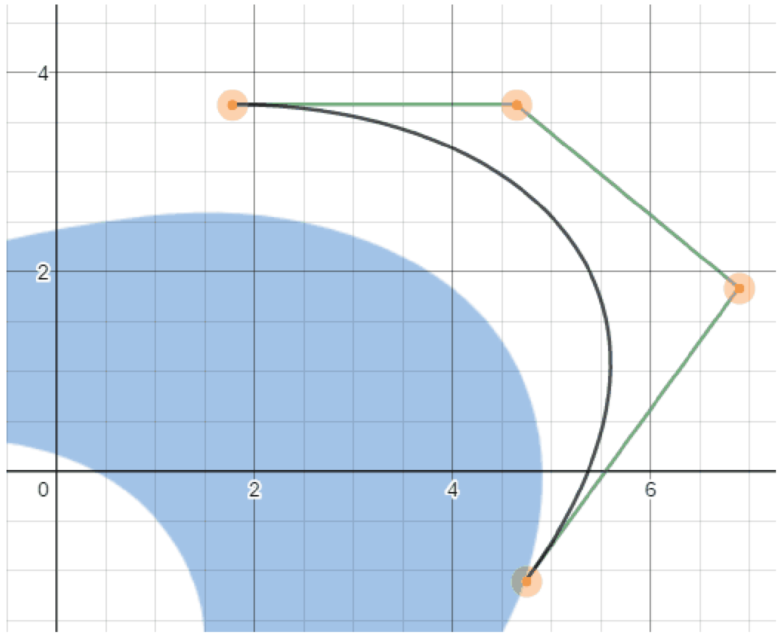


为什么采用多项式

- 容易求值
- 处处连续而且光滑
  - 在连接点需要考虑连续性和光滑的阶数



贝塞尔曲线的由来（1962年）

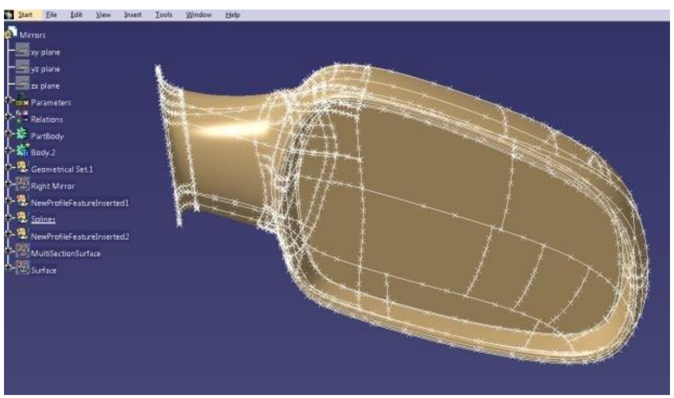


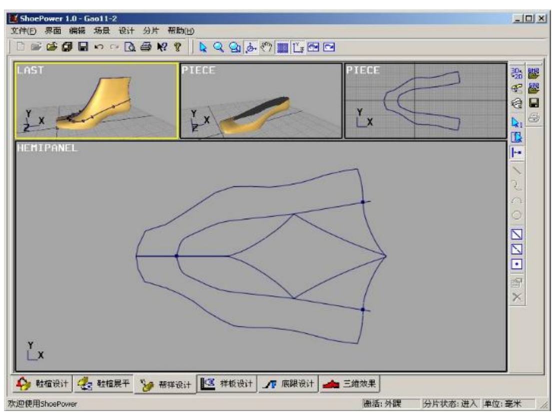
Pierre Étienne Bézier

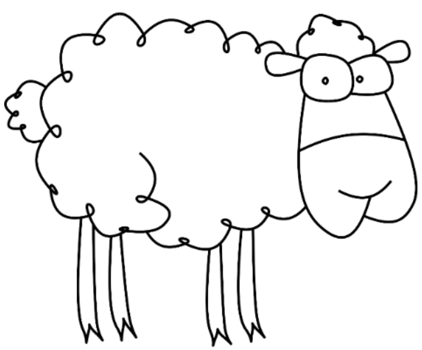
（1910-1999）

应用范围

- 汽车、飞机、船舶设计与制造
- 其他制造业、医疗卫生
- 矢量绘图软件：如Photoshop, Illustrator…
- 计算机图形学、计算机动画…
- ……







重心

重心：给定平面上 $n+1$ 个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$
设点 $\boldsymbol{P}_i$ 相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

重心

重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$ 设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

重心

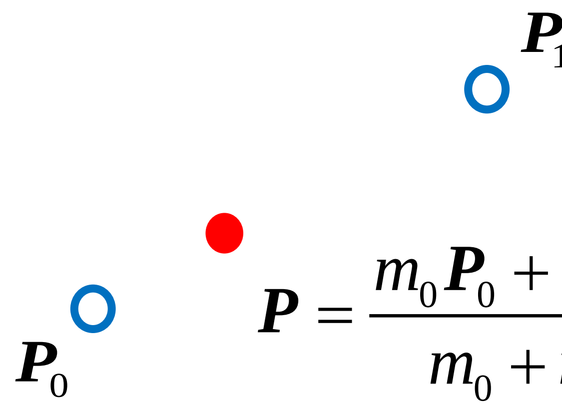
重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$
设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

重心

重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$ 设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

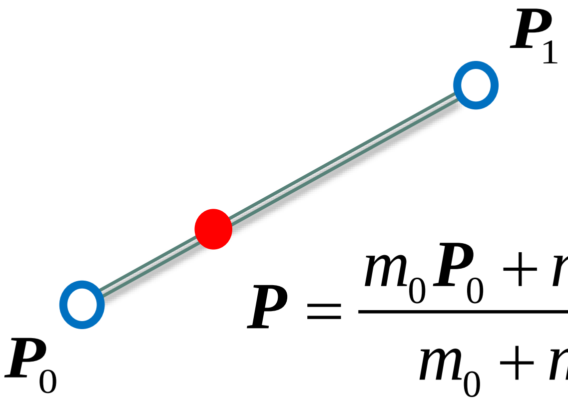


$$\boldsymbol{P} = \frac{m_0 \boldsymbol{P}_0 + m_1 \boldsymbol{P}_1}{m_0 + m_1}$$

重心

重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$
设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

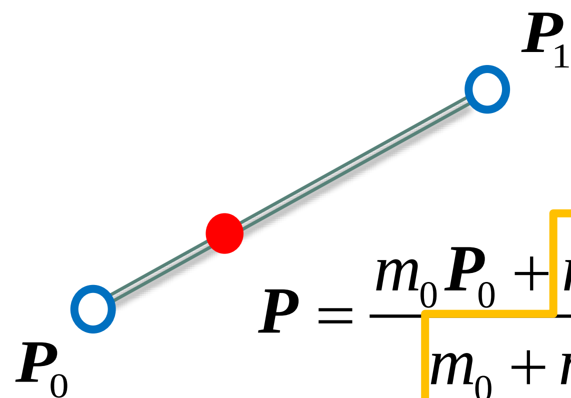


$$\boldsymbol{P}=\frac{m_0\boldsymbol{P}_0+m_1\boldsymbol{P}_1}{m_0+m_1}$$

重心

重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i = 0,1,\cdots,n.$
设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$



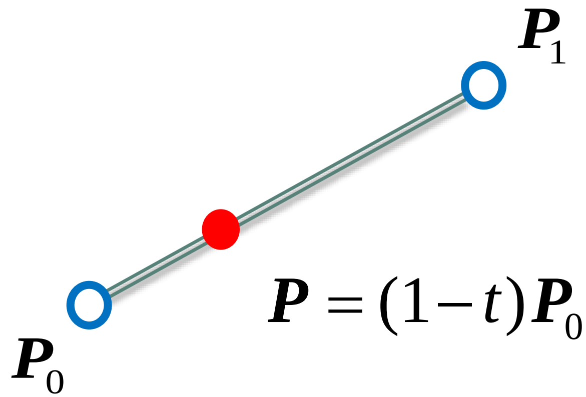
$$\boldsymbol{P} = \frac{m_0 \boldsymbol{P}_0 + m_1 \boldsymbol{P}_1}{m_0 + m_1} \rightarrow t$$

重心

重心：给定平面上$n+1$个质点的位置矢量 $\boldsymbol{P}_i, i=0,1,\cdots,n.$

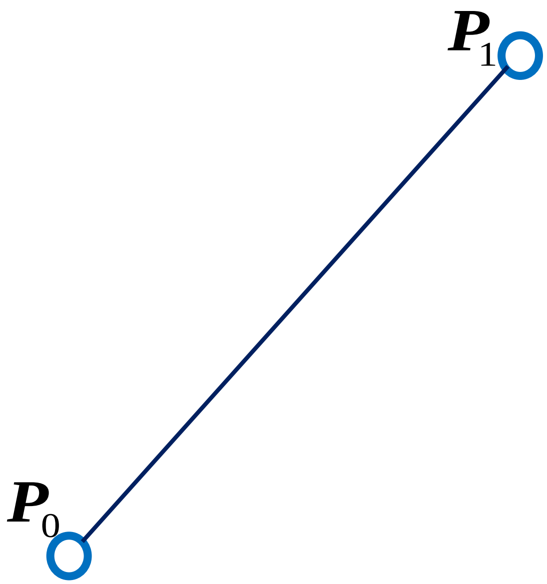
设点$\boldsymbol{P}_i$相应质量为 m_i（不全为0），则重心公式为：

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

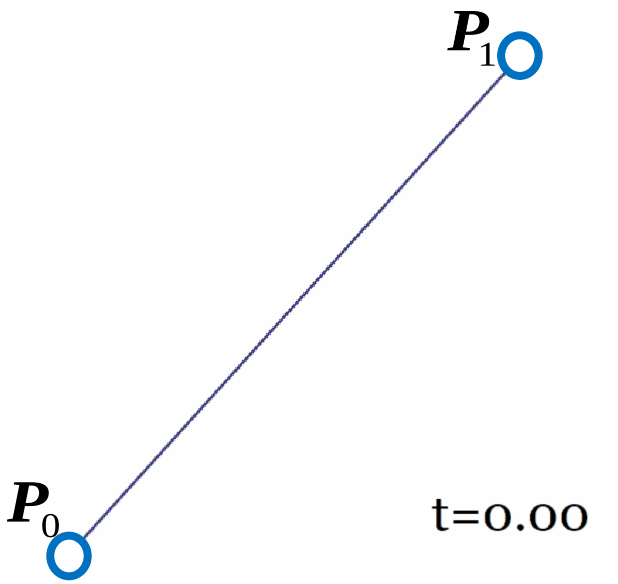


$$\boldsymbol{P}=(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$$

一次贝塞尔曲线

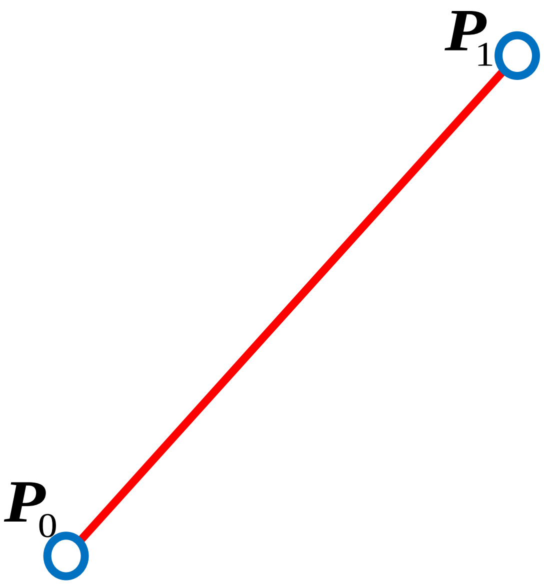


一次贝塞尔曲线



一次贝塞尔曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = (1-t)\boldsymbol{P}_0 + t\boldsymbol{P}_1, t \in [0,1], \boldsymbol{P}_i \in R^2, i = 0,1.$$



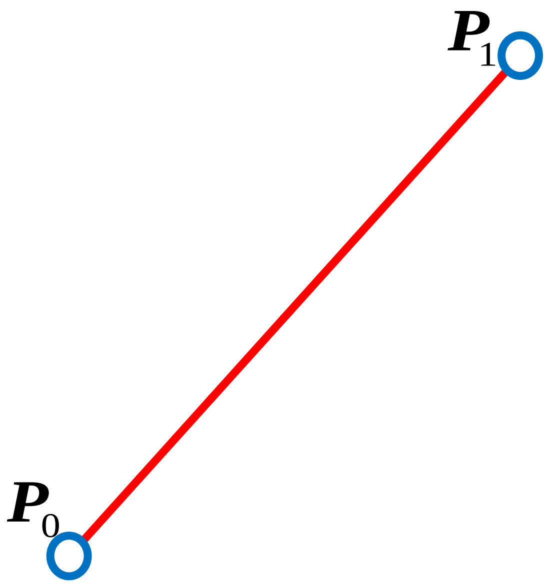
一次贝塞尔曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = (1-t)\boldsymbol{P}_0 + t\boldsymbol{P}_1, t \in [0,1], \boldsymbol{P}_i \in R^2, i = 0,1.$$

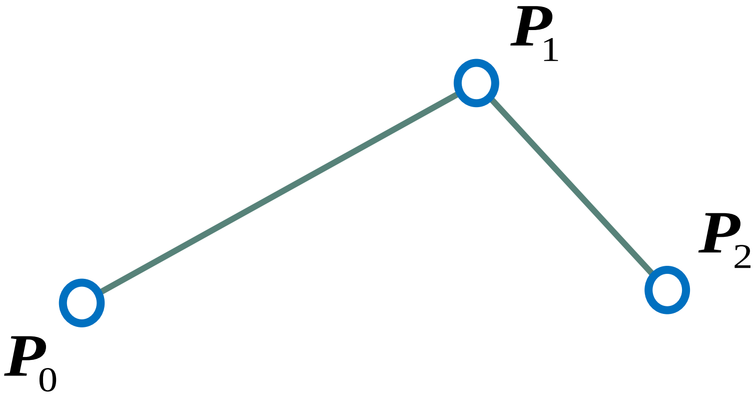
控制顶点：$\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$

控制多边形：$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1$

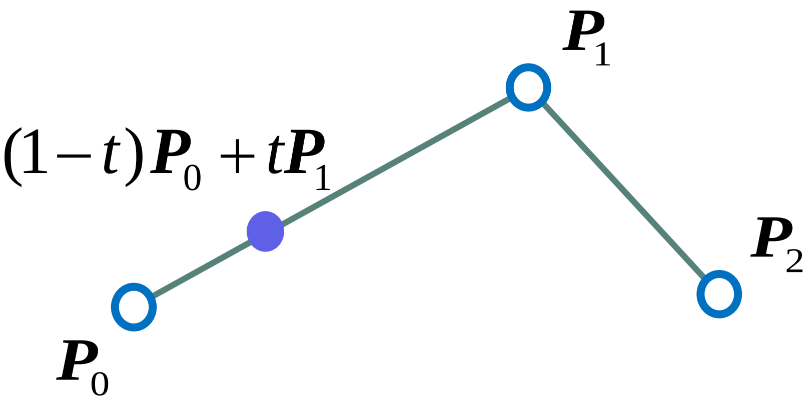
一次Bernstein基函数：　$(1-t), t$



二次贝塞尔曲线

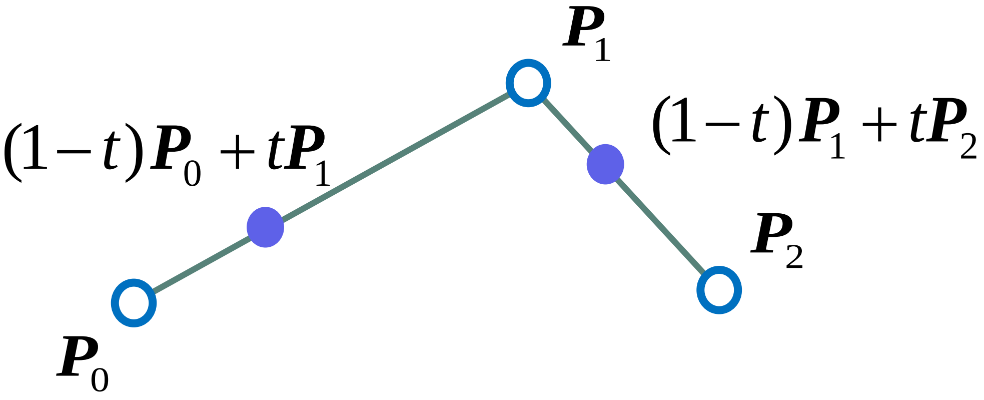


二次贝塞尔曲线

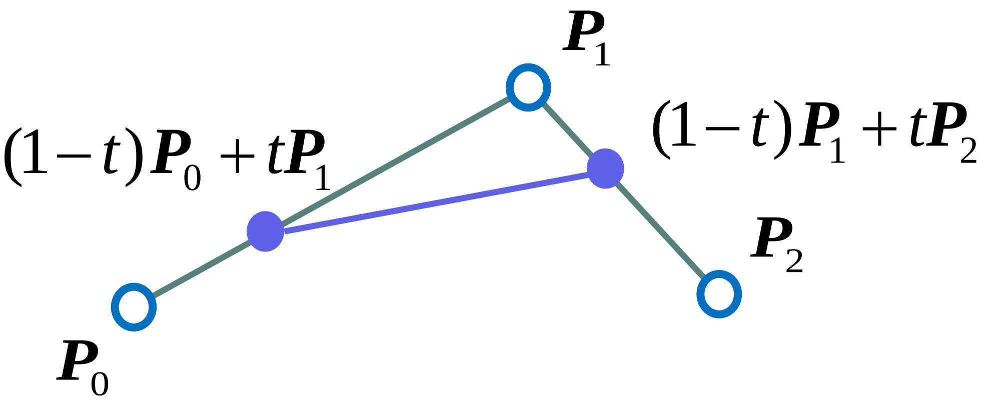


$(1-t)\boldsymbol{P}_0 + t\boldsymbol{P}_1$
$\boldsymbol{P}_1$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$

