

Probabilidade

2.1 Função de probabilidade

DEFINIÇÃO

É a função P que associa a cada evento de Ω um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, satisfazendo os axiomas:

I) $P(\Omega) = 1$

II) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem mutuamente exclusivos.

III) $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, se A_1, A_2, \dots, A_n forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos.

Observamos pela definição que $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento $A, A \subset \Omega$.

2.2 Teoremas

Teorema 1 “Se os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.”$$

Demonstração: Pela definição de partição, os eventos A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente exclusivos e

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Logo $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\Omega)$. Usando os axiomas I e III da definição, temos: $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.

Teorema 2 “Se ϕ é o evento impossível, então $P(\phi) = 0$.”

Demonstração: Como $\phi \cap \Omega = \phi$ e $\phi \cup \Omega = \Omega$, temos

$$P(\phi \cup \Omega) = P(\Omega)$$

$$P(\phi) + P(\Omega) = P(\Omega)$$

$$P(\phi) = 0$$

Obs: A recíproca não é verdadeira, pois o fato de $P(A) = 0$ não implica que A seja impossível.

Teorema 3 Teorema do evento complementar: “Para todo evento $A \subset \Omega$, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.”

Demonstração: Como

$$A \cap \bar{A} = \phi \text{ e}$$

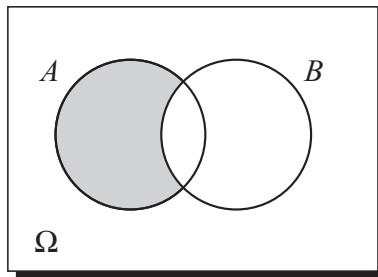
$$A \cup \bar{A} = \Omega,$$

temos:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teorema 4 Teorema da soma: “Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.”



Demonstração: Escreveremos os eventos $(A \cup B)$ e A como reuniões de eventos mutuamente exclusivos, como segue:

$$\begin{cases} A \cup B = (A - B) \cup B \\ A = (A - B) \cup (A \cap B) \end{cases}$$

Usando o axioma, temos:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \quad \mathbf{1}$$

e

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad \mathbf{2}$$

De **2** tiramos: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Substituindo-se esse resultado em **1**, chegamos a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$ vale o axioma II.

Teorema 5 “Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.”

(A demonstração fica a cargo do leitor.)

Teorema 6 “Dado o espaço amostral Ω e os eventos A_1, A_2, \dots, A_n , então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n).”$$

Demonstração: Por indução finita.

Teorema 7 “Dados os eventos A_1, A_2, \dots, A_n , então: $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.”

Exemplos de aplicação

1. Sendo $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$, calcular:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$;

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$;

c) $P(\bar{A} \cap B)$;

d) $P(\bar{A} \cup B)$.

Resolução:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - z$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$$1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} = 1 - x - y + z$$

$$c) P(\bar{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = y - z$$

$$d) P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = (1 - x) + y - (y - z) = 1 - x + z$$

2. Demonstrar que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

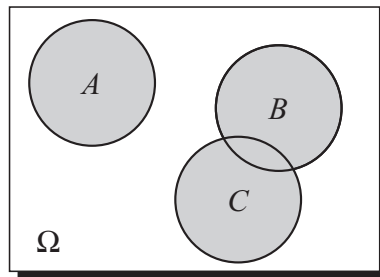
Demonstração:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - \\ &- P[(A \cup B) \cap C] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + \\ &+ P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B) + \\ &+ P(C) - P(A \cap B) - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\} \therefore \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - \\ &- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

3. Sejam A, B e C eventos tais que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}, A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \text{ e } P(B \cap C) = \frac{1}{7}.$$

Calcule a probabilidade de que pelo menos um dos eventos A, B ou C ocorra.



Resolução: Pelo diagrama vemos que $A \cap B \cap C = \emptyset$, logo $P(A \cap B \cap C) = 0$. Aplicando o resultado do problema anterior, temos:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 - 0 - \frac{1}{7} + 0 = \frac{16}{35}$$

2.3 Eventos equiprováveis

Consideremos o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório.

Chamemos $P(e_i) = p_i, i = 1, \dots, n$.

Temos $\sum_{i=1}^n P(e_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$

1

DEFINIÇÃO

Os eventos $e_i, i = 1, \dots, n$ são *equiprováveis* quando $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = p$, isto é, quando todos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

1 fica: $\sum_{i=1}^n p = 1 \Rightarrow np = 1 \therefore p = \frac{1}{n}$

Logo, se os n pontos amostrais (eventos) são equiprováveis, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais é $\frac{1}{n}$.

Vamos calcular a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$. Suponhamos que A tenha K pontos amostrais:

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, 1 \leq k \leq n \therefore$$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^k P(e_i) = \sum_{i=1}^k p = K \cdot p = K \cdot \frac{1}{n} \therefore$$

$$\therefore P(A) = \frac{K}{n}$$

Exemplos de aplicação

1. Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Seja A : saída de um rei; e B : saída de uma carta de espada.

Então:

$$A = \{R_o, R_e, R_c, R_p\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$$

$$B = \{A_e, 2_e, \dots, R_e\} \rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$$

Observamos que $A \cap B = \{R_e\} \therefore$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \therefore$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

2. O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as 18. Os seguintes eventos são definidos:

A : a pessoa tem mais de 21 anos;

B : a pessoa tem menos de 21 anos;

C : a pessoa é um rapaz;

D : a pessoa é uma moça.

Calcular:

a) $P(B \cup D)$;

b) $P(\bar{A} \cap \bar{C})$.

Resolução:

$$\Omega = \{5R, 4r, 6M, 3m\} \therefore p = \frac{1}{18}$$

$$A = \{5R, 6M\} \rightarrow P(A) = \frac{11}{18}$$

$$B = \{4r, 3m\} \rightarrow P(B) = \frac{7}{18}$$

$$C = \{5R, 4r\} \rightarrow P(C) = \frac{9}{18}$$

$$D = \{6M, 3m\} \rightarrow P(D) = \frac{9}{18}$$

a) $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$

Como $B \cap D = \{3m\}$, temos que $P(B \cap D) = \frac{3}{18}$.

Logo:

$$P(B \cup D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$$

Como $A \cap C = \{5R\}$ e $P(A \cap C) = \frac{5}{18}$, temos que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 - \left\{ \frac{11}{18} + \frac{9}{18} - \frac{5}{18} \right\} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \quad \text{ou}$$

Como $\bar{A} = B$ e $\bar{C} = D$, temos:

$$\bar{A} \cap \bar{C} = B \cap D = \{3m\} \quad \therefore$$

$$\therefore P(\bar{A} \cap \bar{C}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral. Nesses casos, deveremos usar a análise combinatória como processo de contagem. Veremos isso nos próximos exemplos.

3. Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

Resolução: A : comissão de 3 matemáticos e 2 estatísticos.

$$n = \binom{27}{5}: \text{comissões}$$

$$k = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}: \text{comissões com 3 matemáticos e 2 estatísticos}$$

$$P(A) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{27}{5}}$$

4. Qual a probabilidade de, num baralho com 52 cartas, ao se retirarem 4 cartas, ao acaso, sem reposição, se obter uma quadra?

Resolução: A : saída de uma quadra.

$$n = \binom{52}{4} \leftarrow \text{número de quádruplas}$$

$$K = 13 \leftarrow \text{número de quadras} \quad \therefore \quad P(A) = \frac{13}{\binom{52}{4}}$$

5. Calcular a probabilidade de se obter exatamente 3 caras e 2 coroas em 5 lances de uma moeda.

Resolução: A : saída de 3 caras e 2 coroas.

$n = 2^5 = 32$: número de quintuplas

$k = \binom{5}{3} = 10$: números de quintuplas com 3 caras e 2 coroas

$$P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

6. Uma urna contém as letras A, A, A, R, R, S. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra *araras*?

Resolução: A : saída de palavra *araras*.

$$n = (PR)_{3,2,1}^6 = \frac{6!}{3! 2! 1!} = 60$$

$k = 1$ \therefore

$$\therefore P(A) = \frac{1}{60}$$

Obs.:

$$(PR)_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_n!}, \text{ com } n_1 + n_2 + \dots + n_n = n$$

2.4 Probabilidade condicional

Introduziremos a noção de *probabilidade condicional* através do seguinte exemplo:

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam química (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Sexo \ Disciplina	F	Q	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

Pelo quadro vemos que esta probabilidade é de $\frac{80}{150}$ e representamos:

$P(Q/M) = \frac{80}{150}$ (probabilidade de que o aluno curse química, condicionado ao fato de ser mulher).

Observamos, porém, que $P(M \cap Q) = \frac{80}{250}$ e $P(M) = \frac{150}{250}$. Para obtermos o resultado do problema, basta considerar que:

$$P(Q/M) = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}$$

Logo:

$$P(Q/M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)}$$

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos a **probabilidade condicional de A , dado que B ocorre** (A/B) como segue:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0$$

Também:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ se } P(A) \neq 0$$

EXEMPLO

Sendo $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ e $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, calcular $P(A/B)$.

