Mètodes Algebraics per a l'Estadística

Grau d'Estadística Aplicada

Inverses generalitzades

Considereu la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comproveu que no és invertible calculant el seu rang (surt 4).
2. Utilitzeu pseudoinverse( ) per obtenir una inversa generalitzada G de A.
3. Comproveu que el producte $A \cdot G \cdot A$ dona com a resultat la matriu A (com correspon a una inversa generalitzada).

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

La matriu inversa generalitzada, tot i que sempre existeix, no és única. En general, donada una matriu A, hi pot haver vàries matrius G tals que $A \cdot G \cdot A = A$. Recordeu que una manera d'obtenir inverses generaitzades G consisteix a aprofitar les matrius P i Q que apareixen quan es fa la reducció per files i columnes de la matriu A ($P \cdot A \cdot Q = R$ on R és la forma reduida per files i columnes de A).

Recordeu en primer lloc que extended_echelon_form( ) permet obtenir en un sol càlcul la forma reduida per files A_rf i la matriu corresponent P separant en dues matrius el resultat utilitzant matrix_from_columns( )

In [ ]:
```
A_rf=A.extended_echelon_form().matrix_from_columns([0..4])
P=A.extended_echelon_form().matrix_from_columns([5..9])
```

In [ ]:

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Un cop s'ha reduit per files es pot calcular la matriu Q de reducció per columnes fent el mateix procès (reducció per files) a la matriu transposada de A_rf per tal d'obtenir, tranposant els resultats d'aquest operació, la matriu reduida per files i columnes A_rfc i la matriu Q tals que P·A·Q=A_rfc. Quan s'arriba a aquest punt la matriu G_r=Q·A_rfc·P és un inversa generalitzada (no s'ha de fer res més perquè la matriu original és quadrada).

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Si no voleu fer tantes transposicions, es pot fer directament la reducció per columnes. Encara que no hi ha una funció equivalent a extended_echelon_form( ) es pot treballar per columnes amb add_multiple_of_column( ), swap_columns( ), rescale_column( ) sobre la matriu construida per blocs posant una matriu identitat *sota* A_rf

```
In [ ]: AI=block_matrix(2,1,[A_rf,identity_matrix(5)])
```

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Separant al final de la reducció la *part de sobre* que contindrà A_rfc de la *part de sota* que serà la matriu Q.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Comproveu que G_r és realment una inversa generalitzada fent el producte A·G_r·A i veient que coincideix amb A.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

x--x

Determineu les PAQ-reduccions de les matrius

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

i calculeu una inversa generalitzada per a cada una d'elles a partir del càlculs anteriors. Comproveu si aquestes inverses generalitzades coincideixen amb la que dona la funció pseudoinverse( )

Aneu en compte amb el fet que hi ha matrius que no són quadrades

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

x--x

Utilitzeu la matriu inversa generalitzada que heu calculat per a donar les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

No us oblideu de comprovar, prèviament, si el sistema és compatible.

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

Per què, si apliqueu el mateix mètode al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i dieu S al vector que apareix, resulta que

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \cdot S \neq \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: