

# Dinámica del "Hopping Hoop": Relación entre Velocidad Inicial y Salto

Robert Orcasitas  
Juan Pablo Celis  
Dylan Alexander Castellanos

## Abstract

El fenómeno del "hopping hoop" describe los movimientos complejos de un aro circular con una masa excéntrica que, al rodar, exhibe comportamientos como deslizamientos, transiciones de contacto y, bajo ciertas condiciones, saltos autoinducidos. Este trabajo relaciona la velocidad inicial del sistema con la aparición de saltos mediante simulaciones realizadas en COMSOL. Adicionalmente, se analiza el modelo de cuerpo rígido basado en la dinámica del problema, complementado con comparaciones gráficas derivadas de las simulaciones. Los resultados destacan el papel crítico de la velocidad inicial, mostrando que los saltos aparecen para velocidades superiores a 3.1 m/s y discuten las limitaciones del modelo para mayores valores.

## 1 Introducción

El problema del "hopping hoop" se basa en un aro que contiene una masa excéntrica, lo que altera su distribución de masa y genera comportamientos dinámicos complejos. Entre estos comportamientos destacan el rodamiento, deslizamiento y, bajo ciertas condiciones, saltos autoinducidos. Este fenómeno, ampliamente estudiado en mecánica, ha sido modelado como un cuerpo rígido siguiendo los principios descritos en [1].

El presente trabajo analiza el efecto de la velocidad inicial en la aparición de saltos. Para ello, se realizaron simulaciones en COMSOL que permitieron estudiar cómo las condiciones iniciales influyen en la dinámica del sistema. Este artículo está organizado de la siguiente manera: se presenta un marco teórico detallado, seguido del análisis de los resultados de simulación, y finalmente se ofrecen conclusiones sobre el comportamiento observado.

## 2 Marco Teórico

El fenómeno del *hopping hoop* ha sido un tema de interés en la dinámica de cuerpos rígidos debido a los comportamientos complejos que emergen cuando un aro con masa excéntrica rueda sobre una superficie rugosa. Este sistema combina rodamiento, deslizamiento y, bajo ciertas condiciones, saltos autoinducidos. A continuación, se presentan las bases teóricas de este fenómeno, con énfasis en el modelo de cuerpo rígido, las condiciones necesarias para el salto y las ecuaciones del movimiento.

### 2.1 Modelo de Cuerpo Rígido

El sistema considerado consiste en un aro circular con radio  $R$  y una masa adherida  $m_2$  a una distancia  $\ell$  del centro geométrico  $C$ . Además, el aro tiene una masa  $m_1$ , lo que da al sistema una masa total de  $m = m_1 + m_2$ . Debido a la presencia de  $m_2$ , el centro de masa  $X$  no coincide con  $C$ . La ubicación del centro de masa está dada por:

$$h = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell. \quad (1)$$

El momento de inercia del sistema respecto al centro de masa es:

$$I = I_{zz} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2, \quad (2)$$

donde  $I_{zz}$  es el momento de inercia del aro respecto a su centro geométrico. Este desplazamiento del centro de masa genera momentos adicionales que afectan las ecuaciones de movimiento.

### 2.2 Ecuaciones de Movimiento

Para analizar el comportamiento del sistema, se consideran dos estados principales: rodamiento puro y deslizamiento. En ambos casos, las ecuaciones de movimiento se derivan de la conservación del momento lineal y angular. La dinámica del sistema puede describirse mediante las siguientes ecuaciones.

**Rodamiento Puro.** Cuando el sistema está en rodamiento puro, no hay deslizamiento en el punto de contacto  $P$ . En este caso, la velocidad tangencial del aro es igual a la velocidad de rotación multiplicada por el radio, es decir,  $\eta = R\theta$ . Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\theta'' = \frac{(m_1 + m_2)Rh \sin \theta \theta'^2 + m_2 g \ell \sin \theta}{I + (m_1 + m_2)(R^2 + h^2 + 2Rh \cos \theta)}, \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación del aro,  $\theta'$  y  $\theta''$  son la velocidad y aceleración angular, respectivamente.

La fuerza normal  $N$  y la fuerza de fricción  $F_f$  pueden expresarse como:

$$N = (m_1 + m_2)g - m_2\ell (\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2), \quad (4)$$

$$F_f = -(m_1 + m_2)(R + h \cos \theta)\theta'' + m_2\ell \sin \theta \theta'^2. \quad (5)$$

**Deslizamiento.** Si el sistema pierde el contacto puro (deslizamiento), la fricción se convierte en dinámica y se opone a la velocidad relativa en el punto de contacto  $P$ . Las ecuaciones de movimiento en este caso están dadas por:

$$M \begin{bmatrix} \eta'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mh \sin \theta \theta'^2 \\ -mRh \sin \theta \theta'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_k N \frac{\eta'}{|\eta'|} \\ m_2 g \ell \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde  $M$  es la matriz de masa del sistema y  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción dinámica. La normal  $N$  en este caso está dada por:

$$N = (m_1 + m_2)g - m_2\ell (\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2). \quad (7)$$

## 2.3 Condición de Salto

Un salto autoinducido ocurre cuando la fuerza normal  $N$  se anula y la velocidad vertical del centro de masa  $\dot{y}$  es positiva. Esto requiere que:

$$\dot{y} = -h \sin \theta \theta' > 0 \quad \text{y} \quad N = 0. \quad (8)$$

Este fenómeno es posible solo si la energía cinética del sistema es suficiente para superar la condición de contacto.

## 2.4 Transiciones Entre Estados

El sistema puede experimentar transiciones entre rodamiento, deslizamiento y salto. Estas transiciones están determinadas por las siguientes condiciones:

- De rodamiento a deslizamiento: ocurre cuando la fuerza de fricción estática no es suficiente para mantener el rodamiento puro.
- De deslizamiento a salto: ocurre cuando  $N = 0$  y  $\dot{y} > 0$ .
- De salto a contacto: después de un salto, el aro vuelve a impactar con el suelo, iniciando un nuevo ciclo.

## 2.5 Análisis Energético

Durante el movimiento, la energía total del sistema se conserva en ausencia de fricción. La energía cinética  $T$  y potencial  $U$  están dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (9)$$

$$U = m_2 g \ell \cos \theta. \quad (10)$$

La suma  $T + U$  permite analizar las trayectorias y determinar las condiciones necesarias para el salto.

## 3 Análisis de la Simulación

Las simulaciones realizadas en COMSOL permiten estudiar la relación entre la velocidad inicial y el comportamiento dinámico del *hopping hoop*. En particular, se analizaron los resultados para velocidades iniciales de 0.1, 2.8, 3.1 y 3.5 m/s. Este análisis incluye una discusión sobre la evolución de las fuerzas, las velocidades, la energía cinética y potencial, y las transiciones dinámicas del sistema.

### 3.1 Velocidad inicial: 0.1 m/s

Con una velocidad inicial de 0.1 m/s, el sistema se mantiene en un estado de rodamiento puro. Las gráficas muestran que las oscilaciones en la energía cinética y potencial son mínimas, mientras que la fuerza normal  $N$  permanece constante y positiva. Esto indica que no se alcanzan las condiciones para un salto.

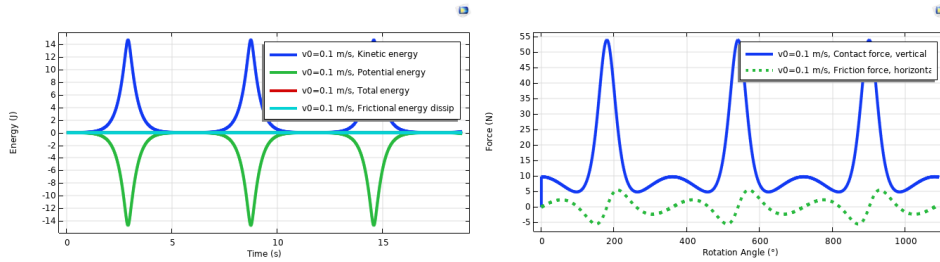


Figure 1: Izquierda: Energía cinética (azul) y potencial (verde) frente al tiempo. Derecha: Fuerza normal (Azul)  $N$  frente al ángulo de rotación para  $v_0 = 0.1$  m/s.

En la Figura 1, la gráfica de energía muestra una evolución estable sin cambios abruptos, reflejando que el sistema permanece en un régimen de contacto constante. La fuerza normal  $N$  (derecha) es positiva y casi constante, confirmando la ausencia de transiciones dinámicas significativas.

### 3.2 Velocidad inicial: 2.8 m/s

Para una velocidad inicial de 2.8 m/s, el sistema presenta oscilaciones más marcadas en las fuerzas y la energía, pero todavía no se observan saltos. La fuerza normal  $N$  varía considerablemente, acercándose a cero en algunos puntos, pero sin llegar a anularse.

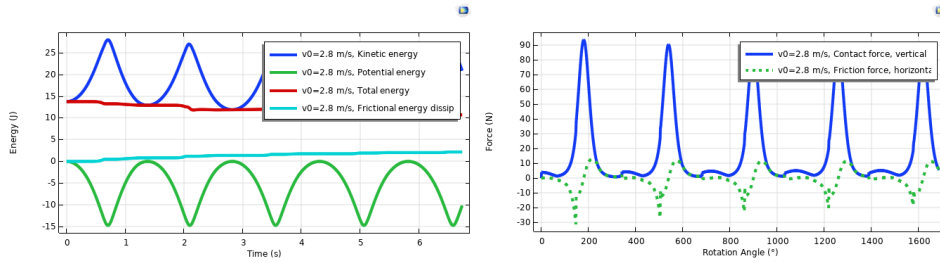


Figure 2: Izquierda: Energía cinética (azul) y potencial (verde) frente al tiempo. Derecha: Fuerza normal  $N$  frente al ángulo de rotación para  $v_0 = 2.8$  m/s.

En la Figura 2, la gráfica de energía muestra un intercambio más dinámico entre energía cinética y potencial, reflejando oscilaciones más amplias. La fuerza normal  $N$  muestra una mayor variabilidad, acercándose a cero en algunos instantes, lo que indica que el sistema está cerca del umbral de salto.

### 3.3 Velocidad inicial: 3.1 m/s

Con  $v_0 = 3.1$  m/s, el sistema comienza a experimentar saltos. La fuerza normal  $N$  alcanza valores cercanos a cero repetidamente, indicando transiciones entre fases de contacto y vuelo. Este es el umbral crítico para que ocurran saltos autoinducidos.

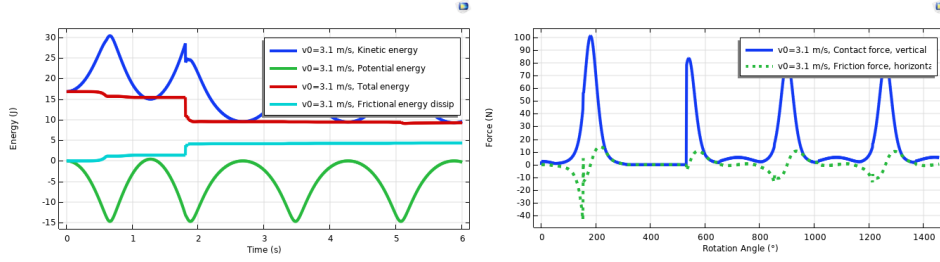


Figure 3: Izquierda: Energía cinética (azul) y potencial (verde) frente al tiempo. Derecha: Fuerza normal  $N$  frente al ángulo de rotación para  $v_0 = 3.1$  m/s.

En la Figura 3, la energía cinética presenta picos pronunciados durante las fases de vuelo, mientras que la energía potencial disminuye rápidamente cuando el aro pierde contacto. La fuerza normal  $N$  oscila periódicamente, alcanzando valores cercanos a cero, lo que marca los momentos de despegue.

### 3.4 Velocidad inicial: 3.5 m/s

Para  $v_0 = 3.5$  m/s, aunque los saltos son evidentes, las gráficas comienzan a mostrar inconsistencias físicas. La fuerza normal  $N$  se vuelve negativa en ciertos intervalos, lo cual no es físicamente posible. Estas inconsistencias indican que el modelo numérico presenta limitaciones para estas condiciones.

