

## Introdução à Teoria das Probabilidades

Professor: Francisco A. Rodrigues

### Primeira lista de exercícios

#### Aula 1

1 - Defina os espaços amostrais associados aos experimentos abaixo:

- $E_1$ : Lançamento de um dado.
- $E_1$ : Lance uma moeda cinco vezes e verifique o número de caras.
- $E_3$ : Lance uma moeda até que uma coroa apareça e conte o número de lançamentos.
- $E_4$ : Verifique o tempo de funcionamento de uma máquina até falhar.
- $E_5$ : Meça a altura de um jogador de basquete da seleção brasileira.

2 - Enuncie um evento associado a cada um dos espaços amostrais do exercício anterior.

---

#### Aula 2

3 - Em uma sala há 30 pessoas. Qual é a probabilidade de que duas dessas pessoas façam aniversário no mesmo dia?  
[Resp: 0,7]

---

#### Aula 3

4 - Um novo teste de diagnóstico para detectar o vírus HIV é apresentado tendo 95% de chance de dar um resultado positivo se o paciente é portador do HIV e 98% de chance de dar um negativo se o paciente não é portador do HIV. Em uma população com prevalência de 1/1000 casos de HIV (fração de infectados), qual é a chance de que uma pessoa com teste positivo ter realmente o vírus?(Resp: 0,045)

---

#### Aula 4

5 - Suponha que lancemos três moedas. Seja a variável aleatória  $Y$ : “número de caras obtidas”. Calcule a função de probabilidade de  $Y$ .

6 - Seja  $X$  a variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade  $f(x) = be^{-bx}$ ,  $x \geq 0$ . Mostre que se  $p_j = P(j \leq X \leq j+1)$ , então  $p_j = (1-a)a^j$  e determine  $a$ .

7 - Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x/2 + 3/2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule  $P(X > 2 | 1 \leq X \leq 3)$ . (Resp: 1/3)

---

#### Aula 5

8 - O tempo  $T$ , em semanas, necessário para um programador desenvolver um website é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dada a seguir. Calcule  $F(t) = P(T \leq t)$ .

$T$	2	3	4	5
$P(T=t)$	0,2	0,1	0,3	0,4

9 - Seja  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  para  $x \geq 0$ . Calcule  $f(x)$ .

10 - Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determine a função de distribuição acumulada de  $X$ .

---

#### Aula 6

11 - Uma fábrica produz peças automotivas tais que 5% delas são defeituosas e 95% são não-defeituosas. Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde R\$ 5,00, enquanto uma peça não-defeituosa lhe dá um lucro de R\$10,00. Se  $X$  for o lucro líquido por peça, calcule  $E(X)$ . (Resp: 9,25 reais)

12 - Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de  $X$ . (Resp: 1,0)

---

#### Aula 7

13 - Sejam as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com distribuições de probabilidade:

$X$	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4

$Y$	-2	-1	0	1	2
$P(Y=y)$	0	1/4	1/2	1/4	0

Calcule  $E[X]$ ,  $E[Y]$ ,  $E[X^2]$  e  $E[Y^2]$ . (Resp:  $E[X] = E[Y] = 0$ ,  $E[X^2] = 2,5$  e  $E[Y^2] = 0,5$ ).

14 - Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a variância de  $X$ . (Resp: 1/6)

15 - Mostre que se  $X$  é uma variável aleatória e  $A$  e  $B$  constantes:

$$E(AX + B) = AE[X] + B$$

$$V(AX + B) = A^2V(X).$$