Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Introdução à Teoria das Probabilidades

Professor: Francisco A. Rodrigues

Terceira lista de exercícios

Aula 15: Variáveis aleatórias multidimensionais

1 - Seja uma urna com 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Seja a variável aleatória:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se a i-ésima bola retirada é vermelha} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a distribuição de probabilidade conjunta de (X_1, X_2) e as respectivas distribuições marginais.

2 - A probabilidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Determine $P(X > 0, Y < 1)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y e^{-xy}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

3 - Dois dados são lançados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de X e Y quando:
a) X é o maior valor obtido em qualquer um dos dados e Y é a soma dos valores dos dados.
b) X é o valor do primeiro dado e Y é o maior valor dos dois dados.
c) X é o menor e Y é o maior valor obtido.

Aula 16: Probabilidade condicional

4 - Quatro moedas de 5 centavos e seis moedas de 10 centavos são arremessadas e o número de caras é observado. Se $N = 4$, qual é a probabilidade condicional de que exatamente duas moedas de 5 centavos saíram cara? (Resp: 3/7)

5 - A fdp conjunta da variável aleatória (X, Y) é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{para } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, \text{ para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Calcule:
a) $P(X > 1 | Y = 1)$, b) $P(X < a)$,
c) $P(X < 2 | Y = y)$, d) $P(Y > 1 | X = x)$.
e) $P(X < 2 | 0 < Y < 3)$, f) $E(X)$ e $E(Y)$.

Aula 17: Esperança condicional

6 - Um trabalhador de uma mina encontra três passagens. A primeira leva-o a um túnel que o conduz até a saída em segurança após 2 horas de caminhada. A segunda passagem conduz a um túnel que o leva ao ponto inicial após 3 horas de percurso. A terceira leva-o à posição inicial após 5 horas. Assumindo que o trabalhador tem a mesma probabilidade de escolher qualquer uma das passagens, qual é o número esperado de horas que o trabalhador leva até sair da mina em segurança? (Resp: 10h)

7 - Para o lançamento de dois dados equilibrado, defina duas variáveis aleatórias. Seja X o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a zero se a soma for par e igual a 1, caso contrário.
a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.
b) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X+Y)$.
c) Verifique se X e Y são independentes.

8 - A probabilidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Determine $E[e^{X/2} | Y = 1]$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y e^{-xy}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Aula 18: Função Geratriz de momentos

9 - Seja X um variável aleatória com distribuição exponencial. Calcule a função geratriz de momentos e obtenha $E[X^2]$.

10 - Calcule o segundo momento estatístico da distribuição qui-quadrado.

Aula 19: Teorema Central do Limite

11 - Em uma certa cidade, a duração de conversas telefônicas (em minutos) segue o modelo exponencial com parâmetro igual a 1/3. Observando-se uma amostra aleatória de 50 dessas chamadas, qual será a probabilidade de que tais amostras em média não ultrapassem 4 minutos?

12 - Quando um lote de certo produto químico é preparado, a quantidade de uma impureza específica no lote é uma variável aleatória com valor médio igual a quatro gramas e desvio padrão de 1,5 gramas. Se 50 lotes forem preparados independentemente, qual será a probabilidade (aproximada) de que a quantidade média de impureza na amostra esteja entre 3,5 gramas e 3,8 gramas?

Aula 20: Lei dos Grandes Números

13 - Quantas vezes devemos lançar um dado equilibrado de maneira a ficarmos 95% certos de que a frequência relativa de tirar um seis fique a menos de 0,01 da probabilidade teórica 1/6?