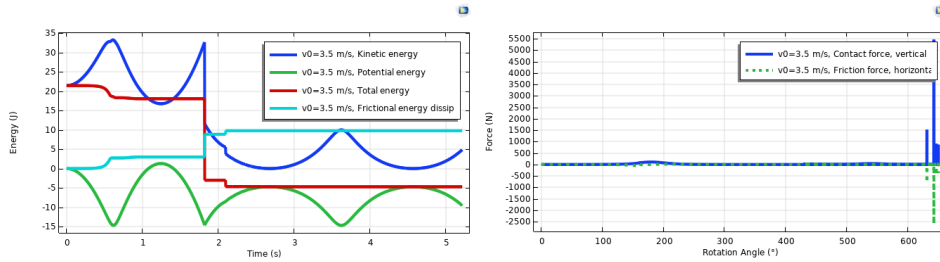


Figure 4: Izquierda: Energía cinética (azul) y potencial (verde) frente al tiempo. Derecha: Fuerza normal  $N$  frente al ángulo de rotación para  $v_0 = 3.5$  m/s.

En la Figura 4, la energía cinética exhibe fluctuaciones abruptas, mientras que la energía potencial tiene caídas significativas. La fuerza normal  $N$  presenta valores negativos en algunos puntos, lo que indica inconsistencias en el modelo numérico.

### 3.5 Análisis de las Velocidades Traslacional y Angular

El análisis de las velocidades traslacional ( $v_t$ ) y angular ( $\omega$ ) proporciona información valiosa sobre los diferentes regímenes dinámicos del sistema. Cada gráfico incluye ambas velocidades, graficadas en función del ángulo de rotación  $\theta$  y del tiempo  $t$ . Estas gráficas permiten identificar cómo evolucionan las velocidades en cada velocidad inicial.

#### 3.5.1 Velocidad inicial: 0.1 m/s

Para  $v_0 = 0.1$  m/s, las velocidades traslacional y angular están completamente acopladas, cumpliendo la relación  $v_t = R\omega$ , característica del rodamiento puro. Esto se observa tanto en las gráficas frente al tiempo como frente al ángulo.

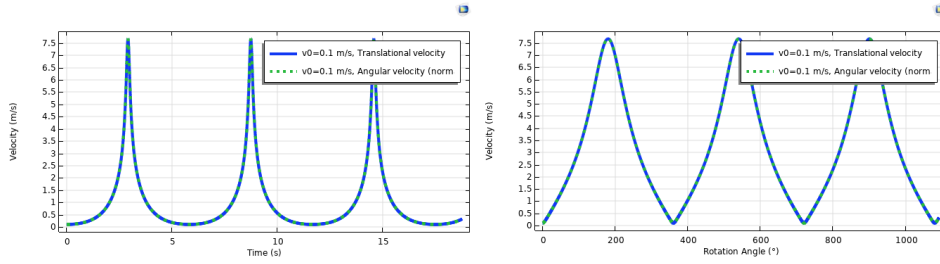


Figure 5: Izquierda: Velocidades traslacional ( $v_t$ , azul) y angular ( $\omega$ , verde) frente al tiempo. Derecha: Velocidades  $v_t$  y  $\omega$  frente al ángulo de rotación  $\theta$  para  $v_0 = 0.1$  m/s.

En la Figura 5, ambas gráficas muestran que las velocidades traslacional y angular tienen patrones sinusoidales suaves, reflejando oscilaciones pequeñas y sincronizadas. La representación frente a  $\theta$  destaca el acoplamiento estricto entre  $v_t$  y  $\omega$ , lo que confirma que el sistema permanece en rodamiento puro.

#### 3.5.2 Velocidad inicial: 2.8 m/s

A  $v_0 = 2.8$  m/s, las gráficas muestran oscilaciones más amplias en ambas velocidades. Aunque aún están correlacionadas, comienzan a observarse ligeras desviaciones, indicando la presencia de deslizamientos intermitentes.

En la Figura 6, se observa que  $v_t$  y  $\omega$  tienen mayor amplitud en sus oscilaciones. En la gráfica frente a  $\theta$ , las curvas de ambas velocidades permanecen cercanas, aunque muestran ligeros desfases, lo que sugiere un inicio de desacoplamiento debido a deslizamientos pequeños.

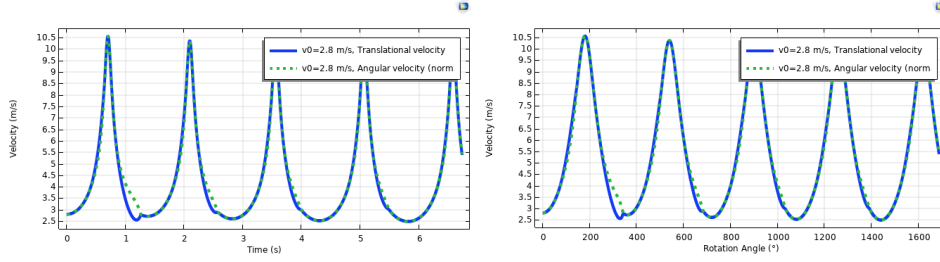


Figure 6: Izquierda: Velocidades traslacional ( $v_t$ , azul) y angular ( $\omega$ , verde) frente al tiempo. Derecha: Velocidades  $v_t$  y  $\omega$  frente al ángulo de rotación  $\theta$  para  $v_0 = 2.8$  m/s.

### 3.5.3 Velocidad inicial: 3.1 m/s

Con  $v_0 = 3.1$  m/s, las velocidades traslacional y angular muestran oscilaciones pronunciadas y una pérdida evidente de acoplamiento durante las fases de vuelo. Esto se refleja en las discontinuidades observadas en las gráficas.

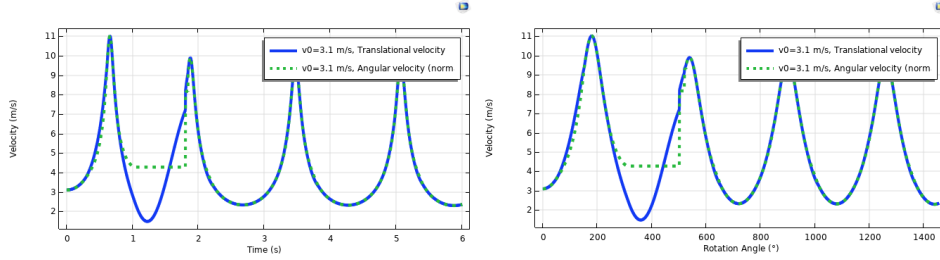


Figure 7: Izquierda: Velocidades traslacional ( $v_t$ , azul) y angular ( $\omega$ , verde) frente al tiempo. Derecha: Velocidades  $v_t$  y  $\omega$  frente al ángulo de rotación  $\theta$  para  $v_0 = 3.1$  m/s.

En la Figura 7, la gráfica frente al tiempo muestra picos y caídas bruscas en  $v_t$  y  $\omega$ , correspondientes a los momentos de despegue y contacto. En la representación frente a  $\theta$ , las velocidades exhiben discontinuidades claras, marcando las transiciones entre fases de contacto y vuelo.

### 3.5.4 Velocidad inicial: 3.5 m/s

Para  $v_0 = 3.5$  m/s, las gráficas de velocidades presentan comportamientos caóticos. Las inconsistencias físicas observadas en las fuerzas se reflejan en patrones irregulares en ambas representaciones.



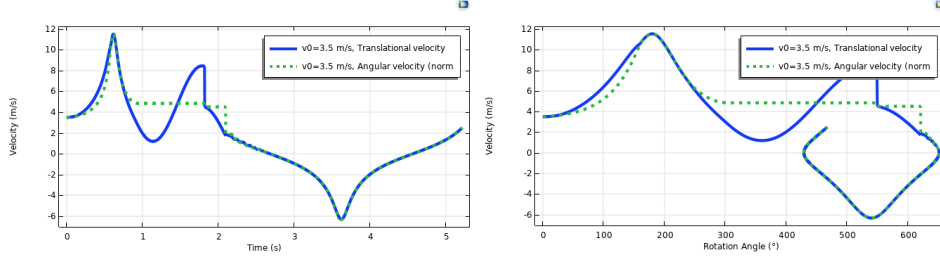


Figure 8: Izquierda: Velocidades traslacional ( $v_t$ , azul) y angular ( $\omega$ , verde) frente al tiempo. Derecha: Velocidades  $v_t$  y  $\omega$  frente al ángulo de rotación  $\theta$  para  $v_0 = 3.5$  m/s.

