Alguns exercícios resolvidos de variáveis aleatórias

Duas bolas são escolhidas aleatoriamente e sem reposição de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 bolas pretas e 2 bolas laranja. Suponha que nós ganhamos R$ 2,00 para cada bola preta selecionada e perdemos R$ 1,00 para cada bola branca selecionada. Seja X a variável aleatória que denota nossos ganhos. Quais são os possíveis valores de X e as probabilidades associadas a cada valor?

8 B
4 P
2 L

14 bolas

URNA

bola preta retirada ⇒ + R$ 2
bola branca retirada ⇒ − R$ 1
bola laranja retirada ⇒ R$ 0.

Seja a v.a. : X : "ganhos"

Seleciona-se duas bolas. Os resultados possíveis:

$$\Omega = \{ (B,P), (B,L), (P,B), (P,L), (L,B), (L,P), (B,B), (P,P), (L,L) \}$$

As saídas e os possíveis ganhos:

saída	X	Prob.
(B, B)	−2	$8/14 \cdot 7/13$
(B, P)	1	$8/14 \cdot 4/13$
(B, L)	−1	$8/14 \cdot 2/13$
(P, B)	1	$4/14 \cdot 8/13$
(P, P)	4	$4/14 \cdot 3/13$
(P, L)	2	$4/14 \cdot 2/13$
(L, B)	−1	$2/14 \cdot 8/13$
(L, P)	2	$2/14 \cdot 4/13$
(L, L)	0	$2/14 \cdot 1/13$

logo, a dist. de prob. da v.a. X:

X	−2	−1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{182}$	$\frac{32}{182}$	$2/182$	$\frac{64}{182}$	$8/182$

Morettin (Estatística Básica, pag. 61)

2. Suponhamos que a variável aleatória X tenha função de probabilidade dada por:

$$P(X = j) = \frac{1}{2^j},\ j = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Calcular:

a) $P(X$ ser par);

b) $P(X \geq 3)$;

c) $P(X$ ser múltiplo de 3).

Resolução:

X	1	2	3	4	5	...	
P(X)	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	...	1

a) $P(X$ ser par$) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \ldots =$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ \ldots \ = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

b) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots =$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ \ldots \ = \frac{1/8}{1 - 1/2} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} \quad \text{ou}$$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 1) + P(X = 2)\} =$

$$= 1 - \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right\} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) $P(X$ ser múltiplo de 3$) = P(X = 3) + P(X = 6) + \ldots =$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/8}{1 - 1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

Sheldo Ross, Probabilidades, pag. 155

Exemplo 1d

Três bolas são sorteadas de uma urna contendo 3 bolas brancas, 3 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Suponha que ganhemos R$ 1,00 por cada bola branca sorteada e percamos R$ 1,00 para cada bola vermelha sorteada. Se R representa nosso total de vitórias no experimento, então X é uma variável aleatória que pode ter valores 0, ± 1, ± 2, ± 3 com respectivas probabilidades

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{55}{165}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165}$$

$$P\{X = 2\} = P\{X = -2\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165}$$

$$P\{X = 3\} = P\{X = -3\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165}$$

Essas probabilidades são obtidas, por exemplo, notando-se que para que X seja igual a 0, ou todas as 3 bolas selecionadas devem ser pretas, ou 1 bola de

cada cor deve ser selecionada. Similarmente, o evento $\{X = 1\}$ ocorre se 1 bola branca e 2 pretas forem selecionadas ou se 2 bolas brancas e 1 vermelha forem selecionadas. Como verificação, notamos que

$$\sum_{i=0}^{3} P\{X = i\} + \sum_{i=1}^{3} P\{X = -i\} = \frac{55 + 39 + 15 + 1 + 39 + 15 + 1}{165} = 1$$

A probabilidade de ganharmos algum dinheiro é dada por

$$\sum_{i=1}^{3} P\{X = i\} = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}$$

■

Sheldo Ross, página 159

Exemplo 2a

A função de probabilidade de uma variável X é dada por $p(i) = c\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, onde λ é algum valor positivo. Determine (a) $P\{X = 0\}$ e (b) $P\{X > 2\}$.

Solução Como $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$, temos

$$c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

o que, como $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, implica

$$ce^{\lambda} = 1 \text{ ou } c = e^{-\lambda}$$

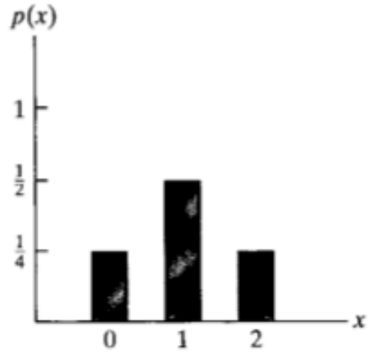

Figura 4.1

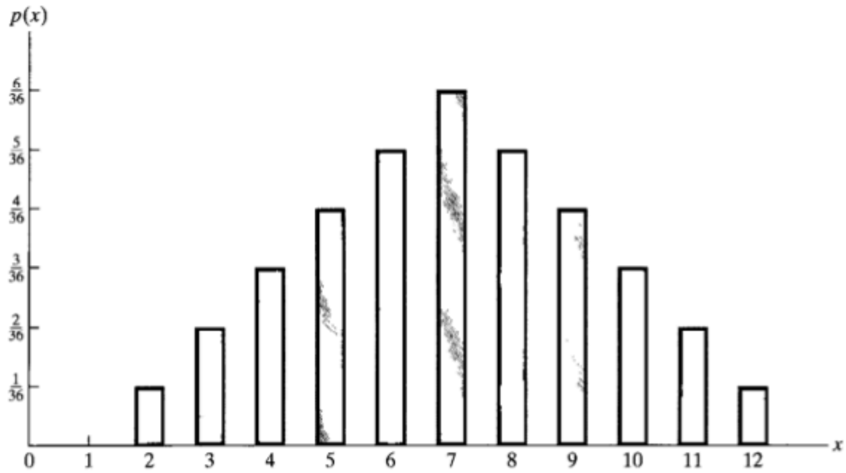

Figura 4.2

Com isso,

(a) $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}\lambda^0/0! = e^{-\lambda}$

(b) $P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

■

Sheld Ross, página 234

Exemplo 1b

A quantidade de tempo em horas que um computador funciona sem estragar é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Qual é a probabilidade de que

(a) o computador funcione entre 50 e 150 horas antes de estragar?
(b) ele funcione menos de 100 horas?

Solução (a) Como

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-x/100}\,dx$$

obtemos

$$1 = -\lambda(100)e^{-x/100}\Big|_0^{\infty} = 100\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{100}$$

Portanto, a probabilidade de que um computador funcione entre 50 e 150 horas antes de estragar é dada por

$$\begin{aligned} P\{50 < X < 150\} &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100}\,dx = -e^{-x/100}\Big|_{50}^{150} \\ &= e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0{,}384 \end{aligned}$$

(b) Similarmente,

$$P\{X < 100\} = \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100}\,dx = -e^{-x/100}\Big|_{0}^{100} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}633$$

Em outras palavras, em aproximadamente 63,3% das vezes um computador estragará antes de 100 horas de uso. ■