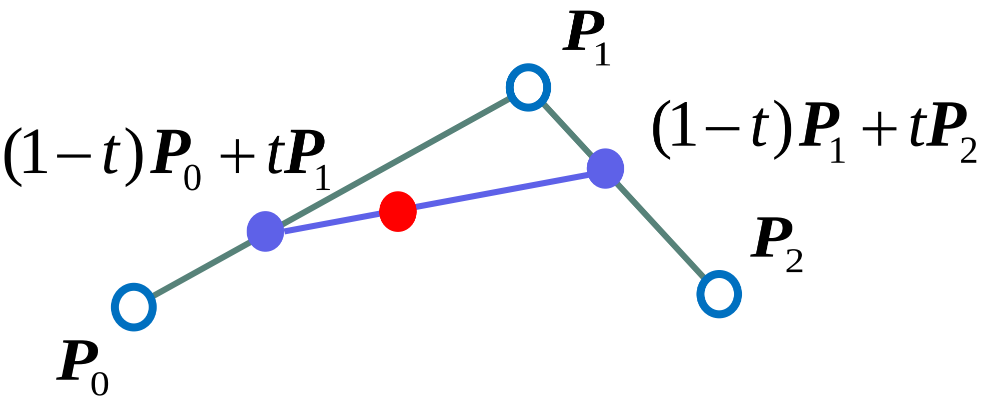
二次贝塞尔曲线



二次贝塞尔曲线

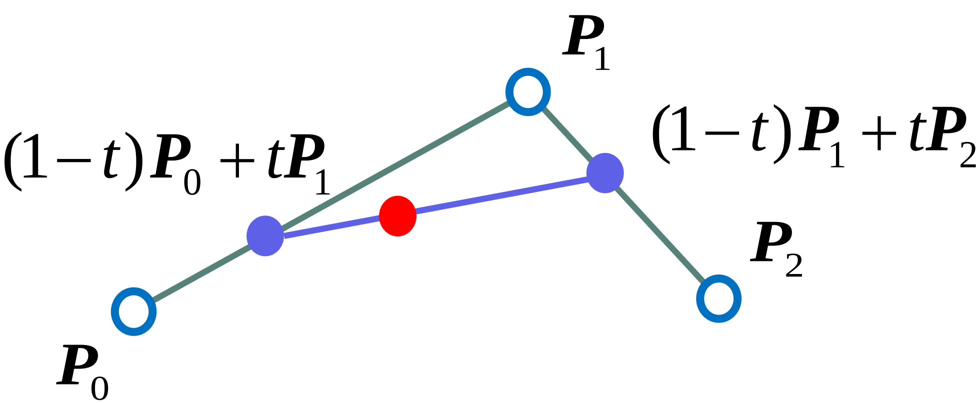


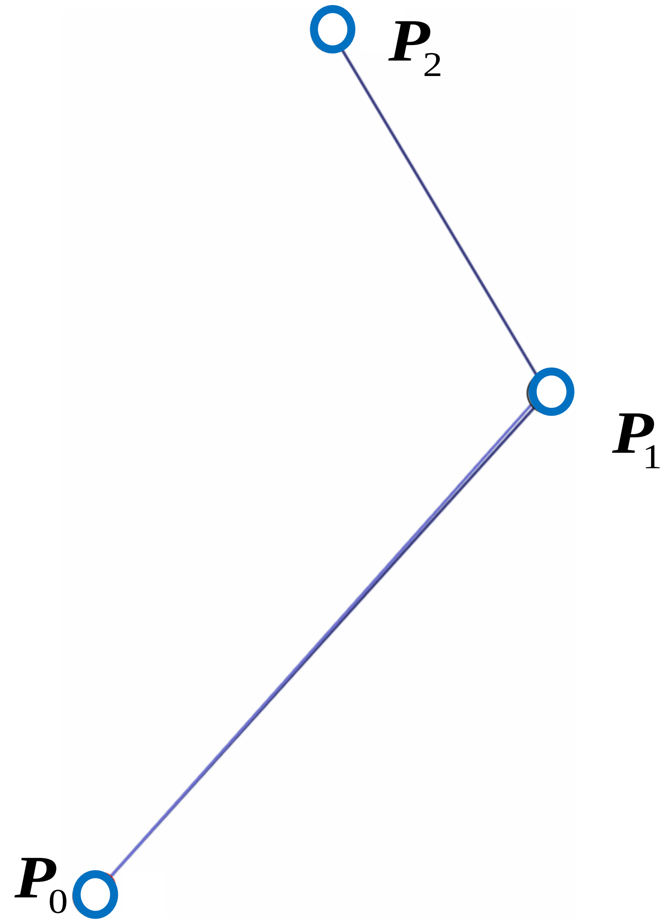
二次贝塞尔曲线



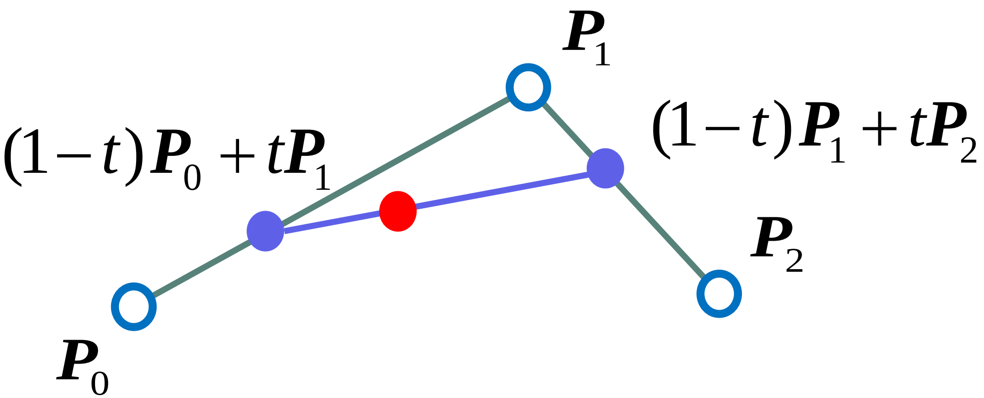
$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$

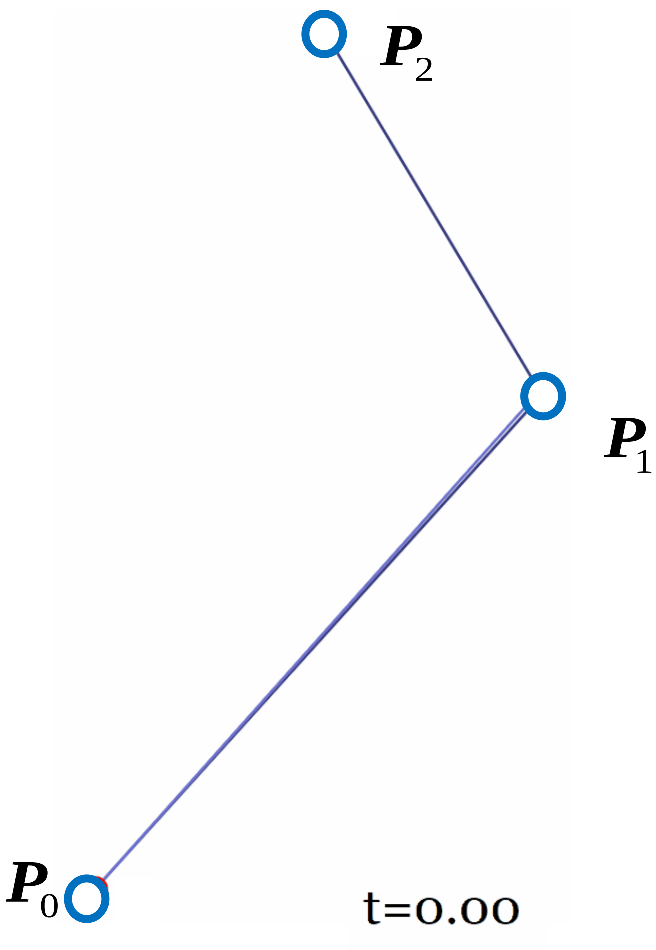
二次贝塞尔曲线





二次贝塞尔曲线

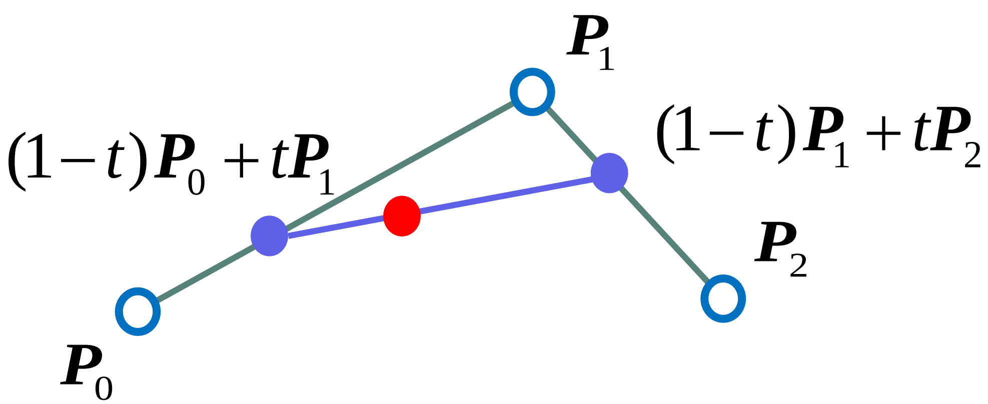


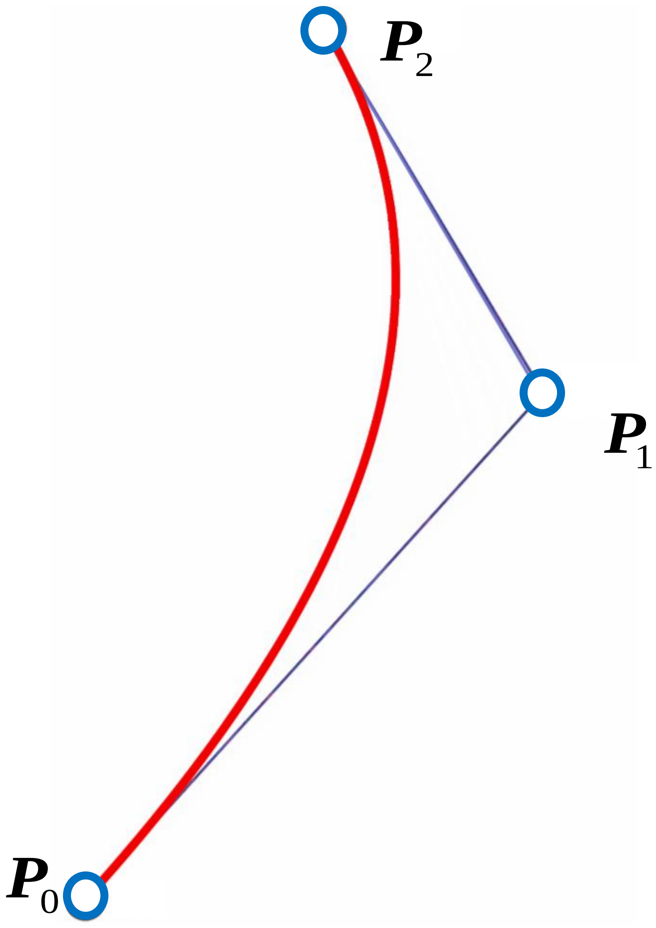


二次贝塞尔曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = (1-t)^2 \boldsymbol{P}_0 + 2t(1-t)\boldsymbol{P}_1 + t^2 \boldsymbol{P}_2,$$

$$t \in [0,1],\ \boldsymbol{P}_i \in R^2, i = 0,1,2.$$





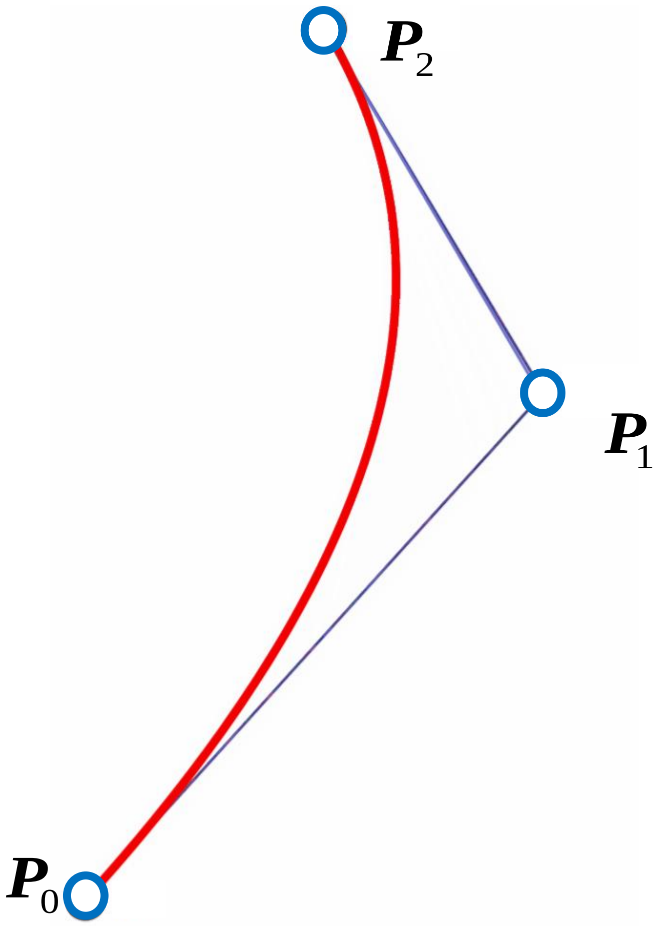
二次贝塞尔曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=(1-t)^2\boldsymbol{P}_0+2t(1-t)\boldsymbol{P}_1+t^2\boldsymbol{P}_2,$$
$$t\in[0,1],\ \boldsymbol{P}_i\in R^2, i=0,1,2.$$

控制顶点：$\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$

控制多边形：$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$

二次Bernstein基函数：$(1-t)^2, 2t(1-t), t^2$



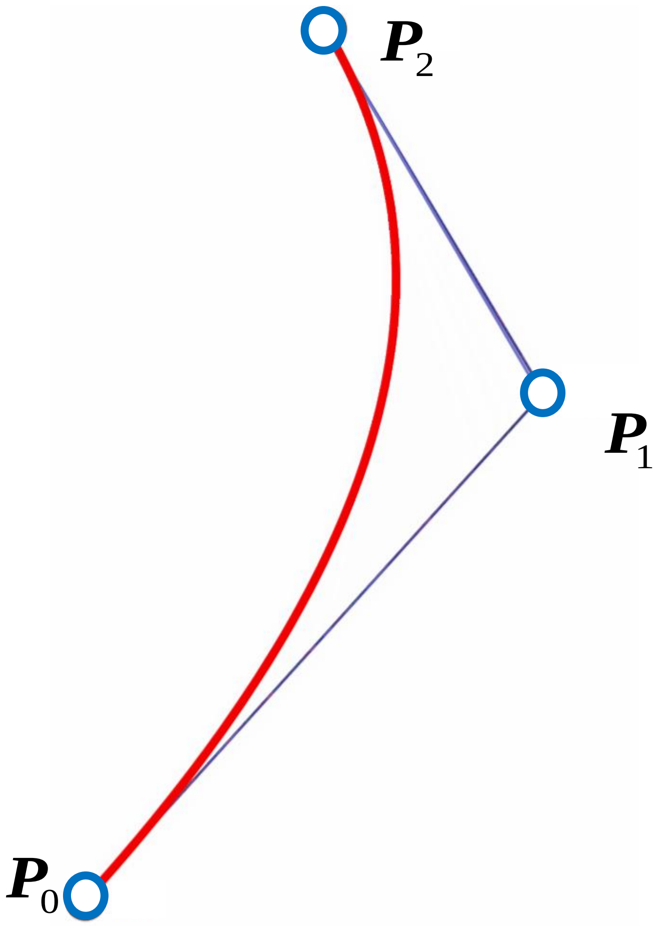
二次贝塞尔曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=(1-t)^2\boldsymbol{P}_0+2t(1-t)\boldsymbol{P}_1+t^2\boldsymbol{P}_2,$$
$$t\in[0,1],\ \boldsymbol{P}_i\in R^2, i=0,1,2.$$

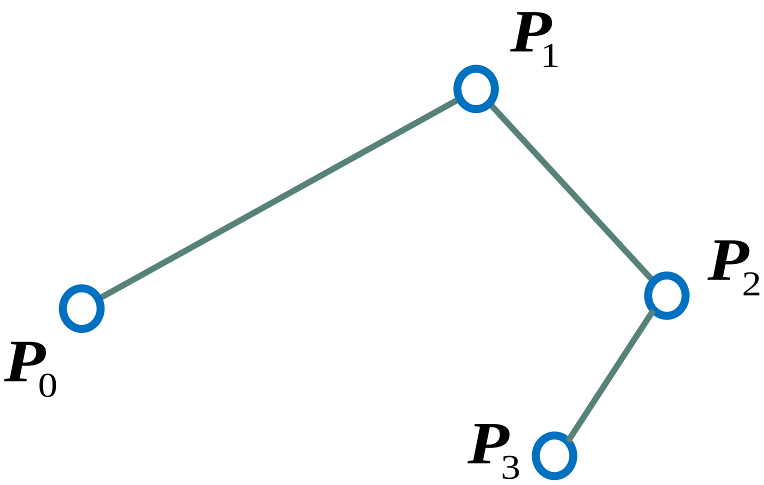
控制顶点：$\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$

控制多边形：$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$

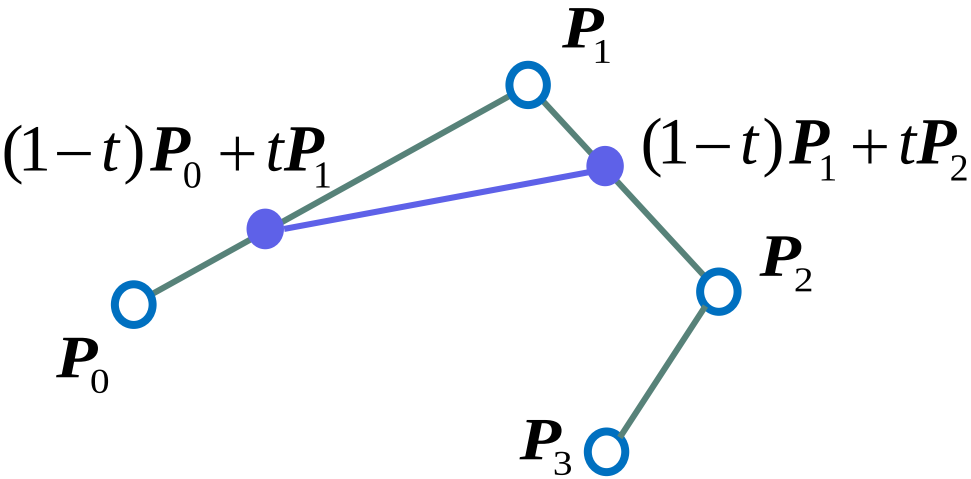
二次Bernstein基函数：$(1-t)^2, 2t(1-t), t^2$



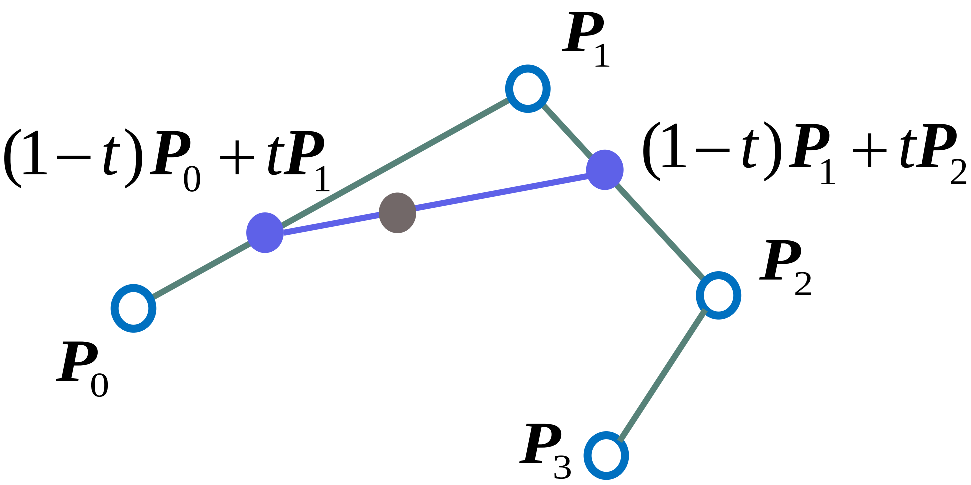
三次贝塞尔曲线



三次贝塞尔曲线

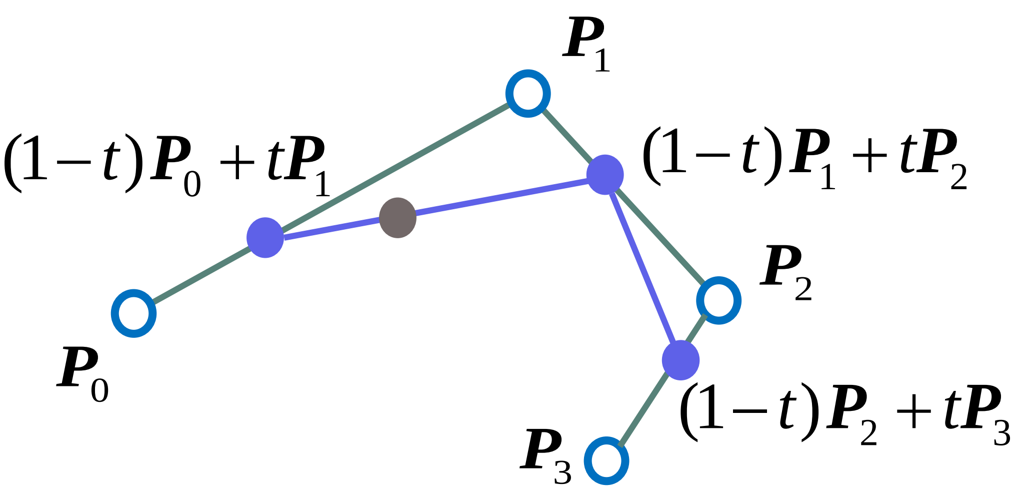

$(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$
$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$
$\boldsymbol{P}_3$

三次贝塞尔曲线



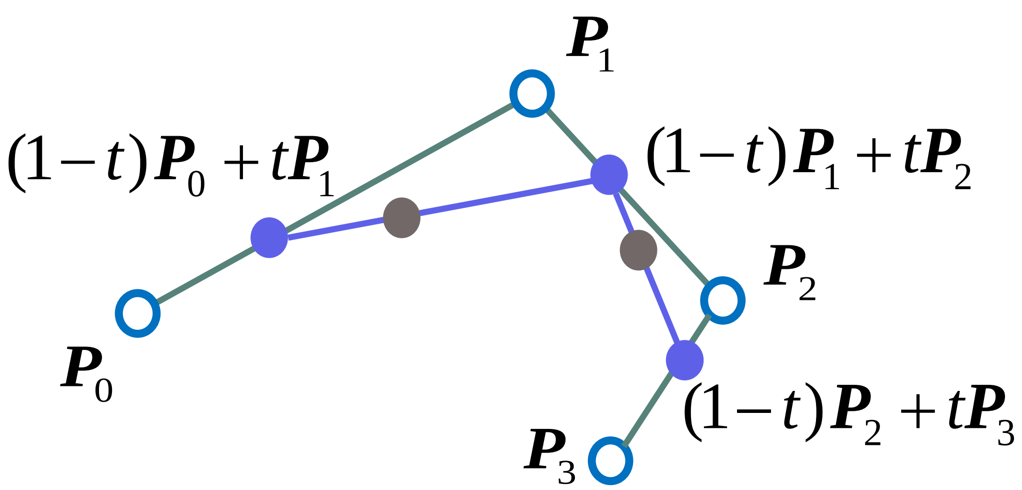
$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_0 + t\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1 + t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$
$\boldsymbol{P}_3$

三次贝塞尔曲线

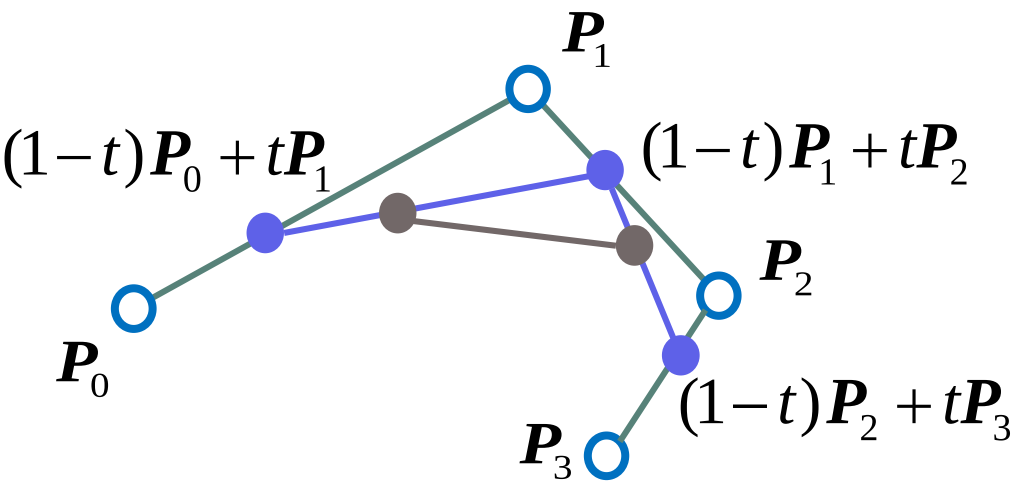


$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$
$(1-t)\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{P}_3$
$\boldsymbol{P}_3$

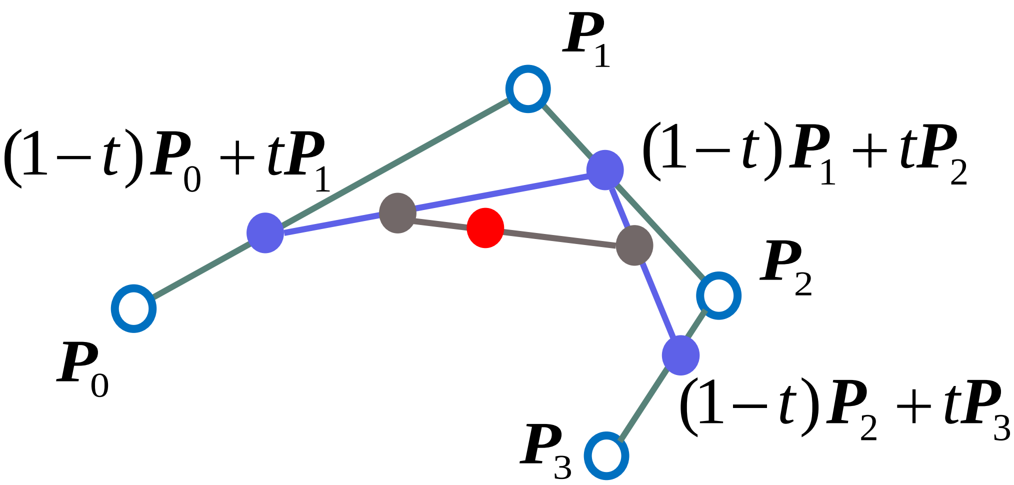
三次贝塞尔曲线


$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_0 + t\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1 + t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$
$(1-t)\boldsymbol{P}_2 + t\boldsymbol{P}_3$
$\boldsymbol{P}_3$

三次贝塞尔曲线

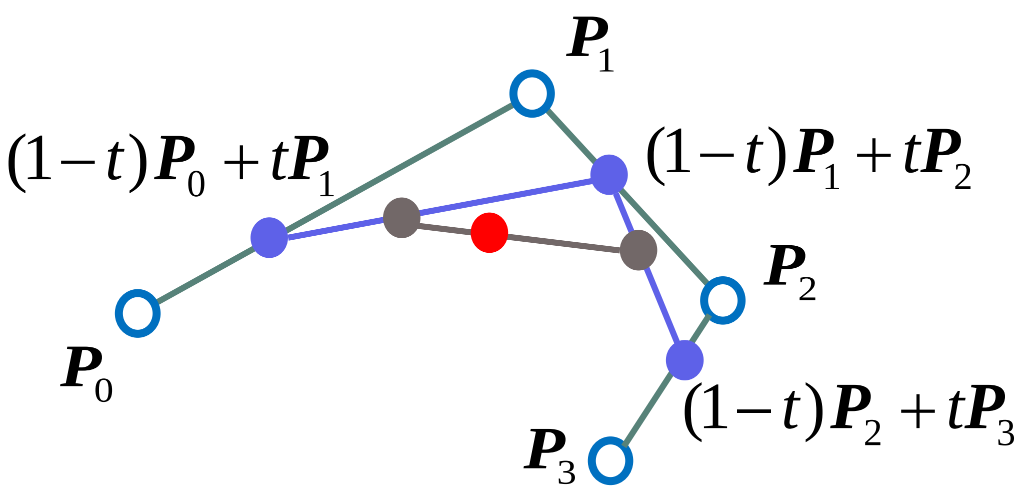


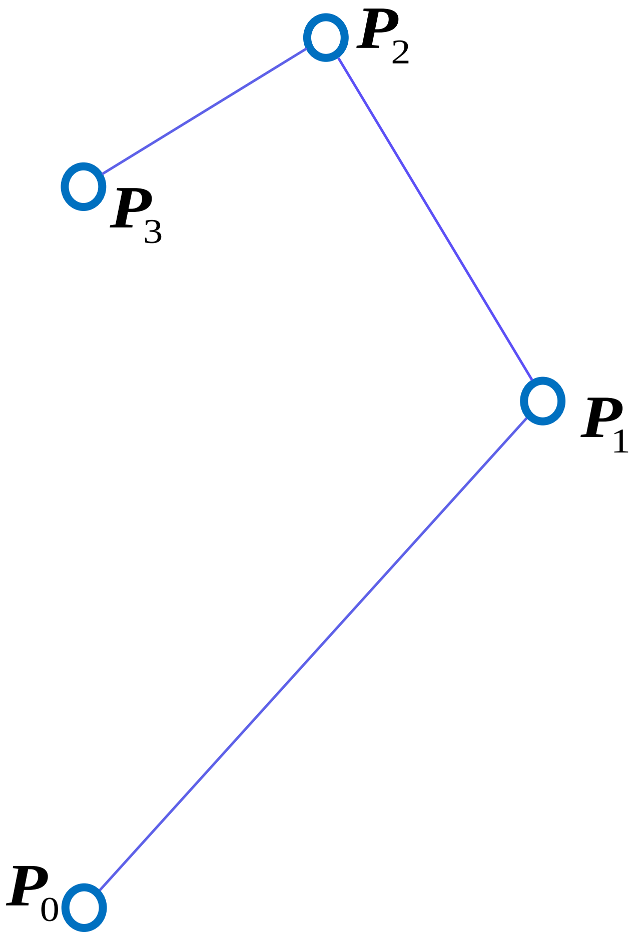
三次贝塞尔曲线



$\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$
$(1-t)\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_2$
$\boldsymbol{P}_0$
$(1-t)\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{P}_3$
$\boldsymbol{P}_3$

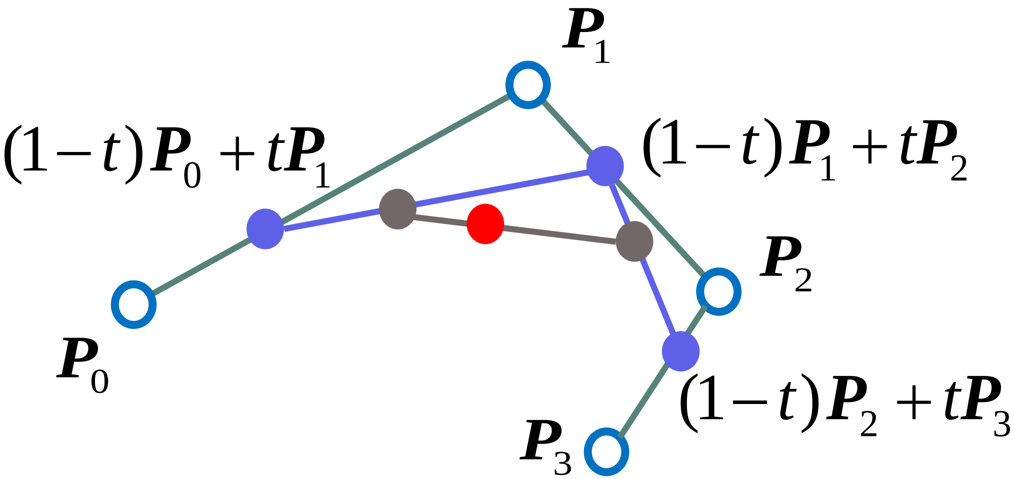
三次贝塞尔曲线

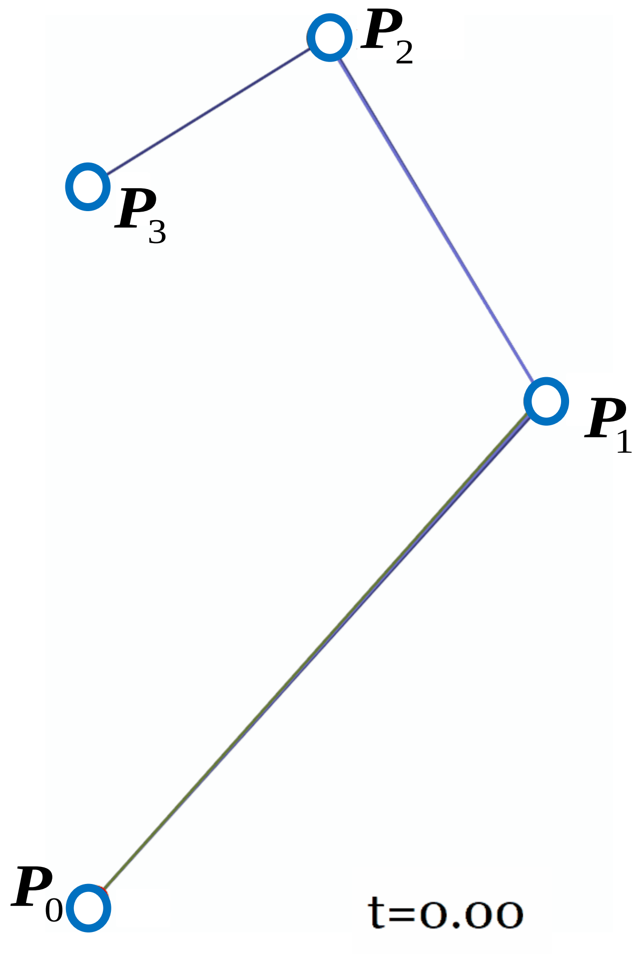




三次贝塞尔曲线

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3,$$
$$t \in [0,1],\ P_i \in R^2, i = 0,1,2,3.$$





三次贝塞尔曲线

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3,$$

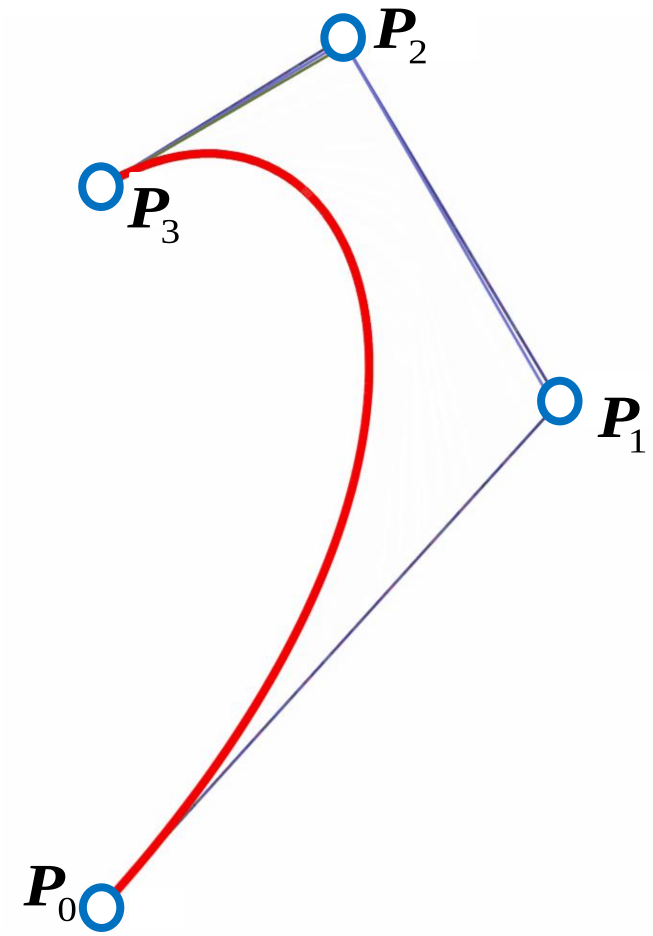
$$t \in [0,1],\ P_i \in R^2, i = 0,1,2,3.$$

控制顶点：P_0, P_1, P_2, P_3

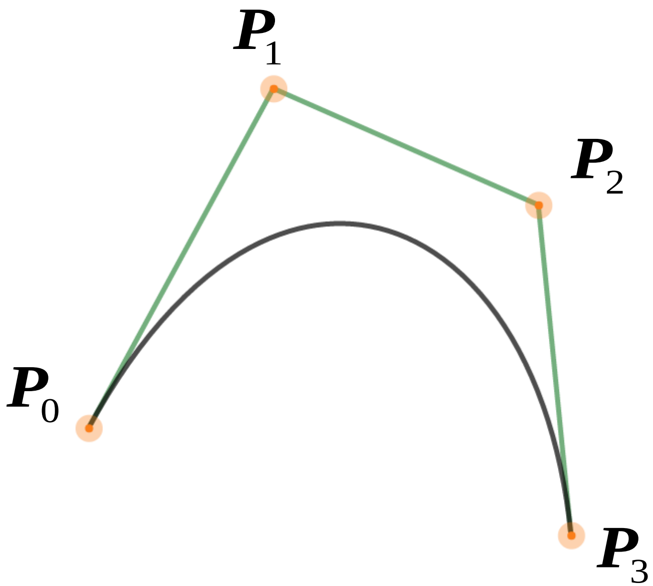
控制多边形：$P_0P_1P_2P_3$

三次Bernstein基函数：

$$(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3$$



三次贝塞尔曲线的计算

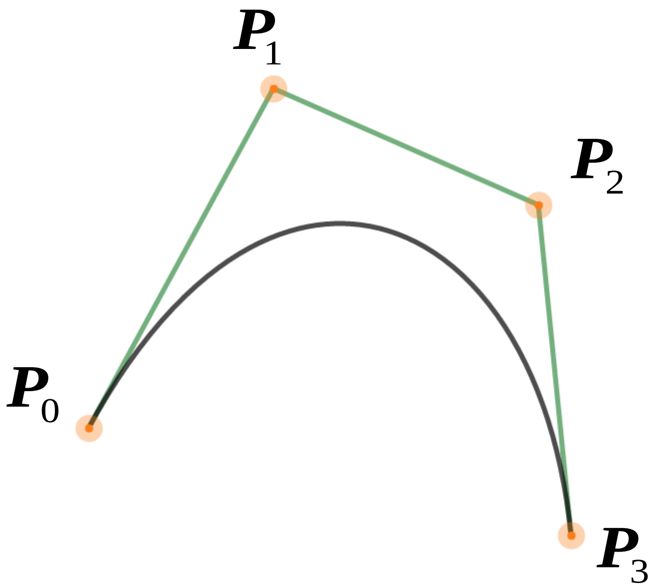


$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3} C_n^i (1-t)^{3-i} \boldsymbol{t}^i \boldsymbol{P}_i, t\in[0,1]$$

三次贝塞尔曲线的计算

$: \times (1-t)$

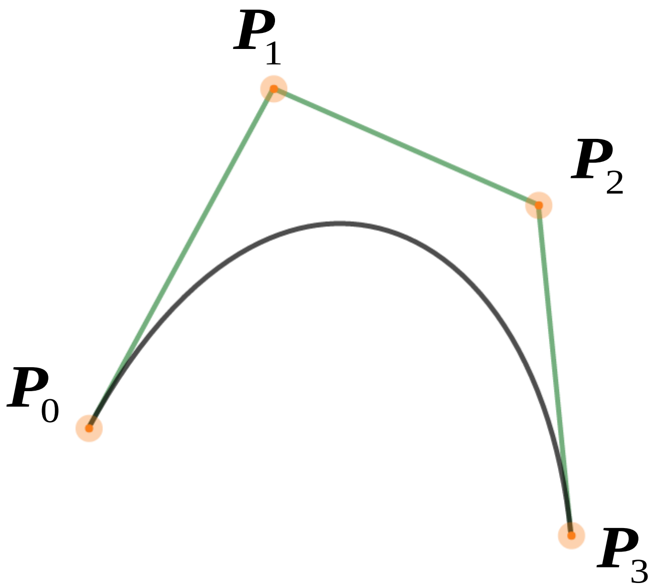
$: \times t$

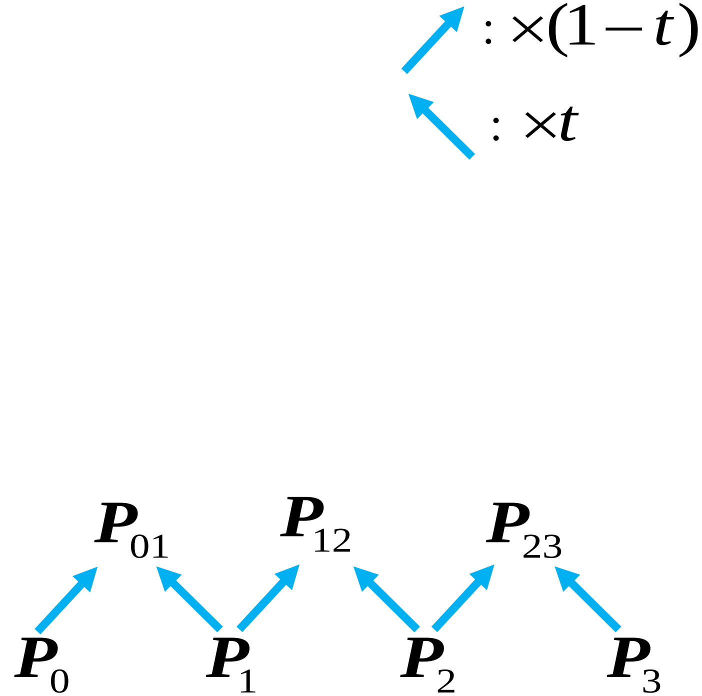


$\boldsymbol{P}_0$ $\boldsymbol{P}_1$ $\boldsymbol{P}_2$ $\boldsymbol{P}_3$

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3} C_n^i (1-t)^{3-i} \boldsymbol{t}^i \boldsymbol{P}_i, t \in [0,1]$$