En la Figura 8, ambas gráficas muestran patrones irregulares y discontinuidades inconsistentes. Las velocidades pierden completamente la correlación, reflejando las limitaciones del modelo numérico en este rango de velocidad inicial.

### 3.6 Discusión Comparativa

Al comparar los resultados para las diferentes velocidades iniciales, se identifican transiciones claras en la dinámica del sistema:

- A velocidades bajas ( $v_0 \leq 2.8$  m/s), el sistema se encuentra en un régimen estable de rodamiento, sin pérdida de contacto con el suelo.
- A  $v_0 = 3.1$  m/s, los saltos comienzan a aparecer, marcando una transición dinámica importante.
- Para  $v_0 = 3.5$  m/s, las inconsistencias físicas indican que el modelo numérico no es confiable en este rango.

Este análisis resalta cómo la velocidad inicial afecta directamente la energía disponible para las transiciones dinámicas y subraya las limitaciones de las simulaciones numéricas para representar el comportamiento en regímenes extremos.

## 4 Conclusiones

El estudio del *hopping hoop* permitió explorar en detalle la influencia de la velocidad inicial en los regímenes dinámicos del sistema, destacando transiciones clave entre rodamiento puro, deslizamiento y salto. A velocidades bajas, como  $v_0 = 0.1$  m/s, el sistema se mantiene en un estado de rodamiento

puro. Las gráficas muestran un comportamiento estable en el cual las velocidades traslacional y angular están acopladas, cumpliendo estrictamente la relación  $v_t = R\omega$ . Este régimen es característico de sistemas sin pérdida de contacto ni deslizamientos significativos.

A medida que la velocidad inicial aumenta, como en el caso de  $v_0 = 2.8$  m/s, se observan oscilaciones más amplias en las energías y fuerzas del sistema, así como ligeros desfases entre las velocidades traslacional y angular. Estos resultados sugieren la aparición de deslizamientos intermitentes, aunque el sistema aún no alcanza las condiciones necesarias para un salto autoinducido. Este comportamiento transitorio es un punto crítico en la dinámica, ya que marca el inicio de la pérdida de acoplamiento entre las velocidades.

Cuando la velocidad inicial alcanza  $v_0 = 3.1$  m/s, el sistema entra en un régimen donde se presentan los primeros saltos. Las gráficas muestran cómo la fuerza normal  $N$  alcanza valores cercanos a cero repetidamente, lo que coincide con las transiciones entre fases de contacto y vuelo. Las velocidades traslacional y angular experimentan discontinuidades características durante los saltos, mientras que las energías cinética y potencial presentan intercambios abruptos debido a la dinámica de estas transiciones. Este caso representa el umbral crítico para el inicio del fenómeno de salto autoinducido.

Finalmente, a  $v_0 = 3.5$  m/s, las gráficas comienzan a mostrar inconsistencias físicas, como valores negativos en la fuerza normal y patrones caóticos en las velocidades. Estas anomalías indican que el modelo numérico utilizado en las simulaciones pierde precisión a altas velocidades iniciales, limitando su capacidad para describir de manera adecuada la dinámica del sistema en este rango.

En general, el análisis realizado demuestra que la velocidad inicial tiene un impacto fundamental en el comportamiento del *hopping hoop*. Las transiciones entre rodamiento, deslizamiento y salto están directamente relacionadas con la energía disponible en el sistema, evidenciada por las variaciones en las gráficas de energía, fuerzas y velocidades. Estos resultados destacan la importancia de modelos numéricos robustos para representar de manera precisa el comportamiento dinámico en regímenes extremos.

## 5 Bibliografía

### References

- [1] Bronars, A., & O'Reilly, O. M. (2019). Gliding motions of a rigid body: the curious dynamics of Littlewood's rolling hoop. *Proceedings of the Royal Society A*, 475(2228), 20190440. <https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0440>.