

Dinámica del "Hopping Hoop": Relación entre Velocidad Inicial y Salto

Robert Orcasitas García
Dylan Alexander Castellanos Jaimes
Juan Pablo Celis Avila

Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física

Dirigido a: **Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martinez**

6 de diciembre de 2024

Índice

| | |
|---|----------|
| 1. Introducción | 2 |
| 2. Marco Teórico | 2 |
| 2.1. Modelo de Cuerpo Rígido | 2 |
| 2.2. Ecuaciones de Movimiento | 2 |
| 2.3. Condición de Salto | 3 |
| 2.4. Transiciones Entre Estados | 3 |
| 2.5. Análisis de energías | 3 |
| 3. Simulación | 3 |
| 3.1. Análisis de las Velocidades Traslacional y Angular | 4 |
| 3.1.1. Velocidad inicial: 0.1 m/s | 4 |
| 3.1.2. Velocidad inicial: 2.8 m/s | 4 |
| 3.1.3. Velocidad inicial: 3.1 m/s | 5 |
| 3.1.4. Velocidad inicial: 3.5 m/s | 5 |
| 4. Montaje experimental | 5 |
| 4.1. Resultados experimentales | 6 |
| 5. Discusión Comparativa | 7 |
| 6. Conclusiones | 7 |

Resumen

Este trabajo estudia el fenómeno del "hopping hoop", un aro con masa excéntrica que presenta rodamiento, deslizamiento y saltos autoinducidos, analizando cómo la velocidad inicial influye en su dinámica. Se utiliza un modelo teórico de cuerpo rígido para describir las condiciones de salto y transiciones dinámicas, complementado con simulaciones en COMSOL que muestran comportamientos estables a bajas velocidades y saltos críticos a velocidades mayores, destacando las limitaciones del modelo en rangos extremos. Un experimento con un disco excéntrico, analizado mediante Tracker, valida cualitativamente las simulaciones. Este estudio resalta la importancia de integrar teoría, simulación y experimentación para comprender sistemas dinámicos complejos.

1. Introducción

El problema del "hopping hoop" se basa en un aro que contiene una masa excéntrica, lo que altera su distribución de masa y genera comportamientos dinámicos complejos. Entre estos comportamientos destacan el rodamiento, deslizamiento y, bajo ciertas condiciones, saltos autoinducidos. Este fenómeno, ampliamente estudiado en mecánica, ha sido modelado como un cuerpo rígido siguiendo los principios descritos en (Bronars 2019).

El presente trabajo analiza el efecto de la velocidad inicial en la aparición de saltos. Para ello, se realizaron simulaciones en COMSOL que permitieron estudiar cómo las condiciones iniciales influyen en la dinámica del sistema. Este artículo está organizado de la siguiente manera: se presenta un marco teórico detallado, seguido del análisis de los resultados de simulación, y finalmente se ofrecen conclusiones sobre el comportamiento observado.

2. Marco Teórico

El fenómeno del *hopping hoop* ha sido un tema de interés en la dinámica de cuerpos rígidos debido a los comportamientos complejos que emergen cuando un aro con masa excéntrica rueda sobre una superficie rugosa. Este sistema combina rodamiento, deslizamiento y, bajo ciertas condiciones, saltos autoinducidos. A continuación, se presentan las bases teóricas de este fenómeno, con énfasis en el modelo de cuerpo rígido, las condiciones necesarias para el salto y las ecuaciones del movimiento.

2.1. Modelo de Cuerpo Rígido

El sistema considerado consiste en un aro circular con radio R y una masa adherida m_2 a una distancia ℓ del centro geométrico C . Además, el aro tiene una masa m_1 , lo que da al sistema una masa total de $m = m_1 + m_2$. Debido a la presencia de m_2 , el centro de masa X no coincide con C . La ubicación del centro de masa está dada por:

$$h = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell. \quad (2.1)$$

El momento de inercia del sistema respecto al centro de masa es:

$$I = I_{zz} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2, \quad (2.2)$$

donde I_{zz} es el momento de inercia del aro respecto a su centro geométrico. Este desplazamiento del centro de masa genera momentos adicionales que afectan las ecuaciones de movimiento.

2.2. Ecuaciones de Movimiento

Para analizar el comportamiento del sistema, se consideran dos estados principales: rodamiento puro y deslizamiento. En ambos casos, las ecuaciones de movimiento se derivan de la conservación del momento lineal y angular. La dinámica del sistema puede describirse mediante las siguientes ecuaciones.

Rodamiento Puro. Cuando el sistema está en rodamiento puro, no hay deslizamiento en el punto de contacto P . En este caso, la velocidad tangencial del aro es igual a la velocidad de rotación multiplicada por el radio, es decir, $\eta = R\dot{\theta}$. Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_1 + m_2)Rh \sin \theta \dot{\theta}^2 + m_2 g \ell \sin \theta}{I + (m_1 + m_2)(R^2 + h^2 + 2Rh \cos \theta)}, \quad (2.3)$$

donde θ es el ángulo de rotación del aro, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son la velocidad y aceleración angular, respectivamente.

La fuerza normal N y la fuerza de fricción F_f pueden expresarse como:

$$N = (m_1 + m_2)g - m_2\ell (\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2), \quad (2.4)$$

$$F_f = -(m_1 + m_2)(R + h \cos \theta)\theta'' + m_2\ell \sin \theta \theta'^2. \quad (2.5)$$

Deslizamiento. Si el sistema pierde el contacto puro (deslizamiento), la fricción se convierte en dinámica y se opone a la velocidad relativa en el punto de contacto P . Las ecuaciones de movimiento en este caso están dadas por:

$$M \begin{bmatrix} \eta'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mh \sin \theta \theta'^2 \\ -mRh \sin \theta \theta'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_k N \frac{\eta'}{|\eta'|} \\ m_2 g \ell \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde M es la matriz de masa del sistema y μ_k es el coeficiente de fricción dinámica. La normal N en este caso está dada por:

$$N = (m_1 + m_2)g - m_2\ell (\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2). \quad (2.7)$$

2.3. Condición de Salto

Un salto autoinducido ocurre cuando la fuerza normal N se anula y la velocidad vertical del centro de masa \dot{y} es positiva. Esto requiere que:

$$\dot{y} = -h \sin \theta \theta' > 0 \quad \text{y} \quad N = 0. \quad (2.8)$$

Este fenómeno es posible solo si la energía cinética del sistema es suficiente para superar la condición de contacto.

2.4. Transiciones Entre Estados

El sistema puede experimentar transiciones entre rodamiento, deslizamiento y salto. Estas transiciones están determinadas por las siguientes condiciones:

- De rodamiento a deslizamiento: ocurre cuando la fuerza de fricción estática no es suficiente para mantener el rodamiento puro.
- De deslizamiento a salto: ocurre cuando $N = 0$ y $\dot{y} > 0$.
- De salto a contacto: después de un salto, el aro vuelve a impactar con el suelo, iniciando un nuevo ciclo.

2.5. Análisis de energías

Durante el movimiento, la energía total del sistema se conserva en ausencia de fricción. La energía cinética T y potencial U están dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\theta'^2, \quad (2.9)$$

$$U = m_2 g \ell \cos \theta. \quad (2.10)$$

La suma $T + U$ permite analizar las trayectorias y determinar las condiciones necesarias para el salto.

3. Simulación

Las simulaciones realizadas en COMSOL permiten estudiar la relación entre la velocidad inicial y el comportamiento dinámico del *hopping hoop*. En particular, se analizaron los resultados para velocidades iniciales de 0,1, 2,8, 3,1 y 3,5 m/s.

3.1. Análisis de las Velocidades Traslacional y Angular

El análisis de las velocidades traslacional (v_t) y angular (ω) proporciona información valiosa sobre los diferentes regímenes dinámicos del sistema. Cada gráfico incluye ambas velocidades, graficadas en función del ángulo de rotación θ y del tiempo t . Estas gráficas permiten identificar cómo evolucionan las velocidades en cada velocidad inicial.

