Mètodes Algebraics per a l’Estadística

Grau d’Estadística Aplicada

Espais vectorials

Consideracions inicials

Per tal de treballar amb *vectors* amb **SAGEMATH** cal introduir els objectes amb la instrucció vector( ) així el programa pot reaccionar *correctament* a les manipulacions que es vulguin fer amb aquest tipus d'objectes. Si proveu les intruccions que apreixen a continuació veureu com **SAGEMATH** sap que s'està treballant amb vectors d'un espai vectorial i realitza correctament les operacions bàsiques.

In [ ]:
```
v=vector(QQ,[1,0,2,-1,2]) # és convenient especificar que cal entendre
w=vector(QQ,[0,-1,1,2,1]) # tots els coeficients com a racionals
                          # altrament poden aparèixer resultats inespe
show(v)
show(w)
print v ,"és un element de:", v.parent()
show(v.parent())
```

In [ ]:
```
v+w
```

In [ ]:
```
2*v
```

In [ ]:
```
-w
```

In [ ]:
```
2*v-3*w
```

Nota important: Observeu que els vectors es representen com a ***files***. Això no és cap inconvenient ni necessita manipulacions especials quan es volen fer multiplicacions per matrius ja que el programa tindrà en compte com cal interpretar cada objecte segons quina operació es plantegi (si és que té sentit).

In [ ]:
```
A=matrix(QQ,2,2,[4,1,-2,3])
var('a b')
v=vector([a,b])
show(v)
show(A)
show(A*v)
show(v*A)
B=matrix(QQ,2,3,[1,2,3,3,2,1])
show(B)
show(v*B)
```

In [ ]:
```
B*v # aquesta operació no té sentit. v només té 2 coeficients i en cal
```

Espai generat per una família de vectors:

Si es vol treballar amb l'espai vectorial generat per uns quants vectors, la instrucció que construeix el subespai vectorial corresponent és span( ). Un cop definit un espai vectorial d'aquesta manera es pot comprovar directament si un vector en forma pert o no.

In [ ]:
```
V=span(QQ,[[1,2,1],[2,0,1],[-1,2,0],[3,2,2]])
```

In [ ]:
```
show(V) # En el moment de definir V ja s'eliminen generadors inncessar
```

In [ ]:
```
v=vector([1,2,3])
show(v)
```

In [ ]:
```
v in V
```

In [ ]:
```
w=vector([20,-4,9])
```

In [ ]:
```
w in V
```

Solucions d'un sistema d'equacions homogeni:

Alternativament, també es pot determinar un (sub)espai vectorial com la solució d'un cert sistema d'equacions lineals. Utilitzant la matriu del sistema podem obtenir fàcilment, com objecte de tipus *espai vectorial*, l'espai vectorial corresponent. A continuació hi ha un exemple simple.

In [ ]:
```
var('y z t')
equacions=[
    x-y+t==0,
    x+y+z+t==0
]
# show(equacions)
coeficients=[
    [
        eq.lhs().coefficient(v)
        for v in [x,y,z,t]
    ]
    for eq in equacions
]
# show(coeficients)
A=matrix(QQ,coeficients)
show(A)
```

In [ ]:
```
W=A.right_kernel()
show(W)
W
```

In [ ]:
```
G=W.basis() # basis() dona una família independent de generadors de l'
show(G)     #
```

In [ ]:
```
show(A*G[0]) # Les multiplicacions permeten comprovar que els dos vect
show(A*G[1]) # de la llista G són de l'espai vectorial que s'està cons
```

Exercicis

Comproveu si els vectors

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (-1,\ -1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v}_2 &= (1,\ -3,\ -4,\ 11) \\ \vec{v}_3 &= (1,\ -1,\ -2,\ 5) \\ \vec{v}_4 &= (0,\ 1,\ 1,\ -3) \end{aligned}$$

són linealment independents entre si o no. Com que resulta que no ho són, expresseu cada un d'ells com una combinació lineal dels altres. (Probablement, la millor estrtègia consisteix a trobar com són les combinacions lineals de la família que donen com a resultat el vector $\vec{0}$).

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

Considereu l'espai vectorial V que generen els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ *fabricats* amb les instruccions

In [63]:
```
v1 =vector(QQ, [7, 4, -16, 5, -35] )
v2 =vector(QQ, [-2, -1, 5, -2, 10] )
v3 =vector(QQ, [4, 4, -5, -3, -21] )
v4 =vector(QQ, [-3, -5, -1, 9, 17] )
v5 =vector(QQ, [1, 2, 1, -4, -6] )
```

Comproveu que el vector $\vec{v} = (-4, 1, 9, -6, 10)$ és un vector de V i, a més, doneu una combinació lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ que doni com a resultat aquest vector.

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

Sigui V l'espai vectorial formats pels $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tals, que

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

- Comproveu que el vector $\vec{v} = (-2, 6, -5, -8)$ és de V i que $\vec{w} = (1, 1, 3, -1)$ no.
- Doneu un sistema de generadors de V.

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: