Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

Introdução à Teoria das Probabilidades
Professor: Francisco A. Rodrigues

Prova final

Questão 1 (1 ponto) Um jogador tem duas moedas no seu bolso, sendo uma justa e uma com duas caras.
a) Ele seleciona uma moeda de forma aleatória, lança a moeda e sai cara. Qual é a probabilidade da moeda ser justa?
b) Ele lança a mesma moeda novamente e sai cara. Qual é a probabilidade da moeda ser justa?
c) Ele lança a mesma moeda pela terceira vez e sai coroa. Qual é a probabilidade da moeda ser justa?

Questão 2 (1 ponto) Se a variável aleatória K for uniformemente distribuída em $[0,5]$, qual será a probabilidade de que as raízes da equação $8x^2+8xK+2K+4=0$ sejam reais?

Questão 3 (1 ponto) Dois dados são lançados independentemente. Seja X a variável aleatória que representa a soma das faces dos dados. Qual é a probabilidade de que a soma igual a 9 apareça antes da soma igual a 8?

Questão 4 (1 ponto) Um médico especializado em gestação afirma que a duração do tempo gestacional humano (em dias) é normalmente distribuído com média 270 e variância 100. Em uma audiência em um tribunal, o acusado de ser o pai de uma criança afirma que ele estava fora do país por um período que começou 290 dias antes do nascimento e terminou 240 dias antes do nascimento. Qual é a probabilidade de que o acusado seja o pai?

Questão 5 (1 ponto) Uma moeda de dez centavos é lançada repetidamente até que uma cara aparece. Seja N o número de tentativas até que a primeira cara ocorra. Então, uma moeda de 5 centavos é lançada N vezes. Seja X o número de vezes que a moeda de cinco centavos sai como coroa. Determine $P(X=0)$ e $P(X=1)$.

Questão 6 (1 ponto) Suponha que $p=30\%$ dos estudantes de uma escola sejam mulheres. Colhemos uma amostra de $n=10$ estudantes e calculamos a proporção de mulheres na amostra, representada por $\hat{p}$. Qual é a probabilidade de que $\hat{p}$ difira de p em menos de 0,01?

Questão 7 (1 ponto) Seja $X \sim \text{Bin}(m,p)$ e $Y \sim \text{Bin}(n,p)$. Determine a função geratriz de momentos de $Z=X+Y$.

Questão 8 (1 ponto) Em um jogo, dois dados são lançados e a soma de suas faces superiores são observadas. Se a soma resulta nos valores 2, 3 ou 12, o jogador perde imediatamente. Se a soma é 7 ou 11, o jogador vence. Por outro lado, se a soma é 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, então outro lançamento é necessário. No caso da soma ser igual 4, por exemplo, o dado é lançado até que a soma igual a 4 reapareça ou até que a soma igual a 7 seja observada. Se a soma igual a 4 aparece primeiro, o jogador vence. Se aparece a 7, ele perde. Considerando essa regra, qual é a probabilidade do jogador vencer?

Questão 9 (1 ponto) Seja X_1 uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n_1 e p. Seja X_2 uma variável aleatória que também tem distribuição binomial e parâmetros n_2 e p. Sejam X_1 e X_2 independentes.
a) Determine $P(X_1+X_2=z)$.
b) Calcula a probabilidade condicional de X_1 dado que $X_1+X_2=m$.

Questão 10 (1 ponto) Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com médias $1/\lambda_1$ e $1/\lambda_2$, respectivamente. Mostre que:

$$P(X_1<X_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

ATENÇÃO: Respostas sem os devidos desenvolvimentos não serão consideradas. Enuncie claramente os eventos, as variáveis aleatórias e os passos das soluções.