3.1.1. Velocidad inicial: 0.1 m/s

Para $v_0 = 0,1$ m/s, las velocidades traslacional y angular están completamente acopladas, cumpliendo la relación $v_t = R\omega$, característica del rodamiento puro. Esto se observa tanto en las gráficas frente al tiempo como frente al ángulo.

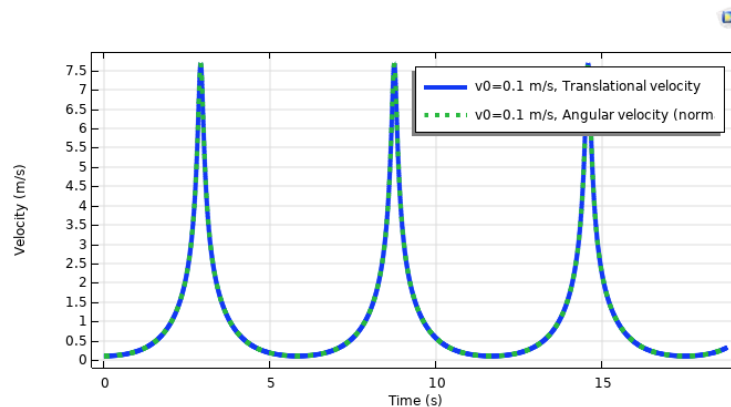


Figura 3.1: Velocidades traslacional (v_t , azul) y angular (ω , verde) vs tiempo, para $v_0 = 0,1$ m/s.

En la Figura (3.1), ambas gráficas muestran que las velocidades traslacional y angular tienen patrones sinusoidales suaves, reflejando oscilaciones pequeñas y sincronizadas. La representación frente a θ destaca el acoplamiento estricto entre v_t y ω , lo que confirma que el sistema permanece en rodamiento puro.

3.1.2. Velocidad inicial: 2.8 m/s

A $v_0 = 2,8$ m/s, las gráficas muestran oscilaciones más amplias en ambas velocidades. Aunque aún están correlacionadas, comienzan a observarse ligeras desviaciones, indicando la presencia de deslizamientos intermitentes.

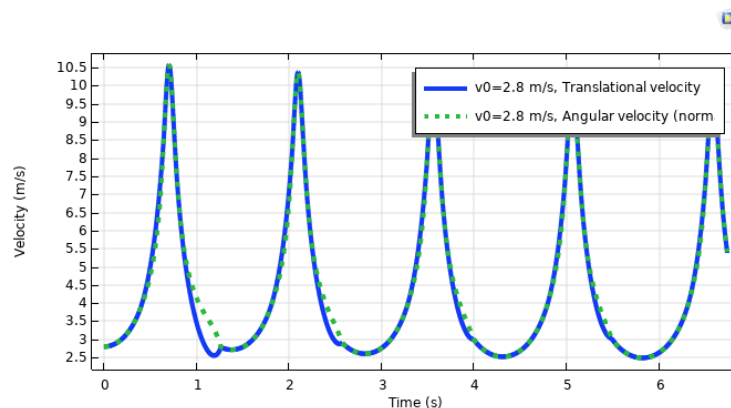


Figura 3.2: Velocidades traslacional (v_t , azul) y angular (ω , verde) vs tiempo, para $v_0 = 2,8$ m/s.

En la Figura (3.2), se observa que v_t y ω tienen mayor amplitud en sus oscilaciones. En la gráfica frente a θ , las curvas de ambas velocidades permanecen cercanas, aunque muestran ligeros desfases,

lo que sugiere un inicio de desacoplamiento debido a deslizamientos pequeños.

3.1.3. Velocidad inicial: 3.1 m/s

Con $v_0 = 3,1$ m/s, las velocidades traslacional y angular muestran oscilaciones pronunciadas y una pérdida evidente de acoplamiento durante las fases de vuelo. Esto se refleja en las discontinuidades observadas en las gráficas.

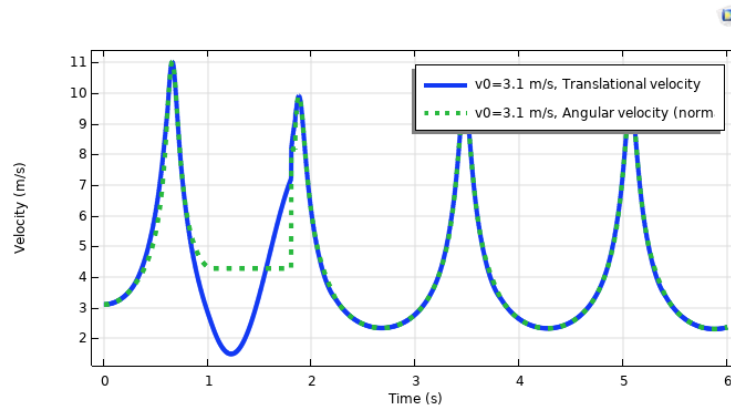


Figura 3.3: Velocidades traslacional (v_t , azul) y angular (ω , verde) vs tiempo, para $v_0 = 3,1$ m/s.

En la Figura (3.3), la gráfica frente al tiempo muestra picos y caídas bruscas en v_t y ω , correspondientes a los momentos de despegue y contacto. En la representación frente a θ , las velocidades exhiben discontinuidades claras, marcando las transiciones entre fases de contacto y vuelo.

3.1.4. Velocidad inicial: 3.5 m/s

Para $v_0 = 3,5$ m/s, las gráficas de velocidades presentan comportamientos caóticos. Las inconsistencias físicas observadas en las fuerzas se reflejan en patrones irregulares en ambas representaciones.

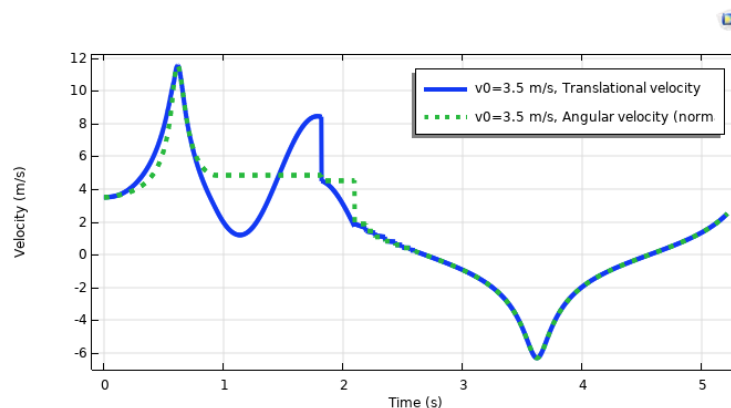


Figura 3.4: Velocidades traslacional (v_t , azul) y angular (ω , verde) vs tiempo, para $v_0 = 3,5$ m/s.

En la Figura (3.4), ambas gráficas muestran patrones irregulares y discontinuidades inconsistentes. Las velocidades pierden completamente la correlación, reflejando las limitaciones del modelo numérico en este rango de velocidad inicial.

4. Montaje experimental

Se tomó un disco de madera de grosor 2 cm y radio 10 cm, y se le puso una masa de desbalance cerca al perímetro del disco, por ambos lados, tal que la masa total resultó en 0,75 kg.

El disco se puso a rodar con una velocidad inicial de entre 200 cm/s y 250 cm/s, según se midió en Tracker (figura 4.2), procurando que la trayectoria se mantuviera en un plano.

Se grabó con una cámara de teléfono y, haciendo uso de Tracker, se obtuvieron 5 dataframes de 10 entradas cada uno, correspondientes a distintos días de grabación. Se promediaron los datos de cada dataframe y esos datos son los mostrados a continuación:

4.1. Resultados experimentales

La figura (4.1) muestra la trayectoria medida de la masa m_2 que abarca desde el último mínimo de altura antes del salto, y el primer máximo de altura después del salto.

Se puede observar que la segunda vez que la masa m_2 va en camino a alcanzar su punto más bajo, cerca al segundo 0,7, ésta llega a una altura mayor a la registrada inicialmente. Esto quiere decir que antes de eso, cerca al segundo 0,6, el disco da el salto y por lo tanto se eleva también m_2 .

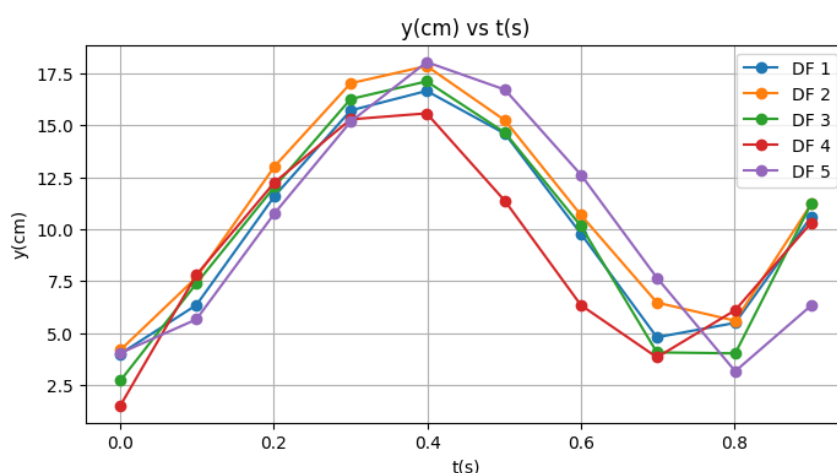


Figura 4.1: Datos de trayectoria en el eje y de la masa m_2 . Los colores representan cada dataframe obtenido.

Se puede observar que la segunda vez que la masa m_2 va en camino a alcanzar su punto más bajo, cerca al segundo 0,7, ésta llega a una altura mayor a la registrada inicialmente. Esto se debe a que antes de eso, cerca al segundo 0,6, el disco da el salto y por lo tanto se eleva también m_2 .

Por otro lado, la figura (4.2) muestra el perfil de velocidad media de la masa m_2 sobre el mismo intervalo de tiempo.

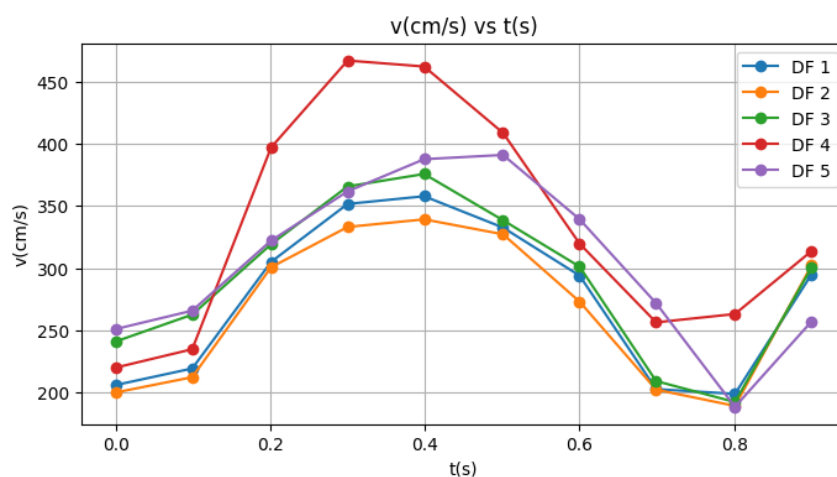


Figura 4.2: Datos de velocidad de la masa m_2 . Los colores representan cada dataframe obtenido.

