Prova - Introd. Teoria das Prob.

1- Sejam os eventos:

C_i: sai cara no lançamento i

F: a moeda é justa.

a) $$P(F|C_1) = \frac{P(C_1|F)P(F)}{P(C_1|F)P(F) + P(C_1|F^c)P(F^c)} =$$

$$= \frac{1/2 \; 1/2}{1/2 \; 1/2 + 1 \cdot 1/2} = \frac{1}{3}$$

b) $$P(F|C_1, C_2) = \frac{P(C_2|F, C_1)\, P(F|C_1)}{P(C_2|F, C_1)\, P(F|C_1) + P(C_2|F^c, C_1)\, P(F^c|C_1)} =$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \; 1/3 + 1 \cdot 2/3} = \frac{1}{5}$$

c) Como a moeda que tem duas caras não pode sair com coroa, temos:

$$P(F|C_1, C_2, C_3) = 1.$$

ou

$$P(F|C_1, C_2, C_3) = \frac{P(C_3|F, C_1, C_2)\, P(F|C_2, C_1)}{P(C_3|F, C_2, C_1)\, P(F|C_2, C_1) + P(C_3|F^c, C_1, C_2)\, P(F^c|C_2, C_1)}$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/5}{1/2 \cdot 1/5 + 0} = 1$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0<x<5 \\ 0 & c.c. \end{cases}$

2) $K \sim \text{Uniforme}(0,5)$ A: "raízes reais"

$$8x^2 + 8xK + 2K + 4 = 0$$

dividindo por 2:

$$4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$$

$$\Delta = (4K)^2 - 4(4)(K+2)$$

para ter raízes reais: $\Delta \geq 0$

$$(4K)^2 - 4(4)(K+2) \geq 0$$

$$16K^2 - 16K - 32 \geq 0$$

$$K^2 - K - 2 \geq 0$$

Assim, para ter raízes reais:

$$P(K^2 - K - 2 \geq 0) = ?$$

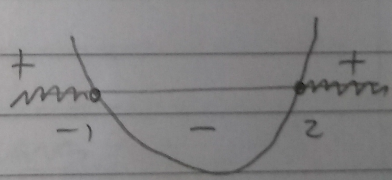
As raízes:

$$K^2 - K - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9$$

$$K = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \rightarrow K_1 = 2$$

$$\hookrightarrow K_2 = -1$$



solução:

$$\{K \in \mathbb{R} \mid K \leq -1 \cup K \geq 2\}$$

Portanto:

$$P(K^2 - K - 2 \geq 0) = P(K \leq -1 \cup K \geq 2) =$$

$$= 1 - P(-1 < K < 2) = 1 - \int_1^2 \frac{1}{5}\, dk = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

3) Dois dados são lançados e a soma anotada. Qual é a prob. de que a soma igual a 9 saia antes da soma igual a 8?

emos:

$$P(\text{"soma} = 9\text{"}) = P\left(\{(3,6)\cup(6,3)\cup(5,4)\cup(4,5)\}\right) = \frac{4}{36}$$

$$P(\text{"soma} = 8\text{"}) = P\left(\{(2,6)\cup(6,2)\cup(4,4)\cup(5,3)\cup(3,5)\}\right) = \frac{5}{36}$$

onsiderando uma sequência de n lançamentos,

jam os eventos:

A : "soma = 9"

B : "soma = 8"

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\bar{A}\cap\bar{B}}\ \overset{A}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \cdots}_{B}$$

ntão:

$$P(\text{"soma} = 9 \text{ antes soma} = 8\text{"}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 - P(A) - P(B)\right]^n \cdot P(A) =$$

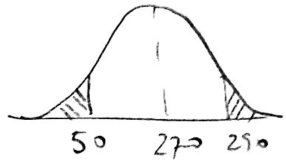
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 - \frac{4}{36} - \frac{5}{36}\right]^n \cdot \frac{4}{36} = \frac{4}{36}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{27}{36}\right]^n =$$

$$= \frac{4}{36}\cdot\frac{1}{1-27/36} = \cancel{\frac{4}{36}\cdot\frac{1}{1-3/4}} = \boxed{\cancel{\frac{4}{36}\cdot\frac{1}{3/4} = \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{27}}}$$

$$= \frac{4}{36}\cdot\frac{1}{9/36} = \frac{4}{\cancel{36}}\cdot\frac{\cancel{36}}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

4) Seja X: "tempo de gestação"

Acusado:



Para o acusado ser o pai, a fecundação ocorreu antes ou depois da viagem, ou seja, a gestação durou mais de 290 dias ou menos de 50 dias:

$$P(X > 290 \text{ ou } X < 50) = P(X > 290) + P(X < 50) =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{290-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{290-270}{10}\right) + P\left(Z < \frac{50-270}{10}\right) =$$

$$= P(Z > 2) + P(Z < -22) = (1 - P(Z < 2)) + P(Z < -22) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 + 0 = \boxed{0{,}0228}$$

5) : Uma moeda de 10 centavos é lançada repetidamente até aparecer uma cara. Seja N o nº de tentativas até que a primeira cara ocorra. Então, uma moeda de 5 centavos é lançada N vezes. Seja X o nº de vezes que a moeda de 5 centavos saiu como coroa. a) Determine $P(X=0)$.

