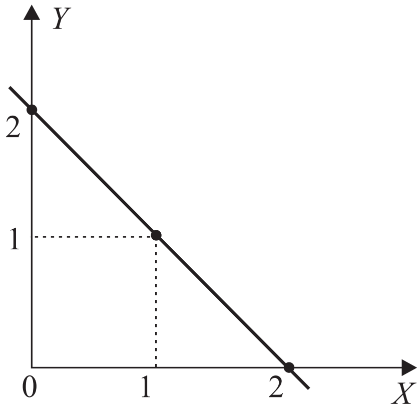
No plano (X, 0, Y), temos:



A equação da reta, nesse caso, é:

$$Y = -X + 2$$

3.5 Função de distribuição

Suponhamos que uma variável aleatória discreta X tenha a seguinte distribuição de probabilidades.

X	$P(X)$
1	0,1
2	0,2
3	0,4
4	0,2
5	0,1

Definimos *função de distribuição de X:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Temos, então:

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0{,}1$

$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3$

$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$\quad = F(2) + P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + P(X = 4) = F(3) + P(X = 4) =$

$\quad = 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9$

$F(5) = P(X \leq 4) + P(X = 5) = F(4) + \mathrm{P}(X = 5) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$

Podemos calcular também:

$F(1{,}34) = P(X \leq 1{,}34) = P(X \leq 1) = F(1) = 0{,}1$

$F(3{,}98) = P(X \leq 3{,}98) = P(X \leq 3) = F(3) = 0{,}7$

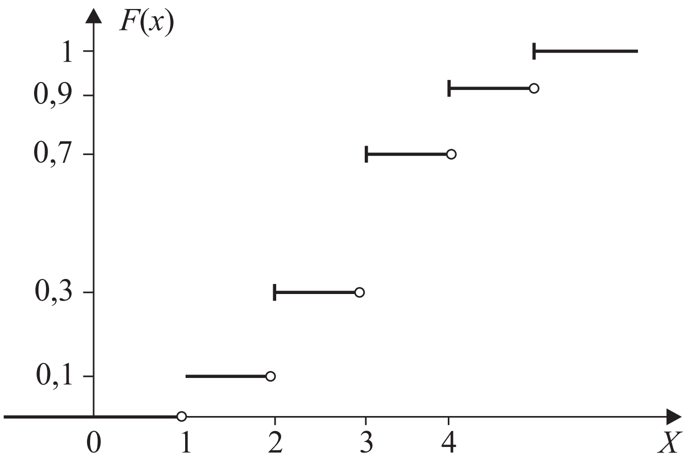
$F(7) = P(X \leq 7) = P(X \leq 5) = F(5) = 1$

$F(-3) = P(X \leq -3) = 0$

Com esses resultados podemos escrever:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } X < 1 \\ 0{,}1 & \text{se } 1 \leq X < 2 \\ 0{,}3 & \text{se } 2 \leq X < 3 \\ 0{,}7 & \text{se } 3 \leq X < 4 \\ 0{,}9 & \text{se } 4 \leq X < 5 \\ 1 & \text{se } X \geq 5 \end{cases}$$

Fazendo o gráfico de $F(x)$, temos:



O domínio de $F(x)$ é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é o conjunto $\{0{,}1; 0{,}3; 0{,}7; 0{,}9; 1\}$.

Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

   Como $F(x) = P(x \leq x)$ e $0 \leq P(X = x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq F(X) \leq 1$.

2. $F(-\infty) = 0$

   $$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

   Como se pode ver no exercício.

3. $F(+\infty) = 1$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

corresponde ao evento certo.

4. $F(x)$ é descontínua nos pontos $X = x_0$, onde $P(X = x_0) \neq 0$.

$$\lim_{x \to x_{0^-}} F(x) \neq \lim_{x \to x_{0^+}} F(x) \neq F(x_0)$$

5. $F(x)$ é contínua à direita dos pontos $X = x_0$, onde $P(X = x_0) \neq 0$.

$$\text{Se } p(X = x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_{0^+}} F(x) = F(x_0)$$

6. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Podemos escrever: $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$ (mutuamente exclusivos).

$\therefore\ P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)\ \therefore$

$\therefore\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

7. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

Como $(a \leq X \leq b) \Rightarrow [a, b] = (a, b] \cup \{a\}$, temos:

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$.

8. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

Como $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$,

$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$.

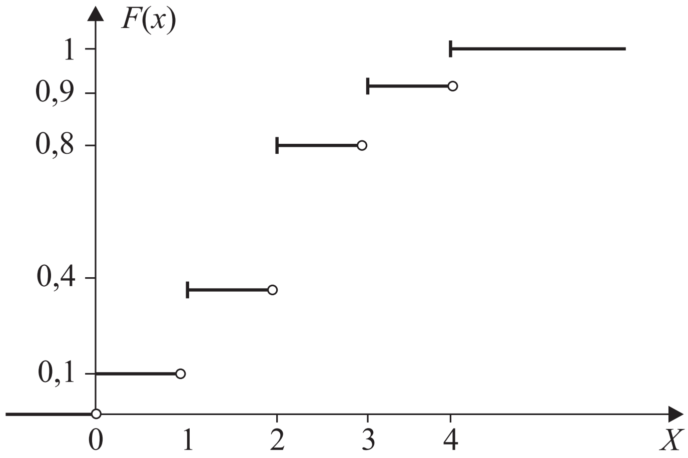
9. $F(x)$ é uma função não decrescente.

Como $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \geq 0 \Rightarrow F(b) \geq F(a)$,

logo, $F(x)$ é não decrescente.

Exemplo de aplicação

Seja X a variável aleatória discreta com $F(x)$ dada pelo gráfico. Determinar $E(X)$ e $\mathrm{VAR}(X)$.



Como foi visto no exemplo, o "degrau" em $X = a$ é igual a $P(X = a)$. Logo podemos formar a tabela da distribuição de probabilidades de X.

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$X^2 \cdot P(X)$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,4	0,8	1,6
3	0,1	0,3	0,9
4	0,1	0,4	1,6
	1	1,8	4,4

$$\boxed{E(X) = 1{,}8}$$

$$\text{VAR}(X) = 4{,}4 - 1{,}8^2 \quad \therefore \quad \boxed{\text{VAR}(X) = 1{,}16}$$

Exercícios resolvidos

1. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 pretas. Três bolas são retiradas com reposição. Seja X o número de bolas brancas. Calcular $E(X)$.

$$P(X = 0) = P(3P) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$$

$$P(X = 1) = P(1B \text{ e } 2P) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 3 = 0{,}432$$

$$P(X = 2) = P(2B \text{ e } 1P) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 3 = 0{,}288$$

$$P(X = 3) = P(3B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$$