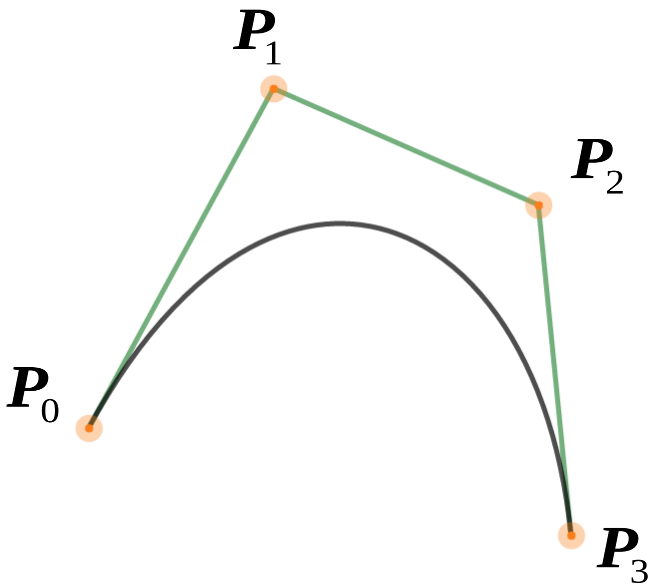
三次贝塞尔曲线的计算

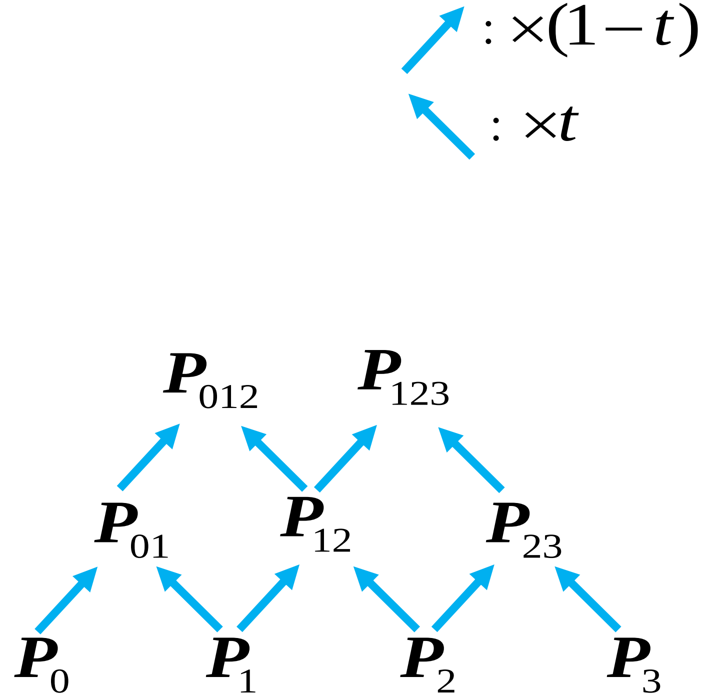




$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3} C_n^i (1-t)^{3-i}\boldsymbol{t}^i\boldsymbol{P}_i, t\in[0,1]$$

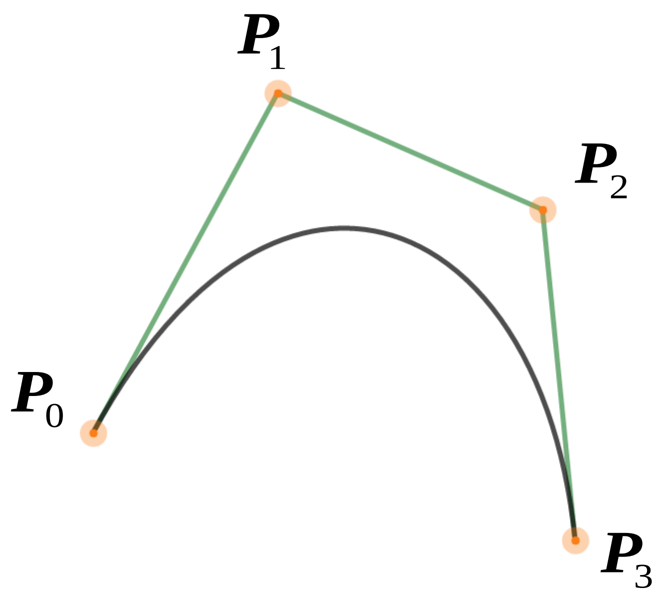
三次贝塞尔曲线的计算

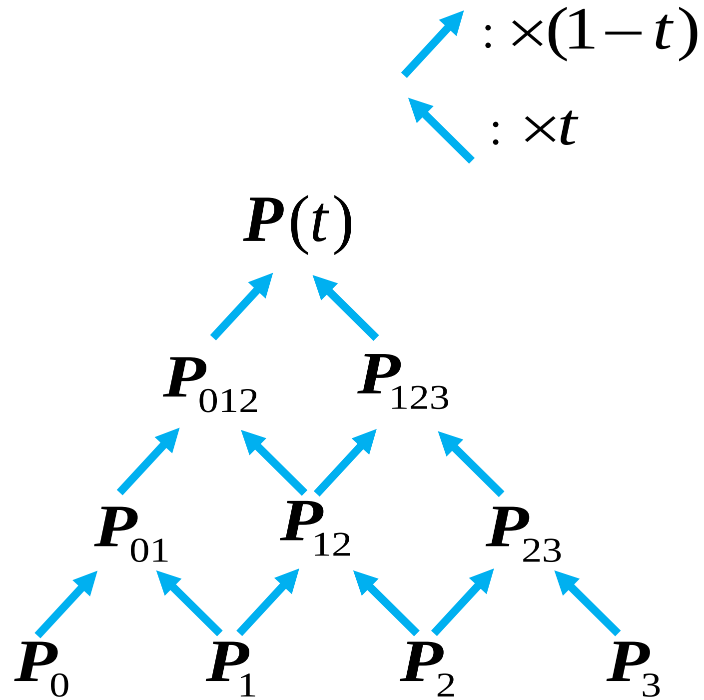




$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3}C_n^i(1-t)^{3-i}\boldsymbol{t}^i\boldsymbol{P}_i,t\in[0,1]$$

三次贝塞尔曲线的计算





$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3} C_n^i (1-t)^{3-i}\boldsymbol{t}^i \boldsymbol{P}_i, t\in[0,1]$$

de Casteljau 算法

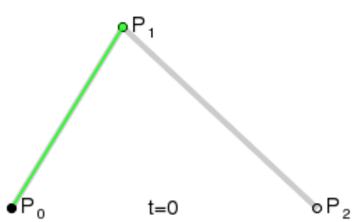
Bézier曲线

- 定义
  - n次Bernstein多项式

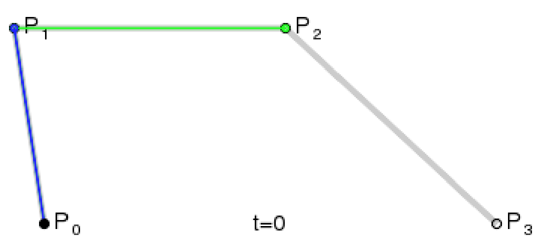
$$b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ i = 0,1,\ldots,n$$

  - (n+1)个控制顶点定义n次Bezier曲线

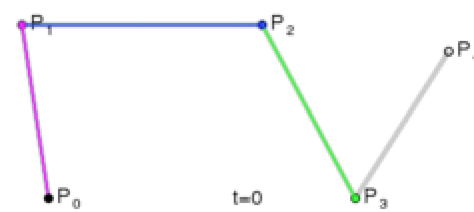
$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i b_{i,n}(t)$$



Quadratic



Cubic



Quartic

Bernstein多项式性质

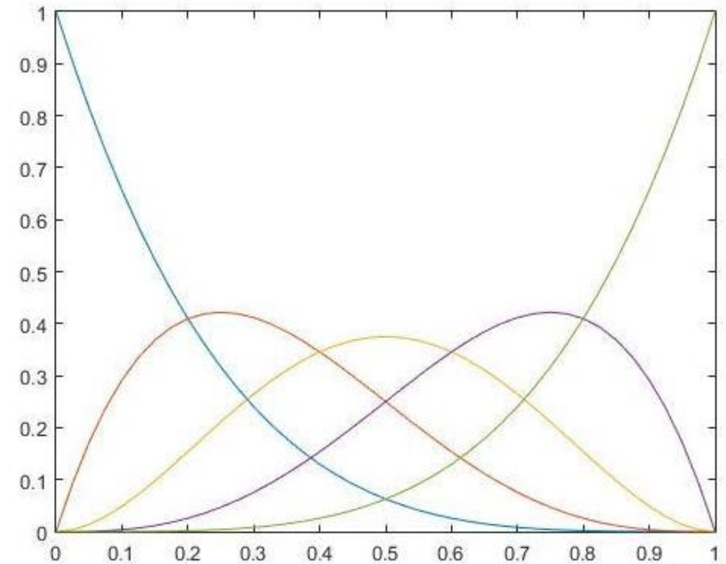
对于$t \in [0,1]$,Bernstein基函数有以下性质:

1. 非负性.

$$B_i^n(t) \geq 0, t \in [0,1].$$

2. 单位分解性.