Resolução:

Como $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, devemos calcular $P(A \cap B)$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - P(A \cap B) \quad \therefore \quad P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Logo, } P(A/B) = \frac{1/6}{3/4} = \frac{2}{9}$$

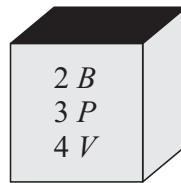
Tiramos da definição da probabilidade condicional o chamado *TEOREMA DO PRODUTO*: Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

EXEMPLO

Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas

- a) sejam verdes?
- b) sejam da mesma cor?

Resolução:



$$\text{a) } P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V/V) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } P(MC) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$$

$$P(MC) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$P(MC) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

A generalização do teorema do produto é:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Resolvendo o *Problema 6 da Seção 2.3*, usando essa generalização, temos:

$$P(A \cap R \cap A \cap R \cap A \cap S) = P(A) \cdot P(R/A) \cdot P(A/A \cap R) \cdot$$

$$\cdot P(R/A \cap R \cap A) \cdot P(A/A \cap R \cap A \cap R) \cdot P(S/A \cap R \cap A \cap$$

$$\cap R \cap A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{60}$$

2.5 Eventos independentes

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.

Intuitivamente, se A e B são independentes, $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.

DEFINIÇÃO

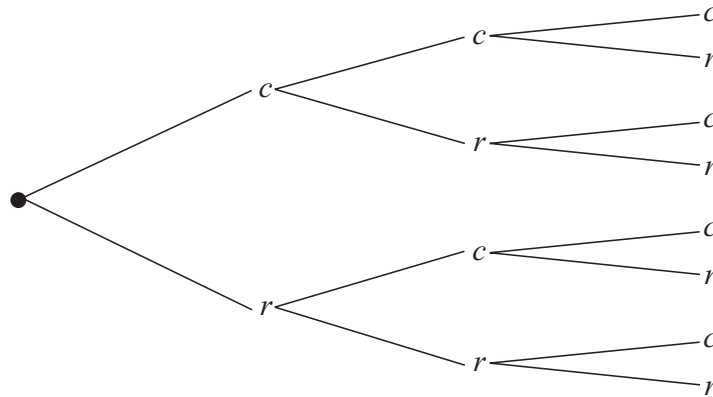
A e B são eventos independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

EXEMPLO

Lançam-se 3 moedas. Verificar se são independentes os eventos:

A : saída de cara na 1ª moeda;

B : saída de coroa na 2ª e 3ª moedas.



$$\Omega = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr), (rcc), (rcr), (rrc), (rrr)\}$$

$$A = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr)\} \therefore P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(crr), (rrr)\} \therefore P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Logo:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Como

$$A \cap B = \{(crr)\} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{8},$$

temos que A e B são eventos independentes, pois $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Obs. 1: Para verificarmos se 3 eventos A , B e C , são independentes, devemos verificar se as 4 proposições são satisfeitas:

$$1: P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$2: P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$3: P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$4: P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Se apenas uma não for satisfeita, os eventos não são independentes.

Obs. 2: Se A e B são *mutuamente exclusivos*, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, isto é, a ocorrência de um evento condiciona a não ocorrência do outro.

Resolveremos um problema que mostrará bem a distinção entre eventos mutuamente exclusivos e independentes.

Exercício resolvido

Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = P$, $P(A \cup B) = 0,6$. Calcular P considerando A e B :

- a) mutuamente exclusivos;
- b) independentes.

Resolução:

- a) A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$, como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ vem } 0,6 = 0,2 + P - 0 \quad \therefore \quad P = 0,4$$

- b) A e B independentes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot P$, como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ vem } 0,6 = 0,2 + P - 0,2P \therefore$$

$$\therefore 0,4 = 0,8P \quad P = 0,5$$

Obs. 3: Se os eventos A_1, A_2, \dots, A_n são independentes, então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i),$$

onde $\prod_{i=1}^n P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$.

EXEMPLO

A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é $2/5$; a de sua mulher é de $2/3$. Determinar a probabilidade de que daqui a 30 anos:

- a) ambos estejam vivos;
- b) somente o homem esteja vivo;
- c) somente a mulher esteja viva;
- d) nenhum esteja vivo;
- e) pelo menos um esteja vivo.

Resolução: Chamaremos de H : o homem estará vivo daqui a 30 anos;
 M : a mulher estará viva daqui a 30 anos.

$$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\bar{H}) = \frac{3}{5}$$

$$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\bar{M}) = \frac{1}{3}$$

$$a) P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

$$b) P(H \cap \bar{M}) = P(H) \cdot P(\bar{M}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$c) P(\bar{H} \cap M) = P(\bar{H}) \cdot P(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$d) P(\bar{H} \cap \bar{M}) = P(\bar{H}) \cdot P(\bar{M}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$e) P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

ou X : pelo menos um vivo

$$P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2.6 Teorema de Bayes

Teorema da probabilidade total

“Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral.

Seja B um evento desse espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i).”$$