5. Discusión Comparativa

Los resultados de la simulación en COMSOL para las diferentes velocidades iniciales indican transiciones claras en la dinámica del sistema:

- A velocidades bajas, el sistema se encuentra en un régimen estable de rodamiento, sin pérdida de contacto con el suelo.
- Existe una velocidad inicial crítica a partir de la cual los saltos comienzan a aparecer, marcando una transición dinámica importante.
- Para velocidades iniciales muy altas las inconsistencias indican que el modelo numérico no es confiable en este rango.

Este análisis resalta cómo la velocidad inicial afecta directamente la energía disponible para las transiciones dinámicas y subraya las limitaciones de las simulaciones numéricas para representar el comportamiento en regímenes extremos.

El comportamiento del perfil de velocidad de la figura (4.2), que responde a velocidades iniciales de entre 200 cm/s y 250 cm/s, masa 0,7 kg y radio de 0,1 m, es similar al de la figura (3.4) para $v_0 = 3,5$ m/s, masa 1 kg y radio de 1 m. Esto es, en ambas hay un pico máximo de velocidad que no se vuelve a alcanzar en ningún otro giro debido a la disipación de energía en el sistema..

6. Conclusiones

El presente estudio sobre la dinámica del "hopping hoop" permite extraer importantes conclusiones acerca de los factores que determinan las transiciones entre regímenes dinámicos en sistemas físicos con masa excéntrica. A partir de las simulaciones realizadas y los datos experimentales obtenidos, se destacan los siguientes puntos clave:

Se confirmó que la velocidad inicial juega un papel crucial en el comportamiento del aro. A bajas velocidades iniciales, el sistema permanece en un régimen estable de rodamiento puro, sin pérdida de contacto con el suelo. Sin embargo, al superar una velocidad crítica, comienzan a observarse transiciones hacia fases de deslizamiento y, eventualmente, a saltos autoinducidos. Este hallazgo valida las predicciones teóricas y refuerza la importancia de la energía inicial en sistemas mecánicos de este tipo.

Los resultados de las simulaciones en COMSOL presentan una buena correspondencia cualitativa con los datos experimentales obtenidos, especialmente en regímenes de velocidad moderada. Esto sugiere que las ecuaciones de movimiento y las condiciones de transición utilizadas en el modelo describen adecuadamente la dinámica del sistema bajo ciertas condiciones.

Para velocidades iniciales muy altas, las simulaciones muestran inconsistencias físicas, como fuerzas anómalas y comportamientos caóticos en las velocidades traslacional y angular. Estas discrepancias evidencian las limitaciones del modelo numérico para representar la realidad en regímenes extremos, destacando la necesidad de incorporar efectos adicionales, como disipación energética no lineal o contacto dinámico más complejo, para mejorar la precisión en estos casos.

Los perfiles de velocidad y trayectoria observados experimentalmente para velocidades iniciales entre 2 m/s y 2.5 m/s muestran similitudes notables con los obtenidos en simulaciones para valores análogos, adaptados a las características físicas del aro utilizado. Este paralelismo respalda la validez general del enfoque empleado y resalta la utilidad de las simulaciones como herramienta predictiva en sistemas dinámicos.

Los cambios en las velocidades y las transiciones observadas están directamente relacionados con la distribución de la energía cinética y potencial en el sistema. La conservación de energía permite

predecir, dentro de ciertos límites, los regímenes de comportamiento y las condiciones necesarias para el salto, como lo indica la relación entre la fuerza normal y la velocidad vertical del centro de masa.

Este trabajo aporta una comprensión profunda de los mecanismos detrás de sistemas con masas excéntricas y transiciones de contacto, abriendo la puerta a aplicaciones en robótica, diseño de vehículos dinámicos y análisis de sistemas biomecánicos. Se sugiere explorar futuros estudios que consideren efectos de fricción no lineal, deformaciones elásticas del aro, o incluso interacción con medios no uniformes.

Referencias

- [1] Antonia Bronars. "Gliding motions of a rigid body: the curious dynamics of Littlewood's rolling hoop". En: *Proceedings of the Royal Society A* 475.2231 (2019), pág. 20190440.