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^n(t) = [t + (1-t)]^n \equiv 1.$$



3. 端点性质.在端点$t=0$和$t=1$，分别只有一个Bernstein基函数取值为1，其余为0，即

$$B_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \qquad B_i^n(1) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

4. 对称性.从图像上看，第 i 个和第 $n-i$ 个Bernstein基函数关于$t=\frac{1}{2}$对称，即

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t), i = 0, 1, ..., n.$$

Bézier曲线性质

- 端点位置：

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_3$$

- 端点导数：

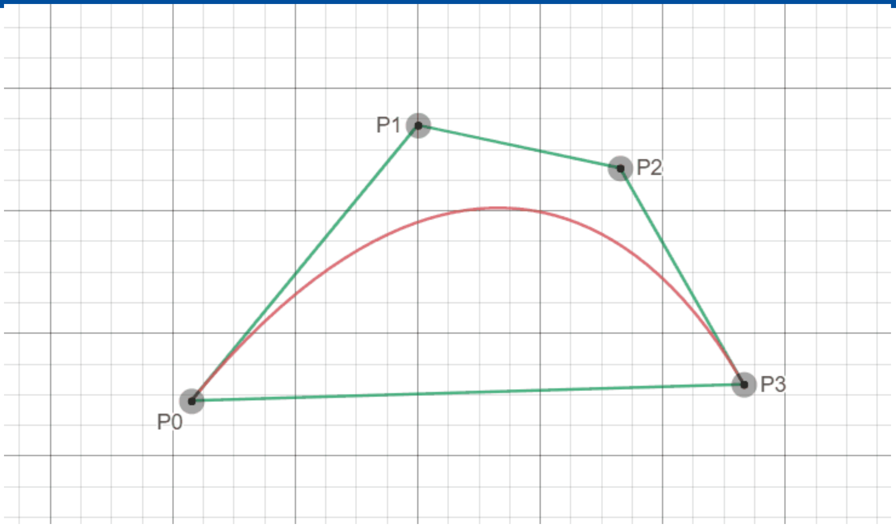
$$\mathbf{p}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

$$\mathbf{p}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

- 保凸性质：

  曲线包含在控制点形成的凸包内

- 仿射变换不变性
- 变差缩减性质



Bézier曲线性质

- 端点位置：

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_3$$

- 端点导数：

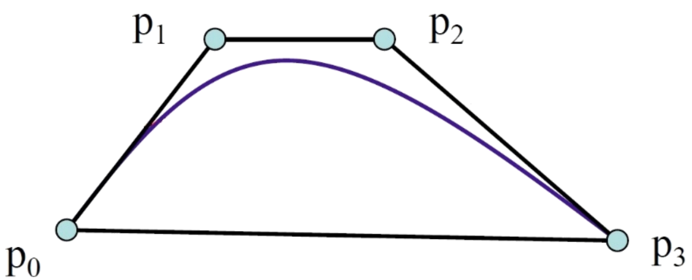
$$\mathbf{p}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

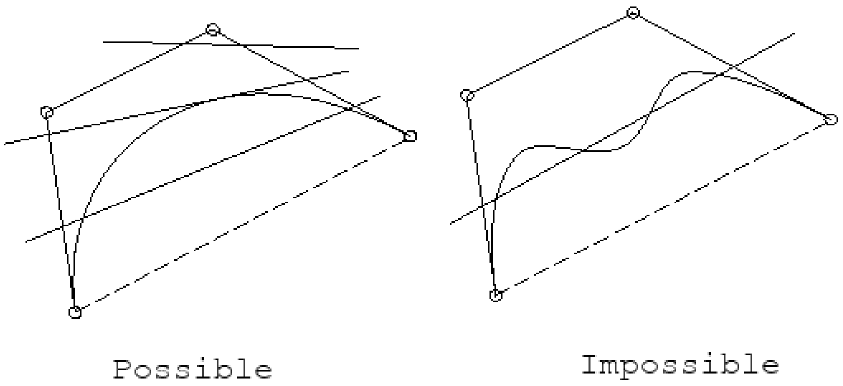
$$\mathbf{p}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

- 保凸性质：

曲线包含在控制点形成的凸包内

- 仿射变换不变性
- 变差缩减性质





Bézier曲线与一般多项式曲线

- Bézier曲线方程：

$$\mathbf{p}(u)=(1-u)^3\mathbf{p}_0+3u(1-u)^2\mathbf{p}_1+3u^2(1-u)\mathbf{p}_2+u^3\mathbf{p}_3$$

- 比较：一般多项式曲线

$$\mathbf{p}(u)=\mathbf{c}_0+u\mathbf{c}_1+u^2\mathbf{c}_2+u^3\mathbf{c}_3$$

- 转换矩阵

$$\mathbf{p}(u)=\begin{bmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_0\\ \boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}$$

Bézier曲线与一般多项式曲线

- Bézier曲线方程：

$$\mathbf{p}(u)=(1-u)^3\mathbf{p}_0+3u(1-u)^2\mathbf{p}_1+3u^2(1-u)\mathbf{p}_2+u^3\mathbf{p}_3$$

- **比较**：一般多项式曲线

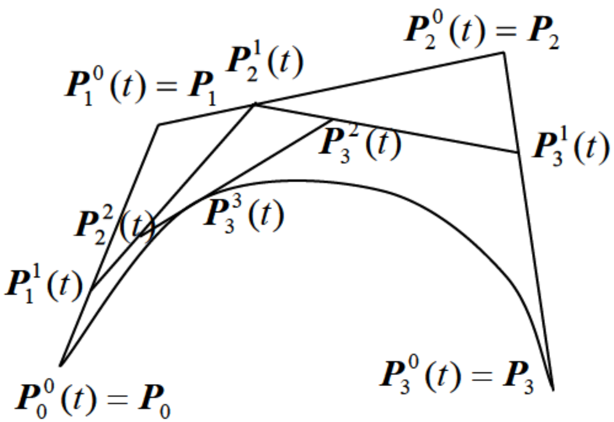
$$\mathbf{p}(u)=\mathbf{c}_0+u\mathbf{c}_1+u^2\mathbf{c}_2+u^3\mathbf{c}_3$$

- 转换矩阵

$$\boldsymbol{p}(u)=\begin{bmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_0\\ \boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}$$

Bézier曲线

- de Casteljau递归算法（作图定理）



$$
\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{p}_0^0 & & & & & & \\
 & \boldsymbol{p}_1^1(u) & & & & & \\
\boldsymbol{p}_1^0 & & \boldsymbol{p}_2^2(u) & & & & \\
 & \boldsymbol{p}_2^1(u) & & & \boldsymbol{p}_{n-1}^{n-1}(u) & & \\
\boldsymbol{p}_2^0 & & \vdots & \vdots & & & \boldsymbol{p}_n^n(u) \\
 & \vdots & & & \boldsymbol{p}_n^{n-1}(u) & & \\
\vdots & & \boldsymbol{p}_n^2(u) & & & & \\
 & \boldsymbol{p}_n^1(u) & & & & & \\
\boldsymbol{p}_n^0 & & & & & &
\end{array}
$$

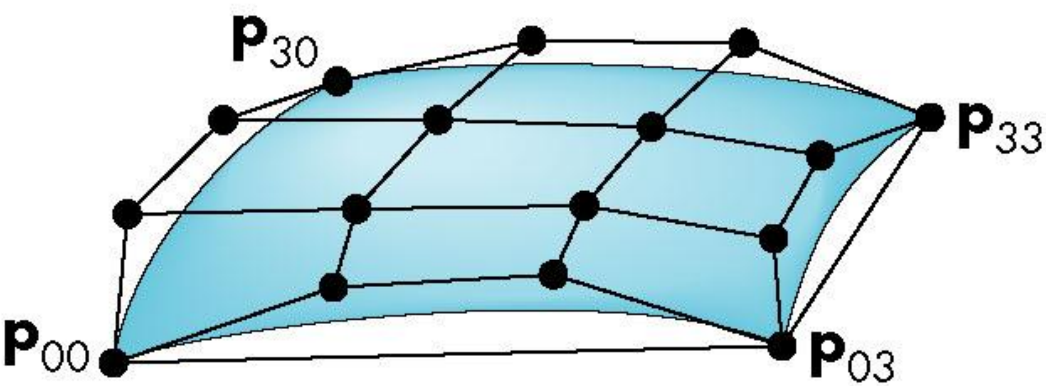
$t=u$

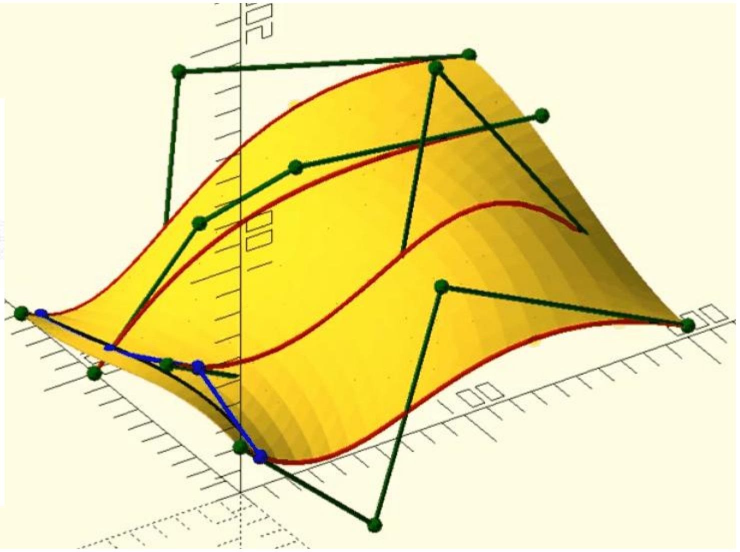
$$
\begin{cases}
\boldsymbol{p}_i^r(u)=(1-u)\boldsymbol{p}_{i-1}^{r-1}(u)+u\boldsymbol{p}_i^{r-1}(u) \\
\boldsymbol{p}_i^0(u)\equiv\boldsymbol{p}_i^0=\boldsymbol{p}_i
\end{cases}
$$

Bézier曲面

- 多项式曲面参数表达
- 由两个变量的Bernstein混合函数表示
- m×n次Bézier曲面需要(m+1)×(n+1)个控制顶点

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_{ij}b_{i,m}(u)b_{j,n}(v)$$



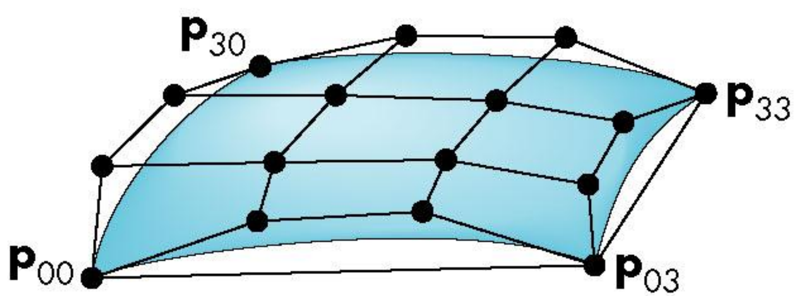


Bézier曲面片性质（以三次为例）

- 插值四个角点$\mathbf{p}_{00}$、$\mathbf{p}_{03}$、$\mathbf{p}_{30}$和$\mathbf{p}_{33}$
- 在角点$\mathbf{p}_{00}$处，u和v方向的切向为：

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(0,0)=3(\mathbf{p}_{10}-\mathbf{p}_{00}),\quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(0,0)=3(\mathbf{p}_{01}-\mathbf{p}_{00})$$

- 曲面片完全包含在数据点形成的凸包内



Bézier曲线/曲面几何建模特点

- 优点
  - 容易编程（de Casteljau递归）
  - 端点和切向插值特性
  - 参数表达
  - 直观
- 缺点
  - 缺乏局部可控性
  - 单条难以描述复杂形状，需拼接