

## Exàmen Sage

**Codi:** En tots els exercicis,  $\Delta$  = l'últim dígit del vostre NIU.

Per exemple, si el vostre NIU és 1246513, aleshores  $\Delta = 3$ .

1. Considereu el següent sistema d'equacions lineals en funció d'un paràmetre  $a$ :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = \Delta \end{cases}$$

- (a) (0.5 punts) Doneu la matriu associada al sistema d'equacions anterior.
- (b) (0.5 punts) Doneu la matriu del sistema normal de Gauss-Jordan associat al sistema, (depenent dels valors de  $a$ ).
- (c) (1.5 punt) Discutiu per a quins valors de  $a$  el sistema d'equacions no té solucions, només en té una, o en té infinites.

2. Considereu els  $\mathbb{R}$ -subespais vectorials següents:

$$F = \langle (2, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (-2, 3, -2, 1), (-4, -4, 2, 0) \rangle$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \Delta x + 2y + z = 0, \Delta x + z - t = 0\}$$

- (a) (1.5 punts) Trobeu una base i la dimensió pels subespais vectorials  $F$ ,  $G$  i  $F \cup G$ .
- (b) (1 punt) És cert que  $G \subseteq F$ ? i que  $F \subseteq G$ ?

3. (1.5 punts) Calculeu una PAQ-reducció de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ \Delta & -1 & -3 & 2 \\ -3 & \Delta & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Doneu les matrius P, Q i PAQ.

4. Considereu la següent matriu:

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 3 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.5 punts) Calculeu el polinomi característic de la matriu  $M$ .
- (b) (0.5 punts) Trobeu els valors propis de  $M$ .
- (c) (1 punt) Trobeu els vectors propis de  $M$  segons  $b$ .
- (d) (1.5 punts) Discutiu segons els valors de  $b$  si la matriu  $M$  diagonalitza.