Temos: N: "nº de tentativas até aparecer uma cara"

$$= (1-p)^{n-1} \cdot p$$

$$P(N=n) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \underbrace{\underline{R}\ \underline{R}\ \underline{R} \ldots \underline{R}\ \underline{R}\ \underline{C}}_{n}$$

Seja: X: "nº de vezes que a moeda de 5 centavos sai como cara dado n lançamentos"

$$P(X=x \mid N=n) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad x=0,1,\ldots,n$$

Para calcular $P(X=x)$:

$$P(X=x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=x \mid N=n)\,P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=x, N=n)$$

↳ x caras em n lançamentos

Para $P(X=0)$:

$$P(X=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=0 \mid N=n)\,P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-0)!\,0!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{1}{3} \quad \therefore \boxed{P(X=0) = \frac{1}{3}}$$

b) Determine $P(X=1)$

$$P(X=1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=1 \mid N=n) P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Mas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \text{derivando com relação a } x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{+1}{(1-x)^2}$$

$\downarrow$ multiplicando por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{+x}{(1-x)^2}$$

Logo:

$$P(X=1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{1/4}{(1-1/4)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \boxed{P(X=1) = \frac{4}{9}}$$

6 $P(|\hat{p}-p|<0{,}01)=$

$$=P(-0{,}01<\hat{p}-p<0{,}01)=$$

$$=P\left(\frac{-0{,}01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)=$$

$$=P\left(\frac{-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{10}}}<Z<\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{10}}}\right)=$$

$$=P(-0{,}07<Z<0{,}07)=$$

$$=P(Z<0{,}07)-P(Z<-0{,}07)=\boxed{0{,}056}$$

7) Usando a definição da função geratriz de momentos:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n$$

pela independência de X e Y

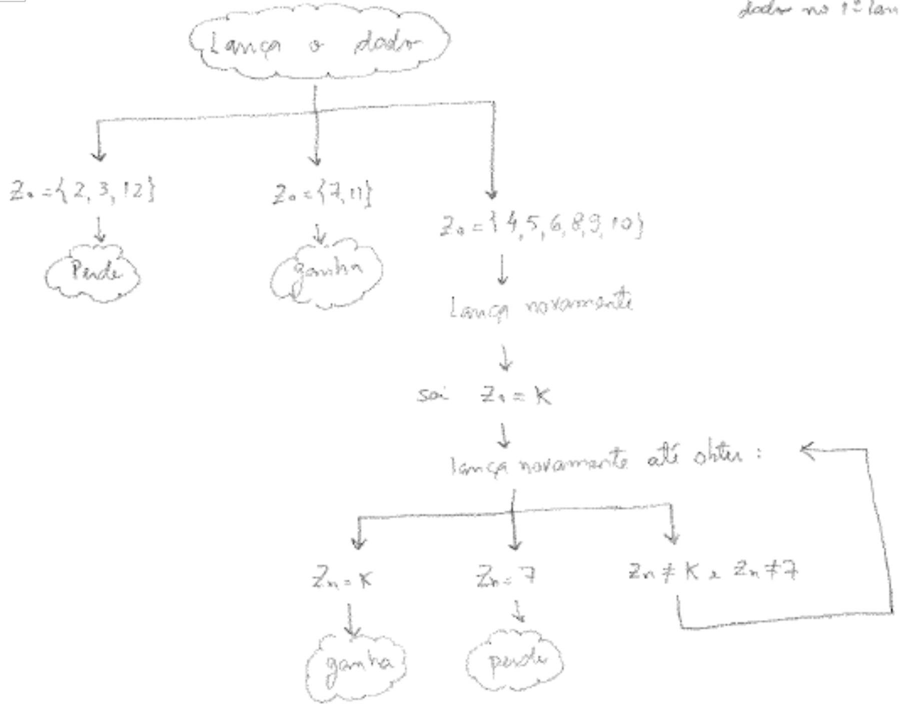
Assim:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t) = (pe^t + 1 - p)^{n+m}$$

8) - Em um jogo, dois dados são lançados e a soma de suas faces superiores são observadas. Se a soma resulta nos valores 2, 3 ou 12, o jogador perde imediatamente. Se a soma é 7 ou 11, o jogador vence. Por outro lado, se a soma é 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, então outro lançamento é necessário. No caso da soma ser igual 4, por exemplo, o dado é lançado até que a soma igual a 4 reapareça ou até que a soma igual a 7 seja observada. Se a soma igual a 4 aparece primeiro, o jogador vence. Se aparece a 7, ele perde. Considerando essa regra, qual é a probabilidade do jogador vencer? (Dica, ver seção 2 do capítulo 2 do livro texto (Taylor e Karlin)).

Vamos montar um fluxograma do problema:

Z_0: saída do dado no 1º lançamento



Se os dados são justos, os valores possíveis

K	2 ↗ (1,1)	3 ↗ (1,2) (2,1)	4	5	6	7	8	9	10	11 ↗ (5,6) (6,5)	12 ↗ (6,6)
$P_Z(K=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Seja o evento: $\boxed{A: \text{"o jogador vence"}}$

Temos os casos:

i) $Z_0 = 2, 3, 12 \rightarrow P(A \mid Z_0 = k) = 0$ se $k = 2, 3, 12$

ii) $Z_0 = 7$ ou $11 \rightarrow P(A \mid Z_0 = k) = 1$ se $k = 7, 11$

iii) $Z_0 = 4,5,6,8,9,10 \rightarrow P(A \mid Z_0 = k) = \alpha$ se $k = 4,5,6,8,9,10$

Usando a lei da prob total.

$$P(A) = \sum_{k=2}^{12} P(A|Z_0 = k) P(Z_0 = k) =$$

$$= \underbrace{P(A|Z_0=2)}_{0} P(Z_0=2) + \underbrace{P(A|Z_0=3)}_{0} P(Z_0=3) + \underbrace{P(A|Z_0=4)}_{\alpha} P(Z_0=4) +$$

$$+ \underbrace{P(A|Z_0=5)}_{\alpha} P(Z_0=5) + \underbrace{P(A|Z_0=6)}_{\alpha} P(Z_0=6) + \underbrace{P(A|Z_0=7)}_{1} P(Z_0=7) +$$

$$+ \underbrace{P(A|Z_0=8)}_{\alpha} P(Z_0=8) + \underbrace{P(A|Z_0=9)}_{\alpha} P(Z_0=9) + \underbrace{P(A|Z_0=10)}_{\alpha} P(Z_0=10) +$$

$$+ \underbrace{P(A|Z_0=11)}_{1} P(Z_0=11) + \underbrace{P(A|Z_0=12)}_{0} P(Z_0=12)$$

$\therefore$

$$P(A) = \alpha \Big(P(Z_0=4) + P(Z_0=5) + P(Z_0=6) + P(Z_0=8) + P(Z_0=9) + P(Z_0=10) \Big) +$$

$$+ P(Z_0=7) + P(Z_0=11)$$

No entanto, precisamos encontrar o valor de α. Usando a lei da prob total:

$$\alpha = P(A|Z_0=k) = \sum_{j=2}^{12} P(A|Z_0=k, Z_1=j) P(Z_1=j) =$$

$$= \underbrace{P(A|Z_0=k, Z_1=k)}_{1} P(Z_1=k) + \underbrace{P(A|Z_0=k, Z_1=7)}_{0} P(Z_1=7) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k \\ j\neq 7}}^{12} \underbrace{P(A|Z_0=k, Z_1=j)}_{\substack{\alpha \\ \downarrow \\ \text{repete o lançamento}}} P(Z_1=j)$$

$$\alpha = P(Z_1=k) + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k \\ j\neq 7}}^{12} \alpha P(Z_1=j) = P(Z_1=k) + \alpha \Big[1 - \big(P(Z_1=k) + P(Z_1=7) \big) \Big]$$

$$\alpha - \alpha\left[1-\left(P(Z_1=k)+P(Z_1=7)\right)\right] = P(Z_1=k)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{P(Z_1=k)}{P(Z_1=k)+P(Z_1=7)}}$$

Substituindo em $P(A)$:

$$P(A) = \sum_{k=2}^{12} P(A|Z_0=k)\,P(Z_0=k) = \sum_{\substack{k=4,5,6,\\8,9,10}} \frac{P(Z_1=k)}{P(Z_1=k)+P(Z_1=7)} \cdot P(Z_0=k) =$$

$$= \sum_{\substack{k=4,5,6,\\8,9,10}} \frac{\left(P(Z=k)\right)^2}{P(Z=k)+P(Z=7)}$$

pois $P(Z_0=k) = P(Z_1=k) = P(Z=k)$

$\downarrow$

a prob. de sair uma soma independe do nº do lançamento.

Usando os valores numéricos: $\rightarrow$ ver a tabela de $P(Z=k)$

$$\boxed{P(A) = 0{,}492929}$$

9)

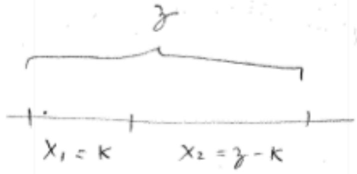
Seja X_1 uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n_1 e p. Seja X_2 uma variável aleatória que também tem distribuição binomial e parâmetros n_2 e p. Sejam X_1 e X_2 independentes.

a) Determine $P(X_1 + X_2 = z)$.

b) Calcula a probabilidade condicional de X_1 dado que $X_1 + X_2 = m$.

a)

Determine $P(X_1 + X_2 = z)$.



Temos:

$$P(X_1 + X_2 = z) = \sum_{k=0}^{z} P(X_1 = k \mid X_2 = z-k)\, P(X_2 = z-k) =$$

independente

$$= \sum_{k=0}^{z} P(X_1 = k)\, P(X_2 = z-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{n_2-z+k} =$$

$$= p^z (1-p)^{n_1+n_2-z} \underbrace{\sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{z-k}}_{\binom{n_1+n_2}{z}}$$

identidade de Vandermond

$$\therefore \boxed{P(X_1 + X_2 = z) = \binom{n_1+n_2}{z} p^z (1-p)^{n_1+n_2-z}}$$

b)

Temos:

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \frac{P(X_1 = k,\ X_1 + X_2 = m)}{P(X_1 + X_2 = m)} =$$

$$= \frac{P(X_1 = k,\ X_2 = m-k)}{P(X_1 + X_2 = m)} = \frac{P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = m-k)}{P(X_1 + X_2 = m)} =$$

$$= \frac{\binom{n_1}{k} \cancel{p^{k}} \cancel{(1-p)^{n_1-k}} \cdot \binom{n_2}{m-k} \cancel{p^{m-k}} \cancel{(1-p)^{n_2-m+k}}}{\binom{n_1+n_2}{m} \cancel{p^{m}} \cancel{(1-p)^{n_1+n_2-m}}} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}}{\binom{n_1+n_2}{m}}$$

$$\therefore \quad P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}}{\binom{n_1+n_2}{m}}$$

$\hookrightarrow$ dist. hipergeométrica!

10) Vamos primeiro calcular a prob usando condicionais.

Seja E um evento qualquer e X a r.a onde:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se } E \text{ ocorre} \\ 0 & \text{se } E \text{ não ocorre} \end{cases}$$

X	0	1
$P(X=x)$	$1-P(E)$	$P(E)$

Assim:

$$E(X) = 1 \cdot P(E) + 0 \cdot P(\bar{E}) = P(E)$$

e

$$E(X \mid Y=y) = 1 \cdot P(E \mid Y=y) + 0 \cdot P(\bar{E} \mid Y=y)$$

$$\boxed{E(X \mid Y=y) = P(E \mid Y=y)}$$

Usando:

Lei da esperança total $E(X) = \sum_y E(X|Y)\, P(Y=y)$

$$E(X) = E[\underbrace{E(X|Y)}_{g(Y)}] = \sum_y \overbrace{E(X \mid Y=y)}^{\text{função de } Y} P(Y=y) \rightarrow \text{caso discreto}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E(X \mid Y=y)\, f_Y(y)}_{h(y)}\, dy \rightarrow \text{caso contínuo}$$

Temos:

$$E(X) = P(E) = \begin{cases} \sum_y \overbrace{P(E \mid Y=y)}^{E(X|Y=y)} P(Y=y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(E \mid Y=y)\, f_Y(y)\, dy \end{cases}$$

então:

$$P(E) = \begin{cases} \sum_y P(E \mid Y=y)\, P(Y=y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(E \mid Y=y)\, f_Y(y)\, dy \end{cases}$$

Voltando à demonstração:

$g(x) \rightarrow$ Como X_1 e X_2 são indep.: $f_X(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$

$$P(X_1 < X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\underbrace{X_1 < X_2}_{E} \mid X_1 = x) f_{X_1}(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(x < X_2)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 > x)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx$$

Mas:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Assim:

$$P(X_1 < X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx = \lambda_1 \int_{0}^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x}\, dx =$$

$$= \lambda_1 \cdot \left. \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x}}{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \right|_0^{\infty} = \lambda_1 \left(0 + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

$\therefore$

$$\boxed{P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$